

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**ÇOK DEĞİŞKENLİ BAĞIMLI RİSKLERİN MODELLENMESİ VE OPTİMAL
AKTUERYAL KARARLAR**

Emel KIZILOK

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2010**

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Emel KIZILOK tarafından hazırlanan “Çok Değişkenli Bağımlı Risklerin Modellenmesi ve Optimal Aktüeryal Kararlar” adlı tez çalışması 26/02/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Ömer L. GEBİZLİOĞLU

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Hamza GAMGAM
Gazi Üniversitesi İstatistik ABD

Üye: Prof. Dr. Ayşen DENER AKKAYA
ODTÜ İstatistik ABD

Üye: Prof. Dr. Fahrettin ARSLAN
Ankara Üniversitesi İstatistik ABD

Üye: Doç. Dr. Birdal ŞENOĞLU
Ankara Üniversitesi İstatistik ABD

Üye: Prof. Dr. Ömer L. GEBİZLİOĞLU
Ankara Üniversitesi İstatistik ABD

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Orhan ATAKOL
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

ÇOK DEĞİŞKENLİ BAĞIMLI RİSKLERİN MODELLENMESİ VE OPTİMAL AKTUERYAL KARARLAR

Emel KIZILOK

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ömer L.GEBİZLİOĞLU

Bu çalışmada, belli bir zaman aralığında maksimum hasar bilgisini çeşitli olasılık düzeylerinde veren, bu nedenle de risk yönetiminde özellikle sigortacılık ve aktuerya alanında çok kullanılan Riske Maruz Değer (Value at Risk-VaR) ve Koşullu Riske Maruz Değer (Conditional Value at Risk - CVaR) risk ölçümleri ele alınmıştır. Bu risk ölçümleri risklerin bağımlı olduğu durumda değerlendirilmiştir. Bağımlılık yapısı kopula fonksiyonları ile modellenmiştir. Özellikle aktuerya ve finans uygulamalarında kullanılan Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) kopula ailesine uyduğu düşünülen bağımlı iki değişkenli riskler için VaR ve CVaR değerleri elde edilmiştir. Bu amaçla tek değişkenli durumda VaR ve dolayısıyla CVaR risk ölçüsünün, verilen bir güven seviyesi $(1 - p)$ için kuantil noktaya karşılık geldiği düşüncesiyle, iki değişkenli kuzey-güney kuantil noktaları kullanılmıştır. Ele alınan FGM kopula ailesine ait bazı bağımlılık ve kuantil parametre değerleri için elde edilen sonuçlar çizelgeler ve grafiklerle verilmiş ve yorumlanmıştır. Ayrıca, literatürde daha önceden incelenmiş bazı kopula ailelerine ilişkin parametre tahmin yöntemlerinden de genel olarak bahsedilmiştir.

Şubat 2010, 129 sayfa

Anahtar Kelimeler: Risk ölçümleri, komonotonluk, kopulalar, kopula parametre tahmini, iki değişkenli kuzey-güney kuantiller

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

MODELING OF MULTIVARIATE DEPENDENT RISKS AND OPTIMAL ACTUARIAL DECISIONS

Emel KIZILOK

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Ömer L.GEBİZLİOĞLU

In this thesis, the risk measures of Value at Risk (VaR) and Conditional Value at Risk (CVaR), which provide an information about the maximum claim amounts that can be realized within a specific time duration for a probability level , are evaluated for dependent risks. Copula models are adopted in order to explain the dependence between random risk variables. For this purpose, bivariate north south quantile points method is used for the determination of VaR and CVaR. These risk measures are evaluated for Farlie-Gumbel- Morgenstern (FGM) copula family in a set up of actuarial and financial applications. The numerical quantities of the risk measures under several copula parameters and quantile values are shown by tables and graphics with interpretations. Furthermore, some methods of copula parameter estimation for some copula families are briefly explained.

February 2010, 129 pages

Key Words: Risk measures, comonotonicity, copulas, copula parameter estimation, bivariate north-south quantiles

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans ve Doktora öğrenimim boyunca, çalışmamın her aşamasında, bilgi, öneri ve yardımları ile beni yönlendiren, desteğini esirgemeyen sevgili danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Ömer L. GEBİZLİOĞLU (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü)'na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışmamın oluşması aşamasında yardımlarını gördüğüm değerli Tez İzleme Komitesi üyeleri olan Doç. Dr. Birdal ŞENOĞLU(Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü) ve Prof Dr. Ayşen Dener AKKAYA (ODTÜ Fen Fakültesi İstatistik Bölümü)'ya ayrıca çalışmamızın bir kısmında tez komite üyesi olarak fikir ve görüşlerini paylaşan sayın Prof. Dr. Dolun ÖKSOY (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü)'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bilimsel çalışmaların yanında her aşamada pratik çözümleriyle bir hoca, bir arkadaş olarak gönülden destek olan Sayın Yrd. Doç. Dr. Fatih TANK (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü)'a ve çalışmalarım süresince birçok fedakarlıklar göstererek büyük bir sabırla beni destekleyen aileme tüm kalbimle teşekkür ederim.

Emel KIZILOK

Ankara, Şubat 2010

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	xi
1. GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	1
1.1 Giriş.....	1
1.2 Önceki Çalışmalar.....	3
2. RİSK ÖLÇÜMLERİ.....	4
2.1 Risk Ölçümleri ve Özellikleri.....	5
2.2 Bir Risk Ölçüsünde İstenen Özellikler.....	6
2.2.1 Aşırı olmayan yükleme.....	6
2.2.2 Negatif olmayan yükleme.....	6
2.2.3 Geçişlilik.....	6
2.2.4 Sabitlik (Gerekçelendirilmemiş yükleme).....	7
2.2.5 Alttoplamsallık.....	7
2.2.6 Komonotonik toplamsallık.....	7
2.2.7 Pozitif homojenlilik.....	8
2.2.8 Monotonluluk.....	8
2.2.9 Dağılımda yakınsamaya göre süreklilik.....	8
2.2.10 Nesnellik.....	9
2.3 Uyumlu (Coherent) Risk Ölçümleri.....	9
2.3.1 Risk ölçüsüne dayalı parasal sermaye.....	9

2.4 Riske Maruz Değer - Value at Risk (VaR).....	10
2.4.1 VaR özellikleri.....	11
2.4.2 VaR sigorta şirketleri için gerekli en iyi anaparayı belirler.....	12
2.4.3 VaR'a dayalı parasal sermaye.....	13
2.4.4 VaR ve sermaye varlığı fiyatlandırma modeli	14
2.5 Kuyruk Riske Maruz Değer – Tail VaR (TVaR).....	15
2.5.1 Bazı ilişkili risk ölçümleri.....	15
2.5.2 TVaR özellikleri.....	18
2.6 Komonotonluk ve Üst Komonotonluk.....	20
2.6.1 Komonotonluk.....	20
2.6.2 Üst komonotonluk.....	22
2.7 Risk Ölçümleri, Komonotonluk ve Üst Komonotonluk	23
3. KOPULALAR	28
3.1 Kopulalarla İlgili Temel Bilgiler.....	28
3.1.1 Sklar teoremi	30
3.1.2 Kopulalara ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonları	30
3.1.3 Kopulalardan çıkarılan koşullu dağılımlar	31
3.1.4 Frechet sınırları	32
3.2 Kopulaların Özellikleri.....	33
3.2.1 Yaşam (Survival) kopulaları	33
3.2.2 Dual ve ortak kopulalar	34
3.2.3 Fonksiyonel değişmezlik	35
3.2.4 Kuyruk bağımlılığı	35
3.2.5 Komonotonik kopula	36
3.3 Önemli Kopulalar	37
3.3.1 Eliptik kopulalar	37

3.3.2 Arşimedyan kopulalar	39
3.3.3 Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) kopula ailesi	42
3.3.3 Marshal-Olkin kopulalar	42
3.4 Kopulalar Yoluyla Simülasyon.....	43
3.4.1 Eliptik kopulalar için simülasyon yöntemleri	43
3.4.2 Arşimedyan kopulalar için simülasyon yöntemleri	44
3.4.3 İki değişkenli simülasyon örnekleri	50
3.5 Sıra Sayılarına Dayalı Bazı Bağımlılık Katsayıları.....	54
3.5.1 Spearman'ın ρ katsayısı	54
3.5.2 Kendall'in τ katsayısı	55
4. PARAMETRE TAHMİN YÖNTEMLERİ	57
4.1 Parametrik Yöntemler.....	57
4.1.1 En çok olabilirlik yöntemi (MLE).....	57
4.2.2 Marjinaler İlişkin Çıkarsama Fonksiyonları (IFM)	58
4.2 Yarı Parametrik Yöntemler.....	59
4.2.1 En çok sözde olabilirlik yöntemi (MPE)	59
4.3 Parametrik Olmayan Yöntemler.....	61
4.3.1 Kendall'in τ' suna dayalı tahmin (KTE)	61
4.3.2 Spearman'ın ρ' suna dayalı tahmin (SRE).....	62
4.4. Bağımlılığın Modellenmesi (Uygun Kopula Seçimi).....	64
4.4.1 Üstel aileler- Kullback Leibler bilgisi.....	65
4.4.2 Karmaşık aileler- L_2 normu.....	66
5. İKİ DEĞİŞKENLİ KUANTİLLERE DAYALI KOŞULLU RİSKE MARUZ DEĞER.....	69
5.1 İki Değişkenli Kuzey Güney (NS) Kuantil Noktaları	70
5.1.1 Bazı kopulalar için iki değişkenli kuantiller.....	71
5.2 Çok Değişkenli Koşullu Riske Maruz Değer.....	78

5.2.1 İki değişkenli N-S kuantil noktalarına dayalı koşullu riske maruz değer	79
5.2.2 Örnek senaryolar	99
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	102
KAYNAKLAR	105
EKLER	110
Ek 1 Ters Dağılım Fonksiyonları	111
Ek 2 $\Delta=(b/a)^2-4(c/a)$ için $\Delta>0$ durumunun incelenmesi	113
Ek 3 Yaşam kopulaları ve yaşam fonksiyonları	114
Ek 4 Bölüm 5 için Matlab programları.....	117
Ek 5 Bölüm 5'de elde edilen Çizelgeler	120
ÖZGEÇMİŞ.....	128

SİMGELER DİZİNİ

$X=(X_1, \dots, X_n)$	Rasgele vektör
S	Toplam risk
X^c	Komonotonik rasgele değişken
\tilde{X}^c	Üst komonotonik rasgele değişken
p	Olasılık seviyesi
p_i	i . risk grubuna ait olasılık seviyesi
IP	Olasılık ölçüsü
F_i	Marjinal dağılım fonksiyonu
π	Sınırlı Hasar (Stop-Loss) Fonksiyonu
$m_X(x)$	Arda kalan yaşam fonksiyonu
$S_X(x)$	Yaşam Fonksiyonu
$C(.,.)$	Kopula fonksiyonu
$\bar{C}(.,.)$	Yaşam kopula fonksiyonu
$C^*(.,.)$	Ortak kopula fonksiyonu
$\tilde{C}(.,.)$	C kopulasının duali
$M(.,.)$	Frechet-Hoeffding üst sınırı
$W(.,.)$	Frechet-Hoeffding alt sınırı
α	Kopula bağımlılık parametresi
$\rho[X]$	X portföyünün risk sermayesi
$VaR(.)$	Riske maruz değer
$CVaR(.)$	Koşullu riske maruz değer
$TVaR(.)$	Kuyrukta riske maruz değer
$CTE(.)$	Koşullu kuyruk beklentisi
$ESF(.)$	Beklenen açık

$\xi(\cdot, \cdot)$	İki değişkenli Kuzey-Güney (NS) kuantil noktası
$VaR_\alpha(p_1, p_2)$	İki değişkenli Kuzey Güney (NS) kuantil noktalarına dayalı VaR
$CVaR_\alpha(p_1, p_2)$	İki değişkenli Kuzey Güney (NS) kuantil noktalarına dayalı CVaR
$CVaR_\alpha^i(\cdot, \cdot)$	i . portföye ait α bağımlılık parametrelili bağımlı risk gruplarının i . bileşeni için CVaR

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 $n=2$ için üst komonoton olan rasgele vektörün gösterimi.....	23
Şekil 3.1 İki Değişkenli Gaussian Kopula Simülasyonları	50
Şekil 3.2 İki Değişkenli Student t Kopula Simülasyonları	50
Şekil 3.3 İki Değişkenli Gumbel Kopula Simülasyonları	51
Şekil 3.4 İki Değişkenli Clayton Kopula Simülasyonları	51
Şekil 3.5 İki Değişkenli Frank Kopula Simülasyonları	52
Şekil 3.6 İki Değişkenli FGM Kopula Simülasyonları	53
Şekil 5.1 $p_1 = p_2 = q ; \alpha = (-1:0.25:1) ; VaR(U_1), VaR(U_2) ; u \in (0,1)^2$	90
Şekil 5.2.a $p_1 = p_2 = q ; \alpha = (-1:0.25:1) ; q ; CVaR(U_1) ; u \in (0,1)^2$	91
Şekil 5.2.b $p_1 = p_2 = q ; \alpha = (-1:0.25:1) ; q ; CVaR(U_2) ; u \in (0,1)^2$	91
Şekil 5.3.a $p_1 = p_2 = q ; \alpha = (-1:0.25:1) ; q ; CVaR(S)$	92
Şekil 5.3.b $p_1 = p_2 = q ; \alpha = (-1:0.25:1) ; \alpha_{(-)} ; CVaR(S)$	93
Şekil 5.3.c $p_1 = p_2 = q ; \alpha = (-1:0.25:1) ; \alpha_{(+)} ; CVaR(S)$	93
Şekil 5.4.a $p_1 < p_2 ; \alpha = (-1:0.25:1) ; VaR(U_1), VaR(U_2) ; u \in (0,1)^2$	94
Şekil 5.4.b $p_1 > p_2 ; \alpha = (-1:0.25:1) ; VaR(U_1), VaR(U_2) ; u \in (0,1)^2$	94
Şekil 5.5.a $p_1 < p_2 ; \alpha = (-1:0.25:1) ; (p_1, p_2) ; CVaR(U_1) ; u \in (0,1)^2$	95
Şekil 5.5.b $p_1 < p_2 ; \alpha = (-1:0.25:1) ; (p_1, p_2) ; CVaR(U_2) ; u \in (0,1)^2$	95
Şekil 5.6.a $p_1 > p_2 ; \alpha = (-1:0.25:1) ; (p_1, p_2) ; CVaR(U_1) ; u \in (0,1)^2$	97
Şekil 5.6.b $p_1 > p_2 ; \alpha = (-1:0.25:1) ; (p_1, p_2) ; CVaR(U_2) ; u \in (0,1)^2$	97
Şekil 5.7.a $p_1 < p_2 ; \alpha = (-1:0.25:1) ; (p_1, p_2) ; CVaR(S) ; u \in (0,1)^2$	98
Şekil 5.7.b $p_1 > p_2 ; \alpha = (-1:0.25:1) ; (p_1, p_2) ; CVaR(S) ; u \in (0,1)^2$	98

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1 Bazı kopula aileleri için parametre tahminleri	64
Çizelge 5.1 $p_1 = p_2 ; \alpha = (-1:0.25:1); VaR(U); CVaR(U); u \in (0,1)^2$	89
Çizelge 5.2 $p_1 = p_2 ; \alpha = (-1:0.25:1); VaR(U_1), VaR(U_2); u \in (0,1)^2$	90
Çizelge 5.3 $p_1 = p_2 ; \alpha = (-1:0.25:1), CVaR(U_1), CVaR(U_2) u \in (0,1)^2$	91
Çizelge 5.4 $p_1 = p_2 = q; \alpha = (-1:0.25:1); q; CVaR(S), u \in (0,1)^2$	92
Çizelge 5.5 $p_1 \neq p_2; \alpha = (-1:0.25:1); VaR(U_1), VaR(U_2); u \in (0,1)^2$	94
Çizelge 5.6.a $p_1 < p_2 ; \alpha = (-1:0.25:1); CVaR(U_1); CVaR(U_2) u \in (0,1)^2$	95
Çizelge 5.6.b $p_1 > p_2 ; \alpha = (-1:0.25:1); CVaR(U_1); CVaR(U_2) u \in (0,1)^2$	97
Çizelge 5.7 $p_1 \neq p_2 ; \alpha = (-1:0.25:1); (p_1, p_2); CVaR(S) u \in (0,1)^2$	98
Çizelge 5.8 En yüksek ve en düşük riskli senaryolar için α ve (p_1, p_2) 'ye göre değişimleri gösteren risk ölçüm değerleri	99
Çizelge 5.9 $\alpha = -1 ; u \in (0,1)^2 ; VaR(U); CVaR(U); CVaR(S)$	120
Çizelge 5.10 $\alpha = -0.75 ; u \in (0,1)^2 ; VaR(U); CVaR(U); CVaR(S)$	121
Çizelge 5.11 $\alpha = -0.50 ; u \in (0,1)^2 ; VaR(U); CVaR(U); CVaR(S)$	122
Çizelge 5.12 $\alpha = -0.25 ; u \in (0,1)^2 ; VaR(U); CVaR(U); CVaR(S)$	123
Çizelge 5.13 $\alpha = 0.25 ; u \in (0,1)^2 ; VaR(U); CVaR(U); CVaR(S)$	124
Çizelge 5.14 $\alpha = 0.50 ; u \in (0,1)^2 ; VaR(U); CVaR(U); CVaR(S)$	125
Çizelge 5.15 $\alpha = 0.75 ; u \in (0,1)^2 ; VaR(U); CVaR(U); CVaR(S)$	126
Çizelge 5.16 $\alpha = 1 ; u \in (0,1)^2 ; VaR(U); CVaR(U); CVaR(S)$	127

1. GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

1.1 Giriş

Risk analizi ve aktuerya biliminde teminatların tanımlanması, yeterli sermaye, risk rezervi ve prim hesabı gibi önemli konularda aktueryal kararların alınmasında risk ölçütlerinden yararlanılır. Birbiri ile bağımlı risk durumları söz konusu olduğunda da karşılaştırmalar yapmak için bu ölçütler kullanılabilir. Risk ölçütü, risk alan bir sigorta veya finans şirketine, belirli bir zaman sonra, verilen bir olasılıkta karşılaşılabilecek maksimum hasar bilgisini verir. Bu bağlamda genel olarak bir risk ölçütünün, iflastan kaçınmak isteyen risk alan için, risk verenlerden toplanması gereken prim ve tutulması gereken anapara miktarlarını belirlemek amacıyla kullanıldığı söylenebilir.

Sigortada birçok çıkarım bağımsızlık varsayımı üzerine kurulu olmasına rağmen son zamanlarda sigorta ve reasürans ürünlerinde karışıklığın artması aktueryal çalışmalarda bağımlı risklerin modellenmesi konusuna ilginin artmasına neden olmuştur. Değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını açıklama yöntemlerinden biri, bağımlı olduğu düşünülen değişken ile bağımsız değişkenler arasındaki matematiksel bağıntıyı ortaya koyan regresyon gibi yapısal modellerdir. Bu modellerde çoğunlukla değişkenler arasındaki ilişkilerin doğrusal olduğu ve hata terimlerine ait dağılımın normal dağılım olduğu varsayılır. Fakat uygulamalarda bu varsayımların tamamının sağlanması birçok durumda mümkün olmamaktadır. Bu nedenle, değişkenler arasındaki bağımlılık yapısı, son yıllarda özellikle finans, aktuerya ve risk analizinde giderek yaygınlaşan bir biçimde kopula fonksiyonları ve modelleri ile açıklanmaya çalışılmaktadır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, finansal risk yönetiminde önemli olan riske maruz değer (Value at Risk-VaR) ve koşullu riske maruz değer (Conditional Value at

Risk-CVaR) gibi bazı önemli risk ölçümleri, bunların özellikleri ve komonotonluk kavramıyla ilişkileri verilmiştir.

Riskler arasındaki bağımlılığı açıklamak için bazı iyi bilinen kopula modelleri üçüncü bölümde ele alınmıştır. Bu bölümde ayrıca bazı kopula aileleri için simülasyon yöntemleri ve kopula bağımlılık parametresi için tahmin yöntemleri ile ilgili yeterli bilgilere de yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde parametre tahmin yöntemleri ve bağımlılığın açıklanmasında kullanılan yöntemlerden kısaca bahsedilmiştir.

Çalışmanın özgün bölümünü oluşturan beşinci bölümde ise FGM kopula ailesinden geldiği düşüncülen bağımlı iki değişkenli risk değişkenleri için iki değişkenli kuzey-güney kuantil yöntemine göre VaR ve CVaR risk ölçüm formülleri elde edilmiştir. Bu risk ölçümlerinin bazı kuantil ve bağımlılık parametre değerleri için Matlab ve Excel programları kullanılarak elde edilen sayısal sonuçlar çizelgeler ve grafiklerle gösterilerek risk analizindeki önemli nicelikler bakımından yorumlanmıştır.

Tartışma ve sonuç bölümünde, önerdiğimiz iki değişkenli kuzey-güney kuantil yöntemi ve FGM kopula fonksiyonu kullanılarak bağımlı riskler esasında elde edilen bu risk ölçümlerinin, aktueryal kararların alınmasında önemli olan prim, risk rezervi ve net retenşin gibi nicelikler bakımından değerlendirmeler yapılmıştır. Son olarak çalışmanın bilime ve literatüre katkıları ile sonrasında yapılabilecek çalışmalar tartışılmıştır.

1.2 Önceki Çalışmalar

Bu tez çalışmasında en çok yararlanılan risk ölçümleri ve kopulalar ile ilgili literatür çalışmaları aşağıda özetlenmiştir.

Szegö (2005)'de ortalama, lineer korelasyon katsayısı ve VaR gibi klasik risk ölçümlerinin kullanılabilme koşullarından bahsedilmektedir. Yaygın olarak kullanılan risk ölçümlerinden VaR ve CVaR'ın tanımı ve özellikleri karşılaştırmalı olarak Jorion (2000) ve Kaas (2001)'de yer almaktadır. Kopulalar ile modellenen bağımlı risk yapıları ve bağımlılığın ölçülmesi gibi konularının yansısıra diğer bilinen risk ölçümlerine ayrıntılı olarak yer veren Denuit vd. (2005) kaynağından da büyük ölçüde yararlanılmıştır. Çalışmanın özgün kısmında elde edilen iki değişkenli kuantiller ve CVaR'ı elde etmek için Chen ve Welsh (2002) ve Hürlimann (2004) çalışmaları değerlendirilmiştir. Risk ölçümlerinin komonotonluk ve diğer özellikleri için Dhaene (2002a,b), Dhaene (2004), Dhaene (2006) ve Cheung (2009) çalışmalarından yararlanılmıştır.

Kopulalar ile ilgili gerekli bilgiler Nelsen (1998), Cherubini vd. (2004), Denuit vd. (2005) ve Nelsen (2006) kaynaklarından özetlenip, kopula seçimi ve parametre tahmin yöntemleri ile ilgili sırasıyla Genest ve Favre (2007) ile Kole vd. (2007) çalışmaları incelenmiştir. Ayrıca bu bilgilerin yanı sıra bazı kopula fonksiyonlarının komonotonluk kavramı ve bağımlılık parametresi için elde edilen önemli sonuçların da bulunduğu Trivedi ve Zimmer (2007) çalışmasından gerekli bilgiler özetlenmiştir. Fantazzini (2009), He ve Gong (2008), Gebizlioglu ve Yağcı (2008) ile Cheng vd. (2007) son yıllarda kopulalara dayalı risk ölçümleri ile ilgili yapılan diğer önemli çalışmalardır.

2. RİSK ÖLÇÜMLERİ

Son yıllarda uluslararası finans piyasalarında meydana gelen krizlerin pek çoğunda etkin bir risk yönetim sisteminin bulunmayışı neden olarak ortaya çıkmaktadır. Bu ortamda uluslararası düzenlemeciler de risklerin etkin olarak, bir sistem dahilinde ölçülmesi ve buna yönelik tedbirlerin alınması konusunda daha yoğun çalışmaya başlamışlardır. Özellikle üstlenilen risk ve buna karşılık tutulması gereken sermaye gereği düzenlemeleri halen üzerinde yoğun çalışma ve tartışmaların olduğu bir alan durumundadır.

Risk ölçümleri, sigorta şirketlerinin, yatırımcıların riskli seçenekler arasında karar vermelerinde yardımcı olmakta, riskler arasındaki bağımlılığın da dikkate alındığında risk hesabı yapılabilmesine fırsat vermekte, yönetici ve işlemci kararlarının performansının değerlendirilmesine olanak vermekte, bir kurumun gerek duyduğu sermaye miktarının belirlenmesinde yardımcı olmakta ve kurum risklerinin açıklanmasında raporlama amaçlı kullanılmaktadır.

Eskiden, yatırımlar arasında tercih yapılması gerektiğinde, varyans yardımıyla her yatırımdan elde edilecek kazanç ile ilişkili riski ve her yatırım çifti arasındaki kovaryansın hesaplanması ile de risk seviyesini ölçen Markowitz (Varyans- Kovaryans) modeli kullanılıyordu. Bağımlı da olabilen rasgele kazançların ortak dağılımı ile bir portföyün riskini ölçmek amacı ile kullanılan Markowitz modeli, sadece normal ve t dağılımları gibi sonlu varyanslı eliptik dağılımlar için uygundur. Eğer eliptik olmayan dağılımlar için Varyans- Kovaryans modeli kullanılırsa, çok ciddi kayıplara neden olan beklenmedik olaylarla karşılaşılabilir (Szegö 2005).

2.1 Risk Ölçümleri ve Özellikleri

Gelişmiş ekonomilerde malların alım ve satımında ortaya çıkan risklere göre yatırımcılara fiyat teklifi verilir. Sigorta şirketleri ve bankalar, kendilerini tehlikeye sokmayacak şekilde verilen bu fiyat teklifleri karşısında risk alıp almamaya karar vermedirler. Bu karar verme aşamalarında farklı risk ölçme tekniklerinden yararlanırlar. Bu bölümde riske maruz değer (Value at Risk-VaR), kuyruk riske maruz değer (Tail VaR), koşullu kuyruk beklentisi (Conditional Tail Expectation-CTE), koşullu riske maruz değer (Conditional VaR-CVaR) ve beklenen açık (Expected Shortfalls) gibi bazı sayısal risk ölçümleri tanımlanıp ve herbirisine ait aşırı olmayan yükleme, negatif olmayan yükleme, geçişlilik, sabitlik, alt toplamsallık, pozitif homojenlik, monotonluluk, dağılımda yakınsamaya göre süreklilik ve nesnellik olarak belirtilen istenen özellikleri sağlayıp sağlamadıkları hakkında bilgiler verilecektir.

Tanım 2.1 (Denuit vd. 2005): Bir risk ölçütü, bir X riskini pozitif bir $\rho[X]$ reel sayısına götüren, X 'e eklenmek zorunda olan kabul edilebilecek ek bir ödemeyi gösteren fonksiyondur ve $\rho : X \rightarrow IR$ biçiminde ifade edilebilir.

ρ , X 'in riskliliğini ölçer. $\rho[X]$ 'in büyük değerli olması X 'in "tehlikeli" durum olduğunu gösterir. Özellikle, X belirli bir zamandaki bazı finansal portföylerin olası bir kaybı ise, $\rho[X]$ bu X kaybına karşı tutulması gereken sermaye miktarı olarak yorumlanabilir. Bu portföye bir tampon olarak eklenebildiği için de kabul edilebilir içsel ya da dışsal risk kontrolü haline gelmektedir. Böyle bir durumda $\rho[X]$, portföyün risk sermayesidir. Öyleyse risk ölçümleri iflastan kaçınmak için risk verenlerden toplanması gereken prim ve tutulması gereken anapara miktarlarını belirlemek için kullanılır (Panjer 1998).

2.2 Bir Risk Ölçüsünde İstenen Özellikler

2.2.1 Aşırı olmayan yükleme

Tüm X rasgele değişkenleri için

$$\rho[X] \leq \max [X] = F_X^{-1}(1) \quad (2.1)$$

özelliği maksimum hasar değeri kadar kapital tutulabileceğini söyler.

2.2.2 Negatif olmayan yükleme

Tüm X rasgele değişkenleri için

$$\rho[X] \geq E[X] \quad (2.2)$$

özelliği, iflastan kaçınmak için kapitalin en az beklenen kayıp değeri kadar belirlenmesi gerektiğini söyler.

2.2.3 Geçişlilik

Tüm X rasgele değişkenleri ve her c sabiti için

$$\rho[X + c] = \rho[X] + c \quad (2.3)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu özelliğe göre, riskte yapılan bir miktar artış ya da azalışa bağlı olarak risk ölçüsünde de aynı miktarda artış veya azalış yapılması gerekir.

2.2.4 Sabitlik (Gerekçelendirilmemiş yükleme)

c sabiti ne olursa olsun,

$$\rho[c] = c \quad (2.4)$$

olur. c miktarındaki riske karşı aynı miktarda sermaye ayırmak gerektiğini söyler. $\rho[0] = 0$ ise $\rho[X]$ niceliği başlangıçta gerekli sermaye olarak yorumlanabilir.

2.2.5 Alt toplamsallık

Tüm X ve Y rasgele değişkenleri için

$$\rho[X + Y] \leq \rho[X] + \rho[Y] \quad (2.5)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Bu özellik, kombine edilmiş risklerin, ayrı ayrı risklerin giderilmesinden daha az riskli olacağını söyler.

2.2.6 Komonotonik toplamsallık

Tüm X ve Y komonotonik rasgele değişkenleri için

$$\rho[X + Y] = \rho[X] + \rho[Y] \quad (2.6)$$

özelligi, komonotonik risklerin birlikte ortaya konması ile riskli durumu asla azaltmadığı gerçeğini gösterir. Komonotonluk ile ilgili daha detaylı bilgilere 2.6. alt bölümde yer verilmiştir.

2.2.7 Pozitif homojenlik

Tüm X rasgele değişkenleri ve her pozitif c sabiti için

$$\rho[cX] = c\rho[X] \quad (2.7)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Eğer bir şirketin maruz kaldığı risk oransal olarak artırılıyor veya azaltılıyorsa o riskin risk ölçüsünde de aynı oranda arttırma veya azaltma yapılması gerektiğini söyler. Örnek olarak, bir sigorta şirketi kota paylaşımlı bir reasürans anlaşması satın alabilir. Böyle bir durumda $\lambda \in (0, 1)$ indirim oranı olmak üzere, X riski λX kadar düşürülürse sigorta şirketi, X riskinin risk ölçüsünü de aynı oranda azaltmalıdır.

2.2.8 Monotonluluk

Tüm X ve Y rasgele değişkenleri için

$$P[X \leq Y] = 1 \Rightarrow \rho[X] \leq \rho[Y] \quad (2.8)$$

özelliği, Y riskinin X riskini aştığı durumda X kaybına karşı belirlenecek olan gerekli anapara miktarının Y için karşılanan miktardan daha düşük olduğunu belirtir.

2.2.9 Dağılımda yakınsamaya göre süreklilik

$\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ risklerin bir dizisi olsun. $n \rightarrow \infty$ iken $X_n \xrightarrow{d} X$ dır. Yani F_X ' in her x süreklilik noktasında $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho[X_n] = \rho[X]$ olur.

2.2.10 Nesnellik

X 'in dağılım fonksiyonu F_X iken $\rho[X]$ sadece X 'e bağlıdır. Bu koşul F_X 'in X 'in riskliliğini ölçmek için gerekli olan tüm bilgiyi içerdiğini gösterir. "Değişmeme kuralı" olarak da adlandırılan bu özellik

$$X \stackrel{d}{=} Y \Rightarrow \rho[X] = \rho[Y] \quad (2.9)$$

biçiminde ifade edilir. Amprik verilerden tahmin edilebilecek bir risk ölçüsü için gerekli koşul olduğundan uygulamaları önemlidir. Nesnellik özelliğinin eksik olduğu durumda finansal endüstride risk ölçümleriyle ilgili uygulamalarda ciddi sorunlar ortaya çıkabilir (Denuit vd. 2005).

2.3 Uyumlu (Coherent) Risk Ölçümleri

Tanım 2.2 (Artzner vd. 1999): Sırasıyla yukarıda gösterilen (2.3), (2.5), (2.7) ve (2.8) eşitliklerinde verilen, geçişlilik, alt toplamsallık, pozitif homojenlik ve monotonluluk özelliklerini sağlayan bir risk ölçüsü "uyumlu risk ölçüsü" olarak adlandırılır.

2.3.1 Risk ölçüsüne dayalı parasal sermaye

Bankaların yanısıra sigorta şirketleri beklenmedik kayıplara karşı kullanmak üzere ellerinde bir miktar para (rezerv-ihtiyat) tutmalılar. En yaygın risk sermayesi tutma yöntemlerinden biri parasal sermaye (Economic Capital-EC) Tanım 2.3 yardımıyla verilebilir.

Tanım 2.3 (Denuit vd. 2005): Parasal sermaye, herhangi bir risk ölçüsüne göre $EC[S] = \rho[S] - E[S]$ şeklinde tanımlanır. Burada S şirketin toplam kaybıdır.

$E[S]$ beklenen toplam kaybının $\rho[S]$ risk ölçüsünden çıkarılmasının sebebi, $\rho[S]$ toplam risk sermayesinin bir kısmının beklenen toplam kayıpları içeren $E[S]$ 'e ve ikinci kısmının beklenmedik harcamalara karşı alınan bir önlem anlamındaki $EC[S]$ 'e bağlı olarak ayrıştırmanın en iyi bu şekilde yapılmasıdır.

Sonuç 2.1 (Denuit vd. 2005): Beklenen toplam kaybın, portföylerin bağımlılık yapısına bağlı olmadığını anlamak önemlidir. Çünkü $E[S] = \sum_i E[S_i]$ dir. Burada S_i ile portföylerde i . poliçe tarafından ortaya çıkarılan toplam kayıp gösteriliyor.

2.4 Riske Maruz Değer- Value at Risk (VaR)

Bir şirket portföyünün bir gün sonra, bir hafta sonra gibi gelecekte, pazardaki faiz değişimleri, kur farkları gibi değişkenliklerden kaynaklanan zarar olasılığının verilen bir olasılıkla ölçümüdür. Başka bir ifade ile “gelecek hafta içerisinde banka %5 olasılıkla 5 milyon dolardan daha fazla kayba uğrayabilir” şeklinde olası kaybın ifade edilmesidir. VaR, pazar riskini karşılayabilecek gerekli sermayenin belirlenmesinde de temel bir model olarak finans uzmanları tarafından kullanılmaktadır. Yaygın olarak bankalar, finans kurumları ve işletmeler tarafından kullanılan VaR, firmaların diğer işletmelerle anlaşma yapma ve karar alma aşamalarında yardımcı olan bir risk ölçüsüdür (Denuit vd. 2005). VaR' ın risk ölçüsü olarak taşıdığı olumsuzluklar vardır: bu nedenle VaR ölçüsü üstünde çeşitli risk ölçümleri geliştirilmiştir (Szegö 2005).

Tanım 2.4(Denuit vd. 2005): Verilen bir X riski ve $p \in (0, 1)$ olasılık seviyesine bağlı olarak $VaR[X; p]$

$$VaR[X; p] = F_X^{-1}(p) \quad (2.10)$$

biçiminde tanımlanır.

Sonuç 2.2(Denuit vd. 2005): $\forall x \in R$ ve $p \in (0, 1)$ için

$$VaR [X; p] \leq x \Leftrightarrow p \leq F_X (x) \quad (2.11)$$

2.4.1 VaR özellikleri

VaR aşırı yükleme yapmaz : p ne olursa olsun $X \leq \max [X]$ olduğundan $VaR [X; p] \leq \max [X]$ olur.

VaR genellikle negatif olmayan yükleme gerektirmez : $p^* = F_X (E [X])$ tanımlansın. VaR'ın p^* 'dan az olasılık seviyeleri için $E [X]$ beklenen kaybı aşmayacağı açıktır.

VaR geçişli ve pozitif homojendir : VaR, geçişlilik ve pozitif homojenlik özelliklerine sahiptir.

VaR gerekçelendirilmemiş yükleme neden olmaz : Herhangi $p > 0$ olasılık seviyeleri için $VaR [c; p] = c$ eşitliği sağlanır.

VaR komonotonik toplamsaldır : Komonotonik rasgele vektörlerin toplamının dağılım fonksiyonunun tersi, toplanan terimlerin herbirinin dağılım fonksiyonunun terslerinin toplamına eşittir. Bu bilgi ile, VaR'ın komonotonik toplamına ilişkin durumu veren aşağıdaki özellik yazılabilir.

Özellik 2.1 (Denuit vd. 2005): $X_1^C, X_2^C, \dots, X_n^C$ komonotonik riskler verildiğinde, bu risklerin toplamı olan S^C 'nin VaR değeri:

$$VaR[S^C; p] = \sum_{i=1}^n VaR[X_i^C; p] \quad , \quad 0 < p < 1 \quad (2.12)$$

olur.

VaR alt toplamsal değildir : VaR, X_i 'lerin çok değişkenli normal olmaları gibi bazı çok özel durumlar dışında alt toplamsallık özelliğini sağlamaz. Genelde VaR, bir

toplamin VaR'ının VaR'ların toplamından daha büyük olabileceği gibi şaşırtıcı bir özelliğe sahiptir.

VaR monotondur : $\forall x$ için $P[X \leq Y] = 1$ ise $F_X(x) \geq F_Y(y)$ dir. Böylece herhangi bir p olasılık seviyesi için $VaR[X; p] \leq VaR[Y; p]$ eşitsizliği vardır.

VaR dağılımda yakınsamaya göre süreklidir : Dağılım fonksiyonları için zayıf yakınsama gibi sağlanan yakınsama türleri kuantil fonksiyonları için de aynı şekilde sağlar.

VaR nesnelidir : VaR sadece X 'in dağılım fonksiyonuna bağlı olduğundan VaR'ın tanımının dolaylı bir sonucudur.

2.4.2 VaR sigorta şirketleri için gerekli en iyi anaparayı belirler

VaR sigorta şirketleri için tutulması gerekli optimal ana parayı belirler. Bir portföy, X kaybının pozitif olduğu durumda problemlerle karşılaşabilir. Çünkü bu durumda sigortalananlar için yükümlülük tamamen karşılanamaz. Yükümlülük, sigorta şirketlerinin zorunlu sözleşmelerini karşılayan, risk alan özel bir şirketin (reastürans) finansal kapasitesini yansıtır. Poliçe sahiplerini korumak amacıyla $\rho[X]$ gerekli sermaye yükümlülüğü (solvency capital requirement) belirlenir. Yani, şirket için gerekli anapara belirleneceği zaman rezervin üzerinde en azından $\rho[X]$ 'e eşit olacak bir miktar yükümlülük ilave edilir. Yatırım gelirine prim ve rezervlerin eklenmesi ile oluşan bu anapara, poliçe sahiplerinin gelecekteki hasarları karşılayamayacak duruma geldiğinde ortaya çıkan risklere karşı tampon görevi olarak kullanılır.

X kayıplı bir portföy düşünülün. X kaybı için gerekli yükümlülük kapitalinin yeterince büyük olması, beklenmedik harcamaların da yeterince küçük olması istenir. Bu amaca ulaşmak için $E[(X - \rho[X])_+]$ ile beklenmedik harcamaların riski ölçülür. Gerekli sermaye miktarını ayarlamak için önce ρ ile gösterilen sermaye yükümlülüğünü, sonra $E[(X - \rho[X])_+]$ ile ifade edilen beklenmedik harcamalar riskini

belirlemek gerekir. $E[(X - \rho[X])_+]$ 'ın yeterince küçük olması istenir. Sermaye arttıkça $E[(X - \rho[X])_+]$ 'ın en küçüklemesine daha iyi bakılabilir. Diğer bir deyişle eldeki anapara bir maliyete sahiptir. Bu anaparamın maliyeti hesaba katılarak aşırı bir sermaye yükümlülüğüne olan gereksinimden kaçınılabılır. Gerekli sermaye miktarı olarak yorumlanabilen ρ ,

$$\min_{\rho[X]} \{E[(X - \rho[X])_+] + \rho[X] \epsilon\}, 0 < \epsilon < 1 \quad (2.13)$$

biçimindeki minimizasyon probleminin çözümü olarak tanımlanabilir. Bu problem düşük risk artışı ve düşük anapara maliyeti gibi iki zıt kriteri dengede tutar. Burada ϵ , hesaba katılacak anapara maliyetine miktar belirlemek için derecelendirmekte bir ölçü olarak yorumlanabilir. Şirkete özel veya riske özel bir ϵ değeri belirlenebilir. $\epsilon = 0$ durumunda, anapara maliyeti hiç hesaba katılmayabilir ve anapara yükümlülüğü $\rho[X] = \max[X]$ olur. ϵ değeri arttıkça anapara maliyetinin görece önemi artırılıp problemin optimal çözümü azaltılır.

Özellik 2.2 (Denuit vd. 2005): En küçük anapara $\rho[X]$, yani (2.13)'ün bir çözümü VaR'dır.

$$\rho[X] = VaR[X, 1 - \epsilon] \quad (2.14)$$

Bu özellik, VaR'ın sadece bir risk ölçüm aracı olarak kullanılmayıp, aynı zamanda gerekli en iyi sermaye miktarını belirlemek için de önemli bir araç olduğunu söyler. Ölçülen ve kontrol altında tutulmak istenen risk $(X - \rho[X])_+$ ile açıklanan beklenmedik harcamalardır. Bu beklenen harcamalara ait risk $E[(X - \rho[X])_+]$ ile ölçülür.

2.4.3 VaR'a dayalı parasal sermaye

Risk sermayesini belirlemenin en yaygın yolu VaR temeline dayanır. S ile verilen bir periyotta bir sigorta şirketinin toplam hasarı, P ile portföy için toplam prim ve $VaR[X; p] - P$ ile gerekli olan en küçük "ilave kapital" gösterilsin. Sigortacı teknik

olarak en çok $1 - p$ gibi küçük bir olasılıkla borcunu ödeyemez duruma gelir. Özel olarak, tavsiye edilen bir p güven seviyesi için VaR temeline dayalı parasal sermaye,

$$EC [S; p] = VaR [S; p] - E [S] \quad (2.15)$$

biçiminde tanımlanır (Denuit vd. 2005).

Sonuç 2.3 Bir sermaye yükümlülüğünü tanımlamak için VaR'ı kullanmak beklenmedik olaylardan kaçınılması gereken durumlarda anlamlıdır, fakat burada beklenmedik harcamaların büyüklüğü önemli değildir.

2.4.4 VaR ve sermaye varlığı fiyatlandırma modeli

Çok değişkenli normal dağılımın önemli bir özelliği bu dağılımların risk yönetiminin standart yaklaşımlarına uygun olmasıdır. Bu dağılım risk yönetimi ve portföy optimizasyonu için bir risk ölçüsü olarak VaR'ın ve Markowitz (ortalama-varyans) yaklaşımının her iki kullanımını da destekler.

$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^t$ çok değişkenli normal dağılıma sahip " n " adet riski gösterebilir ve böyle risklerin lineer portföyleri

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i, \alpha_i \in IR \right\} \quad (2.16)$$

olsun. Kazanç elde etme koşulu altında $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ile ağırlıklandırılan, riski minimize eden en iyi portföyü belirlemek için herhangi pozitif homojen, geçişli risk ölçüsünün kullanımı, varyansın bir risk ölçüsü olarak kullanıldığı Markowitz modeline denktir.

Sonuç 2.4 (Embrechts vd. 2003): $\mathbf{X} \sim N(\mu, \Sigma)$, $\forall i$ için $VaR[X_i] = \sigma_{ii} < \infty$ olsun. P , (2.16)'a bağlı olarak tanımlı tüm lineer portföylerin kümesi olsun. $P_1, P_2 \in P$ herhangi iki portföy olmak üzere aşağıdaki durumlar geçerlidir.

(i) VaR'ın alt toplamsallığı: $0.5 \leq p < 1$

$$VaR[P_1 + P_2; p] \leq VaR[P_1; p] + VaR[P_2; p] \quad (2.17)$$

(ii) Herhangi pozitif homojen risk ölçüsü ρ için varyansların eşitliği:

$$\rho[P_1 - E[P_1]] \leq \rho[P_2 - E[P_2]] \Leftrightarrow V[P_1] \leq V[P_2] \quad (2.18)$$

2.5 Kuyruk Riske Maruz Değer- Tail VaR (TVaR)

Önceden belirlenmiş bir p seviyesindeki tek bir VaR, dağılım fonksiyonunun üst kuyruğunun sıklığı hakkında herhangi bilgi vermez. Uygulamada sadece ödememe sıklığı ile ilgilenilmeyip aynı zamanda ödememe güçlüğü ile de ilgilenildiğinden bu önemli bir sorundur. Böyle durumlarda sıklıkla kullanılan diğer risk ölçülerinden biri "kuyruk riske maruz değer" (Tail Value at Risk-TVaR) aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.5 (Denuit vd. 2005): Bir X riski ve bir p olasılık seviyesi verildiğinde $TVaR[X; p]$

$$TVaR[X; p] = \frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR[X; \xi] d\xi \quad , \quad 0 < p < 1 \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlanır. $TVaR[X; p]$, p seviyesinde X 'in VaR değerlerinin aritmetik ortalamasıdır.

2.5.1 Bazı ilişkili risk ölçümleri

Koşullu Kuyruk Beklentisi - Conditional Tail Expectation (CTE) : CTE, kaybın VaR

değerini aştığı bilindiğinde koşullu beklenen kaybı gösterir.

$$CTE[X;p] = E[X|X > VaR[X;p]] \quad (2.20)$$

Bazı "p" güven seviyeleri için $c = VaR[X;p]$ kritik eşik değerini aşan kayıpların ortalama değerine karşı bir tampon görevi oluşturur.

Koşullu Riske Maruz Değer- Conditional VaR (CVaR): Bir portföyde ortaya çıkması muhtemel büyük miktarda hasarlar için bir tampon görevi yapar ve

$$\begin{aligned} CVaR[X;p] &= E[X - VaR[X;p] | X > VaR[X;p]] \\ &= CTE[X;p] - VaR[X;p] \end{aligned} \quad (2.21)$$

şeklinde tanımlanır. Yaşam sigortasında beklenen ardakalan yaşam zamanı olarak adlandırılan ortalama aşan fonksiyon m_X yardımıyla

$$CVaR[X;p] = m_X(VaR[X;p]) \quad (2.22)$$

şeklinde ifade edilir. Burada beklenen ardakalan yaşam zamanı m_X

$$\begin{aligned} m_X(x) &= E[X - x | X > x], \quad x > 0 \\ &= \frac{\Pi_X(x)}{F_X(x)} \end{aligned} \quad (2.23)$$

şeklinde tanımlanır.

Beklenen Açık- Expected Shortfall (ESF): "p" olasılık seviyesindeki "Beklenen Açık" $VaR[X;p]$ 'i tutan stop-loss primine bağlı olarak

$$ESF[X;p] = E[(X - VaR[X;p])_+] = \Pi_X(VaR[X;p]) \quad (2.24)$$

biçiminde tanımlanır.

Risk Ölçümleri Arasındaki İlişkiler: Yukarıda tanımlanan üç risk ölçüsü arasındaki ilişki aşağıdaki eşitsizliklerde gösterilmiştir.

Özellik 2.3 (Dhaene vd. 2006) Herhangi $p \in (0, 1)$ için aşağıdaki tanımlamalar geçerlidir.

$$TVaR[X; p] = VaR[X; p] + \frac{1}{1-p} ESF[X; p] \quad (2.25)$$

$$CTE[X; p] = VaR[X; p] + \frac{1}{\overline{F}_X(VaR[X; p])} ESF[X; p] \quad (2.26)$$

$$CVaR[X; p] = \frac{ESF[X; p]}{\overline{F}_X(VaR[X; p])} \quad (2.27)$$

Sonuç 2.5 (Acerbi ve Tasche 2002): Eğer F_X sürekli ise (2.25) ve (2.26) eşitlikleri birlikte düşünüldüğünde

$$CTE[X; p] = TVaR[X; p] \quad , \quad p \in (0, 1) \quad (2.28)$$

elde edilir. CTE ve TVaR bu özel durumda eşit oluyorlar. Genel durumda sadece

$$TVaR[X; p] = CTE[X; p] + \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{\overline{F}_X(VaR[X; p])} \right) ESF[X; p] \quad (2.29)$$

eşitliği vardır .

2.5.2 TVaR özellikleri

TVaR aşırı yükleme yapmaz: Bu durum VaR'ın aşırı yükleme oluşturmamasından kaynaklanır.

$$TVaR[X; p] \leq \frac{1}{1-p} \int_p^1 \max[X] d\xi = \max[X] \quad (2.30)$$

TVaR gerekçelendirilmemiş yüklemeye neden olmaz: VaR'ın özelliklerinin bir sonucudur.

$$TVaR[c; p] = \frac{1}{1-p} \int_p^1 cd\xi = c \quad (2.31)$$

TVaR negatif olmayan bir yüklemeye neden olur: $TVaR[X; 0] = E[X]$ olduğundan, eğer TVaR 'ın p olasılık seviyesinde azalmayan olduğu gösterilebilirse, bahsedilen özellik sağlanır.

TVaR geçişli, pozitif homojen, komonotonik toplamsal ve monotondur: VaR'ın ilgili özelliğinden gösterilebilir.

$$\begin{aligned} TVaR[X + c; p] &= \frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR[X + c; \xi] d\xi \\ &= \frac{1}{1-p} \int_p^1 (VaR[X; \xi] + c) d\xi \\ &= TVaR[X; p] + c \end{aligned} \quad (2.32)$$

TVaR alt toplamsaldır: VaR'ın aksine TVaR alt toplamsallık özelliğine sahiptir.

$$TVaR[X; p] = \inf_{a \in IR} \left\{ a + \frac{1}{1-p} \pi_X(a) \right\} \quad (2.33)$$

Her $0 < \lambda < 1$ için konveks olduğu

$$\begin{aligned}
TVaR[\lambda X + (1 - \lambda)Y; p] &\leq \lambda VaR[X; p] + (1 - \lambda) VaR[Y; p] + \\
&\quad \frac{1}{1 - p} E \left[\left(\begin{array}{c} \lambda X + (1 - \lambda) Y - \lambda VaR[X; p] \\ - (1 - \lambda) VaR[Y; p] \end{array} \right)_+ \right] \\
&\leq \lambda VaR[X; p] + (1 - \lambda) VaR[Y; p] \\
&\quad + \frac{\lambda}{1 - p} E [(X - VaR[X; p])_+] \\
&\quad + \frac{1 - \lambda}{1 - p} E [(Y - VaR[Y; p])_+] \\
&= \lambda TVaR[X; p] + (1 - \lambda) TVaR[Y; p] \tag{2.34}
\end{aligned}$$

şeklinde gösterilebilir. $\lambda = \frac{1}{2}$ alındığında ve TVaR'ın pozitif homojenlik özelliği ile

$$\frac{1}{2} TVaR[X + Y; p] \leq \frac{1}{2} (TVaR[X; p] + TVaR[Y; p]) \tag{2.35}$$

biçiminde alt toplamsallık özelliğini sağladığı görülmektedir.

CTE sürekli riskler için alt toplamsaldır : X 'in sürekli olduğu varsayıldığında TVaR ve CTE (2.28)'de gösterildiği gibi birbirine eşit olur ve böylece uyumlu (coherent) bir risk ölçüsü ortaya çıkar. Genelde CTE bu durumda alt toplamsaldır. CTE'nin alt toplamsallığını göstermek için aşağıdaki özellikten yararlanılır.

Özellik 2.4 (Denuit vd. 2005): $\bar{F}_X(x) > 0$ olsun. Her A olayı için $P[A] = \bar{F}_X(x)$ olmak üzere

$$E[X|A] \leq E[X|X > x] \tag{2.36}$$

dır.

$P[X > VaR[X; p]] = 1 - p$ olmak üzere bu özellik yardımıyla dağılım fonksiyonlarının sürekli olduğu durum için CTE'nin alt toplamsal olduğu

$$\begin{aligned}
CTE [X + Y; p] &= E [X | X + Y > VaR [X + Y; p]] \\
&\quad + E [Y | X + Y > VaR [X + Y; p]] \\
&\leq E [X | X > VaR [X; p]] + E [Y | Y > VaR [Y; p]] \\
&= CTE [X; p] + CTE [Y; p]
\end{aligned} \tag{2.37}$$

biçiminde gösterilir.

2.6 Komonotonluk ve Üst Komonotonluk

2.6.1 Komonotonluk

Komonotonluk, rasgele değişkenlerin birliktelik yapısını veren çok güçlü bir bağımlılık ölçüsüdür. Komonoton rasgele değişkenler her zaman aynı yönde hareket ederler. Bu mükemmel ilişkinin nedeni, n boyutlu komonotonik (X_1, \dots, X_n) rasgele vektörünün rasgelelik derecesininin 1'e indirilmesidir. Yani, çok integralden ziyade tek integrale indirildiğinden $E_f (X_1, \dots, X_n)$ gibi çeşitli hesaplamaları kolay hale getirir. Bununla birlikte komonotonluk, gerçek dünya olgularının modellenmesinde gerçekçi bir bağımlılık yapısı oluşturmaz. Örneğin, (X_1, \dots, X_n) , gelecekte karşılaşılan kayıpların oluşturduğu bir risk portföyünü gösterebilir. Yaygın olarak kullanılan bir olasılık uzayında rasgele değişkenler olarak modellenen bu kayıplar aynı risk kaynaklarına sahip olmadıkça komonotonik olmazlar (Cheung 2009).

Karşılıklı bağımsız olmayan X_i rasgele değişkenlerine göre $S = \sum_{i=1}^n X_i$ biçiminde tanımlanan toplam hasar miktarı ile ilgili çıkarımlar yapmak aktüerya ve finans alanında sıkça karşılaşılan bir durumdur. $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ rasgele vektörü için bağımlılık yapısını bulmak yararlı olabilir. Bu alt bölümde rasgele değişkenlerin

bağımlılık yapılarının belirlenmesinde ilişkili olan komonotonluk kavramının tanımı verilip risk ölçümleri için değerlendirilecektir.

$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 'de n boyutlu bir vektörler kümesi olmak üzere her $j = 1, \dots, n$ için $\underline{x}_{1j} \leq \underline{x}_{2j}$ ile tanımlanan karşılıklı sıralamalar için $\underline{x}_1 \leq \underline{x}_2$ notasyonu kullanılacaktır.

Tanım 2.6 (Dhaene vd. 2002a): A 'dan alınan her \underline{x}_1 ve \underline{x}_2 için $\underline{x}_1 \leq \underline{x}_2$ ya da $\underline{x}_2 \leq \underline{x}_1$ eşitlikleri sağlanıyorsa $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin komonotonik olduğu söylenir. Eğer bazı j ler için $x_{1j} < x_{2j}$ olması $\underline{x}_1 \leq \underline{x}_2$ eşitsizliğinin sağlanmasını gerektiriyorsa $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi komonotoniktir. Böylece komonotonik bir küme her bileşende azalmayandır. Komonotonik bir kümenin herhangi bir alt kümesi de komonotoniktir.

Lemma 2.1 (Dhaene vd. 2002a): $A_{i,j} = \{(x_i, x_j) | \underline{x} \in A\}$ ile \mathbb{R}^n den alınan bir A kümesinin (i, j) . görüntüsünü tanımlanmak üzere,

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi komonotoniktir. \iff Her $i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $A_{i,j}$ komonotoniktir.

Tanım 2.7 (Dhaene vd. 2002a): $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ rasgele vektörü komonotonik destek kümesi ise bu rasgele vektörün komonotonik olduğu söylenebilir.

Tanımdan, komonotonluğun çok güçlü bir pozitif bağımlılık yapısı olduğu sonucu çıkarılabilir.

Teorem 2.1 (Dhaene vd. 2002a): $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ rasgele vektörü komonotonik ise aşağıdaki eşitliklerin her biri birbirine denktir.

(1) \underline{X} komonotonik destek kümesidir.

(2) Her $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ için

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \min [F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \dots, F_{X_n}(x_n)]$$

(3) $U \sim U(0, 1)$ için

$$\underline{X} \stackrel{d}{=} (F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U), \dots, F_{X_n}^{-1}(U))$$

(4) Bir Z rasgele değişkeni ve f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) azalmayan fonksiyonları vardır öyle ki;

$$\underline{X} \stackrel{d}{=} (f_1(Z), f_2(Z), \dots, f_n(Z))$$

2.6.2 Üst komonotonluk

Klasik komonotonluk kavramının özel bir hali olan yeni bir kavramdır. Belli bir eşik değerden büyük değerlere sahip bileşenler aynı yönde hareket ediyorsa bu rasgele vektör üst komonotondur. Kopula karakterizasyonu, üst komonotonik rasgele vektörünün dağılımsal özellikleri yanısıra üst kuyruktaki bağımlılık katsayıları ile ilgili çalışmalara da imkan sağlar. Finansal ekonomide VaR, TVaR ve ESF gibi yaygın kullanılan birkaç risk ölçümünün komonotonik risklerin toplamının yanısıra üst komonotonik toplamlar için de olasılık seviyelerinin belirli bir eşik değerden daha büyük olduğu gösterilebilir (Cheung 2009).

Tanım 2.8 (Cheung 2009): (Ω, F, P) olasılık uzayında F_i, X_i 'nin dağılım fonksiyonunu, N , Tüm "0" olasılıklı kümelerin toplamı olsun.

$\forall a = (a_1, \dots, a_n) \in IR^n$ için $U(a)$ ile üst kuadrant, $L(a)$ ile alt kuadrant bölge gösterilmektedir. $U(a) = (a_1, \infty) \times \dots \times (a_n, \infty)$, $L(a) = (-\infty, a_1] \times \dots \times (-\infty, a_n]$, $\overline{IR}^n = IR^n \cup (-\infty, \dots, -\infty)$, $R(a) = IR^n \setminus (U(a) \cup L(a))$, $U(-\infty) = IR^n$ ve

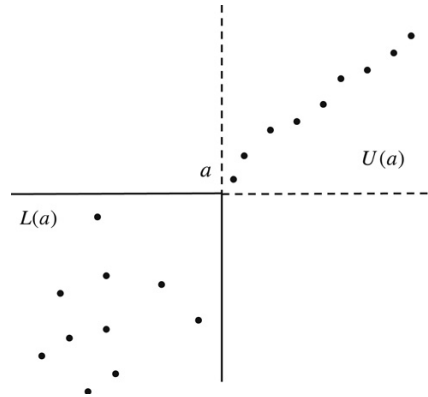
$L(-\infty) = R(-\infty) = \emptyset$ olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan, $N(a) \in N$ ile gösterildiği "0" olasılık uzayına karşılık gelen öyle bir $a \in \overline{IR}^n$ noktası varsa, $X = (X_1, \dots, X_n)$ rasgele vektörünün üst komonoton olduğu söylenir.

i) $C_{a,N(a)} = \{X(w) : w \in \Omega \setminus N(a)\} \cap U(a)$ kümesi IR^n nin komonotonik bir altkümesidir.

ii) $P(\mathbf{X} \in U(a)) > 0$

iii) $D_{a,N(a)} = \{X(w) : w \in \Omega \setminus N(a)\} \cap R(a)$ boş kümedir.

Burada (i) koşulu X_1, \dots, X_n ler üst kuadrantta değerler aldığıında aynı yönde hareket ettiklerini, (ii) koşulu olasılığın pozitif olduğunu ve (iii) koşulu X rasgele vektörleri kesinlikle üst kuadrantta $[U(a)]$ ya da alt kuadrantta $[L(a)]$ değerler alacağını söyler. Ayrıca $a = (-\infty, \dots, -\infty)$ ise X komonotoniktir.



Şekil 2.1 $n = 2$ r.d. için üst komonoton olan rasgele vektörün gösterimi

İkili noktalar üst kuyrukta komonotonluk sergiliyorsa bu rasgele vektörün üst komonoton olduğu söylenir.

2.7 Risk Ölçümleri, Komonotonluk ve Üst Komonotonluk

X , F dağılım fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken ve $p \in (0, 1)$ olasılık seviyesi

olmak üzere aşağıda özetlediğimiz bazı risk ölçümleri

$$VaR[X; p] = F_X^{-1}(p) = \inf \{x \in IR | F_X(x) \geq p\} \quad (2.38)$$

$$TVaR[X; p] = \frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR[X; \xi] d\xi, \quad 0 < p < 1 \quad (2.39)$$

$$ESF[X; p] = E[(X - VaR[X; p])_+] = \Pi_X(VaR[X; p]) \quad (2.40)$$

ve aralarındaki ilişkiler

$$TVaR[X; p] = VaR[X; p] + \frac{1}{1-p} ESF[X; p] \quad (2.41)$$

$$CTE[X; p] = VaR[X; p] + \frac{1}{F_X(VaR[X; p])} ESF[X; p] \quad (2.42)$$

$$CVaR[X; p] = \frac{ESF[X; p]}{F_X(VaR[X; p])} \quad (2.43)$$

eşitlikleri ile daha önceki alt bölümlerde tanımlanmıştı (Dhaene vd. 2006). Bu risk ölçümlerini dikkate alarak bağımsız olmayan rasgele değişkenlerin toplamları için komonotonluk ve üst komonotonluk kavramına dayalı yaklaşımlar da bu alt bölümde verilmiştir.

Lemma 2.2 (Dönüştürülmüş Rasgele Değişkenlerin Kuantilleri) (Dhaene vd. 2006)

X gerçel değerli bir rasgele değişken ve $0 < p < 1$ olsun. Herhangi bir azalmayan ve soldan sürekli bir g fonksiyonu için

$$VaR_p[g(X)] = g(VaR_p[X])$$

eşitliği yazılır.

Azalmayan ve sağdan sürekli bir g fonksiyonu için de aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$VaR_p[g(X)] = g(VaR_{1-p}^+[X])$$

g 'nin diğerk durumları için benzer gösterimler Ek 1'de ifade edilmiş olup, ispatı (Dhaene vd. 2002a)-Teorem 1(a)'da verilmiştir.

Teorem 2.2 (Dhaene vd. 2006): Aşağıdaki eşitlikler komonotonik risklerin toplamları için risk ölçümlerinin toplanabilirliğini ifade etmektedir.

$(X_1^C, X_2^C, \dots, X_n^C)$ komonotonik bir rasgele vektör olsun.

$$S^C = X_1^C + X_2^C + \dots + X_n^C, \quad p \in (0, 1) \text{ için}$$

$$VaR_p [S^C] = \sum_{i=1}^n VaR_p [X_i^C] \quad (i)$$

$$TVaR [S^C] = \sum_{i=1}^n TVaR_p [X_i^C] \quad (ii)$$

$$ESF [S^C] = \sum_{i=1}^n ESF_p [X_i^C] \quad (iii)$$

eşitlikleri yazılır.

İspat:

i)

$$S^C \stackrel{d}{=} F_{X_1}^{-1}(U) + F_{X_2}^{-1}(U) + \dots + F_{X_n}^{-1}(U) = g(U)$$

Burada $VaR_p [X_i] = F_{X_i}^{-1}(p)$ p 'nin azalmayan soldan sürekl bir fonksiyonu olarak tanımlandığından g azalmayan ve sürekl bir fonksiyondur. Lemma 2.2'den

$$VaR_p \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] = \sum_{i=1}^n VaR_p [X_i]$$

yazılır.

ii) TVaR p 'nin azalmayan bir fonksiyonudur. (2.41) ve (i) den dolayı eşitlik ispatlanmış olur.

iii) ESF (2.40) eşitliğindeki gibi olup VaR'a bağlı olduğundan azalmayan bir fonksiyondur. Dolayısıyla toplamları da soldan sürekli ve azalmayan bir fonksiyondur. (i) ve (ii)'den ispatlanmış olur.

Sonuç 2.6 (Dhaene vd. 2006): $(X_1^C, X_2^C, \dots, X_n^C)$ marjinalleri sürekli ise

$$CTE_p [S^C] = TVaR [S^C] = \sum_{i=1}^n TVaR_p [X_i^C] = \sum_{i=1}^n CTE_p [X_i^C]$$

yazılabilir. S^C 'nin dağılım fonksiyonu sürekli ise bu yazılabilir. Marjinal dağılımların sürekli olmadığı durum için CTE genelde komonotonik riskler için toplamsal değildir.

Sonuç 2.7 $(X_1^C, X_2^C, \dots, X_n^C)$ komonotonik bir rasgele vektör olsun.

$$CTE_p (X) = VaR_p (X) + \frac{ESF_p (X)}{1 - F_X (VaR_p (X))}$$

$$CVaR_p (X) = CTE_p (X) - VaR_p (X)$$

olduğundan $S^C = X_1^C + X_2^C + \dots + X_n^C$, $p \in (0, 1)$ için Lemma 2.2, Teorem 2.2 ve CVaR'ın (2.43) eşitliğindeki tanımından

$$CVaR [S^C] = \sum_{i=1}^n CVaR_p [X_i^C]$$

eşitliği yazılabilir.

Sonuç 2.8 (Cheung 2009): $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$ komonotonik eşik değer ve

$$\mathbf{X} = (\tilde{X}_1^C, \tilde{X}_2^C, \dots, \tilde{X}_n^C)$$

üst komonotonik rasgele vektörü olsun.

$$\tilde{S}^C = \tilde{X}_1^C + \tilde{X}_2^C + \dots + \tilde{X}_n^C, \quad p \in (F(a_1^*, \dots, a_n^*), 1) \text{ için}$$

$$VaR_p [\tilde{S}^C] = \sum_{i=1}^n VaR_p [\tilde{X}_i^C]$$

$$TVaR [\tilde{S}^C] = \sum_{i=1}^n TVaR_p [\tilde{X}_i^C]$$

$$ESF [\tilde{S}^C] = \sum_{i=1}^n ESF_p [\tilde{X}_i^C]$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu sonuç (X_1, \dots, X_n) lerin komonotonik olmadıkları halde bile p 'nin 1'e yakın değerleri için bu risk ölçülerinin toplanabilirlik özelliğini üst komonotonluk durumunda korudukları anlamına gelmektedir .

3. KOPULALAR

Kopulalar, çok değişkenli bağımlılığın ilgili olduğu bir çok alanda çok değişkenli modelleme aracı olarak kullanılmaktadır. Her bir rasgele değişkenin marjinal dağılımına ve bu marjinal dağılımlar arasındaki ilişkinin ölçüsüne ihtiyaç olduğunda kopulalar, sadece marjinal dağılımları kesin olarak belirlemekle kalmaz, aynı zamanda bu marjinallerin ortak davranışları hakkında da büyük bir bilgi verir. Kopula fonksiyonlarının olasılık teorisinde iyi çalışan özellikleri, risk yönetiminin bağımlı modeller ile açıklanan farklı alanlarına da uyarlanabilir.

Kopulalar, aşağıda belirtilen bazı alanlarda řu amaçlarla kullanılmaktadır (Yan 2006):

- Aktueryal bilimde; bağımlı mortalitenin ve kayıpların (hasarların) modellenmesinde (Frees vd.1996, Frees ve Valdez 1998, Frees ve Wang 2005)
- Finansta; varlık paylaşımında (asset allocation), kredi değerlemede, risk modellemesinde ve risk yönetiminde (Bouy ´e vd. 2000, Embrechts vd. 2003, Cherubini vd. 2004)
- Biyomedikal çalışmalarda; ilişkili olay zamanlarının ve yarışan risklerin modellenmesinde (Wang ve Wells 2000, Escarela ve Carriere 2003)
- Mühendislikte çok değişkenli süreç kontrolü ve hidrolojik modellemede (Yan 2006b, Genest ve Favre 2006).

3.1. Kopulalarla İlgili Temel Bilgiler

Bu bölümde, $C(\mathbf{u}) = C(u_1, u_2, \dots, u_d)$ notasyonu ile gösterilen kopula fonksiyonları için verilen gerekli tanımlar düzgün dağılımlı tek boyutlu marjinaller için yapılmıştır.

Tanım 3.1 (Schweizer 1991): $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ biçiminde tanımlanan d boyutlu bir kopula aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyondur.

(1) $c \leq d$ olmak üzere her $a_c \in [0, 1]$ için

$$C(1, \dots, 1, a_c, 1, \dots, 1) = a_c$$

(2) Herhangi bir $c \leq d$ için $a_c = 0$ ise

$$C(a_1, \dots, a_d) = 0$$

(3) C , d boyutlu artandır.

d tane düzgün dağılımlı tek boyutlu marjinaler ile açıklanan d boyutlu kapulamanın d boyutlu dağılım fonksiyonu olduğu aşağıdaki şekilde gösterilebilir (Trivedi ve Zimmer 2007).

$F(y_1, \dots, y_d)$ ile d boyutlu sürekli dağılım fonksiyonu, $F_1(y_1), \dots, F_d(y_d)$ ile tek boyutlu marjinal dağılım fonksiyonları ve $F_1^{-1}, \dots, F_d^{-1}$ ile kuantil fonksiyonlar gösterilmek üzere

$$y_1 = F_1^{-1}(u_1) \sim F_1, \dots, y_d = F_d^{-1}(u_d) \sim F_d$$

yazılabilir. Burada u_1, \dots, u_d düzgün dağılımlı değişkenlerin dönüşümleri F_i ($i = 1, \dots, d$) dağılımlıdır. Böylece

$$\begin{aligned} F(y_1, \dots, y_d) &= F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)) \\ &= P[U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d] \\ &= C(u_1, \dots, u_d) \end{aligned}$$

biçiminde dağılım fonksiyonu ile ilişkili yazılabilen tek kapula vardır. Yani, F sürekli olmak üzere $y \sim F$ ve $U \sim C$ ise aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\begin{aligned} (F_1(y_1), \dots, F_d(y_d)) &\sim C \\ (F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)) &\sim F \end{aligned}$$

3.1.1 Sklar teoremi

Teorem 3.1 (Sklar 1959): $F(x_1, x_2)$, $F_1(x_1)$ ve $F_2(x_2)$ sürekli marjinler ile birlikte tanımlı bir ortak dağılım olsun. Böyle bir fonksiyon için

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \quad (3.1)$$

şeklinde yazılabilen tek bir kopula vardır. Bu teoremden, F fonksiyonu ile ilgili olan herhangi bir C kopulası

$$C(u_1, u_2) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)) \quad (3.2)$$

biçiminde yazılabilir.

Sklar teoremi, rasgele değişkenlerin marjinal dağılımlarını dikkate almadan bu rasgele değişkenlerin bağımlılık yapısını analiz ettiğinden çok önemlidir.

Sırasıyla F_1 ve F_2 dağılım fonksiyonlarına sahip X_1 ve X_2 bağımsız rasgele değişkenleri düşünülün. Ortak dağılım ve bağımsız kopula fonksiyonları sırasıyla

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F_1(x_1) \cdot F_2(x_2) \\ C_I(u_1, u_2) &= u_1 \cdot u_2, \quad \mathbf{u} \in [0, 1]^2 \end{aligned}$$

oluyor ise bu kopulalara bağımsız kopulalar denir (Nelsen 1998).

3.1.2 Kopulalara ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonları

f , ortak yoğunluk fonksiyonunu, f_i , $i = 1, \dots, d$ marjinal yoğunlukları göstermek üzere bir kopula fonksiyonu differansiyellenebilirse, kopulalara ilişkin olasılık yoğun-

luk fonksiyonu zincir kuralı ile

$$c(\mathbf{u}) = \frac{\partial^d C(u_1, u_2, \dots, u_d)}{\partial u_1 \dots \partial u_d} = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))}{f_1(F_1^{-1}(u_1)) \dots f_d(F_d^{-1}(u_d))} \quad (3.3)$$

şeklinde elde edilir (Denuit vd. 2005).

3.1.3 Kopulalardan çıkarılan koşullu dağılımlar

Bir C kopulasına sahip U_1 ve U_2 iki düzgün rasgele değişken düşünülün ve U_1 gözlemlensin. Amaç U_1 gözlemlendiğinde U_2 'yi tahmin etmek için kullanılabilen koşullu dağılımı elde etmektir. Gerekli özellikleri sağladığı varsayımıyla, koşullu kümülatif dağılım fonksiyonları

$$\begin{aligned} C_{2|1}(u_2|u_1) &= \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2) \\ C_{1|2}(u_1|u_2) &= \frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2) \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir (Denuit vd. 2005).

Teorem 3.2 (Denuit vd. 2005) Teorem 3.1'deki gibi bir dağılım fonksiyonuna sahip bir \mathbf{X} rasgele çifti için her $x \in \mathbb{R}^2$ için sağlanan aşağıdaki eşitlikler tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} P(X_2 \leq x_2 | X_1 = x_1) &= C_{2|1}(F_2(x_2) | F_1(x_1)) \\ P(X_1 \leq x_1 | X_2 = x_2) &= C_{1|2}(F_1(x_1) | F_2(x_2)) \end{aligned}$$

İspat: (U_1, U_2) ortak C dağılım fonksiyonuna sahip rasgele bir çift olsun. $U_1 = u_1$ verilmişken U_2 'nin koşullu dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} P(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1) &= \lim_{\Delta u_1 \rightarrow 0} \frac{P(u_1 \leq U_1 \leq u_1 + \Delta u_1, U_2 \leq u_2)}{P(u_1 \leq U_1 \leq u_1 + \Delta u_1)} \\ &= \lim_{\Delta u_1 \rightarrow 0} \frac{C(u_1 + \Delta u_1, u_2) - C(u_1, u_2)}{\Delta u_1} \\ &= C_{2|1}(u_2 | u_1) \end{aligned}$$

$X_1 = x_1$ verilmişken X_2 'nin koşullu dağılım fonksiyonu, u_i 'lerin $F_i(x_i)$, $i = 1, 2$ ile yer değiştirmesiyle elde edilir ve belirtilen sonuçlar çıkar.

3.1.4 Frechet sınırları

Kopulanın Frechet Üst Sınırı C_U , alt sınırı C_L ile gösterilmek üzere

$$\begin{aligned} C_U(u_1, u_2) &= \min\{u_1, u_2\} & , \mathbf{u} \in [0, 1]^2 \\ C_L(u_1, u_2) &= \max\{0, u_1 + u_2 - 1\} & , \mathbf{u} \in [0, 1]^2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Kopulalar birim düzgün marjinallere sahip iki değişkenli dağılım fonksiyonu olduğundan herhangi bir C kopulası için sınırlar

$$C_L(u_1, u_2) \leq C(u_1, u_2) \leq C_U(u_1, u_2) \quad , \forall \mathbf{u} \in [0, 1]$$

biçiminde ifade edilir.

Frechet-Hoeffding Sınırları: $C(\mathbf{u}) = C(u_1, \dots, u_d)$ bir kopula ise

$$\max\left\{\sum_{i=1}^d u_i + 1 - d, 0\right\} \leq C(\mathbf{u}) \leq \min\{u_1, \dots, u_d\}$$

şeklindedir. Burada üst sınır her zaman kümülatif bir dağılım fonksiyonu iken, alt sınır $d = 2$ için kümülatif dağılım fonksiyonudur. $d > 2$ için alt sınır bazı koşullarda kümülatif dağılım fonksiyonu olabilir (Joe 1997). Üst sınır, bir dağılım fonksiyonu ve böylelikle de kopula fonksiyonu olduğundan $C_U(y_1, \dots, y_d)$ ile tanımlanabilir. Eğer alt sınır da bir kopula ise $C_L(y_1, \dots, y_d)$ ile tanımlamak doğru olur. Bu tanımlamalar ile kopulalar için Frechet-Hoeffding sınırları

$$C_L(u_1, \dots, u_d) \leq C(u_1, \dots, u_d) \leq C_U(u_1, \dots, u_d)$$

biçiminde yeniden ifade edilebilir (Trivedi ve Zimmer 2007). Burada $C_U(\cdot)$ ile komonoton kopula veya Frechet- Hoeffding üst sınırı, $C_L(\cdot)$ ile Frechet Hoeffding alt sınırı gösterilmektedir (Denuit vd. 2005).

Frechet-Hoeffding sınırlarını bilmek verilere uygun bir kopula seçiminde önemlidir. Kopulanın istenen bir özelliği, üst ve alt sınırlar arasındaki örnek uzayı kapsayabilmesidir. Ayrıca kopula seçimi doğru ise tanımlı olduğu aralıkta bağımlılık parametresi α 'nın alt (üst) sınıra yaklaşırken, kopulanın da Frechet Hoeffding alt (üst) sınırına yaklaşması beklenir (Trivedi ve Zimmer 2007)

3.2 Kopulaların Özellikleri

3.2.1 Yaşam (Survival) kopulaları

Eğer C bir kopula ise

$$\bar{C}(u_1, u_2) = C(1 - u_1, 1 - u_2) + u_1 + u_2 - 1, \quad \mathbf{u} \in [0, 1]^2$$

şeklinde tanımlanan \bar{C} fonksiyonu, C kopulasına bağlı yaşam kopulası olarak adlandırılır.

$$\begin{aligned} P[U_1 > u_1, U_2 > u_2] &= 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2) \\ &\neq \bar{C}(u_1, u_2) \end{aligned}$$

olmasına rağmen

$$P[U_1 > u_1, U_2 > u_2] = \bar{C}(1 - u_1, 1 - u_2)$$

eşitliği sağlanır. \bar{C} yaşam kopulası için Frechet sınırları

$$\bar{C}_L = C_L, \quad \bar{C}_I = C_I, \quad \bar{C}_U = C_U$$

olmak üzere

$$C_L(u_1, u_2) \leq \bar{C}(u_1, u_2) \leq C_U(u_1, u_2)$$

şeklinde tanımlanır (Denuit vd. 2005).

3.2.2 Dual ve ortak kopulalar

C kopulasına bağlı C^* ortak kopulası

$$C^*(u_1, u_2) = 1 - C(1 - u_1, 1 - u_2), \quad \mathbf{u} \in [0, 1]^2$$

ile C kopulasının \tilde{C} duali

$$\tilde{C}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - C(u_1, u_2), \quad \mathbf{u} \in [0, 1]^2$$

ile tanımlanır. Ortak kopula ve dualin her ikisi de kopula değildir. Buna rağmen,

$$P[X_1 > x_1 \text{ veya } X_2 > x_2] = C^*(\bar{F}_1(x_1), \bar{F}_2(x_2))$$

$$P[X_1 \leq x_1 \text{ veya } X_2 \leq x_2] = \tilde{C}(\bar{F}_1(x_1), \bar{F}_2(x_2))$$

olasılıklarını tanımlarken kullanılır. Ortak kopulanın ortak kopulası orjinal kopulayı verir.

$\forall \mathbf{u} \in [0, 1]^2$ için bağımsız ve Frechet sınırlı kopulalara bağlı ortak kopulalar

$$C_L^*(u_1, u_2) = \min\{u_1 + u_2, 1\}$$

$$C_I^*(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - u_1 \cdot u_2$$

$$C_U^*(u_1, u_2) = \max\{u_1, u_2\}$$

şeklinde verilir.

3.2.3 Fonksiyonel değişmezlik

Sonuç 3.2 (Denuit 2005): X_1 ve X_2 , C kopulasına sahip sürekli iki rasgele değişken, t_1 ve t_2 de sürekli monoton fonksiyonlar olsun.

1. t_1 ve t_2 azalmayan fonksiyonlar ise $(t_1(X_1), t_2(X_2)) \sim C$
2. t_1 azalmayan, t_2 artmayan fonksiyonlar ise $(t_1(X_1), t_2(X_2)) \sim u_1 - C(u_1, 1 - u_2)$
3. t_1 artmayan, t_2 azalmayan fonksiyonlar ise $(t_1(X_1), t_2(X_2)) \sim u_2 - C(1 - u_1, u_2)$
4. t_1 ve t_2 artmayan fonksiyonlar ise $(t_1(X_1), t_2(X_2)) \sim \bar{C}$

Bu sonuç kopulaların değişmezlik özelliğini açıklar. Kopula ile elde edilen bağımlılığın marjinal dağılımların artan ve sürekli dönüşümlerine göre değişmez olduğu (1)'de ifade edilmiştir (Schweizer ve Sklar 1983). Örneğın, $(\ln X_1, \ln X_2)$ arasındaki bağımlılığı açıklamak için (X_1, X_2) için kullanılan aynı kopula kullanılabilir. Marjinalleri doğal birimlerle veya logaritmik birimlerle açıklamak kopulayı etkilemez.

3.2.4 Kuyruk bağımlılığı

C kopulasına sahip (U, V) rasgele çifti için sırasıyla λ_U üst ve λ_L alt kuyruk bağımlılık katsayıları

$$\lambda_U = \lim_{v \rightarrow 1} \frac{1 - 2v + C(v, v)}{1 - v}$$
$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u, u)}{u}$$

biçiminde tanımlanır (Denuit vd. 2005).

3.2.5 Komonotonik kopula

X_1 ve X_2 rasgele değişkenleri bağımsız değillerse mükemmel pozitif veya negatif bağımlılık sırasıyla komonotonluk (comonotonicity) ve ters komonotonluk (countermonotonicity) kavramlarıyla açıklanır. Her $(x_{1j}, x_{2j}), (x_{1k}, x_{2k})$ kümesi,

$$\{x_{1j} \leq x_{2j}, x_{1k} \leq x_{2k}\} \text{ veya } \{x_{1j} \geq x_{2j}, x_{1k} \geq x_{2k}\}$$

ise komonotonik,

$$\{x_{1j} \leq x_{2j}, x_{1k} \geq x_{2k}\} \text{ veya } \{x_{1j} \geq x_{2j}, x_{1k} \leq x_{2k}\}$$

ise ters komonotoniktir.

Teorem 3.3 (Dhaene vd. 2002a, b):

X_1, X_2 'nin artan fonksiyonu ise

$$(X_1, X_2) \text{ komonotoniktir} \Leftrightarrow C(\cdot) = C_U(\cdot)$$

ve X_1, X_2 'nin azalan fonksiyonu ise

$$(X_1, X_2) \text{ ters komonotoniktir} \Leftrightarrow C(\cdot) = C_L(\cdot)$$

bağıntıları vardır.

Bu teorem, kapulanın üst Frechet-Hoeffding sınırına ulaştığında ilişkinin pozitif, alt Frechet-Hoeffding sınırına ulaştığında ilişkinin negatif olduğunu söyler. Ayrıca komonotonik kapula için üst kuyruk bağımlılık katsayısının 1 olduğu

$$C(\cdot) = C_U(\cdot) \Rightarrow \lambda_U = 1$$

Asmussen ve Glynn (2007)'de belirtilmektedir.

3.3 Önemli Kopulalar

3.3.1 Eliptik kopulalar

Normal kopula :

$$C_\alpha(u_1, u_2) = H_\alpha(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)), \quad \alpha \in (-1, 1) \quad (3.4)$$

Burada Φ , tek değişkenli $N(0, 1)$ olan bir dağılım fonksiyonudur. Yani;

$$C_\alpha(u_1, u_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \exp\left(\frac{-(\xi_1^2 - 2\alpha\xi_1\xi_2 + \xi_2^2)}{2(1-\alpha^2)}\right) d\xi_1 d\xi_2$$

şeklindedir ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$c_\alpha(u_1, u_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}} \exp\left(\frac{-(\xi_1^2 - 2\alpha\xi_1\xi_2 + \xi_2^2)}{2(1-\alpha^2)}\right) \frac{d}{du_1} \Phi^{-1}(u_1) \frac{d}{du_2} \Phi^{-1}(u_2)$$

biçiminde elde edilir. Burada $\xi_i = \Phi^{-1}(u_i)$, $i = 1, 2$ dir. $\varphi = \Phi'$ ile standart normalin olasılık yoğunluk fonksiyonu tanımlanırsa

$$\frac{d}{du_i} \Phi^{-1}(u_i) = \frac{1}{\varphi(\Phi^{-1}(u_i))} = \sqrt{2\pi} \exp(-\xi_i^2/2)$$

olur. Gaussian kopulasının olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$c_\alpha(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \exp\left(\frac{-(\xi_1^2 - 2\alpha\xi_1\xi_2 + \xi_2^2)}{2(1-\alpha^2)}\right) \exp\left(\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2}\right)$$

biçimindedir.

Student t kopulası : Normal kopulanın iki değişkenli Normal dağılımdan üretildiği gibi Student t kopulası da iki değişkenli Student t dağılımından elde edilir. m serbest-

lik dereceli tek değişkenli Student t dağılımının dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$t_m(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^x \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{m\pi}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(1 + \frac{\xi^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}} d\xi$$

İki değişkenli Student t dağılımının ortak dağılım fonksiyonu, $0 < \alpha < 1$ için

$$t_{m,\alpha}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}} \left(1 + \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\alpha\xi_1\xi_2}{m(1-\alpha^2)}\right)^{-\frac{m+2}{2}} d\xi_1 d\xi_2$$

şeklinde tanımlanır.

Student t kopulası

$$\begin{aligned} C_{m,\alpha}(u_1, u_2) &= t_{m,\alpha}(t_m^{-1}(u_1), t_m^{-1}(u_2)) \\ &= \int_{-\infty}^{t_m^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_m^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}} \left(1 + \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\alpha\xi_1\xi_2}{m(1-\alpha^2)}\right)^{-\frac{m+2}{2}} d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanır. $m \rightarrow \infty$ için Student t kopulası Normal dağılıma yaklaşır. Sınırlı sayıda serbestlik dereceleri için iki kopulanın eğimleri oldukça farklıdır.

Student t kopulasının yoğunluğu

$$c_{m,\alpha}(u) = \alpha^{-1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\right)^2} \left(1 + \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\alpha\xi_1\xi_2}{m(1-\alpha^2)}\right)^{-\frac{m+2}{2}} \left(1 + \frac{\xi_1}{m}\right)^{-\frac{m+2}{2}} \left(1 + \frac{\xi_2}{m}\right)^{-\frac{m+2}{2}}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\xi_1 = t_m^{-1}(u_1)$ ve $\xi_2 = t_m^{-1}(u_2)$ ' dir.

Koşullu Student t kopulası

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = t_{m+1} \left(\sqrt{\frac{m+1}{m+(t_m^{-1}(u_1))^2}} \frac{t_m^{-1}(u_2) - \alpha t_m^{-1}(u_1)}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right)$$

eşitliği ile verilmektedir. Böylece iki değişkenli Student t kopulası

$$C_{m,\alpha}(\mathbf{u}) = \int_0^{u_1} t_{m+1} \left(\sqrt{\frac{m+1}{m+(t_m^{-1}(\xi))^2}} \frac{t_m^{-1}(u_2) - \alpha t_m^{-1}(\xi)}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right) d\xi$$

biçimini alır. m ne olursa olsun

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1} C_{m,\alpha} = C_L \text{ ve } \lim_{\alpha \rightarrow 1} C_{m,\alpha} = C_U$$

elde edilir. Ayrıca sonlu m 'ler için $C_{m,0} \neq C_I$ 'dir.

3.3.2 Arşimedyan kopulalar

Eliptik kopulalar sınıfı çok değişkenli dağılımlar için zengin bir kaynak olmasına rağmen, gerçekte simetriklik özelliğinin çoğu sigorta ve finans uygulamalarında uygun olmadığı durumlar vardır. Bu gibi durumlarda model bağımlılık yapısı için daha kullanışlı olan Arşimedyan kopulalarının kullanımı tercih edilir.

$$C_\phi(u_1, u_2, \alpha) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \alpha(\phi(u_2) - \phi(u_1))) \quad , \quad u_1, u_2 \in (0, 1] \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanır. Burada ϕ ile gerçekte bir dağılım fonksiyonu olan C_ϕ kopulasının bir üreticisi, α ile de bağımlılık parametresi gösterilmektedir. Burada ϕ üreticisinin farklı seçimleri ile özel bağımlılık özelliklerini modelleyen farklı kopula aileleri elde edilir. Örneğin $\phi = -\ln(t)$ olarak seçildiğinde

$$\begin{aligned}
C_\phi(u_1, u_2) &= \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2)) \\
&= \exp\{-(-\ln(u_1) - \ln(u_2))\} \\
&= \exp\{\ln(u_1) + \ln(u_2)\} \\
&= \exp\{\ln(u_1 \cdot u_2)\} \\
&= u_1 \cdot u_2
\end{aligned} \tag{3.7}$$

biçiminde u_1 ve u_2 'nin ortak dağılımı elde edilir.

Gumbel kopulası:

İki değişkenli Gumbel kopulası veya Gumbel-Hougaard kopulası aşağıdaki biçimde verilimektedir.

$$C_\alpha^{Gu}(u_1, u_2) = \exp\left[-\left((-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right], \quad \alpha \in [1, \infty). \tag{3.8}$$

$\alpha = 1$ için bağımsızlık durumu, $\alpha \rightarrow \infty$ için maksimum pozitif bağımlılık vardır.

Clayton kopulası:

$$C_\alpha(u_1, u_2) = \max\left\{\left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{-1/\alpha}, 0\right\}, \quad \alpha > 0 \tag{3.9}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} C_\alpha(u_1, u_2) = \min\{u_1, u_2\} = C_U(\mathbf{u})$$

$\alpha \rightarrow \infty$ için bağımlılık yapısı maksimuma yaklaşır. Diğer taraftan,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} C_\alpha(u_1, u_2) = u_1 \cdot u_2 = C_I(\mathbf{u})$$

$\alpha \rightarrow 0$ için bağımsızlık elde edilir.

Koşullu dağılımları :

$$C_{2/1}(u_2/u_1) = \frac{\partial}{\partial u_1} C_\alpha(\mathbf{u}) = (1 + u_1^\alpha (u_2^{-\alpha} - 1))^{-1 - \frac{1}{\alpha}}$$

$$C_{1/2}(u_1/u_2) = \frac{\partial}{\partial u_2} C_\alpha(\mathbf{u}) = (1 + u_2^\alpha (u_1^{-\alpha} - 1))^{-1 - \frac{1}{\alpha}}$$

C_α için olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$c_\alpha(\mathbf{u}) = \frac{1 + \alpha}{(u_1 u_2)^{\alpha+1}} (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-2 - \frac{1}{\alpha}}$$

Frank kopulası :

$$C_\alpha(u_1, u_2) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{(\exp(-\alpha u_1) - 1)(\exp(-\alpha u_2) - 1)}{\exp(-\alpha) - 1} \right), \quad \alpha \neq 0 \quad (3.10)$$

C_α 'nın limit durumları:

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} C_\alpha = C_L, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} C_\alpha = C_U, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} C_\alpha = C_I$$

Koşullu dağılımı:

$$C_{2/1}(u_2/u_1) = \frac{\exp(-\alpha u_2) - \exp(-\alpha(u_1 + u_2))}{1 - \exp(-\alpha) - (1 - \exp(-\alpha u_1))(1 - \exp(-\alpha u_2))}$$

Olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$c_\alpha(\mathbf{u}) = \frac{\alpha \exp(-\alpha(u_1 + u_2))(1 - \exp(-\alpha))}{(\exp(-\alpha(u_1 + u_2)) - \exp(-\alpha u_1) - \exp(-\alpha u_2) + \exp(-\alpha))^2}$$

3.3.3 Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) kopula ailesi

Dağılım fonksiyonu

$$C_{\alpha}(u_1, u_2) = F_{U_1}(u_1) F_{U_2}(u_2) \{1 + \alpha (1 - F_{U_1}(u_1)) (1 - F_{U_2}(u_2))\}, \quad |\alpha| \leq 1 \quad (3.11)$$

ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$c_{\alpha}(u_1, u_2) = f_{U_1}(u_1) f_{U_2}(u_2) \{1 + \alpha (1 - 2F_{U_1}(u_1)) (1 - 2F_{U_2}(u_2))\}$$

biçiminde tanımlanır.

$U_1 \sim U(0, 1)$ ve $U_2 \sim U(0, 1)$ için FGM dağılım fonksiyonu

$$C_{\alpha}(u_1, u_2) = u_1 u_2 (1 + \alpha (1 - u_1) (1 - u_2)), \quad -1 \leq \alpha \leq 1$$

ve yoğunluk fonksiyonu

$$c_{\alpha}(u_1, u_2) = 1 + \alpha (1 - 2u_1) (1 - 2u_2), \quad -1 \leq \alpha \leq 1$$

biçimindedir (Nelsen 1998, Bairamov vd. 2001, Tank ve Gebizlioglu 2004).

3.3.4 Marshall-Olkin kopulaları

Kopulaların son bir örneği olarak Marshall-Olkin kopulaları verilebilir. Bileşenlerinden sadece birini veya her ikisini de başarısızlığa uğratan belirli şoklara maruz kalan iki bileşen ele alınsın. Şoklar bağımsız olduğu varsayılan zamanlarda ortaya çıkıyorlar ve sırasıyla λ_1 , λ_2 ve λ_{12} parametrelili üstel dağılıma sahiptirler. Her iki bileşeni de etkileyen şok ise 12 alt indisi ile gösteriliyor. Gerçekleşen şok zamanları Z_1, Z_2 ve

Z_{12} ile gösterilsin. Bileşenlerin sırasıyla x_1 ve x_2 'den daha uzun yaşaması olasılığı

$$P(Z_1 > x_1) P(Z_2 > x_2) P(Z_{12} > \max\{x_1, x_2\}) \quad (3.12)$$

biçiminde ifade edilir. (3.12)'den yararlanarak $\alpha_i \in [0, 1]$ için

$$C_{\alpha_1, \alpha_2}(u_1, u_2) = \min\{u_2 \cdot u_1^{1-\alpha_1}, u_1 \cdot u_2^{1-\alpha_2}\} \quad (3.13)$$

şeklinde elde edilen kopulaya Marshall-Olkin kopulası veya genelleştirilmiş Cuadras-Auge kopulası denir. Burada $\alpha_i = \lambda_{12}/(\lambda_i + \lambda_{12})$, $i = 1, 2$ 'dir. Şimdiye kadar sunulan kopulaların aksine, bu kopula hem mutlak sürekliliğe hem de tekil bir bileşene sahiptir. Mutlak sürekli bileşenler için yoğunluk aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C_{\alpha_1, \alpha_2}(u_1, u_2) = \begin{cases} u_1^{-\alpha_1} & , u_1^{\alpha_1} > u_2^{\alpha_2} \\ u_2^{-\alpha_2} & , u_1^{\alpha_1} < u_2^{\alpha_2} \end{cases}$$

U_1 ve U_2 düzgün dağılımları için bu kopula

$$P(U_1 = U_2^{\alpha_2/\alpha_1}) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2}$$

şeklinde elde edilir (Nelsen 1998, Denuit vd. 2003, Cherubini vd. 2004).

3.4 Kopular Yoluya Simülasyon

3.4.1 Eliptik kopular için simülasyon yöntemleri

Gaussian n kopula C_R^N :

- R 'nin A Cholesky ayrışımı bulunur
- $N(0, 1)$ dağılımından n tane bağımsız $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)'$ rasgele değişkenleri elde edilir.

- $\mathbf{x} = A\mathbf{z}$ eşitliğinde yerine yazılır.
- $i = 1, 2, \dots, n$ için $u_i = \Phi(x_i)$ 'ler elde edilir.
- F_i 'ler i . marjini göstermek üzere; $(u_1, \dots, u_n)' = (F_1(t_1), \dots, F_n(t_n))'$ denkliği yazılabilir.

Student t kopulası $T_{R,m}$

- R 'nin A Cholesky ayrışımı bulunur
- $N(0, 1)$ dağılımından n tane bağımsız $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)'$ rasgele değişkenleri elde edilir.
- \mathbf{z} 'den bağımsız χ_m^2 'den bir s rasgele değişkeni simüle edilir.
- $\mathbf{y} = A\mathbf{z}$ eşitliğinde yerine yazılır.
- $\mathbf{x} = \sqrt{(m/s)}\mathbf{y}$ elde edilir.
- $i = 1, 2, \dots, n$ için $u_i = T_m(x_i)$ 'ler elde edilir.
- F_i 'ler i . marjini göstermek üzere; $(u_1, \dots, u_n)' = (F_1(t_1), \dots, F_n(t_n))'$ denkliği yazılabilir.

3.4.2 Arşimedyan kopulalar için simülasyon yöntemleri

Teorem 3.2 (Cherubini vd. 2004): $C(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n))$, $\varphi(\cdot)$ üreticisi ile n değişkenli bir Arşimedyan kopulası olsun. $k = 2, \dots, n$ için

$$C_k(u_k | u_1, \dots, u_{k-1}) = \frac{\varphi^{-1(k-1)}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \dots + \varphi(u_k))}{\varphi^{-1(k-1)}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \dots + \varphi(u_{k-1}))}$$

ile verilen yöntemin sonucu, en çok kullanılan Gumbel, Frank ve Clayton arşimedyan kopulaları için aşağıda verilmiştir.

Gumbel n kopulası:

$\varphi(u) = (-\ln(u))^\alpha$ üreticisi yardımıyla Gumbel n kopulası

$$C(u_1, \dots, u_n) = \exp \left\{ - \left[\sum_{i=1}^n (-\ln u_i)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} \right\}, \quad \alpha > 1$$

biçiminde elde edilir.

$w = t^{\frac{1}{\alpha}} \rightarrow t = w^\alpha$ olduğunda

$$\varphi^{-1}(w) = \exp(-w) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}-1} = \frac{1}{\alpha} w^{1-\alpha}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \varphi^{-1(1)}(t) &= \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial t} = -e^{-w} \frac{1}{\alpha} w^{1-\alpha} \\ \varphi^{-1(2)}(t) &= \frac{\partial \varphi^{-1(1)}}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\alpha^2} e^{-w} w^{1-2\alpha} (w - 1 + \alpha) \end{aligned}$$

olur. Bu yinelemeli bir formül değildir.

Gumbel kopulasından $(u_1, \dots, u_n)'$ rasgele değişkenlerini üreten algoritma aşağıda verilmiştir.

- $U(0, 1)$ 'den n tane bağımsız $(v_1, \dots, v_n)'$ rasgele değişkenleri üretilir.
- $u_1 = v_1$ alınır.
- $v_2 = C_2(u_2|v_1)$ de yerine yazılır. $c_1 = \varphi(u_1) = (-\ln(u_1))^\alpha$ ve $c_2 = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = (-\ln(u_1))^\alpha + (-\ln(u_2))^\alpha$ olmak üzere

$$v_2 = \frac{\varphi^{-1(1)}(c_2)}{\varphi^{-1(1)}(c_1)}$$

eşitliği u_2 'ye göre çözülebilir.

- Benzer şekilde $v_3 = C_3(u_3|u_1, u_2) = \frac{\varphi^{-1(2)}(c_3)}{\varphi^{-1(2)}(c_2)}$ eşitliği u_3 için çözülür.

Clayton n kopulası :

$\varphi(u) = u^{-\alpha} - 1$ üreticisi yardımıyla Cook ve Johnson ailesi olarak da bilinen Clayton n kopulası

$$C(u_1, \dots, u_n) = \left[\sum_{i=1}^n u_i^{-\alpha} - n + 1 \right]^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 0$$

biçiminde elde edilir.

$\varphi^{-1}(t)$ fonksiyonunun türevleri,

$$\begin{aligned} \varphi^{-1(1)}(t) &= -\frac{1}{\alpha} (t+1)^{-\frac{1}{\alpha}-1} \\ \varphi^{-1(2)}(t) &= \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha+1}{\alpha} (t+1)^{-\frac{1}{\alpha}-2} \\ &\dots \\ \varphi^{-1(k)}(t) &= (-1)^k \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+k-1)}{\alpha^k} (t+1)^{-\frac{1}{\alpha}-k} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece Teorem 3.2 kullanılarak Clayton kopulasından n tane $(u_1, \dots, u_n)'$ rasgele değişkenlerini üretmek için simülasyon adımları aşağıdaki algorithmada verilmektedir.

- $U(0, 1)$ 'den n tane bağımsız $(v_1, \dots, v_n)'$ rasgele değişkenleri üretilir.
- $u_1 = v_1$ alınır.
- $v_2 = C_2(u_2|v_1)$ 'de yerine yazılır. $c_1 = \varphi(u_1) = u_1^{-\alpha} - 1$ ve $c_2 = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 2$ olmak üzere

$$v_2 = \frac{\varphi^{-1(1)}(c_2)}{\varphi^{-1(1)}(c_1)}$$

eşitliği u_2 için çözülür ve

$$v_2 = \left(\frac{u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1}{u_1^{-\alpha}} \right)^{-\frac{1}{\alpha}-1}$$

$$u_2 = \left(v_1^{-\alpha} \left(v_2^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} - 1 \right) + 1 \right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

bulunur.

- Benzer şekilde

$$v_3 = C_3(u_3|u_1, u_2) = \frac{\varphi^{-1(2)}(c_3)}{\varphi^{-1(2)}(c_2)} = \left(\frac{u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} + u_3^{-\alpha} - 2}{u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1} \right)^{-\frac{1}{\alpha}-2}$$

u_3 için de çözülebilir.

$$v_n = \left(\frac{u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} + \dots + u_n^{-\alpha} - n + 1}{u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} + \dots + u_{n-1}^{-\alpha} - n + 2} \right)^{-\frac{1}{\alpha}-n+1}$$

$$u_n = \left\{ \left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} + \dots + u_{n-1}^{-\alpha} - n + 2 \right) \cdot \left(v_n^{\frac{\alpha}{\alpha(1-n)-1}} - 1 \right) + 1 \right\}^{-\frac{1}{\alpha}}$$

Frank n kopulası :

$\varphi(u) = \ln \left(\frac{\exp(-\alpha u) - 1}{\exp(-\alpha) - 1} \right)$ üreticisi yardımıyla Frank n kopulası

$$C(u_1, \dots, u_n) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left\{ 1 + \frac{\prod_{i=1}^n (e^{-\alpha u_i} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{n-1}} \right\}, \alpha > 0, n \geq 3$$

biçiminde elde edilir.

$\varphi^{-1}(t)$ fonksiyonunun türevleri:

$$\begin{aligned}\varphi^{-1(1)}(t) &= -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{e^t (e^{-\alpha} - 1)}{1 + e^t (e^{-\alpha} - 1)} \right) \\ w &= \frac{e^t (e^{-\alpha} - 1)}{1 + e^t (e^{-\alpha} - 1)} \text{ olsun. } \frac{\partial w}{\partial t} = -w(w-1) \text{ ve } \varphi^{-1(1)}(t) = -\frac{1}{\alpha} w \text{ olur.} \\ \varphi^{-1(2)}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} [\varphi^{-1(1)}(t)] = \frac{\partial}{\partial w} [\varphi^{-1(1)}] \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} w(w-1)\end{aligned}$$

ve benzer olarak

$$\varphi^{-1(3)}(t) = \frac{\partial}{\partial w} [\varphi^{-1(2)}] \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\alpha} w(w-1)(2w-1)$$

elde edilir. Genel durumu:

$$\begin{aligned}\varphi^{-1(1)}(t) &= -\frac{1}{\alpha} g_1(w) \quad , \quad g_1(w) = w \\ \varphi^{-1(k)}(t) &= (-1)^k \frac{1}{\alpha} g_k(w) \quad , \quad g_k(w) = w(w-1) g_{k-1}^{(1)}(w), \quad g_{k-1}^{(1)}(w) = \frac{\partial g_{k-1}}{\partial w}, \quad k \geq 2\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece Frank kopulasından n tane $(u_1, \dots, u_n)'$ rasgele değişkenlerini üretmek için simülasyon aşağıdaki algoritmada verilmektedir.

- $U(0, 1)$ 'den n tane bağımsız $(v_1, \dots, v_n)'$ rasgele değişkenleri üretilir.
- $u_1 = v_1$ alınır.
- $v_2 = C_2(u_2|v_1)$ de yerine yazılır. $c_1 = \varphi(u_1) = \ln \left(\frac{\exp(-\alpha u_1) - 1}{\exp(-\alpha) - 1} \right)$ ve $c_2 = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = \ln \left(\frac{(\exp(-\alpha u_1) - 1)(\exp(-\alpha u_2) - 1)}{(\exp(-\alpha) - 1)^2} \right)$ olmak üzere

$$v_2 = \frac{\varphi^{-1(1)}(c_2)}{\varphi^{-1(1)}(c_1)}$$

eşitliğinin u_2 'ye göre çözülmesi ile

$$v_2 = e^{-\alpha u_1} \frac{\exp(-\alpha u_2) - 1}{\exp(-\alpha) - 1 + (\exp(-\alpha u_1) - 1)(\exp(-\alpha u_2) - 1)}$$

ve

$$u_2 = -\frac{1}{\alpha} \ln \left\{ 1 + \frac{v_2 (1 - e^{-\alpha})}{v_2 (e^{-\alpha u_1} - 1) - e^{-\alpha u_1}} \right\}$$

elde edilir.

$$v_3 = C_3(u_3|u_1, u_2) = \frac{\varphi^{-1(2)}(c_3)}{\varphi^{-1(2)}(c_2)}$$

denkleminde gerekenler yerine yazılır. Burada $c_2 = \ln \left(\frac{(\exp(-\alpha u_1)-1)(\exp(-\alpha u_2)-1)}{(\exp(-\alpha)-1)^2} \right)$ ve $c_3 = \ln \left(\frac{(\exp(-\alpha u_1)-1)(\exp(-\alpha u_2)-1)(\exp(-\alpha u_3)-1)}{(\exp(-\alpha)-1)^3} \right)$ dır. Elde edilen

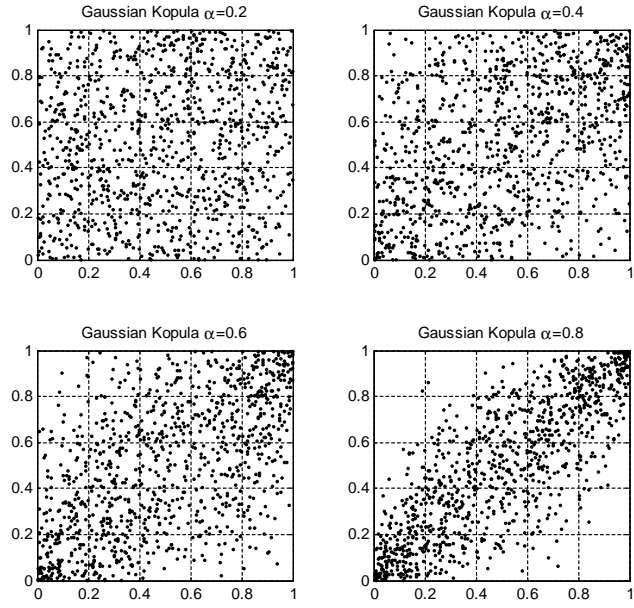
$$v_3 = (e^{-\alpha} - 1) \left[(e^{-\alpha} - 1) + (e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1) \right]^2 \times \frac{(e^{-\alpha u_3} - 1)}{\left[(e^{-\alpha} - 1)^2 + (e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1)(e^{-\alpha u_3} - 1) \right]^2}$$

eşitliğinde $x = e^{-\alpha u_3} - 1$, u_3 'e göre çözüldüğünde 2. dereceden bir polinom eşitliğidir.

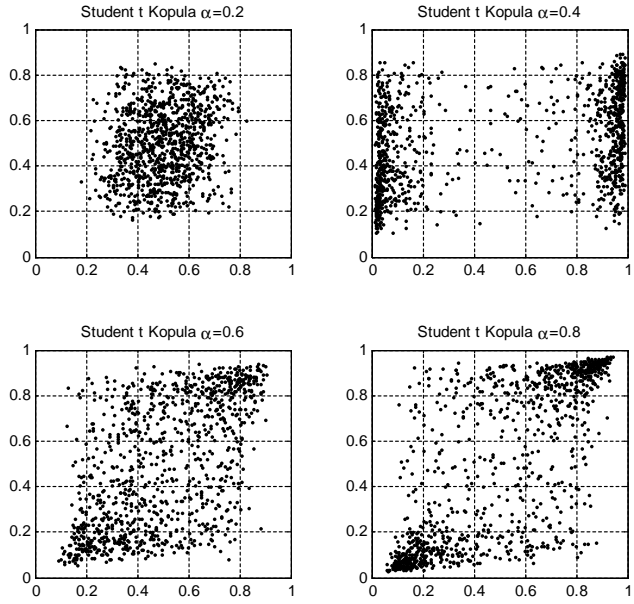
- Böyle devam edildiğinde, her u_k değişkeninin elde edilişi $k - 1$ dereceden bir polinom eşitliğinin çözümünü verir.

(Cherubini vd. 2004).

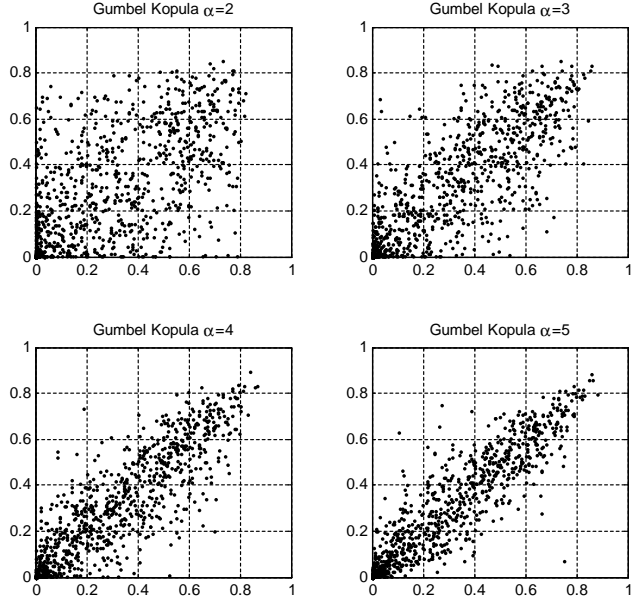
3.4.3. İki değişkenli simülasyon örnekleri



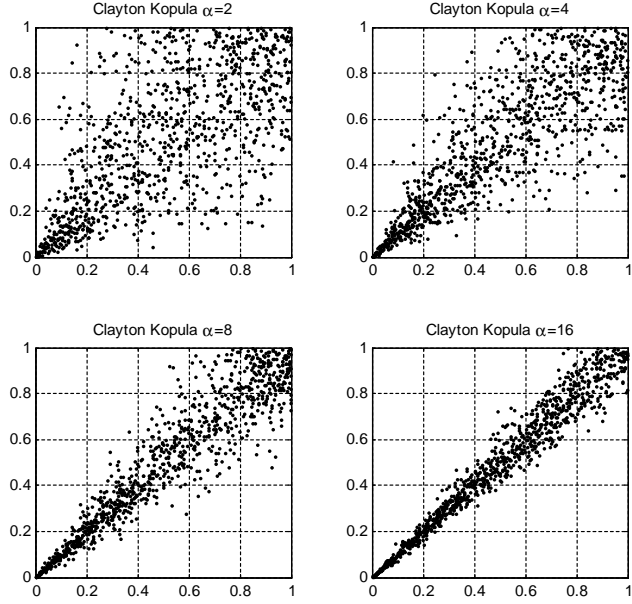
Şekil 3.1 İki Değişkenli Gaussian Kopula Simülasyonları



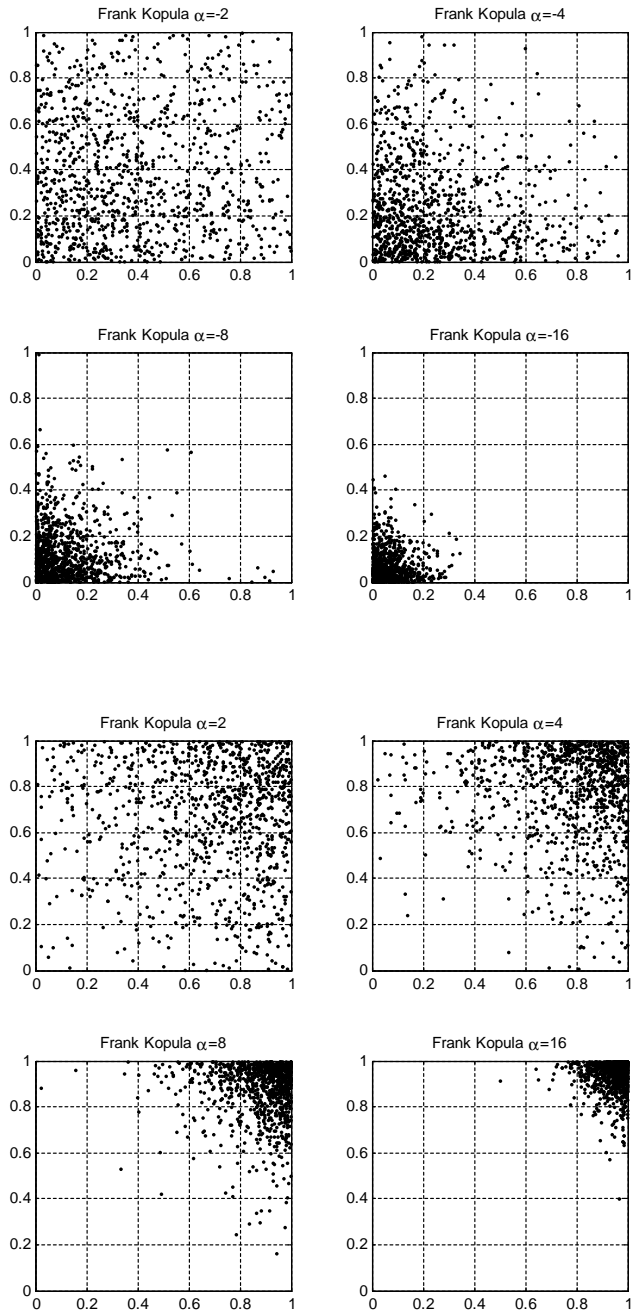
Şekil 3.2 İki Değişkenli Student t Kopula Simülasyonları



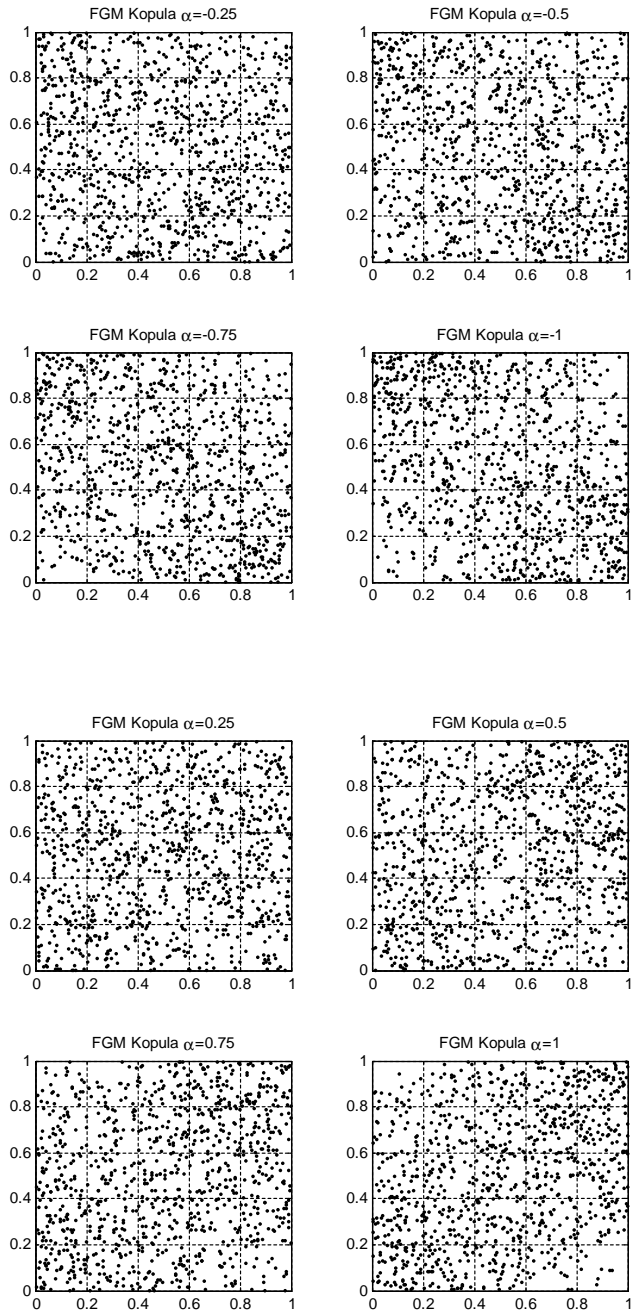
Şekil 3.3 İki Değişkenli Gumbel Kopula Simülasyonları



Şekil 3.4 İki Değişkenli Clayton Kopula Simülasyonları



Şekil 3.5 İki Değişkenli Frank Kopula Simülasyonları



Şekil 3.6 İki Değişkenli FGM Kopula Simülasyonları

3.5 Sıra Sayılarına Dayalı Bazı Bağımlılık Katsayıları

Sklar Teoremine göre (X, Y) rasgele çifti ile ilişkili, marjinallerin monoton artan dönüşümleriyle bile değişmeyen tek bir kopula olduğu bilinmektedir. Bağımlı verilerin fonksiyonları için örneklem bilgisinin büyük miktarını kaybetmeyen (R_i, S_j) , $i, j = 1, \dots, n$ sıra çiftlerinin istatistiklerine gerek vardır. Burada R_i ile X_1, \dots, X_n gözlemlerinden X_i 'nin sırası, S_i ile Y_1, \dots, Y_n gözlemlerinden Y_i 'nin sırası gösterilmek üzere örnekleme dayalı C kopulasını en iyi temsil eden amprik kopula C_n

$$C_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 \left(\frac{R_i}{n+1} \leq u, \frac{S_i}{n+1} \leq v \right)$$

biçiminde tanımlanır. Herhangi bir verilen (u, v) çifti için $C_n(u, v)$ 'nin bilinmeyen $C(u, v)$ niceliğinin $C(u, v)$ 'de yoğunlaştığı ve normal dağılmış büyük örneklemelerde sıraya dayalı bir tahmin edici olduğu gösterilebilir (Genest 2007).

3.5.1 Spearman'ın ρ katsayısı

C_n amprik kopulaya bağlı korelasyon

$$\rho_n = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2 (S_i - \bar{S})^2}} \in [-1, 1]$$

ile tanımlanır. Burada $\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i = \frac{n+1}{2}$ ve $\bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i = \frac{n+1}{2}$ dir. Bu katsayı Pearson korelasyon katsayı r_n 'e bağlı olarak

$$\rho_n = \frac{12}{n(n+1)(n-1)} \sum_{i=1}^n R_i S_i - 3 \frac{n+1}{n-1}$$

eşitliği ile de ifade edilebilir.

C teorik kopulaya bağı korelasyon

$$\begin{aligned}\rho &= 12 \int_{[0,1]^2} uv dC(u, v) - 3 \\ &= 12 \int_{[0,1]^2} C(u, v) dvdu - 3\end{aligned}$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned}\rho &= 12 \int_{[0,1]^2} uv dC_n(u, v) - 3 \\ &= \frac{12}{n} \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{n+1} \frac{S_i}{n+1} - 3 \\ &= \frac{n-1}{n+1} \rho_n\end{aligned}$$

olarak ifade edilebildiğinden ρ_n, ρ 'nun asimptotik tahmin edicisidir. Ayrıca $n \rightarrow \infty$ iken $C_n \rightarrow C$ olur (Hoeffding 1948).

3.5.2 Kendall'ın τ katsayısı

P_n ve Q_n sırasıyla uyumlu (concordant) ve uyumsuz (discordant) çiftlerin sayısını gösterirken amprik durumda

$$\tau_n = \frac{P_n - Q_n}{\binom{n}{2}} = \frac{4}{n(n-1)} P_n - 1$$

biçiminde yazılabilir. $(X_i, Y_i), (X_j, Y_j)$ çiftlerinin $(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) > 0$ ise uyumlu, $(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) < 0$ ise uyumsuz olduğu söylenir. $(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) = 0$ durumu ise bağımlılığın olmadığını gösterir.

$(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) > 0 \iff (R_i - R_j)(S_i - S_j) > 0$ olduğundan τ_n 'nin sadece gö-

zlemlerin sırasının bir fonksiyonu olduğu açıktır. Bu nedenle τ_n , C_n 'nin bir fonksiyonu olarak da yazılabilir.

$i \in \{1, \dots, n\}$ için $I_{ii} = 1$ ve $i \neq j$ ikilileri için

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, & X_j < X_i, Y_j < Y_i \\ 0, & dy \end{cases}$$

olmak üzere uyumlu çiftlerin sayısı P_n

$$P_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} (I_{ij} + I_{ji}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} I_{ij} = -n + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n I_{ij}$$

eşitliği ile verilir. Burada $(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) > 0 \iff I_{ij} + I_{ji} = 1$ dır.

$$W_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{ij} = \frac{1}{n} \# \{j : X_j \leq X_i, Y_j \leq Y_i\}$$

olmak üzere, $\bar{W} = (W_1 + \dots + W_n) / n$ ise

$$P_n = -n + n^2 \bar{W} \quad \text{ve} \quad \tau_n = 4 \frac{n}{n-1} \bar{W} - \frac{n+3}{n-1}$$

elde edilir. Burada

$$W_i = C_n \left(\frac{R_i}{n+1}, \frac{S_i}{n+1} \right)$$

ve

$$\bar{W} = \int_{[0,1]^2} C_n(u, v) dC_n(u, v)$$

alındığında τ_n 'nin C_n ile bağıntılı olarak yazılabileceği görülür. $n \rightarrow \infty$ iken $C_n \rightarrow C$ olacağından

$$\tau = 4 \int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1$$

ile verilen Kendall'ın τ 'su kitle versiyonunun asimptotik olarak yansız tahmin edicisidir (Hoeffding 1948).

4. PARAMETRE TAHMİN YÖNTEMLERİ

Bu bölümde (X, Y) rasgele değişken çifti arasındaki bağımlılık yapısının (C_α) kopula parametre ailesi ile modellendiği düşünülmektedir. (X, Y) 'den alınan rasgele örneklem $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ için belirlenen kopula modeline ait α bağımlılık parametresi için "parametrik, yarı parametrik ve parametrik olmayan yöntemler" alt başlıklarında tahmin etme yöntemleri hakkında bilgiler verilmiştir (Genest ve Favre 2007).

4.1 Parametrik Yöntemler

4.1.1 En çok olabilirlik yöntemi (Maximum Likelihood Estimation-MLE)

f_j , $(j = 1, 2, \dots, n)$ 'ler tek değişkenli marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları ve

$$c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = \frac{\partial^n C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))}{\partial F_1(x_1), \dots, \partial F_n(x_n)}$$

ile tanımlanan c kopula yoğunluğu olmak üzere çok değişkenli bir dağılımın kanonik gösterimi,

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \prod_{j=1}^n f_j(x_j)$$

biçimindedir. Böyle bir gösterim, kopulaların istatistiksel modellenmesinin marjinal dağılımların belirlenmesi ve uygun kopula fonksiyonunun tanımlanması şeklinde iki adımda yapılabilmesi imkanı sağlar.

Örnek veri matrisi

$$\chi = \{x_{1t}, \dots, x_{nt}\}_{t=1}^T$$

ile gösterilmek üzere log olabilirlik fonksiyonu

$$l(\delta) = \sum_{i=1}^T \log \{c(F_1(x_{1t}), \dots, F_n(x_{nt}))\} + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^n \log f_j(x_{jt})$$

biçimindedir. Burada $\delta = (\theta_1, \dots, \theta_n, \alpha)$ marjinallere ve kopulaya ait parametre vektörüdür (Cherubini 2004).

4.1.2 Marjinallere İlişkin Çıkarsama Fonksiyonları (Inference Functions for Marginals -IFM)

Burada $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ parametre vektörüne ait tahmin vektörü $\hat{\theta}$ olmak üzere, tahmin iki adımda yapılır.

Adım 1: Tek değişkenli marjinal dağılımların tahmininden

$$\hat{\theta} = \text{Arg max}_{\theta} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^n \log f_j(x_{jt}; \theta)$$

elde edilir.

Adım 2: Adım 1 'de elde edilen $\hat{\theta}$ ile kopula parametresi α

$$\hat{\alpha} = \text{Arg max}_{\alpha} \sum_{t=1}^T \log c(F_1(x_{1t}), \dots, F_n(x_{nt}); \alpha, \hat{\theta})$$

tahmin edilir.

l log olabilirlik fonksiyonu, l_j , j . marjinalin ($j = 1, 2, \dots, n$), l_c kopulanın log olabilirlik fonksiyonu olmak üzere,

$$\hat{\delta}_{IFM} = (\hat{\theta}, \hat{\alpha})' \text{ için } \left(\frac{\partial l_1}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial l_n}{\partial \theta_n}, \frac{\partial l_c}{\partial \alpha} \right) = 0'$$

ve

$$\hat{\delta}_{MLE} = (\hat{\theta}, \hat{\alpha})' \text{ için } \left(\frac{\partial l}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial l}{\partial \theta_n}, \frac{\partial l}{\partial \alpha} \right) = 0'$$

denklemlerinin çözülmesi gerekir.

Bu iki tahmin edici genelde birbirine eşit çıkmamaktadır. IFM tahmin edicisi MLE tahmin edicisinden daha kolay hesaplanır. Joe (1997)'de IFM tahmin edicisinin MLE tahmin edicisine göre asimptotik olarak daha "etkin" bir tahmin edici olduğu gösterilmiştir (Joe 1997 ve Cherubini 2004).

4.2 Yarı Parametrik Yöntemler

4.2.1 En çok sözde olabilirlik yöntemi

(Maximum Pseudolikelihood Estimation -MPE)

Klasik istatistikte maksimum en çok olabilirlik tahmini (MLE), özellikle α çok boyutlu olduğunda momentler yöntemine iyi bir alternatif tahmin edici olarak bilinir. Özellikle sıralara dayalı bu bağımlılık parametresinin tahmini ile ilgilenildiğinde MLE yaklaşımının uyarlanmış hali MPE yöntemidir. Bu yöntem, c_α yoğunluklu C_α 'nın mutlak sürekli olmasını gerektirir ve

$$l(\alpha) = \sum_{i=1}^n \log \left\{ c_\alpha \left(\frac{R_i}{n+1}, \frac{S_i}{n+1} \right) \right\} \quad (3.14)$$

biçimindeki log-likelihood fonksiyonunun sıraya dayalı en büyüklenmesini içerir.

Klasik log-likelihood fonksiyonunda bilinmeyen F ve G marjinal dağılımları yazılırsa

$$l(\alpha) = \sum_{i=1}^n \log \{ c_\alpha (F(X_i), G(Y_i)) \}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n 1(X_i \leq x)$$

ve

$$G_n(y) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n 1(Y_i \leq y)$$

amprik dağılım fonksiyonları kullanıldığında $i = 1, \dots, n$ için $F_n(X_i) = R_i/(n+1)$ ve $G_n(Y_i) = S_i/(n+1)$ dır.

$$c'_\alpha(u, v) = \frac{\partial c_\alpha(u, v)}{\partial \alpha}$$

olmak üzere

$$l'(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} l(\alpha) = \sum_{i=1}^n \frac{c'_\alpha\left(\frac{R_i}{n+1}, \frac{S_i}{n+1}\right)}{c_\alpha\left(\frac{R_i}{n+1}, \frac{S_i}{n+1}\right)} = 0$$

eşitliğini sağlayan

$$\hat{\alpha}_n \approx N\left(\alpha, \frac{v^2}{n}\right)$$

biçiminde tek bir $\hat{\alpha}_n$ kökü vardır (Genest vd. 1995).

\bar{M} ve \bar{N} ortalamalı pseudo gözlemlerinin iki kümesine göre hesaplanan örneklem varyansları sırasıyla

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (M_i - \bar{M})^2$$

ve

$$\hat{\beta}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (N_i - \bar{N})^2$$

olmak üzere v^2 'nin tutarlı bir tahmin edicisi

$$v_n^2 = \frac{\hat{\sigma}_n^2}{\hat{\beta}_n^2}$$

ile verilmektedir (Genest vd. 1995).

Burada M_i ve N_i pseudo gözlemlerini bulmak için aşağıdaki adımlar izlenir.

- Adım 1: $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ orjinal veriler $X_1 < \dots < X_n$ olacak şekilde sıralanır. $R_1 = 1, \dots, R_n = n$
- Adım 2: $L(\alpha, u, v) = \log c_\alpha(u, v)$ olmak üzere $L_\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha} L(\alpha, u, v)$, $L_u = \frac{\partial}{\partial u} L(\alpha, u, v)$ ve $L_v = \frac{\partial}{\partial v} L(\alpha, u, v)$ türevleri hesaplanır.
- Adım 3: Her $i \in \{1, \dots, n\}$ için

$$N_i = L_\alpha \left(\hat{\alpha}_n, \frac{i}{n+1}, \frac{S_i}{n+1} \right)$$

ve

$$\begin{aligned} M_i = & N_i - \frac{1}{n} \sum_{j=i}^n L_\alpha \left(\hat{\alpha}_n, \frac{j}{n+1}, \frac{S_j}{n+1} \right) L_u \left(\hat{\alpha}_n, \frac{j}{n+1}, \frac{S_j}{n+1} \right) \\ & - \frac{1}{n} \sum_{S_j \geq S_i}^n L_\alpha \left(\hat{\alpha}_n, \frac{j}{n+1}, \frac{S_j}{n+1} \right) L_v \left(\hat{\alpha}_n, \frac{j}{n+1}, \frac{S_j}{n+1} \right) \end{aligned}$$

pseudo gözlem değerleri hesaplanır (Genest ve Favre 2007).

4.3 Parametrik Olmayan Yöntemler

Bu tahmin yöntemleri gözlemlerin sıralanması esasına dayalıdır.

4.3.1 Kendall'in τ 'suna dayalı tahmin -KTE

FGM için Kendall'in τ katsayısı ($\tau = \frac{2}{9}\alpha$) 'ya bağlı parametre tahmini

$$\tilde{\alpha}_n = \frac{9}{2}\tau_n$$

şeklinde yazılır. Daha genel olarak bir g düzgün fonksiyonu için eğer $\alpha = g(\tau)$ ise α 'nın Kendall tahmin edicisi $\tilde{\alpha}_n = g(\tau_n)$ ile tanımlanabilir.

$$\sqrt{n} \frac{\tau_n - \tau}{4S} \approx N(0, 1)$$

Burada

$$\tilde{W}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{ji} = \frac{1}{n} \# \{j : X_i \leq X_j, Y_i \leq Y_j\}$$

olmak üzere örneklem varyansı

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (W_i + \tilde{W}_i - 2\bar{W})^2$$

biçimindedir. $n \rightarrow \infty$ durumunda "Delta yöntemi" olarak da bilinen Slutsky teoreminin bir uygulaması ile

$$\tilde{\alpha}_n \approx N \left[\alpha, \frac{1}{n} \left\{ 4Sg'(\tau_n) \right\}^2 \right]$$

şeklindedir. α için $(1-p)$ düzeyindeki güven aralığı $\tilde{\alpha}_n \pm z_{p/2} \frac{1}{\sqrt{n}} 4S [g'(\tau_n)]$ ile bulunur (Genest ve Favre 2007).

4.3.2 Spearman'ın ρ 'suna dayalı tahmin -SRE

FGM için Spearman'ın ρ katsayısı ($\rho = \frac{1}{3}\alpha$) 'ya bağlı parametre tahmini

$$\tilde{\alpha}_n = 3\rho_n$$

olup genel ifadesi

$$\tilde{\alpha}_n = h(\rho_n)$$

şeklindedir. Gaenssler ve Stute (1987)'de,

$$\rho_n \approx N \left(\rho, \frac{\sigma^2}{n} \right)$$

olduğu sonucuna varmışlardır. Delta yöntemiyle

$$\tilde{\alpha}_n \approx N \left[\alpha, \frac{1}{n} \left\{ \sigma_n h'(\tau_n) \right\}^2 \right]$$

olduğu gösterilmiştir. Burada σ_n^2 , σ^2 'nin uygun bir tahmin edicisidir. α için $1 - p$ düzeyindeki güven aralığı

$$\tilde{\alpha}_n \pm z_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma_n \left| h'(\tau_n) \right|$$

biçimindedir. Borkowf (2002)'de, C kopulasının yerine C_n uygulanırsa, σ^2 için tutarlı bir tahmin edicinin

$$\sigma_n^2 = 144 \left(-9A_n^2 + B_n + 2C_n + 2D_n + 2\varepsilon_n \right)$$

olduğunu göstermiştir. Burada

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{n+1} \frac{S_i}{n+1}$$

$$B_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{R_i}{n+1} \right)^2 \left(\frac{S_i}{n+1} \right)^2$$

$$C_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{R_i}{n+1} \frac{S_i}{n+1} \frac{R_j}{n+1} \frac{S_j}{n+1} \frac{R_k}{n+1} \frac{S_k}{n+1} 1(R_k \leq R_i, S_k \leq S_j) + \frac{1}{4} - A_n$$

$$D_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{S_i}{n+1} \frac{S_j}{n+1} \max \left(\frac{R_i}{n+1}, \frac{R_j}{n+1} \right)$$

ve

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{R_i}{n+1} \frac{R_j}{n+1} \max \left(\frac{S_i}{n+1}, \frac{S_j}{n+1} \right)$$

alınmıştır (Genest ve Favre 2007).

Çizelge 4.1 Bazı kopula aileleri için parametre tahminleri

Aileler	Parametre Aralığı	Kendall'ın τ katsayısı	Spearman'ın ρ katsayısı
Clayton	$\alpha > 0$	$\frac{\alpha}{\alpha+2}$	*
Frank	$\alpha \neq 0$	$1 - \frac{4}{\alpha} [1 - D_1(\alpha)]$	$1 - \frac{12}{\alpha} [D_1(\alpha) - D_2(\alpha)]$
Gumbel	$\alpha \geq 1$	$1 - \alpha^{-1}$	*
FGM	$-1 \leq \alpha \leq 1$	$\frac{2}{9}\alpha$	$\frac{1}{3}\alpha$
Gaussian	$-1 < \alpha < 1$	$\frac{2}{\pi} \arcsin(\alpha)$	$\frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{e^t-1} dt$, $k = 1, 2$ ile Debye fonksiyonu gösterilmektedir (Trivedi ve Zimmer 2007).

4.4 Bağımlılığın Modellenmesi (Uygun Kopula Seçimi)

Bağımsız olmayan çok değişkenli dağılımlarla ilgilenildiğinde çok değişkenli normalliğin varsayımı altında korelasyon katsayıları tahmin edilmektedir. Normal model dışında, lineer korelasyon genellikle bağımlılığı ölçmek için bir araç olarak da kullanılmakla birlikte diğer bağımlılık biçimleri de çok önemlidir. Finans, sigorta ve hidroloji gibi diğer alanlarda doğrusal bağımlılıkla ilgili çalışmalar vardır (Cherubini vd. 2004, Embrechts vd. 2002, 2003, McNeil vd. 2005, Genest ve Favre 2007).

Sklar teoremi (1959,1996) sürekli çok değişkenli dağılım fonksiyonları için tek değişkenli marjinalerin ve çok değişkenli bağımlılık yapılarının ayrı ayrı değerlendirilebildiğini ve bağımlılık yapısının "kopula" denilen bir yaklaşımla açıklanabildiğini göstermektedir. Kopula, her bir bileşene tek değişkenli marjinallerini veren olasılık integral dönüşümlerinin uygulanması ile elde edilen rasgele vektörlerin çok değişkenli dağılım fonksiyonudur. Daha geniş bilgiler Joe (1997), Nelsen (1999), Cherubini vd. (2004) ve McNeil vd. (2005) kaynaklarında vardır.

Sklar Teoremine göre çok değişkenli bağımlılık çalışmaları marjinal dağılımların ve bağımlılık yapısının tahmini olmak üzere iki adımda yapılabilir. İlk adımın çok iyi bilinmesi ile birlikte burada incelenmesi gereken ikinci adımdır. Yani uygun kopula veya kopula ailesinin nasıl seçileceğidir.

Bu bölümde, kopula seçiminde kullanılan model hatası için Kallenberg (2008)' de üstel ve karmaşık ailelere göre verilen iki yaklaşımdan bahsedilmektedir. Her iki yaklaşım için de gerçek model ile tahmini model arasındaki toplam hata, model hatası ve stokastik hata olarak iki parça halinde değerlendirilmiştir.

4.4.1 Üstel Aileler-Kullback Leibler bilgisi

$$f_k(u, v; \theta) = f_0(u, v) \exp \left\{ \sum \theta_j h_j(u, v) - \Psi_k(\theta) \right\}$$

biçiminde ifade edilebilen fonksiyonların üstel aileden olduğu söylenir. Burada $\theta_j = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ ve $\Psi_k(\theta) = \log \int f_0(u, v) \exp \left\{ \sum \theta_j h_j(u, v) \right\} dudv$ şeklinde tanımlanan normalleştirici fonksiyondur.

Gerçek iki değişkenli f yoğunluğuna en yakın üstel aileyi veren fonksiyon "Kullback Leibler bilgisi" yardımıyla elde edilebilir.

Kullback Leibler bilgisi: (K)

$$\begin{aligned} K(f, f_k(\theta)) &= E_f \log \left(\frac{f}{f_k(\theta)} \right) \\ &= E_f \log f - E_f \log (f_k(\theta)) \\ &= K(f, f_0) - \left\{ \sum_{j=1}^k \theta_j E_f h_j - \Psi_k(\theta) \right\} \\ &= K(f, f_0) - K(f_k(\theta), f_0) + \sum_{j=1}^k \theta_j (E_\theta h_j - E_f h_j) \end{aligned}$$

Amaç: $\min K(f, f_k(\theta))$ ya da $\max \left\{ \sum_{j=1}^k \theta_j E_f h_j - \Psi_k(\theta) \right\}$

$$\begin{aligned} K(f, f_0) &= K(f, f_k(\theta)) + K(f_k(\theta), f_0) \\ \theta &\rightarrow \tilde{\theta} \\ &= K(f, f_k(\tilde{\theta})) + K(f_k(\tilde{\theta}), f_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(f, f_k(\theta)) &= K(f, f_k(\tilde{\theta})) + K(f_k(\tilde{\theta}), f_k(\theta)) \\ f_0 &\rightarrow f_k(\theta) \\ K(f, f_k(\hat{\theta})) &= K(f, f_k(\tilde{\theta})) + K(f_k(\tilde{\theta}), f_k(\hat{\theta})) \\ \theta &\rightarrow \hat{\theta}(MLE) \end{aligned}$$

$$\text{Toplam Hata} = \text{Model Hatası} + \text{Stokastik Hata}$$

Burada $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ olmak üzere $\hat{\theta}$ ile $(U_1, V_1), \dots, (U_n, V_n)$ gözlemleri için maksimum en çok olabilirlik tahmin edicileri gösterilmektedir. $E_\theta h = \int h dG$ eşitliğinin θ için çözümü olan $\tilde{\theta}$, birim kare üzerinde bir G dağılım fonksiyonuna eklenen fonksiyoneldir. f ile gerçek yoğunluk fonksiyonu, f_0 ile başlangıçta önerilen kopula ve $f_k(\theta)$ ile herhangi bir üstel ya da karmaşık kopula ailesi gösterilmektedir.

4.4.2 Karmaşık Aileler- L_2 Normu

f_0 ilk önerilen kopula olmak üzere $\log(f/f_0)$ yaklaşımının yerine h_j fonksiyonlarının doğrusal bir bileşimini veren $f - f_0$ yaklaşımı ile

$$f_k(u, v; \theta) = f_0(u, v) + \sum_{j=1}^k \theta_j h_j(u, v)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Burada $\int_0^1 h_j(u, v) du = 0$ ve $\int_0^1 h_j(u, v) dv = 0$

olması $f_k(\theta)$ altında U ve V nin her ikisinin de marjinal dağılımlarının düzgün dağılım olduğunu ifade eder. Frank, Plackett, Gumbel, Joe Clayton, Asimetrik Gumbel ve Gonzalo-Olmo kopulaları karmaşık aileler sınıfındandır.

L_2 normu: ($\|\cdot\|_2$)

L_2 normu ile f ve g nin iç çarpımı sırasıyla

$$\|f\|_2 = \left\{ \int_0^1 \int_0^1 f(u, v)^2 dudv \right\}^{1/2} \quad \text{ve} \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 \int_0^1 f(u, v) g(u, v) dudv$$

eşitlikleri ile tanımlanır. $f, f_0 \in L_2$ olsun. Yani $\|f\|_2 < \infty, \|f_0\|_2 < \infty$ dır. L_2 eşitliği ile

$$f(u, v) - f_0(u, v) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f - f_0, h_j \rangle h_j(u, v)$$

yazılabilir. $\theta_j = \langle f - f_0, h_j \rangle = \tilde{\theta}_j$ alınması ile $\|f - f_k(\theta)\|_2^2$ minimize edilir. ($\tilde{\theta}_j$: $j = 1, \dots, k$ için $f - f_0$ in j . Fourier katsayısı.)

$$\tilde{\theta}_j(F) = \int_0^1 \int_0^1 h_j dF - \int_0^1 \int_0^1 h_j dF_0$$

$(U_1, V_1), \dots, (U_n, V_n)$ gözlemlerine dayalı $\hat{\theta}_j$ tahmini

$$\hat{\theta}_j = \tilde{\theta}_j(F_n) = \bar{h}_j - E_{f_0} h_j$$

ile verilmektedir. Üstel ailedeki gibi $E_{\tilde{\theta}} h = E_f h$ olduğu görülmektedir. Burada F_n , ampirik dağılım fonksiyonudur.

- $f, f_0 \in L_2$ ve $\tilde{\theta}_j = \langle f - f_0, h_j \rangle$ olarak alınırsa

$$\|f - f_0\|_2^2 = \left\| f - f_k(\tilde{\theta}) \right\|_2^2 + \left\| f_k(\tilde{\theta}) - f_0 \right\|_2^2$$

- Her $\theta \in IR^k$ için

$$\|f - f_k(\theta)\|_2^2 = \|f - f_k(\tilde{\theta})\|_2^2 + \|f_k(\tilde{\theta}) - f_k(\theta)\|_2^2, \quad f_0 \rightarrow f_k(\theta)$$

$$\|f - f_k(\hat{\theta})\|_2^2 = \|f - f_k(\tilde{\theta})\|_2^2 + \|f_k(\tilde{\theta}) - f_k(\hat{\theta})\|_2^2, \quad \theta \rightarrow \hat{\theta}$$

$$\textit{Toplam Hata} = \textit{Model Hatası} + \textit{Stokastik Hata}$$

- $\tilde{\theta}(F)$ fonksiyonu $\|f - f_k(\theta)\|_2^2$ ve $\tilde{\theta}_j = \langle f - f_0, h_j \rangle$ ifadelerini minimum yapar.
- Maksimum en çok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\theta} = \tilde{\theta}(F_n)$ ile verilmektedir.
- Model hatası indirgendiğinde $\|f_k(\tilde{\theta}) - f_0\|_2^2 = \sum_{j=1}^k \tilde{\theta}_j^2$ eşitliği yardımıyla çözülebilir.

Üstel ve karmaşık ailelerin her ikisi için de $f_k(u, v; \theta)$ fonksiyonlarındaki (h_1, h_2, \dots, h_k) fonksiyonlarının seçimi için Legendre polinomları kullanılmaktadır (Kallenberg, 2008).

5. İKİ DEĞİŞKENLİ KUANTİLLERE DAYALI KOŞULLU RİSKE MARUZ DEĞER

Bağımlı riskleri ölçmek için VaR'ın ötesindeki kuyruk bölgesinin ortalamasını tahmin eden uyumlu bir risk ölçüsü olan CVaR ölçüsü benimsenmekte ve portföy optimizasyonunda sıkça kullanılmaktadır. CVaR ile ilgilenilmesinin ana nedenlerinden biri, kredi veya reasürans taahhüdü gibi riskler için önemli olan kuyruk riskinin elde edilebilmesidir. Bir portföyün CVaR'ı bazı durumlarda lineer programlama yöntemi kullanılarak hesaplanmaktadır. Eğer portföyün boyutu büyükse, portföy CVaR'ını hesaplamak zaman aldığından Xubiao (2008) daha basit ve hızlı sonuç veren sıra istatistiği tahmin yöntemi kullanmıştır.

Çalışmanın özgün kısmını oluşturan bu bölümde, Chen ve Welsh (2002)'de verilen iki değişkenli Kuzey-Güney (NS) kuantil noktalarını ($VaR_\alpha(p_1, p_2)$) elde etme yöntemi ile Hürlimann (2004)'in önerdiği iki değişkenli durum için CVaR bulma yöntemi ele alınmış ve bağımlı risklerin modellenmesi için uyarlanarak kullanılmıştır.

Düzgün marjinal dağılımlar ile verilen iki bağımlı risk değişkenine ait bağımlılık yapısı Frank, Gumbel, Clayton kopulaları ve FGM kopula aileleri ile verildiğinde 5.1.alt bölümde elde edilen $VaR_\alpha(p_1, p_2)$ vektörü için $CVaR_\alpha(p_1, p_2)$ bağımlı iki değişkenli vektörleri 5.2. alt bölümde incelenmektedir. Ayrıca $VaR_\alpha(p_1, p_2)$ ve $CVaR_\alpha(p_1, p_2)$ değerlerinin α, p_1, p_2 parametre değerlerine göre değişimleri çizelgeler ve grafiklerle gösterilmektedir.

5.1 İki Değişkenli Kuzey-Güney(NS) Kuantil Noktaları

İki değişkenli durum için toplam olasılık koşulunun doğal genellemelerini sağlayan kuantil noktalarını tanımlamak amacıyla önce X rasgele değişkeninin dağılımı kullanılarak R^2 'de kolaylık için güneyden kuzeye yön seçilir. Her $(a, b) \in R^2$ noktası için R^2

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x_1, x_2)' : x_2 \geq b\} \\ A_2 &= \{(x_1, x_2)' : x_1 \leq a, x_2 \leq b\} \\ A_3 &= \{(x_1, x_2)' : x_1 \geq a, x_2 \leq b\} \end{aligned}$$

bölgelerine ayrılır. Burada (a, b) noktası $(P(A_2), P(A_3))$ iki değişkenli kuantil noktası olarak düşünülebilir. Bu bölge tanımlamaları, iki değişkenli dağılım fonksiyonu $F(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$ yardımıyla da ifade edilebilir. F_2 ile X_2 'nin marginal dağılım fonksiyonu gösterilmek üzere ve tek değişkenli kuantil bilgisine göre aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 5.1.(Chen ve Welsh 2002): (p_1, p_2) . NS iki değişkenli kuantil noktası

$$\xi(p_1, p_2) = (F_{12}^{-1}(p_1, p_2), F_2^{-1}(p_1 + p_2)) \quad (5.1)$$

şeklinde $\xi(p_1, p_2)$ vektörü ile tanımlansın. Bileşenleri, $p_1, p_2 \geq 0$ ve $p_1 + p_2 \leq 1$ için

$$F_2^{-1}(p_1 + p_2) = \inf \{x_2 : F_2(x_2) \geq p_1 + p_2\} \quad (5.2)$$

ve

$$F_{12}^{-1}(p_1, p_2) = \inf \{x_1 : F(x_1, F_2^{-1}(p_1 + p_2)) \geq p_1\} \quad (5.3)$$

biçiminde ifade edilir. p . NS iki değişkenli kuantil noktası $\xi(p) = \xi(\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p)$, $0 \leq p \leq 1$ ile tanımlanır ve $\xi(\frac{1}{2})$ NS iki değişkenli medyan noktası olarak adlandırılır.

5.1.1 Bazı kopulalar için iki değişkenli kuantiller

U_1 ve U_2 sırasıyla $C_1(u_1)$ ve $C_2(u_2)$ ile marjinal dağılım fonksiyonlarına sahip düzgün marjinalli iki bağımlı sürekli rasgele değişken olsun. Bu iki U_1 ve U_2 bağımlı rasgele değişkenlerin bağımlılık yapılarının Clayton, Frank, Gumbel ve FGM ile ifade edildiği durumlar için elde edilen iki değişkenli kuantilleri sırasıyla $VaR^{Cl}(p_1, p_2)$, $VaR^F(p_1, p_2)$, $VaR^{Gu}(p_1, p_2)$ ve $VaR^{FGM}(p_1, p_2)$ ile gösterilmektedir. F dağılım fonksiyonu yerine C kopula fonksiyonu kullanılarak FGM kopulası için iki değişkenli NS kuantil noktalarına ait bileşenler özgün bir biçimde (5.2) ve (5.3) eşitlikleri ile ifade edilmiştir.

Clayton kopula :

$$C_\alpha(u_1, u_2) = (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}, \quad \alpha > 0$$

$$VaR(p_1, p_2) = (C_{12}^{-1}(p_1, p_2), C_2^{-1}(p_1 + p_2))$$

$$\begin{aligned} C_2^{-1}(p_1 + p_2) &= \inf \{u_2 : C_2(u_2) \geq p_1 + p_2\} \\ &= \inf \{u_2 : u_2 \geq p_1 + p_2\} \\ &= p_1 + p_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{12}^{-1}(p_1, p_2) &= \inf \{u_1 : C(u_1, C_2^{-1}(p_1 + p_2)) \geq p_1\} \\ &= \inf \{u_1 : C(u_1, p_1 + p_2) \geq p_1\} \\ &= \inf \left\{ u_1 : (u_1^{-\alpha} + (p_1 + p_2)^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha} \geq p_1 \right\} \\ &= \inf \left\{ u_1 : (u_1^{-\alpha} + (p_1 + p_2)^{-\alpha} - 1) \leq p_1^{-\alpha} \right\} \\ &= \inf \left\{ u_1 : u_1 \geq (p_1^{-\alpha} - (p_1 + p_2)^{-\alpha} + 1)^{-1/\alpha} \right\} \\ &= (p_1^{-\alpha} - (p_1 + p_2)^{-\alpha} + 1)^{-1/\alpha} \end{aligned}$$

$$VaR^{Cl}(p_1, p_2) = \left((p_1^{-\alpha} - (p_1 + p_2)^{-\alpha} + 1)^{-1/\alpha}, p_1 + p_2 \right), \quad \alpha > 0, p_1, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 \leq 1$$

Frank kopula:

$$C_\alpha(u_1, u_2) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1)}{e^{-\alpha} - 1} \right), \quad \alpha \neq 0$$

$$\begin{aligned} C_2^{-1}(p_1 + p_2) &= \inf \{u_2 : C_2(u_2) \geq p_1 + p_2\} \\ &= \inf \{u_2 : u_2 \geq p_1 + p_2\} \\ &= p_1 + p_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{12}^{-1}(p_1, p_2) &= \inf \{u_1 : C(u_1, C_2^{-1}(p_1 + p_2)) \geq p_1\} \\ &= \inf \{u_1 : C(u_1, p_1 + p_2) \geq p_1\} \\ &= \inf \left\{ u_1 : -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha(p_1+p_2)} - 1)}{e^{-\alpha} - 1} \right) \geq p_1 \right\} \\ &= \inf \left\{ u_1 : 1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha(p_1+p_2)} - 1)}{e^{-\alpha} - 1} \leq e^{-\alpha p_1} \right\} \\ &= \inf \{u_1 : (e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha(p_1+p_2)} - 1) \leq (e^{-\alpha p_1} - 1)(e^{-\alpha} - 1)\} \\ &= \inf \left\{ u_1 : (e^{-\alpha u_1} - 1) \leq \frac{(e^{-\alpha p_1} - 1)(e^{-\alpha} - 1)}{(e^{-\alpha(p_1+p_2)} - 1)} \right\} \\ &= \inf \left\{ u_1 : e^{-\alpha u_1} \leq 1 + \frac{(e^{-\alpha p_1} - 1)(e^{-\alpha} - 1)}{(e^{-\alpha(p_1+p_2)} - 1)} \right\} \\ &= \inf \left\{ u_1 : u_1 \geq -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\alpha p_1} - 1)(e^{-\alpha} - 1)}{(e^{-\alpha(p_1+p_2)} - 1)} \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\alpha p_1} - 1)(e^{-\alpha} - 1)}{(e^{-\alpha(p_1+p_2)} - 1)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VaR^F(p_1, p_2) &= \left(-\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\alpha p_1} - 1)(e^{-\alpha} - 1)}{(e^{-\alpha(p_1+p_2)} - 1)} \right), p_1 + p_2 \right) \\ &\alpha \neq 0, p_1, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 \leq 1 \end{aligned}$$

Gumbel kopula :

$$C_{\alpha}^{Gu}(u_1, u_2) = \exp \left[- \left((-\ln u_1)^{\alpha} + (-\ln u_2)^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right], \quad \alpha \in [1, \infty)$$

$$\begin{aligned} C_2^{-1}(p_1 + p_2) &= \inf \{u_2 : C_2(u_2) \geq p_1 + p_2\} \\ &= \inf \{u_2 : u_2 \geq p_1 + p_2\} \\ &= p_1 + p_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{12}^{-1}(p_1, p_2) &= \inf \{u_1 : C(u_1, C_2^{-1}(p_1 + p_2)) \geq p_1\} \\ &= \inf \{u_1 : C(u_1, p_1 + p_2) \geq p_1\} \\ &= \inf \left\{ u_1 : \exp \left[- \left((-\ln u_1)^{\alpha} + (-\ln(p_1 + p_2))^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] \geq p_1 \right\} \\ &= \inf \left\{ u_1 : - \left((-\ln u_1)^{\alpha} + (-\ln(p_1 + p_2))^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \ln p_1 \right\} \\ &= \inf \{u_1 : (-\ln u_1)^{\alpha} + (-\ln(p_1 + p_2))^{\alpha} \leq (-\ln p_1)^{\alpha}\} \\ &= \inf \{u_1 : (-\ln u_1)^{\alpha} \leq (-\ln p_1)^{\alpha} - (-\ln(p_1 + p_2))^{\alpha}\} \\ &= \inf \left\{ u_1 : -\ln u_1 \leq \left[(-\ln p_1)^{\alpha} - (-\ln(p_1 + p_2))^{\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \right\} \\ &= \inf \left\{ u_1 : u_1 \geq \exp \left(- \left[(-\ln p_1)^{\alpha} - (-\ln(p_1 + p_2))^{\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right\} \\ &= \exp \left(- \left((-\ln p_1)^{\alpha} - (-\ln(p_1 + p_2))^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VaR^{Gu}(p_1, p_2) &= \left(e^{\left(- \left((-\ln p_1)^{\alpha} - (-\ln(p_1 + p_2))^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)}, p_1 + p_2 \right), \\ \alpha &\in [1, \infty), p_1, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 \leq 1 \end{aligned}$$

FGM kopula :

$$C_\alpha(u_1, u_2) = u_1 u_2 (1 + \alpha(1 - u_1)(1 - u_2))$$

$$VaR(p_1, p_2) = (C_{12}^{-1}(p_1, p_2), C_2^{-1}(p_1 + p_2))$$

$$\begin{aligned} C_2^{-1}(p_1 + p_2) &= \inf \{u_2 : C_2(u_2) \geq p_1 + p_2\} \\ &= \inf \{u_2 : u_2 \geq p_1 + p_2\} \\ &= p_1 + p_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{12}^{-1}(p_1, p_2) &= \inf \{u_1 : C(u_1, C_2^{-1}(p_1 + p_2)) \geq p_1\} \\ &= \inf \{u_1 : C(u_1, p_1 + p_2) \geq p_1\} \\ &= \inf \{u_1 : u_1(p_1 + p_2)(1 + \alpha(1 - u_1)(1 - (p_1 + p_2))) \geq p_1\} \\ &= \inf \left\{ \begin{array}{l} u_1 : p_1 u_1 + p_2 u_1 - \alpha p_1 u_1^2 - \alpha p_1^2 u_1 - \alpha p_2 u_1^2 - \alpha p_2^2 u_1 \\ \quad + \alpha p_1^2 u_1^2 + \alpha p_2^2 u_1^2 + \alpha p_1 u_1 + \alpha p_2 u_1 - 2\alpha p_1 p_2 u_1 \\ \quad + 2\alpha p_1 p_2 u_1^2 \geq p_1 \end{array} \right\} \\ &= \inf \left\{ \begin{array}{l} u_1 : (p_1 + p_2) u_1 - \alpha (p_1 + p_2) u_1^2 - \alpha (p_1^2 + 2p_1 p_2 + p_2^2) u_1 \\ \quad + \alpha (p_1^2 + 2p_1 p_2 + p_2^2) u_1^2 + \alpha (p_1 + p_2) u_1 \geq p_1 \end{array} \right\} \\ &= \inf \left\{ \begin{array}{l} u_1 : (p_1 + p_2) u_1 + \alpha (p_1 + p_2) u_1 - \alpha (p_1^2 + 2p_1 p_2 + p_2^2) u_1 \\ \quad - \alpha (p_1 + p_2) u_1^2 + \alpha (p_1^2 + 2p_1 p_2 + p_2^2) u_1^2 \geq p_1 \end{array} \right\} \\ &= \inf \left\{ \begin{array}{l} u_1 : (p_1 + p_2) u_1 + \alpha (p_1 + p_2) u_1 - \alpha (p_1 + p_2)^2 u_1 \\ \quad - \alpha (p_1 + p_2) u_1^2 + \alpha (p_1 + p_2)^2 u_1^2 \geq p_1 \end{array} \right\} \\ &= \inf \left\{ \begin{array}{l} u_1 : (\alpha (p_1 + p_2)^2 - \alpha (p_1 + p_2)) u_1^2 \\ \quad + ((p_1 + p_2) + \alpha (p_1 + p_2) - \alpha (p_1 + p_2)^2) u_1 \geq p_1 \end{array} \right\} \\ &= \inf \left\{ \begin{array}{l} u_1 : (\alpha (p_1 + p_2)^2 - \alpha (p_1 + p_2)) u_1^2 \\ \quad + ((p_1 + p_2) + \alpha (p_1 + p_2) - \alpha (p_1 + p_2)^2) u_1 - p_1 \geq 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= (\alpha(p_1 + p_2)^2 - \alpha(p_1 + p_2)) = \alpha(p_1 + p_2)[p_1 + p_2 - 1] \\
b &= ((p_1 + p_2) + \alpha(p_1 + p_2) - \alpha(p_1 + p_2)^2) \\
c &= -p_1
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$C_{12}^{-1}(p_1, p_2) = \inf \{u_1 : au_1^2 + bu_1 + c \geq 0\}$$

şeklinde yeniden düzenlenen $C_{12}^{-1}(p_1, p_2)$ eşitliği $a > 0$ ve $a < 0$ olarak iki durumda incelenmelidir.

$(b/a) = b_1, (c/a) = c_1$ olmak üzere $\Delta = b_1^2 - 4c_1 > 0$ ise u_1 değişkenine ait u_{11} ve u_{12} kökleri

$$u_{11} = \frac{-b_1 - \sqrt{\Delta}}{2} \text{ ve } u_{12} = \frac{-b_1 + \sqrt{\Delta}}{2}$$

biçimindedir.

$-1 \leq \alpha < 0$ için $a > 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
C_{12}^{-1}(p_1, p_2) &= \inf \left\{ u_1 : u_1^2 + \frac{b}{a}u_1 + \frac{c}{a} \geq 0 \right\} \\
&= \inf \{u_1 : (u_1 - u_{11})(u_1 - u_{12}) \geq 0\} \\
1.durum &= \inf \{u_1 : (u_1 - u_{11}) \geq 0 \text{ ve } (u_1 - u_{12}) \geq 0\} \\
&= \inf \{u_1 : u_1 \geq u_{11} \text{ ve } u_1 \geq u_{12}\} \\
2.durum &= \inf \{u_1 : (u_1 - u_{11}) \leq 0 \text{ ve } (u_1 - u_{12}) \leq 0\} \\
&= \inf \{u_1 : u_1 \leq u_{11} \text{ ve } u_1 \leq u_{12}\} \\
C_{12}^{-1}(p_1, p_2) &= \max(u_{11}, u_{12}) \text{ (1.durumdan)} \\
&= u_{12} \\
&= \frac{1}{2} \left(-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right)
\end{aligned}$$

$p = p_1 + p_2$ olmak üzere Ek 1'de $\Delta > 0$ koşulunun $\alpha^2(p-1)^2 > \frac{2\alpha(p-2p_2)(1-p)}{p} - 1$, $\alpha \neq 0, (0 < p_1 + p_2 < 1)$ ifadesine denk çıktığı gösterilmiştir.

$0 < \alpha \leq 1$ için $a < 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
C_{12}^{-1}(p_1, p_2) &= \inf \{u_1 : u_1^2 + b_1 u_1 + c_1 \leq 0\} \\
&= \inf \{u_1 : (u_1 - u_{11})(u_1 - u_{12}) \leq 0\} \\
1.durum &= \inf \{u_1 : (u_1 - u_{11}) < 0 \text{ ve } (u_1 - u_{12}) \geq 0\} \\
&= \inf \{u_1 : u_1 < u_{11} \text{ ve } u_1 \geq u_{12}\} \\
&= u_{12} \\
2.durum &= \inf \{u_1 : (u_1 - u_{11}) \geq 0 \text{ ve } (u_1 - u_{12}) < 0\} \\
&\quad \inf \{u_1 : u_1 \geq u_{11} \text{ ve } u_1 < u_{12}\} \\
&= u_{11} \\
C_{12}^{-1}(p_1, p_2) &= (u_{11} \text{ ya da } u_{12}) \\
&= 0 < u_{11} < 1 \text{ olduğundan} \\
&= u_{11} \\
&= \frac{1}{2} \left(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VaR^{FGM}(p_1, p_2) &= \left(\frac{1}{2} \left(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right), p_1 + p_2 \right), \\
0 < \alpha \leq 1, 0 < p_1 + p_2 < 1, p_1, p_2 \geq 0
\end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{((p_1 + p_2) + \alpha(p_1 + p_2) - \alpha(p_1 + p_2)^2)}{(\alpha(p_1 + p_2)^2 - \alpha(p_1 + p_2))}$$

$$c_1 = -\frac{p_1}{(\alpha(p_1 + p_2)^2 - \alpha(p_1 + p_2))}$$

$$p = p_1 + p_2 \text{ o.ü. } \alpha^2(p-1)^2 > \frac{2\alpha(p-2p_2)(1-p)}{p} - 1 \quad (\Delta > 0) \text{ (koşul)}$$

Clayton, Frank ,Gumbel ve FGM kopuluları için iki değişkenli kuantiller sırasıyla

$$VaR^{Cl}(p_1, p_2) = \left((p_1^{-\alpha} - (p_1 + p_2)^{-\alpha} + 1)^{-1/\alpha}, p_1 + p_2 \right)$$

$$\alpha > 0, p_1, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 \leq 1$$

$$VaR^F(p_1, p_2) = \left(-\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\alpha p_1} - 1)(e^{-\alpha} - 1)}{(e^{-\alpha(p_1+p_2)} - 1)} \right), p_1 + p_2 \right)$$

$$\alpha \neq 0, p_1, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 \leq 1$$

$$VaR^{Gu}(p_1, p_2) = \left(\exp(-(-\ln p_1)^\alpha - (-\ln(p_1 + p_2))^\alpha)^{1/\alpha}, p_1 + p_2 \right)$$

$$\alpha \in [1, \infty), p_1, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 \leq 1$$

$$VaR^{FGM}(p_1, p_2) = \left(\frac{1}{2} \left(-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right), p_1 + p_2 \right)$$

$$-1 \leq \alpha < 0, 0 < p_1 + p_2 < 1, p_1, p_2 \geq 0 \quad (5.3a)$$

$$VaR^{FGM}(p_1, p_2) = \left(\frac{1}{2} \left(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right), p_1 + p_2 \right)$$

$$0 < \alpha \leq 1, 0 < p_1 + p_2 < 1, p_1, p_2 \geq 0, \quad (5.3b)$$

$$b_1 = \frac{((p_1 + p_2) + \alpha(p_1 + p_2) - \alpha(p_1 + p_2)^2)}{(\alpha(p_1 + p_2)^2 - \alpha(p_1 + p_2))}$$

$$c_1 = -\frac{p_1}{(\alpha(p_1 + p_2)^2 - \alpha(p_1 + p_2))}$$

$$p = p_1 + p_2 \text{ o.ü. } \alpha^2 (p - 1)^2 > \frac{2\alpha(p - 2p_2)(1 - p)}{p} - 1 \text{ (koşul)} \quad (5.4)$$

biçiminde elde edilmişlerdir.

5.2 Çok Değişkenli Koşullu Riske Maruz Değer

$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ bir rasgele vektör olsun. $S_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ ile n -değişkenli yaşam fonksiyonu, $\pi_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ ile sınırlı hasar (stop-loss) dönüşüm vektörü ve $m_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ ile ortalama aşan vektör

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= P(X_1 > x_1, X_2 > x_2, \dots, X_n > x_n) \\ \pi_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= (\pi_{\mathbf{X}}^1(\mathbf{x}), \pi_{\mathbf{X}}^2(\mathbf{x}), \dots, \pi_{\mathbf{X}}^n(\mathbf{x})) \\ m_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= (m_{\mathbf{X}}^1(\mathbf{x}), m_{\mathbf{X}}^2(\mathbf{x}), \dots, m_{\mathbf{X}}^n(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

gösterilmek üzere bileşenleri

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbf{X}}^i(\mathbf{x}) &= \int_{x_i}^{\infty} S_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) dt, \quad i = 1, \dots, n. \\ m_{\mathbf{X}}^i(\mathbf{x}) &= E[X_i - x_i | X_j > x_j, j = 1, \dots, n] \end{aligned} \quad (5.5)$$

ve aralarındaki bağıntı

$$\pi_{\mathbf{X}}^i(\mathbf{x}) = S_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \cdot m_{\mathbf{X}}^i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, n.$$

biçiminde ifade edilir.

p güven seviyesi için bir risk vektörünün koşullu riske maruz değeri

$$CVaR_p(\mathbf{X}) = (CVaR_p^1(\mathbf{X}), CVaR_p^2(\mathbf{X}), \dots, CVaR_p^n(\mathbf{X}))$$

ile tanımlanır.

$$VaR_p(\mathbf{X}) = (VaR_p(X_1), \dots, VaR_p(X_n))$$

olmak üzere i . bileşeni

$$\begin{aligned}
CVaR_p^i(\mathbf{X}) &= E[X_i - VaR_\alpha(X_j) | X_j > VaR_\alpha(X_j), j = 1, \dots, n] \\
&= m_{\mathbf{X}}^i[VaR_p(\mathbf{X})] \\
&= \frac{\pi_{\mathbf{X}}^i[VaR_p(\mathbf{X})]}{S_{\mathbf{X}}[VaR_p(\mathbf{X})]},
\end{aligned} \tag{5.6}$$

eşitliği ile bulunur.

$S = \sum_{i=1}^n X_i$ toplam risk olmak üzere, p güven seviyesi için $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ komonotonik rasgele vektörü bilindiğinde S 'e ilişkin çok değişkenli koşullu riske maruz değer

$$CVaR_p(S|\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n CVaR_p^i(X_i) \tag{5.7}$$

şeklinde ifade edilir (Sonuç 2.7, Denuit vd. 2005, Hürlimann 2004).

Bu çalışmada, FGM için CVaR risk ölçüsüne ait bulunan bileşenler toplamı, alttoplamsallık özelliğinden dolayı

$$CVaR_p(S|\mathbf{X}) \leq \sum_{i=1}^n CVaR_p^i(X_i)$$

şeklinde üst sınır olarak kabul edilmiştir.

5.2.1 İki değişkenli NS kuantil noktalarına dayalı koşullu riske maruz değer (CVaR)

U_1 ve U_2 , $U(0, 1)$ dağılımlı iki bağımlı rasgele değişken olsun. 5.1.1. bölümde bulunan her bir $VaR^{Cl}(p_1, p_2)$, $VaR^F(p_1, p_2)$, $VaR^{Gu}(p_1, p_2)$ ve $VaR^{FGM}(p_1, p_2)$ değerleri için iki değişkenli CVaR lar bu bölümde elde edilecektir. Bu bölümde ele alınan kopula fonksiyonları için gerekli olacak yaşam kopulaları ($S_{\mathbf{U}}^{Cl}(\mathbf{u})$, $S^F(\mathbf{u})$, $S_{\mathbf{U}}^{Gu}(\mathbf{u})$)

ve $S_{\mathbf{U}}^{FGM}(\mathbf{u})$) Ek2' de elde edilmiştir. α bağımlılık parametresi ile bağımlı risk gruplarına ait değerlerin bulunduğunu belirtmek için VaR_p ve $CVaR_p$ yerine sırasıyla VaR_α ve $CVaR_\alpha$ gösterimleri kullanılmıştır.

5.2'de açıklanan iki değişkenli durumda bahsedilen tanımlamalar yeniden yapılırsa;

$$VaR_\alpha(\mathbf{U}) = (VaR_\alpha(U_1), VaR_\alpha(U_2))$$

olmak üzere $CVaR_\alpha(\mathbf{U}) = (CVaR_\alpha^1(\mathbf{U}), CVaR_\alpha^2(\mathbf{U}))$ vektörüne ait bileşenler (5.6) denkleminde

$$\begin{aligned} CVaR_\alpha^i(\mathbf{U}) &= E[U_i - VaR_\alpha(U_j) | U_j > VaR_\alpha(U_j), j = 1, 2] \\ &= m_X^i[VaR_\alpha(\mathbf{U})] \\ &= \frac{\pi_{\mathbf{U}}^i[VaR_\alpha(\mathbf{U})]}{S_{\mathbf{U}}[VaR_\alpha(\mathbf{U})]}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

yazılır. Burada $(\pi_{\mathbf{U}}^1(\mathbf{u}), \pi_{\mathbf{U}}^2(\mathbf{u}))$ sınırlı hasar (stop-loss) dönüşüm vektörü olmak üzere bileşenler (5.5)'den

$$\pi_{\mathbf{U}}^1(\mathbf{u}) = \int_{u_1}^1 S_{\mathbf{U}}(t, u_2) dt \quad (5.9)$$

ve

$$\pi_{\mathbf{U}}^2(\mathbf{u}) = \int_{u_2}^1 S_{\mathbf{U}}(u_1, t) dt \quad (5.10)$$

biçimindedir. 5.1.1. bölümde bulunan iki değişkenli NS kuantil noktaları π ve S fonksiyonlarında yerine yazıldığında istenilen kopulalar için iki değişkenli NS kuantil noktalarına dayalı koşullu riske maruz değerler elde edilmiş olur.

Clayton için CVaR:

$$C_{\alpha}(u_1, u_2) = (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}, \quad \alpha > 0$$

$$VaR^{Cl}(p_1, p_2) = \left((p_1^{-\alpha} - (p_1 + p_2)^{-\alpha} + 1)^{-1/\alpha}, p_1 + p_2 \right), \quad \alpha > 0, p_1, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 \leq 1$$

$$S_{\mathbf{U}}^{Cl}(\mathbf{u}) = 1 - u_1 - u_2 + (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}$$

$(\pi_{\mathbf{U}}^1(\mathbf{u}), \pi_{\mathbf{U}}^2(\mathbf{u}))$ sınırlı hasar (stop-loss) dönüşüm vektörüne ait bileşenler (5.9) ve (5.10) eşitlikleri yardımıyla

$$\pi_{\mathbf{U}}^1(\mathbf{u}) = \int_{u_1}^1 \left(1 - t - u_2 + (t^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha} \right) dt$$

ve

$$\pi_{\mathbf{U}}^2(\mathbf{u}) = \int_{u_2}^1 \left(1 - u_1 - t + (u_1^{-\alpha} + t^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha} \right) dt$$

elde edilir. $VaR^{Cl}(p_1, p_2)$ bileşenleri π ve S fonksiyonlarında yerine yazıldığında (5.8) denklemi yardımıyla Clayton kopulası için iki değişkenli CVaR elde edilebilir.

Frank için CVaR:

$$C_{\alpha}(u_1, u_2) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1)}{e^{-\alpha} - 1} \right), \quad \alpha \neq 0$$

$$VaR^F(p_1, p_2) = \left(-\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\alpha p_1} - 1)(e^{-\alpha} - 1)}{(e^{-\alpha(p_1+p_2)} - 1)} \right), p_1 + p_2 \right),$$

$$\alpha \neq 0, p_1, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 \leq 1$$

$$S_{\mathbf{U}}^F(\mathbf{u}) = 1 - u_1 - u_2 - \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1)}{e^{-\alpha} - 1} \right)$$

$(\pi_{\mathbf{U}}^1(\mathbf{u}), \pi_{\mathbf{U}}^2(\mathbf{u}))$ stop - loss dönüşüm vektörüne ait bileşenler (5.9) ve (5.10) eşitlikleri

yardımla

$$\pi_{\mathbf{U}}^1(\mathbf{u}) = \int_{u_1}^1 \left(1 - t - u_2 - \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\alpha t} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1)}{e^{-\alpha} - 1} \right) \right) dt$$

ve

$$\pi_{\mathbf{U}}^2(\mathbf{u}) = \int_{u_2}^1 \left(1 - u_1 - t - \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha t} - 1)}{e^{-\alpha} - 1} \right) \right) dt$$

elde edilir. $VaR^F(p_1, p_2)$ bileşenleri π ve S fonksiyonlarında yerine yazıldığında (5.8) denklemi yardımıyla Frank kopulası için iki değişkenli CVaR elde edilebilir.

Gumbel için CVaR :

$$C_{\alpha}^{Gu}(u_1, u_2) = \exp \left[- \left((-\ln u_1)^{\alpha} + (-\ln u_2)^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right], \quad \alpha \in [1, \infty)$$

$$VaR^{Gu}(p_1, p_2) = \left(\exp \left(- \left((-\ln p_1)^{\alpha} - (-\ln(p_1 + p_2))^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right), p_1 + p_2 \right), \\ \alpha \in [1, \infty), p_1, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 \leq 1$$

$$S_{\mathbf{U}}^{Gu}(\mathbf{u}) = 1 - u_1 - u_2 + \exp \left[- \left((-\ln u_1)^{\alpha} + (-\ln u_2)^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right]$$

$(\pi_{\mathbf{U}}^1(\mathbf{u}), \pi_{\mathbf{U}}^2(\mathbf{u}))$ sınırlı hasar (stop-loss) dönüşüm vektörüne ait bileşenler (5.9) ve (5.10) eşitlikleri yardımıyla

$$\pi_{\mathbf{U}}^1(\mathbf{u}) = \int_{u_1}^1 \left(1 - t - u_2 + \exp \left[- \left((-\ln t)^{\alpha} + (-\ln u_2)^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] \right) dt$$

ve

$$\pi_{\mathbf{U}}^2(\mathbf{u}) = \int_{u_2}^1 \left(1 - u_1 - t + \exp \left[- \left((-\ln u_1)^{\alpha} + (-\ln t)^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] \right) dt$$

elde edilir. $VaR^{Gu}(p_1, p_2)$ bileşenleri π ve S fonksiyonlarında yerine yazıldığında (5.8) denklemi yardımıyla Gumbel kopulası için iki değişkenli CVaR elde edilebilir.

FGM için CVaR:

$$C_{\alpha}^{FGM}(u_1, u_2) = u_1 u_2 [1 + \alpha (1 - u_1)(1 - u_2)], -1 \leq \alpha \leq 1$$

kopulasına bağlı yaşam fonksiyonu Ek 2'de

$$S_{\mathbf{U}}^{FGM}(\mathbf{u}) = (1 - u_1)(1 - u_2)(1 + \alpha u_1 u_2)$$

şeklinde bulunmuştur.

$(\pi_{\mathbf{U}}^1(\mathbf{u}), \pi_{\mathbf{U}}^2(\mathbf{u}))$ sınırlı hasar (stop-loss) dönüşüm vektörüne ait bileşenler (5.9) ve (5.10) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbf{U}}^1(\mathbf{u}) &= \int_{u_1}^1 (1 - t)(1 - u_2)(1 + \alpha t u_2) dt \\ &= -\frac{1}{6}(u_1 - 1)^2(u_2 - 1)(\alpha u_2 + 2\alpha u_1 u_2 + 3) \end{aligned} \quad (5.11)$$

ve

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbf{U}}^2(\mathbf{u}) &= \int_{u_2}^1 (1 - u_1)(1 - t)(1 + \alpha u_1 t) dt \\ &= -\frac{1}{6}(u_1 - 1)(u_2 - 1)^2(\alpha u_1 + 2\alpha u_1 u_2 + 3) \end{aligned} \quad (5.12)$$

biçiminde elde edilir.

$(-1 \leq \alpha < 0)$ için (5.3a)'da bulunan $VaR_{\alpha}^{FGM}(p_1, p_2)$ bileşenleri π ve S fonksiyonlarında yerine yazıldığında (5.8) denklemi yardımıyla FGM kopulası için

$$CVaR_{\alpha}(\mathbf{U}) = (CVaR_{\alpha}^1(\mathbf{U}), CVaR_{\alpha}^2(\mathbf{U}))$$

vektörü aşağıda elde edilmektedir.

$$\begin{aligned}
S_{\mathbf{U}} [VaR_{\alpha}(\mathbf{U})] &= S_U [VaR^{FGM}(p_1, p_2)] \\
&= S_U \left[\frac{1}{2} \left(-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right), p_1 + p_2 \right] \\
&= \left(1 - \frac{1}{2} \left(-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) \right) (1 - (p_1 + p_2)) \\
&\quad \times \left(1 + \alpha \frac{1}{2} \left(-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) (p_1 + p_2) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{\mathbf{U}}^1 [VaR_{\alpha}(\mathbf{U})] &= \pi_{\mathbf{U}}^1 [VaR^{FGM}(p_1, p_2)] \\
&= \pi_{\mathbf{U}}^1 \left[\frac{1}{2} \left(-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right), p_1 + p_2 \right] \\
&= -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \left(-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) - 1 \right)^2 (p_1 + p_2 - 1) \\
&\quad \times \left(\alpha (p_1 + p_2) + 2\alpha \frac{1}{2} \left(-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) (p_1 + p_2) + 3 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CVaR_{\alpha}^1(\mathbf{U}) &= \frac{\pi_{\mathbf{U}}^1 [VaR_{\alpha}(\mathbf{U})]}{S_{\mathbf{U}} [VaR_{\alpha}(\mathbf{U})]} \\
&= \frac{1}{6 \left(\alpha \left(\frac{1}{2} \sqrt{b_1^2 - 4c_1} - \frac{1}{2} b_1 \right) (p_1 + p_2) + 1 \right)} \\
&\quad \times \left(\alpha (p_1 + p_2) - \alpha \left(b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) (p_1 + p_2) + 3 \right) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{2} b_1 - \frac{1}{2} \sqrt{b_1^2 - 4c_1} + 1 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{\mathbf{U}}^2 [VaR_{\alpha}(\mathbf{U})] &= \pi_{\mathbf{U}}^2 [VaR^{FGM}(p_1, p_2)] \\
&= \pi_{\mathbf{U}}^2 \left[\frac{1}{2} \left(-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right), p_1 + p_2 \right] \\
&= -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \left(-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) - 1 \right) (p_1 + p_2 - 1)^2 \\
&\quad \times \left(\alpha \frac{1}{2} \left(-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) + 2\alpha \frac{1}{2} \left(-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) (p_1 + p_2) + 3 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\pi_{\mathbf{U}}^2 [VaR_{\alpha}(\mathbf{U})]}{S_{\mathbf{U}} [VaR_{\alpha}(\mathbf{U})]} &= \frac{-\frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \left(-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) - 1 \right) (p_1 + p_2 - 1)^2}{\left(\frac{\alpha}{2} \left(-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) + \alpha \left(-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) (p_1 + p_2) + 3 \right)} \\
&\quad \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2} \left(-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) \right) (1 - (p_1 + p_2))} \\
&\quad \times \left(1 + \alpha \frac{1}{2} \left(-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) (p_1 + p_2) \right) \\
&= \frac{(p_1 + p_2 - 1)}{6 \left(\alpha \left(\frac{1}{2} \sqrt{b_1^2 - 4c_1} - \frac{1}{2} b_1 \right) (p_1 + p_2) + 1 \right)} \\
&\quad \times \left(\frac{1}{2} \alpha \left(b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) + \alpha \left(b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) (p_1 + p_2) - 3 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CVaR_{\alpha}^2(\mathbf{U}) &= \frac{\pi_{\mathbf{U}}^2 [VaR_{\alpha}(\mathbf{U})]}{S_{\mathbf{U}} [VaR_{\alpha}(\mathbf{U})]} \\
&= \frac{1}{6 \left(\alpha \left(\frac{1}{2} \sqrt{b_1^2 - 4c_1} - \frac{1}{2} b_1 \right) (p_1 + p_2) + 1 \right)} (p_1 + p_2 - 1) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{2} \alpha \left(b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) + \alpha \left(b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) (p_1 + p_2) - 3 \right)
\end{aligned}$$

$(-1 \leq \alpha < 0)$ durumunda toplam hasar miktarı S için $CVaR_{\alpha}(S)$, (5.7) eşitiğinden

$$\begin{aligned}
CVaR_{\alpha}(S) &= CVaR_{\alpha}^1(U_1) + CVaR_{\alpha}^2(U_2) \\
&= \frac{1}{6 \left(\alpha \left(\frac{1}{2} \sqrt{b_1^2 - 4c_1} - \frac{1}{2} b_1 \right) (p_1 + p_2) + 1 \right)} \\
&\quad \times \left(\alpha (p_1 + p_2) - \alpha \left(b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) (p_1 + p_2) + 3 \right) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{2} b_1 - \frac{1}{2} \sqrt{b_1^2 - 4c_1} + 1 \right) \\
&\quad + \frac{1}{6 \left(\alpha \left(\frac{1}{2} \sqrt{b_1^2 - 4c_1} - \frac{1}{2} b_1 \right) (p_1 + p_2) + 1 \right)} (p_1 + p_2 - 1) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{2} \alpha \left(b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) + \alpha \left(b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) (p_1 + p_2) - 3 \right)
\end{aligned}$$

bulunur.

($0 < \alpha \leq 1$) için (5.3b)'de bulunan $VaR^{FGM}(p_1, p_2)$ bileşenleri π ve S fonksiyonlarında yerine yazıldığında (5.8) denklemi yardımıyla FGM kopulası için $CVaR_\alpha(\mathbf{U}) = (CVaR_\alpha^1(\mathbf{U}), CVaR_\alpha^2(\mathbf{U}))$ aşağıda elde edilmektedir.

$$\begin{aligned}
S_{\mathbf{U}}[VaR_\alpha(\mathbf{U})] &= S_U[VaR^{FGM}(p_1, p_2)] \\
&= S_U\left[\frac{1}{2}\left(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1}\right), p_1 + p_2\right] \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\left(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1}\right)\right) (1 - (p_1 + p_2)) \\
&\quad \times \left(1 + \alpha\frac{1}{2}\left(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1}\right) (p_1 + p_2)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{\mathbf{U}}^1[VaR_\alpha(\mathbf{U})] &= \pi_{\mathbf{U}}^1[VaR^{FGM}(p_1, p_2)] \\
&= \pi_{\mathbf{U}}^1\left[\frac{1}{2}\left(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1}\right), p_1 + p_2\right] \\
&= -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\left(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1}\right) - 1\right)^2 (p_1 + p_2 - 1) \\
&\quad \times \left(\alpha(p_1 + p_2) + 2\alpha\frac{1}{2}\left(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1}\right) (p_1 + p_2) + 3\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\pi_{\mathbf{U}}^1[VaR_\alpha(\mathbf{U})]}{S_{\mathbf{U}}[VaR_\alpha(\mathbf{U})]} &= \frac{-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\left(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1}\right) - 1\right)^2 (p_1 + p_2 - 1) \times \left(\alpha(p_1 + p_2) + 2\alpha\frac{1}{2}\left(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1}\right) (p_1 + p_2) + 3\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\left(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1}\right)\right) (1 - (p_1 + p_2)) \times \left(1 + \alpha\frac{1}{2}\left(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1}\right) (p_1 + p_2)\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6\left(\frac{1}{2}\alpha(p_1 + p_2)\left(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1}\right) + 1\right)} \left(\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}\sqrt{b_1^2 - 4c_1} + 1\right) \\
&\quad \times \left(\alpha(p_1 + p_2) - \alpha(p_1 + p_2)\left(b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1}\right) + 3\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CVaR_\alpha^1(\mathbf{U}) &= \frac{\pi_{\mathbf{U}}^1[VaR_\alpha(\mathbf{U})]}{S_{\mathbf{U}}[VaR_\alpha(\mathbf{U})]} \\
&= \frac{1}{6 \left(\frac{1}{2}\alpha(p_1 + p_2) \left(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) + 1 \right)} \\
&\times \left(\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}\sqrt{b_1^2 - 4c_1} + 1 \right) \left(\alpha(p_1 + p_2) - \alpha(p_1 + p_2) \left(b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) + 3 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{\mathbf{U}}^2[VaR_\alpha(\mathbf{U})] &= \pi_{\mathbf{U}}^2[VaR^{FGM}(p_1, p_2)] \\
&= \pi_{\mathbf{U}}^2 \left[\frac{1}{2} \left(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right), p_1 + p_2 \right] \\
&= -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \left(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) - 1 \right) (p_1 + p_2 - 1)^2 \\
&\times \left(\frac{\alpha}{2} \left(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) + \alpha \left(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) (p_1 + p_2) + 3 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\pi_{\mathbf{U}}^2[VaR_\alpha(\mathbf{U})]}{S_{\mathbf{U}}[VaR_\alpha(\mathbf{U})]} &= \frac{-\frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \left(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) - 1 \right) (p_1 + p_2 - 1)^2 \times \left(\frac{\alpha}{2} \left(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) + \alpha \left(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) (p_1 + p_2) + 3 \right)}{\left(1 - \frac{1}{2} \left(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) \right) (1 - (p_1 + p_2)) \times \left(1 + \alpha \frac{1}{2} \left(-b - \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) (p_1 + p_2) \right)} \\
&= \frac{(p_1 + p_2 - 1)}{6 \left(\frac{1}{2}\alpha \left(-b - \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) (p_1 + p_2) + 1 \right)} \\
&\times \left(\frac{1}{2}\alpha \left(b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) + \alpha(p_1 + p_2) \left(b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) - 3 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CVaR_\alpha^2(\mathbf{U}) &= \frac{\pi_{\mathbf{U}}^2 [VaR_\alpha(\mathbf{U})]}{S_{\mathbf{U}} [VaR_\alpha(\mathbf{U})]} \\
&= \frac{1}{6 \left(\frac{1}{2}\alpha \left(-b - \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) (p_1 + p_2) + 1 \right)} (p_1 + p_2 - 1) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{2}\alpha \left(b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) + \alpha (p_1 + p_2) \left(b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) - 3 \right)
\end{aligned}$$

($0 < \alpha \leq 1$) durumunda toplam hasar miktarı S için $CVaR_\alpha(S)$, (5.7) eşitiğinden

$$\begin{aligned}
CVaR_\alpha(S) &= CVaR_\alpha^1(U_1) + CVaR_\alpha^2(U_2) \\
&= \frac{1}{6 \left(\frac{1}{2}\alpha (p_1 + p_2) \left(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) + 1 \right)} \\
&\quad \times \left(\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}\sqrt{b_1^2 - 4c_1} + 1 \right) \\
&\quad \times \left(\alpha (p_1 + p_2) - \alpha (p_1 + p_2) \left(b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) + 3 \right) \\
&\quad + \frac{1}{6 \left(\frac{1}{2}\alpha \left(-b - \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) (p_1 + p_2) + 1 \right)} (p_1 + p_2 - 1) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{2}\alpha \left(b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) + \alpha (p_1 + p_2) \left(b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1} \right) - 3 \right)
\end{aligned}$$

bulunur.

$VaR^{FGM}(\mathbf{U})$ vektör bileşenleri için Ek 2'de elde edilip, (5.4)'de ifade ettiğimiz koşul, bu bölümde $CVaR_\alpha^{FGM}(\mathbf{U})$ vektör bileşenleri ve $CVaR_\alpha(S)$ için de geçerlidir.

$p_1 = p_2$ durumu ve farklı α değerleri için $VaR^{FGM}(\mathbf{U})$, $CVaR_\alpha^{FGM}(\mathbf{U})$ ve $CVaR_\alpha(S)$ değerlerindeki değişimler, Çizelge 5.1-5.4 ve Şekil 5.1-5.3.b,c'de gösterilmiştir.

$p_1 \neq p_2$ durumu ve farklı α değerleri için $VaR^{FGM}(\mathbf{U})$, $CVaR_\alpha^{FGM}(\mathbf{U})$ ve $CVaR_\alpha(S)$ değerlerindeki değişimler, bir kısmı Ek 5'de verilen Çizelge 5.5-5.16 ve Şekil 5.4-5.7.a,b'de gösterilmiştir.

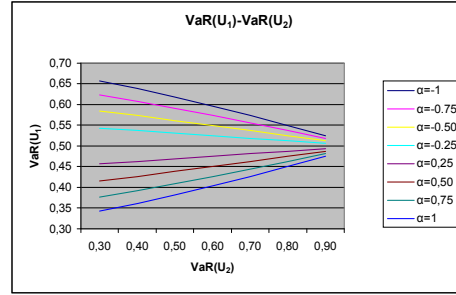
Çizelge 5.1 ($p_1 = p_2$); $\alpha = (-1 : 0.25 : 1)$; $VaR(\mathbf{U})$, $CVaR(\mathbf{U})$; $\mathbf{u} \in (0, 1)^2$

$\alpha = -1$	$p_1 = p_2$	VaR(U_1)	VaR(U_2)	CVaR(U_1)	CVaR(U_2)	CVaR(S)	$\alpha = -0,75$	$p_1 = p_2$	VaR(U_1)	VaR(U_2)	CVaR(U_1)	CVaR(U_2)	CVaR(S)
	0,15	0,6576	0,3	0,1639	0,2831	0,4470		0,15	0,6233	0,3	0,1821	0,3056	0,4877
	0,20	0,6385	0,4	0,1690	0,2486	0,4176		0,20	0,6073	0,4	0,1869	0,2666	0,4535
	0,25	0,6180	0,5	0,1734	0,2127	0,3861		0,25	0,5907	0,5	0,1912	0,2263	0,4175
	0,30	0,5963	0,6	0,1765	0,1752	0,3517		0,30	0,5734	0,6	0,1949	0,1845	0,3794
	0,35	0,5734	0,7	0,1778	0,1356	0,3134		0,35	0,5556	0,7	0,1978	0,1412	0,3390
	0,40	0,5495	0,8	0,1770	0,0935	0,2705		0,40	0,5373	0,8	0,1998	0,0960	0,2958
	0,45	0,5249	0,9	0,1734	0,0483	0,2217		0,45	0,5187	0,9	0,2006	0,0490	0,2496
$\alpha = -0,50$	$p_1 = p_2$	VaR(U_1)	VaR(U_2)	CVaR(U_1)	CVaR(U_2)	CVaR(S)	$\alpha = -0,25$	$p_1 = p_2$	VaR(U_1)	VaR(U_2)	CVaR(U_1)	CVaR(U_2)	CVaR(S)
	0,15	0,5850	0,3	0,2028	0,3238	0,5266		0,15	0,5434	0,3	0,2256	0,3384	0,5640
	0,20	0,5734	0,4	0,2064	0,2806	0,4870		0,20	0,5373	0,4	0,2276	0,2915	0,5191
	0,25	0,5616	0,5	0,2099	0,2364	0,4463		0,25	0,5311	0,5	0,2296	0,2441	0,4737
	0,30	0,5495	0,6	0,2131	0,1912	0,4043		0,30	0,5249	0,6	0,2314	0,1962	0,4276
	0,35	0,5373	0,7	0,2160	0,1450	0,3610		0,35	0,5187	0,7	0,2332	0,1479	0,3811
	0,40	0,5249	0,8	0,2185	0,0978	0,3163		0,40	0,5125	0,8	0,2349	0,0990	0,3339
	0,45	0,5125	0,9	0,2206	0,0494	0,2700		0,45	0,5062	0,9	0,2366	0,0498	0,2864
$\alpha = 0,25$	$p_1 = p_2$	VaR(U_1)	VaR(U_2)	CVaR(U_1)	CVaR(U_2)	CVaR(S)	$\alpha = 0,50$	$p_1 = p_2$	VaR(U_1)	VaR(U_2)	CVaR(U_1)	CVaR(U_2)	CVaR(S)
	0,15	0,4566	0,3	0,2753	0,3590	0,6343		0,15	0,4150	0,3	0,3006	0,3660	0,6666
	0,20	0,4627	0,4	0,2733	0,3066	0,5799		0,20	0,4266	0,4	0,2968	0,3118	0,6086
	0,25	0,4689	0,5	0,2711	0,2546	0,5257		0,25	0,4384	0,5	0,2927	0,2582	0,5509
	0,30	0,4751	0,6	0,2689	0,2030	0,4719		0,30	0,4505	0,6	0,2880	0,2053	0,4933
	0,35	0,4813	0,7	0,2666	0,1517	0,4183		0,35	0,4627	0,7	0,2831	0,1530	0,4361
	0,40	0,4875	0,8	0,2642	0,1007	0,3649		0,40	0,4751	0,8	0,2779	0,1013	0,3792
	0,45	0,4938	0,9	0,2617	0,0502	0,3119		0,45	0,4875	0,9	0,2724	0,0503	0,3227
$\alpha = 0,75$	$p_1 = p_2$	VaR(U_1)	VaR(U_2)	CVaR(U_1)	CVaR(U_2)	CVaR(S)	$\alpha = 1$	$p_1 = p_2$	VaR(U_1)	VaR(U_2)	CVaR(U_1)	CVaR(U_2)	CVaR(S)
	0,15	0,3767	0,3	0,3251	0,3713	0,6964		0,15	0,3424	0,3	0,3484	0,3754	0,7238
	0,20	0,3927	0,4	0,3201	0,3158	0,6359		0,20	0,3615	0,4	0,3430	0,3190	0,6620
	0,25	0,4093	0,5	0,3143	0,2611	0,5754		0,25	0,3820	0,5	0,3357	0,2634	0,5991
	0,30	0,4266	0,6	0,3074	0,2072	0,5146		0,30	0,4037	0,6	0,3268	0,2087	0,5355
	0,35	0,4444	0,7	0,2997	0,1541	0,4538		0,35	0,4266	0,7	0,3162	0,1549	0,4711
	0,40	0,4627	0,8	0,2912	0,1018	0,3930		0,40	0,4505	0,8	0,3043	0,1022	0,4065
	0,45	0,4813	0,9	0,2822	0,0505	0,3327		0,45	0,4751	0,9	0,2914	0,0506	0,3420

Bu çizelgede, marjinal dağılımları düzgün olan, bağımlılık yapısının FGM kopula fonksiyonu ile modellendiği düşünilen iki bağımlı risk grubu için iki değişkenli N-S kuantil yöntemine göre bir önceki kısımda elde edilen iki değişkenli VaR ve CVaR risk ölçüm bileşen değerleri gösterilmektedir. $VaR(U_2)$, $(p_1 + p_2)$ 'den büyük $F_2(u_2)$ olasılık değerlerinden en küçük veren u_2 değerini göstermek üzere, U_1 ve U_2 nin bağımlı olduğu durum için $VaR(U_2)$ bilindiğinde p_1 olasılık seviyesi için diğer risk grubunda karşılaşılabilecek maksimum hasar bilgisini $VaR(U_1)$ vermektedir. Bu anlamda risk ölçümlerini hesaplamak için iki değişkenli N-S kuantil yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemle elde edilen VaR ve dolayısıyla CVaR'ın bağımlı risk ölçüm bileşenleri arasında, bağımlılık parametresi ve belirlenen olasılık düzeylerine göre değişimleri grafiklerde gösterilmiştir. Sigorta şirketlerinin, bu durumda risk rezervi, sermaye yeterliliği, yükümlülükleri karşılama yetisi, prim hesabı, sınırlı hasar eşliği gibi konularda aktüeryal politikalarını nasıl oluşturmaları gerektiği konusunda bazı yorum ve öneriler kısaca ilgili grafiklerin altında verilmiştir.

Çizelge 5.2 ($p_1 = p_2 = q$) ; $\alpha = (-1 : 0.25 : 1)$; $VaR(U_1), VaR(U_2)$, $\mathbf{u} \in (0, 1)^2$

VaR(U_2) α	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
-1,00	0,6576	0,6385	0,6180	0,5963	0,5734	0,5495	0,5249
-0,75	0,6233	0,6073	0,5907	0,5734	0,5556	0,5373	0,5187
-0,50	0,5850	0,5734	0,5616	0,5495	0,5373	0,5249	0,5125
-0,25	0,5434	0,5373	0,5311	0,5249	0,5187	0,5125	0,5062
0,25	0,4566	0,4627	0,4689	0,4751	0,4813	0,4875	0,4938
0,50	0,4150	0,4266	0,4384	0,4505	0,4627	0,4751	0,4875
0,75	0,3767	0,3927	0,4093	0,4266	0,4444	0,4627	0,4813
1,00	0,3424	0,3615	0,3820	0,4037	0,4266	0,4505	0,4751

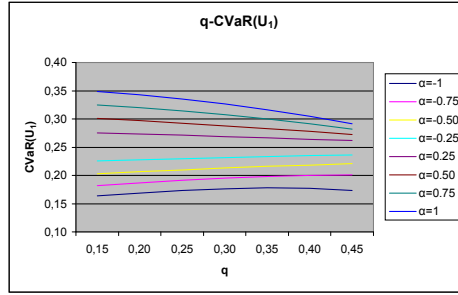


Şekil 5.1 ($p_1 = p_2 = q$) ; $\alpha = (-1 : 0.25 : 1)$; $VaR(U_1), VaR(U_2)$, $\mathbf{u} \in (0, 1)^2$

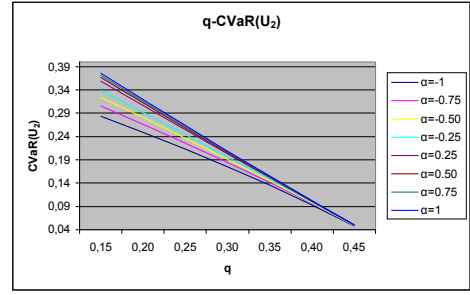
$VaR(U_1)$ ile $VaR(U_2)$ arasında negatif bağımlılık durumunda negatif yönde bir ilişki, pozitif bağımlılık durumunda pozitif yönde bir ilişki olduğu görülmektedir. İki risk grubu için belirlenen $(p_1 + p_2)$ toplam olasılık seviyesinde, risk gruplarından birinde ortaya çıkabilecek maksimum hasar $VaR(U_2)$ biliniyorsa, negatif bağımlılığın arttığı durumda diğer risk grubunda ortaya çıkabilecek $VaR(U_1)$ maksimum hasarın artması beklenir. Aynı durum pozitif bağımlılığın azaldığı durumda da geçerlidir. En yüksek riskli durum ($p_1 = p_2 = 0.15$) için negatif bağımlı riskli gruplar arasında ($\alpha = -1$) veya pozitif bağımlı riskler arasında ($\alpha = 0.25$) olan parametre değerlerinde gerçekleşir. En düşük riskli durum ise ($p_1 = p_2 = 0.15$) için negatif bağımlı riskli gruplar arasında ($\alpha = -0.25$) veya pozitif bağımlı riskler arasında ($\alpha = 1$) olan parametre değerlerinde gerçekleşir. Bu durumda U_2 risk grubu için gereken risk rezervi ($\alpha = -1$) durumunda en az 0,6576 birim (yüksek risk) ile, ($\alpha = 1$) durumunda ise en az 0,3424 birim (düşük risk) ile doğru orantılı olmalıdır.

Çizelge 5.3 ($p_1 = p_2 = q$) ; $\alpha = (-1 : 0.25 : 1)$; $CVaR(U_1)$, $CVaR(U_2)$, $\mathbf{u} \in (0, 1)^2$

α \ q	CVaR(U_1)							CVaR(U_2)						
	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
-1,00	0,1639	0,1690	0,1734	0,1765	0,1778	0,1770	0,1734	0,2831	0,2486	0,2127	0,1752	0,1356	0,0935	0,0483
-0,75	0,1821	0,1869	0,1912	0,1949	0,1978	0,1998	0,2006	0,3056	0,2666	0,2263	0,1845	0,1412	0,0960	0,0490
-0,50	0,2028	0,2064	0,2099	0,2131	0,2160	0,2185	0,2206	0,3238	0,2806	0,2364	0,1912	0,1450	0,0978	0,0494
-0,25	0,2256	0,2276	0,2296	0,2314	0,2332	0,2349	0,2366	0,3384	0,2915	0,2441	0,1962	0,1479	0,0990	0,0498
0,25	0,2753	0,2733	0,2711	0,2689	0,2666	0,2642	0,2617	0,3590	0,3066	0,2546	0,2030	0,1517	0,1007	0,0502
0,50	0,3006	0,2968	0,2927	0,2880	0,2831	0,2779	0,2724	0,3660	0,3118	0,2582	0,2053	0,1530	0,1013	0,0503
0,75	0,3251	0,3201	0,3143	0,3074	0,2997	0,2912	0,2822	0,3713	0,3158	0,2611	0,2072	0,1541	0,1018	0,0505
1,00	0,3484	0,3430	0,3357	0,3268	0,3162	0,3043	0,2914	0,3754	0,3190	0,2634	0,2087	0,1549	0,1022	0,0506



(a)



(b)

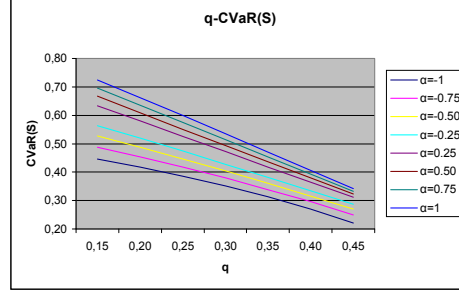
Şekil 5.2 ($p_1 = p_2 = q$) ; $\alpha = (-1 : 0.25 : 1)$; $CVaR(U_1)$, $CVaR(U_2)$, $\mathbf{u} \in (0, 1)^2$

Şekil 5.2.a'da, negatif bağımlılık azaldıkça ve pozitif bağımlılık arttıkça belirli bir q değeri için $CVaR(U_1)$ değerleri artmaktadır. Pozitif bağımlılık durumunda q ve $CVaR(U_1)$ arasında negatif yönde bir ilişki, negatif bağımlılık durumunda pozitif yönde bir ilişki vardır.

Şekil 5.2.b'de, artan q değerleri için, pozitif bağımlılığın arttığı negatif bağımlılığın azaldığı durumda $CVaR(U_2)$ değerlerinin arttığı ve her iki durumda da bu değerlerin belli bir noktaya yaklaştığı görülmektedir.

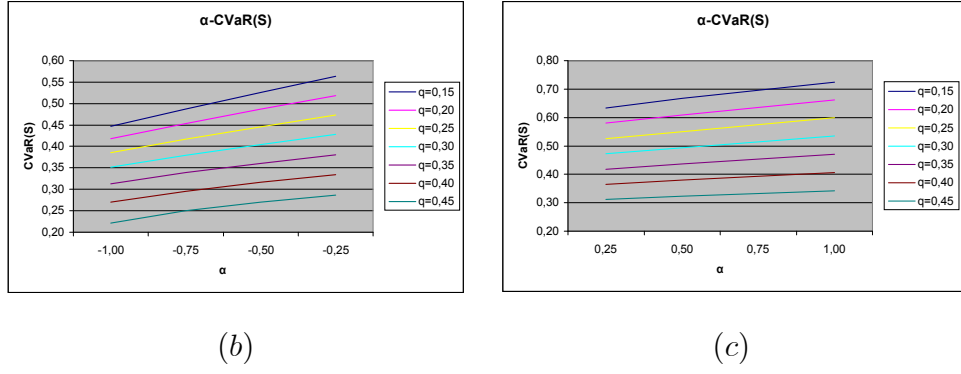
Çizelge 5.4 ($p_1 = p_2 = q$); $\alpha = (-1 : 0.25 : 1)$; $CVaR(S)$, $\mathbf{u} \in (0, 1)^2$

		CVaR(S)						
		q	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
α	-1,00	0,4470	0,4176	0,3861	0,3517	0,3134	0,2705	0,2217
	-0,75	0,4877	0,4535	0,4175	0,3794	0,3390	0,2958	0,2496
	-0,50	0,5266	0,4870	0,4463	0,4043	0,3610	0,3163	0,2700
	-0,25	0,5640	0,5191	0,4737	0,4276	0,3811	0,3339	0,2864
	0,25	0,6343	0,5799	0,5257	0,4719	0,4183	0,3649	0,3119
	0,50	0,6666	0,6086	0,5509	0,4933	0,4361	0,3792	0,3000
	0,75	0,6964	0,6359	0,5754	0,5146	0,4538	0,3930	0,3327
	1,00	0,7238	0,6620	0,5991	0,5355	0,4711	0,4065	0,3420



Şekil 5.3 (a) ($p_1 = p_2 = q$); $\alpha = (-1 : 0.25 : 1)$; q ; $CVaR(S)$, $\mathbf{u} \in (0, 1)^2$

$CVaR(S)$ ortaya çıkması muhtemel maksimum hasarı aştığı varsayılan bir risk grubunda ortalama toplam ardakalan hasar bilgisini verir. Bu durumda, Şekil 5.3.a'da; negatif bağımlılığın azaldığı, pozitif bağımlılığın arttığı durumda belirli bir q değeri için $CVaR(S)$ değerlerinin arttığı ve her iki durumda da q ve $CVaR(S)$ arasında negatif yönde bir ilişkinin olduğu görülmektedir.



Şekil 5.3 $(p_1 = p_2 = q)$; $\alpha = (-1 : 0.25 : 1)$; $q; CVaR(S)$, $\mathbf{u} \in (0, 1)^2$

Şekil 5.3.b ve Şekil 5.3.c'den her iki bağımlılık durumu için olasılık seviyelerinin azalması durumunda ortalama toplam ardakalan hasarda artma olmasının beklendiği yorumlanmaktadır.

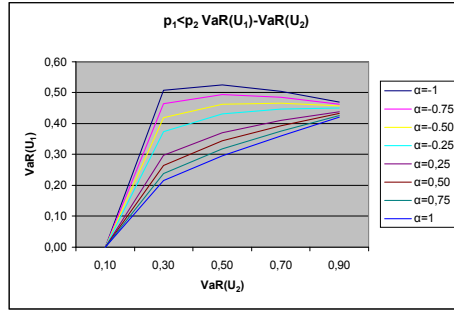
CVaR ölçüsüne göre;

En yüksek riskli durum: $(p_1 = p_2 = 0.15)$ için negatif bağımlı riskli gruplar arasında $(\alpha = -0.25)$ veya pozitif bağımlı riskler arasında $(\alpha = 1)$ olan parametre değerlerinde gerçekleşir. Buna göre, risklere karşılık ayrılması gereken toplam risk rezervi $(\alpha = -0.25)$ durumunda en fazla 0,5640 birim ile, $(\alpha = 1)$ durumunda ise 0,7238 birim ile orantılı biçimde oluşturulmalıdır.

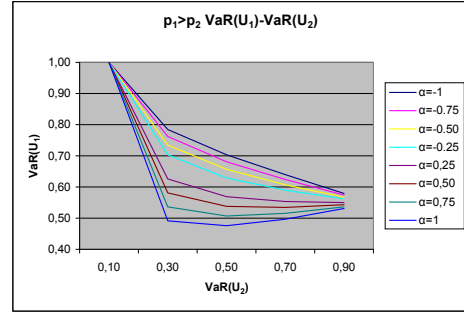
En düşük riskli durum: $(p_1 = p_2 = 0.45)$ için negatif bağımlı riskli gruplar arasında $(\alpha = -1)$ veya pozitif bağımlı riskler arasında $(\alpha = 1)$ olan parametre değerlerinde gerçekleşir. Buna göre, risklere göre ayrılması gereken toplam risk rezervi $(\alpha = -1)$ durumunda en fazla 0,2217 birim ile, $(\alpha = 0.25)$ durumunda ise 0,3119 birim ile orantılı olmalıdır.

Çizelge 5.5 ($p_1 \neq p_2$) ; $\alpha = (-1 : 0.25 : 1)$; $VaR(U_1), VaR(U_2)$, $\mathbf{u} \in (0, 1)^2$

p_1	0,00	0,10	0,10	0,20	0,20	0,30	0,30	0,40	0,40	0,50
p_2	0,10	0,00	0,20	0,10	0,30	0,20	0,40	0,30	0,50	0,40
$VaR(U_2)$	0,10		0,30		0,50		0,70		0,90	
α	$VaR(U_1)$									
-1,00	0,0000	1,0000	0,5083	0,7849	0,5247	0,7042	0,5036	0,6405	0,4694	0,5799
-0,75	0,0000	1,0000	0,4639	0,7619	0,4937	0,6814	0,4848	0,6242	0,4631	0,5739
-0,50	0,0000	1,0000	0,4185	0,7349	0,4621	0,6564	0,4659	0,6072	0,4569	0,5678
-0,25	0,0000	1,0000	0,3743	0,7032	0,4306	0,6292	0,4471	0,5896	0,4506	0,5617
0,25	0,0000	1,0000	0,2968	0,6257	0,3708	0,5694	0,4104	0,5529	0,4383	0,5494
0,50	0,0000	1,0000	0,2651	0,5815	0,3436	0,5379	0,3928	0,5341	0,4322	0,5431
0,75	0,0000	1,0000	0,2381	0,5361	0,3186	0,5063	0,3758	0,5152	0,4261	0,5369
1,00	0,0000	1,0000	0,2151	0,4917	0,2958	0,4753	0,3595	0,4964	0,4201	0,5306



(a)



(b)

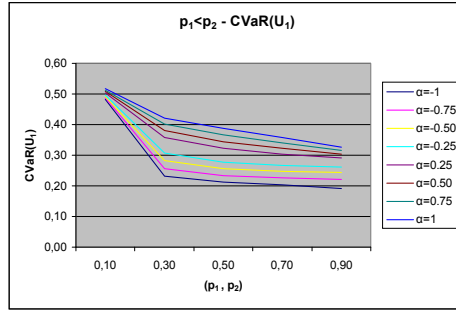
Şekil 5.4 ($p_1 \neq p_2$) ; $\alpha = (-1 : 0.25 : 1)$; $VaR(U_1), VaR(U_2)$, $\mathbf{u} \in (0, 1)^2$

Şekil 5.4.a'da, $VaR(U_1)$ ' in $VaR(U_2) = p_1 + p_2$ 'ye göre doğrusal değişimi gösterilmektedir. Belirli bir toplam olasılık seviyesinde, negatif bağımlılık artıp pozitif bağımlılık azaldıkça $VaR(U_1)$ değerleri artmaktadır. $(p_1 + p_2)$ 'nin 0,30'dan büyük değerleri için negatif bağımlılık durumunda bu artışın daha az olduğu, pozitif bağımlılık durumunda eğimi değişen bir yöne artışa devam ettiği ve her iki durumda da toplam olasılık seviyesinin 1'e yakın değerlerinde $VaR(U_2)$ nin 0,40 – 0,50 arasında bir noktada yoğunlaştığı görülmektedir.

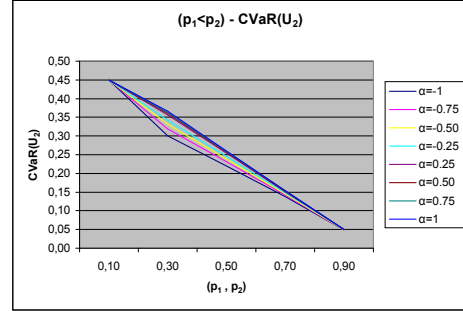
Şekil 5.4.b'de, 0,30'dan küçük olasılık düzeylerinde, $VaR(U_2)$ arttığında $VaR(U_1)$ ' in azaldığı görülmektedir. 0,30'dan büyük olasılık seviyelerinde eğimi değişen bir yöne azalışın devam ettikten sonra 0,50'den büyük değerlerde artışa geçtiği ve her iki durumda da $(p_1 + p_2)$ 'nin 1'e yakın değerlerinde $CVaR(U_2)$ 'nin 0,50 – 0,60 arasında olduğu görülmektedir.

Çizelge 5.6 a $(p_1 < p_2)$; $\alpha = (-1 : 0.25 : 1)$; $CVaR(U_1)$, $CVaR(U_2)$, $\mathbf{u} \in (0, 1)^2$

$p_1 < p_2$ α	0,10	0,30	0,50	0,70	0,90	0,10	0,30	0,50	0,70	0,90
	CVaR(U_1)					CVaR(U_2)				
-1,00	0,4833	0,2316	0,2121	0,2038	0,1921	0,4500	0,3010	0,2204	0,1383	0,0486
-0,75	0,4875	0,2560	0,2335	0,2264	0,2213	0,4500	0,3183	0,2311	0,1427	0,0492
-0,50	0,4917	0,2817	0,2553	0,2472	0,2437	0,4500	0,3318	0,2391	0,1458	0,0495
-0,25	0,4958	0,3078	0,2776	0,2668	0,2621	0,4500	0,3421	0,2453	0,1482	0,0498
0,25	0,5042	0,3577	0,3225	0,3043	0,2916	0,4500	0,3559	0,2537	0,1514	0,0502
0,50	0,5083	0,3805	0,3447	0,3225	0,3041	0,4500	0,3604	0,2566	0,1526	0,0503
0,75	0,5125	0,4016	0,3666	0,3406	0,3157	0,4500	0,3638	0,2589	0,1535	0,0504
1,00	0,5167	0,4214	0,3881	0,3585	0,3265	0,4500	0,3665	0,2607	0,1543	0,0505



(a)



(b)

Şekil 5.5 $(p_1 < p_2)$; $\alpha = (-1 : 0.25 : 1)$; (p_1, p_2) , $CVaR(U_1)$, $CVaR(U_2)$, $\mathbf{u} \in (0, 1)^2$

Şekil 5.4.a'da, en yüksek riskli durum $p_1 + p_2 \leq 0,30$ olan olasılık düzeylerinden $(p_1 = 0,10, p_2 = 0,20)$ için negatif bağımlı riskli gruplar arasında ($\alpha = -1$) veya pozitif bağımlı riskler arasında ($\alpha = 0,25$) olan parametre değerlerinde gerçekleşir. Buna göre, U_2 risk grubu için riske karşılık ayrılması gereken risk rezervi ($\alpha = -1$) durumunda en fazla 0,5083 birim ile, ($\alpha = 0,25$) durumunda ise 0,2968 birim ile orantılı olmalıdır. Olasılık seviyelerinin $0,30 < p_1 + p_2 \leq 0,50$ ve $p_1 + p_2 > 0,50$ aralıkları için de en yüksek riskli durumlar benzer şekilde belirlenebilir.

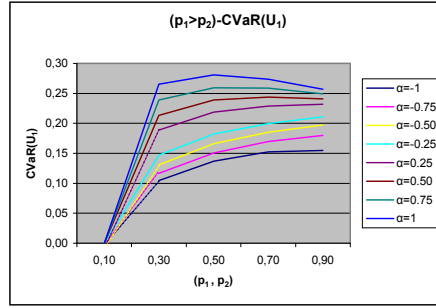
Şekil 5.5.a'dan pozitif bağımlılığın arttığı negatif bağımlılığın azaldığı durumda belirli bir (p_1, p_2) noktası için $CVaR(U_1)$ değerlerinin arttığı görülmektedir. (p_1, p_2) ve $CVaR(U_1)$ arasında 0,30'lara kadar daha hızlı azalan negatif yönde bir ilişki vardır. Şekil 5.4.a'da, en yüksek riskli durum için (VAR 'a göre) belirlenen

risk rezervi ile burada $CVaR$ 'a göre belirlenen risk rezervleri arasında bir tutarlılık vardır. Çünkü $CVaR$, VaR değerleri için karşılık ödemeleri gerçekleştikten sonra arda kalan riskler arasında ortalama bir risk belirlemektedir. Bu durumda $VaR(U_2)$ bilindiğinde $VaR(U_1)$ ve $CVaR(U_1)$ arasında ters yönde bir ilişki olduğu söylenebilir. Gerçekten $CVaR$ 'a göre riske karşı ihtiyatlı sermaye miktarı belirlenmek istendiğinde, karşılaşılan en yüksek risk durumlarının VaR 'a göre belirlenenin aksine çıkacağı açıktır. $CVaR$ 'a göre en yüksek riskli durum $p_1 + p_2 \leq 0,30$ olan olasılık düzeylerinden $(p_1 = 0,00, p_2 = 0,10)$ için negatif bağımlı riskli gruplar arasında $(\alpha = -1)$ veya pozitif bağımlı riskler arasında $(\alpha = 0,25)$ olan parametre değerlerinde gerçekleşir. Bu durumda, U_2 risk grubu için riske karşılık ayrılması gereken risk rezervi $(\alpha = -1)$ durumunda en fazla 0,4833 birim ile, $(\alpha = 0,25)$ durumunda ise 0,5167 birim ile orantılı olmalıdır. Risk rezervi için $CVaR$ ölçüsüne bakıldığında minimum pozitif bağımlılık durumu yüksek risk grubunu belirlerken VaR ölçüsüne bakıldığında tam negatif bağımlılığın söz konusu olduğu durum yüksek risk grubu olarak belirtilmişti.

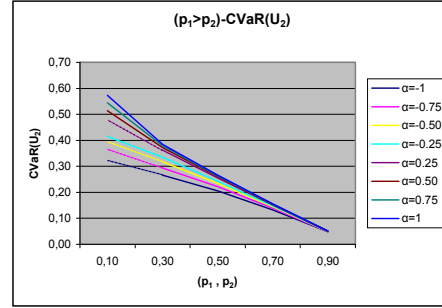
Pozitif bağımlılıkta değişim çok fark edilmemekle birlikte her iki durum için de (p_1, p_2) noktaları ile $CVaR(U_2)$ değerleri arasında ters yönde bir ilişki olduğu görülmektedir.

Çizelge 5.6 b ($p_1 > p_2$); $\alpha = (-1 : 0.25 : 1)$; $CVaR(U_1), CVaR(U_2), \mathbf{u} \in (0, 1)^2$

$p_1 > p_2$ α	0,10	0,30	0,50	0,70	0,90	0,10	0,30	0,50	0,70	0,90
	CVaR(U_1)					CVaR(U_2)				
-1,00		0,1045	0,1366	0,1524	0,1547		0,2662	0,2047	0,1326	0,0480
-0,75		0,1165	0,1508	0,1695	0,1797		0,2937	0,2214	0,1396	0,0488
-0,50		0,1306	0,1659	0,1850	0,1973		0,3163	0,2336	0,1442	0,0494
-0,25	0,0000	0,1472	0,1823	0,1997	0,2109	0,4154	0,3348	0,2429	0,1475	0,0497
0,25		0,1888	0,2189	0,2289	0,2321		0,3622	0,2555	0,1519	0,0502
0,50	0,0000	0,2133	0,2389	0,2436	0,2411	0,5143	0,3718	0,2599	0,1534	0,0504
0,75	0,0000	0,2392	0,2596	0,2586	0,2493	0,5442	0,3793	0,2633	0,1546	0,0505
1,00	0,0000	0,2654	0,2809	0,2738	0,2571	0,5727	0,3850	0,2660	0,1555	0,0506



(a)



(b)

Şekil 5.6 ($p_1 > p_2$); $\alpha = (-1 : 0.25 : 1)$; $(p_1, p_2), CVaR(U_1), CVaR(U_2), \mathbf{u} \in (0, 1)^2$

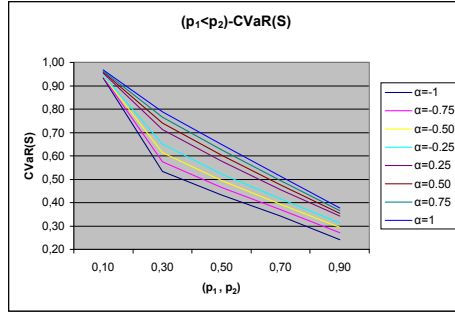
Şekil 5.6.a'da, 0,30'lara kadar bazı negatif ve pozitif bağımlılık parametrelerine ilişkin $CVaR(U_1)$ değerlerinin hesaplanamadığı görülmüştür. Toplam olasılık seviyesinin 0,30'dan büyük olan belirli bir (p_1, p_2) noktası için pozitif bağımlılığın arttığı, negatif bağımlılığın azaldığı durumda $CVaR(U_1)$ değerleri artmaktadır.

Şekil 5.6.b'de, negatif bağımlılığın azaldığı pozitif bağımlılığın arttığı durumda belirli bir (p_1, p_2) noktası için $CVaR(U_2)$ değerlerinin arttığı, (p_1, p_2) noktası ile $CVaR(U_2)$ arasında artan doğrusal bir bağıntı olup toplam olasılık seviyesi 1'e yakın seçildiğinde $CVaR(U_2)$ değerlerinin tek noktada yoğunlaştığı görülmektedir.

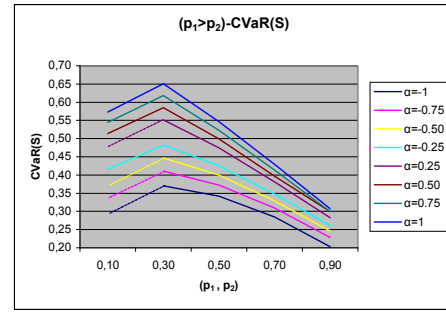
Bir sigorta şirketinin belirleyeceği risk rezervi için değerlendirilmesi, aşağıda Çizelge 5.8'in sonunda bazı senaryolar yoluyla verilmiştir.

Çizelge 5.7 ($p_1 \neq p_2$); $\alpha = (-1 : 0.25 : 1)$; $CVaR(S), \mathbf{u} \in (0, 1)^2$

$p_1 < p_2$ α	0,10	0,30	0,50	0,70	0,90	$p_1 > p_2$ α	0,10	0,30	0,50	0,70	0,90
-1,00	0,9333	0,5326	0,4325	0,3421	0,2407	-1,00		0,3707	0,3413	0,2850	0,2027
-0,75	0,9375	0,5743	0,4646	0,3691	0,2705	-0,75		0,4102	0,3722	0,3091	0,2285
-0,50	0,9417	0,6135	0,4944	0,3930	0,2932	-0,50		0,4469	0,3995	0,3292	0,2467
-0,25	0,9458	0,6499	0,5229	0,4150	0,3119	-0,25	0,4154	0,4820	0,4252	0,3472	0,2606
0,25	0,9542	0,7136	0,5762	0,4557	0,3418	0,25		0,5510	0,4744	0,3808	0,2823
0,50	0,9583	0,7409	0,6013	0,4751	0,3544	0,50	0,5143	0,5851	0,4988	0,3970	0,2998
0,75	0,9625	0,7654	0,6255	0,4941	0,3661	0,75		0,5442	0,6185	0,5229	0,4132
1,00	0,9667	0,7879	0,6488	0,5128	0,3770	1,00	0,5727	0,6504	0,5469	0,4293	0,3077



(a)



(b)

Şekil 5.7 ($p_1 \neq p_2$); $\alpha = (-1 : 0.25 : 1)$; $CVaR(S), \mathbf{u} \in (0, 1)^2$

Şekil 5.7.a'da, pozitif bağımlılığın arttığı negatif bağımlılığın azaldığı durumda belirli bir (p_1, p_2) noktası için $CVaR(S)$ değerlerinin arttığı, (p_1, p_2) ve $CVaR(S)$ arasında 0,30'lara kadar daha hızlı azalan negatif yönde bir ilişki olduğu görülmektedir.

Şekil 5.7.b'de, 0,30'lara kadar bazı negatif ve pozitif bağımlılık parametrelerine ilişkin $CVaR(S)$ değerleri tanımlı değildir. 0,30'dan küçük belirlenen toplam olasılık seviyeleri için (p_1, p_2) noktaları ile $CVaR(S)$ değerleri arasında pozitif yönde bir ilişki varken 0,30'dan büyük belirlenen toplam olasılık seviyeleri için bu değerler arasında negatif yönde bir ilişki vardır.

Bir sigorta şirketinin belirleyeceği risk rezervi değerlendirilmesi konusunda, Çizelge 5.8'in sonunda bazı senaryolar gösterilmiştir.

5.2.2 Örnek senaryolar

Bu bölümde, önceki alt bölümlerde elde edilen sonuçlar ve bunlara ilişkin bazı aktüeryal politika değerlendirmeleri için bazı senaryo örnekleri aşağıda verilmiştir. Ayrıca α ve (p_1, p_2) 'ye bağlı olarak değişen risk ölçüm değerlerine göre en yüksek ve en düşük senaryolar aşağıdaki çizelgede özetlenmiştir.

Çizelge 5.8 En yüksek ve en düşük riskli senaryolar için α ve (p_1, p_2) 'ye göre değişimini gösteren risk ölçüm değerleri

$p_1 = p_2$	$\alpha = -1$					$\alpha = 1$				
	VaR(U_1)	VaR(U_2)	CVaR(U_1)	CVaR(U_2)	CVaR(S)	VaR(U_1)	VaR(U_2)	CVaR(U_1)	CVaR(U_2)	CVaR(S)
0,15	0,6576	0,3000	0,1639	0,2831	0,4470	0,3424	0,3000	0,3484	0,3754	0,7238
0,45	0,5249	0,9000	0,1734	0,0483	0,2217	0,4751	0,9000	0,2914	0,0506	0,3420
$p_1 < p_2$										
0,10-0,20	0,5083	0,3000	0,2316	0,3010	0,5326	0,2151	0,3000	0,4214	0,3665	0,7879
0,20-0,30	0,5247	0,5000	0,2121	0,2204	0,4325	0,2958	0,5000	0,3881	0,2607	0,6488
0,40-0,50	0,4694	0,9000	0,1921	0,0486	0,2407	0,4201	0,9000	0,3265	0,0505	0,3770
$p_1 > p_2$										
0,20-0,10	0,7849	0,3000	0,1045	0,2662	0,3707	0,4917	0,3000	0,2654	0,3850	0,6504
0,30-0,20	0,7042	0,5000	0,1366	0,2047	0,3413	0,4753	0,5000	0,2809	0,2660	0,5469
0,50-0,40	0,5799	0,9000	0,1547	0,0480	0,2027	0,5306	0,9000	0,2571	0,0506	0,3077

Senaryo 1: Bağımlı iki risk grubuna ait olasılık düzeylerinin $p_1 = p_2 = 0,15$ olduğu durum için:

Risk rezervini VaR risk ölçüsüne göre belirlemek isteyen bir sigorta şirketinin, tam negatif bağımlılık durumunda en fazla 0,9576 birim, tam pozitif bağımlılık durumunda 0,6424 birim ile orantılı ölçüde sermaye sahibi olması önerilir. CVaR'a göre risk rezervi belirlenmek istenirse, rezerv miktarlarının tam negatif bağımlılık durumunda 0,4470 birim, tam pozitif bağımlılık durumunda ise 0,7238 birim ile orantılı olması uygun olacaktır.

Senaryo 2: $p_1 < p_2$ olacak şekilde $p_1 + p_2 = 0,30$ olduğu durum için:

Toplam risk rezervini VaR risk ölçüsüne göre belirlemek isteyen bir sigorta şirketine, tam negatif bağımlılık durumunda en fazla 0,8083 birim ile, tam pozitif bağımlılık

durumunda 0,5151 birim ile orantılı rezerv bulundurması önerilir. CVaR'a göre risk rezervi belirlenmek istenirse, bunun tam negatif bağımlılık durumunda 0,5326 birim ile, tam pozitif bağımlılık durumunda 0,7879 birim ile orantılı olması gerekir.

Senaryo 3: $p_1 > p_2$ olacak şekilde $p_1 + p_2 = 0,30$ olduğu durum için:

Toplam risk rezervini VaR risk ölçüsüne göre belirlemek isteyen bir sigorta şirketine, tam negatif bağımlılık durumunda en fazla 1,0849 birim ile, tam pozitif bağımlılık durumunda 0,7917 birim ile orantılı düzeyde bir rezerv bulundurması önerilir. CVaR'a göre risk rezervi belirlenmek istenirse, bunun tam negatif bağımlılık durumunda 0,3707 birim ile, tam pozitif bağımlılık durumunda 0,6504 birim ile orantılı olarak tesbiti doğru olacaktır.

Karşılaşılabilecek en büyük aktueryal hasar-zarar miktarı riskleri için yeterli rezerve sahip olunması yanında, uygulanacak primlerin de benzer biçimde önerilen orantılara duyarlı olarak saptanması benimsenmelidir.

Burada tam pozitif bağımlılık ($\alpha = 1$) durumu için komonoton yapıların elde edilmesi nedeniyle toplam hasar için belirlenen risk rezervleri neredeyse tam bilgi verir. Diğer durumlarda toplam hasarlar için elde edilen VaR ve CVaR risk ölçülerinin üst sınır oldukları kabul edilmiştir.

Sonuç 5.1 En yüksek ve en düşük risk gruplarının bağımlılık parametresine ve risk ölçümlerine göre durumları aşağıda belirtilmiştir.

(a) Herhangi bir olasılık düzeyi için VaR'a göre en yüksek risk $\alpha = -1$, CVaR'a göre $\alpha = 1$ durumunda gerçekleşir.

(b) α ne olursa olsun, VaR'a göre en yüksek risk $p_1 > p_2$, CVaR'a göre $p_1 < p_2$ durumunda gerçekleşir.

(c) Herhangi bir olasılık düzeyi için VaR'a göre en düşük risk $\alpha = 1$, CVaR'a göre $\alpha = -1$ durumunda gerçekleşir.

(d) α ne olursa olsun, VaR'a göre en düşük risk $p_1 < p_2$, CVaR'a göre $p_1 > p_2$ durumunda gerçekleşir.

6. TARTIŞMA ve SONUÇ

Aktuerya ve finans gibi hasar-zarar riskleri ile yatırıma getiri kaybı gibi risklerin yönetiminin gerektiği alanlarda risklerin bağımlı olduğu hallere sık rastlanılır. Her bir risk grubunun marjinal dağılımları hakkında bir bilgi sahibi olursa da bu risklerin Normal dağılmadığı durumlar için risk grupları arasındaki stokastik ilişkinin belirlenmesi her zaman kolay olmamaktadır. Bu nedenle marjinal olasılık dağılımların bilinmesine gerek olmadan, ortak davranışları için uygun kopula modellerini kullanmak bağımlılık ölçütünü belirlemek adına daha anlaşılır ve yol gösterici olmaktadır. Ayrıca yine aktueryal uygulamalarda, belirli bir dönemde ortaya çıkabilecek maksimum hasar mutlak bilinmek istenen bir bilgidir. Bu amaca bağlı olarak geliştirilen risk ölçümleri, bir sigorta şirketinin prim ve risk rezervi hesapları gibi aktueryal işlemlerinde kullanılmaktadır.

Gerçekte bağımlılık durumu söz konusu iken bağımsızlık varsayımında elde edilen risk ölçümlerine göre alınan aktueryal kararlar, sigorta uygulamalarında oldukça yanıltıcı sonuçlar verecektir. Buna rağmen uygulamalarda bağımlılığın modellendiği bir çok durum ortaya çıkmasına rağmen genelde risk ölçülerinin her risk grubu için ayrı değerlendirildiği çalışmalar bulunmaktadır. Son yıllardaki çalışmalarda bağımlılık yapısını çok iyi açıklayan kopulalar risk ölçütlerinin belirlenmesi için kullanılmaya başlanmıştır.

Bu çalışmada, Beşinci Bölümde, ilk olarak düzgün dağılımlı tek değişkenli marjinal risklerin bağımlılık yapısının Farlie Gumbel Morgenstern (FGM) kopulası ile modellendiği varsayımında iki değişkenli VaR elde edilmiş, bunların bağımlılık parametresi ve olasılık düzeylerine göre sonuçları çizelgeler ve grafiklerle sunulmuştur. Burada özgün olarak yapılan, bu hesaplama için iki değişkenli kuzey güney kuantil yönteminin kullanılmış olmasıdır. Bu yöntemin önemi, bağımlı iki risk grubundan biri için

bilinen risk ölçüsüne göre diğer risk grubu için akteryal kararlar verecek bir sigorta şirketine bazı risk nicelikleri hakkında bir bilgi vermesidir.

Uygulamada belirli bir dönem sonunda, VaR'ı aşan hasarlar için ortalama ardakalan hasar hakkında fikir sahibi olmak oldukça yararlıdır. Bu nedenle optimal aktueryal kararlar vermek adına CVaR'ı hesaplamak önemlidir. Ele aldığımız bağımlılık modeli esasında ve iki değişkenli kuzey güney kuantil yöntemi ile bulduğumuz iki değişkenli VaR ve dolayısıyla CVaR risk ölçümlerinin, değişen bağımlılık parametresi ve olasılık seviyelerini belirlemek için programı yapılmış, çizelge ve grafiklerle gösterilen sonuçları yorumlanmıştır.

Bağımlı olduğu düşünülen ve rasgele değişkenler ve bunların olasılık dağılımları ile modellenebilen risklere ilişkin veri gruplarına uygun kopula seçimi hakkında literatürlerde farklı yöntemler mevcuttur. Değişkenlerin kopula fonksiyonları ile modellenmenin amacı olan en iyi bağımlılık parametre tahmini için literatürde "en çok sözde olabilirlik" yönteminin gerçeğe en yakın tahminler verdiği söylenmektedir. Literatürdeki uygun yöntemlerle kopula seçimi ve parametre tahmini yapıldıktan sonra, tek boyutlu düzgün marjinali verilerin, FGM kopulasına uyduğu durumda tezde elde ettiğimiz çizelgeler kullanılarak istenilen olasılık düzeyi için prim veya risk rezervi hesabında kullanılacak risk ölçüm değerlerine bakılabilir.

Bu düşünce ile tezde elde edilmiş sonuçlar için iki riskdeğişkeni arasında bağımlılığın pozitif veya negatif olduğu durumlarda karşılaşılabilecek en yüksek ve en düşük risk değerleri belirlenebilir. Çalışmanın sonunda örnek senaryolar bu amaçla sunulmuş ve aktueryal risk yönetimi için önemli olduğunu düşündüğümüz sonuçları ortaya konulmuştur. Tez çalışmasının iki değişkenli kuantil yöntemi ile vardığı sonuçları geliştirmek üzere ileride Clayton, Frank ve Gumbel Arşimedayan kopulaları ele alınabilir. Ayrıca iki boyutlu marjinalerin kopulalar ile modellendiği durumlarda risk

ölçümleri için benzer değerlendirmeler yapılması aktueryal risk analizi alanı için değeri olan sonuçlar üretebilecektir.

KAYNAKLAR

- Acerbi, C. and Tasche, D. 2002. On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking and Finance* 26, 1487-1503.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J-M., and Heath, D. 1999. Coherent Measures of Risks, *Mathematical Finance* 9:203-228
- Asmussen, S. and Glynn, P.W. 2007. *Stochastic simulation: algorithms and analysis*. Springer, New York.
- Bairamov, I., Kotz, S. and Gebizlioglu, O.L. 2001. On a Generalization of FGM and Sarmanov Class of Distributions. *South African Statistical Journal*, 35, 205-224.
- Borkowf, C.B. 2002. Computing the nonnull asymptotic variance and the asymptotic relative efficiency of Spearman's rank correlation. *Comput. Stat. Data Anal.*, 39(3), 271-286.
- Bouyé, E., Durrleman, V., Nikeghbali, A., Riboulet, G. and Roncalli, T. 2000. *Copulas for finance: A reading guide and some applications*. Unpublished Manuscript, London: Financial Econometrics Research Centre, City University Business School.
- Chen, L.A. and Welsh, A.H. 2002. Distribution function based bivariate quantiles. *Journal of Multivariate Analysis*, 83, 208-231.
- Cheng, G., Li, P. and Shi, P. 2007. A new algorithm based on copulas for VaR valuation with empirical calculation. *Theoretical Computer Science*, 378, 190-197.
- Cherubini, U., Luciano, E. and Vecchiato, W. 2004. *Copula Methods in Finance*. John Wiley & Sons

- Cheung, K.C. 2009. Upper comonotonicity. *Insurance: Mathematic and Economics*, Vol 45, Issue1, 35-40
- Denuit, M., Genest, C. and Marceau, E. 1999. Stochastic bounds on sums of dependent risks. *Insurance: Mathematics and Economics*, 25, 11-21.
- Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M.J. and Kaas, R. 2005. *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*. Wiley, New York.
- Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M.J., Kaas, R. and Vyncke, D. 2002 a. The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: Theory. *Insurance: Mathematics & Economics*, vol. 31(1), 3–33.
- Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M.J., Kaas, R. and Vyncke, D. 2002 b. The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: Applications. *Insurance: Mathematics & Economics*, vol. 31(1), 3–33.
- Dhaene, J., Vanduffel, S., Tang, Q., Goovaerts, M.J., Kaas, R. and Vyncke, D. 2004. Capital requirements, risk measures and comonotonicity. *Belgian Actuarial Bulletin*, 4, 53-61.
- Dhaene, J., Vanduffel, S., Goovaerts, M.J., Kaas, R., Tang, Q. and Vyncke, D. 2006. Risk measures and comonotonicity: A review. *Stochastic models*. 22, 573-606.
- Embrechts, P., McNeil, A., and Straumann, D. 2002. Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls.
- Embrechts, P., Höing, A. and Juri, A. 2003. Using Copula to bound the Value-at-Risk for functions of dependent risks. *Finance and Stochastics*, 7, 145-167.
- Escarela, G. and Carriere, J.F. 2003. Fitting competing risks with an assumed copula. *Statistical Methods in Medical Research*, 12 (4), 333-349

- Fantazzini, D. 2009. The effects of misspecified marginals and copulas on computing the value at risk: a Monte Carlo Study. *Computational Statistics & Data Analysis*, 53, 2168-2188.
- Fermanian, J.D. 2005. Goodness of Fit tests for copulas. *Journal of Multivariate Analysis*, 95, 119-152.
- Frees, E.W., Carriere, J. and Valdez, E. 1996. Annuity valuation with dependent mortality. *Journal of Risk and Insurance* 63, 229–261.,
- Frees, E.W. and Valdez, E. A. 1998. Understanding relationships using copulas. *North American Actuarial Journal* 2(1), 1–26.
- Frees, E.W. and Wang, P. 2005. Credibility Using Copulas. *North American Actuarial Journal*. 9(2), 31–48.
- Gaenssler, P. and Stute, W. 1987. Seminar on empirical processes. Vol 9, Birkhauser, Basel Switzerland.
- Gebizlioglu, O.L. and Yagci, B. 2008. Tolerance intervals for quantiles of bivariate risks and risk measurement. *Insurance Mathematics & Economics*, 42, 1022-1027
- Genest, C., Ghoudi, K. and Rivest, L., P. 1995 . A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distribution. *Biometrika*, 82 3 , 543–552.
- Genest, C. and Favre, A.C. 2007. Everything You Always Wanted to Know about Copula Modeling but Were Afraid to Ask. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12, 347-368.
- He, X. and Gong, P. 2009. Measuring The Coupled Risks: A Copula-Based CVaR Model. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol 223, issue 2, pg: 1066-1080.

- Hoeffding, W. 1948 . A class of statistics with asymptotically normal distribution. Ann. Math. Stat., 19 (3) , 293–325.
- Hürlimann, W. 2004. Multivariate Frechet Copulas And Conditional Value At Risk. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, vol 7, 345-364
- Joe, H. 1997. Multivariate Models and Dependence Concepts. Chapman and Hall.
- Jorion, P. 2000. Value at Risk. McGraw-Hill
- Kaas, R., Goovaerts, M.J., Dhaene, J. and Denuit, M. 2001. Modern Actuarial Risk Theory. Kluwer Academic Publishers.
- Kallenberg, W.C.M. 2008. Modelling Dependence. Insurance: Mathematics and Economics, 42, 127-146
- Kallenberg W.C.M. 2009. Estimating Copula Densities Using Model Selection Techniques. Insurance: Mathematics and Economics, 45(2), 209-223.
- Kole, E., Koedijk, K. and Verbeek, M. 2007. Selecting copulas for risk management. Journal of Banking & Finance, 31, 2405-2423.
- Nelsen, R.B.1998. An Introduction to Copulas. Springer, New York.
- Nelsen, R.B. 2006. An Introduction to Copulas. 2nd edition, Springer, New York.
- Nelsen, R.B., Quesada-Molina, J.J., Rodriguez-Lallena, J.A. and Ubeda-Flores, M. 2001. Distribution functions of copulas: a class of bivariate probability integral transforms. Statistics & Probability Letters, 54, 277-282.
- Panjer, H.H.1998. Financial Economics, with Applications to Investments, Insurance and Pensions. The Actuarial Foundation, Schaumburg, Illinois.
- Schweizer, B. and Sklar, A. 1983. Probabilistic Metric Spaces. New York: North Holland.

- Schweizer, B. 1991. Thirty years of copulas. In: G. Dall'Aglio, S.Kotz, and G. Salinetti (eds.): Advances in Probability Distributions with Given Marginals: Beyond the Copulas. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Sklar, A. 1959. Fonctions de repartition an dimensions at leurs marges. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 8, 229-231.
- Szegö, G. 2005. Measures of risk. European Journal of Operational Research, vol 163, 5-19
- Tank, F. and Gebizlioglu, O.L. 2004. Sarmanov distribution class for dependent risks and its applications. Belgian Actuarial Bulletin, 4, 50-52.
- Trivedi, P.K. and Zimmer, D.M. 2007. Copula Modeling: An Introduction for Practitioners. Foundations and Trends in Econometrics.
- Wang, W. and Wells, M. T. 2000 . Model selection and semiparametric inference for bivariate failure-time data with discussion . J. Am. Stat. Assoc., 95 (1) , 62–76.
- Yan, J. 2007. Enjoy the Joy of Copulas: With a Package copula. Journal of Statistical Software, Vol.21, Issue 4, 1-21

EKLER

EK 1 Ters Dağılım Fonksiyonları

EK 2 $\Delta = (b/a)^2 - 4(c/a)$ için $\Delta > 0$ durumunun incelenmesi

EK 3 Yaşam kopyulaları ve yaşam fonksiyonları

EK 4 Bölüm 5 için Matlab programları

EK 5 Bölüm 5' de elde edilen çizelgeler

EK 1 Ters Dağılım Fonksiyonları

Bir X rasgele değişkeninin $F_X(x) = P(X \leq x)$ biçimindeki birikimli dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} F_X(-\infty) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \\ F_X(+\infty) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1 \end{aligned}$$

eşitlikleri ile tanımlı sağdan sürekli azalmayan bir fonksiyondur.

Dağılım fonksiyonunun tersinin genel tanımı azalmayan ve soldan sürekli bir fonksiyon olup

$$\begin{aligned} F_X^{-1}(p) &= \inf \{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq p\}, \quad p \in [0, 1] \\ \inf \emptyset &= +\infty \\ x \in \mathbb{R} \text{ ve } p \in [0, 1] \text{ için} \\ F_X^{-1}(p) \leq x &\iff p \leq F_X(x) \end{aligned}$$

ile tanımlanır.

$$\begin{aligned} F_X^{-1+}(p) &= \sup \{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \leq p\}, \quad p \in [0, 1] \\ \inf \emptyset &= +\infty \quad \sup \emptyset = -\infty \end{aligned}$$

azalmayan ve sağdan sürekli bir fonksiyon

Teorem (Dhaene et al 2002a): X ve $g(X)$ gerçel değerli rasgele değişkenler ve $0 < p < 1$ olsun.

(a) Eğer g azalmayan ve soldan sürekli bir fonksiyon ise

$$F_{g(X)}^{-1}(p) = g(F_X^{-1}(p))$$

(b) Eğer g azalmayan ve sağdan sürekli bir fonksiyon ise

$$F_{g(X)}^{-1+}(p) = g(F_X^{-1+}(p))$$

(c) Eğer g artmayan ve soldan sürekli bir fonksiyon ise

$$F_{g(X)}^{-1+}(p) = g(F_X^{-1}(1-p))$$

(d) Eğer g artmayan ve sağdan sürekli bir fonksiyon ise

$$F_{g(X)}^{-1}(p) = g(F_X^{-1+}(1-p))$$

EK 2 $\Delta = (b/a)^2 - 4(c/a)$ için $\Delta > 0$ durumunun incelenmesi:

$$\left(\frac{((p_1+p_2)+\alpha(p_1+p_2)-\alpha(p_1+p_2)^2)}{(\alpha(p_1+p_2)^2-\alpha(p_1+p_2))} \right)^2 + 4 \frac{p_1}{(\alpha(p_1+p_2)^2-\alpha(p_1+p_2))} = (0 < p_1 + p_2 < 1)$$

$$\frac{1}{\alpha^2(p_1+p_2)(p_1+p_2-1)^2} \left(\begin{array}{l} \alpha^2 p_1^3 + 3\alpha^2 p_1^2 p_2 - 2\alpha^2 p_1^2 + 3\alpha^2 p_1 p_2^2 - 4\alpha^2 p_1 p_2 + \alpha^2 p_1 + \\ \alpha^2 p_2^3 - 2\alpha^2 p_2^2 + \alpha^2 p_2 + 2\alpha p_1^2 - 2\alpha p_1 - 2\alpha p_2^2 + 2\alpha p_2 + p_1 + p_2 \end{array} \right)$$

$$> 0$$

$\alpha^2 (p_1 + p_2) (p_1 + p_2 - 1)^2 > 0$ olduğundan

$$\left(\begin{array}{l} \alpha^2 p_1^3 + 3\alpha^2 p_1^2 p_2 - 2\alpha^2 p_1^2 + 3\alpha^2 p_1 p_2^2 - 4\alpha^2 p_1 p_2 + \alpha^2 p_1 + \alpha^2 p_2^3 - 2\alpha^2 p_2^2 \\ + \alpha^2 p_2 + 2\alpha p_1^2 - 2\alpha p_1 - 2\alpha p_2^2 + 2\alpha p_2 + p_1 + p_2 \end{array} \right) > 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \alpha^2 (p_1^3 + 3p_1^2 p_2 + 3p_1 p_2^2 + p_2^3) - 2\alpha^2 (p_1^2 + 2p_1 p_2 + p_2^2) \\ + \alpha^2 (p_1 + p_2) + 2\alpha (p_1^2 - p_2^2) - 2\alpha (p_1 - p_2) + p_1 + p_2 \end{array} \right) > 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \alpha^2 (p_1^3 + 3p_1^2 p_2 + 3p_1 p_2^2 + p_2^3) - 2\alpha^2 (p_1^2 + 2p_1 p_2 + p_2^2) \\ + (p_1 + p_2) (\alpha^2 + 1) + 2\alpha (p_1 - p_2) (p_1 + p_2 - 1) \end{array} \right) > 0$$

$$\alpha^2 (p_1 + p_2)^3 - 2\alpha^2 (p_1 + p_2)^2 + (p_1 + p_2) (\alpha^2 + 1) + 2\alpha (p_1 + p_2 - p_2 - p_2) (p_1 + p_2 - 1)$$

$$> 0$$

$p_1 + p_2 = p$ olsun

$$\alpha^2 p^3 - 2\alpha^2 p^2 + (\alpha^2 + 1)p + 2\alpha (p - 2p_2) (p - 1) > 0$$

$$\alpha^2 p^3 - 2\alpha^2 p^2 + \alpha^2 p + p + 2\alpha (p - 2p_2) (p - 1) > 0$$

$$\alpha^2 p (p^2 - 2p + 1) + p + 2\alpha (p - 2p_2) (p - 1) > 0$$

$$p (\alpha^2 (p - 1)^2 + 1) - 2\alpha (p - 2p_2) (1 - p) > 0$$

$$p (\alpha^2 (p - 1)^2 + 1) > 2\alpha (p - 2p_2) (1 - p)$$

$$\alpha^2 (p - 1)^2 > \frac{2\alpha(p-2p_2)(1-p)}{p} - 1 \quad , \quad \alpha \neq 0, p = p_1 + p_2 \neq 0, p_1 + p_2 \neq 1$$

EK 3 Yaşam kopulaları ve yaşam fonksiyonları

Tanım (Denuit et al 2005): Eğer $\mathbf{u} \in [0, 1]^2$ için C bir kopula ise

$$\bar{C}(u_1, u_2) = C(1 - u_1, 1 - u_2) + u_1 + u_2 - 1$$

fonksiyonu C ile tanımlanmış yaşam kopulası olarak adlandırılır.

Yaşam fonksiyonu ile yaşam kopulası arasındaki ilişki:

Eğer X_1 ve X_2 rasgele değişkenlerine ait marjinal fonksiyonlar $F_1(x_1)$ ve $F_2(x_2)$ ise;

$$\begin{aligned} P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) &= \bar{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = S_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \\ &= 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) \\ &= \bar{C}(\bar{F}_1(x_1), \bar{F}_2(x_2)) \end{aligned}$$

şeklindedir. Özel olarak $\mathbf{u} \in [0, 1]^2$ için kopula fonksiyonuna bağlı yaşam fonksiyonu

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}) &= P(U_1 > u_1, U_2 > u_2) \\ &= 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2) \end{aligned}$$

elde edilir.

Bazı kopulalar için yaşam kopulaları ve kopulalara bağlı yaşam fonksiyonları aşağıda elde edilmiştir.

Clayton:

$$\begin{aligned}\overline{C}^{Cl}(u_1, u_2) &= C^{Cl}(1 - u_1, 1 - u_2) + u_1 + u_2 - 1 \\ &= \left((1 - u_1)^{-\alpha} + (1 - u_2)^{-\alpha} - 1 \right)^{-1/\alpha} + u_1 + u_2 - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{\mathbf{U}}^{Cl}(\mathbf{u}) &= 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2) \\ &= 1 - u_1 - u_2 + \left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1 \right)^{-1/\alpha}\end{aligned}$$

Frank:

$$\begin{aligned}\overline{C}^F(u_1, u_2) &= C^F(1 - u_1, 1 - u_2) + u_1 + u_2 - 1 \\ &= -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\alpha(1-u_1)} - 1)(e^{-\alpha(1-u_2)} - 1)}{e^{-\alpha} - 1} \right) + u_1 + u_2 - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{\mathbf{U}}^F(\mathbf{u}) &= 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2) \\ &= 1 - u_1 - u_2 - \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1)}{e^{-\alpha} - 1} \right)\end{aligned}$$

Gumbel:

$$\begin{aligned}\overline{C}^{Gu}(u_1, u_2) &= C^{Gu}(1 - u_1, 1 - u_2) + u_1 + u_2 - 1 \\ &= \exp \left[- \left((-\ln(1 - u_1))^\alpha + (-\ln(1 - u_2))^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] + u_1 + u_2 - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{\mathbf{U}}^{Gu}(\mathbf{u}) &= 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2) \\ &= 1 - u_1 - u_2 + \exp \left[- \left((-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right]\end{aligned}$$

FGM:

$$\begin{aligned}\overline{C}^{FGM}(u_1, u_2) &= C^{FGM}(1 - u_1, 1 - u_2) + u_1 + u_2 - 1 \\ &= (1 - u_1)(1 - u_2)(1 + \alpha u_1 u_2) + u_1 + u_2 - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{\mathbf{U}}^{FGM}(\mathbf{u}) &= 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2) \\ &= 1 - u_1 - u_2 + u_1 u_2 \{1 + \alpha(1 - u_1)(1 - u_2)\} \\ &= 1 - u_1 - u_2 + u_1 u_2 + \alpha(1 - u_1)(1 - u_2)u_1 u_2 \\ &= 1 - u_1 - u_2(1 - u_1) + \alpha(1 - u_1)(1 - u_2)u_1 u_2 \\ &= (1 - u_1)(1 - u_2) + \alpha(1 - u_1)(1 - u_2)u_1 u_2 \\ &= (1 - u_1)(1 - u_2)(1 + \alpha u_1 u_2)\end{aligned}$$

EK 4 Bölüm 5 için Matlab programları

$p_1 = p_2$ durumu için $VaR(U)$, $CVAR(U)$ ve $CVaR(S)$ değerlerini elde eden program

```
clc
clear all
close all
alpha=-0.75
for q=0.15:0.05:0.45
p1=q;
p2=q;
p=p1+p2;
if p<1
p1
p2
a=(alpha.*(p1+p2).^2-alpha.*(p1+p2));
b=((p1+p2)+alpha.*(p1+p2)-alpha.*(p1+p2)^2);
c=-p1;
b1=b./a;
c1=c./a;
d=(b1)^2-4*(c1);
if d>0
if alpha<0
V1=(1/2)*(-b1+((b1).^2-4.*c1).^(1/2));
end
if alpha>0
V1=(1/2)*(-b1-((b1).^2-4.*c1).^(1/2));
end
V2=p1+p2;
```

```

u2=V2;
u1=V1;
u1
u2
Pi1=(-1./6).*((u1-1).^2).*(u2-1).*(alpha.*u2+2.*alpha.*u1.*u2+3);
Pi2=(-1./6).*(u1-1).*((u2-1).^2).*(alpha.*u1+2.*alpha.*u1.*u2+3);
S=(1-u1).*(1-u2).*(1+alpha.*u1.*u2);
CV1=V1+(Pi1./S);
CV2=V2+(Pi2./S);
CV1
CV2
CVS=CV1+CV2
end
end
end

```

$p_1 \neq p_2$ durumu için $VaR(U)$, $CVaR(U)$ ve $CVaR(S)$ değerlerini elde eden program

```

clc
clear all
close all
alpha=-1
for p1=0.0:0.1:1
for p2=0.0:0.1:1
p=p1+p2;
if p<1
p1
p2
a=(alpha.*(p1+p2).^2-alpha.*(p1+p2));
b=((p1+p2)+alpha.*(p1+p2)-alpha.*(p1+p2)^2);

```

```

c=-p1;
b1=b./a;
c1=c./a;
d=(b1)^2-4*(c1);
if d>0
if alpha<0
V1=(1/2)*(-b1+((b1).^2-4.*c1).^(1/2));
end
if alpha>0
V1=(1/2)*(-b1-((b1).^2-4.*c1).^(1/2));
end
V2=p1+p2;
u2=V2;
u1=V1;
u1
u2
Pi1=(-1./6).*((u1-1).^2).*(u2-1).*(alpha.*u2+2.*alpha.*u1.*u2+3);
Pi2=(-1./6).*(u1-1).*((u2-1).^2).*(alpha.*u1+2.*alpha.*u1.*u2+3);
S=(1-u1).*(1-u2).*(1+alpha.*u1.*u2);
CV1=V1+(Pi1./S);
CV2=V2+(Pi2./S);
CV1
CV2
CVS=CV1+CV2
end
end
end
end

```


Çizelge 5.10 $\alpha = -0.75$; $\mathbf{u} \in (0, 1)^2$; $VaR(\mathbf{U})$, $CVaR(\mathbf{U})$, $CVaR(S)$

$\alpha = -0,75$	p_2	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	p_1										
VaR(U_1)	0,0	t	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
VaR(U_2)		t	0,1000	0,2000	0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000
CVaR(U_1)		t	0,4875	0,4750	0,4625	0,4500	0,4375	0,4250	0,4125	0,4000	0,3875
CVaR(U_2)		t	0,4500	0,4000	0,3500	0,3000	0,2500	0,2000	0,1500	0,1000	0,0500
CVaR(S)		t	0,9375	0,8750	0,8125	0,7500	0,6875	0,6250	0,5625	0,5000	0,4375
VaR(U_1)	0,1	1,0000	0,6385	0,4639	0,3527	0,2747	0,2178	0,1754	0,1434	0,1190	t
VaR(U_2)		0,1000	0,2000	0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000
CVaR(U_1)		t	0,1771	0,2560	0,3002	0,3260	0,3402	0,3468	0,3480	0,3455	t
CVaR(U_2)		t	0,3435	0,3183	0,2822	0,2404	0,1952	0,1478	0,0992	0,0498	t
CVaR(S)		t	0,5206	0,5743	0,5824	0,5664	0,5354	0,4946	0,4472	0,3953	t
VaR(U_1)	0,2	1,0000	0,7619	0,6073	0,4937	0,4057	0,3359	0,2803	0,2357	t	
VaR(U_2)		0,2000	0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000	
CVaR(U_1)		t	0,1165	0,1869	0,2335	0,2647	0,2852	0,2976	0,3040	t	
CVaR(U_2)		t	0,2937	0,2666	0,2311	0,1901	0,1454	0,0983	0,0496	t	
CVaR(S)		t	0,4102	0,4535	0,4646	0,4548	0,4306	0,3959	0,3536	t	
VaR(U_1)	0,3	1,0000	0,8172	0,6814	0,5734	0,4848	0,4113	0,3504	t		
VaR(U_2)		0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000		
CVaR(U_1)		t	0,0892	0,1508	0,1949	0,2264	0,2484	0,2626	t		
CVaR(U_2)		t	0,2513	0,2214	0,1845	0,1427	0,0973	0,0494	t		
CVaR(S)		t	0,3405	0,3722	0,3794	0,3691	0,3457	0,3120	t		
VaR(U_1)	0,4	1,0000	0,8483	0,7263	0,6242	0,5373	0,4631	t			
VaR(U_2)		0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000			
CVaR(U_1)		0,0000	0,0737	0,1285	0,1695	0,1998	0,2213	t			
CVaR(U_2)		0,2357	0,2111	0,1784	0,1396	0,0960	0,0492	t			
CVaR(S)		0,2357	0,2848	0,3069	0,3091	0,2958	0,2705	t			
VaR(U_1)	0,5	1,0000	0,8678	0,7558	0,6587	0,5739	t				
VaR(U_2)		0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000				
CVaR(U_1)		0,0000	0,0639	0,1135	0,1514	0,1797	t				
CVaR(U_2)		0,2000	0,1715	0,1359	0,0946	0,0488	t				
CVaR(S)		0,2000	0,2354	0,2494	0,2460	0,2285	t				
VaR(U_1)	0,6	1,0000	0,8808	0,7761	0,6829	t					
VaR(U_2)		0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000					
CVaR(U_1)		t	0,0573	0,1025	0,1376	t					
CVaR(U_2)		t	0,1316	0,0927	0,0484	t					
CVaR(S)		t	0,1889	0,1952	0,1860	t					
VaR(U_1)	0,7	1,0000	0,8897	0,7902	t						
VaR(U_2)		0,7000	0,8000	0,9000	1,0000						
CVaR(U_1)		t	0,0526	0,0943	t						
CVaR(U_2)		t	0,0905	0,0479	t						
CVaR(S)		t	0,1431	0,1422	t						
VaR(U_1)	0,8	1,0000	0,8959	t							
VaR(U_2)		0,8000	0,9000	1,0000							
CVaR(U_1)		t	0,0490	t							
CVaR(U_2)		t	0,0472	t							
CVaR(S)		t	0,0962	t							
VaR(U_1)	0,9	1,0000	t								
VaR(U_2)		0,9000	1,0000								
CVaR(U_1)		t	t								
CVaR(U_2)		t	t								
CVaR(S)		t	t								

Çizelge 5.11 $\alpha = -0.50$; $\mathbf{u} \in (0, 1)^2$; $VaR(\mathbf{U})$, $CVaR(\mathbf{U})$, $CVaR(S)$

$\alpha = -0,50$	p_2	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	p_1										
VaR(U_1)	0,0	t	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
VaR(U_2)		t	0,1000	0,2000	0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000
CVaR(U_1)		t	0,4917	0,4833	0,4750	0,4667	0,4583	0,4500	0,4417	0,4333	0,4250
CVaR(U_2)		t	0,4500	0,4000	0,3500	0,3000	0,2500	0,2000	0,1500	0,1000	0,0500
CVaR(S)		t	0,9417	0,8833	0,8250	0,7667	0,7083	0,6500	0,5917	0,5333	0,4750
VaR(U_1)	0,1	1,0000	0,5963	0,4185	0,3147	0,2464	0,1985	0,1634	0,1368	0,1162	t
VaR(U_2)		0,1000	0,2000	0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000
CVaR(U_1)		t	0,1990	0,2817	0,3259	0,3516	0,3666	0,3750	0,3791	0,3801	t
CVaR(U_2)		t	0,3662	0,3318	0,2899	0,2445	0,1972	0,1487	0,0995	0,0499	t
CVaR(S)		t	0,5652	0,6135	0,6158	0,5961	0,5638	0,5237	0,4786	0,4300	t
VaR(U_1)	0,2	1,0000	0,7349	0,5734	0,4621	0,3805	0,3183	0,2697	0,2311	t	
VaR(U_2)		0,2000	0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000	
CVaR(U_1)		t	0,1306	0,2064	0,2553	0,2881	0,3103	0,3253	0,3350	t	
CVaR(U_2)		t	0,3163	0,2806	0,2391	0,1943	0,1473	0,0990	0,0498	t	
CVaR(S)		t	0,4469	0,4870	0,4944	0,4824	0,4576	0,4243	0,3848	t	
VaR(U_1)	0,3	1,0000	0,7983	0,6564	0,5495	0,4659	0,3990	0,3446	t		
VaR(U_2)		0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000		
CVaR(U_1)		t	0,0992	0,1659	0,2131	0,2472	0,2718	0,2896	t		
CVaR(U_2)		t	0,2715	0,2336	0,1912	0,1458	0,0984	0,0497	t		
CVaR(S)		t	0,3707	0,3995	0,4043	0,3930	0,3702	0,3393	t		
VaR(U_1)	0,4	1,0000	0,8345	0,7080	0,6072	0,5249	0,4569	t			
VaR(U_2)		0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000			
CVaR(U_1)		1,0000	0,0813	0,1406	0,1850	0,2185	0,2437	t			
CVaR(U_2)		0,6625	0,2280	0,1880	0,1442	0,0978	0,0495	t			
CVaR(S)		1,6625	0,3093	0,3286	0,3292	0,3163	0,2932	t			
VaR(U_1)	0,5	1,0000	0,8577	0,7429	0,6478	0,5678	t				
VaR(U_2)		0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000				
CVaR(U_1)		t	0,0698	0,1234	0,1649	0,1973	t				
CVaR(U_2)		t	0,1846	0,1425	0,0971	0,0494	t				
CVaR(S)		t	0,2544	0,2659	0,2620	0,2467	t				
VaR(U_1)	0,6	1,0000	0,8737	0,7678	0,6776	t					
VaR(U_2)		0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000					
CVaR(U_1)		t	0,0618	0,1109	0,1500	t					
CVaR(U_2)		t	0,1406	0,0963	0,0492	t					
CVaR(S)		t	0,2024	0,2072	0,1992	t					
VaR(U_1)	0,7	1,0000	0,8852	0,7862	t						
VaR(U_2)		0,7000	0,8000	0,9000	1,0000						
CVaR(U_1)		t	0,0560	0,1016	t						
CVaR(U_2)		t	0,0954	0,0490	t						
CVaR(S)		t	0,1514	0,1506	t						
VaR(U_1)	0,8	1,0000	0,8936	t							
VaR(U_2)		0,8000	0,9000	1,0000							
CVaR(U_1)		t	0,0518	t							
CVaR(U_2)		t	0,0488	t							
CVaR(S)		t	0,1006	t							
VaR(U_1)	0,9	1,0000	t								
VaR(U_2)		0,9000	1,0000								
CVaR(U_1)		t	t								
CVaR(U_2)		t	t								
CVaR(S)		t	t								

Çizelge 5.12 $\alpha = -0.25$; $\mathbf{u} \in (0, 1)^2$; $VaR(\mathbf{U})$, $CVaR(\mathbf{U})$, $CVaR(S)$

$\alpha = -0,25$	p_2	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	p_1										
VaR(U_1)	0,0	t	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
VaR(U_2)		t	0,1000	0,2000	0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000
CVaR(U_1)		t	0,4958	0,4917	0,4875	0,4833	0,4792	0,4750	0,4708	0,4667	0,4625
CVaR(U_2)		t	0,4500	0,4000	0,3500	0,3000	0,2500	0,2000	0,1500	0,1000	0,0500
CVaR(S)		t	0,9458	0,8917	0,8375	0,7833	0,7292	0,6750	0,6208	0,5667	0,5125
VaR(U_1)	0,1	1,0000	0,5495	0,3743	0,2803	0,2216	0,1815	0,1526	0,1307	0,1136	t
VaR(U_2)		0,1000	0,2000	0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000
CVaR(U_1)		0,0000	0,2235	0,3078	0,3509	0,3762	0,3920	0,4022	0,4088	0,4130	t
CVaR(U_2)		0,4154	0,3849	0,3421	0,2957	0,2476	0,1988	0,1494	0,0998	0,0500	t
CVaR(S)		0,4154	0,6084	0,6499	0,6466	0,6238	0,5908	0,5516	0,5086	0,4630	t
VaR(U_1)	0,2	1,0000	0,7032	0,5373	0,4306	0,3563	0,3015	0,2596	0,2266	t	
VaR(U_2)		0,2000	0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000	
CVaR(U_1)		t	0,1472	0,2276	0,2776	0,3109	0,3342	0,3509	0,3631	t	
CVaR(U_2)		t	0,3348	0,2915	0,2453	0,1975	0,1488	0,0995	0,0499	t	
CVaR(S)		t	0,4820	0,5191	0,5229	0,5084	0,4830	0,4504	0,4130	t	
VaR(U_1)	0,3	1,0000	0,7761	0,6292	0,5249	0,4471	0,3869	0,3389	t		
VaR(U_2)		0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000		
CVaR(U_1)		t	0,1110	0,1823	0,2314	0,2668	0,2929	0,3128	t		
CVaR(U_2)		t	0,2874	0,2429	0,1962	0,1482	0,0993	0,0498	t		
CVaR(S)		t	0,3984	0,4252	0,4276	0,4150	0,3922	0,3626	t		
VaR(U_1)	0,4	1,0000	0,8186	0,6881	0,5896	0,5125	0,4506	t			
VaR(U_2)		0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000			
CVaR(U_1)		0,0000	0,0899	0,1533	0,1997	0,2349	0,2621	t			
CVaR(U_2)		0,2833	0,2405	0,1949	0,1475	0,0990	0,0498	t			
CVaR(S)		0,2833	0,3304	0,3482	0,3472	0,3339	0,3119	t			
VaR(U_1)	0,5	1,0000	0,8463	0,7291	0,6366	0,5617	t				
VaR(U_2)		0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000				
CVaR(U_1)		t	0,0762	0,1330	0,1766	0,2109	t				
CVaR(U_2)		t	0,1935	0,1469	0,0988	0,0497	t				
CVaR(S)		t	0,2697	0,2799	0,2754	0,2606	t				
VaR(U_1)	0,6	1,0000	0,8659	0,7591	0,6722	t					
VaR(U_2)		0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000					
CVaR(U_1)		t	0,0664	0,1182	0,1591	t					
CVaR(U_2)		t	0,1462	0,0985	0,0497	t					
CVaR(S)		t	0,2126	0,2167	0,2088	t					
VaR(U_1)	0,7	1,0000	0,8803	0,7820	t						
VaR(U_2)		0,7000	0,8000	0,9000	1,0000						
CVaR(U_1)		t	0,0593	0,1069	t						
CVaR(U_2)		t	0,0982	0,0496	t						
CVaR(S)		t	0,1575	0,1565	t						
VaR(U_1)	0,8	1,0000	0,8913	t							
VaR(U_2)		0,8000	0,9000	1,0000							
CVaR(U_1)		t	0,0538	t							
CVaR(U_2)		t	0,0495	t							
CVaR(S)		t	0,1033	t							
VaR(U_1)	0,9	1,0000	t								
VaR(U_2)		0,9000	1,0000								
CVaR(U_1)		t	t								
CVaR(U_2)		t	t								
CVaR(S)		t	t								

Çizelge 5.13 $\alpha = 0.25$; $\mathbf{u} \in (0, 1)^2$; $VaR(\mathbf{U})$, $CVaR(\mathbf{U})$, $CVaR(S)$

$\alpha = 0,25$	p_2	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	p_1										
VaR(U_1)	0,0	t	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
VaR(U_2)		t	0,1000	0,2000	0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000
CVaR(U_1)		t	0,5042	0,5083	0,5125	0,5167	0,5208	0,5250	0,5292	0,5333	0,5375
CVaR(U_2)		t	0,4500	0,4000	0,3500	0,3000	0,2500	0,2000	0,1500	0,1000	0,0500
CVaR(S)		t	0,9542	0,9083	0,8625	0,8167	0,7708	0,7250	0,6792	0,6333	0,5875
VaR(U_1)	0,1	1,0000	0,4505	0,2968	0,2239	0,1814	0,1537	0,1341	0,1197	0,1087	"-inf"
VaR(U_2)		0,1000	0,2000	0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000
CVaR(U_1)		t	0,2772	0,3577	0,3979	0,4230	0,4406	0,4543	0,4654	0,4747	t
CVaR(U_2)		t	0,4117	0,3559	0,3033	0,2518	0,2010	0,1505	0,1002	0,0500	t
CVaR(S)		t	0,6889	0,7136	0,7012	0,6748	0,6416	0,6048	0,5656	0,5247	t
VaR(U_1)	0,2	1,0000	0,6257	0,4627	0,3708	0,3119	0,2709	0,2409	0,2180	"-inf"	
VaR(U_2)		0,2000	0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000	
CVaR(U_1)		t	0,1888	0,2733	0,3225	0,3553	0,3794	0,3979	0,4128	t	
CVaR(U_2)		t	0,3622	0,3066	0,2537	0,2020	0,1510	0,1004	0,0501	t	
CVaR(S)		t	0,5510	0,5799	0,5762	0,5573	0,5304	0,4983	0,4629	t	
VaR(U_1)	0,3	1,0000	0,7197	0,5694	0,4751	0,4104	0,3634	0,3278	"-inf"		
VaR(U_2)		0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000		
CVaR(U_1)		t	0,1414	0,2189	0,2689	0,3043	0,3309	0,3519	t		
CVaR(U_2)		t	0,3101	0,2555	0,2030	0,1514	0,1006	0,0501	t		
CVaR(S)		t	0,4515	0,4744	0,4719	0,4557	0,4315	0,4020	t		
VaR(U_1)	0,4	1,0000	0,7784	0,6437	0,5529	0,4875	0,4383	"-inf"			
VaR(U_2)		0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000			
CVaR(U_1)		t	0,1118	0,1811	0,2289	0,2642	0,2916	t			
CVaR(U_2)		t	0,2574	0,2039	0,1519	0,1007	0,0502	t			
CVaR(S)		t	0,3692	0,3850	0,3808	0,3649	0,3418	t			
VaR(U_1)	0,5	1,0000	0,8185	0,6985	0,6131	0,5494	"-inf"				
VaR(U_2)		0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000				
CVaR(U_1)		t	0,0915	0,1531	0,1979	0,2321	t				
CVaR(U_2)		t	0,2049	0,1523	0,1009	0,0502	t				
CVaR(S)		t	0,2964	0,3054	0,2988	0,2823	t				
VaR(U_1)	0,6	1,0000	0,8474	0,7404	0,6611	"-inf"					
VaR(U_2)		0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000					
CVaR(U_1)		0,0000	0,0769	0,1318	0,1732	t					
CVaR(U_2)		0,2058	0,1528	0,1011	0,0502	t					
CVaR(S)		0,2058	0,2297	0,2329	0,2234	t					
VaR(U_1)	0,7	1,0000	0,8693	0,7734	"-inf"						
VaR(U_2)		0,7000	0,8000	0,9000	1,0000						
CVaR(U_1)		t	0,0658	0,1149	t						
CVaR(U_2)		t	0,1012	0,0503	t						
CVaR(S)		t	0,1670	0,1652	t						
VaR(U_1)	0,8	1,0000	0,8864	"-inf"							
VaR(U_2)		0,8000	0,9000	1,0000							
CVaR(U_1)		t	0,0572	t							
CVaR(U_2)		t	0,0503	t							
CVaR(S)		t	0,1075	t							
VaR(U_1)	0,9	1,0000	"-inf"								
VaR(U_2)		0,9000	1,0000								
CVaR(U_1)		t	t								
CVaR(U_2)		t	t								
CVaR(S)		t	t								

Çizelge 5.14 $\alpha = 0.50$; $\mathbf{u} \in (0, 1)^2$; $VaR(\mathbf{U})$, $CVaR(\mathbf{U})$, $CVaR(S)$

$\alpha = 0,50$	p2 p1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
VaR(U ₁)	0,0	t	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
VaR(U ₂)		t	0,1000	0,2000	0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000
CVaR(U ₁)		t	0,5083	0,5167	0,5250	0,5333	0,5417	0,5500	0,5583	0,5667	0,5750
CVaR(U ₂)		t	0,4500	0,4000	0,3500	0,3000	0,2500	0,2000	0,1500	0,1000	0,0500
CVaR(S)		t	0,9583	0,9167	0,8750	0,8333	0,7917	0,7500	0,7083	0,6667	0,6250
VaR(U ₁)	0,1	1,0000	0,4037	0,2651	0,2017	0,1655	0,1423	0,1263	0,1148	0,1064	"-inf"
VaR(U ₂)		0,1000	0,2000	0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000
CVaR(U ₁)		0,0000	0,3039	0,3805	0,4196	0,4451	0,4641	0,4795	0,4926	0,5039	t
CVaR(U ₂)		0,5143	0,4207	0,3604	0,3058	0,2533	0,2018	0,1509	0,1004	0,0501	t
CVaR(S)		0,5143	0,7246	0,7409	0,7254	0,6984	0,6659	0,6304	0,5930	0,5540	t
VaR(U ₁)	0,2	1,0000	0,5815	0,4266	0,3436	0,2920	0,2571	0,2322	0,2138	"-inf"	
VaR(U ₂)		0,2000	0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000	
CVaR(U ₁)		0,0000	0,2133	0,2968	0,3447	0,3770	0,4010	0,4199	0,4354	t	
CVaR(U ₂)		0,4485	0,3718	0,3118	0,2566	0,2036	0,1518	0,1007	0,0502	t	
CVaR(S)		0,4485	0,5851	0,6086	0,6013	0,5806	0,5528	0,5206	0,4856	t	
VaR(U ₁)	0,3	1,0000	0,6853	0,5379	0,4505	0,3928	0,3522	0,3224	"-inf"		
VaR(U ₂)		0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000		
CVaR(U ₁)		0,0000	0,1603	0,2389	0,2880	0,3225	0,3484	0,3689	t		
CVaR(U ₂)		0,3855	0,3181	0,2599	0,2053	0,1526	0,1010	0,0502	t		
CVaR(S)		0,3855	0,4784	0,4988	0,4933	0,4751	0,4494	0,4191	t		
VaR(U ₁)	0,4	1,0000	0,7536	0,6195	0,5341	0,4751	0,4322	"-inf"			
VaR(U ₂)		0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000			
CVaR(U ₁)		t	0,1253	0,1964	0,2436	0,2779	0,3041	t			
CVaR(U ₂)		t	0,2632	0,2070	0,1534	0,1013	0,0503	t			
CVaR(S)		t	0,3885	0,4034	0,3970	0,3792	0,3544	t			
VaR(U ₁)	0,5	1,0000	0,8015	0,6817	0,6010	0,5431	"-inf"				
VaR(U ₂)		0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000				
CVaR(U ₁)		t	0,1008	0,1639	0,2081	0,2411	t				
CVaR(U ₂)		t	0,2086	0,1541	0,1016	0,0504	t				
CVaR(S)		t	0,3094	0,3180	0,3097	0,2915	t				
VaR(U ₁)	0,6	1,0000	0,8366	0,7303	0,6554	"-inf"					
VaR(U ₂)		0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000					
CVaR(U ₁)		t	0,0829	0,1386	0,1792	t					
CVaR(U ₂)		t	0,1549	0,1019	0,0504	t					
CVaR(S)		t	0,2378	0,2405	0,2296	t					
VaR(U ₁)	0,7	1,0000	0,8632	0,7689	"-inf"						
VaR(U ₂)		0,7000	0,8000	0,9000	1,0000						
CVaR(U ₁)		t	0,0693	0,1185	t						
CVaR(U ₂)		t	0,1021	0,0505	t						
CVaR(S)		t	0,1714	0,1690	t						
VaR(U ₁)	0,8	1,0000	0,8838	"-inf"							
VaR(U ₂)		0,8000	0,9000	1,0000							
CVaR(U ₁)		t	0,0588	t							
CVaR(U ₂)		t	0,0505	t							
CVaR(S)		t	0,1093	t							
VaR(U ₁)	0,9	1,0000	"-inf"								
VaR(U ₂)		0,9000	1,0000								
CVaR(U ₁)		t	t								
CVaR(U ₂)		t	t								
CVaR(S)		t	t								

Çizelge 5.15 $\alpha = 0.75$; $\mathbf{u} \in (0, 1)^2$; $VaR(\mathbf{U})$, $CVaR(\mathbf{U})$, $CVaR(S)$

$\alpha = 0,75$	p_2	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	p_1										
VaR(U_1)	0,0	t	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
VaR(U_2)		t	0,1000	0,2000	0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000
CVaR(U_1)		t	0,5125	0,5250	0,5375	0,5500	0,5625	0,5750	0,5875	0,6000	0,6125
CVaR(U_2)		t	0,4500	0,4000	0,3500	0,3000	0,2500	0,2000	0,1500	0,1000	0,0500
CVaR(S)		t	0,9625	0,9250	0,8875	0,8500	0,8125	0,7750	0,7375	0,7000	0,6625
VaR(U_1)	0,1	1,0000	0,3615	0,2381	0,1828	0,1517	0,1322	0,1192	0,1103	0,1041	"-inf"
VaR(U_2)		0,1000	0,2000	0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000
CVaR(U_1)		0,0000	0,3289	0,4016	0,4402	0,4667	0,4872	0,5043	0,5191	0,5323	t
CVaR(U_2)		0,5442	0,4274	0,3638	0,3078	0,2545	0,2025	0,1513	0,1005	0,0501	t
CVaR(S)		0,5442	0,7563	0,7654	0,7480	0,7212	0,6897	0,6556	0,6196	0,5824	t
VaR(U_1)	0,2	1,0000	0,5361	0,3927	0,3186	0,2737	0,2442	0,2239	0,2098	"-inf"	
VaR(U_2)		0,2000	0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000	
CVaR(U_1)		0,0000	0,2392	0,3201	0,3666	0,3984	0,4222	0,4412	0,4566	t	
CVaR(U_2)		0,4696	0,3793	0,3158	0,2589	0,2049	0,1524	0,1010	0,0502	t	
CVaR(S)		0,4696	0,6185	0,6359	0,6255	0,6033	0,5746	0,5422	0,5068	t	
VaR(U_1)	0,3	1,0000	0,6473	0,5063	0,4266	0,3758	0,3413	0,3171	"-inf"		
VaR(U_2)		0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000		
CVaR(U_1)		0,0000	0,1815	0,2596	0,3074	0,3406	0,3654	0,3847	t		
CVaR(U_2)		0,4000	0,3244	0,2633	0,2072	0,1535	0,1014	0,0503	t		
CVaR(S)		0,4000	0,5059	0,5229	0,5146	0,4941	0,4668	0,4350	t		
VaR(U_1)	0,4	1,0000	0,7253	0,5943	0,5152	0,4627	0,4261	"-inf"			
VaR(U_2)		0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000			
CVaR(U_1)		0,0000	0,1410	0,2126	0,2586	0,2912	0,3157	t			
CVaR(U_2)		0,3346	0,2678	0,2094	0,1546	0,1018	0,0504	t			
CVaR(S)		0,3346	0,4088	0,4220	0,4132	0,3930	0,3661	t			
VaR(U_1)	0,5	1,0000	0,7822	0,6641	0,5887	0,5369	"-inf"				
VaR(U_2)		0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000				
CVaR(U_1)		t	0,1115	0,1753	0,2181	0,2493	t				
CVaR(U_2)		t	0,2116	0,1555	0,1022	0,0505	t				
CVaR(S)		t	0,3231	0,3308	0,3203	0,2998	t				
VaR(U_1)	0,6	1,0000	0,8246	0,7197	0,6496	"-inf"					
VaR(U_2)		0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000					
CVaR(U_1)		0,0000	0,0896	0,1457	0,1848	t					
CVaR(U_2)		0,2138	0,1565	0,1025	0,0506	t					
CVaR(S)		0,2138	0,2461	0,2482	0,2354	t					
VaR(U_1)	0,7	1,0000	0,8566	0,7643	"-inf"						
VaR(U_2)		0,7000	0,8000	0,9000	1,0000						
CVaR(U_1)		0,0000	0,0730	0,1220	t						
CVaR(U_2)		0,1574	0,1028	0,0506	t						
CVaR(S)		0,1574	0,1758	0,1726	t						
VaR(U_1)	0,8	1,0000	0,8810	"-inf"							
VaR(U_2)		0,8000	0,9000	1,0000							
CVaR(U_1)		t	0,0605	t							
CVaR(U_2)		t	0,0507	t							
CVaR(S)		t	0,1112	t							
VaR(U_1)	0,9	1,0000	"-inf"								
VaR(U_2)		0,9000	1,0000								
CVaR(U_1)		t	t								
CVaR(U_2)		t	t								
CVaR(S)		t	t								

Çizelge 5.16 $\alpha = 1$; $\mathbf{u} \in (0, 1)^2$; $VaR(\mathbf{U})$, $CVaR(\mathbf{U})$, $CVaR(S)$

$\alpha = 1$	p_2	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	p_1										
VaR(U_1)	0,0	t	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
VaR(U_2)		t	0,1000	0,2000	0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000
CVaR(U_1)		t	0,5167	0,5333	0,5500	0,5667	0,5833	0,6000	0,6167	0,6333	0,6500
CVaR(U_2)		t	0,4500	0,4000	0,3500	0,3000	0,2500	0,2000	0,1500	0,1000	0,0500
CVaR(S)		t	0,9667	0,9333	0,9000	0,8667	0,8333	0,8000	0,7667	0,7333	0,7000
VaR(U_1)	0,1	1,0000	0,3246	0,2151	0,1667	0,1399	0,1234	0,1128	0,1060	0,1020	"-inf"
VaR(U_2)		0,1000	0,2000	0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000
CVaR(U_1)		0,0000	0,3520	0,4214	0,4600	0,4877	0,5098	0,5287	0,5452	0,5598	t
CVaR(U_2)		0,5727	0,4325	0,3665	0,3094	0,2554	0,2031	0,1516	0,1007	0,0502	t
CVaR(S)		0,5727	0,7845	0,7879	0,7694	0,7431	0,7129	0,6803	0,6459	0,6100	t
VaR(U_1)	0,2	1,0000	0,4917	0,3615	0,2958	0,2570	0,2322	0,2161	0,2059	"-inf"	
VaR(U_2)		0,2000	0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000	
CVaR(U_1)		t	0,2654	0,3430	0,3881	0,4193	0,4431	0,4618	0,4768	t	
CVaR(U_2)		t	0,3850	0,3190	0,2607	0,2059	0,1530	0,1012	0,0503	t	
CVaR(S)		t	0,6504	0,6620	0,6488	0,6252	0,5961	0,5630	0,5271	t	
VaR(U_1)	0,3	1,0000	0,6069	0,4753	0,4037	0,3595	0,3307	0,3119	"-inf"		
VaR(U_2)		0,3000	0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000		
CVaR(U_1)		0,0000	0,2048	0,2809	0,3268	0,3585	0,3819	0,3995	t		
CVaR(U_2)		0,4128	0,3293	0,2660	0,2087	0,1543	0,1017	0,0504	t		
CVaR(S)		0,4128	0,5341	0,5469	0,5355	0,5128	0,4836	0,4499	t		
VaR(U_1)	0,4	1,0000	0,6938	0,5685	0,4964	0,4505	0,4201	"-inf"			
VaR(U_2)		0,4000	0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000			
CVaR(U_1)		0,0000	0,1589	0,2297	0,2738	0,3043	0,3265	t			
CVaR(U_2)		0,3429	0,2715	0,2113	0,1555	0,1022	0,0505	t			
CVaR(S)		0,3429	0,4304	0,4410	0,4293	0,4065	0,3770	t			
VaR(U_1)	0,5	1,0000	0,7605	0,6456	0,5762	0,5306	"-inf"				
VaR(U_2)		0,5000	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000				
CVaR(U_1)		t	0,1237	0,1873	0,2283	0,2571	t				
CVaR(U_2)		t	0,2139	0,1567	0,1026	0,0506	t				
CVaR(S)		t	0,3376	0,3440	0,3309	0,3077	t				
VaR(U_1)	0,6	1,0000	0,8112	0,7087	0,6437	"-inf"					
VaR(U_2)		0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	1,0000					
CVaR(U_1)		0,0000	0,0971	0,1529	0,1902	t					
CVaR(U_2)		0,2167	0,1578	0,1030	0,0507	t					
CVaR(S)		0,2167	0,2549	0,2559	0,2409	t					
VaR(U_1)	0,7	1,0000	0,8494	0,7595	"-inf"						
VaR(U_2)		0,7000	0,8000	0,9000	1,0000						
CVaR(U_1)		0,0000	0,0771	0,1254	t						
CVaR(U_2)		0,1588	0,1034	0,0508	t						
CVaR(S)		0,1588	0,1805	0,1762	t						
VaR(U_1)	0,8	1,0000	0,8782	"-inf"							
VaR(U_2)		0,8000	0,9000	1,0000							
CVaR(U_1)		t	0,0621	t							
CVaR(U_2)		t	0,0508	t							
CVaR(S)		t	0,1129	t							
VaR(U_1)	0,9	1,0000	"-inf"								
VaR(U_2)		0,9000	1,0000								
CVaR(U_1)		t	t								
CVaR(U_2)		t	t								
CVaR(S)		t	t								

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Emel KIZILOK
Doğum Yeri : Ankara
Doğum Tarihi : 08.11.1978
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Ankara Cumhuriyet Lisesi, 1995
Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü, 1999
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı, 2001

Çalıştığı Kurum ve Yıl: Kırıkkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Anabilim Dalı, 2004.

Yayımları (SCI ve diğer)

Kızılok E., Gebizlioğlu Ö.L., 2009, "Risk Measures and Copula Models for Dependent Risks", 13th International Congress on Insurance: Mathematics & Economics, Istanbul / Turkey

Kızılok E., Tank F., Gebizlioğlu Ö.L., Yağcı B., Kemaloğlu S.A., 2008, "On the Selection of Copulas for the Modelling of Dependent Risks", 12th International Congress on Insurance: Mathematics & Economics, Dalian / Çin.

Kızılok E., 2008, "Kopulalar İle Bağımlı Risklerin Modellenmesi", Doktora Semineri, Ankara.

Kızılok E., Gebizlioğlu O.L.,2007, "Risk Measurement and Optimization for Two Dependent Portfolios", International Actuarial Meeting on Risk Measures and Solvency, Proceedings, pp:291

Kızıllok E., Gebizlioğlu O.L.,2007, “ Büyük Hasar Miktarları Bağlamında Bir Aktueryal Karar Modeli” , Sigorta Araştırma Dergisi, Sayı:3, sf. 3-14.

Kızıllok E., Gebizlioğlu O.L., 2006, “Pareto Dağımlı Hasar Miktarları ve Geometrik Dağımlı Hasar Sayıları Bağlamında Aktueryal Kararlar” , 5.İstatistik Günüleri Bildiri Özetleri Kitabı, sf. 56-57.

Kızıllok E., Gebizlioğlu O.L., 2005, “Uç Değer ve Risk Analizi” , 4. İstatistik Kongresi Bildiri Özetleri Kitabı, sf. 113-118.