

T.C.  
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ  
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İŞİMA İNTEGRALLERİNİN RADON  
DÖNÜŞÜMÜ YORUMU VE ZAMAN UZAYI  
SAÇILMA PROBLEMLERİ

HÜSEYİN ARDA ÜLKÜ  
DOKTORA TEZİ  
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

GEBZE  
2011

T.C.  
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ  
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İŞİMA İNTEGRALLERİNİN RADON  
DÖNÜŞÜMÜ YORUMU VE ZAMAN UZAYI  
SAÇILMA PROBLEMLERİ

HÜSEYİN ARDA ÜLKÜ  
DOKTORA TEZİ  
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

DANIŞMANI  
DOÇ. DR. AHMET ARİF ERGİN

GEBZE

2011



## DOKTORA TEZİ JÜRİ ONAY SAYFASI

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ...../..... sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından ...../.../20... tarihinde tez savunma sınavı yapılan Hüseyin Arda ÜLKÜ'nün tez çalışması Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

### JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. Ahmet Arif ERGİN

ÜYE

: Prof. Dr. Ali ALKUMRU

ÜYE

: Doç. Dr. Serkan AKSOY

ÜYE

: Doç. Dr. Korkut YEĞİN

ÜYE

: Yrd. Doç. Dr. Erdal KORKMAZ

### ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ...../...../20... tarih ve ...../..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

## ÖZET

**TEZİN BAŞLIĞI : IŞIMA İNTEGRALLERİNİN RADON DÖNÜŞÜMÜ  
YORUMU VE ZAMAN UZAYI SAÇILMA  
PROBLEMLERİ**

**YAZAR ADI : HÜSEYİN ARDA ÜLKÜ**

Bu tezde ışımaya integrallerinin Radon Dönüşümü (RD) yorumu ile belirlenmesi ve belirlenen ışımaya integrallerinin zaman uzayı saçılma problemlerine uygulanması sunulmaktadır. İlk olarak yüzey integral denklemlerin Zamanda Adımlama Yöntemi (ZAY) ile çözümünde, zamanda gecikmeli potansiyellerin ve alanların analitik ifadelerinin RD yorumu ile belirlenmesi, analitik ifadelerin Elektrik, Manyetik ve Birleşik Alan İntegral Denklemlerin (EAİD, MAİD ve BAİD) çözümüne uygulanması sunulmuştur. Analitik ifadelerin kullanımının BAİD çözümünün kararlılığını ve doğruluğunu arttırdığı, EAİD çözümünün doğruluğu artmasına rağmen kararlılığın her zaman sağlanmadığı gösterilmiştir. Ayrıca geliştirilen yöntem kullanılarak elde edilen EAİD'in ZAY çözümlerinin zaman adımı büyüklüğüne daha az duyarlı olduğu gösterilmiştir.

RD yorumu ile elde edilen analitik ifadeler, alanların davranışlarının daha iyi anlaşılmasına olanak sağlamıştır. Manyetik alanın analitik ifadesinin bir sonucu olarak, manyetik alanın tekilliği zaman uzayında herhangi bir limit alma işlemi yapılmadan incelenmiştir. Sonuç olarak tekil ifadede kaynaklanan katsayı için zaman uzayında genel bir form geliştirilmiştir.

BAİD ve MAİD sadece kapalı saçıcılar için geçerlidir. Açık yüzeyden saçılma incelenmek istendiğinde EAİD tek seçenektir. Ancak EAİD'in ZAY çözümleri lineer ve sabit bileşenler ile bozular. EAİD'in lineer ve sabit bileşen probleminin giderilmesi için EAİD'in Birinci ve İkinci Mertebeden Formülasyonu (BMF ve İMF) geliştirilmiştir. BMF ile lineer bileşen probleminin, İMF ile hem lineer hem de sabit bileşen problemlerinin giderildiği gösterilmiştir. Ayrıca geliştirilen yöntemler temel fonksiyon seçiminden bağımsızdır.

Homojen olmayan ve nüfuz edilebilir saçıcılardan saçılma incelenmek istendiğinde hacim integral denklemler kullanılır. Hacim integral denklemlerde

potansiyeller üç katlı integral içerir. RD yorumu ile hacimsel akım yoğunlukları için integrallerin katı açı ve yüzey merkezi vektörü gibi, yüzey integralleri ile tanımlanan, geometrik büyüklükler ile belirlenebileceği gösterilmiştir.

Son olarak akustik saçılma için Kirchhoff yaklaşımı sonucu oluşan ışınma integrallerinin RD yorumu ile analitik olarak belirlenebileceği gösterilmiştir. Analitik ifadeler kaynağın ve gözlemcinin sonsuzda olduğu veya olmadığı durumlar için ve akustik olarak yumuşak ve sert yüzeyler için geliştirilmiştir.

## SUMMARY

**TITLE : RADON TRANSFORM INTERPRETATION OF THE RADIATION INTEGRALS AND TIME DOMAIN SCATTERING PROBLEMS**  
**AUTHOR : HÜSEYİN ARDA ÜLKÜ**

In this thesis, Radon Transform (RT) interpretation of the radiation integrals, and its application to time domain scattering problems are presented. First, determination of the analytical expressions of retarded-time potentials and fields via RT interpretation in Marching-on-in Time (MOT) solution of the surface integral equations and application of the analytical expressions to Electric, Magnetic, and Combined Field Integral Equations (EFIE, MFIE, and CFIE) are presented. It is shown that the use of the analytical expressions improves the stability and accuracy of CFIE, and although accuracy of the EFIE is improved, use of the analytical expressions does not guarantee stability of the EFIE solution. Also it is shown that the MOT solution of EFIE based on the developed method is less sensitive to time step size.

Analytical expressions of the fields have made possible to better understand the behavior of the fields. As a result of the analytical expression of the magnetic field, singularity in the magnetic field is obtained without any limiting process in the time domain.

CFIE and MFIE are only valid for closed scatterers; for an open scatterer EFIE is the only choice. However, MOT solution of EFIE is corrupted by a linear and a constant component. To alleviate the linear and constant component problems, First and Second Order Formulations (FOF and SOF) of the EFIE are developed. It is shown that with use of FOF, the linear component, and with the use of SOF, both linear and constant component problems are alleviated. Besides, developed methods are independent from the choice of the basis functions.

If the scatterer is penetrable and inhomogeneous, solution of the volume integral equations must be investigated. In the volume integral equations, the potentials include three dimensional integrals. By RT interpretation, potential

integrals for the volumetric current densities can be determined by solid angle and area centroid functions which are defined as surface integrals.

Finally, analytical expressions of the radiation integrals, which appear as a result of Kirchhoff approximation, are developed for acoustic scattering. Analytical expressions are developed while the source and observer is located at infinity or a finite location, and for acoustically soft and hard surfaces.

## TEŞEKKÜR

Yüksek öğrenimim süresince bana her konuda yardımcı olan, bilgisini ve tecrübesini paylaşan, yol gösteren, sadece akademik olarak değil hayat görüşü ile bana örnek olan saygıdeğer danışmanım Doç. Dr. A. Arif ERGİN'e,

Mühendislik disiplinini öğrenmemde bana yol gösteren, ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Ali ALKUMRU, Doç. Dr. Serkan AKSOY ve Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Elektronik Mühendisliği Bölümü öğretim üyelerine,

Bu süreçte bana destek olan H. Özkan SERTLEK, Volkan KUMBASAR, Mehmet Can YAĞCI ve H. Avni SERİM başta olmak üzere tüm arkadaşlarıma,

Ayrıca Ahmet YILMAZ, Ahmet F. COŞKUN ve Mustafa ÜNAL başta olmak üzere Elektronik Mühendisliği Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışan tüm iş arkadaşlarıma,

Hayatım boyunca maddi ve manevi olarak bana destek olan, bana olan inançları ve güvenleri hiç tükenmeyen sevgili annem Hatice ÜLKÜ ve saygıdeğer babam Mehmet Bahri ÜLKÜ'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hüseyin Arda ÜLKÜ

# İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZET	iv
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	ix
SİMGELER DİZİNİ	xii
KISALTMALAR DİZİNİ	xvii
ŞEKİLLER DİZİNİ	xviii
TABLolar DİZİNİ	xx
1. GİRİŞ	1
2. ZAMAN UZAYI İNTEGRAL DENKLEMLER	18
2.1. Zamanda Adımlama Yöntemi	18
2.2. Elektromanyetik Saçılma Problemi	22
2.3. Zamanda-Gecikmeli Potansiyellerin Uygulanması	23
2.3.1. Elektrik Alan İntegral Denklemi	24
2.3.2. Manyetik Alan İntegral Denklemi	28
2.3.3. Birleşik Alan İntegral Denklemi	30
2.4. Yay Uzunluğu ve Açığortay Vektörü Fonksiyonları	30
2.5. Konvolüsyon İşleminin Belirlenmesi	36
2.6. Nümerik Örnekler	38
2.7. EAİD'in İncelenmesi	41
2.8. Sonuçlar	46
3. MANYETİK ALANIN TEKİLLİĞİ	47
3.1. Manyetik Alanın Tekilliği	47
3.2. Sonuçlar	53
4. ELEKTRİK ALAN İNTEGRAL DENKLEMİNİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ	54
4.1. Birinci Mertebeden Formülasyon	54
4.2. İkinci Mertebeden Formülasyon	57
4.3. Nümerik Sonuçlar	58
4.4. Sonuçlar	60
5. 3-BOYUTLU ZAMANDA GECİKMELİ POTANSİYELLER	63

5.1. Zamanda Gecikmeli Potansiyeller	63
5.1.1. $\tilde{\phi}_n(\mathbf{r}, t)$ 'nin Formülasyonu	66
5.1.2. $\tilde{\mathbf{A}}_n(\mathbf{r}, t)$ 'nin Formülasyonu	67
5.2. Nümerik Örnekler	68
5.3. Sonuçlar	71
6. KIRCHHOFF YAKLAŞIMI İNTEGRALİNİN RADON DÖNÜŞÜMÜ	
YORUMU	72
6.1. Akustik Saçılma için Kirchhoff Yaklaşımı	72
6.1.1. Gözlem Noktasının Konumu	73
6.1.2. Yumuşak Saçıcı	74
6.1.3. Sert Saçıcı	75
6.2. Akustik Saçılma için Durumlar	76
6.2.1. Yumuşak Saçıcı için Uzak-Uzak Durumu	76
6.2.2. Yumuşak Saçıcı için Uzak-Yakın Durumu	77
6.2.3. Yumuşak Saçıcı için Yakın-Uzak Durumu	77
6.2.4. Yumuşak Saçıcı için Yakın-Yakın Durumu	78
6.2.5. Sert Saçıcı için Uzak-Uzak Durumu	78
6.2.6. Sert Saçıcı için Uzak-Yakın Durumu	79
6.2.7. Sert Saçıcı için Yakın-Uzak Durumu	79
6.2.8. Sert Saçıcı için Yakın-Yakın Durumu	80
6.3. $\gamma_n(t)$ 'nin Analitik İfadesi	80
6.4. $\alpha_n^p(t)$ 'nin Analitik İfadesi	83
6.4.1. $\phi = 0$ Durumu	85
6.4.2. $0 < \phi < \pi / 2$ Durumu	87
6.4.3. $\phi = \pi / 2$ Durumu	89
6.5. $\beta_n^{pq}(t)$ 'nin Analitik İfadesi	90
6.5.1. $0 \leq \phi \leq \pi / 2$ Durumu	92
6.5.2. $\phi = \pi / 2$ Durumu	94
6.6. İntegral Sınırlarının Belirlenmesi	95
6.7. Nümerik Örnekler	96
6.8. Sonuçlar	101

	xi
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	103
KAYNAKLAR	106
ÖZGEÇMİŞ	114
EK A	
EK B	
EK C	
EK D	

## SİMGELER DİZİNİ

### SİMGELER:

$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$	: Akım yoğunluğu
$\rho(\mathbf{r}, t)$	: Yük yoğunluğu
$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$	: Elektrik alan yoğunluğu
$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$	: Manyetik alan yoğunluğu
$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$	: Elektrik akı yoğunluğu
$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)$	: Gelen dalganın elektrik alan bileşeni
$\mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t)$	: Gelen dalganın manyetik alan bileşeni
$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}, t)$	: Saçılan dalganın elektrik alan bileşeni
$\mathbf{H}^s(\mathbf{r}, t)$	: Saçılan dalganın manyetik alan bileşeni
$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$	: Zamanda gecikmeli vektör potansiyel
$\phi(\mathbf{r}, t)$	: Zamanda gecikmeli skaler potansiyel
$\hat{\mathbf{p}}$	: Gelen dalganın polarizasyonu
$\hat{\mathbf{k}}$	: Gelen dalganın ilerleme yönü
$Z_{mn, ji}^H$	: MAİD için empedans matrisi elemanı
$Z_{mn, ji}^E$	: EAİD için empedans matrisi elemanı
$v$	: BAİD'in birleşim sabiti
$\mu$	: Ortamın manyetik geçirgenlik
$\varepsilon$	: Ortamın dielektrik sabiti
$\eta$	: Ortamın karakteristik empedansı
$c$	: Dalganın ortamdaki hızı
*	: Konvolüsyon işlemi
$t$	: Zamana değişkeni
$\Delta t$	: Zamana adımı büyüklüğü
$\partial_t^n$	: $t$ değişkenine göre $n$ . mertebeden türev işlemi
$S$	: Saçıcı yüzeyi

$\mathcal{L}$	: Lineer, zamanla değişmeyen ve nedensel operatör
$\mathbf{I}(\mathbf{r}, t)$	: Bilinmeyen kaynak fonksiyon
$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$	: Bilenen uyartım fonksiyonu
$\mathbf{f}_n(\mathbf{r})$	: Uzaya göre $n$ . temel fonksiyon
$I_n(t)$	: Uzaya göre $n$ . temel fonksiyona ilişkin zamana bağlı katsayı
$T_i(t)$	: Zamana göre $i$ . temel fonksiyon
$N$	: Uzaya göre temel fonksiyon sayısı
$N_t$	: Zamana göre temel fonksiyon sayısı
$I_{n,i}$	: Uzaya göre $n$ . ve zamana göre $i$ . temel fonksiyona ait katsayı
$\mathbf{w}_m(\mathbf{r})$	: Uzaya göre $m$ . test (ağırlık) fonksiyonu
$\bar{\mathbf{Z}}_{j-i}$	: ZAY matrisi
$\mathbf{V}_j$	: Kaynak test vektörü
$Z_{mn,j-i}$	: ZAY matris elemanları ( $Z_{mn,ji}$ )
$V_{m,j}$	: Kaynak test vektörünün $m$ . elemanı
$\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$	: Anlık uyarılmış akımdan oluşan manyetik alan yoğunluğu
$\mathbf{A}_n(\mathbf{r}, t)$	: Anlık uyarılmış akımdan oluşan manyetik vektör potansiyel
$\phi_n(\mathbf{r}, t)$	: Anlık uyarılmış akımdan oluşan elektrik skaler potansiyel
$\delta(t)$	: Dirac delta fonksiyonu
$\mathbf{r}$	: Gözlem noktasının konum vektörü
$\rho$	: Gözlem noktasının iz düşümünün konum vektörü
$\mathbf{r}'$	: Kaynak noktasının konum vektörü
$\rho'$	: Kaynak noktasının iz düşümünün konum vektörü
$R$	: Gözlem noktası ile kaynak arasındaki uzaklık
$\mathbf{R}$	: Kaynak noktasından gözlem noktasına doğru olan vektör
$\partial_R$	: $R$ 'ye göre türev işlemleri
$l_n$	: $n$ . RWG temel fonksiyonunun ortak kenarı
$S_n^\pm$	: $n$ . RWG fonksiyonun ( $\pm$ ) üçgen yüzeyi
$A_n^\pm$	: $S_n^\pm$ üçgeninin alanı

$\mathbf{r}_n^\pm$	: $S_n^\pm$ üçgenlerinin ortak olmayan köşesi
$\hat{\mathbf{n}}$	: Birim normal vektörü
$\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$	: Açığortay vektörü fonksiyonu
$\alpha(\mathbf{r}, t)$	: Yay uzunluğu fonksiyonu
$(u, v, n)$	: Yerel Kartezyen koordinat sistemi
$(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{n}})$	: Yerel koordinat sistemi için birim vektörler
$V_1(t)$	: Manyetik alana olan skaler katkı
$\mathbf{V}_2(t)$	: Manyetik alana olan vektör katkı
$\mathbf{r}_i$	: Üçgen köşesinin konum vektörü $i = 1, 2, 3$
$\xi_i$	: Üçgenin $i$ . alan koordinatı $i = 1, 2, 3$
$l_i$	: $i$ . kenarın uzunluğunu $i = 1, 2, 3$
$l_{i,\min}$	: $\rho$ noktasından $i$ . doğru parçasına olan yakın mesafe
$l_{i,\max}$	: $\rho$ noktasından $i$ . doğru parçasına olan uzak mesafe
$\phi_{i,m}$	: $u$ -ekseninden $l_{i,m}$ 'e olan açıyı $m \in \{\max, \min\}$
$a_i$	: $\rho$ 'nun $i$ . doğru parçasının doğrultusuna olan dik uzaklığı
$d$	: $\mathbf{r}$ gözlem noktasının üçgen düzlemine olan dik uzaklığı
$\zeta$	: Kesişim sonucu oluşan çemberin yarıçapı
$(\zeta, \phi, n)$	: Yerel silindirel koordinat sistemi
$e_u(\zeta)$	: $\mathbf{e}(\zeta)$ 'nin $u$ yönündeki bileşeni
$e_v(\zeta)$	: $\mathbf{e}(\zeta)$ 'nin $v$ yönündeki bileşeni
$\alpha_i(\zeta)$	: $i$ . kenarın dolaylı oluşan yay uzunluğu fonksiyonu
$e_{u,i}(\zeta)$	: $i$ . kenardan $e_u(\zeta)$ 'ya olan katkı
$e_{v,i}(\zeta)$	: $i$ . kenardan $e_v(\zeta)$ 'ya olan katkı
$\mathbf{H}_{1R}(\mathbf{r}, t)$	: $V_1(\mathbf{r}, t)$ 'nin regüler kısmının katkısı
$\mathbf{H}_{1D}(\mathbf{r}, t)$	: $V_1(\mathbf{r}, t)$ 'nin irregüler kısmının katkısı
$\mathbf{H}_2(\mathbf{r}, t)$	: $\mathbf{V}_2(\mathbf{r}, t)$ 'nin katkısını
$\mathbf{J}_n(\mathbf{r}, t)$	: Öz-terim üçgeninde gözlenen akım yoğunluğu ( $\mathbf{f}_n(\mathbf{r})$ için)
$\mathbf{J}_{tam}(\mathbf{r}, t)$	: Akım yoğunluğunun tam çözümü

$\alpha_1(\mathbf{r}), \alpha_0(\mathbf{r})$	: Çözümdeki lineer bileşenin artış oranı ve sabit bileşen
$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$	: Elektrik polarizasyon vektörü
$\mathbf{P}_{tam}(\mathbf{r}, t)$	: $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ 'nin tam çözümü
$P_{n,i}$	: $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ için katsayılar
$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$	: İkinci dereceden formülasyon için bilinmeyen fonksiyon
$\tilde{\mathbf{P}}_{tam}(\mathbf{r}, t)$	: $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ 'nin tam çözümü
$\tilde{P}_{n,i}$	: $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ için katsayılar
$\kappa(\mathbf{r})$	: Normalize saçıcının dielektrik sabiti
$a_n$	: $n$ . SWG fonksiyonunun ortak yüzey alanı
$T_n^\pm$	: $n$ . SWG fonksiyonunun $\pm$ üçgeni
$V_n^\pm$	: $T_n^\pm$ 'nin hacmi
$\tilde{\mathbf{A}}_n(\mathbf{r}, t)$	: Vektör potansiyel için yardımcı fonksiyon
$\tilde{\phi}_n(\mathbf{r}, t)$	: Skaler potansiyel için yardımcı fonksiyon
$\tilde{\phi}_a(\mathbf{r}, t)$	: Skaler potansiyel için yardımcı fonksiyon
$\tilde{\mathbf{A}}_v(\mathbf{r}, t)$	: Vektör potansiyel için yardımcı fonksiyon
$\Omega(ct)$	: Katı açısı fonksiyonu
$\bar{\mathbf{e}}(ct)$	: Alan merkezi vektörü fonksiyonu
$\varphi^{s,i,t}(\mathbf{r}, t)$	: Saçılan, gelen ve toplam hız potansiyeli ifadeleri
$\hat{\mathbf{k}}_i$	: Anlık uyarılmış düzlemsel dalganın yayılma yönü
$\hat{\mathbf{k}}_S$	: Gözlem yönü
$S_{a,g}$	: $S = S_a \cup S_g$ yüzeyinin aynılanmış ve gölge bölgeleri
$\hat{\mathbf{n}}_n$	: $S_n$ yüzeyine ait birim normal vektör
$\mathbf{k}_r$	: Düzlemsel RD parametresi
$\gamma_n(t)$	: Düzlemsel RD yorumu sonucu çıkan çizgi integrali
$\mathbf{r}_S$	: Noktasal kaynağın konumu
$\mathbf{R}_S$	: $\mathbf{r}_S$ 'ten gözlemciye doğru olan vektör
$R_S$	: Noktasal kaynak ile gözlemi arasındaki uzaklık

- $\alpha_n^p(t)$  : Parabolitsel RD yorumu sonucu çıkan çizgi integrali
- $\beta_n^{pq}(t)$  : Elipsoitsel RD yorumu sonucu çıkan çizgi integrali
- $\hat{\mathbf{k}}_o$  : Paraboloidin açıklık yönü
- $R_o$  : Paraboloid yüzeyindeki bir nokta ile odağı arasındaki uzaklık
- $D_n$  :  $S_n$  üçgensel yüzeyini barındıran düzlem
- $(a, \theta)$  : RD yorumu için integral parametreleri
- $J(a, \theta)$  : Değişken dönüşümü için Jacobian

## KISALTMALAR DİZİNİ

### KISALTMALAR:

- BAİD : Birleşik Alan İntegral Denklemi  
BMF : Birinci Mertebeden Formülasyon  
DA : Doğru Akım  
EAİD : Elektrik Alan İntegral Denklemi  
FO : Fiziksel Optik  
İMF : İkinci Mertebeden Formülasyon  
KY : Kirchhoff Yaklaşımı  
lm : ışık-metre (*light-meter*)  
m : Metre  
MAİD : Manyetik Alan İntegral Denklemi  
MM : Moment Metodu  
ms : Milisaniye  
ns : Nanosaniye  
RD : Radon Dönüşümü  
RKA : Radar Kesit Alanı  
RWG : Rao-Wilton-Glisson (temel fonksiyonu)  
s : Saniye  
SEM : Sonlu Elemanlar Metodu  
SKA : Sonar Kesit Alanı (veya Saçılma Kesit Alanı)  
SWG : Schaubert-Wilton-Glisson (temel fonksiyonu)  
ZAY : Zamanda Adımlama Yöntemi  
ZUSF : Zaman Uzayı Sonlu Farklar

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<b><u>Şekil:</u></b>	<b><u>Sayfa:</u></b>
2.1. Elektromanyetik yüzey saçılma probleminin tanımı.	23
2.2. RWG fonksiyonun tanımı.	25
2.3. Vektörlerin gösterimi.	29
2.4. $i$ . kenar için geometrik parametrelerin tanımları.	32
2.5. Konvolüsyon integralinin sınırlarının belirlenmesi.	39
2.6. Küp üzerinde gözlenen akım.	40
2.7. NASA bademi üzerinde gözlenen akım.	41
2.8. EAİD'in empedans matris elemanının zamana göre değişimi.	44
2.9. Farklı zaman adımı büyüklüğü için EAİD çözümleri.	45
2.10. Küre üzerinde gözlenen akımlar.	45
3.1. Gözlem noktasının $\mathbf{r}$ konumuna göre tekil kısmın katkısı.	52
4.1. Yarım küre üzerinde gözlemlenen akım yoğunluğu: lineer ölçek.	59
4.2. Yarım küre üzerinde gözlemlenen akım yoğunluğu: logaritmik ölçek.	61
4.3. Küre üzerinde gözlemlenen akım yoğunluğu.	61
4.4. Küre üzerinde gözlemlenen akım yoğunluğu.	62
5.1. SWG fonksiyonunun tanımı.	65
5.2. $\mathbf{r} = (5, 0, 1)$ 'de yardımcı fonksiyonların karşılaştırılması.	69
5.3. $\mathbf{r} = (14, 0, 2)$ 'de yardımcı fonksiyonların karşılaştırılması.	70

5.4. $\mathbf{r} = (19, 8, -1)$ 'de yardımcı fonksiyonların karşılaştırılması.	71
6.1. Üçgen ile düzlem kesişimi.	82
6.2. Uzak-Yakın (a) ve Yakın-Uzak (b) durumları.	84
6.3. Paraboloidin ve değişkenlerin gösterimi.	85
6.4. Elipsoidin ve değişkenlerin gösterimi.	92
6.5. Yumuşak (a) ve Sert (b) kürenin SKA değeri (Uzak-Uzak).	98
6.6. Yumuşak (a) ve Sert (b) küreden saçılan alan değeri (Uzak-Yakın).	99
6.7. Yumuşak (a) ve Sert (b) küreden saçılan alan değeri (Yakın-Uzak).	100
6.8. Yumuşak (a) ve Sert (b) küreden saçılan alan değeri (Yakın-Yakın).	101

## TABLolar DİZİNİ

**Tablo:****Sayfa:**

2.1. Açığortay vektörü ve türevi için analitik ifadeler

35

# 1. GİRİŞ

Elektromanyetik teori, 19. yüzyıla kadar A. M. Ampere, C. F. Gauss vb. bilim adamlarının çalışmalarıyla ilerleyen ve merak uyandıran bir bilim dalıydı. 1820’li yıllara kadar elektrik ve manyetik etkileşimler bir birinden tamamen ayrı olaylar olarak düşünülürken, daha sonra 19. yüzyılın en büyük deneysel fizikçisi olarak anılacak olan, M. Faraday, H. C. Oersted’in çalışmalarından ilham alarak yaptığı deneyler sonucunda elektrik ve manyetik etkileşimlerin iç içe geçmiş olaylar olduğu fikrini ortaya attı. M. Faraday, deneyleri ile modern motor ve jeneratörlerin gerçekleşmesini sağlayan elektromanyetik etkilerin temellerini keşfetmiştir. Elektrik, manyetik ve elektromanyetik etkilerin uzayda, daha sonra “alan” olarak adlandırılacak olan “kuvvet çizgileri” boyunca iletildiğini öne süren M. Faraday’ın en önemli çalışmaları arasında polarize ışığın manyetik alan tarafından etkilendiğinin gösterilmesi deneyi yer almaktadır. M. Faraday’ın “alan” kavramı ile başlayan yapı, 1865’te, 19. yüzyılın en büyük teorisyeni sayılan J. C. Maxwell tarafından geliştirilen teori ile tamamlandı [1]. J. C. Maxwell, kendi adıyla anılacak olan, tüm elektrik, manyetik ve elektromanyetik (Faraday’ın ışığın elektromanyetik doğasını gözlemlediği deneyi dahil olmak üzere) etkileşimleri açıklayan diferansiyel denklemler sisteminden oluşan teoriyi ortaya koydu. Maxwell denklemlerinin kapsamı ve faydası çok büyüktür. Denklemlerin en önemli özelliği evrensel olmalarıdır. Böylece Maxwell denklemleri evreni açıklayan fiziğin yapı taşlarından biri olarak yerini almıştır [1]-[3]. M. İdemem’in 1973’te sınır koşullarının bu denklemler içerisinde gömülü olduğunu göstermesi [4], denklemlerin doğası gereği Einstein’ın özel görecelik kuramını sağlaması [3], ve Lorentz dönüşüm formüllerinin Maxwell denklemlerinden elde edilmesinin gösterilmesi [5], elektromanyetik teorisinin ve bu denklemler dizisinin oluşturduğu yapının ne kadar sağlam temeller üzerine kurulu olduğunu kanıtlar niteliktedir.

Elektromanyetik dalgaların muhtemelen en yaygın kullanım alanı radarlardır. Radarın temelleri, 1886 yılında Hertz’in radyo dalgalarının yansımalarını ve 1900 yılında Tesla’nın, elektromanyetik algılama ve hız ölçümünün temellerini göstermesi ile atılmıştır. Radar, 1903-04 yıllarında yapılan Alman mühendis Hülsmeier’in radyo dalgalarının yansımaları aracılığıyla gemi tespiti deneyleri, 1922’de radar ile gemi

tespitinin gösterilmesi, 1930'da ilk uçak tespitinin gösterilmesinden sonra gelişimine hızla devam etmiştir [6]. Radarın gelişimi temel olarak askeri gereklilikten kaynaklanmasına rağmen zaman içinde kullanım alanı çeşitlenmiştir. Askeri uygulamalarda, kara, deniz ve hava araçları için gözetleme, navigasyon ve silah yönlendirmede kullanılmaktadır. Bunun dışında hız tespiti için polis radarı, hava radarı (meteorolojik radar), hava alanlarında kullanılan hava trafik kontrol radarı, yeryüzü topolojisi ve çevresel karakteristiklerinin belirlenmesinde kullanılan uydu veya uçak üzerine yerleştirilmiş radarlar (*spaceborne* ve *airborne radar*) ile kullanımı gittikçe çeşitlenerek artmaktadır [7].

Radarlar geliştikçe cisimlerin (uçak, gemi vs.) radarda görünürlüğü de önem kazanmıştır. Cisimlerin radar tarafından saptanabilirliğinin ölçütü Radar Kesit Alanı, RKA (*Radar Cross Section, RCS*) olarak tanımlanır. RKA, cismin geometrik şekline, yönelimine, nesneyi oluşturan malzemeye ve cisme gönderilen dalganın frekansına ve polarizasyonuna bağlı karmaşık bir ölçüdür [8]-[10]. Hızlı bilgisayarların gelişiminden önce, karmaşık cisimlerin RKA değerleri sadece doğrudan ölçüm ile belirlenebiliyordu. Tasarım aşamasında belirlenmesi önemli olan bu değerlerin ölçülebilmesi için cismin üretilmesi şart olduğu gibi, bu ölçümler önemli derecede zaman kaybına yol açan maliyetli işlemlerdi. Bilgisayar teknolojisinin gelişimi ile birlikte RKA belirleme, saçılma ve ışınım gibi elektromanyetik problemler nümerik olarak çözülmeye başlandı [11]. Bu gelişime paralel olarak nümerik yöntemler geliştirildi. Yine de bilgisayar gücünün sınırlamasından dolayı nümerik yöntemlerin çalışmadığı durumlarda ve bu yöntemlerin doğruluğunun gösterilmesi amacıyla, RKA ölçümleri önemini korumaktadır [9].

Elektromanyetik problemlerin çözümünde sıklıkla kullanılan nümerik yöntemler tam dalga çözümler ve asimptotik yöntemler olarak sınıflandırılabilir. Tam dalga çözümler genellikle düşük frekans bölgesinde çalışırken, asimptotik yöntemler yüksek frekans bölgesinde verimli çalışmaktadır<sup>1</sup>. En çok kullanılan tam

---

<sup>1</sup> Düşük ve yüksek frekans bölgesi temel olarak problem içerisindeki saçıcının elektriksel uzunluğuna da bağlıdır.

dalga çözücüler arasında Zaman Uzayı Sonlu Farklar, ZUSF, yöntemi [12] (*Finite Difference Time Domain, FDTD*), Sonlu Elemanlar Yöntemi [13] , SEY (*Finite Elements Method, FEM*) ve moment metodu [14], MM, (*Method of Moments, MoM*) yer almaktadır. Asimptotik yöntemler arasında ise en yaygın kullanılanlardan biri fiziksel optik, FO, (*Physical Optics, PO*) yöntemidir [15].

ZUSF yöntemi diferansiyel denklem çözümü üzerine kurulu iken, MM hem integral denklem<sup>1</sup>, hem de diferansiyel denklem çözümü için geliştirilmiş bir yöntemdir. MM ile diferansiyel denklem çözümlerine örnek olarak sonlu farklar yöntemine dayalı zaman uzayı metotlarının MM'den elde edilebilmesi, MM ile diferansiyel denklem çözümünün yapılabildiğine iyi bir örnektir [16]. Birbirlerine göre bazı üstünlükleri bulunan tam dalga çözücüler (ZUSF, SEM ve MM), bilgisayar sınırlamaları dahilinde, her türlü elektromanyetik ışınım ve saçılma problemine uygulanabilirler. Ancak integral denklemler ışınım ve saçılma problemlerinde bazı üstünlüklere sahiptir. En büyük üstünlüğü olarak ışınım koşulunu (*radiation condition*) doğrudan sağlaması ile çözüm uzayının yapay bir sınır koşulu ile sonlandırma ihtiyacının olmayışı, MM ve integral denklemleri özellikle RKA problemleri için verimli bir analiz aracı haline getirmektedir. Ayrıca mükemmel elektrik iletken (*Perfect Electric Conductor, PEC*) ve homojen cisimlerden olan saçılma analizlerinde sadece saçıcı yüzeyinin örneklenmesi bilinmeyen sayısını ve bilgisayar gücü gereksinimini önemli ölçüde azaltmaktadır.

R. F. Harrington'un, MM'nin çok yönlü ve kullanışlı bir yöntem olduğunu göstermesinden sonra [14], yöntemin elektromanyetikteki integral denklem çözümlerinde kullanımı artmıştır. Fakat karmaşık şekillere sahip nesnelere geniş bantlı işaretlerin saçıldığı durumlarda frekans uzayı yöntemleri ile analiz uzun süre ve donanım gereksinimine ihtiyaç duyar. Bu tip problemler için integral denklemlerin zaman uzayı çözümleri daha hızlı, güvenilir ve az donanım gücü

---

<sup>1</sup> Literatürde "İntegral Denklem" terimi kullanılmasına karşın, çoğu integral denklem kısmi türevli ifadeler içerir, bundan dolayı bu denklemlere "İntegro-Diferansiyel Denklem" de denilmektedir.

gerektiren çözümler üretir [17]. MM'nun zaman uzayı karşılığı, Zamanda Adımlama Yöntemi, ZAY (*Marching-on-in-Time, MOT*), [18]'de anlatılmaktadır.

İntegral denklemler saçıcı yapısına göre ince tel, yüzey ve hacim için integral denklemler olarak sınıflandırılabilir. İnce tel için integral denklemler, mükemmel iletken ince tel yaklaşıklığı ile modellenebilen yapıların incelenmesi için kullanılmaktadır [19]-[21]. Yüzey integral denklemleri, mükemmel iletken yüzeyler içeren yapılar için kullanılmaktadır [21]-[22]. Hacim integral denklemler ise dielektrik ve manyetik malzemelerden oluşan cisimlerin incelenmesinde kullanılmaktadır [23]. Bu tezde aksi belirtilmedikçe "integral denklem" ile yüzey integral denklemler kastedilecektir.

Zamanda Adımlama Yöntemi, ZAY, integral denklemlerin zaman uzayı çözümleri için geliştirilmiş kullanışlı bir yöntemdir. Ancak ZAY'da kararlılık problemi yüzey integral denklemlerin çözümünde sıklıkla görülür [22]. Çözümün kararlılığı, başlıca, matris elemanlarının hatasız hesaplanmasına ve integral denklemin yapısına (iyi-koşullu, *well-conditioned* veya kötü-koşullu, *ill-conditioned*) bağlıdır [24]-[31]. Matris elemanlarının doğruluğu sistem matrisinin kutuplarının pozisyonlarını etkiler ve ufak hatalar bile sistemi kararsız hale getirebilir. Yüzey saçılma problemleri için literatürde birçok integral denklem yapısı var olmasına karşın (örneğin [32]-[33]), Elektrik Alan İntegral Denklemi (EAİD) ve Manyetik Alan İntegral Denklemi (MAİD) en yaygın olarak kullanılanlardır. EAİD hem kapalı hem de açık yüzeyler için geçerli olurken, MAİD'in sadece kapalı yüzeyler için geçerli olduğu unutulmamalıdır. Kapalı saçıcıların EAİD ve MAİD çözümlerinin, iç rezonans etkileriyle bozulduğu ve rezonans frekanslarında denklemlerin tek çözümlü olmadığı bilinmektedir. Bu problemin üstesinden gelmek amacıyla, çeşitli yöntemler [34]-[39] önerilmesine karşın, en etkili çözüm Birleşik Alan İntegral Denklemi (BAİD) kullanmaktır [22]. Diğer taraftan EAİD'in iyi-koşullu (*well-conditioned*) olmadığı bilinmektedir [25]-[27] ve EAİD'in bu durumunun BAİD çözümlerini de etkileyebildiği [27]'de açıklanmaktadır. EAİD'in zaman uzayı çözümleri, iç rezonans ile bozulmadığı durumlarda (açık geometri çözümleri veya gelen alan spektrumunda saçıcının iç rezonans frekansını içermediği durumlar) lineer olarak artan bir bileşen ile bozulur [25]. Bunlar ile birlikte zaman uzayı integral denklemlerin ZAY çözümlerindeki kararsızlık problemi belli bir düzene veya kurala oturtulamaz [40]-

[41]. Kararlılık analizi ancak ZAY matrisi elemanları belirlendikten sonra yapılabilir [40]-[41]. Bundan dolayı kararlılık için kesin bir kriter belirlemek imkansızdır. Ayrıca oluşturulan sistem için kararlılık analizinin yapılması sistemi çözmekten çok daha fazla zaman ve hesaplama yükü gerektiren bir işlemdir [41]. Literatürde zaman uzayı integral denklemlerin kararlılığı için empirik kriterler belirlenmeye çalışılsa da [36]-[38], aynı saçıcı için, farklı ayırıklaştırma büyüklükleri ile elde edilen sonuçlar kararlı veya kararsız olabilir [40]-[41]. Akım modellenirken, uzaysal ayırıklaştırma büyüklüğü ve zaman adımı büyüklüğü çözümün kararlılığını etkiler. ZAY’da zaman adımı büyüklüğü ZUSF yöntemi ile aynı düzeydedir ancak uzaysal ayırıklaştırmanın eşit aralıklı olma koşulu olmadığından, ZUSF yöntemindeki gibi zaman adımı büyüklüğü ile uzaysal ayırıklaştırma büyüklüğü arasında doğrudan bir bağlantı yoktur [40]-[42].

Zaman uzayı integral denklem çözümlerinin doğruluğunu arttırmak için literatürde iki temel çalışma vardır: İlki, EAİD’in yapısını, iyi-koşullu formülasyon ile değiştirmektir [25], [27]. Bu değişim sonucunda hesaplama yükü artar. Amaç birinci tip integral denklem olan EAİD’in, MAİD gibi ikinci tip integral denklem eş değerini bulmaktır. Sonuç olarak geliştirilen integral denklem ile sadece kapalı geometriler çözülebilmektedir. Açık geometrilere uygulamanın mümkün olduğundan bahsedilse bile [27], henüz literatürde uygulaması yoktur. İkinci tür çalışmalar ise, elektrik ve manyetik alanların analitik ifadeleri kullanılarak matris elemanlarının verimli ve hatasız hesaplanmasına dayanmaktadır [24], [26], [28]-[31]. Analitik ifadelerin kullanımı ile MAİD’in kararlılığının arttırıldığı [24] ve [31]’de gösterilmiştir. Bunlarla birlikte özel olarak geliştirilmiş zamana göre temel fonksiyonlar ve/veya filtreleme (ortalama alma) teknikleri kullanılan kararlılaştırma çalışmaları üçüncü tip çalışmalar olarak sayılabilir. Ancak geliştirilen zamana göre temel fonksiyonların eksiklikleri vardır. Örneğin; bu fonksiyonlar interpolasyon fonksiyonları değildir veya nedensellik gibi fiziksel koşulları sağlamamaktadır [33]-[34], [36]-[38], [43]-[46]. Kararsızlık problemine fiziksel açıdan bakıldığında, filtreleme veya ortalama alma gibi, her hangi bir işaret işleme tekniğinin, EAİD veya MAİD gibi fiziksel denklemlerin çözümleri için mutlak çözüm olamayacağı açıktır.

Empedans Matrisi<sup>1</sup> elamanlarının verimli hesaplanması, elektrik ve manyetik alanların (ve/veya potansiyellerin) analitik ifadeleri kullanılarak gerçekleştirilebilir. Analitik ifadelerin bulunması, temel olarak uzaya göre temel fonksiyon üzerinden olan integrallerin, zaman konvolüsyonundan ayrı olarak, Radon Dönüşümü, RD (*Radon Transform, RT*) yapısında olduğu fikrine dayanmaktadır<sup>2</sup>. Bu fikir ilk olarak üçgenler ile ayrıklaştırılmış saçıcılar için FO integralinin analitik olarak hesaplanmasında kullanılmıştır [47] ve daha sonra NURBS yüzeylerden saçılmalara uygulanmıştır [48]. [47]'de RD yorumu, saçıcı ile düzlemsel dalganın kesişimi olarak ortaya çıkmaktadır. Bundan dolayı RD'nin türü, "düzlemsel RD" olarak belirtilebilir. RD yorumu ile FO integrali, hiçbir yaklaşım yapılmaksızın, zaman uzayında analitik olarak hesaplanabilmektedir. RD yorumunun ikinci örneği ise zaman uzayı integral denklemlerde, "küresel RD" olarak, karşımıza çıkmaktadır [28]. Küresel RD yorumu, zamanda anlık uyarılmış<sup>3</sup> Rao-Wilton-Glisson (RWG) temel fonksiyonlarından [49] oluşan, zamanda gecikmeli potansiyellerin analitik ifadelerinin belirlenmesine olanak sağlamıştır. Ancak [28]'de sunulan algoritma ve formüller, belirlenen analitik ifadeler ile zamana göre temel fonksiyonların konvolüsyonunun analitik olarak belirlenmesi için uygun değildir. Diğer bir deyişle, [28]'de sunulan algoritma, zaman bağımlılığı anlık olmayan bir akım yoğunluğu için gecikmeli potansiyellerin analitik ifadelerinin bulunmasına imkan vermemektedir. [24] ve [30]'da geliştirilen analitik formüller ve algoritma ile zamana göre temel fonksiyonlar polinom seçildiği sürece, her iki integralin (temel fonksiyon üzerinden integral ve zamana göre temel fonksiyon ile konvolüsyon integrali) analitik olarak belirlenebilmektedir. Analitik ifadelerin kullanımı sonucu MAİD çözümlerinin

---

<sup>1</sup> Empedans matrisi terimi sadece EAİD için doğru bir terimdir. MAİD söz konusu olduğunda "Admitans Matrisi" doğru olmasına karşın gerekli katsayılar ile çarpılarak Empedans Matrisine dönüştürülebilir. Bundan dolayı, bu tezde EAİD veya MAİD ayırt edilmeksizin denklem sisteminin oluşturduğu matris, "Empedans Matrisi" olarak adlandırılacaktır.

<sup>2</sup> Radon dönüşümü yorumu fikri, 3-boyutlu zaman uzayı Green fonksiyonu içeren integrallerin Radon dönüşümüne eş değer olmasından gelir. Benzer olarak frekans uzayı Green fonksiyonu, Radon dönüşümünün Fourier dönüşümü yapısındadır.

<sup>3</sup> Zaman bağımlılığı Dirac delta fonksiyonu olan uyarım.

kararlılığında artış olduğu [31]'de gösterilmiştir. Bunun ötesinde ilerde değinileceği gibi, elektrik ve manyetik alanın analitik ifadeleri, bu alanların zamana ve uzaya göre davranışları hakkında daha kesin yorumlar ve çıkarımlar yapılmasına olanak sağlamaktadır.

Bu tezin 2. bölümünde, empedans matrisi elemanlarının, alanların analitik ifadeleri kullanılarak verimli hesaplanmasının, BAİD çözümünün kararlılığı, yakınsaklığı ve doğruluğu üzerine etkisi, nedensellik gibi fiziksel ilkelerden kopmadan, incelenecektir. İlk olarak en genel halde ZAY çözüm algoritması anlatılacak, mükemmel iletken bir yüzeyden olan saçılma probleminin yapısı ve ZAY çözümüne uyarlanmasına değinilecektir. Daha sonra zaman uzayı MAİD ve EAİD için, RWG<sup>1</sup> temel fonksiyonlarından ve parçalı tanımlı polinom zamana göre temel fonksiyonlardan dolayı oluşan elektrik ve manyetik alanların analitik ifadeleri ve bu ifadelerin zaman uzayı EAİD, MAİD ve BAİD'in ZAY çözümünde kullanımı sunulacaktır. Elektrik ve manyetik alanların analitik ifadeleri her ne kadar [28] ve [30]'da sunulsa da, bu ifadelerin EAİD'e veya BAİD'e uygulanmaları henüz literatürde bulunmamaktadır. Anlık uyarılmış elektrik ve manyetik alanlar için analitik ifadelerin açıklığı ve uygulamada kullanılan yapıların sunulması için, [28] ve [30]'da geliştirilen formüller tekrarlanacak ve bu analitik ifadelerin ZAY algoritmasına uygulanması açıklanacaktır. Manyetik alanın analitik ifadesinin kullanımı ile zaman uzayı MAİD çözümlerinin kararlılığının arttığı [31]'de gösterilmişti, benzer bir gelişme EAİD için de beklenmektedir. Ancak bazı durumlarda, empedans matris elemanları analitik ifadeler kullanılarak yüksek doğrulukta hesaplanırsa bile, EAİD çözümünün kararsız olduğu görülmektedir. Bölüm 2.6'da bu durum incelenecektir. Analitik ifadelerin kullanılmasında ortaya çıkan avantajlardan biri de analitik ifadelerin EAİD'in ZAY ile çözümünde kullanılması sırasında, herhangi bir tekillik çıkartımı yapılmasına gerek kalmamasıdır. Bunun

---

<sup>1</sup> ZAY ve MM'de akımı doğru modelleyebilecek uzaya göre temel ve test fonksiyonlarının seçimi önemlidir. Bu amaçla literatürde birçok test ve temel fonksiyonlar kullanılmaktadır. Bunlardan bazıları [50]'de anlatılmaktadır. RWG fonksiyonları uygulanabilirliği, sağladığı özellikler (yük birikimi görülmemesi gibi) ve verimli sonuç vermesinden dolayı birçok saçılma ve ışınma problemlerinin çözümünde sıklıkla kullanılmaktadır.

nedeni, yüzey integral denklemlerin içerdiği zamanda gecikmeli vektör ve skaler potansiyellerin aslında tekillikçe sahip olmamasıdır. Potansiyeller hesaplanırken, Bölüm 2’de sunulan analitik ifadeler kullanılırsa, integrandın tekil olmadığı görülür. Standart ZAY çözüm algoritmasında ise skaler ve vektör potansiyeller hesaplanırken tekil çıkartımı yapılmalıdır ve bu çıkartımın değeri zaman adımı büyüklüğüne doğrudan bağlıdır. Genel olarak, zaman adım büyüklüğü düşürüldükçe, zamana göre ara değerlendirilmede yapılan hatanın azalması beklenir. Fakat bu beklentinin tersine, standart nümerik algoritma ile elde edilen empedans matrisi elemanları farklılaşmaktadır ve çözümler yakınsak değildir. Empedans matrisi elemanlarındaki bu farklılaşmanın en önemli nedeni zaman göre temel fonksiyonların türevlerinin sürekli olmayışıdır. Nümerik integrasyon işlemi sırasında, örnek noktalarının seçimi süreksizlik noktalarını içerebildiğinden sonucu etkilemektedir. Özellikle, uzaya göre temel ve test fonksiyonları aynı üçgen yüzeyini içerdiğinde, zamanda alınan örnek noktaları, zamana göre temel fonksiyonun türevinin süreksiz olduğu noktalar ile çakışır. Bunların aksine, Bölüm 2’de sunulan analitik ifadeler kullanılarak yapılan EAİD çözümleri, yakınsak ve tutarlıdır. Bunun nedeni, daha önce de belirtildiği gibi, hem uzaya hem de zamana göre (konvolüsyon) integrallerin analitik olarak belirlenmesidir. Bölüm 2’de sunulacak olan analitik ifadelerle dayalı çözümlerin, zamana göre temel fonksiyonlarındaki süreksizliklere, zaman adım büyüklüğüne ve tekil çıkartımına daha az duyarlı olduğu gösterilecektir. Geliştirilen yöntemin zaman adımı büyüklüğüne daha az duyarlı olması sonucu, görece olarak daha yüksek frekanslarda çözümler, daha büyük zaman adımı ile bulunabilir.

Elektrik ve manyetik alanın analitik ifadeleri, bu alanların zamana göre davranışları hakkında daha kesin yorumlar ve çıkarımlar yapılmasına olanak sağlamaktadır. MAİD’in ikinci türden bir integral denklem olduğuna daha önce değinilmişti. MAİD’in içerdiği integral (manyetik alan ifadesi), gözlemci noktası ve kaynak noktası üst üste geldiğinde tekildir ve bu tekil frekans uzayında genellikle Cauchy asıl değeri yaklaşımı ile hesaplanabilmektedir. MAİD genellikle, akım yoğunluğunun önünde yarım faktörü ile birlikte verilir [51]. Yarım faktörünün, manyetik alan integralindeki tekilğin Cauchy asıl değeri olarak değerlendirilmesi sonucu ortaya çıkmaktadır ve  $\frac{1}{2}$  değeri sadece düzgün yüzeyler için geçerlidir. Yarım faktörünün elde edilmesi için farklı yaklaşımlar mevcuttur, (örneğin [51]). Ayrıca literatürde MAİD’in verimini artırmayı amaçlayan, özellikle RWG fonksiyonları için

manyetik alanın tekiliği üzerine birçok çalışma vardır [51]-[56]. [52]'de belirtildiği gibi, özellikle üçgen yüzeyler üzerinden integraller Gauss integrasyon kuralı ile hesaplanıyorsa, yarım teriminin çıkartımı MM çözümü için yeterlidir, çünkü Gauss integrasyon kuralı yüzey integralini üçgenin iç noktalarından aldığı örnekler ile hesaplar.

Bu tezin 3. bölümünde, anlık uyarılmış RWG temel fonksiyonundan dolayı oluşan manyetik alanın analitik ifadesi kullanılarak, manyetik alanın tekiliği için genel bir form geliştirilecektir. Önceki çalışmaların aksine, genel formun geliştirilmesi, tamamen zaman uzayında, herhangi bir yaklaşıklık veya limit işlemi yapılmaksızın gerçekleştirilecektir. Sonuçta elde edilecek ifadeler Bölüm 2'de anlatılan yay uzunluğu ve açıortay fonksiyonunu içermektedir ve yarım faktörünün gözlemci noktası üçgen yüzeyi içerisinde olduğu durumda ortaya çıktığı gösterilecektir. Ayrıca gözlem noktası üçgen kenarında ve köşelerde olduğu durumlar için katsayıların belirlenişi sunulacaktır.

EAİD ve MAİD'in ZAY çözümlerinin çeşitli faktörlerden dolayı kararsız sonuçlar verdiği daha önce değinilmişti. EAİD ve MAİD'in kapalı saçıcılar için ZAY çözümlerinin iç rezonans probleminden dolayı bozulduğu bilinmektedir [37]-[38]. İç rezonans problemi, BAİD kullanılarak giderilebilir [22], ancak açık yüzeylerden olan saçılma problemleri incelenmek istendiğinde EAİD tek seçenek haline gelmektedir. Açık yüzeylerden olan saçılmalarda iç rezonans problemi olmamasına karşın, integral denklemin kötü-koşullu yapısından dolayı çözümler kararsız davranışlar sergileyebilir [25]. Kötü-koşullu sistemlerin çözümlerinde ortaya çıkan hataların, matris elemanlarının doğru hesaplanamamasından kaynaklandığı bilinmektedir. Bu yüzden, ZAY matrisi elemanlarının doğru hesaplanması, [26], [28]-[31]'de gösterildiği gibi büyük öneme sahiptir. Ayrıca, ileri düzey temel fonksiyonların kullanımının çözümlerin kararlılığına katkısı gösterilmiştir [44]-[45]. Doğru ve verimli hesaplama ile kararsızlıklar belli ölçüde bastırılırken, EAİD'in ZAY çözümünün aslında zamana göre lineer olarak artan ve sabit bileşenler tarafından bozulduğu da gözlemlenmiştir. Bu lineer olarak artan ve sabit bileşenler kararsızlık olarak sınıflandırılmazlar. Bu tez içerisinde bu bozulmalar "lineer bileşen problemi" ve "sabit bileşen problemi" olarak adlandırılacaktır.

Zaman uzayı EAİD, [22]'de verildiği gibi, vektör ve skaler potansiyellerden dolayı, bir zaman türevi ve bir zamana göre integral içerir. Ancak EAİD'in zamana göre türevli halinin kullanılması, zamanla sifıra giden matris elemanları elde edildiği için daha uygundur [39]. Bu durumda EAİD'in zamana göre türevi, bilinmeyen akım yoğunluğu fonksiyonunun zamana göre ikinci dereceden türevini içerir. Akım yoğunluğunun zamana göre ikinci dereceden türevi içermesi denklemin eşsiz (*unique*) çözümünün bulunması için iki başlangıç koşulu gerektirir. Başlangıç koşulları genellikle akım yoğunluğunun ve zamana göre türevinin başlangıç anındaki ( $t=0$ ) değeri ile verilir. Ayrıklaştırılmış denklemde, başlangıç koşulları akım yoğunluğunun iki zaman adımıdaki değerleri olarak verilebilir. Bunlar başlangıç ve bir önceki/sonraki andaki değerlerdir. Başlangıçta durağan olma koşulu (*initially at rest condition*), akım yoğunluğunun başlangıç anındaki ve öncesindeki değerinin sıfır olmasını gerektirir. Ancak başlangıç anında akım yoğunluğunun zamana göre türevi her zaman sürekli olmayabilir. Bu durum akım yoğunluğunun başlangıçtan bir sonraki adımdaki değerinin belirlenmesini pratik olarak imkansız kılar. Ancak standart ZAY algoritmasında, ilk zaman adımı, akım yoğunluğunun zamana göre türevinin,  $t=0$  anında süreksiz olması olasılığı göz önünde bulundurulmadan hesaplanır. Böylece başlangıçta durağan olma varsayımı ayırık çözüme doğru bir şekilde uygulanmamış olur ve çözümler lineer ve sabit bileşenler tarafından bozulur.

Lineer bileşen problemine bir çözüm [25]'te sunulmuştur. [25]'te zaman uzayı EAİD, "DA-kararlı EAİD" (*DC-stable EFIE*) olarak adlandırılan ikinci tür integral denkleme dönüştürülmüştür. Ancak DA-kararlı EAİD'in çözümü fazla hesaplamasal yük gerektirdiği gibi, DA-kararlı EAİD'in açık geometrilere uygulanabilirliğinden bahsedilse bile henüz bunun bir örneği literatürde görülmemektedir.

Bu tezin 4. bölümde, zaman uzayı EAİD'in ZAY çözümündeki lineer ve sabit bileşen problemlerinin giderilmesi için, hem açık hem de kapalı geometrilere uygulanabilir alternatif bir yöntem sunulacaktır. Bölüm 4'te sunulan yöntem, EAİD'in [57]'de anlatılan formülasyonu kullanılarak elde edilen ZAY çözümünden ilham alınarak geliştirilmiştir. Ancak [57]'de sunulan formülasyon, EAİD'in başlangıç değer problemi yerine, kararsızlık problemini gidermek için kullanılmıştır. Detaylı olarak, [57]'de sunulan formülasyonunun EAİD'in ZAY çözümünde kullanılabilmesi için ilk türevi sürekli olan zamana göre temel fonksiyon

geliştirilmiştir. Ancak [57]'de geliştirilen zamana göre temel fonksiyon nedensel değildir. Bölüm 4'te, ilk olarak [57]'de sunulan formülasyona paralel olarak, Birinci Mertebeden Formülasyon (BMF) sunulacaktır. Geliştirilen yöntem, ayırık konvolüsyon ve nümerik türev işlemleri üzerine kuruludur. BMF ile lineer bileşen probleminin giderildiği gösterilecektir, ancak sabit bileşen problemi hala sonuçlarda görülecektir. Bu noktada, metod bir adım öteye götürülerek hem açık hem de kapalı geometriler için lineer ve sabit bileşen problemlerini gideren, yeni bir yöntem olarak, İkinci Mertebeden Formülasyon (İMF) sunulacaktır. Ayrıca geliştirilen BMF ve İMF yöntemlerinde, [57]'de verilen formülasyonunun aksine, zamana göre fonksiyonlar süreksiz türevlere sahip olabilirler. Diğer bir deyişle, geliştirilen yöntemler, zamana göre temel fonksiyonun seçiminden bağımsızdır. Bölüm 4'te sunulan yöntemlerde iki noktaya dikkat edilmelidir: (i) geliştirilen yöntemler, DA-kararlı EAİD gibi zaman uzayı EAİD'in kötü-koşullu yapısını düzeltmemektedir, ve (ii) geliştirilen yöntemler, kapalı geometriler çözülürken iç rezonans bozulmalarını önlemek için varolan BAİD çözücülerine kolayca uygulanabilir.

Saçılma problemlerinde saçıcılar her zaman mükemmel iletken olmayabilirler. Bu durumda yüzey integral denklem yerine hacim integral denklemlerinin çözülmesi gereklidir. Hacim integral denklemlerin ZAY ile çözümü sık başvurulan bir çözüm yolu değildir. Farklı elektriksel özelliklere sahip homojen saçıcılar içeren yapıların analizi yüzey integral formülasyonu aracılığıyla yapılabilmektedir [58]-[61]. Hacimsel bir problemin yüzeyler aracılığı ile çözümü ZAY matrisini ve bilinmeyen sayısını oldukça düşürmektedir. Ancak saçıcı bölge homojen değilse hacim integral denklem çözümü yapılması zorunludur [23], [62]. Yüzey integral denklemlerin aksine hacim integral denklemlerde iç rezonans problemi görülmez ve matris elemanlarının doğru hesaplanması ZAY çözümünün kararlılığı üzerinde baskın etmendir.

Bu tezin 5. bölümünde, anlık uyarılmış Schaubert-Wilton-Glisson (SWG) temel fonksiyonlarından dolayı oluşan zamanda gecikmeli vektör ve skaler potansiyellerin zaman örneklerinin RD yorumu ile elde edilmesi anlatılacaktır. SWG temel fonksiyonları [63], RWG fonksiyonlarının üç boyutlu eşdeğeri olarak düşünülebilir. [28]'de anlık uyarılmış RWG fonksiyonlarından dolayı oluşan skaler ve vektör potansiyellerin zaman örneklerinin geometrik büyüklükler cinsinden bulunabileceği

gösterilmiştir. Detaylı olarak skaler ve vektör potansiyellerin merkezi gözlem noktası olan  $R = ct$  yarıçaplı kürenin ve RWG fonksiyonunu oluşturan üçgensel yüzeyin kesişimi sonucu oluşacak yayın oluşturduğu, yay uzunluğu ve açığortay vektörü ile belirlenebileceği gösterilmiştir. Diğer bir deyişle potansiyellerin içerdiği RWG fonksiyonunu oluşturan yüzey üzerinden olan integraller, RD yorumu ile küre ve üçgensel yüzeyin kesişimi sonucu oluşan yay üzerinden integrale dönüştürülmüştür ve yay üzerinden olan integrallerinin analitik ifadeleri, yay uzunluğu ve açığortay vektörü olarak bulunmuştur. Bölüm 5'te anlık uyarılmış SWG fonksiyonundan dolayı oluşan skaler ve vektör potansiyellerin zaman değerlerinin,  $R = ct$  yarıçaplı küre ile tetrahedral bölgenin kesişimi sonucu oluşan katı açığı ve yüzey merkezi fonksiyonları aracılığıyla belirlenebileceği gösterilecektir. Katı açığı ve yüzey merkezi fonksiyonları, kesişim yüzeyi üzerinden hesaplanan integraller ile belirlenebilmektedir. Böylece [28]'de yapılan çalışmaya paralel olarak, potansiyellerin içerdiği SWG fonksiyonunu oluşturan tetrahedral hacim üzerinden olan hacim integrali, küre ve tetrahedral hacmin kesişimi sonucu oluşan yüzeyler üzerinden integrallere dönüştürülmüştür. Kesişim sonucu oluşan yüzey üzerinden integrallerin geometrik olarak katı açığı ve yüzey merkezi ifadeleri olduğu gösterilmiştir. Katı açığı ve yüzey merkezi fonksiyonlarını analitik olarak belirlemek mümkündür, ancak Bölüm 5'te bu fonksiyonların değerleri kesişim yüzeyi üzerinden hesaplanan nümerik integrasyon ile belirlenmiştir. Ayrıca katı açığı ve yüzey merkezi fonksiyonları ile elde edilen potansiyeller tekil değildir. Böylece potansiyeller hesaplanırken herhangi bir tekillik çıkartımı yapılmasına gerek yoktur.

Tam dalga çözümlerinin hesaplamasındaki yükü yüksek frekansta çok artmaktadır ve çözümün elde edilebilmesi için çok yüksek bilgisayar gücüne ihtiyaç vardır [42]. Yüksek frekansta saçılma problemini incelemek için, tam dalga çözümlere dayanan hızlandırılmış teknikler [64] geliştirilse de, bu teknikler yüksek frekans problemlerinin çözümü için genellikle yetersiz kalmaktadır. Elektromanyetikte yüksek frekansta saçılma problemlerinin çözümünde, FO yaklaşımının oldukça verimli ve hızlı çözümler sağladığı gösterilmiştir. FO yaklaşımında, saçıcı yüzeyinde indüklenen akım kabaca gelen manyetik alanın teğet bileşeninin iki katı ile verilir. Bu yaklaşım ile çözüm, matris denklemi oluşturmaya gerek kalmadan elde edilir ve yaklaşımın matris denklem içermemesi yüksek frekansta kullanışlı ve hızlı bir yöntem olmasını sağlamaktadır. Ancak FO, asimptotik bir tekniktir ve FO ile yapılan

çözüm, kırınım veya çoklu yansıma gibi saçılma mekanizmalarını içermez [65]-[67]. Çözümün doğruluğu, bu mekanizmaların etkileri ayrı bir şekilde eklenerek arttırılabilir.

FO çözümü genel olarak düzlemsel dalga ile aydınlatılan cisimlerden saçılan alanın sonsuzdaki ifadesini incelemek için kullanılır. Bu problem aynı zamanda RKA'nın tanımını oluşturur. Ancak bazı durumlarda saçılan alanın saçıcının yakınında incelenmesi veya kaynakların saçıcının yakınında olduğu durumların incelenmesi gerekebilir. Bu gibi durumlara örnek olarak, bir ölçüm sahasında her saçıcı için uzak alan şartının her frekansta sağlanamaması veya bir elektromanyetik uyumluluk probleminde rastgele kaynakların çevrelerine olan etkilerinin incelenmesi verilebilir. Bu gibi problemlerden dolayı, yüksek frekansta yakın alan saçılma problemleri FO yaklaşımıyla incelenmektedir [68]-[70].

FO yaklaşımında, saçıcı yüzeyi üzerinde indüklenen akım yoğunluğu belirlendikten sonra, saçılan alanı bulmak amacıyla oluşturan saçıcı yüzey üzerinden ışına integralinin hesaplanması gereklidir. Işıma integralini hesaplamak için çeşitli yöntemler mevcuttur: En çok kullanılanlar arasında nümerik Gauss integrasyonu ve en dik iniş çizgisi yöntemleri sayılabilir [62]. Ancak bahsedilen yöntemlerin eksiklikleri ve kısıtları vardır, örneğin, nümerik integrasyon hesaplanırken saçıcıyı modelleyen yüzey parçalarının boyu gelen alanın minimum dalga boyundan çok daha küçük olması gerekmektedir. Sonuç olarak yüksek frekansta yüzeyde alınan örnek sayısı çok fazla olmaktadır. FO yaklaşımı ile RKA hesaplanırken oluşan ışına integralinin RD yorumu ile zaman uzayındaki analitik ifadesi [47]'de geliştirilmiştir. RD yorumu ile elde edilen analitik ifadeler dalga boyundan bağımsızdır. Daha önce bahsedildiği gibi RD türü düzlemseldir. Geliştirilen yöntem, diğer metotlar ile karşılaştırıldığında, integral sonucu analitik olarak belirlendiğinden oldukça hızlıdır ve analitik ifadeler belirlenirken herhangi bir yaklaşıklık yapılmadığından, diğer metotlara göre, çok daha doğru sonuç vermektedir. [47]'de, analitik formüller üçgensel yüzeyler için geliştirilmiştir, çünkü rastgele saçıcıların üçgenler ile modellenmesi verimli ve sık kullanılan bir yöntemdir.

[47]'de geliştirilen düzlemsel RD yorumu ile ışına integrallerinin analitik ifadelerinin bulunmasına benzer olarak, yukarıda bahsedilen, kaynakların ve

gözlemcinin sonsuzda olmadığı ışına problemleri için FO yaklaşımı sonucu oluşan ışına integrallerinin analitik ifadelerinin bulunması mümkün olup olmadığı henüz incelenmemiştir. Yaklaşımın kaynak ve gözlem noktasının sonsuzda olmadığı problemler için doğruluğu ve geçerliliği gösterilmediğinden, elektromanyetik saçılma problemi yerine, yaklaşımın doğruluğunun gösterilmesi ve RD türlerinin problem çeşidine göre belirlenmesi amacıyla akustik saçılma için kaynağın ve gözlem noktasının sonsuzda olduğu ve olmadığı saçılma problemlerinin incelenmesi daha uygundur. Akustik dalgalar, skaler olduğundan analitik olarak belirlenecek integraller kısmen basitleşmektedir. Ancak akustikte optik yer almaz ve FO yaklaşımının eşdeğeri olarak Kirchhoff Yaklaşımı, KY, (*Kirchhoff's Approximation*) [66]-[67], [71] bulunmaktadır. FO yaklaşıma benzer olarak, KY, kabaca saçıcı yüzeyindeki toplam alanın, gelen alanın iki katı olduğunu varsayar.

Bu tezin 6. bölümünde, akustik olarak yumuşak ve sert yüzeye sahip saçıcılar için kaynağın veya gözlem noktasının sonsuzda veya saçıcının yakınında olduğu durumlarda KY ile elde edilen hız potansiyelinin (*velocity potential*) analitik ifadesi zaman uzayında geliştirilecektir. Saçıcının üçgenler ile modellendiği varsayılacaktır. Analitik ifadeler tek bir üçgen yüzeyi için belirlenecektir ve saçılan alan ifadesi tüm üçgen yüzeylerden olan katkıların süperpozisyonu ile bulunabilir. Kaynak ve gözlem konumları ele alındığında, dört farklı durum ortaya çıkmaktadır:

- (i) Kaynak ve gözlem noktalarının sonsuzda olduğu durum: Bu durum elektromanyetikte RKA, akustikte ise Sonar Kesit Alanı<sup>1</sup>, SKA, (*Sonar Cross Section, SCS*) değerlerinin belirlenmesi için kullanılmaktadır. Bu durum [47]'de incelenen problem ile aynıdır ve akustik saçılma problemine uygulamak oldukça basittir. Bu tezin 6. bölümünde, bu durum “Uzak-Uzak durumu” olarak adlandırılacaktır. Uzak-Uzak<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> Literatürde Sonar Kesit Alanı terimi yerine Saçılma Kesit Alanı (*Scattering Cross Section*) terimi de kullanılmaktadır.

<sup>2</sup> “Uzak” ve “Yakın” ifadeleri uzak ve yakın alan ifadeleri ile karıştırılmamalıdır. Bu tezin 6. bölümünde “Uzak” ile anlatılmak istenen ilgili noktanın sonsuzda olduğu durum, “Yakın” ile de sonsuzda olmadığı durumdur. Uzak ve yakın alan kavramı ile düşünüldüğünde “Uzak durumu” her

durumu ile hem kaynak noktasının hem de gözlem noktasının sonsuzda olduğu kastedilmektedir. Daha önce bahsedildiği gibi bu durumda düzlemsel RD ortaya çıkmaktadır.

- (ii) İkinci durum, kaynak noktasının uzak, gözlem noktasının yakın durumudur. Bu durumda paraboloidal<sup>1</sup> RD ortaya çıktığı gösterilecektir. Bu durum “Uzak-Yakın durumu” olarak adlandırılacaktır.
- (iii) Üçüncü durum, kaynakların yakın, gözlem noktasının uzak durumudur. Kaynaklar olası bir nümerik çözüciye adaptasyon düşünülerek noktasal kaynak olarak seçilmiştir. İkinci durumda olduğu gibi bu durumda da paraboloidal RD ortaya çıkmaktadır ve bu durum “Yakın-Uzak durumu” olarak adlandırılmıştır.
- (iv) Dördüncü durum hem kaynağın hem de gözlem noktasının yakın durumudur. Bu durumda RD türü elipsoidaldir<sup>2</sup> ve bu durum “Yakın-Yakın durumu” olarak adlandırılacaktır.

Belirtilen dört durumun yumuşak ve sert saçıcılar için farklı formülasyonu vardır. Tezin 6. bölümünde tüm durumlar ayrı ayrı formüle edilerek incelenmiştir. Bölüm 6.1’de yumuşak ve sert sınır koşulları için integral denklemden KY ile ayrılaştırılmış ışınma integralleri, gözlem noktasının yakın ve uzak durumları için

---

zaman uzak alan bölgesinde kalmaktadır. “Yakın durumu” ise kaynakların anlık uyarılmış olduğu göz önüne bulundurulduğunda her zaman yakın alan bölgesinde kalmaktadır. Zaman uzayı için yakın ve uzak alan kavramları [72]’de anlatılmaktadır.

<sup>1</sup> Paraboloid oluşan tüm durumlarda, oluşan paraboloidlerin kesitleri çember olarak ortaya çıkmaktadır. Bu yapı çember paraboloid olarak adlandırılabilir. Tüm tez boyunca paraboloid ile çember paraboloid kastedilecektir.

<sup>2</sup> Elipsoit oluşan durumlarda, elipsoidin dik kesiti çemberdir, bu şekilde sahip elipsoide aynı zamanda *prolate spheroid* denmektedir [73]-[74]. Tüm tez boyunca elipsoloit ile *prolate spheroid* kastedilecektir.

belirlenmiştir. Bölüm 6.1'in temel amacı ışına integrallerini gözlem noktasının konumuna göre sınıflandırmaktır. Bölüm 6.2'de belirlenen ışına integralleri ile formülasyona kaynağın konumu eklenerek yukarıda sıralanan dört durum için formüller elde edilmiş, dört durum ve iki farklı sınır koşulu için analitik ifadesi belirlenecek fonksiyonlar belirlenmiştir. Bazı durumların matematiksel davranışı aynıdır ve farklı durumlar için benzer integral yapıları ortaya çıkmaktadır. Belirlenen integral yapılarının analitik ifadeleri Bölümler 6.3-6.5'te elde edilmiştir. Analitik ifadeler anlık uyarılmış kaynaklar için elde edilmiştir. Anlık uyarılmış kaynaklar için elde edilen sonuçlar, arzulanan zaman uyartımı fonksiyonu ile konvolüsyonu hesaplanarak herhangi bir uyartım için sonuçlar elde edilebilir.

Bu tezin 7. bölümünde, yukarıda anlatılanlar göz önünde bulundurularak, tez sonuçları sunulacak, tezde geliştirilen yöntemler ve elde edilen sonuçlar özetlenecek, ve bu tezde yapılan çalışmalar sonrasında gelecekte yapılması planlananlar sunulacaktır.

Bu tezde Dirac delta fonksiyonunun özellikleri sıklıkla kullanılmaktadır. Bundan dolayı Ek A'da bu tezde kullanılan Dirac delta fonksiyonunun bazı özellikleri sunulacaktır.

Özellikle Bölüm 6'da, analitik ifadeler elde edilirken, bazı geometrik büyüklüklerin belirlenmesi gerekmektedir. Ek B'de Bölüm 6 için gerekli olan geometrik hesaplamalar sunulacaktır. Bu geometrik hesaplamalar ikiye ayrılabilir. İlki daha genel olarak ortaya çıkan paraboloid ile düzlemin ve elipsoit ile düzlemin kesişimi sonucu ortaya çıkacak geometrik yapılardır. Bu geometrik yapıların belirlenmesi yüzey integralinin RD yorumu sonucu elde edilecek çizgi integralini belirleyebilmek için gereklidir. İkincisi ise belirlenen çizgi integralinin sınırlarının analitik olarak belirlenmesi için gerekli olan parabol-doğru ve elips-doğru kesişimlerinin belirlenmesi için gerekli olan geometrik hesaplamalarıdır. Bunlara göre, Ek B'de, (i) paraboloid ile düzlemin kesişimi sonucunun, en genel halde, bir elips oluşacağı, (ii) düzlem paraboloidin açıklığına dik olduğunda kesişimin parabol olduğu, (iii) elipsoit ve düzlem kesişim sonucunun ise en genel halde her zaman elips olacağı gösterilecektir. Ayrıca bölüm B.3 ve B.4'te belirlenen çizgi integrallerinin

sınırlarının bulunması için parabol-doğru ve elips-doğru kesişim sonuçlarının analitik ifadeleri geliştirilecektir.

Ek C’de ise Fourier dönüşümü ve fazör gösterimi arasındaki ilişki incelenecek ve anlık uyarılmış ifadelerin Fourier dönüşümü ile fazör gösteriminin elde edilebileceği gösterilecektir.

Ek D’de Bölüm 2 ve 6’da belirlenen integrallerin analitik ifadeleri sunulmuştur. Analitik ifadeler belirsiz integral sonucu olarak verilmiş ve sınırların belirlenmesi ise ilgili bölümlerde anlatılmıştır.

Bu tezin kapsamı, temel olarak iki ana başlıkta toplanabilir: (i) ışına integrallerinin RD yorumu ile hesaplanması ve (ii) saçılma problemlerinin zaman uzayında ZAY ve KY (FO) ile çözülmesi. Tezin 2, 3 ve 5. bölümleri zaman uzayı integral denklemlerin ZAY çözümlerinde RD yorumu ile elde edilen alanların (ve/veya potansiyellerin) analitik ifadelerinin geliştirilmesi/kullanılması ve integral denklemlerin analitik ifadeler ile incelendiğinde ortaya çıkan sonuçların gösterilmesini ve incelenmesini içermektedir. Tezin 4. bölümünde RD yorumundan bağımsız olarak EAİD’in başlangıç değeri problemi ortaya konmuş ve giderilmesi için yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Tezin 6. bölümünde, farklı kaynak ve gözlem noktaları söz konusu olduğunda KY integralinin RD yorumu ile analitik olarak hesaplanması anlatılmaktadır. Ek B’de ise literatürde var olmayan, paraboloid-düzlem ve elipsoid-düzlem kesişimi sonucu oluşacak geometrik yapılar ile parabol-doğru ve elips-doğru kesişim noktalarının belirlenmesi için analitik formüller geliştirilecektir.

## 2. ZAMAN UZAYI İNTEGRAL DENKLEMLER

Bu bölümde anlık uyarılmış RWG fonksiyonundan dolayı oluşan elektrik ve manyetik alanların RD yorumu sonucu elde edilmiş analitik ifadeleri ve bu ifadelerin BAİD'in ZAY çözümüne uygulanması anlatılacaktır. İlk olarak Bölüm 2.1'de genel ZAY çözüm algoritması anlatılacak ve ZAY için matris sisteminin oluşturulması ve bilinmeyen fonksiyonun belirlenmesi gösterilecektir. Bölüm 2.2'de mükemmel iletken yüzeyden saçılma problemi kısaca anlatılacak ve saçılma probleminin ZAY ile çözümünden bahsedilecektir. BAİD, EAİD ve MAİD'in birleşiminden oluştuğu için Bölüm 2.3'te mükemmel iletken yüzeyler için EAİD ve MAİD anlatılacak daha sonra BAİD'in elde edilişi kısaca gösterilecektir. Bölüm 2.4'te yay uzunluğu ve açılı ortay vektörü fonksiyonlarının analitik ifadeleri sunulacak ve analitik olarak bu fonksiyonların değerlerinin elde edilmesi gösterilecektir. Bölüm 2.5'te anlık uyarılmış RWG fonksiyonu için bulunan formüllerin konvolüsyon ile istenilen zaman bağımlılığının elde edilişi ve konvolüsyon integralinin sınırlarının belirlenmesi anlatılacaktır. Bölüm 2.6'da, geliştirilen analitik formüller kullanılarak elde edilen BAİD sonuçları ile standart nümerik ZAY algoritması kullanılarak elde edilen BAİD sonuçları, nümerik<sup>1</sup> örnekler aracılığıyla karşılaştırılacaktır. Bölüm 2.7'de EAİD'in ZAY çözümünde elektrik alanın analitik ifadesinin kullanılmasının EAİD'in çözümüne getirdiği katkılar nümerik örnekler aracılığıyla gösterilecektir. Bölüm 2.8'de sonuçlar sunulacaktır.

### 2.1. Zamanda Adımlama Yöntemi

Zamanda Adımlama Yöntemi en genel halde  $\mathcal{L}$ , lineer, zamanla değişmeyen ve nedensel bir operatör olmak üzere,

$$\mathcal{L}\{\mathbf{I}(\mathbf{r}, t)\} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \quad (2.1)$$

---

<sup>1</sup> Bu tezde, "Sayısal" ifadesi İngilizce "*Digital*" ifadesi ile karıştırılabileceğinden, "Sayısal Örnekler" yerine "Nümerik Örnekler" ifadesi kullanılmıştır.

denklemleri ile verilen problemin çözümü için geliştirilmiş bir yöntemdir. Burada  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$  bilinen bir fonksiyon,  $\mathbf{I}(\mathbf{r}, t)$  bilinmeyen fonksiyondur.  $\mathbf{I}(\mathbf{r}, t)$  bilinmeyen fonksiyonu  $\mathbf{f}_n(\mathbf{r})$  uzaya göre temel fonksiyonların ve  $T_i(t)$  zamana göre temel fonksiyonların süperpozisyonu olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}, t) \cong \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{N_t} I_{n,i} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) T_i(t). \quad (2.2)$$

Burada  $I_{n,i}$  bilinmeyen sabit katsayılardır.  $N$  bilinmeyen fonksiyonun ayrıklaştırılması sırasında kullanılan temel fonksiyon sayısı ve  $N_t$  toplam zaman adımı sayısıdır. Zamanda  $\Delta t$  adımlarla eşit aralıklı örnekleme yapıldığı varsayılır ve  $i$ . zaman noktası  $t_i = i\Delta t$  olarak gösterilirse zamana göre temel fonksiyonlar  $T_i(t) = T_0(t - t_i)$  özelliğini sağlamalıdır. Denklem (2.1),  $\mathcal{L}$  operatörünün lineerlik özelliği kullanılarak

$$\mathcal{L}\{\mathbf{I}(\mathbf{r}, t)\} = \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{N_t} I_{n,i} \mathcal{L}\{\mathbf{f}_n(\mathbf{r}) T_i(t)\} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \quad (2.3)$$

biçiminde yazılabilir. Denklem (2.3)'te elde edilen eşitlik  $\mathbf{w}_m(\mathbf{r})$  test (veya ağırlık) fonksiyonlarıyla  $t = t_j = j\Delta t$  anında test edilir:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{N_t} I_{n,i} \langle \mathbf{w}_m(\mathbf{r}), \mathcal{L}\{\mathbf{f}_n(\mathbf{r}) T_i(t)\} \rangle \Big|_{t=t_j} = \langle \mathbf{w}_m(\mathbf{r}), \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \rangle \Big|_{t=t_j}. \quad (2.4)$$

$t = t_j$  anında test, aynı zamanda zamana göre ağırlık fonksiyonlarının  $\delta(t - t_j)$  olarak seçilmesinin bir sonucudur. Uzaya göre test fonksiyonları, uzaya göre temel fonksiyonlar gibi çok çeşitli olarak seçilebilir. Genellikle uzaya göre test fonksiyonları  $\mathbf{w}_m(\mathbf{r})$ , uzaya göre temel fonksiyonlar  $\mathbf{f}_n(\mathbf{r})$  ile aynı seçilir. Bu test prosedürüne Galerkin testi denilmektedir. Bu tezde ZAY çözümleri sırasında her zaman Galerkin test prosedürü kullanılmıştır.

Denklem (2.4)'te  $\mathcal{L}\{\mathbf{f}_n(\mathbf{r}) T_i(t)\}$  teriminin zaman bağımlılığı, nedensellikten dolayı  $T_i(t - \tau)$  formunda;  $\tau \geq 0$  sabiti kadar gecikme içerecek biçimde olacaktır

(zamanda gecikmeli potansiyelerde olduğu gibi). Denklem (2.4)'te zamana göre  $t = t_j$  anında test işleminin yapıldığı göz önüne alındığında  $T_i(t - \tau)$

$$\begin{aligned} T_i(t_j - \tau) &= T_0(t_j - t_i - \tau) \\ &= T_0(j\Delta_t - i\Delta_t - \tau) \\ &= T_{j-i}(-\tau) \end{aligned} \quad (2.5)$$

olarak yazılabilir. Denklem (2.4)'te her bir terim

$$Z_{mn,j-i} = Z_{mn,ji} = \left\langle \mathbf{w}_m(\mathbf{r}), \mathcal{L}\{\mathbf{f}_n(\mathbf{r})T_i(t_j)\} \right\rangle, \quad (2.6)$$

$$V_{m,j} = \left\langle \mathbf{w}_m(\mathbf{r}), \mathbf{F}(\mathbf{r}, t_j) \right\rangle \quad (2.7)$$

olarak tanımlanırsa denklem (2.4) ile verilen eşitlik

$$\sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{N_t} I_{n,i} Z_{mn,j-i} = V_{m,j} \quad (2.8)$$

halini alır. Burada  $Z_{mn,j-i}$ ,  $i$  zaman anında,  $n$  noktasındaki kaynağın  $\mathcal{L}$  operatörünün etkisiyle,  $j$  zaman anında,  $m$  noktasında oluşturduğu alanı vermektedir. Her  $i$ . zaman ve  $n$ . uzaya göre temel fonksiyon tarafından  $j$ . zaman ve  $m$ . uzay elemanında oluşturulan alanlar  $I_{n,i}$  katsayılarıyla çarpılarak toplanırsa  $j$ . zaman ve  $m$ . uzay elemanında oluşan toplam alan bulunabilir. Denklem (2.8),

$$\bar{\mathbf{Z}}_{j-i} = \begin{bmatrix} Z_{11,j-i} & \cdots & Z_{1N,j-i} \\ \vdots & Z_{mn,j-i} & \vdots \\ Z_{N1,j-i} & \cdots & Z_{NN,j-i} \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{V}_j = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{w}_1(\mathbf{r}), \mathbf{F}(\mathbf{r}, t_j) \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{w}_N(\mathbf{r}), \mathbf{F}(\mathbf{r}, t_j) \rangle \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{I}_i = \begin{bmatrix} I_{1,i} \\ \vdots \\ I_{N,i} \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

matrisleri tanımlanarak

$$\mathbf{V}_j = \sum_{i=0}^{N_t} \bar{\mathbf{Z}}_{j-i} \mathbf{I}_i \quad (2.12)$$

şeklindeki bir matris eşitliği olarak yazılabilir. Oluşturulan matris sisteminin çözülebilmesi için uzaya göre test fonksiyonu sayısının, temel fonksiyon sayısına eşit olması gerekmektedir<sup>1</sup>. Nedensellikten dolayı  $t < 0$  iken uyartımın var olmadığı varsayılmaktadır. Bundan dolayı toplamın alt sınırı,  $i = 0$  'dan başlar. Toplamın üst sınırı belirlenirken dikkat edilmesi gereken nedensellikten dolayı  $j$  anına,  $j$  anından sonra oluşacak olayların etki edemeyeceğidir. Bundan dolayı denklem (2.12)'de  $N_t$  'nin yerini  $j$  alır ve denklem (2.12) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{V}_j = \sum_{i=0}^j \bar{\mathbf{Z}}_{j-i} \mathbf{I}_i \quad j = 0, \dots, N_t. \quad (2.13)$$

Denklem (2.13)'te toplamın üst sınırı olan  $j$  anı için olan terim ayrı yazılırsa,  $j$  anındaki katsayılar

$$\mathbf{I}_j = \bar{\mathbf{Z}}_0^{-1} \left[ \mathbf{V}_j - \sum_{i=0}^{j-1} \bar{\mathbf{Z}}_{j-i} \mathbf{I}_i \right] \quad (2.14)$$

olarak bulunur. Denklem (2.14)'te, başlangıç değeri olarak  $\mathbf{I}_0 = 0$  seçilerek  $j = 1$  anı için çözüm

$$\mathbf{I}_1 = \bar{\mathbf{Z}}_0^{-1} \mathbf{V}_1 \quad (2.15)$$

bulunur ve diğer anlar için sonuçlar denklem (2.14)'te zamanda birer adım ilerlenerek tüm  $j$ 'ler için belirlenir. Denklem (2.14)'teki adımlama işleminden dolayı bu yönteme “zamanda adımlama yöntemi” denmektedir.

---

<sup>1</sup> Bu şart matris tersinin hesap edildiği çözümler için gereklidir. İterasyona dayalı çözümlerde bu şart her zaman gerekli olmayabilir.

## 2.2. Elektromanyetik Saçılma Problemi

$S$  boş uzayda bulunan mükemmel iletken saçıcı yüzeyini belirtsin ve  $S$  yüzeyine sahip saçıcı elektrik ve manyetik alan bileşenleri, sırasıyla,  $\mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)$  ve  $\mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t)$  olan, gelen elektromanyetik alan ile Şekil 2.1'de gösterildiği gibi uyarılsın. Gelen alanın,  $S$  yüzeyi ile etkileşimi sonucu saçıcı yüzeyinde yüzey akımları  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  oluşur ve oluşan yüzey akımları saçılan elektromanyetik alanın  $\{\mathbf{E}^S(\mathbf{r}, t), \mathbf{H}^S(\mathbf{r}, t)\}$  kaynağıdır. Nedensellikten dolayı gelen elektromanyetik alanın  $t=0$  anından önce  $S$  saçıcı yüzeyi ile etkileşmediği; böylece  $t < 0$  için  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = 0$  olduğu varsayılır. Gelen alanın  $S$  yüzeyi ile etkileşimi sonucu oluşan  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  yüzey akımları belirlendikten sonra saçılan alanlar vektör ve skaler potansiyeller aracılığıyla belirlenirler:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}', t') * \frac{\delta(t - R/c)}{R} d\mathbf{r}', \quad (2.16)$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \rho(\mathbf{r}', t') * \frac{\delta(t - R/c)}{R} d\mathbf{r}'. \quad (2.17)$$

Burada  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  ve  $\phi(\mathbf{r}, t)$ , sırasıyla, vektör ve skaler potansiyeli,  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  gözlem noktası ile kaynak noktası arasındaki uzaklığı,  $\epsilon$  ve  $\mu$ , sırasıyla, ortamın dielektrik sabiti ve manyetik geçirgenliğini,  $c$  dalganın ortamdaki hızını belirtmektedir. Ayrıca  $\rho(\mathbf{r}, t)$  yüzey yük yoğunluğunu belirtmektedir ve  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  ile süreklilik denklemi

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \partial_t \rho(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.18)$$

ile ilişkilidir. Burada  $\partial_t$  zamana göre türevi belirtmektedir.

Elektromanyetik saçılma probleminde  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  yüzey akım yoğunluğunun belirlenmesi amaçlanır.  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  belirlenirken ZAY veya FO gibi farklı yöntemler kullanılabilir. Yukarıda anlatıldığı gibi  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  belirlendikten sonra saçılan alanlar potansiyeller aracılığıyla

$$\mathbf{E}^S(\mathbf{r}, t) = -\partial_t \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \nabla \phi(\mathbf{r}, t), \quad (2.19)$$

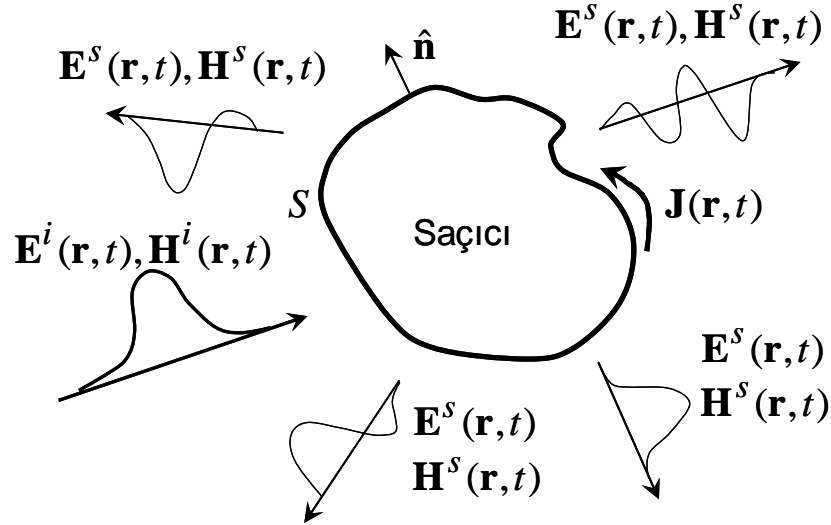
$$\mathbf{H}^s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (2.20)$$

olarak bulunabilir.

$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  akım yoğunluğunun bir önceki bölümde anlatılan zamanda adımlama yöntemi (ZAY) ile belirlenmesi için ilgili integral denklem yapısının ZAY algoritmasına uyarlanması yeterlidir:

$$\{\mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t), \mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t)\} = \mathcal{L}_{e,h,b} \{\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)\}. \quad (2.21)$$

Burada  $\mathcal{L}_{e,h,b}$  operatörleri, sırasıyla, EAİD, MAİD ve BAİD operatörlerini belirtmektedir. İntegral denklemin türüne göre gelen alan yapısı şekillenmektedir. Bahsedilen integral denklemler ilerleyen bölümlerde daha detaylı olarak incelenecektir. ZAY çözümü için matris yapısı kurulduktan sonra çözüm prosedürü tüm integral denklemler için aynıdır.



Şekil 2.1. Elektromanyetik yüzey saçılma probleminin tanımı.

### 2.3. Zamanda-Gecikmeli Potansiyellerin Uygulanması

ZAY'da bilinmeyen akım yoğunluğu,  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ , uzaya ve zamana göre temel fonksiyonlar kullanılarak, Bölüm 2.1'de anlatıldığı gibi, ayrıklaştırılır:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{N_t} I_{n,i} T_i(t) \mathbf{f}_n(\mathbf{r}). \quad (2.22)$$

Burada  $\mathbf{f}_n(\mathbf{r})$ , uzaya göre  $n$ . temel fonksiyonu;  $T_i(t)$ , zamana göre  $i$ . temel fonksiyonu;  $I_{n,i}$ , bu temel fonksiyonlara ilişkin bilinmeyen katsayıyı belirtmektedir. Bu bölümde uzaya göre temel fonksiyon olarak RWG temel fonksiyonları kullanılmıştır [49] ve zamana göre temel fonksiyonlar olarak [75]-[77]'de tanımlanan parçalı tanımlı polinom interpolasyon fonksiyonları kullanılmıştır. RWG fonksiyonları geometrik parametreleri Şekil 2.2'de gösterildiği üzere, bir üçgen çifti üzerinde

$$\mathbf{f}_n^\pm(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\pm l_n}{2A_n^\pm} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n^\pm) & ; \mathbf{r} \in S_n^\pm \\ 0 & ; \text{diğer} \end{cases} \quad (2.23)$$

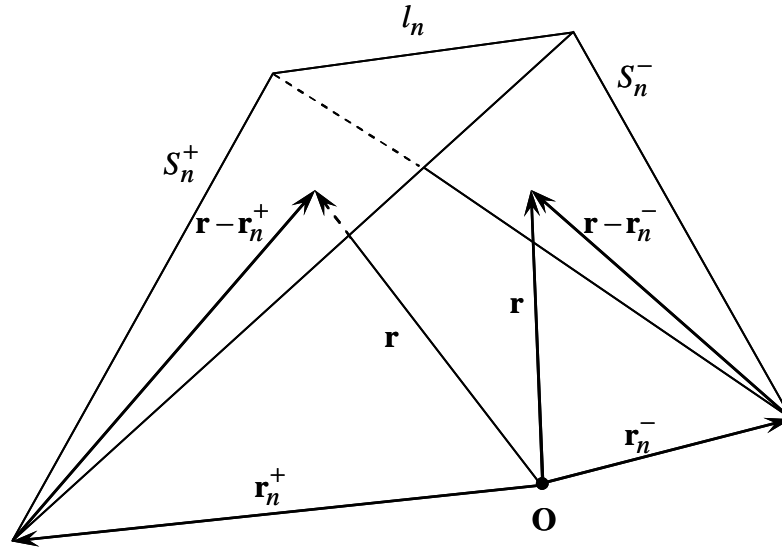
olarak tanımlanır. Burada  $l_n$ , üçgen çiftinin ortak kenarını ve  $A_n^\pm$ ,  $S_n^\pm$  üçgenlerine ilişkin alanları belirtmektedir. Sonraki alt bölümlerde sırasıyla, zaman uzayı EAİD, MAİD ve BAİD incelenecektir ve anlık uyarılmış RWG fonksiyonundan dolayı oluşan alan integrallerinin analitik ifadeleri sunulacaktır. Analitik ifadelerin farklı temel fonksiyonlar için belirlenebileceği unutulmamalıdır. Uzaya göre temel fonksiyon üzerinden hesaplanması gereken integrallerin (zaman konvolüsyonundan ayrı olarak) yay uzunluğu ve açığortay vektörü fonksiyonları olarak belirlenebildiği gösterilmiştir [30]. Uzaya göre integralin sonucu, anlık uyarılmış RWG fonksiyonundan dolayı oluşan, elektrik ve manyetik alan olarak değerlendirilebilir. Elektrik ve manyetik alanları elde etmek için, bu fonksiyonların zamana göre temel fonksiyon ile konvolüsyonunun hesaplanması yeterlidir.

### 2.3.1. Elektrik Alan İntegral Denklemi

Mükemmel iletken bir yüzey üzerinde elektrik alanının sağladığı sınır koşulu kullanılarak, EAİD aşağıdaki gibi çıkartılabilir:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \partial_t \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \left[ \partial_t^2 \frac{\mu}{4\pi} \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) * \frac{\delta(t - R/c)}{R} d\mathbf{r}' - \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) * \frac{\delta(t - R/c)}{R} d\mathbf{r}' \right] \quad \mathbf{r} \in S, \quad (2.24)$$

Burada  $\mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t)$  gelen dalganın elektrik alan bileşeni, \* zamana göre konvolüsyon işlemini,  $\partial_t$  zamana göre türevi,  $\mathbf{r} \in S$  gözlem noktasını,  $\hat{\mathbf{n}}$  gözlem noktasındaki  $S$  saçıcı yüzeyinden dışarı doğru yönlendirilmiş birim normal vektörünü belirtmektedir.  $\epsilon$  ve  $\mu$ , sırasıyla, saçıcıyı çevreleyen ortamın dielektrik sabitini ve manyetik geçirgenliğini,  $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$  dalganın ortamdaki hızını,  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  ise gözlem noktası ile kaynak noktası arasındaki uzaklığı belirtmektedir. Denklem (2.24), EAİD'in zamana göre türevi alınmış halidir. Daha önce bahsedildiği gibi EAİD'in zamana göre türevli halinin kullanılması, zamanla sıfıra giden matris elemanları elde edildiği için daha uygundur [39].



Şekil 2.2. RWG fonksiyonun tanımı.

Yüzey integral denklemlerin ZAY çözümü sırasında ZAY matris elemanlarını belirlemek için beş katlı integral hesaplanması gerekmektedir. Bunlar uzaya göre temel fonksiyon üzerinden yüzey, zamana göre konvolüsyon ve test fonksiyonu

üzerinden yüzey integralleridir. Standart ZAY algoritmasında, konvolüsyon işlemi analitik olarak gerçekleştirilir, çünkü bir fonksiyonun Dirac delta fonksiyonu ile konvolüsyonu kolayca belirlenebilir. Ancak uzaya göre temel fonksiyon üzerinden olan yüzey integrali nümerik olarak hesaplanır. [28] ve [30]'da verilen potansiyellerin analitik ifadelerini kullanmak için konvolüsyondan önce uzaya göre temel fonksiyonlar üzerinden olan yüzey integralinin küresel RD yorumu ile hesaplanması gerekir. (2.22) denklemi, denklem (2.24)'te yerine yazılır ve ortaya çıkan denklem ZAY algoritması gereği  $\mathbf{f}_m(\mathbf{r})$  test fonksiyonları ile  $t = t_j$  anında test edilirse, EAİD denklemi için, beş katlı integral içeren, empedans matris elemanları

$$\begin{aligned} Z_{mn,ji}^E = & -\frac{\mu}{4\pi} \int_{S_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \left[ \partial_t^2 T_i(t_j) * \mathbf{A}_n(\mathbf{r}, t_j) \right] d\mathbf{r} \\ & - \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{S_m} \nabla \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \left[ T_i(t_j) * \phi_n(\mathbf{r}, t_j) \right] d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.25)$$

olarak yazılabilir. Burada  $\mathbf{A}_n(\mathbf{r}, t)$  ve  $\phi_n(\mathbf{r}, t)$ , sırasıyla, anlık uyarılmış  $n$ . uzaya göre temel fonksiyondan dolayı oluşan manyetik vektör potansiyel ve elektrik skaler potansiyeldir:

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{r}, t) = \int_{S_n^-} \mathbf{f}_n^-(\mathbf{r}') \frac{\delta(t - R/c)}{R} d\mathbf{r}' + \int_{S_n^+} \mathbf{f}_n^+(\mathbf{r}') \frac{\delta(t - R/c)}{R} d\mathbf{r}', \quad (2.26)$$

$$\phi_n(\mathbf{r}, t) = \int_{S_n^-} \nabla' \cdot \mathbf{f}_n^-(\mathbf{r}') \frac{\delta(t - R/c)}{R} d\mathbf{r}' + \int_{S_n^+} \nabla' \cdot \mathbf{f}_n^+(\mathbf{r}') \frac{\delta(t - R/c)}{R} d\mathbf{r}'. \quad (2.27)$$

Denklem (2.25) ile verilen EAİD için empedans matrisi elemanı elde edilirken denklem (2.24) ile verilen EAİD,  $\mathbf{f}_m(\mathbf{r})$  test fonksiyonları ile test edildikten sonra, skaler potansiyelin granyentinin testi yerine,  $\mathbf{B} \cdot \nabla a = \nabla(a\mathbf{B}) - a\nabla \cdot \mathbf{B}$  vektör özdeşliği ve yüzey gradyent teoremi kullanılarak elde edilen ifade kullanılmıştır. Yüzey gradyent teoremi ile bulunan ifadede, üçgenlerden dışarı doğru yönlenmiş birim vektör ile üçgen çifti kenarlarına paralel akım fonksiyonunun skaler çarpımı sıfırı verdiği için sadece diverjans içeren terim kalır ve denklem (2.25) elde edilir.

Vektör ve skaler potansiyellerin analitik ifadelerinin, üçgen yüzeyi ile merkezi gözlem noktası  $\mathbf{r}$  olan,  $R = ct$  yarıçaplı kürenin<sup>1</sup> kesişimi sonucu oluşan geometrik büyüklükler türünden bulunabileceği [28]'de gösterilmiştir. [30]'a göre, skaler ve vektör potansiyellerin analitik ifadeleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_n^\pm(\mathbf{r}, t) &= \int_{S_n^\pm} \mathbf{f}_n^\pm(\mathbf{r}') \frac{\delta(t - R/c)}{R} d\mathbf{r}' \\
&= \frac{\pm cl_n}{2A_n^\pm} \underbrace{\int_{S_n^\pm} (\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}) \frac{\delta(ct - R)}{R} d\mathbf{r}'}_{\mathbf{e}^\pm(\mathbf{r}, t)} \\
&\quad \pm \frac{cl_n}{2A_n^\pm} (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n^\pm) \underbrace{\int_{S_n^\pm} \frac{\delta(ct - R)}{R} d\mathbf{r}'}_{\alpha^\pm(\mathbf{r}, t)} \\
&= \frac{\pm cl_n}{2A_n^\pm} \left[ \mathbf{e}^\pm(\mathbf{r}, t) + (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n^\pm) \alpha^\pm(\mathbf{r}, t) \right],
\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}
\phi_n^\pm(\mathbf{r}, t) &= \int_{S_n^\pm} \nabla' \cdot \mathbf{f}_n^\pm(\mathbf{r}') \frac{\delta(t - R/c)}{R} d\mathbf{r}' = \pm \frac{cl_n}{A_n^\pm} \int_{S_n^\pm} \frac{\delta(ct - R)}{R} d\mathbf{r}' \\
&= \pm \frac{cl_n}{A_n^\pm} \alpha^\pm(\mathbf{r}, t).
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Burada  $\mathbf{e}^\pm(\mathbf{r}, t)$  ve  $\alpha^\pm(\mathbf{r}, t)$ , sırasıyla,  $S_n^\pm$  üçgeni için açı ortay vektörü ve yay uzunluğu fonksiyonlarıdır.  $\mathbf{e}^\pm(\mathbf{r}, t)$  ve  $\alpha^\pm(\mathbf{r}, t)$ 'nin analitik ifadeleri [30]'da geliştirilmiştir ve konu bütünlüğünün kaybolmaması için Bölüm 2.4'de anlatılacaktır. Denklem (2.28) ve (2.29) ile verilen potansiyeller için analitik formüller belirlendikten sonra denklem (2.25)'te görüldüğü gibi bu potansiyeller ile zamana göre temel fonksiyonların konvolüsyonunun belirlenmesi gerekmektedir. Daha önce belirtildiği gibi, konvolüsyon işlemi, zamana göre temel fonksiyonlar polinom fonksiyonlar seçilirse analitik olarak belirlenebilir. Konvolüsyon integrallerinin analitik olarak belirlenmesi ile uzaya göre RWG ve zamana göre parçalı-tanımlı

---

<sup>1</sup>  $R = ct$  yarıçaplı küre, aslında 4-boyutlu uzay  $(\mathbf{r}, t)$  için ışık-konisinin belli bir  $t$  anında aldığı şekildir [78]. 4-boyutlu uzayda ışık-konisi, hiper-koni (veya küresel-koni) şeklindedir.

polinom temel fonksiyonlarından dolayı oluşan elektrik alanın analitik ifadesinin geliştirilmesi tamamlanacaktır. Böylece denklem (2.25)'teki beş katlı integral sadece iki katlı bir integral haline gelmiş olur.

### 2.3.2. Manyetik Alan İntegral Denklemleri

Mükemmel iletken bir yüzey üzerinde manyetik alanın sağladığı sınır koşulu kullanılarak, MAİD aşağıdaki gibi çıkartılabilir:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) - \hat{\mathbf{n}} \times \int_S \nabla \times \left[ \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) * \frac{\delta(t - R/c)}{4\pi R} \right] d\mathbf{r}' \quad \mathbf{r} \in S. \quad (2.30)$$

Burada  $\mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t)$ , gelen dalganın manyetik alan bileşenidir. Denklem (2.22), (2.30) denkleminde yerine yazılıp  $\mathbf{f}_m(\mathbf{r})$  test fonksiyonları ile  $t = t_j$  anında test edilirse, MAİD için empedans matrisi elemanları aşağıdaki gibi belirlenebilir:

$$Z_{mn,ji}^H = \frac{1}{2} \int_{S_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) T_i(t_j) d\mathbf{r} - \int_{S_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \times [T_i(t) * \mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)]_{t=t_j} d\mathbf{r}. \quad (2.31)$$

Burada  $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$ , anlık uyarılmış  $n$ . RWG fonksiyonundan dolayı oluşan manyetik alandır:

$$\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t) = \int_{S_n} \nabla \times \left[ \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \frac{\delta(t - R/c)}{4\pi R} \right] d\mathbf{r}'. \quad (2.32)$$

Denklem (2.32)'de verilen integral, denklem (2.26)'daki gibi  $S_n^+$  ve  $S_n^-$  üçgenleri üzerinden integrallerin toplamı olarak yazılabilir. Şekil 2.3'te verilen vektör tanımları ve denklem (2.23) kullanılarak  $\mathbf{H}_n^\pm(\mathbf{r}, t)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_n^\pm(\mathbf{r}, t) &= \mp \frac{l_n}{8\pi A_n^\pm} \int_{S_n^\pm} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_n^\pm) \times \frac{\mathbf{R}}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{\delta(t - R/c)}{R} \right] dS' \\ &= \mp \frac{l_n c}{8\pi A_n^\pm} \int_{S_n^\pm} \left[ (\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}) + (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n^\pm) \right] \times \left[ (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') + \hat{\mathbf{n}} d^\pm \right] \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{\delta(ct - R)}{R} \right] dS' \quad (2.33) \\ &= \mp \frac{l_n c}{8\pi A_n^\pm} (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n^\pm) \times (\hat{\mathbf{n}} d^\pm) V_1^\pm(t) \pm \frac{l_n c}{8\pi A_n^\pm} (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n + \hat{\mathbf{n}} d^\pm) \times \mathbf{V}_2^\pm(t) \end{aligned}$$



### 2.3.3. Birleşik Alan İntegral Denklemleri

EAİD ve MAİD'in ZAY çözümleri, incelenen saçıcının iç-rezonans frekanslarında tek değildir. Bundan dolayı gelen alanın spektrumunu saçıcının iç-rezonans frekanslarını içerdiği durumlarda sonuçlar rezonans bileşenleri tarafından bozulur. Bu durumlarda EAİD ve MAİD'in ZAY çözümleri ile elde edilen sonuçlar kararlılık ve doğruluktan uzaktır. İç-rezonans probleminin giderilmesi için, EAİD ve MAİD'in lineer birleşimi ile elde edilen BAİD önerilmektedir [1]:

$$BAİD = \nu EAİD + (1-\nu)\eta\partial_t MAİD . \quad (2.36)$$

Burada  $\nu \in [0,1]$  birleşim sabiti ve  $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$  ise ortamın karakteristik empedansdır. BAİD, EAİD ve MAİD çözümlerinde ortaya çıkan iç-rezonans bileşenlerinin bastırılarak, rezonans bileşeni içermeyen çözümler üretmek için kullanılmaktadır. Denklem (2.36)'ya dikkat edilirse,  $\nu = 1$  ise EAİD,  $\nu = 0$  ise MAİD elde edilmektedir.

## 2.4. Yay Uzunluğu ve Açortay Vektörü Fonksiyonları

Bu bölümde, yay uzunluğu  $\alpha(\mathbf{r},t)$  ve açortay vektörü  $\mathbf{e}(\mathbf{r},t)$  fonksiyonlarının, analitik ifadeleri, uygulamada kullanıldıkları halleriyle, sunulacaktır. Denklemler (2.28)-(2.29) ve (2.34)-(2.35)'te verilen integrallerin elde edilmesi [24] ve [30]'da detaylı olarak açıklanmaktadır. Bu bölümde, [24] ve [30]'da elde edilen fonksiyonlar kısaca açıklanacaktır. Açortay ve yay uzunluğu fonksiyonları geometrik büyüklüklerdir ve analitik olarak belirlenebilirler. Açortay ve yay uzunluğu fonksiyonlarının analitik ifadeleri, alan koordinatları (*area* veya *barycentric coordinates*) aracılığı ile ifade edilebilir. Bu analitik ifadeler, aynı zamanda bir sonraki bölümde açıklanacak olan, zamana göre temel fonksiyon ile konvolüsyonun analitik olarak belirlenmesini sağlamaktadırlar. Bu bölümde, ayrıca  $\mathbf{e}(\mathbf{r},t)$ ,  $\alpha(\mathbf{r},t)$ ,  $\partial_R \alpha(\mathbf{r},t)$  ve  $\partial_R \mathbf{e}(\mathbf{r},t)$ 'yi belirlemek için bir algoritma sunulacaktır.

RWG fonksiyonları  $S_n^\pm$  ile gösterilen,  $A_n^\pm$  alanlarına sahip ve  $l_n$  ortak kenarlı, bir çift üçgenden oluşur. Kolaylık olması için, bu bölümde çıkartılan tüm formüller sadece  $S^+$  için çıkartılacaktır ve “+” üst sembolü açıkça yazılmayacaktır. Sonuçlar

$S^-$  üçgeni için uygun işaret değişimi ile kolayca elde edilebilir. Literatürde açıortay fonksiyonu için farklı tanımlamalar bulunmaktadır. Bu tezde kullanılan açıortay fonksiyonunun [24] ve [30]'daki gibi tanımlandığına dikkat edilmelidir. Yay uzunluğu ve açıortay vektörü fonksiyonlarının analitik ifadelerine geçmeden önce, formüllerde kullanılan bazı tanımlamaları yapmakta yarar vardır: Şekil 2.4 ile uyumlu olarak,  $l_i$ ,  $i$ . kenarın uzunluğunu,  $l_{i,\min}$  ve  $l_{i,\max}$ , sırasıyla,  $\rho$  noktasından  $i$ . doğru parçasına olan yakın ve uzak mesafeleri,  $\phi_{i,\min}$  ve  $\phi_{i,\max}$  ise, sırasıyla,  $u$ - ekseninden  $l_{i,\min}$  ve  $l_{i,\max}$ 'e olan açıyı belirtmektedir. Ayrıca  $a_i$ ,  $\rho$  noktasından  $i$ . doğru parçasının doğrultusuna olan dik uzaklığı belirtmektedir. Bu tanımlamalar ile birlikte,  $ct > d$  için yay uzunluğu

$$\alpha(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^3 \text{sgn}(\xi_i) \alpha_i(\zeta) \quad (2.37)$$

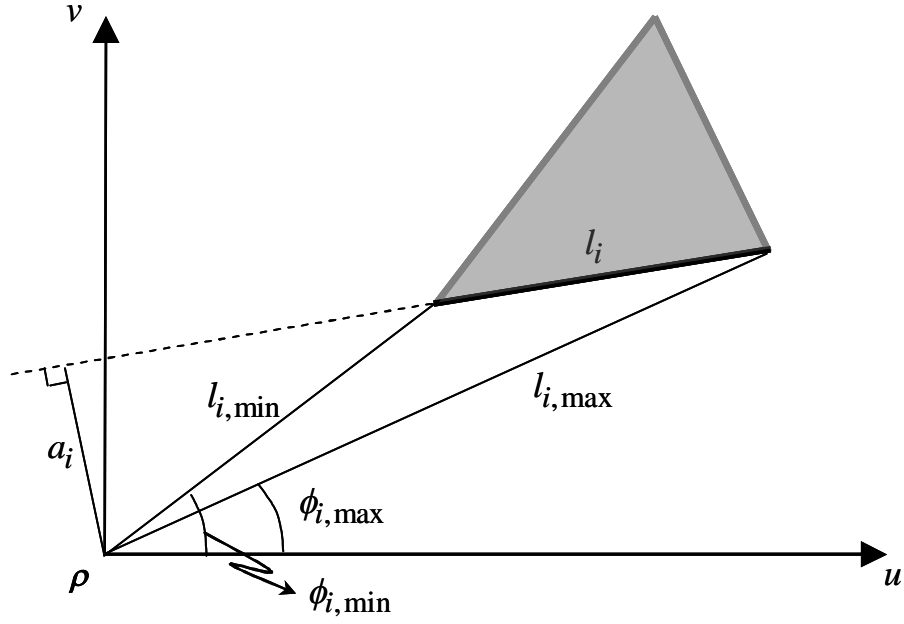
olarak yazılabilir. Burada  $\xi_i$ ,  $i=1,2,3$  olmak üzere,  $i$ . kenarın alan koordinatı ve  $\alpha_i(\zeta)$ ,  $\rho$  noktası ve üçgenin  $i$ . kenarı için yay uzunluğu fonksiyonudur.  $\zeta = \sqrt{R^2 - d^2}$ , yarı çapı  $R = ct$  olan küre ile  $S_n$  üçgen yüzeyini barındıran düzlemin kesişimi sonucu oluşan çemberin yarıçapıdır.  $ct < d$  iken, küre ile üçgen yüzeyi kesişmediği için  $\alpha(\mathbf{r}, t) = 0$ 'dır.  $ct > d$  için,  $\alpha_i(\zeta)$ 'nin belirlenmesinde  $i$ . kenarın ve  $\rho$  konumlarına bağlı olarak iki farklı durum ortaya çıkar. İlk durumda,  $l_{i,\max}^2 > l_{i,\min}^2 + l_i^2$  ise, tek bir yay oluşur ve  $\alpha_i(\zeta)$  aşağıdaki gibi verilir:

$$\alpha_i(\zeta) = \begin{cases} \cos^{-1}(a_i / l_{i,\max}) - \cos^{-1}(a_i / l_{i,\min}) & ; \zeta < l_{i,\min} \\ \cos^{-1}(a_i / l_{i,\max}) - \cos^{-1}(a_i / \zeta) & ; l_{i,\min} < \zeta < l_{i,\max} \\ 0 & ; l_{i,\max} < \zeta \end{cases} \quad (2.38)$$

İkinci durumda,  $l_{i,\max}^2 \leq l_{i,\min}^2 + l_i^2$  ise, iki yay oluşur, böylece  $\alpha_i(\zeta)$  bu iki yay uzunluğunun toplamı ile ifade edilir:

$$\alpha_i(\zeta) = \alpha_{i,\min}(\zeta) + \alpha_{i,\max}(\zeta). \quad (2.39)$$

Burada  $\alpha_{i,\min}(\zeta)$  ve  $\alpha_{i,\max}(\zeta)$ ,  $m \in \{\max, \min\}$  olmak üzere,



Şekil 2.4.  $i$ . kenar için geometrik parametrelerin tanımları.

$$\alpha_{i,m}(\zeta) = \begin{cases} \cos^{-1}(a_i / l_{i,m}) & ; \zeta < a_i \\ \cos^{-1}(a_i / l_{i,m}) - \cos^{-1}(a_i / \zeta); & a_i \leq \zeta < l_{i,m} \\ 0 & ; l_{i,m} < \zeta \end{cases} \quad (2.40)$$

olarak belirlenebilir.  $\alpha(\mathbf{r}, t)$ 'nin  $R$ 'ye göre türevi, aşağıdaki gibi belirlenebilir:

$$\partial_R \alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{\sqrt{\zeta^2 + d^2}}{\zeta} \sum_{i=1}^3 \text{sgn}(\xi_i) \partial_\zeta \alpha_i(\zeta). \quad (2.41)$$

Burada  $\partial_\zeta \alpha_i(\zeta)$ , denklemler (2.38)-(2.40)'ın türevleri alınarak belirlenebilir, bu

durumda  $l_{i,\max}^2 > l_{i,\min}^2 + l_i^2$  ise:

$$\partial_\zeta \alpha_i(\zeta) = \begin{cases} \frac{-a_i}{\zeta \sqrt{\zeta^2 - a_i^2}} & ; l_{i,\min} < \zeta < l_{i,\max} \\ 0 & ; \text{diğer} \end{cases} \quad (2.42)$$

$l_{i,\max}^2 \leq l_{i,\min}^2 + l_i^2$  ise:

$$\partial_\zeta \alpha_i(\zeta) = \partial_\zeta \alpha_{i,\max}(\zeta) + \partial_\zeta \alpha_{i,\min}(\zeta) \quad (2.43)$$

ve

$$\partial_{\zeta} \alpha_{i,m}(\zeta) = \begin{cases} \frac{-a_i}{\zeta \sqrt{\zeta^2 - a_i^2}} & ; a_i \leq \zeta < l_{i,m} \\ 0 & ; \text{diğer} \end{cases} . \quad (2.44)$$

Yay uzunluğu fonksiyonu  $\alpha(\mathbf{r}, t)$ , [30]'da detaylı olarak incelenmiştir. Bölüm 3'te anlatılacağı gibi,  $\alpha(\mathbf{r}, t)$ 'deki süreksizlikler MAİD'in tekil davranışında belirleyici bir role sahiptir.

Açıortay vektörü  $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\hat{\mathbf{u}}$  ve  $\hat{\mathbf{v}}$  yönlerinde bileşenlere sahiptir. [30]'da izlenen yol ile,  $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$ 'nin bileşenleri,  $e_u(\zeta)$  ve  $e_v(\zeta)$ ,  $R = ct$  yarıçaplı küre ile üçgen yüzeyinin kesişimi sonucu oluşan yayın  $u$  ve  $v$  eksenlerine izdüşümü aracılığıyla bulunabilir.  $R < d$  olduğunda  $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = 0$  olduğu açıktır, çünkü küre ile üçgen yüzeyini içeren düzlem kesişmezler.  $R \geq d$  ise,  $e_u(\zeta)$  ve  $e_v(\zeta)$ ,

$$e_u(\zeta) = \zeta \sum_{i=1}^3 \text{sgn}(\xi_i) e_{u,i}(\zeta), \quad (2.45)$$

$$e_v(\zeta) = \zeta \sum_{i=1}^3 \text{sgn}(\xi_i) e_{v,i}(\zeta) \quad (2.46)$$

olarak verilir. Burada  $e_{u,i}(\zeta)$  ve  $e_{v,i}(\zeta)$ , üçgenin  $i$ . kenarından gelen katkıları belirtmektedir.  $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$ 'nin  $R$ 'ye göre türevini bulmak için zincir kuralı kullanılırsa,  $\partial_R \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$ ,

$$\begin{aligned} \partial_R \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\sqrt{\zeta^2 + d^2}}{\zeta} \left[ \hat{\mathbf{u}} \partial_{\zeta} e_u(\zeta) - \hat{\mathbf{v}} \partial_{\zeta} e_v(\zeta) \right] \\ &= \left[ \hat{\mathbf{u}} \partial_{\zeta} e'_u(\zeta) - \hat{\mathbf{v}} \partial_{\zeta} e'_v(\zeta) \right] \end{aligned} \quad (2.47)$$

olarak bulunabilir. Denklem (2.47)'de,  $\partial_{\zeta} e'_u(\zeta)$  ve  $\partial_{\zeta} e'_v(\zeta)$ , aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\begin{aligned} \partial_{\zeta} e'_u(\zeta) &= \sum_{i=1}^3 \text{sgn}(\xi_i) \frac{\sqrt{\zeta^2 + d^2}}{\zeta} \left[ e_{u,i}(\zeta) + \zeta \partial_{\zeta} e_{u,i}(\zeta) \right] \\ &= \sum_{i=1}^3 \text{sgn}(\xi_i) \partial_{\zeta} e'_{u,i}(\zeta), \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned}
\partial_{\zeta} e'_{v,i}(\zeta) &= \sum_{i=1}^3 \operatorname{sgn}(\xi_i) \frac{\sqrt{\zeta^2 + d^2}}{\zeta} \left[ e_{v,i}(\zeta) + \zeta \partial_{\zeta} e_{v,i}(\zeta) \right] \\
&= \sum_{i=1}^3 \operatorname{sgn}(\xi_i) \partial_{\zeta} e'_{v,i}(\zeta).
\end{aligned} \tag{2.49}$$

$e_{u,i}(\zeta)$ ,  $e_{v,i}(\zeta)$ ,  $\partial_{\zeta} e'_{u,i}(\zeta)$  ve  $\partial_{\zeta} e'_{v,i}(\zeta)$ 'nin analitik ifadeleri Tablo 2.1'de verilmiştir. Tablo 2.1'de verilen ifadelerin türetilmesi [30]'da detaylı olarak açıklanmıştır. Tablo 2.1'de  $\chi$ ,  $\phi_{i,\max} - \phi_{i,\min}$  farkının  $[0, 2\pi)$  aralığında olduğu göz önünde bulundurularak,

$$\chi = \begin{cases} -1 & ; \phi_{i,\max} - \phi_{i,\min} > \pi \\ 1 & ; \phi_{i,\max} - \phi_{i,\min} < \pi \end{cases} \tag{2.50}$$

ile verilir. Tablo 2.1'de  $\beta_{i,m}^1 = a_i l_{i,m}^{-1} \cos(\phi_{i,m})$ ,  $\beta_{i,m}^2 = \sqrt{1 - a_i^2 l_{i,m}^{-2}} \cos(\phi_{i,m})$ ,  $\gamma_{i,m}^1 = a_i l_{i,m}^{-1} \sin(\phi_{i,m})$  ve  $\gamma_{i,m}^2 = \sqrt{1 - a_i^2 l_{i,m}^{-2}} \sin(\phi_{i,m})$  olarak tanımlanır.

Bölüm 2.3.1 göz önünde bulundurularak EAİD'in içerdiği anlık uyarılmış akımlardan dolayı oluşan elektrik alanın zamana göre davranışının, aşağıda verilen fonksiyonlar ile ilişkili olduğu görülür:

$$1, \sqrt{(ct)^2 - d^2}, \sqrt{(ct)^2 - d^2 - a_i^2} \text{ ve } \cos^{-1} \left( \frac{a_i}{\sqrt{(ct)^2 - d^2}} \right). \tag{2.51}$$

Benzer olarak MAİD'in içerdiği anlık uyarılmış akımlardan dolayı oluşan manyetik alanın zamana göre davranışı aşağıdaki fonksiyonlar gibidir:

$$\frac{1}{\sqrt{(ct)^2 - d^2}}, \frac{1}{\sqrt{(ct)^2 - d^2 - a_i^2}} \text{ ve } \frac{1}{\left[ (ct)^2 - d^2 \right] \sqrt{(ct)^2 - d^2 - a_i^2}}. \tag{2.52}$$

Anlık uyarılmış bir RWG fonksiyonundan ışılan alanların zaman bağımlılığı, denklem (2.51) ve (2.52)'de verilen fonksiyonlar ile belirlenir. ZAY'da akımların zamana göre değişimi, ötelenmiş ve katsayılar ile çarpılmış zamana göre temel fonksiyonların süperpozisyonu ile ifade edilir ve bu akımlardan oluşan alanlar, denklem (2.28), (2.29) ve (2.33)'teki anlık uyarılmış alanların analitik ifadesi ile

Tablo 2.1. Açığortay vektörü ve türevi için analitik ifadeler

Durumlar		Açığortay Vektörü ve Türevi			
	$e_{u,i}(\zeta)$	$e_{v,i}(\zeta)$	$\partial_{\zeta} e'_u(\zeta)$	$\partial_{\zeta} e'_v(\zeta)$	
$l_{i,\max}^2 > l_{i,\min}^2 + l_i^2$	$l_{i,\max}^2 \leq l_{i,\min}^2 + l_i^2$				
$\zeta < l_{i,\min}$	$\zeta < a_i$	$\chi \{ \sin(\phi_{i,\max}) - \sin(\phi_{i,\min}) \}$	$\chi \{ \cos(\phi_{i,\max}) - \cos(\phi_{i,\min}) \}$	$\frac{R}{\zeta} \chi \{ \cos(\phi_{i,\max}) - \cos(\phi_{i,\min}) \}$	
$l_{i,\min} < \zeta < l_{i,\max}$	$l_{i,\min} < \zeta < l_{i,\max}$	$\chi \sin(\phi_{i,\max})$ $+\frac{a_i}{\zeta} \{ -\chi \gamma_{i,\max}^1 + \beta_{i,\max}^2 \}$ $+\frac{\sqrt{\zeta^2 - a_i^2}}{\zeta} \{ -\chi \gamma_{i,\max}^2 - \beta_{i,\max}^1 \}$	$\chi \cos(\phi_{i,\max})$ $+\frac{a_i}{\zeta} \{ -\chi \beta_{i,\max}^1 - \gamma_{i,\max}^2 \}$ $+\frac{\sqrt{\zeta^2 - a_i^2}}{\zeta} \{ -\chi \beta_{i,\max}^2 + \gamma_{i,\max}^1 \}$	$\frac{R}{\sqrt{\zeta^2 - a_i^2}} \{ -\chi \beta_{i,\max}^2 + \gamma_{i,\max}^1 \}$ $+\frac{R}{\zeta} \chi \cos(\phi_{i,\max})$	
-----	$a_i < \zeta < l_{i,\min}$	$\chi \{ \sin(\phi_{i,\max}) - \sin(\phi_{i,\min}) \}$ $+\frac{a_i}{\zeta} \{ -\chi \gamma_{i,\max}^1 + \beta_{i,\max}^2 \}$ $+\chi \gamma_{i,\min}^1 + \beta_{i,\min}^2$ $+\frac{\sqrt{\zeta^2 - a_i^2}}{\zeta} \{ -\chi \gamma_{i,\max}^2 - \beta_{i,\max}^1 \}$ $+\chi \gamma_{i,\min}^2 - \beta_{i,\min}^1$	$\chi \{ \cos(\phi_{i,\max}) - \cos(\phi_{i,\min}) \}$ $+\frac{a_i}{\zeta} \{ -\chi \beta_{i,\max}^1 - \gamma_{i,\max}^2 \}$ $+\chi \beta_{i,\min}^1 - \gamma_{i,\min}^2$ $+\frac{\sqrt{\zeta^2 - a_i^2}}{\zeta} \{ -\chi \beta_{i,\max}^2 + \gamma_{i,\max}^1 \}$ $+\chi \beta_{i,\min}^2 + \gamma_{i,\min}^1$	$\frac{R}{\zeta} \chi \{ \cos(\phi_{i,\max}) - \cos(\phi_{i,\min}) \}$ $+\frac{R}{\sqrt{\zeta^2 - a_i^2}} \{ -\chi \beta_{i,\max}^2 + \gamma_{i,\max}^1 \}$ $+\chi \beta_{i,\min}^2 + \gamma_{i,\min}^1$	
$l_{i,\max} < \zeta$	$l_{i,\max} < \zeta$	0	0	0	

denklem (2.28), (2.29) ve (2.33)'teki anlık uyarılmış alanların analitik ifadesi ile zamana göre temel fonksiyonun konvolüsyon integrali hesaplanarak kolayca belirlenebilir. Bir sonraki bölümde zamana göre konvolüsyon işleminin analitik olarak belirlenmesi açıklanacaktır.

## 2.5. Konvolüsyon İşleminin Belirlenmesi

Önceki bölümlerde, anlık uyarılmış RWG temel fonksiyonundan dolayı oluşan elektrik ve manyetik alanların analitik ifadeleri gösterilmiştir. Bölüm 2.4'te verilen, uzaya göre temel fonksiyonlar üzerinden hesaplanan integrallerin zamana göre davranışları ile herhangi bir zamana göre temel fonksiyon  $T(t)$  için ZAY çözümleri üretilebilir.  $T(t)$  ile denklem (2.51) ve (2.52)'de verilen fonksiyonların zamana göre konvolüsyon integrallerinin hesaplanması çözüm için yeterlidir.

Bu bölümde sunulan yaklaşım, standart ZAY çözüm prosedüründen farklıdır. Standart ZAY çözümünde, zamana göre temel fonksiyon  $T(t)$  ile Green fonksiyonunun konvolüsyonu ilk olarak belirlenir. Bu işlem üç boyutlu zaman uzayı Green fonksiyonundaki Dirac delta fonksiyonundan dolayı kolaydır. Daha sonra uzaya göre temel fonksiyon üzerinden olan integral nümerik olarak hesaplanır. Geliştirilen yöntemde ise uzaya göre temel fonksiyon üzerinden olan integral Bölüm 2.4'te anlatıldığı gibi ilk olarak belirlenir. Daha sonra zamana göre konvolüsyon hesaplanır. Konvolüsyon işlemi  $T(t)$ 'ye bağlı olarak analitik veya nümerik olarak hesaplanabilir. [29] ve [31]'de gösterildiği gibi, zamana göre konvolüsyon işlemi nümerik olarak hesaplanırsa veya kesişim sonucu oluşan yay üzerinden integral nümerik hesaplanırsa bile önerilen yöntem ile elde edilen empedans matris elemanlarının, standart yaklaşım ile elde edilenlere göre daha doğru olacağı açıktır.  $T(t)$ 'nin seçimi izin verdiği sürece zamana göre konvolüsyonun analitik olarak belirlenmesi oluşabilecek tüm hataları en aza indirecektir ve önerilen yöntem ile yapılacak olan ZAY çözümünün daha kararlı ve doğru olması beklenmektedir.

Bu bölümde, EAİD'in içerdiği ikinci mertebeden türevden dolayı, [76]-[77]'de verilen, üçüncü dereceden parçalı-tanımlı polinom zamana göre temel fonksiyonlar kullanılacaktır:

$$T(t) = \begin{cases} 1 + \frac{11t}{6\Delta t} + \frac{t^2}{\Delta t^2} + \frac{t^3}{6\Delta t^3}, & -\Delta t \leq t \leq 0 \\ 1 + \frac{t}{2\Delta t} - \frac{t^2}{\Delta t^2} - \frac{t^3}{2\Delta t^3}, & 0 \leq t \leq \Delta t \\ 1 - \frac{t}{2\Delta t} - \frac{t^2}{\Delta t^2} + \frac{t^3}{2\Delta t^3}, & \Delta t \leq t \leq 2\Delta t \\ 1 - \frac{11t}{6\Delta t} + \frac{t^2}{\Delta t^2} - \frac{t^3}{6\Delta t^3}, & 2\Delta t \leq t \leq 3\Delta t \\ 0 & \text{diğer.} \end{cases} \quad (2.53)$$

Burada  $\Delta t$  zaman adımı büyüklüğüdür. Denklem (2.53)'te görüldüğü gibi, parçalı-tanımlı polinom fonksiyonlar, monomial fonksiyonların kombinasyonları olarak ifade edilebilirler:  $1$ ,  $t$ ,  $t^2$  ve  $t^3$ . Zamana göre konvolüsyon işlemini analitik olarak hesaplayabilmek için, denklem (2.51) ve (2.52)'de verilen fonksiyonlar ile monomial fonksiyonların konvolüsyonunun belirlenmesi gerekmektedir. Konvolüsyon integralinin sonucu, analitik olarak, [79] gibi standart integral tabloları kullanılarak belirlenebilir. Denklem (2.51) ve (2.52)'de verilen fonksiyonlar ile monomial fonksiyonların konvolüsyon integralleri için analitik ifadeler Ek D'de verilmiştir. Ek D'de verilen analitik ifadeler ile konvolüsyon integrali, ilgili fonksiyonların her zaman aralığı için ayrı olarak belirlenebilir. Ek D'de analitik ifadeler belirsiz integraller için verilmiştir. İntegral sınırları zamana göre temel fonksiyonun ve Tablo 2.1'de listelenen yay uzunluğu ve açı ortay vektörü fonksiyonlarının sınırları kullanılarak belirlenebilir. Örnek olarak Şekil 2.5'te, konvolüsyon integralinin sınırlarının belirlenmesinde oluşabilecek durumlar gösterilmiştir. Şekil 2.5'te, denklem (2.53)'te ilk satır ile verilen  $[-\Delta t, 0]$  aralığı için  $T(t)$  fonksiyonu ile denklem (2.38)'deki  $[l_{i,\min}, l_{i,\max}]$  aralığı için  $\alpha_i(\zeta)$  fonksiyonunun konvolüsyon integralinin sınırlarının belirlenmesi sırasında oluşabilecek durumlar gösterilmiştir. Şekil 2.5(a)'da denklem (2.53) ile verilen  $T(t)$ 'nin zamanla değişimi gösterilmiştir. Konvolüsyon işlemi uygulanacak olan aralık kırmızı ile gösterilmiştir. Şekil 2.5(b)'de denklem (2.38) ile verilen  $\alpha_i(\zeta)$ 'nin değişimi gösterilmiştir. Bölüm 2.4'te anlatıldığı gibi  $\alpha_i(\zeta)$ , zamanla değişen bir fonksiyondur. Bundan dolayı Şekil 2.5'te  $\alpha_i(t) = \alpha_i(\zeta)$  gösterimi kullanılmıştır.  $\alpha_i(t)$ 'nin zaman sınırları saniye türünden yazılabilir. Konvolüsyon işlemi gereğince  $T(t-\tau)$  ve  $\alpha_i(\tau)$  ifadeleri çarpılarak integrali hesaplanır. İntegral

sınırlarının belirlenmesinde altı farklı durum ortaya çıkar. Bu durumlar Şekil 2.5(c)-(h)'de gösterilmiştir. Şekil 2.5(c) ve Şekil 2.5(h), aralıkların kesişmediği durumlardır. Bu durumlarda konvolüsyon integrali sıfırdır. Şekil 2.5(d)-(g)'de ise integral sınırları kesişim bölgesini veren sınırlar ile belirlenir. Bu durumda alt ve üst sınırlar, sırasıyla,

$$\max \left\{ i\Delta t, \frac{R_{i,\min}}{c} \right\} \text{ ve } \min \left\{ (i+1)\Delta t, \frac{R_{i,\max}}{c} \right\} \quad (2.54)$$

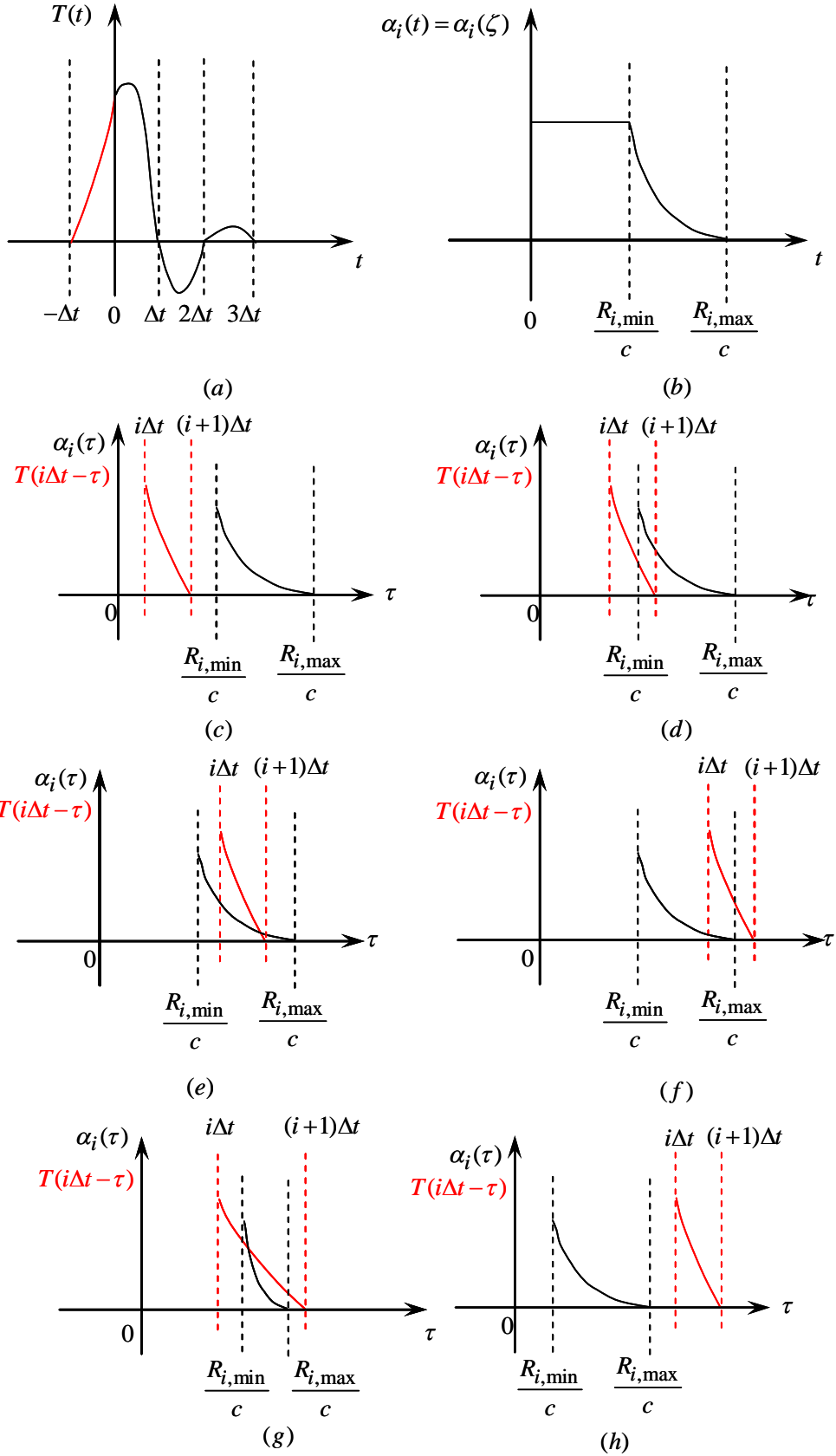
olarak bulunabilir.

## 2.6. Nümerik Örnekler

Bu bölümde, geliştirilen yöntemin doğruluğu nümerik örnekler aracılığıyla gösterilecektir. Tüm örneklerde, gelen alan, modüle edilmiş Gauss düzlemsel dalgası olarak seçildi:

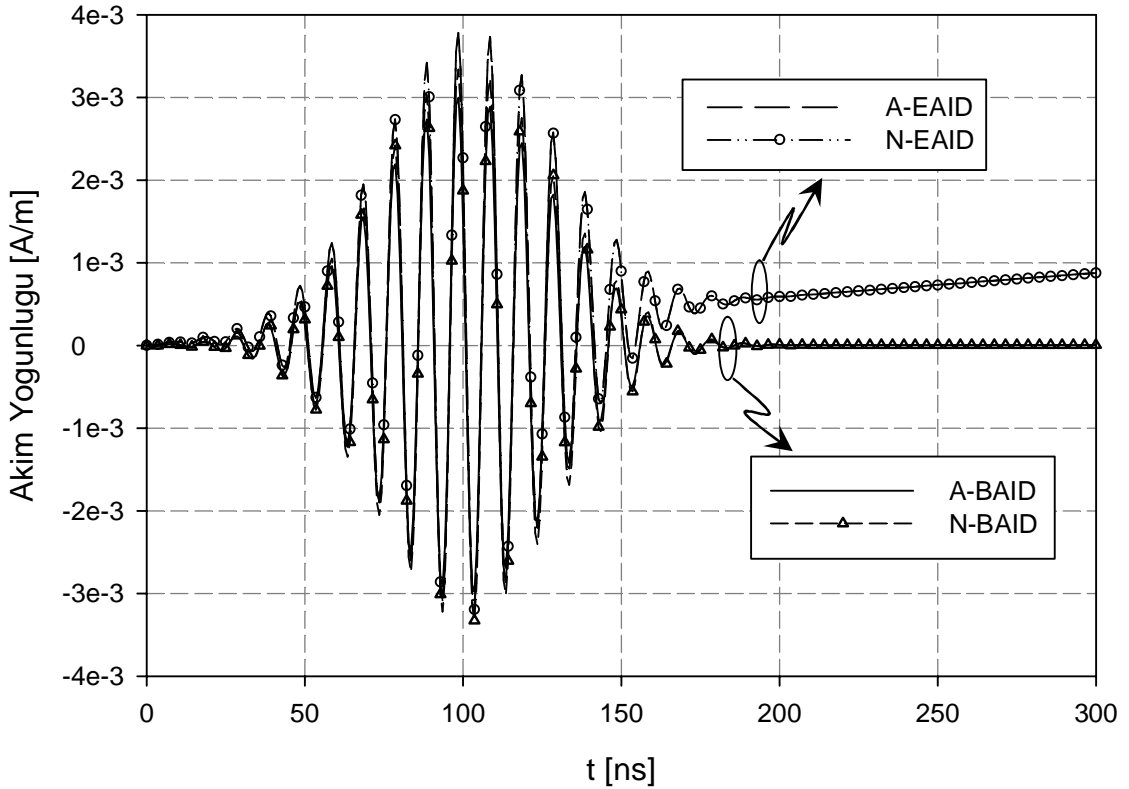
$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{p}} \cos \left[ 2\pi f_0 (t - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}} / c) \right] e^{-\frac{(t - t_p - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}} / c)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.55)$$

Burada  $f_0$  merkez frekansı,  $\hat{\mathbf{k}}$  ilerleme yönünü ve  $\hat{\mathbf{p}}$  polarizasyonu belirtmektedir.  $\sigma = 7 / (2\pi f_{bw})$ ,  $t_p = 3.5\sigma$  ve  $f_{bw}$  etkin bant genişliği olarak adlandırılacaktır. Tüm örneklerde, aksi belirtilmediği sürece, zaman adım büyüklüğü  $\Delta t = 0.1(f_0 + f_{bw})^{-1}$  olarak seçilmiştir. Uzaya göre olan tüm nümerik integraller, integral bölgesini oluşturan üçgenin kenar uzunluklarının gelen alanın minimum dalga boyundan çok küçük olan üçgenlere bölünmesiyle elde edilen alt-üçgenlere 7-noktalı Gauss integrali uygulanarak hesaplanmıştır. Standart (nümerik) ZAY algoritması ile EAİD'in matris elemanları elde edilirken, vektör ve skaler potansiyellerdeki tekillikler [80]'de verilen formüller aracılığıyla çıkartılmıştır. Şekillerde sunulan sonuçlarda, "A" bu tezde geliştirilen analitik ifadelerin kullanımına dayalı yöntem ile elde edilen sonuçları, "N" nümerik integral hesaplaması üzerine dayalı standart ZAY algoritması ile elde edilen sonuçları göstermek için kullanılmıştır.



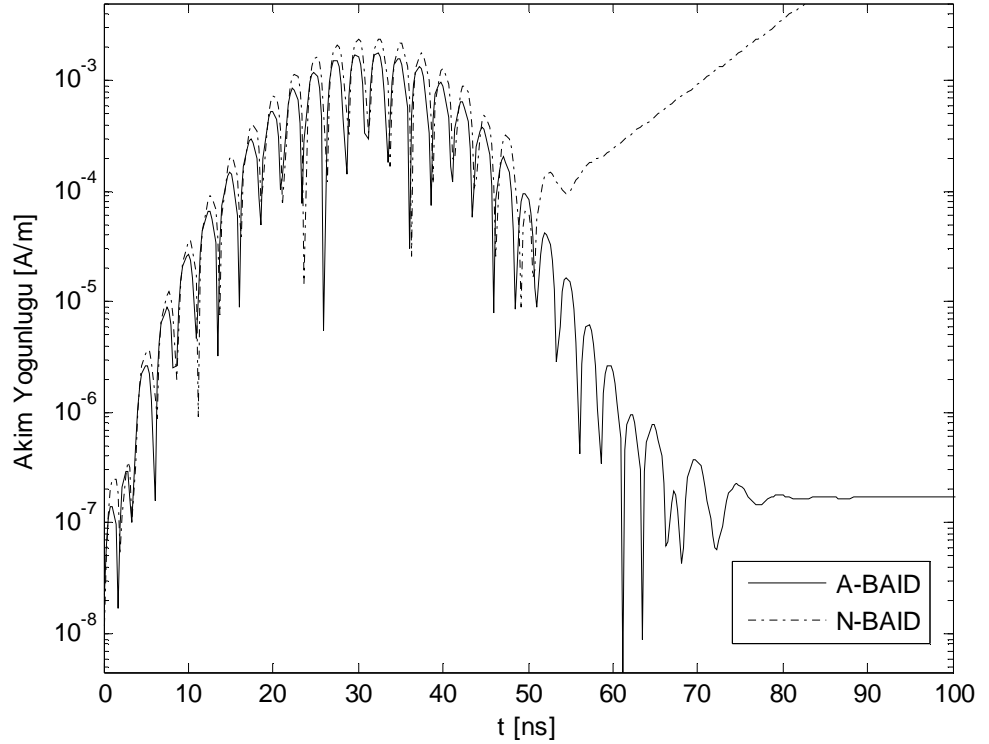
Şekil 2.5. Konvolüsyon integralinin sınırlarının belirlenmesi.

İlk örnekte,  $1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$  boyutlarına sahip 192 üçgen ile modellenmiş, birim küpten saçılma incelendi. Saçıcı,  $\hat{\mathbf{p}} = (1,0,0)$  polarizasyonu ile  $\hat{\mathbf{k}} = (0,0,-1)$  yönünde yayılan merkez frekansı  $f_0 = 100 \text{ MHz}$  ve bant genişliği  $f_{bw} = 40 \text{ MHz}$  olan alan ile aydınlatılmaktadır. Birim küpün ilk rezonans frekansı  $150 \text{ MHz}$ 'tedir ve verilen değerlerde, gelen alanın spekturumunun üst limiti  $140 \text{ MHz}$ 'tir. Böylece ZAY sonuçlarında iç rezonans problemi görülmemelidir. Şekil 2.6'da görüldüğü gibi analitik ve nümerik metotlar ile elde edilen EAİD ve BAİD çözümlerine ait akım yoğunlukları uyumludur. Bu örnek ile birlikte, Bölüm 2.3'te geliştirilen formülasyonun doğruluğu gösterilmiştir. Benzer örnekler artırılabilir. Beklendiği gibi, her iki EAİD sonucu zamanla lineer olarak artan bir davranış sergilemektedir. Bu istenmeyen etkinin sebebi ve çözümü Bölüm 4'te incelenecektir. Ayrıca, gelen alanın etkin bant genişliği birim küpün herhangi bir rezonans frekansını içermediğinden, sonuçlar salınarak artan bir davranış sergilememektedir. Sonraki örnekte gösterileceği gibi BAİD için standart ZAY algoritması, her zaman verimli (ve kararlı) sonuç üretmeyebilir.



Şekil 2.6. Küp üzerinde gözlenen akım.

İkinci örnek olarak, yüksekliği 0.0575 m ve maksimum genişliği 1.15 m olan ve 704 üçgen ile modellenmiş NASA bademi [81] analiz edildi. Gelen alanın özellikleri  $\hat{\mathbf{k}} = (-1, 0, 0)$ ,  $\hat{\mathbf{p}} = (0, 1, 0)$ ,  $f_0 = 200$  MHz ve  $f_{bw} = 150$  MHz olarak seçildi. Şekil 2.7’de görüldüğü gibi, BAİD sonuçları uyuşmamaktadır ve N-BAİD çözümü zamana göre eksponansiyel olarak artan bir davranış sergilemektedir. N-BAİD çözümünün kararsız olduğu göz önünde bulundurularak, A-BAİD çözümünün daha verimli olduğu sonucuna varılabilir ve böylelikle geliştirilen yöntemin kararsızlıklara daha az yatkın olduğu söylenebilir. Böylece Bölüm 2’de öne sürülen, elektrik ve manyetik alanların analitik ifadelerinin BAİD çözümünün verimini ve kararlılığını arttırdığı gösterildi.



Şekil 2.7. NASA bademi üzerinde gözlenen akım.

## 2.7. EAİD'in İncelenmesi

Bir önceki bölümde, potansiyellerin ve alanların analitik ifadelerinin BAİD'in ZAY çözümüne uygulanması ile elde edilen sonuçlar standart nümerik ZAY algoritması ile elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılarak doğrulanmıştır. Ayrıca, bir

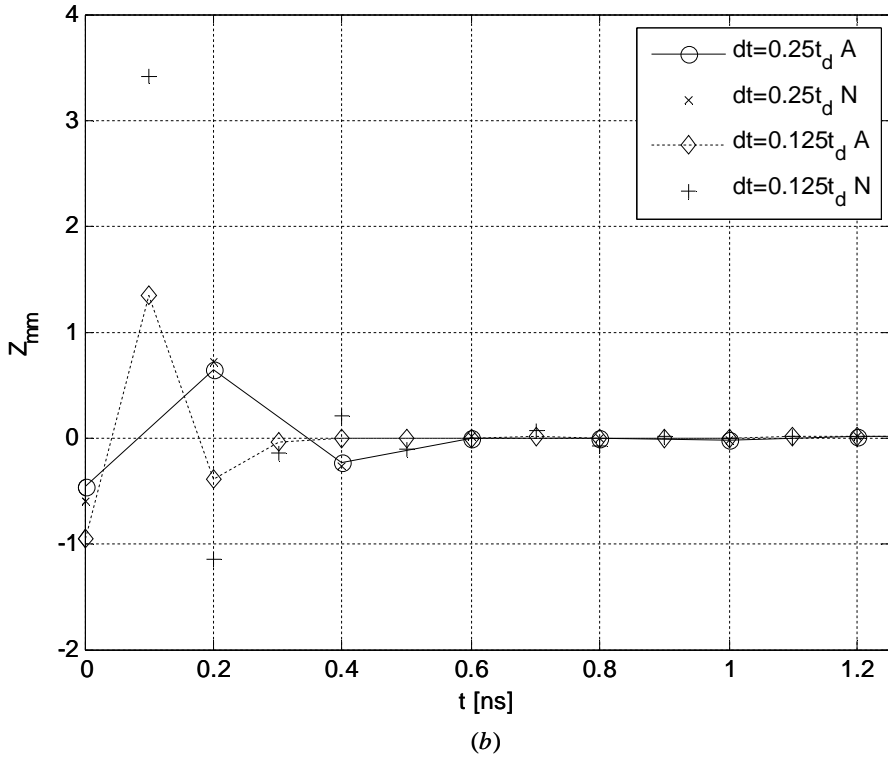
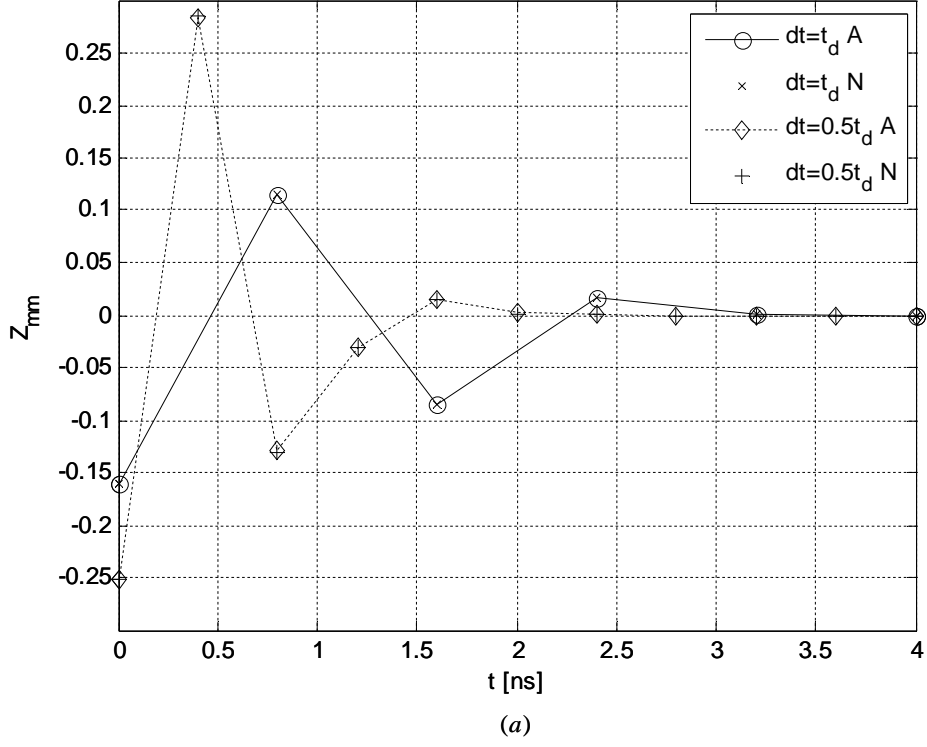
örnekle, literatürde bahsedildiği gibi (örneğin [30]) analitik ifadelerin kullanımının çözümün kararlılığına katkısı gösterilmiştir. Alanların analitik ifadeleri ile elektrik ve manyetik alanların zamana ve uzaya göre davranışlarının daha iyi anlaşıldığı ve incelenemediği bilinmektedir: Örneğin Bölüm 3'te gösterilecek olan zaman uzayı manyetik alanın tekilliğinin anlık uyarılmış RWG fonksiyonundan dolayı oluşan manyetik alanın analitik ifadesinden elde edilmesi gibi. Bu alt bölümün amacı analitik ifadelerin EAİD'in ZAY çözümünde kullanılması sonucu elde edilen gelişmeleri ve katkıları iki nümerik örnek aracılığıyla göstermektir. İlk örnekte matris elemanlarının zaman adımı büyüklüğüne bağımlılığı incelenmiştir. İkinci örnekte ise çözümün doğruluğunun artırılmasının kararlılığı garanti altına almadığı gösterilmiştir.

Zaman adım büyüklüğü  $\Delta t$  küçüldükçe, interpolasyon noktalarının artmasından dolayı, akım yoğunluğunun zamanda daha hatasız temsil edilmesi beklenir. ZAY matris elemanlarının zaman adımı büyüklüğüne göre yakınsaklığının incelenmesi amacıyla, 1 m yarıçaplı, 290 üçgen ile ayrıklaştırılmış, küreden saçılma incelendi. EAİD'in iç-rezonans probleminin sonuçları etkilenmemesi için gelen alanın özellikleri,  $f_0 = 75$  MHz ve  $f_{bw} = 50$  MHz olarak seçildi. Böylece gelen alanın etkin bandı kürenin rezonans frekanslarını içermez. Gelen alanın diğer özellikleri önceki bölümdeki ilk örnek ile aynıdır. Şekil 2.8'de, EAİD'in empedans matrisinin köşegen elemanlarından birinin zamana göre değişimi farklı zaman adımı büyüklükleri için gösterilmiştir. Referans değeri olarak  $\Delta t = t_d = 0.1(f_0 + f_{bw})^{-1}$  seçilmiştir. Beklenenin aksine, Şekil 2.8'de görüldüğü gibi, zaman adım büyüklüğü azaldıkça standart nümerik yöntem ile elde edilen matris elemanları ve analitik yöntem kullanılarak elde edilen matris elemanları farklılaşmaktadır. Bu farklılaşma temel olarak zamana göre temel fonksiyonlardaki süreksizliklerden ve uzaya göre integrallerin nümerik veriminden kaynaklanmaktadır. Şekil 2.9'da, farklı zaman adım büyüklüğü ile elde edilmiş çözümler gösterilmektedir. (Daha önce bahsedildiği gibi EAİD çözümleri lineer bir bileşen ile bozulur. Çözümdeki lineer katkının artış oranı farklı zaman adımları için farklıdır. Bundan dolayı lineer bileşenin giderilmesi ve mantıklı bir karşılaştırma yapılabilmesi için, bu örnekte EAİD sonuçları elde edilirken, Bölüm 4'te anlatılacak olan, birinci mertebeden formülasyon (BMF) kullanılmıştır. BMF'in kullanılması ZAY matrisi elemanlarına etki etmemektedir.)

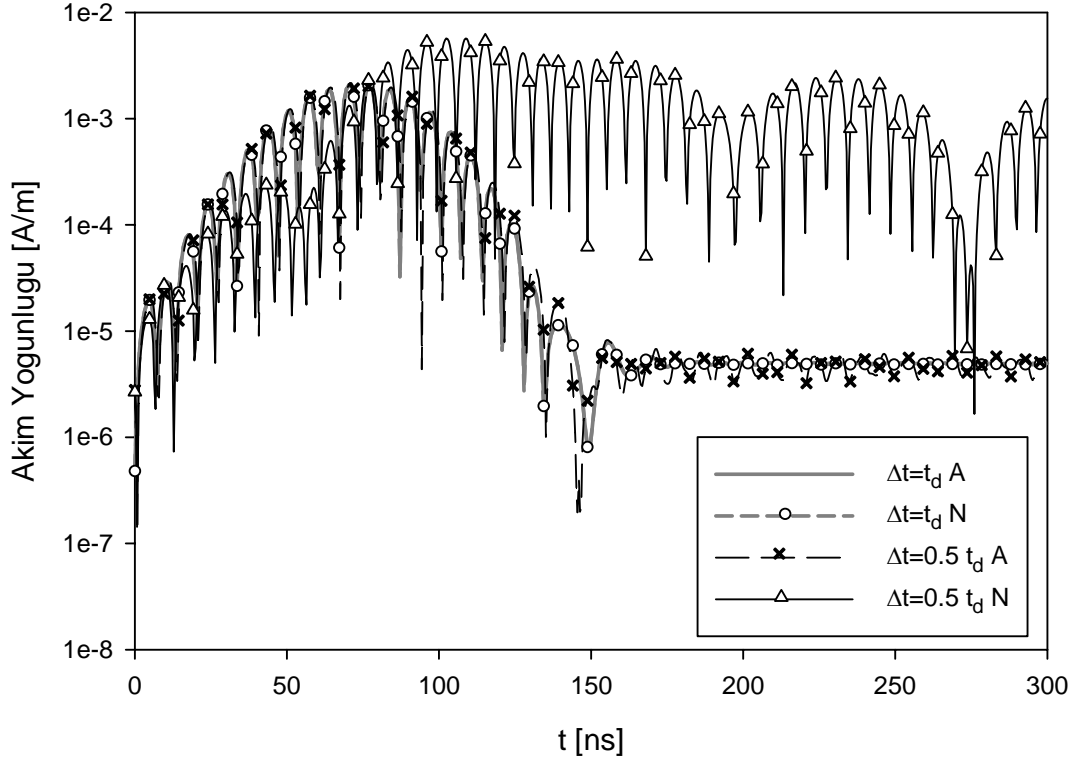
Şekil 2.9’da görüldüğü gibi,  $\Delta t = t_d$  iken nümerik ve analitik yöntem ile elde edilen sonuçlar uyum içerisindedir. Ancak, zaman adım büyüklüğü  $\Delta t = 0.5t_d$ ’ye düşürüldüğünde, N-EAİD çözümü salınan bir davranış sergilemektedir ve çözüm hatalıdır. Diğer taraftan,  $0.5t_d$  için A-EAİD çözümü, hala doğrudur ve zaman adımı büyüklüğü  $t_d$  için elde edilen sonuçlar ile uyuşmaktadır.

İkinci örnekte önceki örnekteki özelliklere sahip küreden olan saçılma incelendi. Gelen alanın frekans özellikleri  $f_0 = 200$  MHz ve  $f_{bw} = 150$  MHz dışında önceki örnek ile aynıdır. Gelen alanın kürenin bazı rezonans frekanslarını içermektedir. Seçilen parametreler ve saçıcı için standart EAİD (N-EAİD) çözümünün verimli olmadığı, yakınsamadığı ve iç-rezonans probleminden dolayı bozulduğu bilinmektedir [22]. N-EAİD sonucunun Fourier dönüşümü alındığında baskın frekansların kürenin rezonans frekansları olduğu rahatlıkla görülebilir. Akım yoğunluğuna ilişkin rastgele seçilen bir katsayı Şekil 2.10’da gösterilmiştir. Şekil 2.10’da görüldüğü gibi iki EAİD çözümü de bozulmaktadır. Ancak A-EAİD çözümü, N-EAİD çözümünden oldukça farklı bir davranış sergilemektedir. Şekil 2.10 iki parça halinde değerlendirilebilir:  $t < 55$  ns ile verilen “temel bölge” ve 55 ns’den sonra kalan “artık bölge.” Şekil 2.10’da görüldüğü gibi, BAİD çözümleri, temel bölgede ayrılmayacak şekilde uyumludur. Ancak A-EAİD sonucu, BAİD sonuçlarını  $t = 55$ ’ye kadar yakın bir şekilde takip etse de, daha sonra kararsız bir davranış sergilemektedir. A-EAİD’deki kararsızlık, hem iç rezonans probleminden hem de EAİD’in kötü-huyly yapısından kaynaklanmaktadır [25], [27]. EAİD’in kötü huyly yapısı, matris elemanlarındaki küçük bir hatanın sonucu aşırı derecede etkilenmesine sebep olmaktadır. Empedans matrisi belirlenirken analitik ifadeler kullanılmasına karşın test integralinin nümerik hesaplandığı unutulmamalıdır. Diğer taraftan N-EAİD sonucu, artık bölgede kararsız bir davranış göstermese de temel bölgedeki sonuçlar BAİD sonuçlarından çok farklıdır. Uzaya göre integraller hesaplanırken daha fazla örnek noktası kullanılması N-EAİD sonucunun davranışını değiştirmemektedir. Diğer bir değişle integral bölgesindeki örnek sayısı ne kadar arttırılırsa arttırılsın N-EAİD sonucu BAİD sonucuna yakınsamamaktadır. Bu sonuç, analitik formüllerin kullanımının EAİD çözümlerinin doğruluğunu (veya yakınsaklığını) arttırdığını göstermektedir. Ancak hem yakınsayan hem de kararlı bir

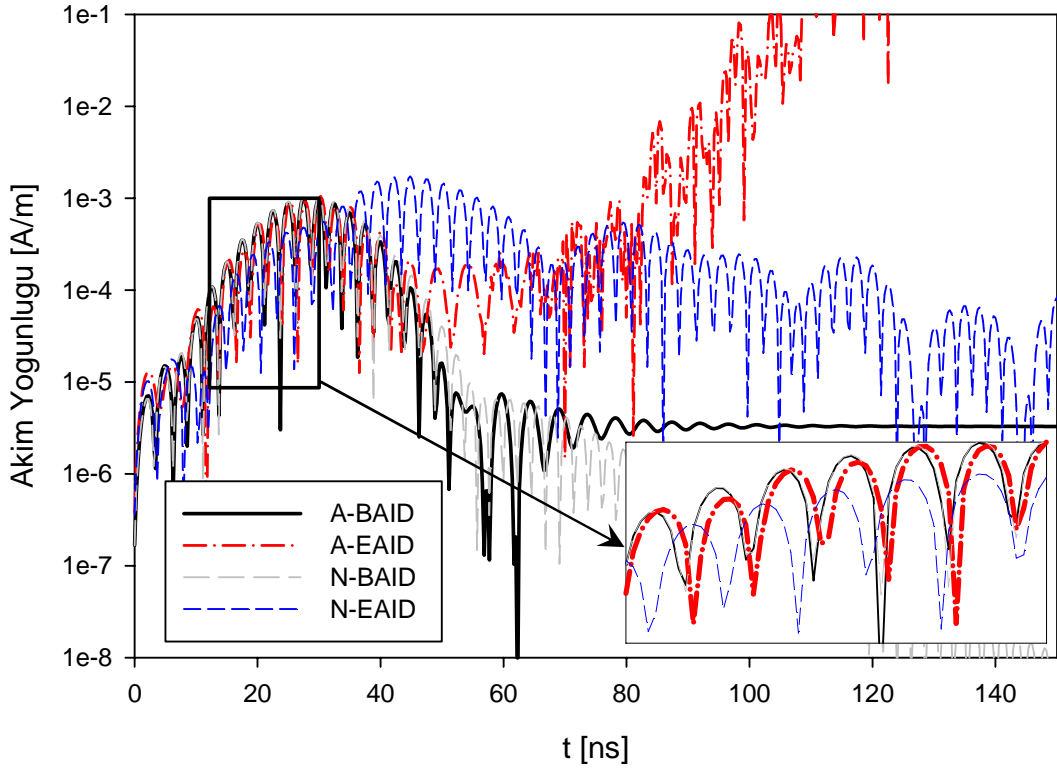
çözüm için matris elemanlarının tamamen (test integralinin de) analitik olarak belirlenmesi ile elde edilebilir.



Şekil 2.8. EAİD'in empedans matris elemanının zamana göre değişimi.



Şekil 2.9. Farklı zaman adımı büyüklüğü için EAİD çözümleri.



Şekil 2.10. Küre üzerinde gözlenen akımlar.

## 2.8. Sonuçlar

Bölüm 2’de, zamanda gecikmeli potansiyellerin ve alanların analitik ifadelerinin EAİD ve BAİD’in ZAY çözümlerine uygulaması gösterilmiştir. Geliştirilen ve uygulanan algoritmayı açıklamak için, ilk olarak, anlık uyarılmış RWG fonksiyonlarından dolayı oluşan elektrik ve manyetik alanların analitik ifadeleri uygulamada kullanıldıkları halleri ile sunulmuştur. Nümerik sonuçlarda, sunulan yöntemin faydaları gösterilmiştir. Analitik ifadelerin kullanımı ile BAİD sonuçlarının kararsızlıklara daha az duyarlı olduğu gösterilmiştir. BAİD çözümlerinin kararlılığının artırılmasının gösterilmesi bu bölümün temel amacıdır. Bunlara ek olarak analitik ifadelerin kullanımının EAİD’in çözümlerine etkisi ve farklı zaman adımları için çözümlerin yakınsaklığı incelenmiştir. Analitik ifadeler kullanılarak elde edilen EAİD çözümünün zaman adımı küçüldükçe kararlı ve yakınsak sonuçlar verdiği, bunun aksine standart nümerik çözümün kararlı olmasına rağmen yakınsaklığın kaybedildiği gösterilmiştir. Ayrıca analitik ifadelerinin kullanılmasıyla EAİD’in yakınsaklığının artırıldığı ancak kararlılığın her zaman sağlanamadığı gösterilmiştir. EAİD’in matris elemanlarının tamamen analitik olarak belirlenmesi ile hem kararlı hem de yakınsak bir çözüm edilebileceği öngörülmektedir.

### 3. MANYETİK ALANIN TEKİLLİĞİ

Bu bölümde, anlık uyarılmış RWG temel fonksiyonundan dolayı oluşan manyetik alanın analitik ifadesi kullanılarak, manyetik alanın tekilliği için genel bir form geliştirilecektir. Var olan çalışmaların aksine, tekil ifadenin elde edilmesi tamamen zaman uzayında, herhangi bir yaklaşıklık veya limit işlemi yapılmaksızın gerçekleştirilecektir. Sonuçta elde edilecek ifadeler yay uzunluğu ve açığortay vektörü fonksiyonlarını içermektedir ve yarım faktörünün gözlemci noktası üçgen üzerinde olduğu durumda ortaya çıktığı gösterilecektir. Benzer olarak gözlem noktası üçgenin kenarlarında iken katsayımın değişimi gösterilecektir.

#### 3.1. Manyetik Alanın Tekilliği

MAİD, kapalı mükemmel iletken yüzeyler için sağlanması gereken sınır koşulundan çıkartılabilir. Mükemmel iletken yüzeyler için sınır koşulu

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) - \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^s(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{r} \in S \quad (3.1)$$

olarak verilebilir. Burada  $\mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t)$  ve  $\mathbf{H}^s(\mathbf{r}, t)$ , sırasıyla, gelen ve saçılan manyetik alanlardır,  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  saçıcı yüzeyi  $S$  üzerine indüklenen akım yoğunluğudur,  $\hat{\mathbf{n}}$  dışarı doğru yönelmiş birim normal vektördür. MAİD denklem (3.1)'de, kaynağı indüklenen akımlar olan saçılan manyetik alanın ifadesi yazılarak elde edilebilir:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) - \hat{\mathbf{n}} \times \int_S \nabla \times \left[ \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) * \frac{\delta(t - R/c)}{4\pi R} \right] d\mathbf{r}'. \quad (3.2)$$

Burada  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  gözlem noktası  $\mathbf{r}$  ve kaynak noktası  $\mathbf{r}'$  arasındaki uzaklıktır. Denklem (3.2)'nin frekans uzayı karşılığında, manyetik alan integrali Cauchy Asıl Değeri (*Cauchy Principle Value*) olarak incelenir:  $R \rightarrow 0$  için tekillik çıkartımı yapılır ve en regüler parçanın değerlendirilmesi sonucu, sabit bir faktör ile akım yoğunluğu ortaya çıkar. Bu sabit faktör, zaman uzayında Dirac delta fonksiyonu olarak kendini gösterir, diğer bir değişle zaman uzayında en regüler parça Dirac delta fonksiyonu olarak elde edilebilir. Bu bölümde, Dirac delta terimi zaman uzayında doğrudan, herhangi bir yaklaşıklık yapılmadan elde edilecektir. Bölüm 2.3.2'de

verilen manyetik alanın analitik ifadeleri kullanılarak, denklem (3.2) için ZAY denklem sisteminin bir matris elemanı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Z_{mn,ji}^H = \int_{S_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) T_i(t_j) d\mathbf{r} - \int_{S_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \times [T_i(t) * \mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)]_{t=t_j} d\mathbf{r}. \quad (3.3)$$

Burada  $T_i(t)$  zamana göre temel fonksiyon ve  $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$  anlık uyarılmış RWG fonksiyonunun oluşturduğu manyetik alandır:

$$\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t) = \int_{S_n} \nabla \times \left[ \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \frac{\delta(t - R/c)}{4\pi R} \right] d\mathbf{r}'. \quad (3.4)$$

Burada  $\mathbf{f}_n(\mathbf{r}) = \mathbf{f}_n^+(\mathbf{r}) + \mathbf{f}_n^-(\mathbf{r})$  Şekil 2.2'de verildiği gibi RWG fonksiyonunu belirtmektedir [49]. RWG fonksiyonu denklem (2.23)'te verilmiştir. Denklem (3.4)'te verilen integral  $S_n^+$  ve  $S_n^-$  üçgenleri üzerinden integrallerin toplamı olarak yazılabilir. Şekil 2.3'teki tanımlar kullanılarak,  $\mathbf{H}_n^\pm(\mathbf{r}, t)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_n^\pm(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mp l_n}{8\pi A_n^\pm} \int_{S_n^\pm} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_n^\pm) \times \frac{\mathbf{R}}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{\delta(t - R/c)}{R} \right] dS' \\ &= \frac{\mp l_n c}{8\pi A_n^\pm} \int_{S_n^\pm} [(\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}) + (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n^\pm)] \\ &\quad \times [(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') + \hat{\mathbf{n}} d^\pm] \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{\delta(ct - R)}{R} \right] dS' \\ &= \mp \frac{l_n c}{8\pi A_n^\pm} (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n^\pm) \times (\hat{\mathbf{n}} d^\pm) V_1^\pm(\mathbf{r}, t) \\ &\quad \pm \frac{l_n c}{8\pi A_n^\pm} (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n^\pm + \hat{\mathbf{n}} d^\pm) \times \mathbf{V}_2^\pm(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

olarak yazılabilir. Burada  $V_1^\pm(\mathbf{r}, t)$  ve  $\mathbf{V}_2^\pm(\mathbf{r}, t)$  aşağıdaki gibi tanımlanırlar:

$$V_1^\pm(\mathbf{r}, t) = \int_{S_n^\pm} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{\delta(ct - R)}{R} \right] dS' = -R^{-1} \partial_R \alpha^\pm(\mathbf{r}, t) \Big|_{R=ct}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{V}_2^\pm(\mathbf{r}, t) = \int_{S_n^\pm} (\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}) \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{\delta(ct - R)}{R} \right] dS' = -R^{-1} \partial_R \mathbf{e}^\pm(\mathbf{r}, t) \Big|_{R=ct}. \quad (3.7)$$

Denklem (3.6) ve (3.7)'de  $\alpha^\pm(\mathbf{r}, t)$  ve  $\mathbf{e}^\pm(\mathbf{r}, t)$ , sırasıyla, yay uzunluğu ve açı ortay vektörü fonksiyonlarını,  $\partial_R$ ,  $R$ 'ye göre kısmi türevi göstermektedir.  $V_1(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{V}_2(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\alpha(\mathbf{r}, t)$ ,  $\partial_R \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$  ve  $\partial_R \alpha(\mathbf{r}, t)$ 'nin belirlenmesi Bölüm 2'de detaylı olarak açıklanmıştır. Bölüm 2.4'te belirtildiği gibi, eğer gözlem noktasının üçgeni barındıran düzleme izdüşümü ( $\boldsymbol{\rho}$ ),  $S_n$  üçgen yüzeyinin içinde ise, diğer bir deyişle izdüşüm noktasının tüm alan koordinatları pozitifse, manyetik alan ifadesindeki yay uzunluğu fonksiyonunda  $\alpha(\mathbf{r}, t)$ ,  $t = d/c$  anında süreksizlik oluşur. Bu süreksizlik denklem (3.5)'teki  $V_1(\mathbf{r}, t)$ 'yi etkiler ve  $R$ 'ye göre türev hesaplanırken Dirac delta fonksiyonu oluşmasına neden olur. Böylece  $V_1(\mathbf{r}, t)$  aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$V_1(\mathbf{r}, t) = \left[ \left\{ -\frac{\partial_R \alpha(\mathbf{r}, t)}{ct} \right\} - \frac{\Delta \alpha(\mathbf{r}, t)}{ct} \delta(ct - d) \right]_{R=ct} \quad (3.8)$$

Burada parantez içerisindeki terim  $V_1(\mathbf{r}, t)$ 'nin regüler kısmını belirtmektedir ve denklemin geri kalanı yay uzunluğu fonksiyonu  $\alpha(\mathbf{r}, t)$ 'nin süreksizliğinden dolayı ortaya çıkan tekil kısımdır; son olarak  $\Delta \alpha(\mathbf{r}, t) = \alpha(\mathbf{r}, t^+) - \alpha(\mathbf{r}, t^-)$   $t^\pm = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} t \pm \varepsilon$  olarak tanımlanır.  $\alpha(\mathbf{r}, t)$ 'nin aksine  $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$ 'de süreksizlik yoktur ve bunun sonucu olarak  $\mathbf{V}_2(\mathbf{r}, t)$ 'de Dirac delta fonksiyonu görülmez. Manyetik alanın analitik ifadesini kullanarak RWG temel fonksiyonundan oluşacak olan tekil terimi göstermek amacıyla,  $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$ 'nin  $\hat{\mathbf{n}}$  ile vektör çarpımı incelenmelidir. Kolaylık için  $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_{1R}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}_{1D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}_2(\mathbf{r}, t)$  açılımı kullanılırsa:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{1R}(\mathbf{r}, t) &= \frac{-l_n c}{8\pi A_n} \hat{\mathbf{n}} \times [(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n) \times (\hat{\mathbf{n}}' d)] \\ &\quad \left\{ -R^{-1} \partial_R \alpha(R) \Big|_{R=ct} \right\}, \\ &= \{(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n) [\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}'] - \hat{\mathbf{n}}' [\hat{\mathbf{n}} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n)]\} \\ &\quad \frac{l_n c d}{8\pi A_n} \left\{ R^{-1} \partial_R \alpha(R) \Big|_{R=ct} \right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_{1D}(\mathbf{r}, t) &= \frac{-l_n c}{8\pi A_n} \hat{\mathbf{n}} \times [(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n) \times (\hat{\mathbf{n}}' d)] \\
&\quad \left\{ -\frac{\Delta\alpha(R)}{R} \Big|_{R=ct} \delta(ct - d) \right\}, \\
&= \{(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n)[\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}'] - \hat{\mathbf{n}}'[\hat{\mathbf{n}} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n)]\} \\
&\quad \frac{l_n c d}{8\pi A_n} \frac{\Delta\alpha(R)}{R} \Big|_{R=ct} \delta(ct - d)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_2(\mathbf{r}, t) &= \frac{l_n c}{8\pi A_n} \hat{\mathbf{n}} \times [(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n + \hat{\mathbf{n}}' d) \times \mathbf{V}_2(\mathbf{r}, t)] \\
&= \frac{l_n c}{8\pi A_n} (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n + \hat{\mathbf{n}}' d) [\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V}_2(\mathbf{r}, t)] \\
&\quad - \frac{l_n c}{8\pi A_n} \mathbf{V}_2(\mathbf{r}, t) [\hat{\mathbf{n}} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n + \hat{\mathbf{n}}' d)]
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Burada  $\alpha(R) = \alpha(\mathbf{r}, t)$ 'dir. İndisler 1R, 1D ve 2, sırasıyla,  $V_1(\mathbf{r}, t)$ 'nin regüler kısmının katkısını,  $V_1(\mathbf{r}, t)$ 'nin irregüler kısmının katkısını ve  $\mathbf{V}_2(\mathbf{r}, t)$ 'nin katkısını göstermektedir.

ZAY'da ayrıklaştırılmış akım yoğunluğundan dolayı oluşan manyetik alan denklem (3.3)'teki gibi test edilir. Test işleminde, test ve uzaya göre temel fonksiyonlar kesişirse, öz-terim (*self-term*) integrali [82] hesaplanması gereklidir. Bu durumda, gözlem ve kaynak noktalarına ait normal vektörler aynıdır ( $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}'$ ). Gözlem noktasının üçgen düzlemine uzaklığı sıfırdır ( $d = 0$ ), dolayısıyla  $\mathbf{H}_{1R}(\mathbf{r}, t) = 0$ 'dır. Ayrıca  $\mathbf{H}_2(\mathbf{r}, t) = 0$ 'dır, çünkü  $\mathbf{V}_2(\mathbf{r}, t)$ 'nin yönü  $\hat{\mathbf{n}}$ 'ye diktir.  $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)$ 'a tek katkı, irregüler terim olan  $\mathbf{H}_{1D}(\mathbf{r}, t)$ 'den gelir. Öz-terim testi durumunda, denklem (3.10)'da  $\hat{\mathbf{n}} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n) = 0$  ve  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}' = 1$ 'dir. Dirac delta fonksiyonunun Ek A'da verilen (A.1) ve (A.2) özelliklerinden yararlanarak denklem (3.10) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_{1D}(\mathbf{r}, t) &= (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n) \frac{l_n c d}{8\pi A_n} \frac{\Delta\alpha(ct)}{ct} \delta(ct - d) \\
&= (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n) \frac{l_n d}{8\pi A_n} \frac{\Delta\alpha(ct)}{t} \Big|_{ct=d} \delta(ct - d) \\
&= (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n) \frac{l_n}{8\pi A_n} \Delta\alpha(d) \delta(t - d/c) \\
&= \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) \frac{\Delta\alpha(d)}{4\pi} \delta(t - d/c).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$d = 0$  iken denklem (3.12),

$$\mathbf{H}_{1D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) \frac{\Delta\alpha(0)}{4\pi} \delta(t) \tag{3.13}$$

halini alır. Böylece denklem (3.13) ile, yarım faktörünün çıktığı Dirac delta terimi, denklem (3.5) ile verilen anlık uyarılmış manyetik alanın analitik ifadesinden elde edilir. Denklem (3.13)'te  $\Delta\alpha(0) = \alpha(0^+)$ 'dır, çünkü  $t < 0$  için nedensellik şartından dolayı  $\alpha(ct) = 0$ 'dır.  $\alpha(0^+)$  gözlem noktasının üçgen içerisindeki konumuna göre farklı değerler alır.  $n$ . temel fonksiyondan dolayı oluşan manyetik alan aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$T_i(t) * \mathbf{H}_{1D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) \frac{\Delta\alpha(0)}{4\pi} T_i(t). \tag{3.14}$$

Bu durumda, denklem (3.2) ile verilen MAİD ile uyumlu olarak ve denklem (3.10) kullanılarak, öz-terim üçgeninde bulunan gözlem noktasındaki (gözlem noktası temel fonksiyon üçgeni üzerinde ise) akım yoğunluğu

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_n(\mathbf{r}, t_j) &= \left[ \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) T_i(t_j) - \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) \frac{\Delta\alpha(0)}{4\pi} T_i(t_j) \right] \\
&= \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) T_i(t_j) \left[ 1 - \frac{\Delta\alpha(0)}{4\pi} \right]
\end{aligned} \tag{3.15}$$

olarak yazılabilir. Şekil 3.1(a)'da görüldüğü gibi, eğer gözlem noktası üçgenin içerisinde ise, diğer bir deyişle tüm alan koordinatları sıfırdan büyük ise,  $\alpha(0^+)$ 'nin sonucu  $2\pi$  çıkar ve gözlem noktasındaki akım yoğunluğu, sıkça kullanılan düzgün yüzeyler için zaman uzayı MAİD'in yarım faktörü;

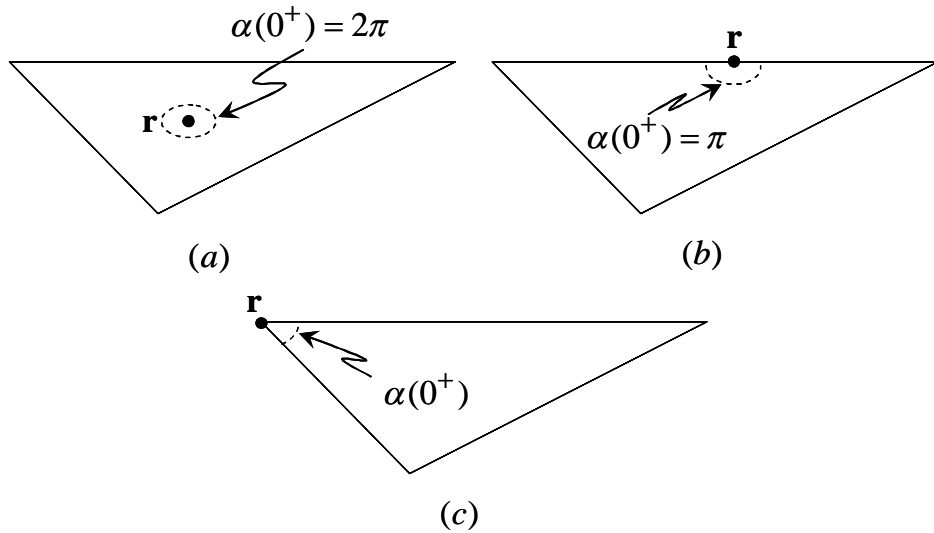
$$\mathbf{J}_n(\mathbf{r}, t_j) = \frac{1}{2} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) T_i(t_j) \quad (3.16)$$

olarak bulunur. Gözlem noktası üçgenin kenarlarından biri üzerinde ise (alan koordinatlarından biri sıfırsa), Şekil 3.1(b)'de görüldüğü gibi,  $\alpha(0^+)$ ,  $\pi$  olarak bulunur ve akım yoğunluğu

$$\mathbf{J}_n(\mathbf{r}, t_j) = \frac{3}{4} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) T_i(t_j) \quad (3.17)$$

halini alır. Son durum, gözlem noktasının köşelerden biri üzerinde bulunduğu durumdur (iki alan koordinatının sıfır olduğu durum). Şekil 3.1(c)'de görüldüğü gibi,  $\alpha(0^+)$  köşenin gördüğü iç açıya eşittir.

Denklem (3.10)'da görüldüğü gibi, irregüler katkı, yay uzunluğu fonksiyonunda süreksizlik olduğu sürece vardır. Diğer bir deyişle  $\mathbf{H}_{1D}(\mathbf{r}, t)$  terimi,  $d = 0$  veya  $d \neq 0$  olma durumundan bağımsız olarak yay uzunluğu fonksiyonu süreksizlik içerdiği sürece ortaya çıkar. Eğer  $d \neq 0$  ise, Dirac delta fonksiyonunun argümanına zamanda gecikme eklenir. Sonuçta bu gecikme zamana göre temel fonksiyonda  $T_i(t - d/c)$  olarak görülür.



Şekil 3.1. Gözlem noktasının  $\mathbf{r}$  konumuna göre tekil kısmın katkısı.

Diğer bir durum test ve temel fonksiyon üçgenleri farklı olduğu ancak ortak kenara sahip komşu üçgenler iken ortaya çıkar. Bu durum komşu testi (*neighbor-*

*testing*) olarak adlandırılır [83]. Bu durumda yay uzunluğu fonksiyonundaki süreksizlik sadece gözlem noktası ortak kenar üzerindeyken gözlenir. Gözlem noktası kaynak üçgenin kenarı üzerinde olduğunda, daha önce bahsedildiği gibi  $d = 0$ 'dır ve alan koordinatlarından biri sıfırdır. Ne yazık ki, bu durumda test ve temel fonksiyonun komşu üçgenlerinin normal vektörleri aynı yönde olmazlar. Sonuç olarak  $\hat{\mathbf{n}} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n) \neq 0$  ve  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}' \neq 1$ 'dir. Öz-terim durumundaki gibi, yay uzunluğu fonksiyonundaki süreksizlikten dolayı  $\mathbf{H}_{1D}(\mathbf{r}, t)$ 'den bir katkı gelir ve denklem (3.9) ile verilen  $\mathbf{H}_{1R}(\mathbf{r}, t)$  sıfıra gider, çünkü  $d = 0$ 'dır. Ancak  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}' \neq 1$  olduğundan  $\mathbf{H}_2(\mathbf{r}, t)$  her zaman sıfır olmaz. Bu durumda  $\mathbf{H}_2(\mathbf{r}, t)$ 'den gelecek katkı hesaplanmalıdır. Bu durumun frekans uzayındaki hali [55]'te incelenmiştir.

Ayrıca belirtmelidir ki, nümerik integrasyon hesaplanırken kullanılan örnek noktaları tamamen üçgen yüzeyi içersinde ise, tekillik katkılarının hesaplanmasına gerek yoktur ve yarım faktörü çözüm için yeterlidir.

## 3.2. Sonuçlar

Bu bölümde zaman uzayı manyetik alanının tekilliği, MAİD'in ZAY çözümü için incelenmiştir ve tekil katkılar için genel bir form, herhangi bir yaklaşım veya limit alma prosedürü gerçekleştirilmeden çıkarılmıştır. Tekil katkının, gözlem noktasının temel fonksiyonu oluşturan üçgen yüzeyi üzerindeki konumuna bağlı olduğu, özel olarak gözlem noktası üçgenin tamamen içersinde ise yarım faktörünün elde edildiği gösterilmiştir.

## 4. ELEKTRİK ALAN İNTEGRAL DENKLEMİNİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ

Bu bölümde EAİD'in başlangıç değer probleminin giderilmesi için iki yöntem sunulacaktır. EAİD'in ZAY çözümünün lineer ve sabit katkılar tarafından bozulduğuna daha önce değinilmişti. Bölüm 4.1'de lineer katkı probleminin giderilmesi için EAİD'in Birinci Mertebeden Formülasyonu (BMF) sunulacaktır. Ayrıca Bölüm 4.1'de zamana ve uzaya göre temel fonksiyonlar ile ayrıklaştırılan akım yoğunluğu fonksiyonunun aslında ayrık konvolüsyon işleminden ibaret olduğu gösterilecektir. Bölüm 4.2'de, BMF yöntemi ilettilerek, hem lineer hem de sabit katkı problemlerinin giderilmesi için EAİD'in ikinci mertebeden formülasyonu (İMF) sunulacaktır. Geliştirilen yöntemler, BMF ve İMF, temel fonksiyon seçiminden bağımsızdır ve var olan EAİD ve BAİD çözücülerine kolaylıkla uygulanabilir. Bölüm 4.3'te geliştirilen yöntemlerin açık ve kapalı geometrilerin ZAY ile çözümüne etkisi nümerik örnekler ile gösterilecektir. Bölüm 4.4'te sonuçlar sunulacaktır.

### 4.1. Birinci Mertebeden Formülasyon

ZAY'da bilinmeyen akım yoğunluğu  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ , denklem (2.22)'deki gibi uzaya ve zamana göre temel fonksiyonlar ile ayrıklaştırılır. Mükemmel elektrik iletken yüzeyler için EAİD, denklem (2.24)'teki gibi verilir. Denklem (2.24)'te verilen EAİD'in zaman türevi olmadan formüle edilmesi mümkündür. Bu durumda skaler potansiyelden kaynaklanan bir zaman integrali ortaya çıkar. Zamana göre temel fonksiyonların zamana göre integralleri sıfır olmadığı sürece, matris elemanlarının değerleri, zaman sonsuza giderken sıfıra gitmez. Bundan dolayı denklem (2.24)'teki gibi EAİD'in zamana göre türevinin çözülmesi daha uygundur [39]. Bu durumda EAİD, zamana göre ikinci mertebeden türev içerir. EAİD'in akım yoğunluğunun zamana göre ikinci dereceden türevini içermesinden dolayı denklemin eşsiz (*unique*) çözümünün bulunması için iki başlangıç koşulu gereklidir. Başlangıç koşulları genellikle akım yoğunluğunun ve zamana göre türevinin başlangıç anındaki ( $t=0$ ) değeri ile verilir. Ayrıklaştırılmış denklemde, başlangıç koşulları akım yoğunluğunun

iki zaman adımıdaki değerleri olarak verilebilir. Bunlar başlangıç ve bir önceki/sonraki andaki değerlerdir. Başlangıçta durağan olma koşulu, akım yoğunluğunun başlangıç anındaki ve öncesindeki değerinin sıfır olmasını gerektirir. Ancak başlangıç anında akım yoğunluğunun zamana göre türevi her zaman sürekli olmayabilir. Bu durum akım yoğunluğunun başlangıçtan bir sonraki adımdaki değerinin belirlenmesini pratik olarak imkansız kılar. Ancak standart ZAY algoritmasında, ilk zaman adımı, akım yoğunluğunun zamana göre türevinin,  $t=0$  anında süreksiz olması olasılığı göz önünde bulundurulmadan hesaplanır. Böylece başlangıçta durağan olma varsayımı ayrık çözüme doğru bir şekilde uygulanmamış olur ve çözümler lineer ve sabit bileşenler tarafından bozulur.

Denklem (2.24) ile verilen EAİD'in çözümlerinin zamana göre lineer olarak artan ve sabit bileşenler içerdiği, Bölüm 2.6'da gösterildiği gibi, gözlemlenmiştir:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_{tam}(\mathbf{r}, t) + \boldsymbol{\alpha}_1(\mathbf{r})t + \boldsymbol{\alpha}_0(\mathbf{r}). \quad (4.1)$$

Denklem (4.1)'de,  $\mathbf{J}_{tam}(\mathbf{r}, t)$ , akım yoğunluğunun tam çözümü,  $\boldsymbol{\alpha}_1(\mathbf{r})$  çözümdeki lineer bileşenin artış oranı ve  $\boldsymbol{\alpha}_0(\mathbf{r})$  çözümdeki sabit bileşendir. Başlangıç koşulları doğru bir şekilde uygulanırsa  $\boldsymbol{\alpha}_1(\mathbf{r})$  ve  $\boldsymbol{\alpha}_0(\mathbf{r})$  sıfır olarak bulunur. Ancak başlangıç koşulları düzgün bir şekilde uygulanmadan denklem (2.24)'ün çözülmesi sonucunda denklem (4.1) yapısında sonsuz sayıda çözüm ortaya çıkar. Bu bölümde, elektrik akım yoğunluğunun,  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  yerine, akım yoğunluğu ile

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \partial_t \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \quad (4.2)$$

bağıntısı ile tanımlanan  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  fonksiyonunun ayrıklaştırılması ile gerekli başlangıç koşulu sayısının azalacağı gösterilecektir.  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  fonksiyonu, homojen olmayan ortamlar için kullanıldığında elektrik polarizasyon vektörü adını almaktadır [84], ancak incelenen durumda (mükemmel elektrik iletken yüzeyden olan saçılma problemi için) bu tanımın kullanılması uygun değildir. Denklem (4.2) matematiksel bir eşitlikten ibarettir. Denklem (4.2) eşitliği ile verilen  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  fonksiyonu kullanıldığında EAİD

$$\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \left[ \frac{\mu}{4\pi} \int_S \partial_t^2 \mathbf{P}(\mathbf{r}', t) * \frac{\delta(t - R/c)}{R} d\mathbf{r}' - \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}', t) * \frac{\delta(t - R/c)}{R} d\mathbf{r}' \right] \quad (4.3)$$

halini alır. Denklem (4.3), aslında zamana göre ikinci mertebeden türev içerir ve lineer ve sabit katkıların etkisi  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  için olan çözümde görülür:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}_{tam}(\mathbf{r}, t) + \alpha_1(\mathbf{r})t + \alpha_0(\mathbf{r}). \quad (4.4)$$

Ancak çözümü aranılan fonksiyon ( $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ ),  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ 'nin zaman göre türevidir:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \partial_t \mathbf{P}_{tam}(\mathbf{r}, t) + \alpha_1(\mathbf{r}). \quad (4.5)$$

Bundan dolayı lineer katkı problemi  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  için giderilmiş olur. Çözüm prosedürü standart ZAY algoritması ile aynıdır.  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ , uzaya ve zamana göre fonksiyonlar ile ayrıklaştırılır:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{N_t} P_{n,i} T_i(t) \mathbf{f}_n(\mathbf{r}). \quad (4.6)$$

Burada  $P_{n,i}$  bilinmeyen katsayılardır ve akım yoğunluğu

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \partial_t \frac{1}{c} \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{N_t} P_{n,i} T_i(t) \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) \quad (4.7)$$

ile bulunabilir. EAİD'in ZAY çözümünde [57]'de sunulan formülasyonun kullanılabilmesi için birinci türevi sürekli zamana göre temel fonksiyonun geliştirilmesi anlatılmaktadır, çünkü [57]'de zaman türevi  $\partial_t T_i(t)$  ile belirlenmektedir. Ancak denklem (4.7) açık olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \sum_{n=1}^N \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) \partial_t \sum_{i=0}^{N_t} P_{n,i} T(t - i\Delta t). \quad (4.8)$$

Denklem (4.8)'de  $\sum_{i=0}^{N_t} P_{n,i} T(t-i\Delta t)$  işlemi zamana göre konvolüsyondan başka bir şey değildir. Sonuç olarak denklem (4.7)'deki zamana göre türev,  $T_i(t)$ 'nin zamana göre türevi alınarak hesaplanabileceği gibi,  $P_{n,i}$ 'nin nümerik türevi ile de hesaplanabilir:

$$I_{n,i} = \frac{P_{n,i+1} - P_{n,i-1}}{2c\Delta t}. \quad (4.9)$$

Bu tezde  $T_i(t)$ 'nin zamana göre türevleri süreksiz olduğundan [77] nümerik türev yaklaşımı uygulanmıştır. BMF'nin kullanımı ile  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ 'deki lineer katkı problemi giderilebilir ve BMF, MAİD ve BAİD'in ZAY çözümlerine de uygulanabilir.

## 4.2. İkinci Mertebeden Formülasyon

BMF kullanımı ile başlangıç koşullarının sayısının azaltıldığı ve çözüm olan  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ 'deki lineer katkı probleminin giderildiği bir önceki bölümde gösterilmiştir. Ancak denklem (4.5)'te gösterildiği gibi, sabit katkı problemi halen çözümden görülür. BMF'nin geliştirilmesinde kullanılan temel fikir doğrudan ilerletilerek, sabit katkı probleminin,  $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$  bilinmeyen fonksiyonu tanımlanarak giderilebileceği açıktır:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \partial_t^2 \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t). \quad (4.10)$$

Bu durumda EAİD için eşitlik

$$\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \partial_t^{-1} \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \left[ \frac{\mu}{4\pi} \int_S \partial_t^2 \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}', t) * \frac{\delta(t-R/c)}{R} d\mathbf{r}' - \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \nabla' \cdot \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}', t) * \frac{\delta(t-R/c)}{R} d\mathbf{r}' \right] \quad (4.11)$$

olarak yazılır. Burada  $\partial_t^{-1}$  zamana göre integrasyonu göstermektedir. Denklem (4.3) gibi, denklem (4.11) ikinci mertebeden türev  $\partial_t^2$  içerir ve başlangıç koşulları uygun bir şekilde uygulanmadığı sürece lineer ve sabit katkılar  $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$  çözümünde görülür:

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{P}}_{tam}(\mathbf{r}, t) + \alpha_1(\mathbf{r})t + \alpha_0(\mathbf{r}). \quad (4.12)$$

Ancak  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  ile  $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$  arasındaki ilişki denklem (4.10) olarak verildiği sürece,  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ 'deki hem lineer hem de sabit katkı problemleri giderilir. Çözümde  $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$  zamana ve uzaya göre temel fonksiyonlar ile

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{N_t} \tilde{P}_{n,i} T_i(t) \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) \quad (4.13)$$

olarak ayrıklaştırılabilir. Denklem (4.13)'te  $\tilde{P}_{n,i}$  bilinmeyen katsayılardır ve akım yoğunluğu

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{N_t} \tilde{P}_{n,i} T_i(t) \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) \quad (4.14)$$

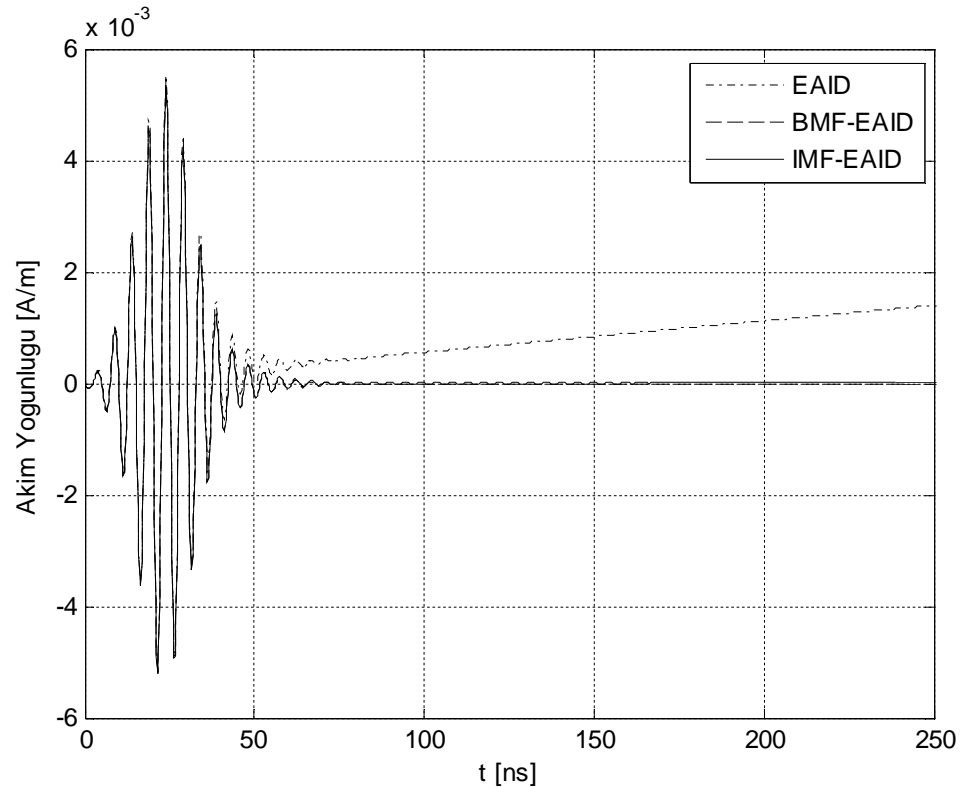
denklemini ile bulunabilir. Denklem (4.14)'teki ikinci mertebeden türev  $\partial_t^2$ ,  $\tilde{P}_{n,i}$ 'nin nümerik türevi ile aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$I_{n,i} = \frac{P_{n,i+1} - 2P_{n,i} + P_{n,i-1}}{c^2 \Delta t^2}. \quad (4.15)$$

### 4.3. Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde nümerik örnekler sunulacaktır. Tüm örneklerde gelen alan denklem (2.55)'te verilen modüle edilmiş Gauss düzlemsel dalgası ve zaman adımı büyüklüğü  $\Delta t = 0.1(f_0 + f_{bw})^{-1}$  olarak seçilmiştir. Denklem (2.24), (4.3) ve (4.11) ile verilen EAİD'in ZAY çözümünde matris elemanlarının elde edilmesinde, Bölüm 2'de anlatılan, alanların analitik ifadeleri kullanılmıştır. BMF ve İMF'nin kullanımı zamana ve uzaya göre temel fonksiyonların seçiminden bağımsızdır. Bu bölümde uzaya göre temel fonksiyonlar RWG fonksiyonları [49] ve zamana göre temel fonksiyonlar denklem (2.53) ile verilen parçalı tanımlı polinom interpolasyon fonksiyonları [77] olarak seçilmiştir. Şekillerde "EAİD" denklem (2.24) ile verilen standart EAİD'in çözümü ile elde edilmiş sonucu, "BMF-EAİD" denklem (4.3) ile verilen EAİD'in birinci mertebeden formülasyonunun çözümü ile elde edilmiş sonucu ve "İMF-EAİD" denklem (4.11) ile verilen EAİD'in ikinci mertebeden formülasyonunun çözümü ile elde edilmiş sonucu belirtmektedir.

İlk örnekte BMF ve İMF'nin etkilerinin gösterilmesi amacıyla yarıçapı 1 m olan ve 640 üçgen ile modellenmiş yarım küresel kabuktan olan saçılma incelendi. Gelen alan ilerleme yönü  $\hat{\mathbf{k}} = (0,0,-1)$  ve polarizasyonu  $\hat{\mathbf{p}} = (1,0,0)$ 'dır. Yarım küreden saçılma problemi  $f_0 = 200$  MHz ve  $f_{bw} = 150$  MHz iken incelenmiştir. Yarım küre açık yüzey olduğundan, sonuçlarda iç-rezonans problemi görülmez. Şekil 4.1'de, lineer katkı, denklem (2.24) ile verilen standart EAİD çözümünde açıkça görülmektedir. Ancak BMF ve İMF kullanılarak elde edilen çözümlerde açık olarak bir lineer artış görülmemektedir. Şekil 4.2'de aynı sonuçlar logaritmik ölçekte gösterilmiştir. BMF-EAİD sonuçlarında  $10^{-5}$  düzeyinde bir sabit katkı kaldığına dikkat edilmelidir. İMF-EAİD'in sabit katkı düzeyi  $10^{-9}$ 'dur. İMF-EAİD çözümündeki  $10^{-9}$  düzeyde olan sabitin denklem (4.15)'te verilen nümerik türev işlemindeki hatadan veya uygulama sırasında ortaya çıkan diğer hatalardan kaynaklandığı söylenebilir.



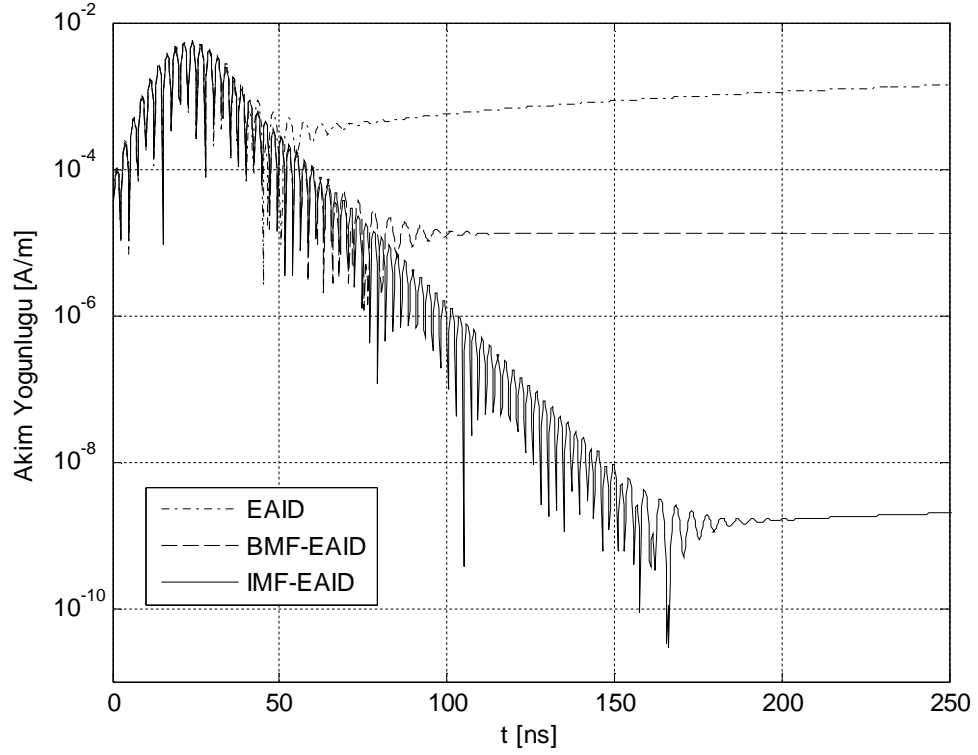
Şekil 4.1. Yarım küre üzerinde gözlemlenen akım yoğunluğu: lineer ölçek.

İkinci örnekte, yarı çapı 1 m olan ve 290 üçgen ile modellenmiş küreden saçılma  $f_0 = 75$  MHz ve  $f_{bw} = 50$  MHz'de incelendi. Gelen alanın etkin bant genişliğinin üst sınırı 125 MHz'dir ve kürenin ilk rezonans frekansı olan 131 MHz'in altında olduğundan ZAY çözümlerinde iç-rezonans probleminin görülmemesi beklenmektedir. Gelen alanın diğer özellikleri önceki örnekteki ile aynıdır. Şekil 4.3'te EAİD, BMF-EAİD ve İMF-EAİD sonuçları gösterilmektedir. Lineer olarak artan bileşen EAİD çözümünde kolayca görülmektedir ve BMF-EAİD çözümü  $10^{-5}$  düzeyinde sabit katkı içermektedir. İMF-EAİD sonucu azalan yapıdadır ve sonuçta sabit bir katkı görülmemektedir. Ancak akım yoğunluğunun salınan davranışı bazı rezonans modlarının gelen alan tarafından uyarıldığı anlamına gelmektedir. Rezonans içermeyen sonuç elde etmek için Şekil 4.4'te BAİD sonuçları verilmiştir. Şekil 4.4'te görüleceği üzere BAİD'in doğrudan uygulanması  $10^{-5}$  düzeyinde bir sabit katkı içermektedir. Bu bozulma düzeyi BMF ve İMF ile düşürülmüştür. İMF sonucu elde edilen  $10^{-16}$  düzeyindeki sabit katkının çift-hassasiyetteki (*double precision*) nümerik hesaplamaların veriminden kaynaklandığına dikkat edilmelidir.

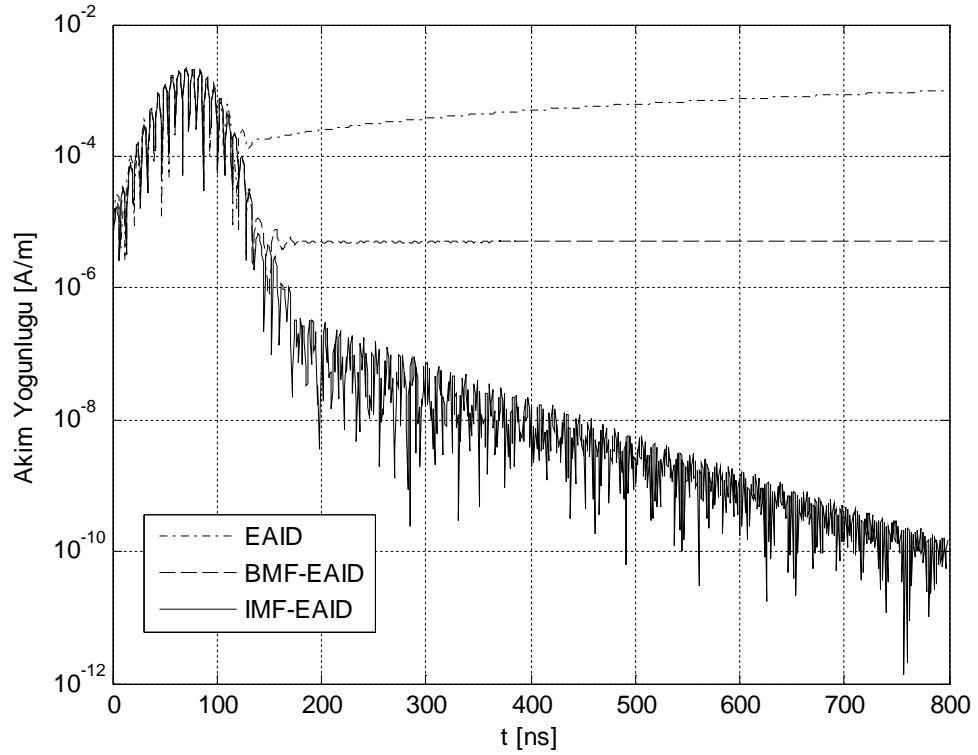
#### 4.4. Sonuçlar

Bu bölümde EAİD'in ZAY çözümündeki lineer ve sabit katkı problemlerinin giderilmesi için iki yöntem sunulmuştur. İlk olarak, lineer bileşen problemini gidermek amacıyla EAİD'in birinci mertebeden formülasyonu (BMF) sunulmuştur. BMF-EAİD'in kullanımı ile lineer bileşen probleminin giderilebileceği, ancak sabit bileşenin halen sonucu bozduğu gösterilmiştir. BMF-EAİD'de benzer olarak hem sabit hem de lineer bileşen probleminin giderilmesi için EAİD'in ikinci mertebeden formülasyonu (İMF) geliştirilmiştir. İMF'nin kullanımı ile lineer ve sabit bileşen problemlerinin giderildiği gösterilmiştir. [25]'te sunulan formülasyonunun aksine, geliştirilen yöntemler açık ve kapalı saçıcılara uygulanabilir. BMF ve İMF'de zamana göre temel fonksiyonun seçimi sınırlanmamıştır: [57]'de sunulan formülasyondaki sürekli zaman türevine sahip zamana göre temel fonksiyon kullanım kısıtlaması gibi. BMF ve İMF yaklaşımlarının iç-rezonans probleminin çözüm olmadığı, sadece zaman uzayı EAİD'in çözümünde başlangıç koşullarının

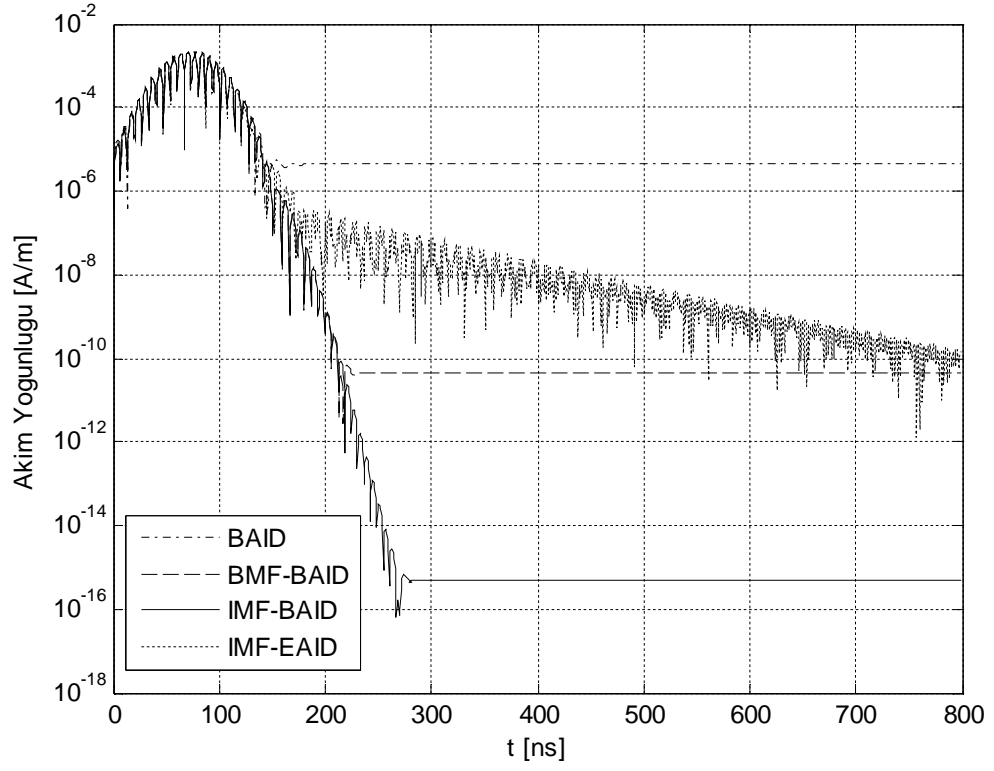
hatalı uygulamasından dolayı ortaya çıkan lineer ve sabit katkı problemlerine çözüm getirdiğine dikkat edilmelidir.



Şekil 4.2. Yarım küre üzerinde gözlemlenen akım yoğunluğu: logaritmik ölçek.



Şekil 4.3. Küre üzerinde gözlemlenen akım yoğunluğu.



Şekil 4.4. Küre üzerinde gözlemlenen akım yoğunluğu.

## 5. 3-BOYUTLU ZAMANDA GECİKMELİ POTANSİYELLER

Bu bölümde, anlık uyarılmış Schaubert-Wilton-Glisson (SWG) temel fonksiyonlarından dolayı oluşan zamanda gecikmeli vektör ve skaler potansiyellerin zaman örneklerinin Radon Dönüşümü (RD) yorumu ile elde edilmesi anlatılacaktır. Bölüm 5.1’de anlık uyarılmış skaler ve vektör potansiyellerin RD yorumu ile belirlenmesi anlatılacak, hacimsel integrallerin geometrik büyüklükler türünden elde edilmesi gösterilecektir. Detaylı olarak RD yorumu sonucu hacimsel integraller, yüzey integrallerine dönüştürülecek ve yüzey integrallerin geometrik manalarının yüzey merkezi ve katı açısı olduğu gösterilecektir. Bölüm 5.2’de nümerik örnekler sunulacak ve geometrik büyüklüklerin belirlenmesi anlatılacaktır. Bölüm 5.3’te sonuçlar sunulacaktır.

### 5.1. Zamanda Gecikmeli Potansiyeller

Hacim integral denklemlerde, homojen olmayan, izotropik, kayıpsız, manyetik olmayan ve dielektrik sabiti  $\varepsilon(\mathbf{r})$  frekanstan bağımsız ortamlar için akım yoğunluğu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \kappa(\mathbf{r}) \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t). \quad (5.1)$$

Burada  $\kappa(\mathbf{r}) = [\varepsilon(\mathbf{r}) - \varepsilon_0] / \varepsilon(\mathbf{r})$  ve  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  elektrik akı yoğunluğudur. Hacim integral denklem çözümü için ilgili hacmin tetrahedronlar ile modellenir ve her tetrahedral hacim içinde  $\varepsilon(\mathbf{r})$ ’nin (dolayısıyla  $\kappa(\mathbf{r})$ ’nin) sabit olduğu varsayılır. ZAY’da bilinmeyen fonksiyon temel fonksiyonlar ile ayrıklaştırılır:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{N_i} I_{n,i} T_i(t) \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N I_n(t) \mathbf{f}_n(\mathbf{r}). \quad (5.2)$$

Burada  $\mathbf{f}_n(\mathbf{r})$   $n$ . uzaya göre temel fonksiyonu,  $T_i(t)$   $i$ . zamana göre temel fonksiyonu,  $I_{n,i}$  bu temel fonksiyonlara ilişkin bilinmeyen katsayıyı belirtmektedir

ve  $I_n(t)$  zamana bağlı katsayı olarak adlandırılabilir. Hacimsel kaynaklar için vektör potansiyel, denklem (5.2) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) * \frac{\delta(t - R/c)}{R} d\mathbf{r}' \\
&= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \kappa(\mathbf{r}') \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}', t) * \frac{\delta(t - R/c)}{R} d\mathbf{r}' \\
&= \frac{\mu}{4\pi} \partial_t \sum_{n=1}^N I_n(t) * \int_{V_n} \kappa(\mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \frac{\delta(t - R/c)}{R} d\mathbf{r}'
\end{aligned} \tag{5.3}$$

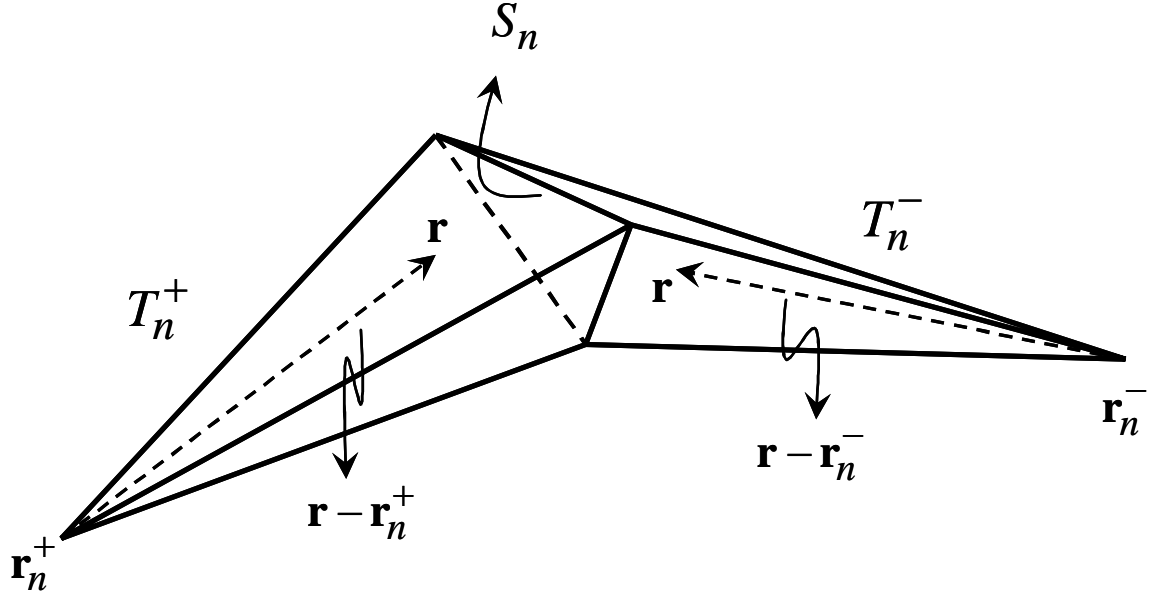
olarak yazılabilir. Burada  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  ve  $*$  zamana göre konvolüsyonu belirtmektedir. Enerjinin korunumu kanunundan (veya süreklilik denkleminde) skaler potansiyel

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \rho(\mathbf{r}', t) * \frac{\delta(t - R/c)}{R} d\mathbf{r}' \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon} \partial_t^{-1} \int_V \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) * \frac{\delta(t - R/c)}{R} d\mathbf{r}' \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{n=1}^N I_n(t) * \int_{V_n} \nabla' \cdot \kappa(\mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \frac{\delta(t - R/c)}{R} d\mathbf{r}' \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{n=1}^N I_n(t) * \left\{ \int_{V_n} \kappa(\mathbf{r}') \nabla' \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \frac{\delta(t - R/c)}{R} d\mathbf{r}' \right. \\
&\quad \left. + \int_{V_n} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \kappa(\mathbf{r}') \frac{\delta(t - R/c)}{R} d\mathbf{r}' \right\}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

olarak yazılabilir. Denklem (5.4)'te  $\partial_t^{-1}$  zamana göre integrali belirtmektedir. Bu bölümde, daha önce de belirtildiği gibi, uzaya göre temel fonksiyonlar  $\mathbf{f}_n(\mathbf{r})$ , SWG fonksiyonları olarak seçilmiştir [63]. SWG fonksiyonu, Şekil 5.1'de gösterildiği gibi tetrahedral hacim çifti üzerinde aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \pm \frac{a_n}{3V_n^\pm} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n^\pm) & ; \mathbf{r} \in T_n^\pm \\ 0 & ; \text{diğer} \end{cases} \tag{5.5}$$

Burada  $a_n$  ortak yüzeyin alanını,  $V_n^\pm$ ,  $T_n^\pm$  tetrahedrona ait hacmi belirtmektedir. Bu durumda  $\mathbf{f}_n(\mathbf{r})$  temel fonksiyonunun diverjansı



Şekil 5.1. SWG fonksiyonunun tanımı.

$$\nabla \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \pm \frac{a_n}{V_n^\pm} & ; \mathbf{r} \in T_n^\pm \\ 0 & ; \text{diğer} \end{cases} \quad (5.6)$$

olarak yazılabilir.  $\kappa(\mathbf{r}) = \kappa_n^\pm$  tetrahedral hacim içerisinde sabit olduğu kabul edilir. Denklem (5.4)'te  $\nabla \kappa(\mathbf{r})$  ifadesi,  $\mathbf{r}$  ortak yüzey olan  $S_n$  üzerinde iken sürekli değildir ve genelleştirilmiş fonksiyonlar aracılığı ile aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\nabla \kappa(\mathbf{r}) = \begin{cases} \kappa_n^+ - \kappa_n^- & ; \mathbf{r} \in S_n \\ 0 & ; \text{diğer} \end{cases} \quad (5.7)$$

Denklem (5.5) ve (5.6) kullanılarak, vektör ve skaler potansiyeller

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \partial_t \sum_{n=1}^N I_n(t) * \frac{a_n \kappa_n}{3V_n} \tilde{\mathbf{A}}_n(\mathbf{r}, t), \quad (5.8)$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{n=1}^N I_n(t) * \left\{ \frac{a_n \kappa_n}{V_n} \tilde{\phi}_n(\mathbf{r}, t) - (\kappa_n^+ - \kappa_n^-) \tilde{\phi}_a(\mathbf{r}, t) \right\} \quad (5.9)$$

olarak yazılırlar. Denklem (5.8) ve (5.9)'da,  $\tilde{\mathbf{A}}_n(\mathbf{r},t)$ ,  $\tilde{\phi}_n(\mathbf{r},t)$  ve  $\tilde{\phi}_a(\mathbf{r},t)$  integralleri

$$\tilde{\mathbf{A}}_n(\mathbf{r},t) = \int_{V_n} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_n) \frac{\delta(t - R/c)}{R} d\mathbf{r}', \quad (5.10)$$

$$\tilde{\phi}_n(\mathbf{r},t) = \int_{V_n} \frac{\delta(t - R/c)}{R} d\mathbf{r}', \quad (5.11)$$

$$\tilde{\phi}_a(\mathbf{r},t) = \int_{S_n} \frac{\delta(t - R/c)}{R} d\mathbf{r}' \quad (5.12)$$

olarak tanımlanırlar.  $\tilde{\mathbf{A}}_n(\mathbf{r},t)$ ,  $\tilde{\phi}_n(\mathbf{r},t)$  ve  $\tilde{\phi}_a(\mathbf{r},t)$  yardımcı fonksiyonlar olarak adlandırılabilirler (sabitlerin ayrı verilmesinden dolayı bu fonksiyonlar doğrudan anlık uyarılmış SWG fonksiyonuna ilişkin potansiyelleri vermemektedir).  $\tilde{\phi}_a(\mathbf{r},t)$  yüzey kaynaklar için elde edilen skaler potansiyele benzerdir ve  $\tilde{\phi}_a(\mathbf{r},t)$ 'nin analitik ifadesi [28]'de verilmiştir. Sonraki bölümlerde  $\tilde{\phi}_n(\mathbf{r},t)$  ve  $\tilde{\mathbf{A}}_n(\mathbf{r},t)$  fonksiyonları incelenecektir. Bu noktadan itibaren  $\pm$  işareti kolaylık olması için kullanılmayacak, formüller  $T_n^+$  için çıkartılacaktır.  $T_n^-$  için sonuçlar gerekli işaret değişiklikleri ile kolayca elde edilebilir.

### 5.1.1. $\tilde{\phi}_n(\mathbf{r},t)$ 'nin Formülasyonu

Işıma integrallerinin RD yorumu ile belirlenmesi, integralde yer alan Dirac delta fonksiyonu üzerine kuruludur. RD yorumu fikri Bölümler 1-3'te detaylı olarak açıklanmıştı. Temel olarak, Dirac delta fonksiyonu yarıçapı  $R = ct$  ve merkezi gözlem noktası  $\mathbf{r}$  olan bir küre tanımlar ve integral  $V_n$  hacimsel elemanı üzerinden hesaplanmaktadır. Böylece  $V_n$  üzerinden olan integral, Dirac delta fonksiyonunun tanımladığı küre ve tetrahedral hacmin kesişimi sonucu oluşan yüzey üzerinden integrale dönüşür.

$\tilde{\phi}_n(\mathbf{r},t)$ 'deki integrali incelemek için, ilk olarak  $V_n$  üzerinden olan integral, merkezi gözlem noktası olan küresel koordinat sisteminde yazılmalıdır:

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_n(\mathbf{r}, t) &= \int_R \iint_{\Omega} \delta(t - R/c) R \sin \theta d\phi d\theta dR = \int_R R \delta(t - R/c) \iint_{\Omega} d\Omega dR \\
&= \int_R R \delta(t - R/c) \Omega(R) dR
\end{aligned} \quad (5.13)$$

Denklem (5.13)'te  $\Omega(R)$ ,  $R$  yarıçaplı küre için steradyan türünden katı açıdır. Dirac delta fonksiyonun (A.1) ve (A.2) ile verilen özellikleri kullanılarak  $\tilde{\phi}_n(\mathbf{r}, t)$ 'nin  $\Omega(R)$  türünden ifadesi

$$\tilde{\phi}_n(\mathbf{r}, t) = c^2 t \Omega(ct) \quad (5.14)$$

olarak bulunur. Böylece anlık uyarılmış kaynaktan elde edilen skaler potansiyele ilişkin yardımcı fonksiyonun integrali  $c^2 t$  faktörü ile katı açı türünden elde edilir. Ayrıca dikkat edilirse denklem (5.14) ile verilen ifade herhangi bir tekillik içermemektedir.

### 5.1.2. $\tilde{\mathbf{A}}_n(\mathbf{r}, t)$ 'nin Formülasyonu

Denklem (5.10)'da, vektör potansiyelin  $\tilde{\mathbf{A}}_n(\mathbf{r}, t)$  içerdiği  $(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_n) = (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)$  olarak açılabilir, böylece  $\tilde{\mathbf{A}}_n(\mathbf{r}, t)$

$$\tilde{\mathbf{A}}_n(\mathbf{r}, t) = \underbrace{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \int \frac{\delta(t - R/c)}{R} d\mathbf{r}'}_{\tilde{\phi}_n(\mathbf{r}, t)} + \underbrace{\int (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \frac{\delta(t - R/c)}{R} d\mathbf{r}'}_{\tilde{\mathbf{A}}_v(\mathbf{r}, t)} \quad (5.15)$$

olarak yazılabilir.  $\tilde{\phi}_n(\mathbf{r}, t)$ 'nin RD yorumu ile belirlenmesi Bölüm 5.1.1'de gösterilmiştir. Benzer adımlar ile  $\tilde{\mathbf{A}}_v(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{A}}_v(\mathbf{r}, t) &= \int_R \iint_{\Omega} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \delta(t - R/c) R \sin \theta d\phi d\theta dR \\
&= \int_R R \delta(t - R/c) \iint_{\Omega} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) d\Omega dR \\
&= c^2 t \bar{\mathbf{e}}(ct)
\end{aligned} \quad (5.16)$$

olarak yazılabilir. Burada  $\bar{\mathbf{e}}(ct)$ , alan merkezi vektörü fonksiyonudur. Alan merkezi vektörü fonksiyonu  $\bar{\mathbf{e}}(ct)$ , kesişim yüzeyinin alan merkezine yönelmiş olan vektör

büyüküktür ve büyüklüğü kesişim bölgesine bağlıdır (en genel halde  $\bar{\mathbf{e}}(ct)$  birim vektör değildir). Böylece  $\tilde{\mathbf{A}}_v(\mathbf{r},t)$ 'nin dolayısıyla  $\tilde{\mathbf{A}}_n(\mathbf{r},t)$ 'nin belirlenmesi için gerekli geometrik büyüklükler belirlenmiş olur: katı açı ve alan merkezi fonksiyonları.

## 5.2. Nümerik Örnekler

Bu bölümde, geliştirilen yöntemin doğrulanması amacıyla nümerik örnekler sunulacaktır. Geliştirilen yöntemin doğrulanması, denklem (5.13) ve (5.15)'te verilen yardımcı fonksiyonların (dolayısıyla potansiyellerin) zaman örnekleri ile yardımcı fonksiyonların frekans uzayı karşılıklarının hesaplanması ile elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak gerçekleştirilecektir.

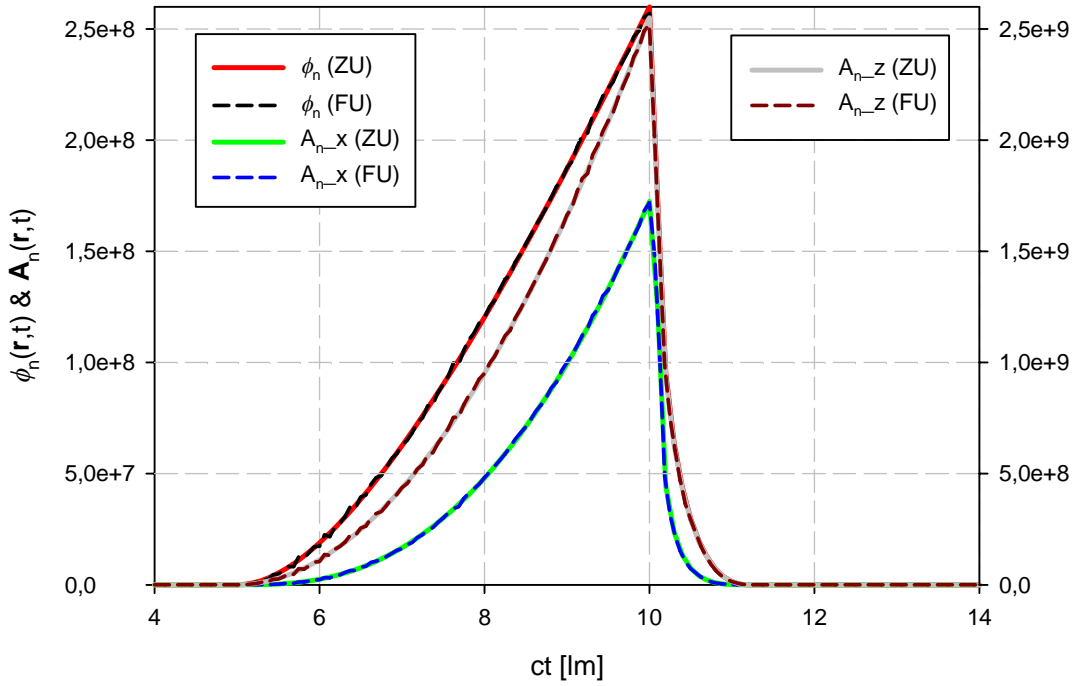
Yukarıda anlatılan katı açı  $\Omega(ct)$  ve yüzey merkezi  $\bar{\mathbf{e}}(ct)$  fonksiyonları farklı yöntemler ile hesaplanabilir. Bunlardan en basiti ve bu bölümde kullanılanı, kesişim yüzeyleri üzerinden integralleri nümerik olarak hesaplamaktır. Diğer yöntem ise kesişim yüzeyleri üzerinden olan integralleri analitik olarak belirlemektir, ancak  $\Omega(ct)$  ve  $\bar{\mathbf{e}}(ct)$ 'nin analitik olarak belirlenmesi bu çalışmanın konusu dışındadır ve gelecekte yapılacak çalışmalar arasındadır. Kesişim yüzeyleri, gözlem noktasına göre, birbirinden bağımsız bir çok yüzeyden oluşabilir (örneğin gözlem noktası tetrahedral yapının içerisinde olduğu durum). Bundan dolayı kesişim yüzeyleri belirlenirken bir bilgisayar destekli tasarım (*Computer Aided Design - CAD*) programı kullanılmıştır.

Vektör ve skaler potansiyellerin frekans uzayı örnekleri elde edilirken, nümerik integraller tetrahedral hacim için Gauss integrasyon metodu ile hesaplanmıştır. Frekans uzayında nümerik integraller hesaplanırken tekil çıkartımı yapılmıştır [80]. Frekans uzayı sonuçlarından zaman uzayı örnekleri, [24] ve [28]'de belirtildiği gibi, ayrık ters Fourier dönüşümü kullanılarak elde edilmiştir.

Tüm örneklerde tetrahedronun köşeleri  $\mathbf{r}_1 = (10,0,1)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (15,5,1)$ ,  $\mathbf{r}_3 = (15,-5,1)$  ve  $\mathbf{r}_4 = (15,0,3)$  olarak seçilmiştir ve yardımcı fonksiyonların zamana göre değişimi farklı gözlem noktalarında  $\mathbf{r}$  gözlemlenmiştir. Örneklerde zaman eksenini, zamanın ortamdaki dalga hızıyla çarpımı ile elde edilen ışık-metre,

Im, (*light-meter*) türünden verilmiştir. Şekillerde “ZU” bu bölümde geliştirilen yöntem ile elde edilen sonuçları, “FU” frekans uzayında elde edilen sonuçları belirtmektedir.

İlk örnek, geliştirilen yöntemin doğruluğunu göstermek amacıyla yardımcı fonksiyonların zamana göre değişimi  $\mathbf{r} = (5,0,1)$  noktasında incelenmiştir. Bu durumda  $x-z$  düzlemine göre simetriden dolayı vektör potansiyelin sadece  $x$  ve  $z$  bileşenleri olur. Şekil 5.2’de görüldüğü gibi geliştirilen yöntem ile elde edilen sonuçlar ile frekans uzayında elde edilen sonuçlar uyum içerisindedir.  $\tilde{\phi}_n(\mathbf{r},t)$  fonksiyonu değişmeye  $ct = 5$  Im noktasında başlamaktadır, çünkü küre ile tetrahedral hacmin kesişmesi  $ct = 5$  Im anında başlar. Ayrıca  $\tilde{\mathbf{A}}_n(\mathbf{r},t)$  ve  $\tilde{\phi}_n(\mathbf{r},t)$  fonksiyonlarının sıfır olduğu noktada küre ile tetrahedronun kesişimi sona ermiştir.



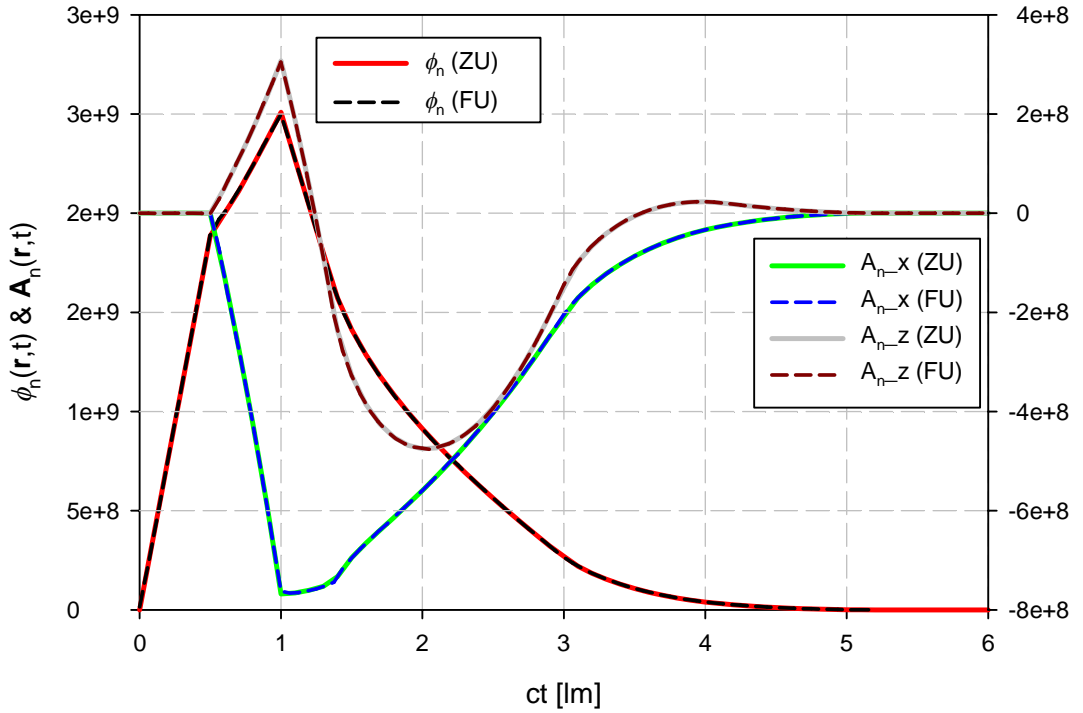
Şekil 5.2.  $\mathbf{r} = (5, 0, 1)$ ’de yardımcı fonksiyonların karşılaştırılması.

İkinci örnekte frekans uzayında tekil olan durumun incelenmesi amacıyla gözlem noktası, tetrahedral hacmin içerisinde  $\mathbf{r} = (14,0,2)$  noktası olarak seçildi. Şekil 5.3’te görüldüğü gibi sonuçlar uyum içerisindedir. Şekil 5.3’e dikkat edilirse,  $\tilde{\mathbf{A}}_n(\mathbf{r},t)$  ve  $\tilde{\phi}_n(\mathbf{r},t)$  fonksiyonları değişmeye  $ct = 0$  anından itibaren başlamaktadır, çünkü gözlem noktası tetrahedronun içerisinde olduğundan kesişim küre yüzeyini

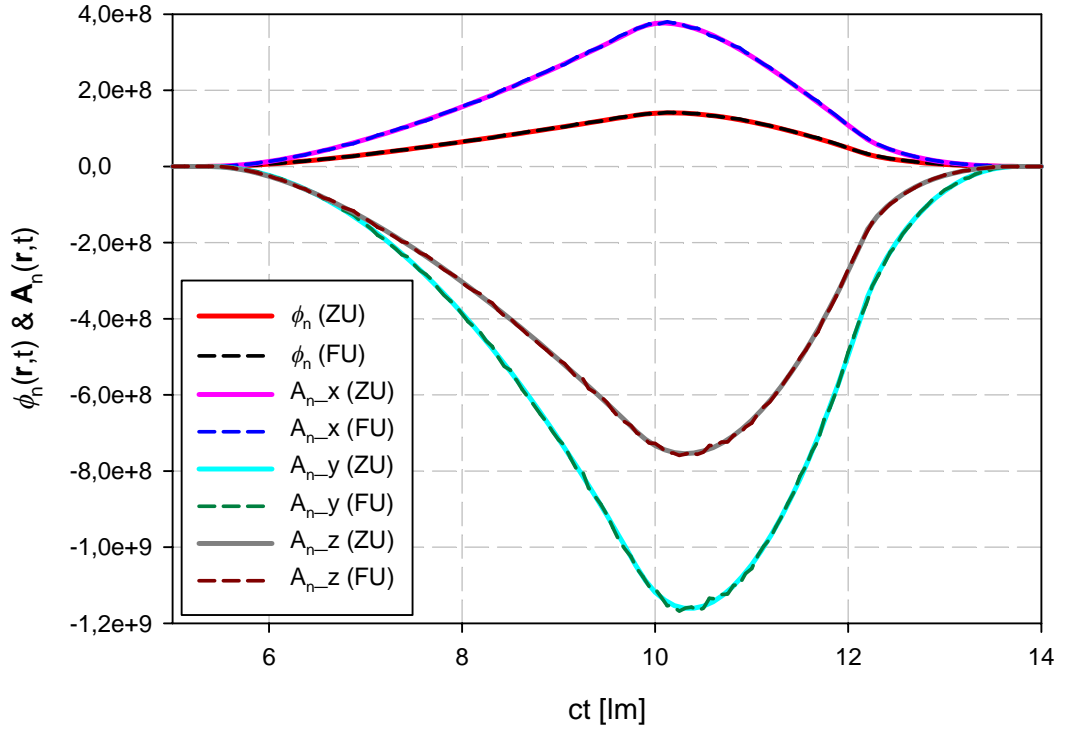
vermektedir. Bu durum  $ct = 0.5$  lm anına kadar sürmektedir. Bu sürede kesişim sonucu tam küre yüzeyini verdiği için alan merkezi gözlem noktasını verir, böylece  $\tilde{\mathbf{A}}_n(\mathbf{r}, t)$ 'nin bu aralıktaki değeri sıfırdır. Daha sonra küre, tetrahedronun dış yüzeyi ile kesiştiğinden fonksiyonların değişimi de farklılaşmaktadır.

Son örnekte ise gözlem noktası rastgele  $\mathbf{r} = (19, 8, -1)$  olarak seçilmiştir. Şekil 5.4'ten görüldüğü gibi, gözlem noktası tetrahedronun konumuna göre herhangi bir simetri sergilemediği için, vektör potansiyelde tüm bileşenler görülür. Benzer olarak değişimlerin başladığı an, tetrahedral hacim ile merkezi gözlem noktası olan kürenin kesişmeye başladığı andır. Şekil 5.4'e dikkatli bakılırsa frekans uzayı sonuçlarının salınan bir davranış sergilediği görülür. Bunun nedeni [24]'te anlatılan Gibbs etkisinden kaynaklanmaktadır.

Nümerik örnekler ile birlikte geliştirilen yöntemin farklı durumlar için (gözlem noktası tetrahedronun içinde veya dışında) çalıştığı gösterilmiştir. Bulunan değerlerin anlık uyarılmış SWG fonksiyondan dolayı oluşan zamanda gecikmeli potansiyellerin (yardımcı fonksiyonların) zaman örnekleri olduğu unutulmamalıdır.



Şekil 5.3.  $\mathbf{r} = (14, 0, 2)$  'de yardımcı fonksiyonların karşılaştırılması.



Şekil 5.4.  $\mathbf{r} = (19, 8, -1)$  'de yardımcı fonksiyonların karşılaştırılması.

### 5.3. Sonuçlar

Bu bölümde, anlık uyarılmış SWG fonksiyonundan dolayı oluşan, zamanda gecikmeli potansiyellerin belirlenmesi için yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Yöntem daha önce anlatılan potansiyellerin RD yorumu ile belirlenmesi üzerine kuruludur. RD yorumu ile zamanda gecikmeli potansiyellerin içerdiği tetrahedron üzerinden hesaplanan hacim integrali, tetrahedral hacim ve merkezi gözlem noktası olan küre yüzeyinin kesişimi sonucu oluşan yüzey üzerinden integrale dönüştürülmüştür. Daha önceki çalışmalara benzer olarak potansiyel integrallerinin sonucu geometrik büyüklükler türünden elde edilmiştir: katı açı ve alan merkezi vektörü. Katı açı ve alan merkezi vektörü fonksiyonları, yüzey integralleri olarak tanımlanmıştır. Kesişim yüzeyi üzerinden olan bu integraller analitik veya nümerik olarak hesaplanabilir. Ancak nümerik örneklerde geometrik büyüklüklerin nümerik integrasyon ile belirlenmesi benimsenmiştir. Katı açı ve alan merkezi fonksiyonlarına analitik ifadeler bulunması gelecek çalışmalara bırakılmıştır. Nümerik örnekler ile geliştirilen yöntemin doğruluğu gösterilmiştir.

## 6. KIRCHHOFF YAKLAŞIMI İNTEGRALİNİN RADON DÖNÜŞÜMÜ YORUMU

Bu bölümde Kirchhoff Yaklaşımı (KY) ile akustik olarak yumuşak ve sert yüzeylerden saçılan alanın analitik ifadeleri geliştirilecektir. Saçılan alanın analitik ifadeleri kaynağın ve/veya gözlem noktasının sonsuzda olduğu ve olmadığı durumlar için zaman uzayında Radon Dönüşümü (RD) yorumu kullanılarak belirlenecektir. Kaynak ve gözlemci noktasının konumuna göre ortaya çıkan durumlar daha önce belirtildiği gibi, “Uzak-Uzak,” “Uzak-Yakın,” “Yakın-Uzak” ve “Yakın-Yakın” durumlarıdır. Analitik ifadeler rastgele saçıcı yüzeyi modelleyen üçgen yüzey parçaları için geliştirilecektir. Tüm yüzey için sonuç üçgenlerden saçılan alanların süperpozisyonu ile belirlenebilir. Bölüm 6.1’de, yumuşak ve sert saçıcılar için gözlem noktasının sonsuzda olduğu ve sonsuzda olmadığı durumlarda KY yaklaşımı ile ışınım integrallerinin belirlenmesi anlatılacaktır. Bölüm 6.2’de, belirlenen ışınım integrallerine kaynağın noktasal kaynak veya düzlemsel dalga olduğu durumlar eklenerek bahsedilen sekiz durum ayrı olarak incelenecektir. Bölüm 6.2’de durumların incelenmesi sonucu ortaya üç farklı integral yapısı çıkmaktadır. Bu integrallerin analitik ifadeleri Bölümler 6.3, 6.4 ve 6.5’te geliştirilecek, Bölüm 6.6’da analitik olarak belirlenen integrallerin sınırlarının belirlenmesi anlatılacak, Bölüm 6.7’de geliştirilen analitik ifadelerin doğruluğu nümerik örnekler ile gösterilecektir. Bölüm 6.8’de sonuçlar sunulacaktır.

### 6.1. Akustik Saçılma için Kirchhoff Yaklaşımı

Bu bölümün amacı gözlem noktası sonsuzda olduğu ve sonsuzda olmadığı durumlarda KY sonucu ortaya çıkan ışınım integrallerini belirlemektir.

Saçılan akustik alan için hız potansiyeli ifadesi, Kirchhoff integral denklemi ile verilir [67], [76]:

$$\varphi^s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \varphi^t(\mathbf{r}', t) * \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \left( \frac{\delta(t - R/c)}{R} \right) - \frac{\delta(t - R/c)}{R} * \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \varphi^t(\mathbf{r}', t) \right] d\mathbf{r}' . (6.1)$$

Burada  $\varphi^s(\mathbf{r}, t)$  ve  $\varphi^t(\mathbf{r}, t)$ , sırasıyla, saçılan ve toplam hız potansiyeli alanlarıdır,  $\hat{\mathbf{n}}'$  dışarı doğru yönelmiş,  $\mathbf{r}'$  noktasındaki saçıcı yüzeyi  $S$ 'ye dik birim normal vektördür.  $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ,  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/R$  ve  $c$  dalga hızıdır. Yumuşak ve sert yüzeyler için sınır koşulları, sırasıyla,  $\mathbf{r} \in S$  saçıcı yüzeyinde iken,  $\varphi^t(\mathbf{r}, t) = 0$  ve  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \varphi^t(\mathbf{r}, t) = 0$  olarak verilir.

### 6.1.1. Gözlem Noktasının Konumu

Yumuşak ve sert yüzeyler için KY yaklaşımı ile gözlem noktası sonsuzda iken ve sonsuzda değilken saçılan hız potansiyelinin formülasyonuna geçmeden önce gözlem noktasının konumuna göre yapılacak yaklaşıklık hakkında bilgi verilmesi uygun görülmüştür. Daha önce de değinildiği gibi gözlem noktası sonsuzda olduğu “uzak durumu” ve sonsuzda olmadığı “yakın durumu” için formüller elde edilecektir. Bu noktada uzak durumu için formüllerin elde edilmesinde uzak alan yaklaşıklığından yararlanılacaktır. Zaman uzayında uzak alan yaklaşıklığı için literatürde farklı kriterler mevcuttur [21], [72] ve bu kriterler genellikle  $R$ 'ye göre verilmektedir. Benzer olarak uzak alan yaklaşıklığının geçerli olduğu  $R$  değeri uyarılan işaretin en yüksek frekans bileşenine bakılarak da verilebilir [15]. Uzak alan yaklaşıklığında gözlem noktası her zaman sonsuzda olmaz. Gözlem noktasının sonsuzda olmadığı durumlarda belli bir miktar hata yapılması göze alınır ve kriterler yapılacak olan hatanın miktarına göre seçilir. Eğer gözlem noktası sonsuzda ise, teorik olarak yapılan hata sıfırdır ve bu durumda tüm kriterler sağlanır. Bölüm 6'da uzak durumu ile gözlem noktasının sonsuzda olduğundan bahsedilmişti. Bundan dolayı uzak durumu ile uzak alan yaklaşıklığı karıştırılmamalıdır. Uzak durumda gözlem noktası sonsuzda olduğundan dolayı uzak alan yaklaşıklığı ile elde edilen formül hatasızdır. Yakın durumunda ise herhangi bir uzak alan yaklaşıklığı yapılmamaktadır.

Uzak alan yaklaşıklığı için kriter ne olursa olsun zaman uzayı Green fonksiyonu

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\delta(t - R/c)}{4\pi R} = \frac{\delta\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{k}}_S \cdot \mathbf{r}'}{c}\right)}{4\pi r} \quad (6.2)$$

olarak yazılır. Burada gözlem noktası  $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{k}}_S$  ve  $\hat{\mathbf{k}}_S$  gözlem yönüdür.

### 6.1.2. Yumuşak Saçıcı

Akustik olarak yumuşak yüzeyler için sınır koşulu  $\varphi^t(\mathbf{r}, t) = 0$ ,  $\mathbf{r} \in S$  ile verilir. Bu durumda denklem (6.1) ile verilen hız potansiyeli yumuşak sınır koşulu için

$$\varphi^s(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\delta(t - R/c)}{R} * \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \varphi^t(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' \quad (6.3)$$

halini alır. Gözlem noktası  $\mathbf{r}$ , sonsuzda olduğunda hız potansiyeli denklem (6.2)'de verilen uzak alan yaklaşıklığı ile

$$\varphi^s(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi r} \int_S \delta\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{k}}_S \cdot \mathbf{r}'}{c}\right) * \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \varphi^t(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' \quad (6.4)$$

olarak yazılabilir.

KY'de yumuşak saçıcı yüzeyinde ( $S$ ) toplam hız potansiyelinin

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \varphi^t(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} 2\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \varphi^i(\mathbf{r}, t) & , \quad \mathbf{r} \in S_a \\ 0 & , \quad \mathbf{r} \in S_g \end{cases} \quad (6.5)$$

olduğu varsayılır [71]. Denklem (6.5)'te  $S_a$  ve  $S_g$ , sırasıyla,  $S = S_a \cup S_g$  yüzeyinin aydınlık ve gölge bölgelerini belirtmektedir. Nümerik çözüm yöntemlerinde saçıcı

yüzeyinin üçgen yüzeyler ile modellenmesi sık kullanılmaktadır:  $S_a = \bigcup_{n=1}^N S_n$ .

Burada  $S_n$ ,  $n$ . üçgen yüzeyini belirtmektedir. Üçgen yüzeyleri düz olduğundan, birim normal vektörleri üçgen yüzeyi boyunca sabittir. Böylece denklem (6.3) ve (6.4)'te verilen ışınma integralleri, sırasıyla,

$$\varphi^s(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \int_{S_n} \frac{\delta(t-R/c)}{R} * \hat{\mathbf{n}}'_n \cdot \nabla' \varphi^i(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}', \quad (6.6)$$

$$\varphi^s(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2\pi r} \sum_{n=1}^N \int_{S_n} \delta\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{k}}_S \cdot \mathbf{r}'}{c}\right) * \hat{\mathbf{n}}'_n \cdot \nabla' \varphi^i(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' \quad (6.7)$$

olarak yazılır. Denklem (6.6) ve (6.7)'de,  $\hat{\mathbf{n}}_n$ ,  $S_n$  yüzeyinin dışarı doğru yönlendirilmiş birim normal vektörüdür.

### 6.1.3. Sert Saçıcı

Akustik olarak sert yüzeyler için sınır koşulu saçıcı yüzeyinde  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \varphi^t(\mathbf{r}, t) = 0$ ,  $\mathbf{r} \in S$  ile verilir ve saçılan hız potansiyeli

$$\varphi^s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S (\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{R}}) \left( \frac{\partial \varphi^t(\mathbf{r}', t)}{c \partial t} + \frac{\varphi^t(\mathbf{r}', t)}{R} \right) * \frac{\delta(t-R/c)}{R} d\mathbf{r}' \quad (6.8)$$

olarak yazılabilir. Denklem (6.8) gözlem noktasının sonsuzda olmadığı yakın durumu için yazılmıştır. Saçılan alan sonsuzda gözlemlendiğinde uzak alan yaklaşığı ile ışınma integrali

$$\varphi^s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi r c} \partial_t \int_S (\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{k}}_S) \varphi^t(\mathbf{r}', t) * \delta\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{k}}_S \cdot \mathbf{r}'}{c}\right) d\mathbf{r}' \quad (6.9)$$

halini alır.

Sert yüzeyler için KY'ye ilişkin toplam hız potansiyeli, yumuşak yüzeye benzer olarak, aşağıdaki gibi verilebilir [71]:

$$\varphi^t(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} 2\varphi^i(\mathbf{r}, t), & \mathbf{r} \in S_a \\ 0, & \mathbf{r} \in S_g \end{cases} \quad (6.10)$$

Saçıcı yüzeyi üçgenler ile ayrıklaştırılırsa denklem (6.8) ve (6.9) ile verilen ışınma integralleri, sırasıyla,

$$\varphi^s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N (\hat{\mathbf{n}}'_n \cdot \hat{\mathbf{R}}) \int_{S_n} \left( \frac{\partial \varphi^i(\mathbf{r}', t)}{c \partial t} + \frac{\varphi^i(\mathbf{r}', t)}{R} \right) * \frac{\delta(t-R/c)}{R} d\mathbf{r}', \quad (6.11)$$

$$\varphi^s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi r} \sum_{n=1}^N (\hat{\mathbf{n}}'_n \cdot \hat{\mathbf{k}}_S) \frac{1}{c} \partial_t \int_{S_n} \varphi^i(\mathbf{r}', t) * \delta\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{k}}_S \cdot \mathbf{r}'}{c}\right) d\mathbf{r}' \quad (6.12)$$

olarak yazılabilir.

## 6.2. Akustik Saçılma için Durumlar

Gözlem noktasının konumuna göre ışına integralleri önceki bölümde belirlendi. Bu bölümde, belirlenen ışına integralleri, kaynağın konumuna göre incelenecektir. Kaynağın ve gözlem noktasının konumuna ve saçıcı türüne göre sekiz farklı durum ortaya çıkmaktadır. Yumuşak ve sert yüzeyler için formülasyonlar benzerdir ve ışına integrallerinin yapılarının, bazı durumlarda aynı olduğu gösterilecektir. Bu bölümde, analitik ifadeleri Bölüm 6.3-6.5'te geliştirilecek olan integraller belirlenecektir.

### 6.2.1. Yumuşak Saçıcı için Uzak-Uzak Durumu

Sonar Kesit Alanı (SKA) problemlerinde saçılan alan düzlemsel dalga olarak verilir. Bu durumda anlık uyarılmış düzlemsel dalga için hız potansiyeli

$$\varphi^i(\mathbf{r}, t) = \delta\left(t - \frac{\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r}}{c}\right) \quad (6.13)$$

olarak verilebilir. Burada  $\hat{\mathbf{k}}_i$  dalganın yayılma yönüdür. Denklem (6.7), kullanılarak gözlem noktası sonsuzdayken saçılan hız potansiyelinin ifadesi

$$\varphi^s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi r c} \sum_{n=1}^N (\hat{\mathbf{n}}'_n \cdot \hat{\mathbf{k}}_i) \partial_t \gamma_n(t - r/c) \quad (6.14)$$

olarak yazılabilir. Burada  $\gamma_n(t)$ ,

$$\gamma_n(t) = \int_{S_n} \delta\left(t - \frac{2}{c} \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}'\right) d\mathbf{r}' \quad (6.15)$$

olarak tanımlanır ve Denklem (6.15)'te  $\mathbf{k}_r = (\hat{\mathbf{k}}_S - \hat{\mathbf{k}}_i)/2$ 'dir.  $\gamma_n(t)$ 'nin analitik ifadesinin belirlenmesi Bölüm 6.3'te anlatılacaktır.

### 6.2.2. Yumuşak Saçıcı için Uzak-Yakın Durumu

Uzak-yakın durumunda, yumuşak yüzeyden saçılan alan, gözlem noktası sonsuzda değilken incelenecektir. Gelen alan denklem (6.13)'te verilen düzlemsel dalgadır. Saçılan alan denklem (6.6) ile

$$\varphi^s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi c} \sum_{n=1}^N (\hat{\mathbf{n}}'_n \cdot \hat{\mathbf{k}}_i) \partial_t \alpha_n^1(t) \quad (6.16)$$

olarak bulunabilir. Burada  $\alpha_n^1(t)$ ,

$$\alpha_n^1(t) = \int_{S_n} \frac{1}{R} \delta\left(t - \frac{R + \hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r}'}{c}\right) d\mathbf{r}' \quad (6.17)$$

integrali ile verilir.  $\alpha_n^1(t)$ 'nin analitik ifadesinin belirlenmesi Bölüm 6.4'te anlatılacaktır.

### 6.2.3. Yumuşak Saçıcı için Yakın-Uzak Durumu

Yakın-uzak durumu, kaynağın sonsuzda olmadığı ancak saçılan alanın sonsuzda gözleendiği durumdur. Bu durumda kaynak noktasal kaynak olarak seçilmiştir ve gelen alan ifadesi küresel dalgalardan oluşur. Noktasal kaynağa ilişkin hız potansiyeli

$$\varphi^i(\mathbf{r}, t) = \frac{\delta(t - R_S / c)}{R_S} \quad (6.18)$$

ile verilebilir. Burada  $R_S = |\mathbf{R}_S| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_S|$  ve  $\mathbf{r}_S$  noktasal kaynağın konumudur. Saçılan alan ise denklem (6.7)'den aşağıdaki gibi bulunur:

$$\varphi^s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi r} \sum_{n=1}^N \hat{\mathbf{n}}'_n \cdot \mathbf{R}_S \left[ c^{-1} \partial_t \alpha_n^2(t - r/c) + \alpha_n^3(t - r/c) \right]. \quad (6.19)$$

Denklem (6.19)'da,  $\hat{\mathbf{n}}'_n \cdot \mathbf{R}_S$  terimi, kaynak noktasının üçgen yüzeyini barındıran  $D_n$  düzlemine olan uzaklığını tanımlamaktadır ve üslü koordinat sisteminde  $\hat{\mathbf{n}}'_n = \pm \hat{\mathbf{y}}'$

olarak verildiği sürece, üçgen yüzeyi için  $\hat{\mathbf{n}}'_n \cdot \mathbf{R}_S = \pm d$  olarak verilebilir. Burada  $d$ ,  $n$ . üçgeni içeren  $D_n$  düzlemine olan dik uzaklıktır.  $\alpha_n^2(t)$  ve  $\alpha_n^3(t)$  fonksiyonları ise

$$\alpha_n^p(t) = \int_{S_n} \frac{1}{R_S^p} \delta \left( t - \frac{R_S - \hat{\mathbf{k}}_S \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) d\mathbf{r}' \quad p = 2, 3 \quad (6.20)$$

integrali ile verilir ve  $\alpha_n^p(t)$  analitik ifadesinin belirlenmesi Bölüm 6.4'te anlatılacaktır.

#### 6.2.4. Yumuşak Saçıcı için Yakın-Yakın Durumu

Yakın-yakın durumunda noktasal kaynaktan ışılan alanın saçılması sonsuzda olmayan bir noktada gözlenmektedir. Noktasal kaynaktan dolayı oluşan alan denklem (6.18)'de verilmişti. Saçılan alan, denklem (6.6)'dan,

$$\varphi^s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \hat{\mathbf{n}}'_n \cdot \mathbf{R}_S \left[ c^{-1} \partial_t \beta_n^{12}(t) + \beta_n^{13}(t) \right] \quad (6.21)$$

olarak yazılır. Burada  $\beta_n^{12}(t)$  ve  $\beta_n^{13}(t)$ ,

$$\beta_n^{pq}(t) = \int_{S_n} \frac{1}{R^p R_S^q} \delta \left( t - \frac{R + R_S}{c} \right) d\mathbf{r}' \quad \begin{array}{l} p = 1 \\ q = 2, 3 \end{array} \quad (6.22)$$

integrali ile verilir.  $\beta_n^{pq}(t)$ 'nin analitik ifadesinin belirlenmesi Bölüm 6.5'te anlatılacaktır.

#### 6.2.5. Sert Saçıcı için Uzak-Uzak Durumu

Bölüm 6.2.1'de anlatılan yumuşak saçıcılara benzer olarak, gelen alan denklem (6.13)'teki gibi düzlemsel dalgadır ve sonsuzda gözlemlenen saçılan hız potansiyeli denklem (6.12)'den yararlanılarak bulunabilir:

$$\varphi^s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi r c} \sum_{n=1}^N (\hat{\mathbf{n}}'_n \cdot \hat{\mathbf{k}}_S) \partial_t \gamma_n(t - r/c). \quad (6.23)$$

Uzak-uzak durumunda yumuşak ve sert yüzeyler arasındaki fark, denklem (6.14) 'te  $\hat{\mathbf{k}}_i$  'nin yerini denklem (6.23)'te  $\hat{\mathbf{k}}_S$  'nin almasıdır.  $\gamma_n(t)$  'nin tanımı denklem (6.15)'te verilmiştir ve analitik ifadesinin belirlenmesi Bölüm 6.3'te anlatılacaktır.

### 6.2.6. Sert Saçıcı için Uzak-Yakın Durumu

Uzak-yakın durumunda gelen alan denklem (6.13) ile verilen düzlemsel dalgadır ve saçılan alan sonsuzda olmayan bir noktada gözlenmektedir. Bu durumda saçılan alan denklem (6.13), (6.11)'de yerine yazılarak,

$$\varphi^s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \hat{\mathbf{n}}'_n \cdot \mathbf{R} \left[ c^{-1} \partial_t \alpha_n^2(t) + \alpha_n^3(t) \right] \quad (6.24)$$

olarak bulunur. Burada  $\alpha_n^p(t)$ ,  $p = 2, 3$ ,

$$\alpha_n^p(t) = \int_{S_n} \frac{1}{R^p} \delta \left( t - \frac{R + \hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) d\mathbf{r}' \quad p = 2, 3 \quad (6.25)$$

integrali ile tanımlanır.  $\alpha_n^p(t)$  'nin analitik ifadesinin belirlenmesi Bölüm 6.4'te anlatılacaktır.

### 6.2.7. Sert Saçıcı için Yakın-Uzak Durumu

Bölüm 6.2.3'e benzer olarak, gelen alan denklem (6.18) ile verilen noktasal kaynaktan yayılan küresel dalgalardır ve sonsuzda gözlenen saçılan hız potansiyeli

$$\varphi^s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi c} \sum_{n=1}^N (\hat{\mathbf{n}}'_n \cdot \hat{\mathbf{k}}_S) \partial_t \alpha_n^1(t - r/c) \quad (6.26)$$

olarak bulunur. Burada  $\alpha_n^1(t)$

$$\alpha_n^1(t) = \int_{S_n} \frac{1}{R_S} \delta \left( t - \frac{R_S - \hat{\mathbf{k}}_S \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) d\mathbf{r}' \quad (6.27)$$

integrali ile tanımlanır.  $\alpha_n^1(t)$ 'nin analitik ifadesinin belirlenmesi Bölüm 6.4'te anlatılacaktır.

### 6.2.8. Sert Saçıcı için Yakın-Yakın Durumu

Yakın-yakın durumda noktasal kaynaktan yayılan küresel dalgaların saçılmaları, sonsuzda olmayan bir noktada gözlenmektedir. Denklem (6.11) ve (6.18) kullanılarak saçılan hız potansiyeli

$$\varphi^s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \hat{\mathbf{n}}'_n \cdot \mathbf{R} \left[ c^{-1} \partial_t \beta_n^{21}(t) + \beta_n^{31}(t) \right] \quad (6.28)$$

olarak bulunur. Burada  $\beta_n^{21}(t)$  ve  $\beta_n^{31}(t)$ , denklem (6.22)'de  $p = 2, 3$  ve  $q = 1$  ile verilir.  $\beta_n^{pq}(t)$ 'nin analitik ifadesinin belirlenmesi Bölüm 6.5'te anlatılacaktır.

### 6.3. $\gamma_n(t)$ 'nin Analitik İfadesi

Bu bölümde  $\gamma_n(t)$ 'nin analitik ifadesinin belirlenmesi anlatılacaktır. RD yorumunda, Dirac delta fonksiyonunun argümanı RD'nin türünü belirler. RD türüne göre, yüzey integralleri, integral bölgesi ile RD'nin tanımladığı geometrinin kesişimi sonucu oluşan çizgi üzerinden integrale dönüştürülür. Burada "RD'nin tanımladığı geometri" ile "verilmiş bir  $t$  anı için Dirac delta fonksiyonunun argümanını sıfır yapan konumların tanımladığı geometri" kastedilmektedir. Örneğin, denklem (6.15)'te, Dirac delta fonksiyonun değişkenini sıfır yapan  $\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}' = \frac{ct}{2}$ , normal  $\mathbf{k}_r$  yönünde olan ve  $c/2$  hızı ile ilerleyen bir düzlem tanımlamaktadır. Denklem (6.15)'teki integral, integral bölgesi  $S_n$  ve normal  $\mathbf{k}_r$  olan düzlemin kesişimi üzerinden olan bir çizgi integrali olarak yorumlanabilir. Böylece  $\gamma_n(t)$ , üçgen ve düzlem kesişimi sonucu oluşan doğru parçasının büyüklüğü ile verilebilir. Bu sonuç  $\gamma_n(t)$ 'nin zamana göre integrali alınarak görülebilir. Dirac delta fonksiyonunun (A.3) ile verilen özelliği kullanılarak  $\gamma_n(t)$ 'in zaman göre integralinin üçgen alanını ( $A_n$ ) verdiği gösterilebilir:

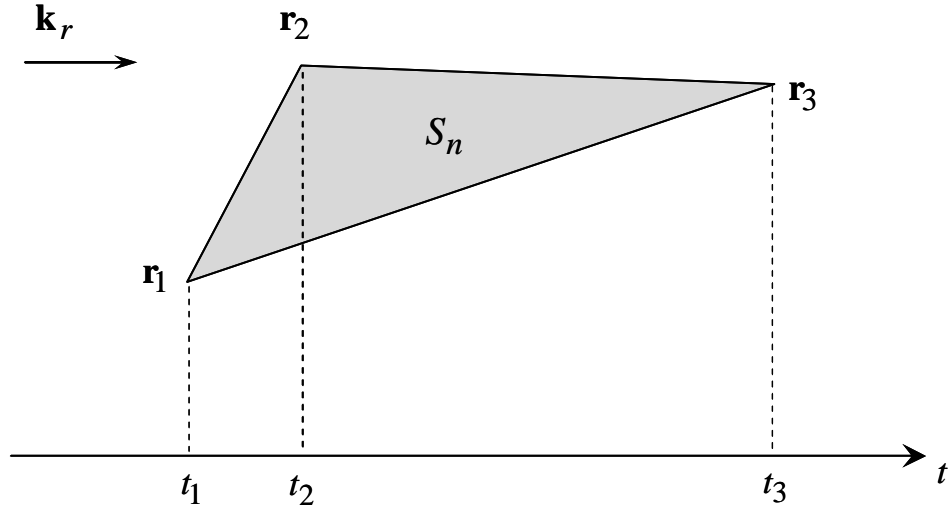
$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma_n(t) dt = \int_{S_n} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{2}{c} \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}'\right) dt d\mathbf{r}' = A_n. \quad (6.29)$$

$\gamma_n(t)$  anlık değerleri ise  $S_n$  ve düzlem kesişimi sonucu oluşan dilimleri verir. Düzlem ve üçgenin kesişimi için analitik ifade bulmak için, düzlem ile üçgenin köşe noktalarının kesişim zamanları belirlenmelidir. Düzlem ile üçgenin köşe noktalarının kesişim zamanları,  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  üçgen köşeleri olmak üzere,  $t_i = 2c^{-1} \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_i, i = 1, 2, 3$  olarak belirlenebilir. Şekil 6.1'de gösterilen kesişim sırasıyla,  $\gamma_n(t)$ 'nin analitik ifadesi

$$\gamma_n(t) = \begin{cases} \frac{2A_n}{(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)} \frac{(t - t_1)}{(t_2 - t_1)}; & t_1 < t < t_2 \\ \frac{2A_n}{(t_3 - t_1)(t_2 - t_3)} \frac{(t - t_3)}{(t_2 - t_3)}; & t_2 < t < t_3 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (6.30)$$

olarak yazılabilir. Denklem (6.30),  $\gamma_n(t)$  için genel formül olmasına karşın, ortaya çıkan iki özel durum ayrı olarak incelenmelidir: (i)  $\mathbf{k}_r, S_n$  yüzeyinin normali ile aynı yönde olabilir. Bu durumda tüm kesişim anları aynı çıkar  $t_1 = t_2 = t_3$ . Böylece Dirac delta fonksiyonu integral değişkeninden bağımsız hale gelir ve  $\gamma_n(t) = A_n \delta(t - t_1)$  olarak bulunur. (ii)  $\hat{\mathbf{k}}_i = \hat{\mathbf{k}}_s$  olduğu durumda  $\mathbf{k}_r = 0$ 'dır. Önceki duruma benzer olarak, bu durumda da  $\gamma_n(t) = A_n \delta(t)$  olarak bulunur.

Denklem (6.30), özel durumları ile birlikte,  $\gamma_n(t)$ 'nin analitik ifadesini vermektedir. Ancak  $\gamma_n(t)$  zaman örneklerinin belirlenmesi zaman adımı büyüklüğüne ve üçgen büyüklüğüne bağlıdır. Diğer bir sorun ise özel durumlarda görülen Dirac delta fonksiyonları  $t$ 'nin belli değerleri için ortaya çıkmaktadır ve bu değerler zaman adımı seçiminden dolayı kolayca atlanabilir. SKA büyüklüğü frekansa bağlı olarak belirlenen bir değer olduğundan,  $\gamma_n(t)$  yerine, hesaplamaların  $\gamma_n(t)$ 'nin Fourier dönüşümü olan  $\gamma_n(\omega)$  ile frekans uzayında yapılması özel durumların atlanması gibi problemleri ortadan kaldırır.  $\gamma_n(\omega), \gamma_n(t)$ 'nin Fourier dönüşümü alınarak,



Şekil 6.1. Üçgen ile düzlem kesişimi.

$$\gamma_n(\omega) = \begin{cases} \frac{2A_n}{\omega^2} \left[ \frac{e^{-j\omega t_1}}{(t_2 - t_1)(t_1 - t_3)} + \frac{e^{-j\omega t_2}}{(t_3 - t_2)(t_2 - t_1)} + \frac{e^{-j\omega t_3}}{(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)} \right]; & t_1 \neq t_2 \neq t_3 \\ \frac{2A_n e^{-j\omega t_2} (j\omega t_2 - j\omega t_i + 1) - e^{-j\omega t_i}}{\omega^2 (t_2 - t_i)^2}; & t_k = t_2 \neq t_i \quad (6.31) \\ A_n e^{-j\omega t_2}; & t_1 = t_2 = t_3 \\ A_n; & \mathbf{k}_r = 0 \end{cases}$$

olarak belirlenebilir.  $\gamma_n(t)$  ve  $\gamma_n(\omega)$ , [47]'de detaylı olarak incelenmiştir. Denklem (6.30)'da köşe noktaları ile düzlemin kesişim anları  $t_1 \leq t_2 \leq t_3$  sırasıyla olmalıdır, ancak frekans uzayında bu sıra denklem (6.31)'deki simetriden dolayı önemini yitirmektedir.

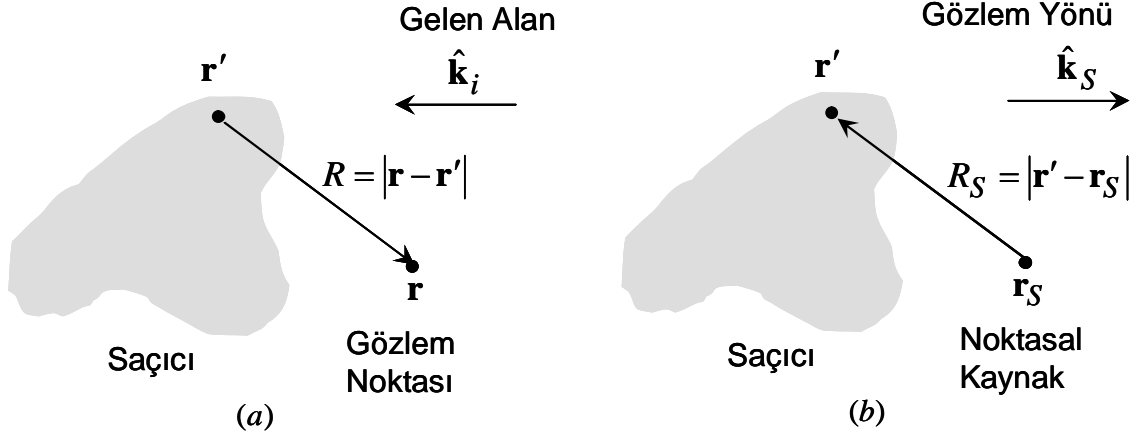
Son olarak  $\gamma_n(t)$ , anlık uyarılmış düzlemsel dalga kaynağı için belirlenen sonuçtur ve istenilen zaman bağımlılığı,  $\gamma_n(t)$  ile uyartım fonksiyonunun konvolüsyonu hesaplanarak belirlenebilir. Ancak  $\gamma_n(t)$ , anlık uyarılmış kaynak için belirlendiğinden, tüm frekans bileşenleri için çözümü içermektedir. İstenilen frekans için çözüm denklem (6.31) ile analitik olarak elde edilebilir. Böylece yöntemin verimliliği, saçıcı yüzeyinin modellenme verimi ile sınırlanmıştır.

## 6.4. $\alpha_n^p(t)$ 'nin Analitik İfadesi

Bu bölümde,  $p = 1, 2, 3$  için  $\alpha_n^p(t)$ 'nin analitik ifadesi belirlenecektir. Bölüm 6.2.2, 6.2.3, 6.2.6 ve 6.2.7'de, farklı değişkenler içeren iki farklı  $\alpha_n^p(t)$  fonksiyonu görülmektedir, örneğin denklem (6.17) ile (6.27) arasındaki fark gibi. Ancak dikkatli incelendiğinde değişkenlerin farklı olmadığı sonucu çıkartılabilir. Yakın-uzak ve uzak-yakın durumlarının tanımına göre, noktasal kaynaktan yayılarak saçılan alanların sonsuzda gözlenmesi durumunda  $\hat{\mathbf{k}}_S$  vektörü ve düzlemsel dalga ile aydınlatılan yüzeyden olan saçılan alanın sonsuzda olmayan bir noktada gözlemlenmesi durumunda  $\hat{\mathbf{k}}_i$  vektörü,  $\alpha_n^p(t)$  fonksiyonunun değişkeni olarak ortaya çıkmaktadır. Şekil 6.2'de görüldüğü gibi, düzlemsel dalganın yayılma yönü  $\hat{\mathbf{k}}_i$  ve gözlem yönü  $\hat{\mathbf{k}}_S$ , doğrultusu aynı fakat zıt yönlü vektörlerdir. Benzer olarak  $R$  ve  $R_S$  aynı uzaklığı belirtmektedirler. Kolaylık olması için,  $\hat{\mathbf{k}}_o = -\hat{\mathbf{k}}_i = \hat{\mathbf{k}}_S$  ve  $R_o = R = R_S$  büyüklüklerini tanımlayalım. Böylece  $\alpha_n^p(t)$ ,  $p = 1, 2, 3$  olmak üzere

$$\alpha_n^p(t) = \int_{S_n} \frac{1}{R_o^p} \delta \left( t - \frac{R_o - \hat{\mathbf{k}}_o \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) d\mathbf{r}' \quad (6.32)$$

olarak yazılabilir. Daha önce bahsedildiği gibi, RD türünü, Dirac delta fonksiyonun argümanı belirler. Denklem (6.32)'de, belli bir zaman anında  $R_o - \hat{\mathbf{k}}_o \cdot \mathbf{r}' = ct$  eşitliğini sağlayarak Dirac delta fonksiyonunun argümanının değişimini sıfır yapan  $\mathbf{r}'$  konumları, üç boyutlu uzayda bir paraboloid tanımlar. Paraboloidin iki boyutlu gösterimi ve tanımlanan büyüklükler Şekil 6.3'te gösterilmiştir. Bir paraboloid, üzerindeki her noktanın (Şekil 6.3'te  $\mathbf{r}'$  noktası)  $R_o - \hat{\mathbf{k}}_o \cdot \mathbf{r}' = 2a$  denklemini sağladığı bir yüzey tanımlar. Burada  $a$  odak uzunluğudur. Özel olarak denklem (6.32)'de oluşan paraboloid, dairesel kesite sahiptir. Bu bölümde kullanılan paraboloid ile ilgili denklemler ve parametreler Ek B'de açıklanmıştır. Dirac delta fonksiyonun (A.1) ile verilen özelliği kullanılarak  $\alpha_n^p(t)$  aşağıdaki gibi yazılabilir:



Şekil 6.2. Uzak-Yakın (a) ve Yakın-Uzak (b) durumları.

$$\alpha_n^p(t) = \frac{c}{2} \int_{S_n} \frac{1}{R_o^p} \delta\left(\frac{ct}{2} - a\right) d\mathbf{r}' . \quad (6.33)$$

$\alpha_n^p(t)$ 'nin analitik ifadesi verilecek adımlar uygulanarak bulunabilir:

- (i) Paraboloid ile  $D_n$  düzlemi kesişimi sonucu oluşacak geometrinin belirlenmesi (Bölüm B.1),
- (ii)  $D_n$  düzlemi üzerinde değişkenlerin uygun koordinat sisteminde tanımlanması,
- (iii) Değişkenlerin paraboloid ( $a$ ) ve yay uzunluğu ( $\theta$ ) olarak dönüştürülmesi
- (iv) Yay uzunluğu üzerinden olan integralin analitik olarak alınması.

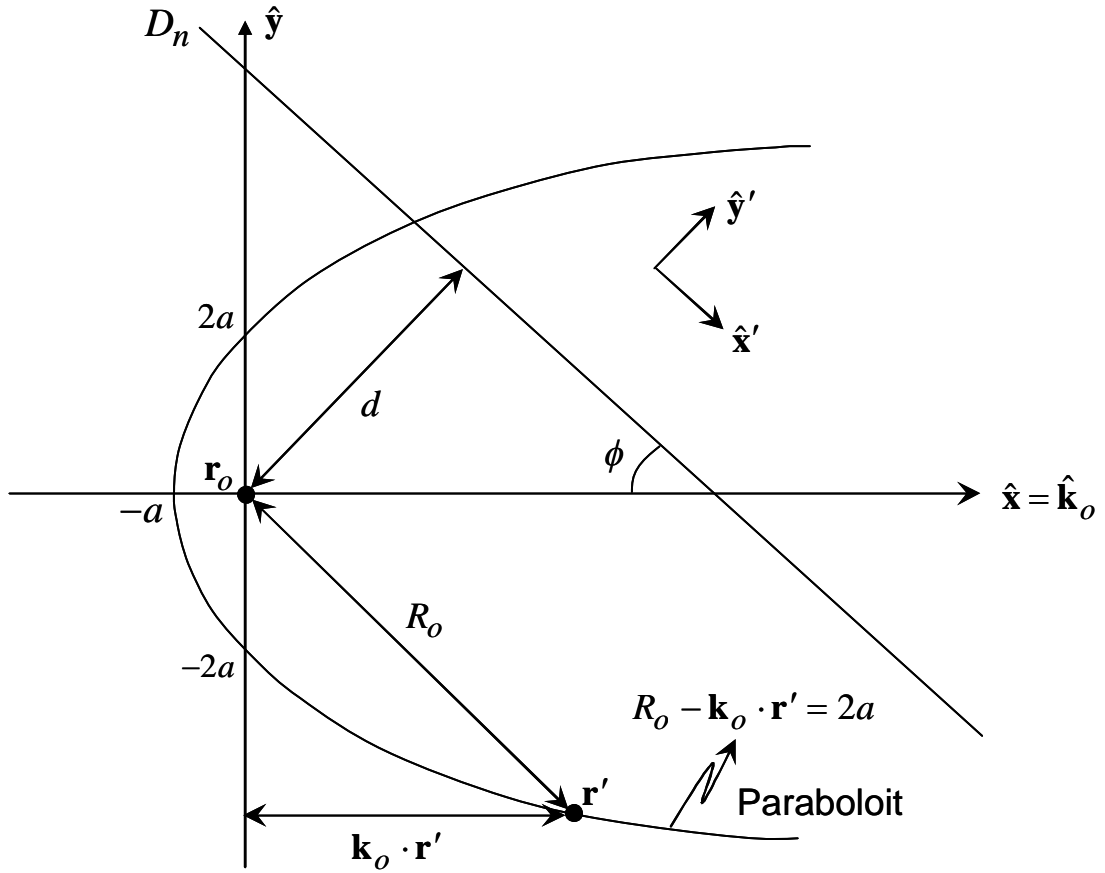
$\alpha_n^p(t)$ 'nin analitik ifadesinin bulunmasından önce  $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{k}}_o$  ve diğer eksenler Şekil 6.3'te gösterildiği gibi olan koordinat sistemini tanımlayalım. Şekil 6.3'te  $D_n$ ,  $S_n$  üçgensel yüzeyini barındıran düzlemi ve  $\phi$  düzlem ile  $x$ -ekseni arasındaki açıyı belirtmektedir.  $\phi$  değerlerine göre üç farklı durum ortaya çıkmaktadır. Bu durumlar Ek B'de detaylı olarak açıklanmıştır. Özet olarak  $\phi = 0$  iken paraboloid ile  $D_n$  düzleminin kesişimi bir parabol vermektedir.  $0 < \phi < \pi/2$  ise kesişim en genel halde elipstir ve  $\phi = \pi/2$  iken kesişim sonucu çemberdir. İlk ve son durumlar, en genel hal

olan ikinci durumun limit halleri olmasına rağmen, integral değişkenleri ve analitik ifadelerin yapısı farklılık göstermektedir. Bu durumlar ayrı olarak incelenecektir.

#### 6.4.1. $\phi = 0$ Durumu

$\phi = 0$  durumunda  $\hat{\mathbf{k}}_o$  vektörü,  $D_n$  düzlemine paraleldir ve Bölüm B.1'de gösterildiği gibi  $D_n$  düzlemi ile paraboloidin kesişimi parabolüdür. Kesişim sonucu oluşan parabolün odak uzunluğu paraboloidinki ile aynıdır, sadece odak noktasının konumu  $D_n$  düzleminin orijine uzaklığına ( $d$ ) bağlı olarak değişir. Denklem (6.33) ile verilen  $\alpha_n^p(t)$  integrali (B.2)'de tanımlanan üslü koordinat sisteminde yazılabilir ve aşağıdaki değişken dönüşümü yapılabilir:

$$x' - x'_m = a \left( \frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} - 1 \right) \quad z' = 2a \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}. \quad (6.34)$$



Şekil 6.3. Paraboloidin ve değişkenlerin gösterimi.

Burada  $x'_m = \frac{d^2}{4a}$ , parabolün odak noktasının  $x'$  bileşenidir. Değişken dönüşümü ile denklem (6.33)

$$\begin{aligned}\alpha_n^p(t) &= \frac{c}{2} \int_{x'z'} \int_{R_o^p} \frac{1}{R_o^p} \delta\left(\frac{ct}{2} - a\right) dz' dx' \\ &= \frac{c}{2} \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \int_{\theta_{\min}(a)}^{\theta_{\max}(a)} \frac{1}{R_o^p} \delta\left(\frac{ct}{2} - a\right) J(a, \theta) d\theta da\end{aligned}\quad (6.35)$$

olarak yazılır. Burada  $\theta_{\max}(a)$  ve  $\theta_{\min}(a)$ , kesişim sonucu oluşan parabolün üçgeni kestiği noktaları veren açılardır.  $\theta_{\max}(a)$  ve  $\theta_{\min}(a)$ 'nın belirlenmesi Bölüm 6.6'da açıklanacaktır.  $J(a, \theta)$ , dönüşümün Jacobian'ıdır:

$$J(a, \theta) = J\left(\frac{\partial(x_S, z_S)}{\partial(a, \theta)}\right) = \frac{a}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \frac{d^2}{4a \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}.\quad (6.36)$$

$J(a, \theta)$  ile birlikte denklem (6.35)'teki integral

$$\alpha_n^p(t) = \frac{c}{2} \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \delta\left(\frac{ct}{2} - a\right) \left( a\psi_1^p(a) + \frac{d^2}{4a} \psi_2^p(a) \right) da\quad (6.37)$$

halini alır. Burada  $\psi_m^p(a)$  aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\psi_m^p(a) = \int_{\theta_{\min}(a)}^{\theta_{\max}(a)} \frac{1}{\sin^{4/m}\left(\frac{\theta}{2}\right) R_o^p} d\theta \quad m = 1, 2.\quad (6.38)$$

$\psi_m^p(a)$  integralleri analitik olarak belirlendikten sonra Dirac delta fonksiyonunun denklem (A.2) ve (A.3) ile verilen özellikleri kullanılarak  $\alpha_n^p(t)$ 'nin analitik ifadesi

$$\alpha_n^p(t) = \begin{cases} \frac{c}{2} \left( a\psi_1^p(a) + \frac{d^2}{4a} \psi_2^p(a) \right)_{a=\frac{ct}{2}} & ; a_{\min} < \frac{ct}{2} < a_{\max} \\ 0 & ; \text{diğer} \end{cases}\quad (6.39)$$

olarak bulunur.

$\psi_m^p(a)$ 'nin analitik ifadesinin belirlenebilmesi için ilk olarak  $R_o$  değişkeni tanımlanmalıdır. Şekil 6.3'ün yardımı ile  $R_o$

$$R_o = \sqrt{d^2 + z'^2 + (x'_m + x')^2} = \frac{8a^2 + d^2 - d^2 \cos(\theta)}{8a \sin^2(\theta/2)} \quad (6.40)$$

olarak yazılabilir. Böylece  $\zeta_1 = \frac{d^2}{8a^2 + d^2} \leq 1$  olmak üzere  $\psi_m^p(a)$  integralleri,

$$\begin{aligned} \psi_1^p(a) &= \left[ \frac{8a}{8a^2 + d^2} \right]^p \int_{\theta_{\min}(a)}^{\theta_{\max}(a)} \frac{\sin^{2p-4}(\theta/2)}{[1 - \zeta_1 \cos(\theta)]^p} d\theta \\ &= 4 \left[ \frac{4a}{8a^2 + d^2} \right]^p \int_{\theta_{\min}(a)}^{\theta_{\max}(a)} \frac{[1 - \cos(\theta)]^{p-2}}{[1 - \zeta_1 \cos(\theta)]^p} d\theta \end{aligned} \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned} \psi_2^p(a) &= \left[ \frac{8a}{8a^2 + d^2} \right]^p \int_{\theta_{\min}(a)}^{\theta_{\max}(a)} \frac{\sin^{2p-2}(\theta/2)}{[1 - \zeta_1 \cos(\theta)]^p} d\theta \\ &= 2 \left[ \frac{4a}{8a^2 + d^2} \right]^p \int_{\theta_{\min}(a)}^{\theta_{\max}(a)} \frac{[1 - \cos(\theta)]^{p-1}}{[1 - \zeta_1 \cos(\theta)]^p} d\theta \end{aligned} \quad (6.42)$$

olarak yazılabilir.  $\psi_m^p(a)$ 'nin analitik ifadeleri Bölüm D.2'de verilen integraller ile analitik olarak belirlenebilir.

#### 6.4.2. $0 < \phi < \pi/2$ Durumu

Bu durumda parabolit ve  $D_n$  düzleminin kesişimi elipstir. Denklem (6.33)'te verilen integral (B.2)'de tanımlanan üslü koordinat sisteminde önceki bölümdeki gibi yazılabilir ve kesişimin elips çıkmasından dolayı değişken dönüşümü aşağıdaki gibi yapılabilir:

$$x' - x'_m = a_S \cos(\theta) \quad y' = b_S \sin(\theta). \quad (6.43)$$

Burada  $x'_m = \frac{\cos(\phi)}{\sin^2(\phi)} [2a + d \sin(\phi)]$ , elipsin merkezinin  $x'$  bileşenidir.  $a_S$  ve  $b_S$ ,

sırasıyla, denklem (B.6) ve (B.7) ile verilen elipsin ana ve tali eksen uzunluklarıdır.

Sonuç olarak denklem (6.33)'te verilen integral denklem (6.35)'teki gibi yazılabilir.

Bu durumda  $J(a, \theta)$

$$J(a, \theta) = \cos(\theta) \frac{4 \cos(\phi) \sqrt{a^2 + da \sin(\phi)}}{\sin^3(\phi)} + \frac{4a + 2d \sin(\phi)}{\sin^3(\phi)} \quad (6.44)$$

olarak bulunur ve  $\alpha_n^P(t)$  integrali aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\alpha_n^P(t) = \frac{c}{2} \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \delta\left(\frac{ct}{2} - a\right) \left(\xi_1 \psi_1^P(a) + \xi_2 \psi_2^P(a)\right) da. \quad (6.45)$$

Burada  $\xi_1$  ve  $\xi_2$  sabitleri:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{2(2a + d \sin(\phi))}{\sin^3(\phi)} \\ \xi_2 &= \frac{4 \cos(\phi) \sqrt{a^2 + da \sin(\phi)}}{\sin^3(\phi)}, \end{aligned} \quad (6.46)$$

ve  $\tilde{\psi}_m^P(a)$  ise

$$\tilde{\psi}_m^P(a) = \int_{\theta_{\min}(a)}^{\theta_{\max}(a)} \frac{\cos^{m-1}(\theta)}{R_o^P} d\theta \quad m = 1, 2 \quad (6.47)$$

integralleri ile tanımlıdır. Burada  $\theta_{\max}(a)$  ve  $\theta_{\min}(a)$ , kesişim sonucu oluşan elipsin üçgeni kestiği noktaları veren açılarıdır.  $\theta_{\max}(a)$  ve  $\theta_{\min}(a)$ 'nın belirlenmesi Bölüm 6.6'da açıklanacaktır. Dirac delta fonksiyonunun denklem (A.2) ve (A.3) ile verilen özellikleri kullanılarak  $\alpha_n^P(t)$ 'nin analitik ifadesi

$$\alpha_n^P(t) = \begin{cases} \frac{c}{2} \left( \xi_1 \tilde{\psi}_1^P(a) + \xi_2 \tilde{\psi}_2^P(a) \right) \Big|_{a=\frac{ct}{2}} & ; a_{\min} < \frac{ct}{2} < a_{\max} \\ 0 & ; \text{diğer} \end{cases} \quad (6.48)$$

olarak bulunur.

Bu durumda  $R_o$  mesafesi

$$\begin{aligned}
R_o &= \sqrt{d^2 + b_S^2 \sin^2(\theta) + (x'_m + a_S \cos(\theta))^2} \\
&= \frac{1}{\sin^2(\phi)} \left[ \cos(\theta) \left( 2 \cos(\phi) \sqrt{a^2 + ad \sin(\phi)} \right) + 2a + d \sin(\phi) \right] \quad (6.49)
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir ve  $\tilde{\psi}_m^P(a)$  integralleri,  $\zeta_2 = \frac{2 \cos(\phi) \sqrt{a(a + d \sin(\phi))}}{2a + d \sin(\phi)}$  olmak üzere

$$\tilde{\psi}_m^P(a) = \left[ \frac{\sin^2(\phi)}{2a + d \sin(\phi)} \right]^p \int_{\theta_{\min}(a)}^{\theta_{\max}(a)} \frac{\cos^{m-1}(\theta)}{[1 + \zeta_2 \cos(\theta)]^p} d\theta \quad m=1,2 \quad (6.50)$$

formunu alır.  $0 < \phi < \pi/2$  olduğu sürece  $\zeta_2$ 'nin değerinin  $[0,1]$  aralığında olduğuna dikkat edilmelidir. Denklem (6.50) ile verilen  $\tilde{\psi}_m^P(a)$ 'nin analitik ifadesi Bölüm D.2'de verilen integraller ile analitik olarak belirlenebilir.

### 6.4.3. $\phi = \pi/2$ Durumu

Bu durumda  $\hat{\mathbf{k}}_o$  vektörü  $D_n$  düzlemine diktir ve paraboloid ile  $D_n$  düzleminin kesişimi, paraboloidin kesiti olan çemberi verir. Bölüm B.1'de gösterildiği gibi dairenin yarıçapı  $a_r^2 = 4a[a + d]$ 'dir. Denklem (6.33) ile verilen integral, (B.2)'de tanımlanan üslü koordinatlarda yazılabilir ve kesişim çember olduğundan, değişkenler silindrisel koordinatlara

$$x' = a_r \cos(\theta) \quad z' = a_r \sin(\theta) \quad (6.51)$$

olarak dönüştürülebilir. Çemberin merkezi  $x'z'$ -düzleminin orijindedir ve  $J(a, \theta) = 4a + 2d$  olarak bulunur. Bu durumda  $R_o = \sqrt{d^2 + a_r^2}$  olarak bulunur. Böylece denklem (6.33),

$$\begin{aligned}
\alpha_n^P(t) &= \frac{c}{2} \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \delta\left(\frac{ct}{2} - a\right) \psi(a) \frac{[4a + 2d]}{[d^2 + a_r^2]^{p/2}} da \\
&= c \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \delta\left(\frac{ct}{2} - a\right) \frac{\psi(a)}{[2a + d]^{p-1}} da \quad (6.52)
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada  $\psi(a)$ , aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\psi(a) = \int_{\theta_{\min}(a)}^{\theta_{\max}(a)} d\theta = \theta_{\max}(a) - \theta_{\min}(a). \quad (6.53)$$

Burada  $\theta_{\max}(a)$  ve  $\theta_{\min}(a)$ , kesişim sonucu oluşan çemberin üçgeni kestiği noktaları veren açılardır.  $\theta_{\max}(a)$  ve  $\theta_{\min}(a)$ 'nın belirlenmesi Bölüm 6.6'da açıklanacaktır. Dirac delta fonksiyonunun denklem (A.2) ve (A.3) ile verilen özellikleri kullanılarak  $\phi = \pi/2$  durumu için  $\alpha_n^p(t)$ 'nin analitik ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\alpha_n^p(t) = \begin{cases} \frac{c}{[2a+d]^{p-1}} [\theta_{\max}(a) - \theta_{\min}(a)] & ; a_{\min} < \frac{ct}{2} < a_{\max} \\ 0 & ; \text{diğer} \end{cases} \quad (6.54)$$

## 6.5. $\beta_n^{pq}(t)$ 'nin Analitik İfadesi

Bu bölümde denklem (6.22)'de verilen yumuşak saçıcılar için yakın-yakın durumunda ortaya çıkan  $\beta_n^{pq}(t)$ 'nin analitik ifadesinin,  $p=1$  ve  $q=2,3$  iken belirlenmesi anlatılacaktır. Belirlenen analitik ifadeler, Bölüm 6.2.8'de verilen sert saçıcılar için yakın-yakın durumuna ( $\beta_n^{pq}(t)$ ;  $p=2,3$  ve  $q=1$  iken) koordinat sistemi ile oynanarak veya analitik ifadelerde  $R$  ile  $R_S$  yer değiştirilerek kolayca uyarlanabilir.  $\beta_n^{pq}(t)$ 'de,  $R_S$  noktasal kaynak ile saçıcı yüzeyi arasındaki mesafeyi,  $R$  saçıcı yüzeyi ile gözlem noktası arasındaki mesafeyi tanımlamaktadır. Daha önce bahsedildiği gibi, RD'nin türünü Dirac delta fonksiyonunun değişkeni belirler.  $\beta_n^{pq}(t)$ 'de, Dirac delta fonksiyonunun değişkeni  $R+R_S$ 'dir ve  $R+R_S$  üç-boyutlu uzayda elipsoit tanımlar. Özel olarak  $\beta_n^{pq}(t)$ 'de oluşan elipsoidin tali eksen uzunlukları eşittir. Bu tür elipsoide, Bölüm B.2'de anlatıldığı gibi *prolate spheroid* denmektedir [73]-[74]. Bir elipsoit, üzerindeki herhangi bir noktanın odaklara olan uzunluklarının toplamının  $(R+R_S)=2a$  eşitliğini sağlayan yüzeyi tanımlar. Burada

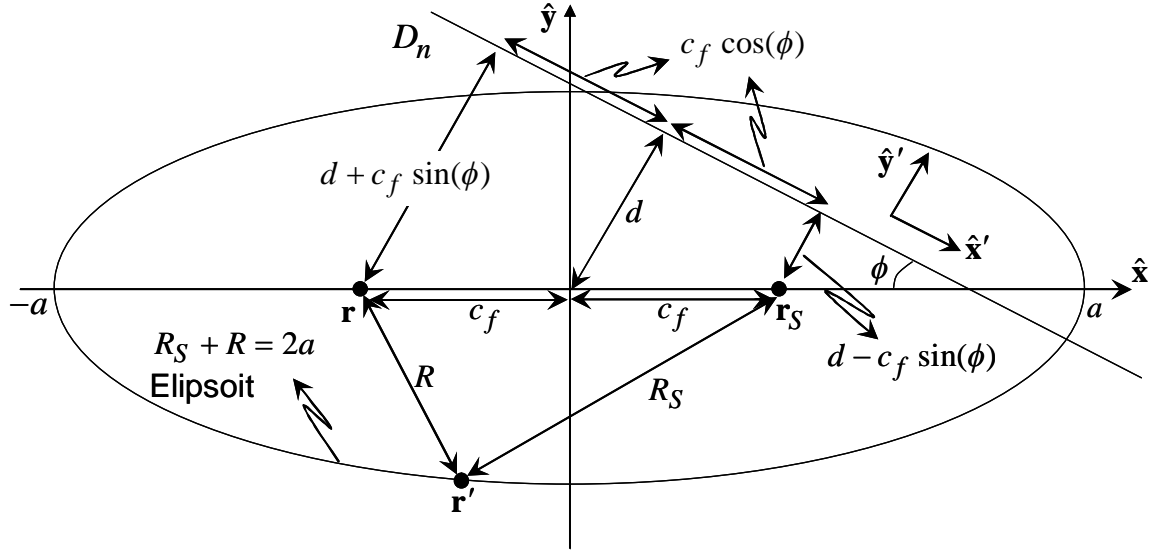
$a$  elipsoidin ana eksen uzunluğunu belirtmektedir. Bu bölümde kullanılan elipsoit ile ilgili parametreler ve değişkenler Bölüm B.2’de detaylı olarak anlatılmaktadır. Dirac delta fonksiyonunun (A.1) ile verilen özelliği kullanılarak  $\beta_n^{pq}(t)$

$$\beta_n^{pq}(t) = \frac{c}{2} \int_{S_n} \frac{1}{R^p R_S^q} \delta\left(\frac{ct}{2} - a\right) d\mathbf{r}' \quad (6.55)$$

olarak yazılabilir.  $\beta_n^{pq}(t)$ ’nin analitik ifadesini bulmak için kullanılacak adımlar, önceki bölümdeki ile benzerdir:

- (i) Elipsoit ile  $D_n$  düzleminin kesişimi sonucu oluşan geometrik yapının belirlenmesi (Bölüm B.2),
- (ii)  $D_n$  düzlemi üzerinde uygun koordinat sisteminin tanımlanması,
- (iii) Değişkenlerin elipsoit ( $a$ ) ve yay uzunluğu ( $\theta$ ) olarak dönüştürülmesi,
- (iv) Yay uzunluğu üzerinden olan integralin analitik olarak alınması.

Elipsoidin üç boyutlu uzayda gösterimi için Şekil 6.4’te gösterildiği gibi, merkezi kaynak ve gözlemci noktalarının ortası olan koordinat sistemi tanımlanabilir. Tanımlanan koordinat sisteminin  $x$ -ekseni, elipsoidin ana eksenine doğrultusundadır. Kesişimin belirlenmesinde  $D_n$  düzlemi ile  $x$ -ekseninin kesişim açısı  $\phi$  önemlidir. Ancak en genel hal olan  $0 \leq \phi \leq \pi/2$  durumu için geliştirilen analitik ifadeler her  $\phi$  değeri için geçerlidir.  $D_n$  düzlemi ile elipsoidin kesişimi en genel halde elips verir. Her ne kadar  $0 \leq \phi \leq \pi/2$  durumu için geliştirilen ifadeler geçerli olsa da, özel olarak,  $\phi = \pi/2$  olduğu durum için analitik ifadeler ayrıca incelenecektir. Bu durumda kesişim sonucu daire olduğundan analitik ifadeler basit olarak ifade edilebilmektedir.



Şekil 6.4. Elipsoidin ve değişkenlerin gösterimi.

### 6.5.1. $0 \leq \phi \leq \pi/2$ Durumu

Bu durumda elipsoid ve  $D_n$  düzleminin kesişimi en genel halde, Bölüm B.2’de gösterildiği gibi, eliptir ve denklem (6.55) ile verilen integral (B.2)’de verilen üslü koordinat sisteminde yazılabilir ve üslü koordinatlar eliptik koordinat sistemine

$$x' - x'_m = a_S \cos(\theta) \quad y' = b_S \sin(\theta) \quad (6.56)$$

olarak dönüştürülebilir. Burada  $x'_m = \frac{dc_f^2 \cos(\phi) \sin(\phi)}{a^2 - c_f^2 \cos^2(\phi)}$ , elipsin merkezinin  $x'$ -

bileşenidir, Şekil 6.4 ile uyumlu olarak,  $a_S$  ve  $b_S$ , denklem (B.12) ve (B.13) ile verilen, elipsin ana ve tali eksenleridir.  $c_f = 0.5|\mathbf{r} - \mathbf{r}_S|$  elipsin odak uzunluğudur. Değişkenlerin değiştirilmesi ile denklem (6.55),

$$\begin{aligned} \beta_n^{pq}(t) &= \frac{c}{2} \int_{x'z'} \int_{R^p R_S^q} \frac{1}{R^p R_S^q} \delta\left(\frac{ct}{2} - a\right) dz' dx' \\ &= \frac{c}{2} \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \int_{\theta_{\min}(a)}^{\theta_{\max}(a)} \frac{1}{R^p R_S^q} \delta\left(\frac{ct}{2} - a\right) J(a, \theta) d\theta da \end{aligned} \quad (6.57)$$

olarak yazılabilir. Burada  $\theta_{\max}(a)$  ve  $\theta_{\min}(a)$ , kesişim sonucu oluşan elipsin üçgeni kestiği noktaları veren açılarıdır.  $\theta_{\max}(a)$  ve  $\theta_{\min}(a)$ 'nın belirlenmesi Bölüm 6.6'da açıklanacaktır.  $J(a, \theta)$  ise

$$J(a, \theta) = \xi_1 + \xi_2 \cos(\theta) + \xi_3 \cos^2(\theta) \quad (6.58)$$

olarak verilebilir ve katsayılar

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_4 a^2 \left[ \left( a^2 - c_f^2 \cos^2(\phi) \right)^2 - c_f^2 d^2 \sin^2(\phi) \right] \\ \xi_2 &= -2\xi_4 d c_f^2 \cos(\phi) \sin(\phi) a \sqrt{a^2 - c_f^2} \sqrt{a^2 - c_f^2 \cos^2(\phi) - d^2} \\ \xi_3 &= -\xi_4 c_f^2 \cos^2(\phi) (a^2 - c_f^2) (a^2 - c_f^2 \cos^2(\phi) - d^2) \\ \xi_4 &= \left[ a^2 - c_f^2 \cos^2(\phi) \right]^{-5/2} \end{aligned} \quad (6.59)$$

olarak tanımlanır. Bu durumda  $\beta_n^{pq}(t)$ ,

$$\beta_n^{pq}(t) = \frac{c}{2} \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \delta\left(\frac{ct}{2} - a\right) \left[ \xi_1 \bar{\psi}_1^{pq}(a) + \xi_2 \bar{\psi}_2^{pq}(a) + \xi_3 \bar{\psi}_3^{pq}(a) \right] da \quad (6.60)$$

olarak yazılabilir. Denklem (6.60)'ta  $\bar{\psi}_m^{pq}(a)$  aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\bar{\psi}_m^{pq}(a) = \int_{\theta_{\min}(a)}^{\theta_{\max}(a)} \frac{\cos^{m-1}(\theta)}{R^p R_S^q} d\theta \quad m = 1, 2, 3. \quad (6.61)$$

$\bar{\psi}_m^{pq}(a)$  integralleri analitik olarak belirlenirse,  $\beta_n^{pq}(t)$ 'nin analitik ifadesi Dirac delta fonksiyonunun denklem (A.2) ve (A.3) ile verilen özellikleri kullanılarak aşağıdaki gibi belirlenir:

$$\beta_n^{pq}(t) = \begin{cases} \frac{c}{2} \left[ \xi_1 \bar{\psi}_1^{pq}(a) + \xi_2 \bar{\psi}_2^{pq}(a) + \xi_3 \bar{\psi}_3^{pq}(a) \right] \Big|_{a=\frac{ct}{2}} & ; a_{\min} < \frac{ct}{2} < a_{\max} \\ 0 & ; \text{diğer.} \end{cases} \quad (6.62)$$

Denklem (6.61)'de  $R$  ve  $R_S$ 'nin belirlenmesi önemlidir. Şekil 6.4'ten yararlanılarak  $R$  ve  $R_S$ ,

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(d + c_f \sin(\phi))^2 + (c_f \cos(\phi) + a_S(a) \cos(\theta) + x'_m)^2 + (b_S(a) \sin(\theta))^2}, \quad (6.63) \\ &= \gamma_{2+} + \gamma_1 \cos(\theta) = \gamma_{2+}^{-1} (1 + \gamma_3 \cos(\theta)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_S &= \sqrt{(d - c_f \sin(\phi))^2 + (c_f \cos(\phi) - a_S(a) \cos(\theta) - x'_m)^2 + (b_S(a) \sin(\theta))^2} \quad (6.64) \\ &= \gamma_{2-} - \gamma_1 \cos(\theta) = \gamma_{2-}^{-1} (1 - \gamma_4 \cos(\theta)) \end{aligned}$$

olarak bulunabilir. Burada  $\gamma_1$  ve  $\gamma_{2\pm}$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{c_f \cos(\phi) \sqrt{a^2 - c_f^2} \sqrt{a^2 - c_f^2 \cos^2(\phi)} - d^2}{a^2 - c_f^2 \cos^2(\phi)} \quad (6.65) \\ \gamma_{2\pm} &= \frac{a(a^2 - c_f^2 \cos^2(\phi) \pm dc_f \sin(\phi))}{a^2 - c_f^2 \cos^2(\phi)} \end{aligned}$$

ile verilir ve  $\gamma_3 = \gamma_1/\gamma_{2+}$ ,  $\gamma_4 = \gamma_1/\gamma_{2-}$ 'dir. Dikkat edilirse  $0 < \phi < \pi/2$  olduğu sürece,  $\gamma_3$  ve  $\gamma_4$ 'ün değerleri  $[0,1]$  arasındadır. Sonuç olarak denklem (6.61)'deki  $\bar{\psi}_m^{pq}(a)$  integralleri

$$\bar{\psi}_m^{pq}(a) = \frac{1}{\gamma_{2+}^p \gamma_{2-}^q} \int_{\theta_{\min}(a)}^{\theta_{\max}(a)} \frac{\cos^{m-1}(\theta)}{[1 + \gamma_3 \cos(\theta)]^p [1 - \gamma_4 \cos(\theta)]^q} d\theta \quad (6.66)$$

halini alır. Denklem (6.66) ile verilen integrallerin analitik ifadeleri Bölüm D.2'de verilen integraller ile analitik olarak belirlenebilir. Geliştirilen analitik ifadeler  $\phi = 0$ ,  $\phi = \pi/2$  veya  $d = 0$  olduğu durumlarda geçerlidir.

### 6.5.2. $\phi = \pi/2$ Durumu

Bu bölümde  $\phi = \pi/2$  durumu için analitik ifadeler elde edilecektir. Bu durum için bulunacak analitik ifadeler sadece incelemek amacıyla sunulacaktır. Bir önceki bölümde bulunan ifadeler en genel hal içindir ve belirtildiği gibi her durumda geçerlidir.

Özel olarak  $\phi = \pi/2$  durumunda,  $x'_m = 0$  ve  $a_S = b_S$ 'dir. Denklem (6.57)'de,  $J(a, \theta) = a^{-3}(a^4 - c^2 d^2)$  olur ve  $\beta_n^{pq}(t)$

$$\beta_n^{pq}(t) = \frac{c}{2} \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \delta\left(\frac{ct}{2} - a\right) a^{-3} (a^4 - c^2 d^2) \int_{\theta_{\min}(a)}^{\theta_{\max}(a)} \frac{1}{R^p R_S^q} d\theta da \quad (6.67)$$

olarak yazılır.  $R$  ve  $R_S$ , denklem (6.63) ve (6.64) aracılığı ile bulunabilir. Bu durumda  $\gamma_1 = 0$  ve  $\gamma_{2\pm} = a^{-1}(a^2 \pm dc_f)$ 'dir. Böylece  $\beta_n^{pq}(t)$ 'nin analitik ifadesi

$$\beta_n^{pq}(t) = \begin{cases} \frac{c(a^4 - c^2 d^2)}{2a^3 \gamma_{2+}^p \gamma_{2-}^q} [\theta_{\max}(a) - \theta_{\min}(a)] \Big|_{a=\frac{ct}{2}} & ; a_{\min} < \frac{ct}{2} < a_{\max} \\ 0 & ; \text{diğer} \end{cases} \quad (6.68)$$

olarak bulunur.

## 6.6. İntegral Sınırlarının Belirlenmesi

Bölüm 6.4 ve 6.5'te genel olarak  $\psi_m^p(a)$ ,  $\tilde{\psi}_m^p(a)$ ,  $\psi(a)$  ve  $\bar{\psi}_m^p(a)$  ile gösterilen yay üzerinden integrallerin analitik ifadelerinin belirlenmesi için standart integral yapılarına indirgenen ifadeler verilmiştir ve bu integrallerin sonuçları Bölüm D.2'de sunulmuştur. Analitik ifadeler belirlendikten sonra integral sınırlarının belirlenmesi gereklidir:  $\theta_{\max}(a)$ ,  $\theta_{\min}(a)$ . Daha önce açıklandığı gibi,  $\theta_{\max}(a)$  ve  $\theta_{\min}(a)$ , parabol ve elipsin üçgeni kesmesi ile oluşan yayın sınırlarını belirtmektedir. Ancak parabol ve elips üçgeni her zaman iki noktada kesmeyebilir. Bu durumda birden fazla yay oluşma ihtimali vardır. Oluşan yaylar için sınırlar belirlenip toplanmalıdır. Tüm kesişim noktaları belirlendikten sonra, üçgen içerisinde kalan yayların sınırları belirlenir ve yay uzunluğu üzerinden olan integrallerin analitik ifadesinde yerine yazılarak toplanır. Parabol ve elipsin üçgeni kestiği noktalar, sırasıyla, Bölüm B.3 ve B.4'te geliştirilen analitik formüller kullanılarak bulunabilir. Böylece yay üzerinden integraller belirlenmiş olur. Benzer bir işlem çember ile üçgen kesişimi için [28]'de gösterilmiştir.

## 6.7. Nümerik Örnekler

Bu bölümde 6. bölümde geliştirilen RD yorumu ile elde edilen analitik ifadelerin doğruluğu, standart nümerik frekans uzayı KY ile karşılaştırılarak gösterilecektir. Analitik ifadeler ile zaman uzayında elde edilen sonuçlar frekans uzayına dönüştürülerek, frekans uzayında nümerik KY ile elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılacaktır. Frekans uzayı değerleri, zaman uzayı sonuçlarının ayrık Fourier dönüşümü hesaplanması ile elde edilecektir.

KY yöntemi (ve FO yaklaşımı) ile yapılan çözümlerin kırınım dalgaları veya çoklu saçılma etkilerini içermediğine daha önce belirtilmişti. Bu durum göz önünde bulundurularak nümerik örneklerde incelenecek saçıcı küre olarak seçilmiştir. Küreden saçılma incelendiğinde, keskin kenarlara sahip olmadığından kırınım görülmez. Bundan dolayı küreden olan saçılmanın incelenmesi, KY ve PO yöntemleri için uygun bir örnektir. Ayrıca üçgenler ile ayrıklaştırılmış küre incelenirken, geliştirilen analitik ifadelerin doğruluğu farklı konumlanmış üçgenler için test edilebilir. Ancak üçgenler ile ayrıklaştırılmış kürede ayrıklaştırma hatası vardır ve çok yüksek frekanslarda bu hata sonuçları etkiler. Örneklerde 4500 üçgen ile ayrıklaştırılmış birim küre kullanılmıştır. Tüm örneklerde dalganın ortamdaki hızı  $c = 343$  m/s ve zaman adımı büyüklüğü  $\Delta t = c^{-1}$  ms olarak seçilmiştir. Örneklerde uzak durumları için gelen düzlemsel alanın ifadesi  $\hat{\mathbf{k}}_i = (1, \theta_i, \phi_i)$  ve gözlem yönü  $\hat{\mathbf{k}}_S = (1, \theta_g, \phi_g)$  olarak küresel koordinatlarda verilmiştir. Benzer olarak yakın durumları için noktasal kaynağın konumu  $\mathbf{r}_S = (r_S, \theta_S, \phi_S)$  ve gözlem noktasının konumu  $\mathbf{r} = (r_g, \theta_g, \phi_g)$  ile küresel koordinatlarda verilmiştir. Grafiklerde “RDKY” Radon dönüşümü yorumu ile elde edilmiş analitik ifadeler kullanılarak elde edilen KY sonuçları, “SKY” standart frekans uzayı KY ile elde edilen sonuçları belirtmek için kullanılmıştır.

İlk örnekte, uzak-uzak durumu için geliştirilen analitik ifadelerin doğrulanması amacıyla birim kürenin SKA değeri incelenecektir. SKA'nın tanımı

$$\sigma_{SKA} = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r \frac{|\varphi^s(\mathbf{r})|^2}{|\varphi^i(\mathbf{r})|^2} \quad (6.69)$$

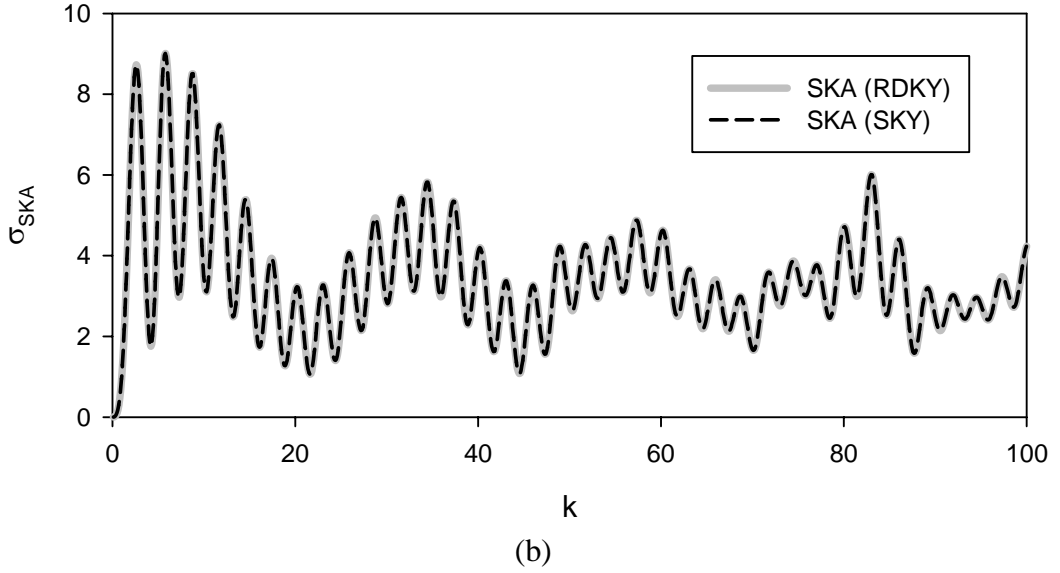
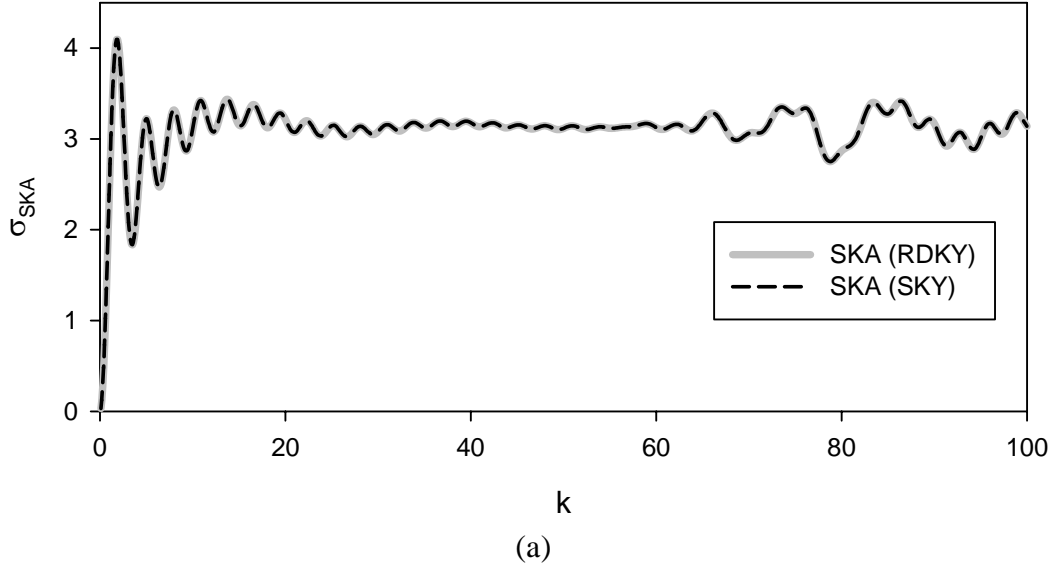
formülü ile verilir. Örnekte gelen alanın ilerleme yönü  $\theta_i = 120^\circ$ ,  $\phi_i = 45^\circ$  ve gözlem yönü  $\theta_g = 45^\circ$ ,  $\phi_g = 30^\circ$  olarak seçilmiştir. Bölüm 6.2.1’de yumuşak saçıcılar için ve Bölüm 6.2.5’te sert saçıcılar için geliştirilmiş olan yöntemler ile frekans uzayında nümerik KY yöntemi ile elde edilen SKA değerleri, sırasıyla Şekil 6.5(a) ve Şekil 6.5(b)’de, dalga sayısına göre karşılaştırılmaktadır. Şekil 6.5’te sonuçların uyduğu görülmektedir. Böylece, Bölüm 6.3’te geliştirilen  $\gamma_n(t)$ ’nin (dolayısıyla  $\gamma_n(\omega)$ ’nin) analitik ifadesinin doğruluğu gösterilmiştir.

İkinci örnekte, uzak-yakın durumu için geliştirilen analitik ifadelerin doğrulanması amacıyla, gelen alan önceki örnekteki özelliklere sahip düzlemsel dalga seçilmiştir ve saçılan alan  $r_g = 10$  m,  $\theta_g = 45^\circ$ ,  $\phi_g = 30^\circ$  noktasında gözlenmiştir. Şekil 6.6(a) ve Şekil 6.6(b)’de, sırasıyla, yumuşak ve sert yüzeyler için saçılan alan değerlerinin dalga sayısına göre değişimi gösterilmiştir. Sonuçlar uyum içerisindedir.

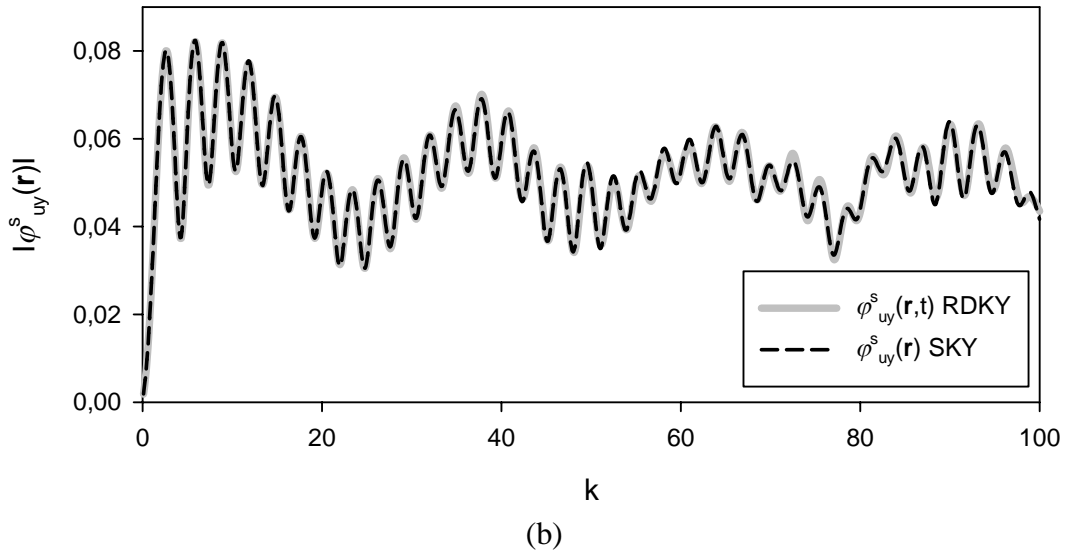
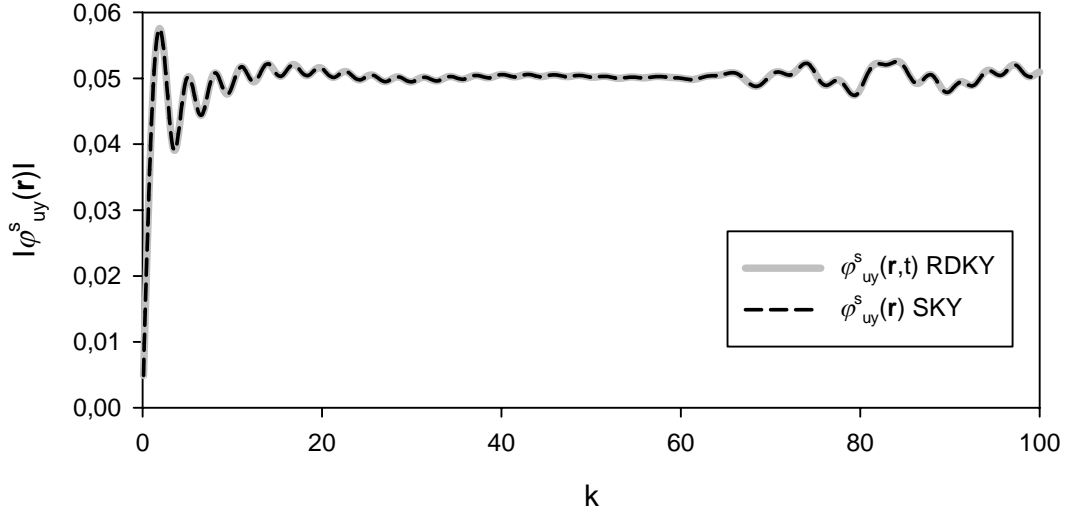
Üçüncü örnekte, yakın-uzak durumunun incelenmesi amacıyla, noktasal kaynak  $r_S = 10$  m,  $\theta_S = 60^\circ$ ,  $\phi_S = 210^\circ$  noktasına konumlandırılmıştır ve saçılan alan  $\theta_g = 45^\circ$ ,  $\phi_g = 30^\circ$  yönünde gözlenmiştir. Şekil 6.7(a) ve Şekil 6.7(b)’de, sırasıyla, yumuşak ve sert yüzeyler için saçılan alan değerlerinin dalga sayısına göre değişimi gösterilmiştir. Sonuçların uyum içerisinde olduğu görülmektedir. Önceki ve bu örnek ile birlikte Bölüm 6.4’te geliştirilen  $p = 1, 2, 3$  olmak üzere  $\alpha_n^p(t)$ ’nin analitik ifadesinin doğruluğu gösterilmiştir.

Dördüncü örnekte, yakın-yakın durumunun incelenmesi amacıyla, noktasal kaynak,  $r_S = 15$  m,  $\theta_S = 60^\circ$ ,  $\phi_S = 210^\circ$  noktasına ve gözlem noktası  $r_g = 10$  m,  $\theta_g = 45^\circ$ ,  $\phi_g = 30^\circ$  noktasına konumlandırılmıştır. Şekil 6.8(a) ve Şekil 6.8(b)’de, sırasıyla, yumuşak ve sert yüzeyler için saçılan alan değerlerinin dalga sayısına göre değişimi gösterilmiştir. Sonuçların uyum içerisinde olduğu görülmektedir. Böylece,

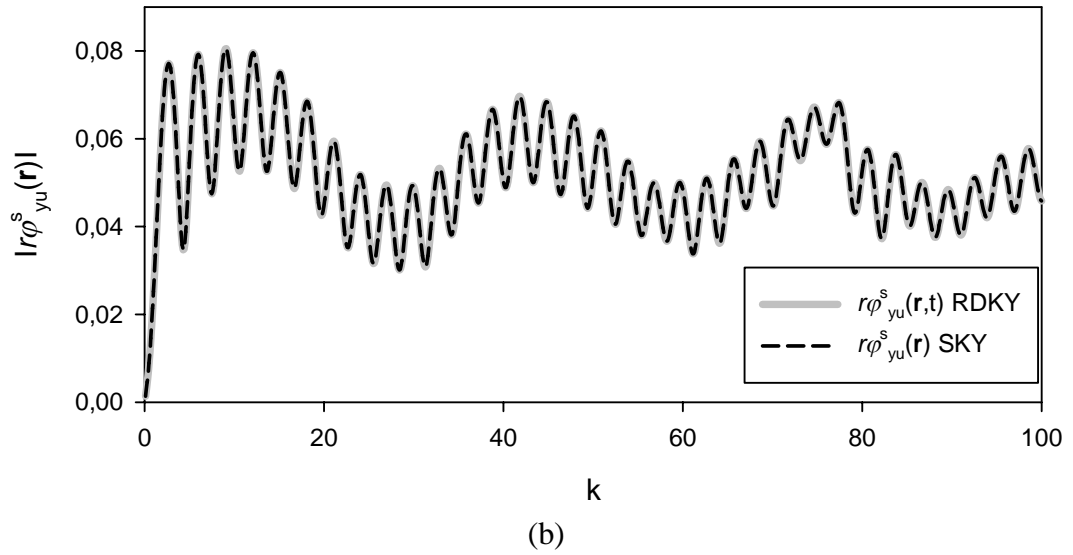
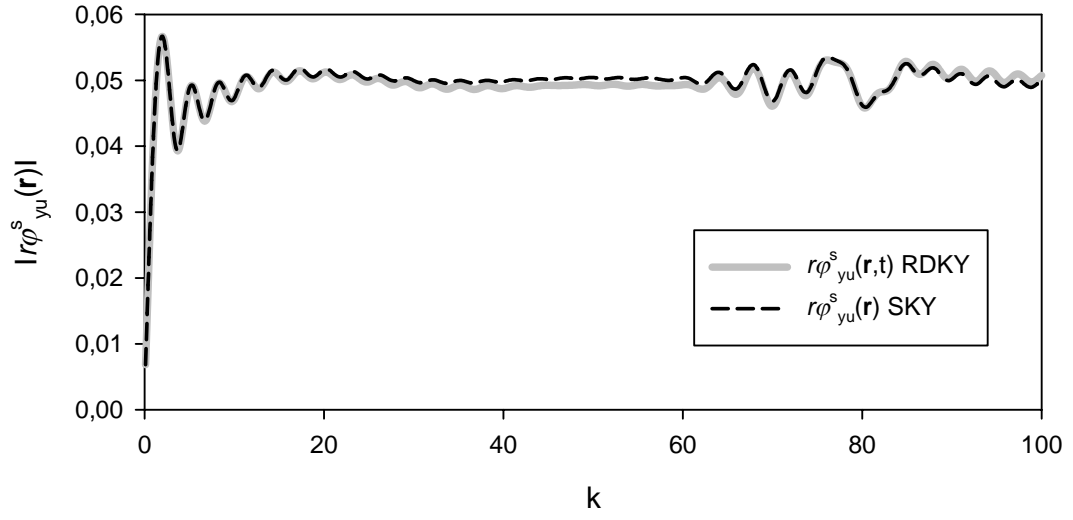
Bölüm 6.5'te geliştirilen  $(p=1, q=2,3)$  ve  $(p=2,3, q=1)$  olmak üzere  $\beta_n^{pq}(t)$ 'nin analitik ifadesinin doğruluğu gösterilmiştir.



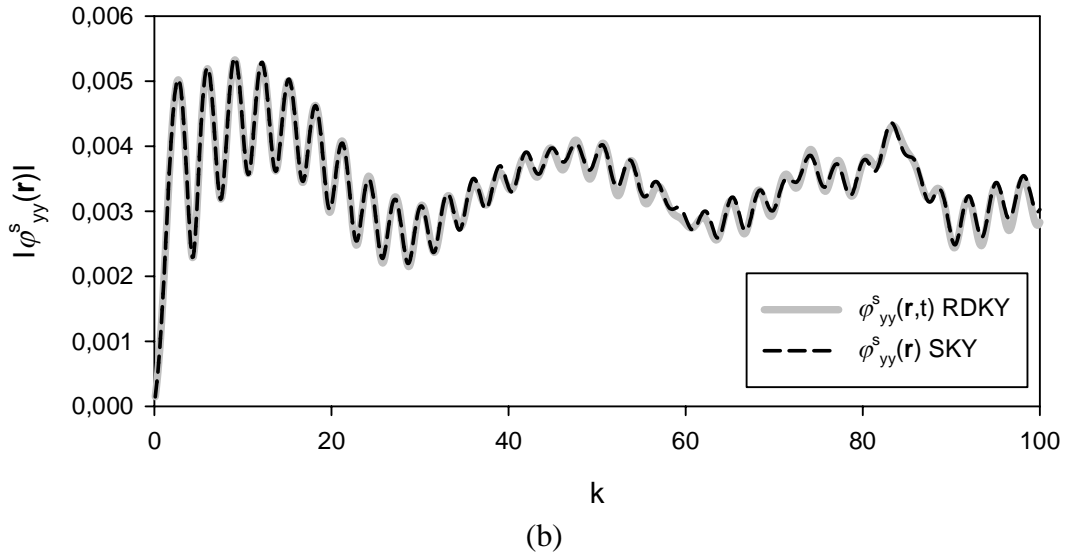
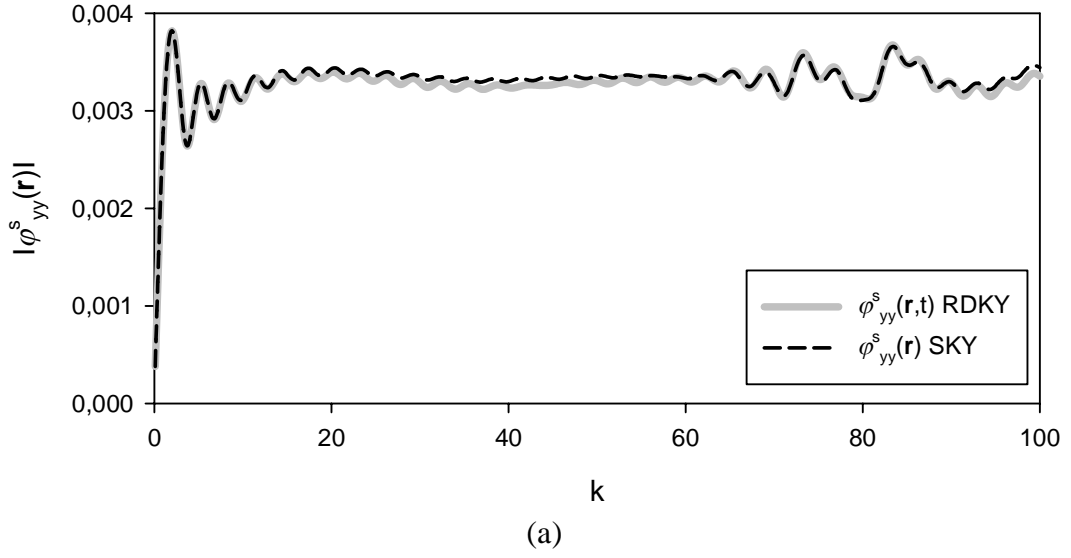
Şekil 6.5. Yumuşak (a) ve Sert (b) kürenin SKA değeri (Uzak-Uzak).



Şekil 6.6. Yumuşak (a) ve Sert (b) küreden saçılan alan değeri (Uzak-Yakın).



Şekil 6.7. Yumuşak (a) ve Sert (b) küreden saçılan alan değeri (Yakın-Uzak).



Şekil 6.8. Yumuşak (a) ve Sert (b) küreden saçılan alan değeri (Yakın-Yakın).

## 6.8. Sonuçlar

Bu bölümde kaynak ve gözlemci konumlarına göre akustik saçılma problemi için Kirchhoff yaklaşımı ile elde edilmiş ışınım integrallerinin zaman uzayında RD yorumu ile analitik olarak belirlenmesi anlatılmıştır. Formülasyonda kaynak uzak durumunda düzlemsel dalga, yakın durumunda ise noktasal kaynaktan yayılan küresel dalga olarak seçilmiştir. Saçılan alan sonsuzda ya da sonsuzda olmayan noktalarda gözlemlenmiştir. Sonuçta yumuşak ve sert sınır koşulları için sekiz ayrı

durum incelenmiş ve bu durumların hepsi için üç tür integral belirlenmiştir. Bu integraller için analitik ifadeler RD yorumu ile bulunmuştur. RD yorumu yapılırken belirlenen integrallerde RD türü Uzak-Uzak durumları için düzlemsel RD, Yakın-Uzak ve Uzak-Yakın durumları için paraboloidal RD ve Yakın-Yakın durumları için elipsoidal RD olduğu gösterilmiştir. Geliştirilen ifadelerin ve yaklaşımın doğruluğu, RD yorumu ile elde edilen analitik sonuçlar ile frekans uzayında elde edilen örnekler karşılaştırılarak gösterilmiştir.

## 7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde ışınma integrallerinin RD yorumu ile hesaplanması ve RD yorumu ile hesaplanan ışınma integrallerinin zaman uzayı integral denklem çözümlerinde ve KY yönteminde kullanımı incelenmiştir. Bu bölümde tezde yapılanlar ve tezde gelinen nokta ile yapılabilecekler özetlenecektir.

Tezin 2. bölümünde zamanda gecikmeli potansiyellerin RD yorumu ile analitik olarak hesaplanması ve potansiyellerin analitik ifadelerinin zaman uzayı EAİD, MAİD ve BAİD çözümlerinde kullanımı anlatılmaktadır. Zamanda gecikmeli potansiyellerin analitik olarak belirlenmesinin ZAY çözümlerine etkisi incelenmiştir. RD yorumu ile elde edilen potansiyellerin analitik ifadelerinin kullanımı ile BAİD sonuçlarının daha kararlı çıktığı gösterilmiştir. Benzer olarak EAİD sonuçlarının doğruluğunun arttığı gösterilmesine rağmen, potansiyellerin analitik ifadelerinin kullanımı EAİD çözümünün kararlılığını garanti altına almamaktadır. Bilindiği gibi EAİD birinci tür integral denklemdir ve kötü-koşulludur. Bundan dolayı potansiyellerin analitik belirlenmesine rağmen, ZAY matris elemanındaki küçük hata kararsızlık ile sonuçlanabilir. Bu aşamada EAİD'in ZAY matrisi elemanlarının tamamen analitik olarak belirlenmesinin (test integrali ile birlikte) daha kararlı çözümler vermesi beklenmektedir. Ayrıca zamanda gecikmeli potansiyellerin RD yorumu ile analitik ifadelerinin belirlenmesi RWG fonksiyonları için gerçekleştirilse de RD yorumu genel bir yaklaşımdır ve farklı temel fonksiyonlar için de analitik ifadeler geliştirilebilir.

Bu tezin 3. bölümünde manyetik alanın tekilliği RD yorumu ile elde edilen manyetik alanın analitik ifadesi aracılığıyla incelenmiş ve manyetik alanın tekil ifadesinin elde edilmesi için genel bir formül geliştirilmiştir. MAİD'in frekans uzayı gösteriminde genellikle Cauchy asıl değeri olarak hesaplanan ve yarım faktörü olarak ortaya çıkan manyetik alanın tekilliği, zaman uzayında RWG baz fonksiyonu için hiç bir yaklaşıklık yapılmadan elde edilmiştir. Frekans uzayında Cauchy asıl değeri olarak belirlenen ifadelerin zamanda Dirac delta fonksiyonu olarak ortaya çıktığı söylenebilir. Elde edilen sonuç ile gözlem noktası, RWG fonksiyonunu oluşturan üçgen içerisindeyken yarım faktörünün elde edildiği gösterilmiş ve gözlem noktasının kenar veya köşe üzerinde olduğu durumlar için katsayıların belirlenmesi

anlatılmıştır. Benzer olarak RD yorumu belli bir temel fonksiyona veya yapıya özgü değildir ve RWG temel fonksiyonu dışındaki, özellikle yüksek mertebeli fonksiyonlar için manyetik alanın tekilliği için genel ifadeler geliştirilebilir.

Bu tezin 4. bölümünde, zaman uzayı EAİD'in ZAY çözümünde ortaya çıkan lineer ve sabit bileşen probleminin giderilmesi için EAİD'in BMF ve İMF'nu geliştirilmiştir. Lineer ve sabit bileşen problemlerinin giderilmesi için geliştirilen BMF ve İMF, hem açık hem de kapalı saçıcılara uygulanabilmektedir. BMF ve İMF, temel fonksiyon seçiminden bağımsız ve doğrudan EAİD'i etkileyen yöntemlerdir. Bundan dolayı uzaya ve zamana göre temel fonksiyon seçiminden bağımsızdır. Özellikle, sürekli türeve sahip zamana göre temel fonksiyon kısıtlaması olmayışı, geliştirilen yöntemleri benzerlerinden ayırmaktadır. Sonuç olarak BMF kullanımı ile lineer bileşen probleminin giderildiği, İMF kullanımı ile hem lineer hem de sabit bilen problemlerinin giderildiği gösterilmiştir. BMF ve İMF, EAİD için tanımlansa da MAİD ve BAİD içinde uygulanabilir.

Bu tezin 5. bölümünde, anlık uyarılmış SWG temel fonksiyonlarından dolayı oluşan zamanda gecikmeli vektör ve skaler potansiyellerin zaman örneklerinin RD yorumu ile elde edilmesi gösterilmiştir. RD yorumu ile hacim üzerinde olan potansiyel integralleri, yüzey integrallerine dönüştürülmüştür ve yüzey integrallerinin tanımladığı geometrik büyüklükler belirlenmiştir. Detaylı olarak skaler ve vektör potansiyeller, merkezi gözlem noktası olan ve  $R = ct$  yarı çapına sahip küre yüzeyi ile SWG baz fonksiyonunu oluşturan tetrahedral hacmin kesişimi sonucu oluşan katı açılı ve yüzey merkezi fonksiyonları ile belirlenebileceği gösterilmiştir. Belirtilen yüzey integralleri nümerik olarak hesaplanmasına karşın yüzey integrallerinin analitik olarak belirlenmesi mümkündür. Katı açılı ve yüzey merkezi fonksiyonları için analitik ifadeler geliştirilebilir ve RD yorumu ile belirlenen potansiyeller homojen olmayan saçıcıların ZAY analizine uygulanabilir.

Bu tezin 6. bölümünde, akustik olarak yumuşak ve sert yüzeye sahip üçgenler ile modellenen rastgele saçıcılar için kaynağın veya gözlem noktasının sonsuzda olduğu ve olmadığı durumlarda KY ile elde edilen hız potansiyelinin analitik ifadesi zaman uzayında geliştirilmiştir. Analitik ifadeler geliştirilirken kaynak ve gözlemci konumuna göre farklı RD türlerinin ortaya çıktığı gösterilmiştir: düzlemsel,

paraboloitsel ve elipsoitsel. Geliştirilen analitik ifadelerin doğruluğu saçılan hız potansiyellerinin frekans uzayı karşılıkları ile elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılarak gösterilmiştir. Ayrıca farklı RD türü yorumları doğrulanmıştır. RD türlerinin doğrulanmasından sonra, skaler akustik saçılma probleminin KY ile çözümü için analitik ifadelerin geliştirilmesine benzer olarak, elektromanyetik saçılma probleminin FO yöntemi ile çözümü için analitik formüller geliştirilebilir ve analitik formüller farklı yüzey modelleri için çeşitlendirilebilir.

Bunlara ek olarak Ek B’de Bölüm 6’da kullanılan paraboloid-düzlem, elipsoid-düzlem kesişim sonuçları, parabol-doğru ve elips-doğru kesişim noktalarının belirlenmesi için analitik ifadeler geliştirilmiştir. Bu ifadeler doğrudan elektromanyetik saçılma probleminin FO ile çözülmesine uygulanabilir. Ek C’de ise Fourier dönüşümü ile fazör gösterimi arasında ilişki incelenmiş, fazör gösteriminden ters Fourier dönüşümü alınarak zaman uzayı sonuçlarının elde edilmesi anlatılmıştır. Ek D’de Bölümler 2 ve 6’da belirlenen integrallerin analitik ifadeleri sunulmuştur.

## KAYNAKLAR

- [1] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, vol. I, Oxford at the Clarendon Press, 1873.
- [2] W. H. Cooper, *Great Physicists: The Life and Times of Leading Physicists from Galileo to Hawking*, Oxford University Press, 2001.
- [3] M. İdemem, *Elektromanyetik Alan Teorisinin Temelleri*, Literatür Yayıncılık, 1996.
- [4] M. İdemem, "The Maxwell's equation in the sense of distributions," *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol. 21, issue 5, pp. 736-738, Sep. 1973.
- [5] M. İdemem, "Derivation of the Lorentz transformation from the Maxwell equations," *Journal of Electromagnetic Waves And Applications*, vol. 19, no. 4, pp. 451-467, April 2005.
- [6] M. I. Skolnik, *Introduction to Radar Systems*, 3rd. Edition, McGraw-Hill, 2001.
- [7] M. A. Richards, *Fundamentals of Radar Signal Processing*, McGraw-Hill, 2005.
- [8] E. F. Knott, J. F. Schaeffer, M. T. Tuley, *Radar Cross Section*, Second Edition, Raleigh, NC :SciTech Publishing, 2004.
- [9] E. F. Knott, *Radar Cross Section Measurement*, SciTech Publishing, 2006.
- [10] A. A. Ergin, "Görünmezlik Teknolojileri: Radar Kesit Alanı Nedir?," *Savunma ve Havacılık*, no. 120, IDEF'07 Özel Sayı, 2007.
- [11] J. Moore, R. Pizer, *Moment Methods in Electromagnetics, Techniques and Applications*, Research Studies Press, 1986.
- [12] A. Taflove, S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, Third Edition, Artech House, 2005.
- [13] J. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, Second Edition, John Wiley & Sons, 2002.
- [14] R.F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, IEEE Press, 1993.
- [15] C.A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, John Wiley and Sons, 1991.

- [16] Z. Chen, S. Luo, "Generalization of the finite-difference-based time-domain methods using the method of moments," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 54, no. 9, pp. 2515–2524, Sep. 2006.
- [17] S.P. Walker, "Developments in time domain integral-equation modeling at Imperial College," *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, vol. 39, pp. 7-19, 1997.
- [18] A. G. Tijhuis, *Electromagnetic Inverse Profiling Theory and Numerical Implementation*, Brill Academic Publishers, 1987.
- [19] W. L. Stutzman, G. A. Thiele, *Antenna Theory and Design*, Second Edition, John Wiley & Sons, 1998.
- [20] C. A. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and Design*, Third Edition, John Wiley & Sons, 2005.
- [21] S. M. Rao, *Time Domain Electromagnetics*, Academic Press, 1999.
- [22] B. Shanker, A. A. Ergin, K. Aygün, and E. Michielssen, "Analysis of transient electromagnetic scattering from closed surfaces using a combined field integral equation," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 48, no. 7, pp. 1064–1074, Jul. 2000.
- [23] N. T. Gres, A. A. Ergin, E. Michielssen, "Volume-integral-equation-based analysis of transient electromagnetic scattering from three-dimensional inhomogeneous dielectric objects," *Radio Science*, vol. 36, no. 3, pp. 379-386, May 2001.
- [24] H. A. Ülkü, "Zaman Uzayında RWG Fonksiyonları İle Uyarılmış Manyetik Alanın Analitik İfadesi," Yüksek Lisans Tezi, Elektronik Mühendisliği Bölümü, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Kocaeli, 2008.
- [25] F. P. Andriulli, K. Cools, F. Olyslager, E. Michielssen, "Time-domain Calderon identities and their application to the integral equation analysis of scattering by PEC objects Part II: Stability," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 57, no. 8, pp. 2365–2375, Jul. 2009.
- [26] M. Lu and E. Michielssen, "Closed form evaluation of time domain fields due to Rao-Wilton-Glisson sources for use in marching-on-in-time based EFIE solvers," in *Proc. Antennas and Propagation Society Int. Symp.*, vol. 1, San Antonio, TX, Jun. 16–21, 2002, vol.1, pp. 74–77.
- [27] H. Contopanagos, B. Dembart, M. Epton, J.J. Ottusch, V. Rokhlin, J.L. Visher, S.M. Wandzura, "Well-conditioned boundary integral equations for three-

- dimensional electromagnetic scattering,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 50, no. 12, pp. 1824–1830, Dec. 2002.
- [28] A. C. Yücel and A. A. Ergin, “Exact evaluation of retarded-time potential integrals for the RWG bases,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 54, no. 5, pp. 1496–1502, May 2006.
- [29] J. Pingnot, S. Chakraborty, and V. Jandhyala, “Polar integration for exact space-time quadrature in time-domain integral equations,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 54, no. 10, pp. 3037-3042, Oct. 2006.
- [30] H. A. Ülkü ve A. A. Ergin, “Analytical evaluation of transient magnetic fields due to RWG current bases,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 55, no. 12, pp. 3565–3575, Dec 2007.
- [31] H. A. Ülkü, A. A. Ergin, “Application of analytical expressions of transient potentials to the MOT solution of integral equations,” in *Proc. 2008 IEEE AP-S Int. Symp. and URSI Radio Science Meeting*, San Diego, CA.
- [32] M. Taskinen, S. Vanska, “Current and charge integral equation formulation,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 54, no. 1, pp. 58–67, Jan. 2006.
- [33] G. Pisharody, D.S. Weile, “Electromagnetic scattering from perfect electric conductors using an augmented time-domain integral-equation technique,” *Microwave and Op. Tech. Letters*, vol. 45, no. 1, pp. 26-31, April 2005.
- [34] A. Sadigh, E. Arvas, “Treating the instabilities in marching-on-in-time method from a different perspective,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 41, no. 12, pp. 1695-1702, Dec. 1993.
- [35] P. M. Van der Berg, E. Korkmaz and A. Abubakar, “A constrained conjugate gradient method for solving the magnetic field boundary integral equation,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 51, no. 6, pp. 1168-1176, June 2003.
- [36] P. J. Davies, “On the stability of time-marching schemes for the general surface electric-field integral equation,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 44, no. 11, pp. 1467-1473, Nov. 1996.
- [37] B. P. Rynne, P. D. Smith, “Stability of time marching algorithms for the electric field integral equation,” *J. Electromagn. Waves Applicat.*, vol.12, pp.1181-1205, 1990.
- [38] P. D. Smith, “Instabilities in time marching methods for scattering: Cause and rectification,” *Electromagn.*, vol. 10, pp. 430-451, 1990.

- [39] D. A. Vechinski, S. M. Rao, "A stable procedure to calculate the transient scattering by conducting surfaces of arbitrary shape," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 40, no. 6, pp. 661-665, June 1992.
- [40] S. P. Walker, M. J. Bluck and I. Chatzis, "The stability of integral equation time-domain computations for three-dimensional scattering; similarities and differences between electrodynamic and elastodynamic computations," *Int. J. Numer. Model.*, vol. 15, pp.459-474, 2002.
- [41] S. J. Dodson, S. P. Walker, M. J. Bluck, "Implicitness and stability of time domain integral equation scattering analyses," *ACES Journal*, vol. 13, no. 3, Nov. 1998.
- [42] M. J. Bluck, S. P. Walker, "Costs and cost scaling in time-domain integral-equation analysis of electromagnetic scattering," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 45, pp. 894-901, 1997.
- [43] M. M. Rao, T. K. Sarkar, T. Anjali and R. S. Adve, "Simultaneous extrapolation in time and frequency domains using Hermite expansions," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 47, no. 6, pp. 1108-1115, June 1999.
- [44] D. S. Weile, G. Pisharody, N. W. Chen, B. Shanker, E. Michielssen, "A novel scheme for the solution of the time-domain integral equations of electromagnetics," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 52, no. 1, pp. 283-295, Jan. 2004.
- [45] R. A. Wildman, G. Pisharody, D. S. Weile, S. Balasubramaniam, E. Michielssen, "An accurate scheme for the solution of the time-domain integral equations of electromagnetics using higher order vector bases and bandlimited extrapolation," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol.52, no. 11, pp. 2973-2984, Nov. 2004.
- [46] J. L. Hu, C. H. Chan, Y. Xu, "A new temporal basis function for the time-domain integral equation method," *IEEE Microw. Wireless Compon. Lett.*, vol. 11, no. 11, pp. 465-466, Nov. 2001.
- [47] D. Bolukbas and A. A. Ergin "A radon transformation interpretation of the physical optics integral," *Microwave and Op. Tech. Letters*, vol. 44, pp. 284, Feb. 2005.

- [48] H. A. Serim and A. A. Ergin, "Computation of the physical optics integral on NURBS surfaces using a Radon transform interpretation," *IEEE Antenna Wireless Propag. Lett.*, vol. 7, pp. 70–73, 2008.
- [49] S. M. Rao, D. R. Wilton, and A. W. Glisson, "Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol.30, no. 3, pp. 408-418, May 1982.
- [50] A. F. Peterson, S. L. Ray, R. Mittra, *Computational Methods for Electromagnetics*, IEEE Press, 1997.
- [51] R.E. Collin, *Field Theory of Guided Waves, Second Edition*, IEEE Press, 1990.
- [52] M.I. Sancer, "MFIE limiting process and curvilinear computations," in *Proc. 1998 IEEE AP-S Int. Symp*, Atlanta, GA., vol. 2, pp. 886-887.
- [53] R.E. Hodges, Y. Rahmat-Samii, "The evaluation of MFIE integrals with the use of vector triangle basis functions", *Microwave and Op. Tech. Letters*, vol.14, no.1, pp 9-14, John Wiley & Sons, January 1997.
- [54] L. Gürel, Ö. Ergül, "Singularity of the magnetic-field integral equation and its extraction", *IEEE Antenna Wireless Propag. Lett.*, vol. 4, pp. 229-231, 2005.
- [55] Ö. Ergül, L. Gürel, "Solid-angle factor in the magnetic field integral equation," *Microwave and Op. Tech. Letters*, vol.45, no.5, pp 452-456, John Wiley & Sons, June 2005.
- [56] J.M. Ruis, E. Udeba, J. Parron, "On the testing of the magnetic field integral equation with RWG basis functions in method of moments", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 49, no. 11, pp. 1550-1553, November 2001.
- [57] M. Y. Xia, G. H. Zhang, G. L. Dai, C. H. Chan, "Stable solution of time domain integral equation methods using quadratic B-spline temporal basis functions," *Journal of Computational Mathematics*, vol. 25, no. 3, pp. 374-384, Jan. 2007.
- [58] A. J. Poggio, E. K. Miller, "Integral equation solution of three dimensional scattering problems," *Computer Techniques for Electromagnetics*, Chap. 4, Permagon, Elmsford, NY, 1973.
- [59] Y. Chang, R. F. Harrington, "A surface formulation for characteristic modes of material bodies," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 25, no. 6, pp. 789-795, Nov. 1977.

- [60] T. K. Wu, L. L. Tsai, "Scattering from arbitrarily-shaped lossy dielectric bodies of revolution," *Radio Sci.*, Vol. 12, No. 5, 709-718, Nov. 1977.
- [61] B. Shanker, M. Lu, E. Michielssen, "Time domain integral equation analysis of scattering from composite bodies via exact evaluation of radiation fields," ,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 57, no. 5, pp. 1506-1520, May 2009.
- [62] W. C. Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*, IEEE Press, 1995.
- [63] D. H. Schaubert, D. R. Wilton, and A. W. Glisson, "A tetrahedral modeling method for electromagnetic scattering by arbitrarily shaped inhomogeneous dielectric bodies," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-32, pp. 77-85, Jan. 1984.
- [64] W. C. Chew, J. M. Jin, C. C. Lu, E. Michielssen, J. M. Song, *Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics*, Artech House, 2001.
- [65] M. F. Catedra, C. Delgado, and I. G. Diego, "New physical optics approach for an efficient treatment of multiple bounces in curved bodies defined by an impedance boundary condition," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol.56, no. 3, pp. 728-736, March 2008.
- [66] P. Y. Ufimtsev, *Fundamentals of the Physical Theory of Diffraction*, John Wiley and Sons, 2007.
- [67] D. S. Jones, *Acoustic and Electromagnetic Waves*, Oxford: Clarendon Press, 1986.
- [68] S. R. Legault, "Refining physical optics for near-field computations," *Electronics Letters*, vol. 40, no. 1, pp. 71-72, Jan 2004.
- [69] P. Pouliguen, R. Hemon, C. Bourlier, J. F. Damiens, J. Saillard, "Analytical formulae for radar cross section of flat plates in near field and normal incidence," *Progress in Electromagnetic Research B*, vol. 9, pp. 263-279, 2008.
- [70] C. Bourlier, P. Poulinguen, "Useful analytical formulae for near-field monostatic radar cross section under the physical optics: Far field criterion," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 57, no. 1, pp. 205–214, Jan. 2009.
- [71] J. J. Bowman, T. B. A. Senior, P. L. E. Uslenghi, *Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes*, John Wiley and Sons, 1969.
- [72] T. B. Hansen, A. D. Yaghjian, *Plane-Wave Theory of Time-Domain Fields: Near-Field Scanning Applications*, IEEE Press, 1999.

- [73] D. Zwillinger, *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae*, 31st Edition, Chapman and Hall/CRC, 2002.
- [74] D. H. von Seggern, *CRC Standard Curves and Surfaces with Mathematica*, Second Edition, Chapman and Hall/CRC, 2006.
- [75] G. Manara, A. Monorchio, R. Reggiainini, "A space-time discretization criterion for a stable time-marching solution of the electric field integral equation," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol.45, no. 3, pp. 527-532, March 1997.
- [76] A. A. Ergin, S. Balasubramaniam, E. Michielssen, "Analysis of transient wave scattering from rigid bodies using a Burton-Miller approach," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 106, no. 5, Nov. 1999.
- [77] K. Aygün, S. Balasubramaniam, A. A. Ergin, E. Michielssen, "A two-level plane wave time-domain algorithm for fast analysis of EMC/EMI problems," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 44, no. 1, pp. 152-164 Feb. 2002.
- [78] D. F. Lawden, *An Introduction to Tensor Calculus, Relativity, and Cosmology*, Third Edition, John Wiley & Sons, 1982, pp. 14-16.
- [79] J. J. Tuma, *Engineering Mathematics Handbook*, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1987.
- [80] D. Wilton, S. Rao, A. Glisson, D. Schaubert, O. Al-Bundak, C. Butler, "Potential integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 32, no. 3, pp. 276-281, Mar. 1984.
- [81] A. C. Woo, H. T. G. Wang, M. J. Schuh, M. L. Sanders, "Benchmark radar targets for the validation of computational electromagnetics programs," *IEEE Antennas Propag. Magazine*, vol. 35, no. 1, pp. 84-89, Feb. 1993.
- [82] E. Marx, "Self-patch integrals in transient electromagnetic scattering," *IEEE Antennas Propag. Magazine*, vol. AP-33, no. 7, pp. 763-767, July 1985.
- [83] E. Marx, "Neighboring-patch integrals in transient electromagnetic scattering," *IEEE Antennas Propag. Magazine*, vol. AP-33, no. 7, pp. 768-773, July 1985.
- [84] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1941.
- [85] J. Van Bladel, *Singular Electromagnetic Fields and Sources*, Oxford: Clarendon Press, New York: Oxford University Press, 1991.

- [86] D. S. Jones, *The Theory of Generalised Functions*, Cambridge University Press, Second Edition, 1982.
- [87] B. P. Lathi, *Modern Digital and Analog Communication Systems*, Third Edition, Oxford University Press, 1998.
- [88] J. G. Proakis, M. Salehi, *Communication Systems Engineering*, Second Edition, Prentice Hall, 2002.
- [89] H. P. Hsu, *Sinyaller ve Sistemler*, Schaum's Outline Series, McGraw Hill, 2001.
- [90] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, J. R. Buck, *Discrete-Time Signal Processing*, Second Edition, Prentice Hall, 1999.
- [91] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 7th Edition, San Diego, CA: Academic Press, 2007.

## ÖZGEÇMİŞ

Hüseyin Arda Ülkü, 1984 yılında Antalya’da doğdu. Lise öğrenimini Eskişehir Kılıçoğlu Anadolu Lisesi’nde 2002 senesinde tamamladı. Aynı yıl okumaya hak kazandığı Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Mühendislik Fakültesi Elektronik Mühendisliği Bölümü’nden 2006 yılında mezun oldu. 2008 yılında yüksek lisans öğrenimini tamamlayan Hüseyin Arda Ülkü, halen doktora öğrenimine aynı bölümde devam etmektedir. Hüseyin Arda Ülkü, 2007 yılından itibaren Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Elektronik Mühendisliği Bölümü Elektromanyetik Alanlar ve Mikrodalga Tekniği Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi görevini sürdürmektedir. İlgili alanları arasında, nümerik elektromanyetik, özellikle zaman uzayı integral denklemlerin nümerik yöntemlerle hesaplanması yer almaktadır.

## EK A

Bu bölümde, tezde kullanılan Dirac delta fonksiyonunun özellikleri verilecektir. Denklem (A.1)-(A.4) ile verilen özellikler [85] ve [86]'da verilmiştir. Diğerleri ise [85] ve [86]'da verilen özellikler kullanılarak çıkarılabilir. İntegral altında verilen özelliklerde integral limitlerinin, Dirac fonksiyonunun argümanının sıfıra gittiği noktayı kapsadığı varsayılmaktadır.

$$\int f(R)\delta(t-R/c)dR = c \int f(R)\delta(ct-R)dR \quad (\text{A.1})$$

$$\int f(R)\delta(ct-R)dR = f(ct) \int \delta(ct-R)dR \quad (\text{A.2})$$

$$\int \delta(ct-R)dR = 1 \quad (\text{A.3})$$

$$f(t) * \delta(t-R/c) = f(t-R/c) \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla \left[ \frac{\delta(t-R/c)}{R} \right] = -\nabla' \left[ \frac{\delta(t-R/c)}{R} \right] \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \int f(R) \frac{\partial \delta(ct-R)}{\partial R} dR &= \int f(R) \frac{\partial \delta(ct-R)}{\partial (ct-R)} \underbrace{\frac{\partial (ct-R)}{\partial R}}_{-1} dR \\ &= - \int \frac{df(R)}{dR} \delta(ct-R) dR \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

## EK B

Bu bölümde, özellikle bu tezin 6. bölümünde kullanılan geometrik ilişkiler ve formüller sunulacaktır. Önem sırası gözetilerek, Bölüm B.1 ve B.2’de, sırasıyla, paraboloid-düzlem ve elipsoit-düzlem kesişimi ve kesişim sonucu oluşan geometrik yapıların en genel halde elips ve parabol olduğu gösterilecektir. Düzlem üzerinde oluşan geometri ile üçgenin kesişimi sonucu oluşacak geometrik yapının bulunabilmesi için Bölüm B.3 ve B.4’te parabol-doğru ve elips-doğru kesişim noktalarının belirlenmesi için formüller geliştirilecektir. Çember-doğru kesişimi, elips-doğru kesişiminin özel halidir. Parabol-doğru ve elips-doğru kesişimi için analitik ifadeler sonsuz uzun doğru için geliştirilmiştir. Bölüm B.5’te, hangi sonucun üçgeni oluşturan doğru parçası üzerinde olduğunun belirlenmesi gösterilecektir.

### B.1. Paraboloid ve Düzlem Kesişimi

Dairesel kesit alanına sahip, açıklığı  $+x$  yönünde, odak noktası koordinat sisteminin merkezinde olan ve  $a$  odak uzunluğuna sahip paraboloidin denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$x + a = \frac{y^2 + z^2}{4a}. \quad (\text{B.1})$$

Düzlem ile paraboloidin kesişim noktalarını belirlemek için ilk olarak, bir koordinatı  $D_n$  düzleminin normaline yönlendirilmiş  $(x', y', z')$  koordinat sistemi tanımlanmalıdır:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos(\phi) + y' \sin(\phi) \\ y &= -x' \sin(\phi) + y' \cos(\phi) . \\ z &= z' \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Burada  $\phi$ ,  $D_n$  düzlemi ile  $x$ -ekseni arasında kalan açıdır. Bu durumda denklem (B.1) ile verilen paraboloid denklemi üslü koordinat sisteminde

$$\begin{aligned} 0 &= x'^2 \sin^2(\phi) - 4ax' \cos(\phi) - 2x'y' \cos(\phi) \sin(\phi) \\ &+ y'^2 \cos^2(\phi) - 4ay' \sin(\phi) - 4a^2 + z'^2 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

olarak yazılır. Şekil 6.2'den görüleceği gibi,  $y' = d$  iken denklem (B.3),  $D_n$  düzlemi üzerinde oluşacak geometriyi verir. (B.3) denklemi,  $\phi$ 'nin farklı değerleri için farklı eğriler vermektedir.

$\phi = 0$  ise, oluşan eğri bir paraboldür:

$$x' - \frac{d^2}{4a} + a = \frac{z'^2}{4a}. \quad (\text{B.4})$$

Oluşan parabolün odağı,  $x'_m = \frac{d^2}{4a}$  ve  $z'_m = 0$  noktasındadır ve odak uzunluğu  $a$ 'dır.  $0 < \phi < \pi/2$  ise, oluşan şekil bir elipstir:

$$1 = \frac{[x' - x'_m]^2}{a_S^2} + \frac{z'^2}{b_S^2}. \quad (\text{B.5})$$

Burada  $a_S$  ve  $b_S$ , sırasıyla, elipsin ana ve tali eksenleridir ve aşağıdaki gibi bulunur:

$$a_S^2 = \frac{1}{\sin^4(\phi)} 4a[a + d \sin(\phi)], \quad (\text{B.6})$$

$$b_S^2 = \frac{1}{\sin^2(\phi)} 4a[a + d \sin(\phi)]. \quad (\text{B.7})$$

Elipsin merkezi ise  $x'_m = \frac{\cos(\phi)}{\sin^2(\phi)}(2a + d \sin(\phi))$  ve  $z'_m = 0$ 'dadır.

Son olarak  $\phi = \pi/2$  ise, düzlem paraboloidin kesit yüzeyi ile kesişir ve kesişim sonucu çemberdir:

$$4a[a + d] = x'^2 + z'^2. \quad (\text{B.8})$$

Çemberin merkezi  $x'_m = 0$  ve  $z'_m = 0$  noktasındadır ve yarıçapı  $a_r^2 = 4a[a + d]$ 'dir.

Böylece paraboloid ile düzlemin kesişimi sonucu oluşacak tüm durumlar incelenmiş olur. En genel halde, paraboloid ile düzlemin kesişimi, her zaman elips vermektedir. Ancak limit durumlarında çember ve parabol oluşmaktadır. Genel olarak parabolün, merkezi sonsuzda olan elips olduğu söylenebilir.

## B.2. Elipsoit ve Düzlem Kesişimi

Elipsoit, iki odak noktası ve üç eksen uzunluğu ile tanımlanır. Özel olarak bu tezde oluşan elipsoidin tali eksen uzunlukları birbirine eşittir ve odaklar ana eksen üzerindedir. Bu tür elipsoide, *prolate spheroid* denmektedir ve denklemi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1 \quad (\text{B.9})$$

ile verilmektedir. Burada  $a$  ve  $b$ , sırasıyla, elipsoidin ana ve tali eksen uzunluklarıdır. Elipsoit ile düzlemin kesişimi sonucu oluşacak geometrinin bulunması için, denklem (B.2) ile verilen üslü koordinatlar kullanılabilir. Denklem (B.9), üslü koordinatlarda

$$1 = x'^2 \left[ \frac{\cos^2(\phi)}{a^2} + \frac{\sin^2(\phi)}{b^2} \right] + y'^2 \left[ \frac{\sin^2(\phi)}{a^2} + \frac{\cos^2(\phi)}{b^2} \right] + \frac{z'^2}{b^2} + 2x'y' \cos(\phi) \sin(\phi) \left[ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right] \quad (\text{B.10})$$

olarak yazılabilir. Önceki bölümdekine benzer olarak,  $y' = d$  iken, denklem (B.10),  $D_n$  düzlemi üzerinde oluşan eğrinin denklemini vermektedir. Denklem (B.10),  $y' = d$  iken tekrar düzenlenirse elips denklemi elde edilir:

$$1 = \frac{(x' - x'_m)^2}{a_S^2} + \frac{z'^2}{b_S^2}. \quad (\text{B.11})$$

Burada  $a_S$  ve  $b_S$ , elipsin ana ve tali eksenlerini belirtmektedir:

$$a_S^2 = \frac{a^2(a^2 - c_f^2)}{\left[ a^2 - c_f^2 \cos^2(\phi) \right]^2} \left[ a^2 - c_f^2 \cos^2(\phi) - d^2 \right], \quad (\text{B.12})$$

$$b_S^2 = \frac{(a^2 - c_f^2)}{a^2 - c_f^2 \cos^2(\phi)} \left( a^2 - c_f^2 \cos^2(\phi) - d^2 \right), \quad (\text{B.13})$$

ve elipsin merkezi  $x'_m = \frac{dc_f^2 \cos(\phi) \sin(\phi)}{[a^2 - c_f^2 \cos^2(\phi)]}$  ve  $z'_m = 0$ 'dır.  $c_f^2 = a^2 - b^2$  ise odak

uzunluğunu belirtmektedir. Önceki bölümde olduğu gibi, denklem (B.11)'de oluşan eğrinin yapısı  $\phi$ 'nin değeri ile belirlenmektedir. Ancak oluşan geometrik formlar sürekli (önceki bölümdeki gibi parabol oluşmaz).  $\phi = 0$  iken merkezi  $x'_m = 0$  ve  $z'_m = 0$ 'da olan elips oluşmaktadır.  $0 < \phi < \pi/2$  en genel haldir ve bu durumda kesişim sonucu merkezi kayık elipstir. Son olarak  $\phi = \pi/2$  ise  $a_S = b_S$ 'tir ve çember oluşur. En genel halde, *prolate spheroid* ile düzlemin kesişiminin sonucu her zaman elipstir denilebilir.

### B.3. Parabol ve Doğru Kesişimi

Bu bölümde odak noktası koordinat sisteminin orijininde olan parabol ile doğrunun kesişim noktalarının belirlenmesi için analitik formüller geliştirilecektir.  $(x_1, y_1)$  ve  $(x_2, y_2)$  noktalarından geçen doğrunun denklemi

$$d_x y = d_y x - D \quad (\text{B.14})$$

olarak yazılabilir ve  $d_x$ ,  $d_y$  ve  $D$

$$\begin{aligned} d_x &= x_2 - x_1 \\ d_y &= y_2 - y_1 \\ D &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

olarak tanımlanır. Odak uzunluğu  $a$  olan parabolün denklemi

$$y^2 = 4a(x + a) \quad (\text{B.16})$$

olarak yazılır. Kesişim noktaları denklem (B.14) ve (B.16), birlikte çözülerek

bulunur. Denklem (B.16)'da,  $y = \frac{d_y x - D}{d_x}$  yazılırsa

$$0 = x^2 \frac{d_y^2}{d_x^2} - 2x \left[ \frac{d_y D}{d_x^2} + 2a \right] + \frac{D^2}{d_x^2} - 4a^2 \quad (\text{B.17})$$

denklemini elde edilir. Doğru ile parabolün kesişip kesişmediği ve kaç noktada kesiştiği, denklem (B.17)'nin diskriminantına bakılarak belirlenebilir:

$$\Delta_x = \frac{16a}{d_x^2} \left[ d_y D + a \left( d_y^2 + d_x^2 \right) \right]. \quad (\text{B.18})$$

Böylece kesişim noktasının  $x$  bileşeni

$$x_{k1,2} = \frac{\left[ d_y D + 2d_x^2 a \right] \pm 2 \operatorname{sgn}(d_y) d_x \sqrt{a d_y D + a^2 \left( d_y^2 + d_x^2 \right)}}{d_y^2} \quad (\text{B.19})$$

olarak bulunur. Burada  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  signum fonksiyonudur. Kesişim noktasının  $y$  bileşenini bulmak için, denklem (B.14)'te  $x$  çekilerek, denklem (B.16)'da yazılırsa

$$0 = y^2 - 4a \frac{d_x}{d_y} y - 4a \frac{D}{d_y} - 4a^2 \quad (\text{B.20})$$

denklemini elde edilir. Denklem (B.20)'nin diskriminantı

$$\Delta_y = \frac{16a}{d_y^2} \left[ d_y D + a \left( d_x^2 + d_y^2 \right) \right] \quad (\text{B.21})$$

olarak bulunur. Denklem (B.20)'den kesişim noktasının  $y$  bileşeni aşağıdaki gibi bulunur:

$$y_{k1,2} = \frac{2ad_x \pm 2 \operatorname{sgn}(d_y) \sqrt{a^2 \left( d_x^2 + d_y^2 \right) + ad_y D}}{d_y}. \quad (\text{B.22})$$

Böylece kesişim nokta çifti  $(x_{k1}, y_{k1})$  ve  $(x_{k2}, y_{k2})$ 'nin değerleri bulunmuş olur. Ayrıca kesişimin kontrolünü yapmak için denklem (B.18) ve (B.21) kullanılarak genel bir diskriminant ifadesi belirlemek mümkündür. Denklem (B.18) ve (B.21)'de  $d_y^2 > 0$  ve  $d_x^2 > 0$ , olduğundan diskriminantın işaretine etkisi yoktur, böylece sistemin diskriminantı

$$\Delta = a \left[ d_y D + a \left( d_x^2 + d_y^2 \right) \right]. \quad (\text{B.23})$$

olarak yazılabilir.  $\Delta < 0$  ise parabol ve doğru kesişmezler,  $\Delta = 0$  parabol ile doğru tek noktada kesişir ve  $\Delta > 0$  parabol doğruyu iki noktada keser.

Denklem (B.19) ve (B.22)'den görülüşü gibi  $d_x = 0$  veya  $d_y = 0$  ise çıkartılan formüller geçerli değildir. Bu özel durumlar ayrı incelenmelidir.

Doğru  $(x_1, y_1)$  ve  $(x_2, y_1)$  noktalarından geçiyorsa,  $d_y = 0$ 'dır. Bu durumda doğrunun denklemi  $y = y_1$  ile verilir. Parabol denklemi  $y = y_1$  için çözümlerse, parabol ve doğru her zaman tek bir noktada,  $x_k = \frac{y_1^2 - 4a^2}{4a}$  ve  $y_k = y_1$ , kesişirler.

Doğru  $(x_1, y_1)$  ve  $(x_1, y_2)$  noktalarından geçiyorsa,  $d_x = 0$ 'dır ve doğrunun denklemi  $x = x_1$  ile verilir. Parabol denklemi  $x = x_1$  için yazılırsa, denklemin diskriminantı  $\Delta = 16a(x_1 + a)$  olarak bulunur ve kesişim noktalarının değeri,  $y_{k1,2} = \pm\sqrt{4a(x_1 + a)}$ 'dır.

## B.4. Elips ve Doğrunun Kesişimi

Bu bölümde merkezi orijinde olan elips ile  $(x_1, y_1)$  ve  $(x_2, y_2)$  noktalarından geçen doğrunun kesişim noktalarının belirlenmesi için analitik formüller geliştirilecektir.  $(x_1, y_1)$  ve  $(x_2, y_2)$  noktalarından geçen doğrunun denklemi denklem (B.14)'te verilmiştir. Merkezi koordinat sisteminin orijininde olan ana ve tali eksen uzunlukları, sırasıyla,  $a$  ve  $b$  olan elipsin denklemi,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{B.24})$$

olarak verilebilir. Kesişim noktaları önceki bölümde izlenen prosedür kullanılarak

bulunabilir. Bu durumda denklem (B.24)'te,  $y = \frac{d_y x - D}{d_x}$  yazılırsa, elips denklemi

$$0 = x^2 \frac{d_r^2}{a^2} - x 2d_y D + D^2 - d_x^2 b^2 \quad (\text{B.25})$$

halini alır. Burada  $d_r^2 = a^2 d_y^2 + b^2 d_x^2$ , dir. Denklem (B.25)'in diskriminantı

$$\Delta_x = \frac{4d_x^2 b^2}{a^2} [d_r^2 - D^2] \quad (\text{B.26})$$

olarak bulunur ve kesişim noktalarının  $x$  bileşenleri

$$x_{k1,2} = \frac{Dd_y a^2 \pm ab \operatorname{sgn}^*(d_y) d_x \sqrt{d_r^2 - D^2}}{d_r^2} \quad (\text{B.27})$$

olarak bulunur. Burada  $\operatorname{sgn}^*(\cdot)$  fonksiyonu,

$$\operatorname{sgn}^*(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{B.28})$$

ile tanımlanır. Kesişim noktalarının  $y$  bileşenlerini bulmak için denklem (B.24)'te

$$x = \frac{d_x y + D}{d_y} \text{ yazılırsa,}$$

$$0 = y^2 \frac{d_r^2}{b^2} + y 2d_x D + D^2 - d_y^2 a^2 \quad (\text{B.29})$$

denklemini elde edilir. Denklem (B.29)'un diskriminantı,

$$\Delta_y = \frac{4d_y^2 a^2}{b^2} [d_r^2 - D^2] \quad (\text{B.30})$$

olarak bulunur. Böylece kesişim noktalarının  $y$  bileşenleri

$$y_{k1,2} = \frac{-Dd_x b^2 \pm ab |d_y| \sqrt{d_r^2 - D^2}}{d_r^2} \quad (\text{B.31})$$

ile belirlenir. Denklem (B.26) ve (B.30)'da verilen diskriminant ifadeleri yerine, elipsoit ile doğrunun kesişimi için sistem diskriminantı basit olarak

$$\Delta = [d_r^2 - D^2] \quad (\text{B.32})$$

ile verilebilir. Elipsin ana ve tali eksenleri eşit olursa ( $a = b$ ), elips çembere dönüşür ve bu bölümde geliştirilen tüm formüller çember durumu için geçerlidir.

## B.5. Kesişim Noktalarının Belirlenmesi

Önceki bölümlerde parabol-doğru ve elips-doğru kesişim noktalarının analitik olarak belirlenmesi için ifadeler geliştirilmiştir. Geliştirilen analitik ifadeler sonsuz doğru içindir. Bölüm 6'da, parabol ve elips ile saçıcı yüzeyini modelleyen üçgeni oluşturan doğru parçaları ile kesişim noktalarının belirlenmesi gereklidir. Bu nedenle kesişim noktalarının doğru parçası üzerinde olup olmadığının belirlenmesi önem kazanmaktadır. Kesişim noktasının  $(x_1, y_1)$  ve  $(x_2, y_2)$  noktaları arasında kalan doğru parçasının içinde olup olmadığının testi

$$0 \leq [(x_2 - x_1)(x_{k1,2} - x_1) + (y_2 - y_1)(y_{k1,2} - y_1)] \leq [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] \quad (\text{B.33})$$

eşitsizliği ile yapılabilir. Denklem (B.33)'te,  $(x_{k1,2}, y_{k1,2})$ , önceki bölümlerde bulunan kesişim noktalarıdır. (B.33) eşitsizliğini sağlayan  $(x_{k1,2}, y_{k1,2})$  noktaları, doğru parçasının içerisindedir.

## EK C

Bu bölümde Fourier dönüşümü ve fazör gösterimi arasındaki ilişki incelenecektir. Fourier dönüşümü ile fazör arasındaki ilişki, zaman uzayı ve fazör gösterimi için elde edilen çözümlerin karşılaştırılması için önemlidir. Özellikle bu tezde anlık uyarılmış fonksiyonlar kullanılarak bulunan sonuçların karşılaştırılması fazör gösterimi için elde edilen sonuçlar ile yapılmaktadır.

Fourier dönüşüm çifti,  $g(t)$  fonksiyonu için

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \longleftrightarrow \quad G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{C.1})$$

olarak verilebilir [87]. Benzer olarak Fourier dönüşümü

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df \quad \longleftrightarrow \quad G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt, \quad (\text{C.2})$$

olarak verilebilir [88]. Bu durumda  $2\pi$  faktörü ortadan kalkar. Bu bölümde denklem (C.1) ile verilen dönüşüm çifti baz alınarak incelemeler yapılacaktır ve bu bölümde sunulan Fourier dönüşüm çiftleri [87]-[88]'de verilmiştir.

Belli bir  $\omega_0$  frekansına sahip veya harmonik Fourier serisi ile gösterilen bir fonksiyonun  $\omega_0$  frekansına ait bileşeni  $g(t) = \tilde{g} \cos(\omega_0 t)$  ile ifade edilebilen fonksiyonun fazör gösterimi

$$g(t) = \text{Re} \left\{ \tilde{g} e^{j\omega_0 t} \right\} \quad (\text{C.3})$$

şeklinindedir. Burada  $\tilde{g}$ ,  $g(t)$ 'nin fazör gösterimi olarak adlandırılacaktır.

İlk olarak  $g(t) = \tilde{g} \cos(\omega_0 t)$  şeklinde olan bir fonksiyonun fazör gösterimi ile Fourier dönüşümü arasındaki farkların incelenmesi uygundur. Bu durumda  $g(t)$  fonksiyonun fazör gösterimi  $\tilde{g}$ 'dir ve Fourier dönüşümü ise

$$g(t) = \tilde{g} \cos(\omega_0 t) \quad \longleftrightarrow \quad G(\omega) = \tilde{g} \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (\text{C.4})$$

olarak verilir. Dikkat edilirse  $g(t)$ 'nin fazör gösteriminde sadece  $\omega_0$  frekansında bileşen oluşurken, Fourier dönüşümde ise  $\pm\omega_0$  frekanslarında iki bileşen görülür. Bu durumda Fourier dönüşümü ile fazör gösterimin aynı olmadığı görülür.

Fourier dönüşümü ile fazör gösteriminin aynı olmadığı gösterildikten sonra  $g(t) = \tilde{g} \times \cos(\omega_0 t)$ 'nin fazör gösteriminden ters Fourier dönüşümü ile elde edilmesi araştırılmalıdır.  $g(t)$ 'nin fazör gösteriminin  $\tilde{g}$  olduğuna daha önce değinilmişti.  $\tilde{g}$ 'nin ters Fourier dönüşümü alınrsa,  $\tilde{g}$ 'nin sadece  $\omega_0$ 'da var olduğu düşünülerek,

$$F^{-1}\{\tilde{g}\} = g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \tilde{g} e^{j\omega_0 t} \quad (C.5)$$

olarak bulunur. Denklem (C.5) ile verilen dönüşüm sonucu, fazör gösterimine geçilirken uygulanan işlem farksızdır ve ters Fourier dönüşümünden dolayı  $2\pi$  faktörü gelmektedir. Denklem (C.5) ile verilen  $\tilde{g}$ 'nin ters Fourier dönüşümünden  $g(t)$ 'nin elde edilmesi aşağıdaki gibidir:

$$g(t) = 2\pi \operatorname{Re}\left\{F^{-1}\{\tilde{g} \delta(\omega - \omega_0)\}\right\} = 2\pi \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi} \tilde{g} \times e^{j\omega_0 t}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\tilde{g} \times e^{j\omega_0 t}\right\}. \quad (C.6)$$

Böylece fazör gösteriminden, ters Fourier dönüşümü alınarak zaman uzayı gösteriminin elde edilmesi için genel bir formül belirlenmiş oldu. Eğer Fourier dönüşümü denklem (C.2)'deki gibi tanımlanırsa  $2\pi$  normalizasyonuna gerek kalmaz. Benzer olarak denklem (C.2)'deki ifade, Fourier dönüşümünün bir çok özelliğini sağlayan ayrık Fourier dönüşümü için de geçerlidir [90].

Denklem (C.6) ile Fourier dönüşümü ile fazör gösterimi arasındaki ilişkiyi veren genel bir formül belirlenmiştir. Bu noktada sinüzoidal fonksiyonların fazör gösterimi ile anlık uyarılmış fonksiyonların Fourier dönüşümü arasındaki ilişki incelenecektir. İlk olarak zamanda  $\tau$  gecikmesine sahip Dirac delta fonksiyonun Fourier dönüşümü

$$\delta(t - \tau) \longleftrightarrow e^{-j\omega\tau} \quad (C.7)$$

olarak bulunur. Dirac delta fonksiyonu sistemlerin darbe cevabının bulunması için kullanılır ve istenilen fonksiyon ile konvolüsyonu alınarak sistemin cevabı istenilen

uyartım fonksiyonu için belirlenebilir. Eğer uygulanan fonksiyon  $\omega_0$  frekansına sahip bir kosinüs fonksiyonu ise bu durumda Fourier dönüşüm çifti

$$\cos(\omega_0 t) * \delta(t - \tau) \longleftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] e^{-j\omega\tau} \quad (\text{C.8})$$

halini alır. Benzer olarak sinüs için dönüşüm

$$\sin(\omega_0 t) * \delta(t - \tau) \longleftrightarrow j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] e^{-j\omega\tau} \quad (\text{C.9})$$

şeklindedir. Eğer kompleks zarfın Fourier dönüşümü incelenirse,

$$[\cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)] * \delta(t - \tau) \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{-j\omega\tau} \quad (\text{C.10})$$

elde edilir. Denklem (C.10)'da Fourier dönüşümü incelendiğinde  $e^{-j\omega\tau}$  ifadesi denklem (C.7) ile verilen Dirac delta fonksiyonun Fourier dönüşümüdür ve konvolüsyon işlemi sonucunda (A.2) özelliği kullanılarak Fourier dönüşümü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{-j\omega\tau} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \underbrace{e^{-j\omega_0\tau}}_{\bar{g}}. \quad (\text{C.11})$$

$g(t) = \cos(\omega_0(t - \tau))$  yapısındaki bir fonksiyonun fazör gösterimi

$$g(t) = \text{Re} \left\{ e^{-j\omega_0\tau} e^{j\omega_0 t} \right\} = \text{Re} \left\{ \bar{g} e^{j\omega_0 t} \right\} \quad (\text{C.12})$$

olarak yazılır. Denklem (C.11) ve (C.12)'den görüldüğü gibi  $\bar{g}$  fazör gösteriminden başka bir şey değildir. Özellikle bu tezde olduğu gibi anlık uyarılmış kaynaklar söz konusu ise, fazör gösterimi ile Dirac delta fonksiyonun Fourier dönüşümü aynı çıkmaktadır, diğer bir deyişle Fourier dönüşümü ister denklem (C.1) isterse denklem (C.2) ile tanımlansın, fazör gösteriminden ters Fourier dönüşümü ile zaman uzayı sonucu

$$\delta(t - \tau) = \text{Re} \left\{ F^{-1} \{ \bar{g} \} \right\} \quad (\text{C.13})$$

ile elde edilebilir. Fourier dönüşümü lineer bir işlem olduğu sürece,  $\delta(t-\tau)$  üzerine etkiyen lineer işlemler,  $\bar{g}$  üzerine etki eder.  $\bar{g}$ 'nin kompleks bir ifade olduğuna dikkat edilmelidir.

## EK D

Bu bölümde, Bölüm 2 ve 6'da belirlenen integrallerin analitik sonuçları belirsiz integral olarak sunulacaktır. İntegral sınırlarının belirlenmesi ilgili bölümlerde detaylı olarak anlatılmıştır. Bu bölümde sunulan analitik ifadeler [79] ve [91] kullanılarak ve kısmi integrasyon aracılığıyla belirlenebilir. Bölüm D.1'de, Bölüm 2.5'te detaylı olarak anlatılan konvolüsyon integrallerinin analitik sonuçları sunulmuştur. Bölüm D.2'de Bölüm 6.4 ve 6.5'te sunulan integrallerin analitik sonuçları sunulmuştur.

### D.1. Bölüm 2'deki İntegrallerin Analitik İfadeleri

Bu bölümde parçalı-tanımlı polinom fonksiyonlar olarak seçilen zamana göre temel fonksiyonu oluşturan monomialler ile denklem (2.51) ve (2.52) ile verilen, sırasıyla, anlık uyarılmış RWG fonksiyonundan dolayı oluşan elektrik ve manyetik alanın zaman bağımlılıklarını tanımlayan fonksiyonların konvolüsyonu için gerekli integral sonuçları sunulacaktır. Bölüm 2'de, çözüm için EAİD'in türevi kullanıldığı sürece, vektör potansiyel ile ilgili terimlerin ikinci dereceden türev içermesinden dolayı vektör potansiyel için 1,  $t$  ile olan integrallerinin belirlenmesi yeterlidir. Benzer olarak BAİD çözümü elde etmek için MAİD'in türevi alınmalıdır. Bundan dolayı da denklem (2.52)'de verilen fonksiyonların 1,  $t$ ,  $t^2$  ile integrallerin belirlenmesi yeterlidir. Denklem (2.51) ve (2.52)'deki ifadelerin benzerliğini göz önünde bulundurarak, denklem (2.51) ve (2.52)'deki fonksiyonları belirtmek için  $f_{1-5}(\tau)$  fonksiyonu kullanılabilir:

$$f_{1-5}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{(c\tau)^2 - v^2} \\ \cos^{-1}\left(\frac{a_i}{\sqrt{(c\tau)^2 - d^2}}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{(c\tau)^2 - v^2}} \\ \frac{1}{\left[\sqrt{(c\tau)^2 - d^2}\right]\sqrt{(c\tau)^2 - d^2 - a_i^2}} \end{pmatrix}. \quad (D.1)$$

Burada  $v$ ,  $d$  veya  $\sqrt{d^2 + a_i^2}$  olarak verilir. Analitik ifadesi belirlenecek olan integral yapısı genel olarak

$$\Gamma_{i,j} = \int \tau^i f_j(\tau) d\tau \quad (D.2)$$

integrali ile verilebilir. Bu durumda  $\Gamma_{0-1,1-2}$  sonuçları vektör potansiyel ile,  $\Gamma_{0-3,3}$  sonuçları skaler potansiyel ile ve  $\Gamma_{0-2,4-5}$  sonuçları ise manyetik alan ile ilgili sonuçlardır.

$\Gamma_{i,j}$  integrallerin analitik sonuçları aşağıdaki gibidir:

$$\Gamma_{0,1} = \tau \quad (D.3)$$

$$\Gamma_{1,1} = \frac{\tau^2}{2} \quad (D.4)$$

$$\Gamma_{0,2} = \frac{1}{2}\tau\sqrt{(c\tau)^2 - v^2} - \frac{v^2}{2c} \ln \left[ c\tau + \sqrt{(c\tau)^2 - v^2} \right] \quad (D.5)$$

$$\Gamma_{1,2} = \frac{1}{3c^2} \left[ (c\tau)^2 - v^2 \right]^{3/2} \quad (D.6)$$

$$\Gamma_{0,3} = \tau \cos^{-1} \left( \frac{a_i}{\sqrt{(c\tau)^2 - d^2}} \right) - \frac{a_i}{c} \ln \left[ c\tau + \sqrt{(c\tau)^2 - d^2 - a_i^2} \right] - \frac{d}{2c} \tan^{-1} \left( \frac{c\tau d - d^2 - a_i^2}{a_i \sqrt{(c\tau)^2 - d^2 - a_i^2}} \right) + \frac{d}{2c} \tan^{-1} \left( \frac{-c\tau d - d^2 - a_i^2}{a_i \sqrt{(c\tau)^2 - d^2 - a_i^2}} \right) \quad (D.7)$$

$$\Gamma_{1,3} = \frac{1}{2c^2} \left[ (c\tau)^2 - d^2 \right] \cos^{-1} \left( \frac{a_i}{\sqrt{(c\tau)^2 - d^2}} \right) - \frac{a_i}{2c^2} \sqrt{(c\tau)^2 - d^2 - a_i^2} \quad (\text{D.8})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{2,3} = & \frac{1}{3} \tau^3 \cos^{-1} \left( \frac{a_i}{\sqrt{(c\tau)^2 - d^2}} \right) - \frac{a_i}{6c^2} \tau \sqrt{(c\tau)^2 - d^2 - a_i^2} \\ & - \frac{a_i}{6c^3} (d^2 + a_i^2) \ln \left[ c\tau + \sqrt{(c\tau)^2 - d^2 - a_i^2} \right] \\ & - \frac{d^3}{2c^3} \tan^{-1} \left( \frac{c\tau d - d^2 - a_i^2}{a_i \sqrt{(c\tau)^2 - d^2 - a_i^2}} \right) + \frac{d^3}{2c^3} \tan^{-1} \left( \frac{-c\tau d - d^2 - a_i^2}{a_i \sqrt{(c\tau)^2 - d^2 - a_i^2}} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{3,3} = & \frac{1}{4c^4} \left[ (c\tau)^2 - d^2 \right] \cos^{-1} \left( \frac{a_i}{\sqrt{(c\tau)^2 - d^2}} \right) + \frac{a_i}{6c^4} \left[ (c\tau)^2 - d^2 - a_i^2 \right]^{3/2} \\ & - \frac{a_i}{4c^4} \left[ (c\tau)^2 + d^2 \right] \sqrt{(c\tau)^2 - d^2 - a_i^2} \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

$$\Gamma_{0,4} = \frac{1}{c} \ln \left( c\tau + \sqrt{(c\tau)^2 - v^2} \right) \quad (\text{D.11})$$

$$\Gamma_{1,4} = \frac{1}{c^2} \sqrt{(c\tau)^2 - v^2} \quad (\text{D.12})$$

$$\Gamma_{2,4} = \frac{1}{2c^2} \tau \sqrt{(c\tau)^2 - v^2} + \frac{v^2}{2c^3} \ln \left( c\tau + \sqrt{(c\tau)^2 - v^2} \right) \quad (\text{D.13})$$

$$\Gamma_{0,5} = \frac{1}{2cda_i} \tan^{-1} \left[ \frac{2ctda_i \sqrt{(c\tau)^2 - d^2 - a_i^2}}{a_i^2 \left( (c\tau)^2 + d^2 \right) - d^2 \left( (c\tau)^2 - d^2 \right)} \right] \quad (\text{D.14})$$

$$\Gamma_{1,5} = \frac{1}{c^2 a_i} \sec^{-1} \left[ \frac{a_i}{\sqrt{(c\tau)^2 - d^2}} \right] \quad (\text{D.15})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{2,5} = & \frac{1}{c^3} \ln \left[ c\tau + \sqrt{(c\tau)^2 - d^2 - a_i^2} \right] \\ & + \frac{d}{2c^3 a_i} \tan^{-1} \left[ \frac{2c\tau d a_i \sqrt{(c\tau)^2 - d^2 - a_i^2}}{a_i^2 \left( (c\tau)^2 + d^2 \right) - d^2 \left( (c\tau)^2 - d^2 \right)} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

## D.2. Bölüm 6'daki İntegrallerin Analitik İfadeleri

Bu bölümde Bölüm 6.4 ve 6.5'te belirlenen integrallerin analitik sonuçları sunulacaktır. Analitik ifadesi verilen integraller elde edilirken  $\tau = \cos(\theta)$  dönüşümünden yararlanılmıştır. Verilen integraller sonuçlarında  $\tau = \cos(\theta)$  yazılarak Bölümler 6.4 ve 6.5'teki integral sonuçları kolayca elde edilebilir. Sonuçlarda  $\text{atan}(\tau, x^\pm)$  fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\text{atan}(\tau, x^\pm) = \tan^{-1} \left( \frac{\tau \pm x}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-\tau^2}} \right). \quad (\text{D.17})$$

Bölümler 6.4 ve 6.5'teki integraller için sonuçlar aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\int \frac{[1-\tau]^{-1}}{[1-\zeta\tau] \sqrt{1-\tau^2}} d\tau = \frac{\sqrt{1+\tau}}{(1-\zeta)\sqrt{1-\tau}} - \frac{\zeta}{(1-\zeta)\sqrt{1-\zeta^2}} \text{atan}(\tau, \zeta^-) \quad (\text{D.18})$$

$$\int \frac{1}{[1-\zeta\tau]^2 \sqrt{1-\tau^2}} d\tau = -\frac{\zeta \sqrt{1-\tau^2}}{(1-\zeta\tau)(1-\zeta^2)} + \frac{1}{(1-\zeta^2)^{3/2}} \text{atan}(\tau, \zeta^-) \quad (\text{D.19})$$

$$\int \frac{[1-\tau]}{[1-\zeta\tau]^3 \sqrt{1-\tau^2}} d\tau = \frac{\sqrt{1-\tau^2} (2\zeta^2\tau - \zeta\tau - \zeta^2 - 2\zeta + 2)}{2(1-\zeta)(1+\zeta)^2(1-\zeta\tau)^2} + \frac{(2-\zeta)}{2(1-\zeta^2)^{3/2}(1+\zeta)} \text{atan}(\tau, \zeta^-) \quad (\text{D.20})$$

$$\int \frac{1}{[1-\zeta\tau] \sqrt{1-\tau^2}} d\tau = \frac{\text{atan}(\tau, \zeta^-)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (\text{D.21})$$

$$\int \frac{[1-\tau]}{[1-\zeta\tau]^2 \sqrt{1-\tau^2}} d\tau = \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{(1+\zeta)(1-\zeta\tau)} + \frac{\text{atan}(\tau, \zeta^-)}{(1+\zeta)\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (\text{D.22})$$

$$\int \frac{[1-\tau]^2}{[1-\zeta\tau]^3 \sqrt{1-\tau^2}} d\tau = \frac{-\sqrt{1-\tau^2} (4\zeta\tau + \tau - \zeta - 4)}{2(1+\zeta)^2(1-\zeta\tau)^2} + \frac{3\text{atan}(\tau, \zeta^-)}{2\sqrt{1-\zeta^2} (1+\zeta)^2} \quad (\text{D.23})$$

$$\int \frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2} [1+\zeta\tau]} d\tau = \frac{1}{\zeta} \sin^{-1}(\tau) - \frac{1}{\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{atan}(\tau, \zeta^+) \quad (\text{D.24})$$

$$\int \frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2} [1+\zeta\tau]^2} d\tau = -\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{(1+\zeta\tau)(1-\zeta^2)} - \frac{\zeta}{(1-\zeta^2)^{3/2}} \operatorname{atan}(\tau, \zeta^+) \quad (\text{D.25})$$

$$\int \frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2} [1+\zeta\tau]^3} d\tau = -\frac{\sqrt{1-\tau^2} [2+\zeta^2 + \zeta\tau + 2\zeta^3\tau]}{2(1+\zeta\tau)^2(1-\zeta^2)^2} - \frac{3\zeta}{2(1-\zeta^2)^{5/2}} \operatorname{atan}(\tau, \zeta^+) \quad (\text{D.26})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2} [1+\zeta\tau]} d\tau = \frac{\operatorname{atan}(\tau, \zeta^+)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (\text{D.27})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2} [1+\zeta\tau]^2} d\tau = \frac{\zeta\sqrt{1-\tau^2}}{(1+\zeta\tau)(1-\zeta^2)} + \frac{1}{(1-\zeta^2)^{3/2}} \operatorname{atan}(\tau, \zeta^+) \quad (\text{D.28})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2} [1+\zeta\tau]^3} d\tau = \frac{\zeta\sqrt{1-\tau^2}(4-\zeta^2+3\zeta\tau)}{2(1+\zeta\tau)^2(1-\zeta^2)^2} + \frac{(2+\zeta^2)}{2(1-\zeta^2)^{5/2}} \operatorname{atan}(\tau, \zeta^+) \quad (\text{D.29})$$

$$\int \frac{\tau^2}{[1+\zeta\tau][1-\xi\tau]^2\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = -\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{(\zeta+\xi)(1-\xi^2)(1-\xi\tau)} + \frac{\operatorname{atan}(\tau, \zeta^+)}{(\zeta+\xi)^2\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{(2\xi^2 + \zeta\xi - 1)\operatorname{atan}(\tau, \xi^-)}{(\zeta+\xi)^2(1-\xi^2)^{3/2}} \quad (\text{D.30})$$

$$\int \frac{\tau}{[1+\zeta\tau][1-\xi\tau]^2\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = -\frac{\sqrt{1-\tau^2}\xi}{(\zeta+\xi)(1-\xi^2)(1-\xi\tau)} - \frac{\zeta\operatorname{atan}(\tau, \zeta^+)}{(\zeta+\xi)^2\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{(\xi^3 + \zeta)\operatorname{atan}(\tau, \xi^-)}{(\zeta+\xi)^2(1-\xi^2)^{3/2}} \quad (\text{D.31})$$

$$\int \frac{1}{[1+\zeta\tau][1-\xi\tau]^2\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = -\frac{\sqrt{1-\tau^2}\xi^2}{(\zeta+\xi)(1-\xi^2)(1-\xi\tau)} + \frac{\zeta^2\operatorname{atan}(\tau, \zeta^+)}{(\zeta+\xi)^2\sqrt{1-\zeta^2}} - \frac{\xi(\xi^2\zeta - \xi - 2\zeta)\operatorname{atan}(\tau, \xi^-)}{(\zeta+\xi)^2(1-\xi^2)^{3/2}} \quad (\text{D.32})$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\tau^2}{[1+\zeta\tau][1-\xi\tau]^3 \sqrt{1-\tau^2}} d\tau &= \frac{(2\zeta\xi^3 + \zeta\xi + 4\xi^4 - \xi^2)\tau\sqrt{1-\tau^2}}{2(\zeta + \xi)^2(1-\xi^2)^2(1-\xi\tau)^2} \\
&\quad - \frac{(\zeta\xi^2 + 2\zeta + 3\xi^3)\sqrt{1-\tau^2}}{2(\zeta + \xi)^2(1-\xi^2)^2(1-\xi\tau)^2} \\
&\quad + \frac{\zeta \operatorname{atan}(\tau, \zeta^+)}{(\zeta + \xi)^3 \sqrt{1-\zeta^2}} \\
&\quad + \frac{(3\zeta^2\xi + 2\xi^5 + \xi^3 - 2\zeta + 8\zeta\xi^2)}{2(\zeta + \xi)^3(1-\xi^2)^{5/2}} \operatorname{atan}(\tau, \xi^-)
\end{aligned} \tag{D.33}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\tau}{[1+\zeta\tau][1-\xi\tau]^3 \sqrt{1-\tau^2}} d\tau &= \frac{\sqrt{1-\tau^2}\xi(3\zeta\xi + 2\xi^4 + \xi^2)\tau}{2(\zeta + \xi)^2(1-\xi^2)^2(1-\xi\tau)^2} \\
&\quad + \frac{\sqrt{1-\tau^2}\xi(\zeta\xi^2 - 4\zeta - 2\xi - \xi^3)}{2(\zeta + \xi)^2(1-\xi^2)^2(1-\xi\tau)^2} \\
&\quad - \frac{\zeta^2}{(\zeta + \xi)^3 \sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{atan}(\tau, \zeta^+) \\
&\quad + \frac{(\zeta^2\xi^2 + 8\zeta\xi^3 - 2\zeta\xi^5 + 3\xi^4 + 2\zeta^2)}{2(\zeta + \xi)^3(1-\xi^2)^{5/2}} \operatorname{atan}(\tau, \xi^-)
\end{aligned} \tag{D.34}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{[1+\zeta\tau][1-\xi\tau]^3 \sqrt{1-\tau^2}} d\tau &= -\frac{\sqrt{1-\tau^2}\xi^2(2\zeta\xi^3 - 5\zeta\xi - 3\xi^2)\tau}{2(\zeta + \xi)^2(1-\xi^2)^2(1-\xi\tau)^2} \\
&\quad - \frac{\sqrt{1-\tau^2}\xi^2(6\zeta + 4\xi - 3\zeta\xi^2 - \xi^3)}{2(\zeta + \xi)^2(1-\xi^2)^2(1-\xi\tau)^2} \\
&\quad + \frac{\zeta^3}{(\zeta + \xi)^3 \sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{atan}(\tau, \zeta^+) \\
&\quad + \frac{\xi(2\xi^4\zeta^2 + 6\zeta^2 + 6\zeta\xi + 2\xi^2 + \xi^4 - 5\zeta^2\xi^2)}{2(\zeta + \xi)^3(1-\xi^2)^{5/2}} \operatorname{atan}(\tau, \xi^-)
\end{aligned} \tag{D.35}$$