

TRAKYA UNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTUSU

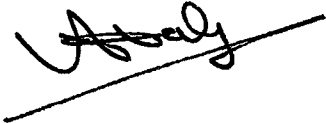
YASEMEN UÇAN

BANACH UZAYLARINDA
DİFERENSİYEL HESAPLAR

Bu tez 13/02/1992 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından kabul edilmiştir.

DANİŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Adem DALGIÇ



UYE

Prof. Dr. İ. Hakkı DURU



UYE

Yrd. Doç. Dr. Hülya İŞCAN



D Z E T

Bu tez çalışmasında bir Topolojik vektör uzayı olan Banach uzaylarında diferensiyel hesaplar ve adi diferensiyel denklemler incelenmiştir. Bu çalışmada izlenen plan aşağıdaki biçimdedir.

1. Bölümde, Konuyla ilgili gerekli önbilgiler verilmektedir.
2. Bölümde, Banach uzaylarında dönüşümler ve diferensiyel hesaplar verilmiştir.
3. Bölümde, Banach uzaylarında adi diferensiyel denklemler için varlık ve teklik teoremleri ispatlanmıştır. Bu teoremlerle verilen diferensiyel denklemlerin çözümlerinin değişik özellikleri elde edilmiştir ve Lineer denklemlerin uygulamaları verilmiştir.

SUMMARY

The plan followed in this work which aims to study differential calculus and differential equations in Banach space that is topological vector space that is topological vector space may be as below.

In chapter I ,pertinent background material is given .

In chapter II, transformations and differential calculus in Banach space are given.

In chapter III , existence and uniqueness theorems for ordinary differential equations are proved. Applications of this material to linear equations and to obtaining various properties of solutions of differential equations are given.

Ö N S Ö Z

Yüksek Lisanstaki çalışmalarım süresince yakın ilgi ve yardımlarıyla çalışmalarımı destekleyen değerli hocam Sayın Yrd.Doc.Dr. ADEM DALGIC 'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Yasemen UÇAN

I Ç İ N D E K İ L E R

Ö Z E T	(i)
SUMMARY	(ii)
ÖNSÖZ	(iii)
GİRİŞ	1
I.BÖLÜM/ ÖN BİLGİLER	
1. Normlanmış vektör uzayları	2
1.1. E vektör uzayında norm	2
1.2. Banach uzayları	3
II.BÖLÜM/BANACH UZAYLARINDA DİFERENSİYEL HESAPLAR	
2. Lineer sürekli eşlemeler ve Banach uzaylarında gösterimler	6
2.1. Lineer sürekli eşlemeler	6
2.2. Lineer sürekli eşlemelerin bileşkesi	8
2.3. Normlanmış vektör uzayının izomorfizmaları; Normlanmış vektör uzayı üzerinde eşdeğer normlar.	8
2.4. Multilineer sürekli eşlemeler	11
2.5. Diferensiyellenebilir eşleme tanımı.	15
2.6. Bileşke fonksiyonun türevi	17
2.7. Türevin lineerliği	18
2.8. Özel fonksiyonların türevleri	18
2.9. Çarpım Banach uzayında değerler alan fonksiyonlar.	20
III.BÖLÜM/DİFERENSİYEL DENKLEMLER	
3. Tanımlar ve temel teoremler	24
3.1. Birinci mertebeden diferensiyel denklemler	24
3.2. n.mertebeden diferensiyel denklem	25
3.3. Yaklaşık çözümler	27

3.4.	Örnek : Lineer diferensiyel denklem	32
3.5.	Lipschitz durumu;temel lemma	34
3.6.	Temel lemmanın uygulamaları; teklik teoremi	38
3.7.	Lipschitz durumunda varlık teoremi	38
3.8.	Bir fonksiyonun lokal lipschitzliği	40
3.9.	Lineer tekil diferensiyel denklem	41
3.10.	Başlangıç değerine bağlılık	43
3.11.	Bir parametreye bağlı diferensiyel denklem	45
4.	Lineer diferensiyel denklemler	47
4.1.	Genel Çözüm	48
4.2.	Lineer homojen denklem	48
4.3.	Sonlu boyutlu E uzayı	51
4.4.	"Serbest terimli" lineer denklem	54
4.5.	n. mertebeden lineer homojen diferensiyel denklem .	56
4.6.	n. mertebeden "Serbest terimli" lineer diferensiyel denklem	60
4.7.	Sabit katsayılı lineer diferensiyel denklem	61
4.8.	Sabit katsayılı denklemler;Sonlu boyutlu E uzayı . .	63
4.9.	n. mertebeden sabit katsayılı lineer diferensiyel denklem	65
KAYNAKLAR		68
DİZGECİMİŞ		69

G İ R İ Ş

Topolojik vektör uzaylarının temel teorisinin başlangıcı 1929 - 1930 yıllarına dayanır. Fakat fonksiyonel analizin sayısal problemleri üzerinde çok eskiden beri çalışılmaktadır.

Normlu uzayların genel tanımı 1920 - 1922 yıllarında S.Banach , H.Hahn ve E.Helly tarafından verilmiştir.

Bu süreyi izleyen on yıl içinde uzay teorisi uygulamaları iki sorun etrafında gelişiyor :

Bunlar Dualite teorisi ve Baire 'nin "kategori" kavramlarıyla aralarında bağ olan teoremlerdir.

Bu çalışmaların sonuçlarını S.Banach 'ın 1932 yılında yayınladığı " Theorie des operations Lineaires " adlı eserinde bulmak mümkündür.Bu eser normlu uzayların başlangıcını belirtir. Daha sonraları Banach uzayları kuramı 1939 yılından sonra Sovyet ve Amerikan matematikçilerce genişletilmiştir ([1] Bourbaki) .

Bu çalışmada bir topolojik vektör uzayı olan Banach uzaylarında diferensiyel hesaplar ve diferensiyel denklem çözümleri incelenmiştir.

I. BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

1. Normlanmış vektör uzayları

1.1. E vektör uzayında norm

Burada K cisimi, R reel cisim veya C kompleks cisimdir

Tanım 1.1.1 : E vektör uzayı olsun.

$\|\cdot\|: E \longrightarrow R^+$ fonksiyonu

$$(i) \quad \|0\|=0;$$

$$(i) \quad \|x\|=0 \implies x=0;$$

$$(ii) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|; \quad \forall x, y \in E \text{ için}$$

$$(iii) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in E, \lambda \in R \text{ için bu}$$

koşulları gerçekliyorsa bir normdur. $(E, \|\cdot\|)$ ikilisine normlanmış uzay denir. ([2] Bourbaki)

Önerme 1.1.2 : E normlanmış bir vektör uzayı olsun; $x, y \in E$ nin noktaları arasındaki uzaklık $d(x, y) = \|x - y\|$ ile tanımlansın, bu metrik tanımıyla E bir metrik uzaydır. Bu durumda her metrik uzay bir topolojik yapıya sahiptir. Bu topolojide

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\| \text{ olduğundan}$$

$$\|\cdot\|: E \longrightarrow R$$

$$x \longmapsto \|x\| \text{ normu sürekli dönüşümdür.}$$

Tanım 1.1.3 : $B(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) < r\}$ kümesine, a merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar denir.

Tanım 1.1.4 : $B^p(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) \leq r\}$ kümesine, a merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar denir.

Tanım 1.1.5 : $S(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) = r\}$ kümesine, a merkezli ve r yarıçaplı küre denir.

Tanım 1.1.6 : $(x_n)_{n \geq 0}$ E nin noktalarından oluşan bir dizi

olsun eğer $\|x_n - a\| \rightarrow 0$ ise $(x_n)_{n \geq 0}$ dizisi $a \in E$ ye yakınsıyor

denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ile tanımlanır.

Tanım 1.1.7 : E normlanmış vektör uzayı,

$(x_n) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ E nin öğelerinden oluşan bir dizi olarak verilsin. Eğer E içindeki bir a noktası aşağıdaki koşulu sağlıyorsa (x_n) dizisi yakınsaktır denilir.

$\forall \varepsilon > 0$ için $n > N \Rightarrow \|x_n - a\| < \varepsilon$ olacak şekilde N pozitif tamsayısı bulunabilmelidir.

Normlanmış bir uzayda (x_n) dizisi a noktasına yakınsıyorsa bu a noktasının tekligini biliyoruz. Çünkü her normlanmış uzay bir metrik uzay ve her metrik bir Hausdorff uzayıdır. ([3])

Not : Yakınsak her (x_n) dizisinin şu özelliği vardır:

$\forall \varepsilon > 0$ için $m, n \geq N \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir N sayısı bulunabilir.

1.2 Banach uzayları

Tanım 1.2.1 : E normlanmış vektör uzayı olsun ve bunun içinde $(x_n)_{n \geq 0}$ dizisi verilsin.

$\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > N \Rightarrow \|x_m - x_n\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde N pozitif tam sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Yakınsak her dizi Cauchy dizisi fakat bunun karşıtı her zaman doğru değildir.

Tanım 1.2.2 : E normlanmış vektör uzayı olsun .E uzayındaki her Cauchy dizisi , E içinde bir öğeye yakınsıyorsa

E uzayına tam uzay denir.

Tanım 1.2.3. : Normlanmış tam uzaya Banach uzayı adı verilir.

Teorem 1.2.4. : Sonlu boyutlu normlanmış bir uzay tamdır.

Sonuç : Normlanmış bir uzayın sonlu boyutlu her alt uzayı kapalıdır.

Teorem 1.2.5. : Bir Banach uzayının kapalı her alt uzayı da Banach uzayıdır. ([7])

Tanım 1.2.6. : E bir Banach uzayı olmak üzere $(u_n)_{n \geq 0}$ E nin u_n elemanlarından oluşan bir dizi olsun. Eger normların serisi $\sum_{n \geq 0} \|u_n\|$ yakınsak ise genel terimi u_n olan seride normda yakınsaktır.

Teorem 1.2.7. : Eger tanımdaki durum söz konusu ise genel terimi u_n olan seriler yakınsaktır.

Yani $\sum_{0 \leq n < p} u_n \rightarrow 0$ için limite sahiptir,

bu limit $\sum_{n \geq 0} u_n$ şeklinde gösterilecek ve

$\left\| \sum_{n \geq 0} u_n \right\| \leq \sum_{n \geq 0} \|u_n\|$ eşitsizliği sağlanır. ([5])

Önerme 1.2.8 : X bir topolojik uzay olsun

$\mathcal{C}_b(X)$ kümesi,

$f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ nümerik değerler olan sınırlı ve sürekli fonksiyonların kümesi olsun. $\mathcal{C}_b(X)$ bir vektör uzayıdır.

$\|\cdot\| : \mathcal{C}_b(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$

$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ normu ile normlanmış vektör uzayıdır.

$\mathcal{C}_b(X)$ bir Banach uzayıdır. ([5])

Dnerme 1.2.9. : F bir Banach uzayı olmak üzere

$f : X \rightarrow F$ sınırlı ve sürekli dönüşümleri gözönüne alalım tanımdan;

Eger $\| f \| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ sonlu ise f sınırlıdır.

$\mathcal{C}_b(X, F)$ sınırlı fonksiyonların kümesi bir vektör uzayıdır.

Bu vektör uzayındaki norm yukarıdaki gibi tanımlandığında

$\mathcal{C}_b(X; F)$ Banach uzayıdır ([5], Cartan).

II. BÖLÜM

BANACH UZAYLARINDA DİFERENSİYEL HESAPLAR

2. Lineer Sürekli Eşlemeler ve Banach Uzayında Gösterimler

2.1. Lineer sürekli eşlemeler

E ve F (\mathbb{R} veya \mathbb{C}) cisimi üzerinde iki normlu vektör uzayı olsun.

Teorem 2.1.1 : $f : E \rightarrow F$ bir lineer eşleme için aşağıdaki koşullar eşdeğerdir.

- (a) f E nin her noktasında sürekli dir ;
- (b) f orjinde sürekli dir.
- (c) $\|f(x)\|$ normu $\|x\| \leq 1$ birim yuvarında sınırlıdır.

Kanıt : $a \Rightarrow b$ aşıkardır.

$b \Rightarrow c$ f 'in orjinde yani sıfır noktasında sürekli olduğunu kabul edelim. O zaman F 'in birim yuvarının f^{-1} altındaki ters görüntüsü E de sıfırın komsuluğudur. Böylece bu bazı $r > 0$ için $\|x\| \leq r$ yuvarını içerir.

$\|x\| \leq r$ ise $\|f(x)\| \leq 1$ sağlanacak şekilde bir $r > 0$ vardır. Bu sebeble

$$\|x\| \leq 1 \text{ ise } \|f(x)\| \leq \frac{1}{r} \text{ olur. Çünkü } y = r \cdot x \text{ alırsak}$$

$\|f(y)\| = r \cdot \|f(x)\|$ olduğundan $\|f(y)\| \leq 1$ elde ederiz, buda $\|f(y)\|$ in $\|x\| \leq 1$ yuvarında sınırlı olduğunu gösterir.

$c \Rightarrow a$: $\|x\| \leq 1$ olacak şekilde $\forall x$ için $\|f(x)\| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ var. Böylece

$$\forall x \text{ için } \|f(x)\| \leq M \cdot \|x\| \text{ yazabiliriz.}$$

($\|x\| = 0$ için aşıkardır ; $\|x\| = r > 0$ ise $y = (1/r) \cdot x$ vektörü

$\|y\|=1$ 'i sağlar .Bu sebeble

$$\|f(y)\| \leq M \text{ ve } \|f(x)\| = r \cdot \|f(y)\| \leq r \cdot M = M \cdot \|x\|$$

Bu koşullar altındaki f in $\forall a \in E$ de sürekli olduğunu gösterelim.

$$f(x) - f(a) = f(x-a)$$

$$\|f(x) - f(a)\| \leq M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon \text{ olacak şekilde}$$

$\|x - a\| \leq \frac{\epsilon}{M}$ bulmak yeterlidir.Böylece f 'in sürekliliği ispatlanır.

Gösterim

$\mathcal{L}(E;F)$ E den F ye bütün lineer sürekli eşlemelerin kümesini tanımlasın.Bu kümenin vektör uzayı olduğu aşıkardır.

$$\mathcal{L}(E;F) \text{ de } \|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| \text{ sonludur.}$$

(2.1.1) teoreminin (c) şikkından $\|f(x)\| \leq \|f\| \cdot \|x\|$ (temel bağıntı) olduğunu görürüz.Bu yüzden

$$\forall x \in E \text{ için } \|f(x)\| \leq M \cdot \|x\| \quad (2.1.2)$$

olacak şekilde bir $M > 0$ var.

$\|x\| \leq 1$ için $\|f(x)\| \leq M$ sağlanır.Buradan da

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| \leq M \text{ yani } \|f\| \leq M \text{ dir.}$$

$\|f\|$ da (2.1.2) bağıntısını gerçekleyecek şekilde ki bütün $M > 0$ sayılarının en küçüğüdür.

$(E;F)$ vektör uzayı

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| \leq M \text{ normu ile bir normlanmış}$$

vektör uzayıdır. E ve F iki normlu uzay olduklarından

$\mathcal{L}(E;F)$ üzerinde tanımlanan topoloji ile tamdır.

Teorem 2.1.2: Eğer F bir Banach uzayı ise $\mathcal{L}(E;F)$ de Banach uzayıdır. ([5])

2.2. Lineer sürekli eşlemelerin bileşkesi

E, F ve G üç normlu vektör uzayı olsun, ve

$f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ iki lineer sürekli eşleme ise

$g \circ f : E \rightarrow G$ lineer sürekli eşlemedir.

$\forall x \in E$ için :

$$\|(g \circ f)(x)\| = \|g(f(x))\| \leq \|g\| \cdot \|f(x)\| :$$

f lineer sürekli eşleme olduğundan

$$\|f(x)\| \leq \|f\| \cdot \|x\| \text{ yazarız. O zaman}$$

$$\|(g \circ f)(x)\| \leq \|g\| \cdot \|f\| \cdot \|x\|$$

(Kesim 2.1.) normun bir lineer eşleme olduğu temel bağıntısından

$$\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\| \quad (2.2.1.) \text{ olur.}$$

2.3. Normlanmış vektör uzayının izoformizmaları ; Normlanmış

vektör uzayı üzerinde eşdeğer normlar

Tanım : E ve F iki normlanmış vektör uzayı olmak üzere

$f : E \rightarrow F$ eşlemesi (i) ve (ii) koşulunu sağlıyorsa

bir izomorfizmadır.

(i) f lineer ve süreklidir ;

(ii) $g \circ f = id_E$ ve $f \circ g = id_F$ olacak şekilde

F den E ye lineer sürekli eşlemeleri vardır.

Banach's Teoremi :

Eğer E ve F Banach uzayları ise bütün birebir örten lineer sürekli eşlemeler bir izomorfizmadır.

Tanım 2.3.1. : E ve F normlanmış vektör uzayı olmak üzere ,

$f : E \rightarrow F$ eşlemesi normu koruyan birebir örten lineer bir eşleme ise f bir izometridir, yani $x \in E$ için $\|f(x)\| = \|x\|$ dir. Bu koşul $\|f(x)\|$ nun birim yuvarında sınırlı olduğunu gösterir; böylece f lineer sürekli eşlemedir. Aynı nedenlerle g ters eşlemesinde lineer ve süreklidir. Her izometri izomorfizmadır, tersi her zaman doğru değildir.

Normlanmış vektör uzayı üzerinde eşdeğer normlar

Tanım 2.3.2. : f_1 ve f_2 aynı E vektör uzayında iki norm olsun. Eğer ikisinde aynı topolojiyi tanımlıyorsa bu iki norm eşdeğerdir.

Bu tanım şu şekilde de formüle edilebilir ;

E_{f_1} f_1 normu ile normlanmış vektör uzayı

E_{f_2} f_2 normu ile normlanmış vektör uzayı olsun.

E nin birim eşlemesi biri diğerinin tersi olan iki tane birebir örten eşleme tanımlar.

$f_1 : E_{f_1} \rightarrow E_{f_2}$,

$f_2 : E_{f_2} \rightarrow E_{f_1}$

f_1 ve f_2 nin aynı topolojiyi tanımladığını söylemek

f_1 ve f_2 nin normlu vektör uzayının izomorfizmaları olduğunu söylemektir.

Bunun doğru olması için gerek ve yeter koşul f_1 ve f_2 nin sürekli eşlemeler olmasıdır.

Şimdi lineer eşleme için süreklilik kriterini uygulayalım :
 f_1 'in sürekli olması demek

$\forall x \in E$ için $f_2(x) \leq M f_1(x)$ olacak şekilde $M > 0$ sayısının olmasıdır.

Benzer şekilde f_2 nin sürekli olması demek $\forall x \in E$ için $f_1(x) \leq M' f_2(x)$ olacak şekilde bir $M' > 0$ olmasıdır.

Dünerme 2.3.3 :

f_1 ve f_2 normlarının eşdeğer olması için gerekli ve yeterli koşul $f_1(x)/f_2(x)$ oranının ($\forall x \neq 0$ için) sıfırdan büyük değerlerle her iki taraftan sınırlı olmasıdır.

Teorem 2.3.4 :

\mathbb{R}^n vektör uzayında bütün normlar eşdeğerdir.

Sonuç : E normlanmış vektör uzayı ise

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ her lineer birebir örten f eşlemesi bir izomorfizmadır.

Teorem 2.3.5. : E sonlu boyutlu normlanmış vektör uzayı olsun

E Banach uzayı ise E 'den F normlu vektör uzayına tanımlanan bütün lineer eşlemeler sürekli dir.

Kanıt : E 'nin boyutu n olsun .

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ lineer birebir örten bir eşleme vardır.

Önceki sonuçtan f bir izomorfizmadır. \mathbb{R}^n tam olduğundan E 'de tamdır. Yani Banach uzayıdır.

Simdi $g : E \rightarrow F$ linear eşleme olsun.

Eğer $h = g \circ f : R^n \rightarrow F$ sürekli olduğunu ispatlayabilirsek

$g = h \circ f^{-1}$ eşlemesinin sürekli olduğunu söyleriz.

$h : R^n \rightarrow F$ linear eşlemesinin sürekli olduğunu

göstermek yeterlidir. Bunun içinde

$$h(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot h(e_i) \text{ olur.}$$

Buradan

$$\|h(\xi_1, \dots, \xi_n)\| \leq \sum_{i=1}^n |\xi_i| \cdot \|h(e_i)\|,$$

$$(\xi_1, \dots, \xi_n) \rightarrow 0 \text{ ise } h(\xi_1, \dots, \xi_n) \rightarrow 0$$

0 halde h sürekli dir.

Not :

(2.3.4.) teoremi ve (2.3.5.) teoreminin sonuçları

kompleks vektör uzayı içinde benzer şekilde elde edilir.

E ve F sonlu boyutlu iki vektör uzayı ve

$$\dim E = m, \quad \dim F = n \text{ olsun.}$$

E ve F nin seçilen bu tabanları $\mathcal{L}(E;F)$ vektör uzayına uygundur.

$\mathcal{L}(E;F)$ n satır ve m sütunluk matrislerin vektör uzayı ve $\mathcal{L}(E;F)$ 'nin boyutu

$$\dim(\mathcal{L}(E;F)) = m \cdot n \text{ 'dir.}$$

2.4. Multilineer Sürekli Eşlemeler

E_1, \dots, E_n ve F vektör uzayı olsunlar; Eğer

$$f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F \text{ eşlemesi}$$

$\forall k \in [1, n]$ için $a_i \in E_i$ ($i \neq k$) elemanlarının her sistemi için

$$f : E_n \rightarrow F$$

$$x_k \mapsto f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n) \text{ kısmi}$$

eşlemesi lineer ise f eşlemesi multilineerdir.

($n = 2$ ise f bilinear . $n = 3$ ise trilinear .. ,v.s)

Eğer f multilineer ise

$$f(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) = (\lambda_1 \dots \lambda_n) f(x_1, \dots, x_n) \quad (1.4.1)$$

gerçeklenir.

Teorem 2.4.1. :

E_1, \dots, E_n ve F Normlu vektör uzayı olsunlar ve $f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ eşlemesi multilineer ise aşağıdaki koşullar birbirine eşdeğerdir.

(i) f $E_1 \times \dots \times E_n$ 'nin her noktasında süreklidir;

(ii) f $(0, \dots, 0) \in E_1 \times \dots \times E_n$ 'de süreklidir;

(iii) $\|f(x_1, \dots, x_n)\| \leq \|x_1\| \leq 1, \dots, \|x_n\| \leq 1$

birim yuvarların çarpımında sınırlıdır.

Kanıt :

(2.1.1.) teoremine benzer olarak

(i) \Rightarrow (ii) doğruluğu aşıkardır.

(ii) \Rightarrow (iii) : Eğer f orjinde sürekli ise f 'in

birim yuvarlarının ters görüntüsü $(0, \dots, 0) \in E_1 \times \dots \times E_n$ 'nin komşuluğundadır ve bu sebeble

($\forall \epsilon$ için , $\|x_i\| \leq r$) $\Rightarrow \|f(x_1, \dots, x_n)\| \leq \epsilon$ olacak şekilde bir $r > 0$ vardır.

(1.4.1) den

$\forall \epsilon$ için $\|x_i\| \leq 1 \Rightarrow \|f(x_1, \dots, x_n)\| \leq \epsilon / r^n$ yazabiliriz.

Buda (iii) 'i ispatlar.

Şimdi varsayalım ki her f eşlemesi için (iii) gerçekleşiyor olsun.

($\forall i$ için $\|x_i\| \leq 1$) $\Rightarrow \|f(x_1, \dots, x_n)\| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ olsun.

Her x_i için

$$\|f(x_1, \dots, x_n)\| \leq M \|x_1\| \dots \|x_n\| \quad (2.4.2.)$$

eşitsizliği olur.

Bu koşullar altında f eşlemesi her (a_1, \dots, a_n) noktasında sürekli, $f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n) = f(x_1 - a_1, x_2, \dots, x_n) + f(a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n) + \dots + f(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n - a_n)$ olur.

Buradan (2.4.2) gerçekleşir.

$$\|f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n)\| \leq M \|x_1 - a_1\| \cdot \|x_2\| \dots \|x_n\| + M \|x_2 - a_2\| \cdot \|a_1\| \cdot \|x_3\| \dots \|x_n\| + \dots + M \|x_n - a_n\| \cdot \|a_1\| \dots \|a_{n-1}\| \text{ olur.}$$

$\forall i$ için $\|x_i - a_i\| \leq \varepsilon$ olduğunu varsayalım. Buradan

$$\|x_i\| \leq \|a_i\| + \varepsilon \text{ dir.}$$

Böylece ($\forall i$ için $\|x_i - a_i\| \leq \varepsilon$) \Rightarrow ($\forall i$ için $\|x_i\| \leq A$) olacak şekilde bir $A > 0$ vardır.

Bundan böyle $\forall i$ için $\|x_i - a_i\| \leq \varepsilon$ ise

$$\|f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n)\| \leq nMA^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i - a_i\| \right) \leq nMA^{n-1} \varepsilon$$

(2.4.4) olur.

Eğer ξ yeterince küçük ise A 'yı $\varepsilon > 0$ dan bağımsız olarak seçebiliriz. (2.4.4) 'den dolayı

$$\begin{array}{l} x_1 \longrightarrow a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \longrightarrow a_n \end{array} \quad \text{ise } f(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow f(a_1, \dots, a_n)$$

olur. Böylece f eşlemesi (a_1, \dots, a_n) noktasında sürekli ve ispat tamamlanır.

Gösterim : $E_1 \times \dots \times E_n$ 'den F kümesine tanımlanan bütün lineer sürekli eşlemelerin kümesi $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ ile gösterilsin.

Bu küme $E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ bütün eşlemelerin oluşturduğu vektör uzayının bir alt vektör uzayıdır.

$\forall f \in \mathcal{L}(E_1 \times \dots \times E_n; F)$ için

$\|f\| = \sup \|f(x_1, \dots, x_n)\|$ alabiliriz.

x_1, \dots, x_n , $\|x_1\| \leq 1$, \dots , $\|x_n\| \leq 1$ birim yuvarlarındadır.

(1.4.2.) kullanılarak

$$\|f(x_1, \dots, x_n)\| \leq \|f\| \|x_1\| \dots \|x_n\| \quad (2.4.5.)$$

bulunur ve

$\|f\|$ (2.4.2.) bağıntısını gerçekleyecek şekilde bütün $M > 0$ 'dan küçüktür.

$(E_1, \dots, E_n; F)$ vektör uzayı yukarıdaki normla normlanmış vektör uzayı olur. Eğer F bir Banach uzayı ise

$\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ normlu vektör uzayı da bir Banach uzayıdır.

Örnek : Bir bilinear sürekli eşleme örneği :

E, F ve G üç normlu vektör uzayı olsun , bileşke işlemini göz önüne alalım : $\Psi : \mathcal{L}(F; G) \times \mathcal{L}(E; F) \rightarrow \mathcal{L}(E; G)$

$(g, f) = g \circ f$ tanımıyla bilinear eşlemedir ve

(2.2.1.) den

$$\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\| \quad \text{olduğu görülür.}$$

Bu durumda $\|f\| \leq 1$ ve $\|g\| \leq 1$ ise $\|g \circ f\| \leq 1$ olur.

Böylece Ψ 'nin sürekliliği gösterilir.

2.5 Diferensiyellenebilir eşleme tanımı

E ve F verilen iki Banach uzayı ve U boş olmayan UCE açık küme olsun

$f : U \rightarrow F$ eşlemesini gözönüne alalım.

Aşağıda $\forall a \in U$ noktası için bu fonksiyonların kümesinde bir eşdeğer bağıntı tanımlanır :

Tanım 2.5.1

$f_1 : U \rightarrow F$ ve $f_2 : U \rightarrow F$ (U açık küme olmak üzere) eşlemeleri yeterince küçük $r > 0$ için tanımlanan

$$m(r) = \sup_{\|x-a\| \leq r} \|f_1(x) - f_2(x)\| \quad \text{niceliği}$$

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r > 0}} \frac{m(r)}{r} = 0 \quad (2.5.1)$$

yada

$$m(r) = o(r) \quad (2.5.2) \quad \text{yi sağlıyorsa } f_1 \text{ ve } f_2$$

eşlemeleri $a \in U$ da diğerlerinin herbirine teğettir.

" f_1 ve f_2 a noktasında teğettirler " bir eşdeğer bağıntıdır.

Dzellikle de a noktasında sıfıra teğet f kuralına sahibiz.

(2.5.2) koşulu f_1, f_2 fonksiyonun a noktasında sürekliliğini

sağlar ve a noktasında 0 değerini alır.

Tanım 2.5.2

$f : U \rightarrow F$ aşağıdaki koşulları sağlıyorsa f eşlemesi $a \in U$ noktasında diferensiyellenebilirdir denir.

(i) f , $a \in U$ noktasında süreklidir ;

(ii) $x \mapsto f(x) - f(a)$ ve $x \mapsto g(x-a)$ eşlemeleri a

noktasında teğet olacak şekilde bir

$g : E \rightarrow F$ lineer eşlemesi vardır.

Son koşulu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz :

$$\| f(x) - f(a) - g(x-a) \| = o(\|x-a\|) \quad (2.5.3)$$

Eğer f a noktasında diferensiyellenebilirse yukarıdaki bu uyarılar bir tek lineer sürekli g eşlemesi tanımlar.

Bu eşleme $\mathcal{L}(E;F)$ 'nin bir elemanıdır.

f in a noktasındaki türevi $f'(a)$ ile belirtilir.

Tanım 2.5.3 :

Eğer f U kümesinin her noktasında diferensiyellenebilirse U 'da diferensiyellenebilirdir denir. Basitçe f' ile gösterilen

$$\begin{aligned} f' : U &\rightarrow \mathcal{L}(E;F) \\ a &\rightarrow f'(a) \end{aligned} \quad \text{eşlemesi vardır.}$$

Bu diferensiyellenebilir f eşlemesinin türevi alınmış eşleme tanımlıdır. f' türevlenmiş eşlemenin f eşlemesi ile aynı F uzayında değerler almadığına dikkat edilmelidir.

Tanım 2.5.4

Eğer $f : U \rightarrow F$ eşlemesi aşağıdaki iki koşulu gerçekleştiriyorsa f C^1 sınıfının eşlemesidir.

- (i) f U da diferansiyellenebilir ;
- (ii) $f' : U \rightarrow \mathcal{L}(E;F)$ süreklidir.

Diferensiyellenebilirliğin gösterimi ile ilgili uyarı :

U , E Banach uzayının açık bir kümesi

$U \subset E$ ve F Banach uzayı olmak üzere

$f : U \rightarrow F$ sürekli eşleme olsun.

E üzerinde yeni norm tanımlayalım $x \in E$ nin yeni normunu $\|x\|_1$ ile eski normuda $\|x\|$ ile gösterilsin. Aynı düşünceyle F üzerinde de eşdeğer norm tanımlanabilir. Ne E nin ne de F nin topolojisi değişmez; U yine açık ve f eşlemesinde sürekli kalır.

Önerme 2.5.5

Eğer verilen bir norm için f $a \in U$ noktasında diferansiyellenebilir ise f aynı zamanda diğer bütün normlar için bu noktada diferansiyellenebilirdir ve türevler aynı kalır.

2.6. Bileşke fonksiyonun türevi

E , F ve G üç Banach uzayı olsun, $U \subset E$ uzayında açık bir küme ve $V \subset F$ uzayında açık bir küme olsun. $a \in U$ ve $f: U \rightarrow F$, $g: V \rightarrow G$ iki sürekli eşlemeyi gözönüne alalım. $b = f(a) \in F$ nin V 'de olduğunu varsayalım.

U^{-1}
 $f^{-1}(V) \subset U$ a noktasını kapsayan E 'de açık küme :

$g \circ f: U^{-1} \rightarrow G$ bileşke eşlemesi U^{-1} açık kümesinde tanımlıdır.

Teorem 2.6.1 :

Eğer f a noktasında diferansiyellenebilir ve g eşlemesi de $b = f(a)$ noktasında diferansiyellenebilir ise $h = g \circ f$ a noktasında diferansiyellenebilirdir ve

$$h'(a) = g'(b) \circ f'(a) \text{ dir.} \quad (2.6.1)$$

Diğer bir deyişle, $h'(a): E \rightarrow G$ lineer eşlemesi

$f'(a) : E \rightarrow F$ ve $g'(f(a)) : F \rightarrow G$ lineer eşlemelerin bileşkesidir.

2.7 Türevlerin lineerliği

$U \subseteq E$ Banach uzayının açık bir kümesi ve F bir Banach uzayı olmak üzere f ve g eşlemeleri U kümesinden F uzayına tanımlı iki eşleme olsun.

$$h : U \rightarrow F$$

$h(x) = f(x) + g(x)$ ile tanımlı toplam eşlemesidir. Benzer şekilde λ skaleriyle f eşlemesinin λf çarpımı

$$k(x) = \lambda f(x)$$

ile tanımlanan $k : U \rightarrow F$ eşlemesidir.

Dünya 2.7.1 :

Eğer f ve g a noktasında diferensiyellenebilir ise $h = f+g$ eşlemesi de a noktasında diferensiyellenebilirdir ve

$$h'(a) = f'(a) + g'(a) \text{ dir.}$$

Eğer f a noktasında diferensiyellenebilir ise $k = \lambda f$ eşlemesi de a noktasında diferensiyellenebilirdir , $k'(a) = \lambda f'(a)$ dir.

2.8 Özel fonksiyonların türevleri

Dünya 2.8.1 :

Eğer $f : U \rightarrow F$ sabit eşleme ise diferensiyellenebilirdir ve $\forall x \in U$ için $f'(x) = 0$ dir.

Dünya 2.8.2 :

Eğer $f : U \rightarrow F$ eşlemesi E 'den F 'ye lineer sürekli eşlemelerin kısıtlanmış ise bu kısıtlanmış fonksiyon

diferensiyellenebilirdir ve : $\forall x \in U$ için $f'(x)=f$ tir.

Şimdi , E_1 , E_2 ve F üç Banach uzayı olmak üzere :

$f: E_1 \times E_2 \rightarrow F$ bilineer sürekli eşlemenin türevini inceleyeceğiz.

$E_1 \times E_2$ üzerinde tanımlanan

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$ işlemleriyle bir vektör uzayıdır.

$E_1 \times E_2$ vektör uzayı üzerinde seçilen $\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\| + \|x_2\|$ normu ile normlanmış vektör uzayı olur. Bu normla $E_1 \times E_2$ tamdır.

Teorem 2.8.3 :

Eğer $f: E_1 \times E_2 \rightarrow F$ bilineer sürekli eşleme ise f

diferensiyellenebilirdir ve $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$ noktasında

türevi

$$f'(a_1, a_2)(h_1, h_2) = f(h_1, a_2) + f(a_1, h_2) \text{ ile verilir. (2.8.2)}$$

bağıntısında , $(h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$ vektöründe

$f'(a_1, a_2) \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2; F)$ 'nin değeri sol tarafındaki ifade

ile verilir.

Genelleştirme :

E_1 ve E_2 Banach uzaylarının çarpımını gözönünde bulundurarak,

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $E_1 \times \dots \times E_n$ çarpımını gözönüne alalım.

Bu çarpım da bir vektör uzayıdır. Aynı zamanda :

$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sum_{i=1}^n \|x_i\|$ normu ile normlanmış vektör uzayı olur.

$f: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ multilinear sürekli bir eşleme olsun.

Teorem (2.8.3) aşağıdaki gibi genellenebilir :

f (a_1, \dots, a_n) noktasında diferensiyellenebilir ve bu noktadaki türevi

$$f'(a_1, \dots, a_n)(h_1, \dots, h_n) = f(h_1, a_2, \dots, a_n) + f(a_1, h_2, \dots, a_n) + \dots + f(a_1, \dots, a_{n-1}, h_n) \quad (2.8.3)$$

ile verilir.

2.9. Çarpım Banach uzayında değerler alan fonksiyonlar.

F uzayı sonlu sayıda Banach uzaylarının çarpımı olsun:

$$F = F_1 \times \dots \times F_k$$

$\forall i$ için $1 \leq i \leq k$ olmak üzere

$f_i : F \rightarrow F_i$ izdüşüm eşlemesi olsun ve

$u_i : F_i \rightarrow F$

$u_i(x_i) = (0, \dots, x_i, \dots, 0)$ ile tanımlı birebir eşleme olsun.

u_i ve f_i lineer sürekli eşlemelerdir ve aşağıdaki

(2.9.1) bağıntılarını gerçeğe çıkarırlar.

$$f_i \circ u_i = 1_{F_i} \quad (F_i \text{ 'nin birim eşlemesi})$$

(2.9.1)

$$\sum_{i=1}^k u_i \circ f_i = 1_F \quad (F \text{ 'nin birim eşlemesi})$$

Önerme 2.9.1. :

Önceki gösterimler kullanılarak , $U \subset E$ (Banach uzayının açık alt kümesi) olmak üzere

$f : U \rightarrow F$ sürekli bir eşleme olsun.

Diğer bir deyişle

f 'in $a \in U$ 'da diferensiyellenebilir olması

$\forall 1 \leq i \leq k$ için

$f_i = f_i \circ f : U \rightarrow F_i$ eşlemesinin a noktasında diferensiyellenebilir olması gerek ve yeterdir ve

$$f'(a) = \sum_{i=1}^k u_i \circ f'_i(a) \quad (2.9.2)$$

dir.

KANIT:

U_i ve f_i lineer eşlemeleri diferensiyellenebilir. Bu yüzden f diferensiyellenebilirdir ve bileşkeleride diferansiyellenebilir (Teo.2.6.1.).

Türevleri

$f'_i(a) = f_i \circ f'(a) \in \mathcal{L}(E; F_i)$ ile verilir.

Tersine f'_i 'nin herhangi bir i ($1 \leq i \leq k$) için diferensiyellenebildiğini farzedelim.

(2.9.1) 'in (ii) bağıntısı sağlanır.

$$\sum_{i=1}^k u_i \circ f_i \circ f = f \quad \text{dir.}$$

Yani $f = \sum_{i=1}^k u_i \circ f_i$ dir. Bu sebeple teorem 2.6.1 ve önerme

2.7.1 ile f , a noktasında diferansiyellenebilir ve

$$f'(a) = \sum_{i=1}^k U_i \circ f'_i(a) \text{ dır.}$$

Uygulama :

Kesim 2.4. 'e benzer olarak,

$f: E_1 \times E_2 \rightarrow F$ bilineer sürekli bir eşleme gözönüne alalım

Diğer taraftanda

$u: U \rightarrow E_1$ ve $v: U \rightarrow E_2$ iki sürekli eşleme olsunlar.

f eşlemesi u ve v eşlemelerinin çarpımını verir;

$w: U \rightarrow F$ eşlemesi

$w(x) = f(u(x), v(x))$ (2.9.3) formülü ile tanımlanır.

Önerme 2.9.2 :

u ve v bir $a \in U$ noktasında diferensiyellenebilir eşler olsunlar. Öyle ise w eşlemesi bu noktada diferensiyellenebilir ve $w'(a)$ türevi $h \in E$ için

$$w'(a) \cdot h = f(u'(a) \cdot h, v(a)) + f(u(a), v'(a) \cdot h) \quad (2.9.4)$$

bağıntısı ile verilir.

KANIT : (2.9.1) önermesi ile

$$U \rightarrow E_1 \times E_2$$

$x \mapsto (u(x), v(x))$ eşlemesi a noktasında diferensiyellenebilir ve türevleri $h \mapsto (u'(a) \cdot h, v'(a) \cdot h)$ olan lineer eşlemedir. Diğer yandan ,

$$f: E_1 \times E_2 \rightarrow F$$

bilineer sürekli eşleme olduğundan $E_1 \times E_2$ 'nin her noktasında diferansiyellenebilir. (Teo.2.8.3).

(2.9.3) bağıntısı ile tanımlanan w eşlemesi

(u,v)
 $U \xrightarrow{\quad} E_1 \times E_2 \xrightarrow{\quad f} F$ bileşke eşlemedir. Teorem (2.6.1)

den dolayı a noktasında diferansiyellenebilir ve türevleri bileşke eşlemesinin türevine eşittir. Şimdi bu türevi hesaplayalım. (2.8.2) bağıntısında

a_1 yerine $u(a)$

a_2 yerine $v(a)$

h_1 yerine $u'(a) \cdot h$

h_2 yerine $v'(a) \cdot h$ değerlerini yerleştirerek

$$f'(a_1, a_2)(h_1, h_2) = f'(h_1, a_2) + f'(a_1, h_2) \quad (2.8.2)$$

$$w'(a) \cdot h = f'(u'(a)h, v(a)) + f'(u(a), v'(a) \cdot h) \quad h \in E \text{ için}$$

(2.9.4) bağıntısının sağ kenarını elce ederiz. Bu da istediğimiz sonuçtur.

Özel durum:

$E = \mathbb{R}$ olsun, yani u ve v tek değişkenli x 'in fonksiyonlarıdır. bilindiği gibi ,

$$u'(a) \cdot h = h \cdot u'(a) \quad , \quad v'(a) \cdot h = h \cdot v'(a) \quad \text{ve} \quad w'(a) \cdot h = h \cdot w'(a)$$

dır. (2.9.4) bağıntısında $h = 1$ alırsak

$$w'(a) = f'(u'(a), v(a)) + f'(u(a), v'(a)) \quad (2.9.5)$$

sağlanır.

III. BÖLÜM :
DİFERANSİYEL DENKLEMLER

3. Tanımlar ve Ana Teoremler :

Bu bölümde E reel cisim üzerinde bir Banach uzayını göstereceğiz. E Banach uzayında değerler alan reel tek (t) değişkenli Ψ fonksiyonları gözönüne alınsın; Eğer Ψ diferensiyellenebilirse Ψ' de E 'de olur.

3.1. Birinci mertebeden diferansiyeller denklemler

$U \subset \mathbb{R} \times E$ alt kümesi verilsin; U alt kümesi hemen her zaman açık kümedir, fakat her durumda geçerli değildir, bazen kapalı kümedir.

Verilen $f : U \rightarrow E$ sürekli fonksiyonu için

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (3.1.1)$$

diferansiyel denklemini elde ederiz. Bu diferansiyel denklemin çözümüyle tanım anlaşılır, verilen f fonksiyonu C^1 sınıfının fonksiyonudur.

$\Psi : I \rightarrow E$ ($I \subset \mathbb{R}$ açık veya kapalı, sınırlı veya sınırsız) fonksiyonu aşağıdaki iki koşulu sağlar.

- (i) $(t, \Psi(t)) \in U \quad \forall t \in I$ için;
- (ii) $\Psi'(t) = f(t, \Psi(t)) \quad \forall t \in I$ için .

Not: Ψ 'nin C^1 sınıfında olması gerekli değildir. Eğer Ψ diferensiyellenebilirse ve (i) şartını sağlıyorsa $\Psi'(t)$ nin sürekli fonksiyonudur. Çünkü $f(t, \Psi(t))$ t 'nin sürekli fonksiyonudur .

$E = E_1 \times \dots \times E_n$ Banach uzaylarının sonlu bir çarpımı olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$U \subset \mathbb{R} \times E_1 \times \dots \times E_n$$

ve $f_i, \forall i (1 \leq i \leq n)$ için $x_i \in E_i$ olmak üzere

$f(t, x_1, \dots, x_n)$ 'nin bir fonksiyonu: $f_i : U \rightarrow E_i$,

verilen f_1, \dots, f_n fonksiyonları f 'i tanımlar. Eğer n

tane fonksiyon C^1 sınıfında ise Ψ çözümü elde edilir.

$$\Psi_i : I \rightarrow E_i \quad \text{öyleki}$$

(i) $(t, \Psi_1(t), \dots, \Psi_n(t)) \in U \quad \forall t \in I$ için :

(ii) $\Psi_i'(t) = f_i(t, \Psi_1(t), \dots, \Psi_n(t)) \quad \forall t \in I$ için $(1 \leq i \leq n)$:

t değişkenine bağlı n tane bilinmeyen fonksiyon için birinci mertebeden n tane diferensiyel denklemin bir sistemi elde edilir. Bu da

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (1 \leq i \leq n) \quad (3.1.2)$$

şeklindedir. Özellikle ,

$$E = \mathbb{R}^n \text{ ve } E_i = \mathbb{R} \quad (1 \leq i \leq n) \quad (3.1.2)$$

diferensiyel denklemleri bir diferensiyel denklem sistemi oluşturur ; verilen f_i fonksiyonları ve $x_i = \Psi_i(t)$ çözüm fonksiyonları skaler değerli bilinmeyen fonksiyonlardır.

Bu sistemin analizi tekil vektör diferensiyeline esittir

3.2. n. Mertebeden diferensiyel denklem

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}\right) \quad (3.2.1)$$

ile verilir.

Burada $U \subset \mathbb{R} \times E \times \dots \times E$ olmak üzere $f : U \rightarrow E$
n tane

verilen sürekli fonksiyonları tanımlar :

C^n sınıfının çözüm fonksiyonu $\Psi : I \rightarrow E$ aşağıdaki iki ko-
şulu sağlar :

$$(i) \quad (t, \Psi(t), \Psi'(t), \dots, \Psi^{(n-1)}(t)) \in U \quad \forall t \in I \text{ için}$$

$$(ii) \quad \Psi^{(n)}(t) = f(t, \Psi(t), \Psi'(t), \dots, \Psi^{(n-1)}(t)) \quad \forall t \in I \text{ için}$$

(3.2.1) 'in çözümünü bulmak birinci mertebeden n tane denk-
lemin oluşturduğu sistemin çözümünü bulmaya eşdeğerdir. Bu
sistem :

$$dx/dt = x_1,$$

$$dx_1/dt = x_2,$$

....

$$dx_{n-2}/dt = x_{n-1},$$

$$dx_{n-1}/dt = f(t, x, x_1, \dots, x_{n-1}) \text{ olur.}$$

(3.2.2)

Bunun anlamı C^n sınıfındaki tek bilinmeyenli $\Psi : I \rightarrow E$
fonksiyonların bulunmasıdır. Sonuçta C^n sınıfında n tane

$\Psi, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1} : I \rightarrow E$ bilinmeyen fonksiyonlar şu
şekilde bulunur :

$$\Psi'(t) = \Psi_1(t), \quad \Psi_1'(t) = \Psi_2(t), \dots, \quad \Psi_{n-2}'(t) = \Psi_{n-1}(t)$$

$$\Psi_{n-1}'(t) = f(t, \Psi(t), \Psi_1(t), \Psi_2(t), \dots, \Psi_{n-1}(t))$$

Yukarıdaki $\Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}$ Ψ nin sağlayıcı türevleri-
dir. Bu çalışma n. mertebeden olan diferensiyel denklemi birin-
ci mertebeye indirger. ($E^n = E \times \dots \times E$)
n tane

Bu nedenle birinci mertebeden diferensiyel denklemi göz-
önüne alacağız. Daha sonra birinci mertebeden olan sonucu n.
mertebeye çevireceğiz.

Verilen $(t_0, x_0) \in U$ için $\varphi(t_0) = x_0$ başlangıç şartını sağlayan ve $[t_0 - \xi, t_0 + \xi] = I'$ aralığında (3.1.1) diferensiyel denklemi $\varphi: I' \rightarrow E$ çözümüne sahip olacak şekilde $\xi > 0$ vardır. Bu dönüşüm n. mertebeden denklem verirse aşağıdaki sonuç elde edilir.

$(t_0, x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}) \in U$ ise $\xi > 0$ vardır. Böylece $[t_0 - \xi, t_0 + \xi] = I'$ aralığında (3.2.1) denkleminin çözümü $\varphi: I' \rightarrow E$ dir ve bu çözüm

$\varphi(t_0) = x_0$
 $\varphi'(t_0) = x'_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$ başlangıç şartını sağlar.

3.3. Yaklaşık çözümler

Şimdi (3.1.1) diferensiyel denklemine dönüyoruz.

$\xi > 0$ olsun ; $\varphi: I \rightarrow E$ C^1 sınıfının fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir ξ -yaklaşıkli çözümdür.

$$(i) \quad (t, \varphi(t)) \in U \quad \forall t \in I \text{ için ;} \quad (3.3.1)$$

$$(ii) \quad \|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))\| \leq \xi \quad \forall t \in I \text{ için}$$

$\varphi: I \rightarrow E$ fonksiyonu C^1 sınıfının piecewisedir.

I aralığının kompakt olduğunu kabul edelim. I, I_k kompakt aralıklarının sonlu bir bileşimidir. C^1 sınıfındaki φ bir I_k aralığına kısıtlanır. φ , (3.3.1) şartlarını sağlamak zorundadır, (ii) eşitsizliği her I_k aralığında gerçekleşir. Diğer bir deyişle , herhangi bir $t \in I$ sonlu noktasında yalnızca

$$\|\varphi'_k(t) - f(t, \varphi(t))\| \leq \xi \quad \text{ve} \quad \|\varphi'_1(t) - f(t, \varphi(t))\| \leq \xi$$

olursa türevi süreksiz olabilir.

Şimdi yaklaşık çözümler için varlık teoremini gösterelim.

Teorem 3.3.1 :

$B(x_0, r) \subset E$ $r > 0$ yarıçaplı ve $x_0 \in E$ merkezli
 $\|x - x_0\| \leq r$ kapalı yuvarı olsun.

$I \subset \mathbb{R}$ aralığı kompakt ve $t_0 \in I$ olsun

$$|f(t, x)| \leq M \quad (3.3.2)$$

(Sonlu bir sabit değer) yada

$\forall t \in I, \|x - x_0\| \leq r$ olacak şekilde

$f : I \times B(x_0, r) \rightarrow E$ sürekli fonksiyon olduğunu kabul edelim.

$J : t_0 - r/M \leq t \leq t_0 + r/M$ ile I 'nin arakesiti olsun. O zaman,

$\forall \varepsilon > 0$ için

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \text{ diferensiyel denklemi}$$

$\Psi(t_0) = x_0$ olacak şekilde $\Psi : J \rightarrow B(x_0, r)$

ε -yaklaşıklı çözüme sahiptir ve Ψ, C^1 sınıfının parçalı fonksiyondur. Ψ , parçalı lineer seçilebilir.

KANIT

Ψ yi $t \leq t_0$ ile tanımlanmış aralıkta ve $t \geq t_0$ ile tanımlanmış J aralığında parçalayarak oluştururuz. Bu durumda I 'nin

$T - t_0 \leq r/M$ uzunluğunun $t_0 \leq t \leq T$ aralığında olduğu durumu gözönüne alalım. İlk olarak, I da

$\Psi_0 : I \rightarrow E$ lineer-affin fonksiyonunu gözönüne alalım. öyleki $\Psi_0(t) = x_0, \Psi_0'(t) = f(t_0, x_0)$;

(3.3.3) $\Psi_0(t) = x_0 + (t - t_0)f(t_0, x_0)$ ile verilir.

Ψ_0 lineer-affin fonksiyonu değerlerini $B(x_0, r)$ yuvarında alır.

Cünkü

$\forall t \in I$ için $t - t_0 \leq r/M$ olduğundan $\|\varphi_0(t) - x_0\| \leq (r/M) \cdot M$ dir.

$t_0 \leq t \leq t_1$ için

$$\|f(t_0, x_0) - f(t, x_0 + (t - t_0)f(t_0, x_0))\| \leq \varepsilon \quad (3.3.4)$$

oldüğundan φ_0 in $[t_0, t_1]$ aralığında ε -yaklaşıkli çözüm olduğuna ispatlanır. f 'in sürekliliğine baktığımızda yukarıdaki eşitsizlik t_0 'a yeterince yakın her t için geçerlidir. $t_0 < t < T$ ise φ_0, I da ε -yaklaşıkli çözümdür. Öyleki $\varphi_0(t_0) = x_0$ dir, ve tanımlanmış sonuç elde edilir. Aksi taktirde (3.3.4)'ü sağlayan t_0 la başlayan $[t_0, t_1]$ aralığı vardır.

Cünkü t_1 her t 'nin infimumu ise (3.3.4) geçerli değildir.

$t_0 \leq t \leq t_1$ için (3.3.4) sağlanır ve ayrıca bu süreklilik ile $t = t_1$ için doğrudur. $\varphi_0(t_1) = x_1$ olsun;

$x_1 - x_0 = (t_1 - t_0)f(t_0, x_0)$ ve buradan $t_1 - t_0 < T - t_0 \leq r/M$ olduğundan $\|x_1 - x_0\| < r$ dir.

$r_1 = r - \|x_1 - x_0\|$ alalım. Sonra f , $t_1 \leq t \leq T$, $\|x - x_1\| \leq r_1$ için sürekli ve tanımlı olur; $\|f(t, x)\| \leq M$ dir ve (3.3.5) $T - t_1 \leq r_1/M$ dir.

Buradan t_1 ve x_1 'in durumu bir önceki x_0 ve t_0 'ın durumuna benzerdir ve metoda tekrar başlanılabilir.

$t_1 \leq t \leq T$ için

$\varphi_1(t) = x_1 + (t - t_1)f(t_1, x_1)$ lineer - affın fonksiyonu tanımlanır. Bu fonksiyon $B(x_1, r_1)$ de değerler alır ve buradan $B(x_0, r_0)$ da

$$\|f(t_1, x_1) - f(t, x_1 + (t - t_1) \cdot f(t_1, x_1))\| \leq \varepsilon$$

eşitsizliği geçerli olacak şekilde $(t_1 < t_2 \leq T)$ ile $[t_1, t_2]$ uzun aralığı vardır. Eğer $t_2 = T$ ise $[t_0, t_1]$ de φ_0 'a ve $[t_1, t_2]$ de φ_1 're eşit olan φ fonksiyonu $[t_0, T]$ aralığında diferensiyel denklemin ε -yaklaşıkli çözümüdür ve istenen sonuç elde edilmiştir. Diğer taraftan $t_2 < T$ ise aynı metodla tekrar başlayalım :

$t_2 - t_1 < T - t_1 \leq r_1/M$ olduğunda $\varphi_1(t_2) = x_2$ ve $\|x_2 - x_1\| < r$ dir.

$r_2 = r_1 - \|x_2 - x_1\|$ koyalım ve $T - t_2 \leq r_2/M$ dir.

Bu yolla $t < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T$ artan dizi tümevarımla tanımlanır ve $x_0, x_1, \dots, x_n \in E$ hemde $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ lineer - affın fonksiyonları $B(x_0, r)$ 'de değerleri ile sırasıyla $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$ 'de tanımlanır. φ_i 'lerin hepsi

$$\varphi: [t_0, t_n] \rightarrow B(x_0, r)$$

sürekli fonksiyonlarını içerir ki bunlar parçalı lineerdir ve diferensiyel denklemin ε -yaklaşıkli bir çözümüdür. n için $t_n = T$ elde edilirse teorem ispatlanmış olur.

Her n için $t_n < T$ durumunda metodun sürekliliği belirsizdir.

Gösterilebileceği gibi bu mümkün değildir. Bu operasyonun belirsizliği sürekli olabilir ve t' .

$t_0 < t_1 < \dots < t_n \dots$ artan dizisinin supremumu olsun. $\|x_{n+1} - x_n\| \leq M(t_{n+1} - t_n)$ olduğu aşıkâr ve buradan $\{x_n\}$ de bir Cauchy dizisidir. $\|x - x_0\| \leq r$ kapalı yuvar olduğundan limit $x' \in B(x_0, r)$ dir. $t_n \leq t \leq t'$ için

$\Psi_n(t) - x_n = (t - t_n)F(t_n, x_n)$, buradan

$t_n \leq t \leq t'$ için $\|\Psi_n(t) - x_n\| \leq M(t' - t_n)$ dir ve

Bundan dolayı $t_n \leq t \leq t'$ için

$$\|\Psi_n(t) - x'\| \leq \|x' - x_n\| + M(t' - t_n) \quad (3.3.6) \text{ dir.}$$

f , (t', x') noktasında sürekli olduğundan $|t - t'| < \eta$ ve

$$\|x - x'\| \leq \eta \text{ ise } \|f(t', x') - f(t, x)\| \leq \varepsilon/2$$

olacak şekilde $\eta > 0$ vardır. Buradanda yeterince büyük n için

(3.3.6) 'ya bakıldığında ,

$$t_n \leq t \leq t' \text{ için } \|f(t, x') - f(t, \Psi_n(t))\| \leq \varepsilon/2$$

ve ayrıca $\|f(t', x') - f(t_n, x_n)\| \leq \varepsilon/2$ dir.

Bütün bunlardan $t_n \leq t \leq t'$ için

$$\|f(t_n, x_n) - f(t, \Psi_n(t))\| \leq \varepsilon \text{ dir ve sonuç olarak } \Psi_n,$$

$[t_n, t']$ de ε -yaklaşıklı bir çözümdür. t_{n+1} 'in tanımıyla $t_{n+1} \geq t'$ sağlanır. (t' yu içine alır).

Bununla beraber $t' \geq t_{n+2} > t_{n+1}$ olduğunda bu mümkün değildir ve teorem (3.3.1) 'in ispatı tamdır.

Not:

$U \subset \mathbb{R} \times E$, $(t_0, x_0) \in U$ ve U açık küme)

$f : U \rightarrow E$ sürekli fonksiyonu verilsin. Her (t, x) için U

da

$$|t - t_0| \leq \tau \text{ , } \|x - x_0\| \leq r \text{ eşitsizliklerini}$$

sağlayan bütün (t, x) ikilileri için $|f(t, x)| \leq M$ eşitsizliğini gerçekleyen $\tau > 0$, $r > 0$, $M > 0$ lar vardır. α , τ ve

M/r değerinin en küçüğü olsun ; teorem 3.3.1 ([5] Cartan)

'den

$$|t - t_0| \leq \alpha \text{ kompakt aralığında}$$

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad \text{diferensiyel denklemi herhangi bir}$$

$\varepsilon > 0$ için $\varphi(t_0) = x_0$ olacak şekilde $x = \varphi(t)$

ε -yaklaşıklı parçalı lineer çözüm vardır. $\alpha \in \varepsilon'$ dan bağımsızdır ve sonuç yeterince küçük α değeri için gerçekleşir.

3.4 Örnek lineer diferensiyel denklem

$$A : I \rightarrow \mathcal{L}(E; E) \quad \text{ve} \quad B : I \rightarrow E$$

$I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlanan sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t) \quad (3.4.1)$$

formundaki denklem lineer diferensiyel denklemdir. Bu

$$f(t, x) = A(t)x + B(t)$$

$\forall t \in I$ için $x \in E$ nin sürekli lineer - affın fonksiyonudur ; $A(t)$ ve $B(t)$ sürekli olarak t 'ye bağlıdır. Bu durumda $U \subset \mathbb{R} \times E$ alt kümesi $I \times E$ 'ye eşittir.

$t_0 \in I$ ve $x_0 \in E$ verilsin . $B(x_0, r)$ kapalı yuvarı için (3.3.1) teoremi gözükür.

Teorem 3.4.1 :

I kompakt bir aralıksa herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $\varphi(t_0) = x_0$ olacak şekilde (3.4.1) denkleminin

$\varphi : I \rightarrow E$ ε -yaklaşıklı bir çözümü vardır. Burada önemli olan φ 'nin I da olmasıdır.

Kanıt:

$\| A(t) \|$ ($\mathcal{L}(E; E)$ uzayında) normu $t \in I$ 'nin sürekli

fonksiyonudur. I kompakt olduğundan norm bir supremuma sahiptir.

$$\alpha = \sup_{t \in I} \| A(t) \| \quad \text{ve benzer olarak}$$

$$\beta = \sup_{t \in I} \| B(t) \| \quad \text{olsun}$$

$$\| f(t, x) \| = \| A(t) \cdot x + B(t) \| \leq \alpha \| x \| + \beta \text{ olur;}$$

$$\| x - x_0 \| \leq r \text{ 'den}$$

$$\| f(t, x) \| \leq \alpha \| x_0 \| + \beta + \alpha r \text{ olur.}$$

Buda $t \in I$ için $\| x - x_0 \| \leq r$

$$M = \alpha \| x_0 \| + \beta + \alpha r \text{ ile } \| f(t, x) \| \leq M \text{ dir,}$$

$$\text{Bu yüzden, } \frac{M}{r} = \frac{\alpha \| x_0 \| + \beta}{r} + \alpha r \text{ elde edilir.}$$

$$\frac{M}{r} \leq 2\alpha \text{ olacak şekilde seçilen } r \text{ için } x_0 \text{ verilmişse ;}$$

Teorem (3.3.1) ile $\varphi(t_0) = x_0$ olacak şekilde

$$J = I \cap \left[t_0 - \frac{1}{2\alpha}, t_0 + \frac{1}{2\alpha} \right] \text{ kompakt aralığında}$$

φ (parçalı lineerdir) ε -yaklaşıkli çözüm vardır.

1. sonuç I aralığında ε -yaklaşıkli parçalı lineer çözümü bulmamıza yardım eder. I' içinde ayrı olarak bulmamıza yardım eder.

($t \geq t_0$ olacak şekilde bütün $t \in I'$ 'ların kümesi) ve I'' de ($t \leq t_0$ olacak şekildeki bütün $t \in I'$ 'ların kümesi).
Örneğin I' için T, I' 'nin sağ kenarındaki sondeğer olsun.

$\varphi_0(t_0) = x_0$ olacak şekilde φ_0 çözümü her zaman

$I' \cap [t_0, t_0 + 1/2\alpha]$ aralığında bir ε -yaklaşıkli çözümdür. Ek olarak φ_0 parçalı lineer fonksiyon yapılabilir.

Eğer $t_0 + 1/2\alpha \geq T$ olursa arzulanan sonuç elde edilir. Bu olmazsa $t_1 = t_0 + 1/2\alpha < T$, $\Psi_0(t_1) = x_1$ olsun; t_0 ve x_0 için yapılanlar t_1 ve x_1 için tekrarlanırsa

$I' \cap [t_1, t_1 + 1/2\alpha]$ aralığında $\Psi_1(t_1) = x_1$ olacak şekilde \mathcal{E} -yaklaşık Ψ_1 parçalı lineer çözüm vardır. Eğer

$$t_1 + \frac{1}{2\alpha} \geq T \text{ ise}$$

ispat tamamlanır. Çünkü Ψ fonksiyonu

$[t_0, t_1]$ aralığında Ψ_0 'ra ve $[t_1, T]$ de Ψ_1 're eşittir. Diğer taraftan tekrar

$$t_1 + \frac{1}{2\alpha} = t_2 < T \text{ alındığında}$$

$$\Psi_1\left(t_1 + \frac{1}{2\alpha}\right) = x_2 \text{ olur.}$$

Bu işlemler sonucunda yeterince büyük n değerleri için

$$t_n = t_0 + \frac{n}{2\alpha} \geq T \text{ dir.}$$

3.5 Lipschitz durumu : Temel lemme

$f(t, x)$, $U \subset \mathbb{R} \times E$ de tanımlı sürekli fonksiyon (t, x_1) ve $(t, x_2) \in U$ olmak üzere

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\| \quad (3.5.1) \text{ ise } f \text{ } E \text{ de}$$

k -Lipschitzdir.

(3.5.1) eşitsizliği sağlanır ([5], Cartan). Eğer f k -Lipschitz özelliğinde ise

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (3.5.2)$$

diferensiyel denkleminin iki yaklaşık çözümünün farkı $\Psi_1(t) - \Psi_2(t)$ majorize edilebilir.

Temel Lemma 3.5.1 :

(3.5.2) denkleminin

$\Psi_1 : I \rightarrow E$ ε_1 - yaklaşık çözümleri ve

$\Psi_2 : I \rightarrow E$ ε_2 - yaklaşık çözümleri olsunlar ;

$\Psi_1(t_0) = x_1$ ve $\Psi_2(t_0) = x_2$, $t_0 \in I$ da başlangıç değerleri olsun.

Eğer $\forall t \in I$ için $f(x) \in E$ de k -lipschitz ise

$$\|\Psi_1(t) - \Psi_2(t)\| \leq \|x_1 - x_2\| e^{k|t-t_0|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k} \quad (3.5.3)$$

eşitsizliği olur.

Temel lemmanın kanıtı :

İşlemi kolaylaştırmak için $t_0 = 0$ alalım. (3.5.3)

eşitsizliği $t > t_0$ durumu için sağlanır. Diğer durumda t 'den $-t$ 'ye kadar olan değişimle sağlanır. Bu durumlar varsayılarak aşağıdaki eşitsizlikler vardır.

$$\|\Psi_1'(t) - f(t, \Psi_1(t))\| \leq \varepsilon_1 \quad , \quad \|\Psi_2'(t) - f(t, \Psi_2(t))\| \leq \varepsilon_2 ;$$

ve buradan

$$\|\Psi_1'(t) - \Psi_2'(t)\| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \|f(t, \Psi_1(t)) - f(t, \Psi_2(t))\| ;$$

(3.5.1) bağıntısından

$$\|\Psi_1'(t) - \Psi_2'(t)\| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + k \cdot \|\Psi_1(t) - \Psi_2(t)\| \quad (3.5.4)$$

eşitsizliğine sahip oluruz. (Ψ_1 ve Ψ_2 C^1 sınıfının parçalı fonksiyonlarıdır. Bu sebeple her alt aralıkta Ψ_1 ve Ψ_2 tanımlıdır.) Şimdi bunu tanımlayalım :

$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \varphi(t)$ C' sınıfının parçalı fonksiyonu verilen $t > 0$ için (3.5.4) bağıntısına ortalama değer teoremi ([5], Cartan) uygulayarak :

$$\|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leq \int_0^t (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + k \cdot \|\varphi(\tau)\|) d\tau \text{ olur. Fakat}$$

$$\|\varphi(\tau)\| \leq \|\varphi(0)\| + \|\varphi(\tau) - \varphi(0)\| \text{ dir. Buradan}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \text{ seçilirse}$$

$$\|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leq (\varepsilon + k\|\varphi(0)\|)t + k \int_0^t \|\varphi(\tau) - \varphi(0)\| d\tau \quad (3.5.5)$$

işlemi kolaylaştırmak için $u(t)$ nümerik sürekli fonksiyonu tanımlarız.

$$\|\varphi(t) - \varphi(0)\| = u(t) \geq 0 \quad (3.5.6)$$

$$\varepsilon + k\|\varphi(0)\| = a > 0$$

0 zaman (3.5.5) bağıntısı:

$$u(t) \leq at + k \int_0^t u(\tau) d\tau \quad (3.5.7) \text{ olur.}$$

Bunu takip eden sonuçların kullanımı:

Auxiliary lemma

Eğer $u(t) \geq 0$ sürekli fonksiyonu $[0, T]$ ($T > 0$) aralığında (3.5.7) eşitsizliğini sağlıyor ise

$$0 \leq t \leq T \text{ için}$$

$$u(t) \leq \frac{a}{k} (e^{kt} - 1) \quad (3.5.8) \text{ olur.}$$

(3.5.6) 'daki $u(t)$ ve a değerini (3.5.8) de yerine yazarsak

$\forall t > 0$ için ,

$$\|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leq \left(\frac{\varepsilon}{k} + \|\varphi(0)\| \right) (e^{kt} - 1) \text{ olur.}$$

Buradan

$$\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(0)\| + \|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leq \|\varphi(0)\| e^{kt} + \frac{\varepsilon}{k} (e^{kt} - 1).$$

(3.5.3) eşitsizliğinden

$$\varphi(0) = \varphi_1(0) \quad \varphi_2(0) = x_2 \quad x_2 \text{ olduğundan auxiliary}$$

lemması kanıtlanmış olur.

$$v(t) = \int_0^1 u(\tau) d\tau \text{ olsun :}$$

$$v'(t) = u(t) \quad v(0) = 0 \text{ ile (3.5.7) olur.}$$

$$v'(t) \leq at + kv(t) \quad (3.5.7) \text{ diferensiyel eşitsizliğinde}$$

$$w(t) = e^{-kt} v(t) \text{ ve}$$

$$w'(t) = e^{-kt} (v'(t) - kv(t)) \text{ değerlerini (3.5.7) da}$$

yerine yazarak (3.5.7) eşitsizliği,

$$w'(t) \leq ate^{-kt} \text{ olur.}$$

$w(0) = 0$ olduğunda ortalama değer eşitsizliği sağlanır :

$$w(t) \leq \int_0^t a\tau e^{-k\tau} d\tau.$$

$$w(t) \leq \frac{a}{k^2} (1 - e^{-kt} - kte^{-kt}).$$

Buradan

$$v(t) = e^{kt} \cdot w(t) \leq \frac{a}{k^2} (e^{kt} - 1 - kt) \text{ olur.}$$

(3.5.7) eşitsizliği ile $u(t) \leq at + kv(t)$ ve buradan

$$u(t) \leq at + \frac{a}{k} (e^{kt} - 1 - kt) = \frac{a}{k} (e^{kt} - 1) \text{ dir.}$$

Buda (3.5.8) 'in kanıtıdır.

3.6 Temel Lemmanın Uygulamaları : Teklik Teoremi

Teorem 3.6.1 : $U \subset \mathbb{R} \times E$ ve $f : U \rightarrow E$ $x \in E$ 'de k - Lipschitz sürekliliği bir fonksiyon olsun.

$$\varphi_1 \text{ ve } \varphi_2 : I \rightarrow E$$

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \text{ diferensiyel denkleminin iki tam çözümü}$$

ve eğer $(t_0 \in I)$ için $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ ise φ_1 ve φ_2 I aralığında özdeş fonksiyonlardır.

Kanıt :

Temel lemanın (3.5.3) eşitsizliği uygulanır. Bu durumda $x_1 = x_2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ ise $t \in I$ için $\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| = 0$ dir. Buda φ_1 ve φ_2 nin I aralığında özdeş olduğunu gösterir.

3.7 Lipschitz Durumunda Varlık Teoremi

Teorem 3.7.1 :

$U \subset \mathbb{R} \times E$ kapalı küme olsun ; $f : U \rightarrow E$ $x \in E$ de k - Lipschitz sürekliliği bir fonksiyon olsun. $(t_0, x_0) \in U$ ve $I \subset \mathbb{R}$ t_0 'i içeren kompakt bir aralık olsun.

Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $\varphi : I \rightarrow E$ I 'da ε - yaklaşık çözüm vardır, bu çözüm C^1 sınıfının parçalı fonksiyonu öyleki $\varphi(t_0) = x_0$ dir.

(Teorem (3.3.1) de varolan yaklaşık çözümü sağlayan koşulları verir.)

Diferensiyel denklemin $\varphi(t_0) = x_0$ olacak şekilde

$$\varphi : I \rightarrow E$$

tam çözümü I kompakt aralığında vardır. Tam çözümün tekligi (3.6.1) ile verilir.

Kanıt :

$\varepsilon_n > 0$ sayı dizisi $n \rightarrow \infty$ iken sifira yaklaşıır.

$$\varphi_n : I \rightarrow E$$

$\varphi_n(t_0) = x_0$ olacak şekilde ε_n - yaklaşıklı çözüm olsun.

$\forall t \in I$ için (3.5.1) temel lemmasından $\forall t \in I$ için

$$\|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)\| \leq (\varepsilon_n + \varepsilon_m) \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k} \quad \text{var.}$$

$K \quad \forall t \in I$ için I kompakt aralığında

$$\frac{e^{k(t-t_0)} - 1}{k} \quad \text{nin bir üst sınır olsun. O zaman}$$

$t \in I$ için $\|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)\| \leq K(\varepsilon_n + \varepsilon_m)$ olur.

Düzgün yakınsak norm için $(I \rightarrow E$ sürekli eşlemelerin)

φ_n fonksiyonlarının dizisi bir Cauchy dizisidir. Bu yüzden φ_n dizisi bir φ limitine sahiptir.

$$(t, \varphi_n(t)) \in U \quad \forall t \in I \text{ ve } \forall n \text{ için varsayımdan}$$

U kapalı , o zaman limiti $(t, \varphi(t)) \in U$ dir. Tabiki $\varphi(t_0) = x_0$ dir. Buda φ 'nin I 'da diferensiyellenebilir olduğunu gösterir.

$$t \in I \text{ için } \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$$

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \quad (3.7.1)$$

$\|\varphi'_n(t) - f(t, \varphi_n(t))\| \leq \varepsilon_n$ varsayımıyla ve ortalama deger eşitsizliği ile

$$\| \varphi_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_n(\tau)) d\tau \| \leq \varepsilon_n |t - t_0| \text{ dir.}$$

Bu eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ olsun:

$\tau \in I$ da

$f(\tau, \varphi_n(\tau))$ düzgün olarak $f(\tau, \varphi(\tau))$ ya yakınsar. Bundan dolayı (3.7.1) bağıntısının bir limiti olur. Buda istenilen sonuçtur.

Sonuç (3.7.2) (Lokal varlık teoremi) :

$V, (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times E$ 'nin bir komşuluğu olsun ve $f(t, x)$ x 'de k - Lipschitz ve E 'deki değerlerle V 'de sürekli bir fonksiyon olsun .

Orada bir $\alpha > 0$ var olursa aşağıdaki özelliği sağlar :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \text{ diferensiyel denklemi } I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$$

aralığında $\varphi(t_0) = x_0$ olacak şekilde bir ve yalnız bir

$\varphi: I \rightarrow E$ çözümüne sahiptir.

3.8 Lokal Lipschitz f Fonksiyonu

Tanım : Eğer $\forall (t, x_1), (t, x_2) \in V$ için

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\| \text{ olacak şekilde } k > 0$$

ve $\forall (t_0, x_0) \in U$ için (t_0, x_0) 'in bir V komşuluğu varsa

$f: U \rightarrow E$ lokal Lipschitzdir.

(Diğer deyişle f 'nin V 'ye kısıtlaması $x \in E$ 'de k - Lipschitzdir.

Teorem 3.8.1 :

Eğer $(t_0, x_0) \in U$ ise

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \text{ diferensiyel denklemi}$$

$\varphi: [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \rightarrow E$ tam çözümüne sahip olacak şekilde bir $\alpha > 0$ varsa $f: U \rightarrow E$ fonksiyonu lokal Lipschitz ve süreklidir.

Teorem 3.8.2 (Global teklik teoremi) :

$f: U \rightarrow E$ lokal Lipschitz bir fonksiyon olsun ; $I \subset \mathbb{R}$ aralığının kompakt olması gerekli değildir. (I açık veya kapalı yada yarıaçık , sınırlı veya sınırsız seçilebilir.)

φ_1 ve $\varphi_2: I \rightarrow E$

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \text{ diferensiyel denkleminin iki tam çözümü}$$

ise ve bir $t_0 \in I$ için eşitseler bu çözümler I içinde özdeşler ([5].Cartan).

Teorem 3.8.3 :

Eğer $f: U \rightarrow E$ sürekli ve lokal lipschitz ve eğer $(t_0, x_0) \in U$ 'nun iç noktası ise orada $t_0 \in J$ aralığı vardır.

$\Psi: J \rightarrow E$

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \text{ diferensiyel denkleminin çözümü olur. Öyleki}$$

$\Psi(t_0) = x_0$ başlangıç koşulunu sağlar. (Ψ çözümü (3.8.2)

teoremiyle tektir.) Ψ çözümü (t_0, x_0) başlangıç verileri için maksimum çözüm olarak adlandırılır.

3.9 Linear Tekil Diferensiyel Denklem :

Kesim 3.4 'de linear diferensiyel denklemin nasıl anlaşıldığı açıklanmıştı. Yani

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t) \quad (3.9.1)$$

$A, B \quad I \subset \mathbb{R}$ aralığında sürekli fonksiyonlardır.

Burada

$f(t, x) = A(t)x + B(t) \quad I \times E$ 'de tanımlı ve sürekli dir. Herhangi bir $J \subset I$ kompakt aralığında lokal Lipschitz olduğundan, $f, J \times E$ de Lipschitzdir.

Gerçekten

$$f(t, x_1) - f(t, x_2) = A(t)(x_1 - x_2), \quad t \in J \text{ için}$$

$$k_J = \sup_{t \in J} \|A(t)\| \text{ olmak üzere}$$

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k_J \|x_1 - x_2\| \text{ var.}$$

(3.8.3) teoremiyle $t_0 \in I$ olacak şekilde (t_0, x_0) başlangıç verisi için (3.9.1) denklemini bir "Maksimum Çözüm" sahiptir.

Teorem 3.9.1 (Linear denklem için global varlık teoremi) :

Herhangi $t_0 \in I$ ve $x_0 \in E$ için (3.9.1) denkleminin I aralığında tanımlı $\psi(t_0) = x_0$ olacak şekilde

$\psi: I \rightarrow E$ tam çözümü vardır. Tabiki bu çözüm tektir.

Kanıt :

$J \ni x_0 \in E$ noktasını ve I aralığını içine alan kompakt bir aralık olsun (3.4.1) teoremiyle herhangi

$$\varepsilon > 0 \text{ için } t = t_0 \text{ için}$$

x_0 değerini kabul eden J 'de bir ε -yaklaşıklı çözüm vardır. Teorem (3.7.1) ise aynı başlangıç koşullarıyla J aralığında tam çözüm olduğunu gösterir. t_0 'ı içine alan ve I yı kapsayan her kompakt aralıkta çözüm var olduğundan I da

"Maksimum çözüm" tanımlıdır.

3.10 Başlangıç Değerine Bağlılık

$f : U \rightarrow E$ k - Lipschitz ve sürekli olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (3.10.1)$$

diferensiyel denklemini alalım : $t_0 \in I$ olsun , $t = t_0$ 'da u değerini aldığını varsayalım ve $\forall u \in A \subset E$ için I 'da tanımlanmış (3.10.1) denkleminin tam çözümünün temin edildiğini varsayarak , bu tam çözümün $\psi(t, u)$ olduğunu kabul edelim : acaba çözüm başlangıç değerine nasıl bağlıdır ?

Bu (3.5.1) temel lemasından görülür :

$u, v \in A$ için :

$$\|\psi(t, u) - \psi(t, v)\| \leq \|u - v\| e^{k|t-t_0|}$$

$\forall t \in I$ için (I 'nin sınırlı olduğunu varsayıyoruz.)

$$K, e^{k|t-t_0|} \text{ 'in bir üst sınırı olsun ; öyle ise}$$

$$\|\psi(t, u) - \psi(t, v)\| \leq K\|u-v\| \quad (3.10.2) \text{ olur.}$$

Buradan aşağıdaki önerme çıkar :

Önerme 3.10.1 :

Yukarıdaki varsayımlarla $t = t_0$ 'da u değerini alan $\psi(t, u)$ çözümü $t \in I$ 'dan bağımsız bazı K sabiti ile u 'nun K - Lipschitz fonksiyonudur.

Sonuc 3.10.2 :

$\psi(t, u)$ fonksiyonu $(t, u) \in I \times A$ değişkenlerinin sürekli fonksiyonudur. Bu durumda u_0 verilsin , t korunsun (sabit

kalsın).

Eğer $u \rightarrow u_0$ ise

$\varphi(t,u) \rightarrow \varphi(t,u_0)$ yakınsar.

Lemma 3.10.3 :

(a) Eğer $\Psi : I \times A \rightarrow E$ fonksiyonu sabit $\forall u \in A$ için $t \in I$ 'da sürekli ,

sabit $\forall t \in I$ için $u \in A$ 'da sürekli ise Ψ fonksiyonu $I \times A$ 'da süreklidir.

(b) Tersine , $\Psi : I \times A \rightarrow E$ fonksiyonu $I \times A$ 'da sürekli ve I kompakt ise $\Psi(t,u)$, $t \in I$ 'ya göre $u \in A$ da düzgün süreklidir.

Lemmanın kanıtı :

(a) t_0 ve u_0 verilsin , $\varepsilon > 0$ olsun :

$$\|\Psi(t,u) - \Psi(t_0,u_0)\| \leq \|\Psi(t,u) - \Psi(t,u_0)\| + \|\Psi(t,u_0) - \Psi(t_0,u_0)\|$$

varsayımlardan

$$\forall t \in I \text{ için } \|\Psi(t,u) - \Psi(t,u_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ sağlayan } \|u - u_0\| \leq \eta$$

olacak şekilde bir $\eta > 0$ vardır :

Ayrıca

$$|t - t_0| \leq \eta' \Rightarrow \|\Psi(t,u_0) - \Psi(t_0,u_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ olacak şekilde}$$

$\eta' > 0$ vardır. Eğer $\|u - u_0\| \leq \eta$ ve $|t - t_0| \leq \eta'$ ise

$$\|\Psi(t,u) - \Psi(t_0,u_0)\| \leq \varepsilon \text{ olur.}$$

Buda Ψ 'nın $(t,u) \in I \times A$ 'da sürekli fonksiyon olduğunu gösterir.

(b) tersine , Ψ 'nın $I \times A$ 'da sürekli olduğunu varsayalım

$u_0 \in A$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Herhangi bir $t \in I$ için

$$|t' - t| < \eta(t) \text{ ve } \|u - u_0\| \leq \eta(t) \text{ ise}$$

$$\|\Psi(t', u_0) - \Psi(t, u_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|\Psi(t', u) - \Psi(t, u_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{olacak şekilde bir}$$

$\eta(t) > 0$ var.

Buradan

$$\|\Psi(t', u) - \Psi(t', u_0)\| \leq \varepsilon \quad (3.10.2) \text{ gerçeklenir.}$$

Böylece $\forall t \in I$ ile $|t' - t| < \eta(t)$ olacak şekilde t' lerle oluşturulan açık küme vardır. I kompakt olduğundan böyle sonlu aralıklarla örtülebilir. Diğer bir değişle $\forall t' \in I$ ile $\|u - u_0\| < \eta$ (3.10.2) yi sağlar ve $\forall t_1$ için $\eta \leq \eta(t_1)$ olacak şekilde $\eta > 0$ ve $t_1 \in I$ sonlu sayısı varolur.

3.11 Bir parametreye bağlı diferensiyel denklem

Bir L topolojik uzayında λ değişken parametreye bağlı $f(t, x)$ fonksiyonunu alalım yani

$f : I \times B(x_0, r) \times L \rightarrow E$ sürekli fonksiyonu olmak

üzere

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x; \lambda) \quad (3.11.1)$$

diferensiyel denklemini gözönüne alalım.

(I kompakt aralık ve $B(x_0, r) \subset E$ 'de $\|x - x_0\| \leq r$ kapalı yuvar tanımlasın.) Buradan şunlar yazılabilir .

(1) $\|f(t, x; \lambda)\| \leq M$ $I \times B(x_0, r) \times L$ de

(2) $\forall t \in I$ için $\|x_1 - x_0\| \leq r$, $\|x_2 - x_0\| \leq r$ ve $\lambda \in L$ ise

$$\|f(t, x_1; \lambda) - f(t, x_2; \lambda)\| \leq k \|x_1 - x_2\|$$

diğer bir deyişle , f , λ ve t nin bağımsız k sabiti ile x de k -Lipschitz dir.

Eğer $\lambda \in L$ sabitse (3.11.1) denkleminin yalnız ve ancak bir çözümü vardır. Bu da

$x = \Psi(t)$, $J = I \cap [t_0 - r/M, t_0 + r/M]$ aralığında tanımlı ve $\Psi(t_0) = x_0$ başlangıç koşulunu sağlar. Buradan (3.3.1) ve (3.7.1) teoremleri ile bu çözüm $\Psi(t; \lambda)$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.11.1 :

Önceki gösterim ve varsayımlarla

$\Psi(t; \lambda)$ $(t, \lambda) \in J \times L$ 'nin sürekli fonksiyonudur.

Kanıt:

λ sabit kalırsa $\Psi(t; \lambda)$ çözümünün t ye göre sürekli olduğu bilinir.

Şimdi $\Psi(t; \lambda)$ çözümü için λ_0 verilsin,

$\Psi(t; \lambda_0)$, $\frac{dx}{dt} = f(t, x; \lambda)$ denkleminin çözümü olduğundan

$$\Psi'_t(t; \lambda_0) - f(t, \Psi(t; \lambda_0); \lambda_0) = 0 \quad (3.11.2) \text{ olur.}$$

Bununla birlikte (3.10.3) (b) lemmasıyla

$f(t, \Psi(t; \lambda_0); \lambda)$ fonksiyonu (t, λ) nin sürekli fonksiyonudur;

$\lambda \rightarrow \lambda_0$ ise $f(t, \Psi(t; \lambda_0); \lambda)$ fonksiyonu

$f(t, \Psi(t; \lambda_0); \lambda_0)$ 'na $t \in J$ de düzgün olarak yakınsaktır.

Diğer bir deyişle $\varepsilon > 0$ verilsin, $\forall t \in J$ ve $\lambda \in V$ için

$$\|f(t, \Psi(t; \lambda_0); \lambda) - f(t, \Psi(t; \lambda_0); \lambda_0)\| \leq \varepsilon \quad (3.11.3) \text{ olacak}$$

şekilde L uzayında λ_0 'nın bir V komşuluğu vardır.

(3.11.3) ile (3.11.2) nin karşılaştırılmasıyla,

$$\|\Psi'_t(t; \lambda_0) - f(t, \Psi(t; \lambda_0); \lambda)\| \leq \varepsilon.$$

Bunun anlamı $\Psi(t; \lambda_0)$ (3.11.1) denkleminin

ε - yaklaşıklı bir çözümdür; $\Psi(t; \lambda)$ tam çözümdür ve $t = t_0$ da aynı x_0 değerini alırlar. (3.5.1) temel lemması ile

$$\|\Psi(t; \lambda) - \Psi(t; \lambda_0)\| \leq \varepsilon \frac{e^{L|t-t_0|} - 1}{L} \text{ olur.}$$

$t \in J$ için $|t-t_0| \leq r/M$ olduğundan $\lambda \in V$ (λ_0 r'in bir komsulğu) ise

$\|\Psi(t; \lambda) - \Psi(t; \lambda_0)\| \leq K\varepsilon$ ($K, t \in J$ nin bağımsız) olur.

$\varepsilon > 0$ keyfi değeri

$\Psi(t; \lambda)$ nin $t \in J$ de düzgün olarak $\Psi(t; \lambda_0)$ 'a yakınsadığını ispat eder.

4. Lineer Diferensiyel Denklemler

4.1. Genel Çözüm :

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x + B(t) \quad (4.1.1) \text{ lineer diferensiyel denklemi}$$

ve

$$A : I \rightarrow \mathcal{L}(E; E)$$

$$B : I \rightarrow E$$

sürekli dönüşümler olsun. Teorem (3.9.1) den biliyoruz ki bu denklem bir tek $\Psi : I \rightarrow E$ çözümüne sahip öyleki

$$\Psi(t_0) = x_0 \text{ başlangıç koşulunu gerçeker.}$$

Tanım 4.1.1 :

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x \quad (4.1.2) \text{ diferensiyel denklemine}$$

homojen denklem denir.

Eğer

$$\varphi \quad (4.1.2) \text{ denkleminin çözümü ve}$$

$$\psi \quad (4.1.1) \text{ denkleminin çözümü ise}$$

$\varphi + \psi$ nin (4.1.1) denkleminin çözümü olduğu aşikardır.

Buda

$$\begin{aligned} \varphi'(t) + \psi'(t) &= A(t) \varphi(t) + A(t) \psi(t) + B(t) \\ &= A(t) [\varphi(t) + \psi(t)] + B(t) \text{ olur.} \end{aligned}$$

Özellikle de $\varphi(t; x_0)$ $t=t_0$ da x_0 değerini alan (4.1.2)

homojen denkleminin çözümü olsun: ve

$\psi(t)$, $t = t_0$ da sıfıra esitlenen (4.1.1) denkleminin bir çözümü olsun. $t = t_0$ da x_0 değerini alan (4.1.1) denkleminin çözümü ise

$$\varphi(t; x_0) + \psi(t) \text{ ile verilir.}$$

(Genel çözüm , homojen çözümle (4.1.1) denkleminin özel çözümünün toplamıdır.)

4.2. Lineer Homojen Denklem

Bu kısımda (4.1.2) denklemini inceleyeceğiz.

$$\varphi(t; x_0) + \varphi(t; x_1) = \varphi(t; x_0 + x_1)$$

$$\varphi(t; \lambda x_0) = \lambda \varphi(t; x_0) \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ eşitliklerini önceki}$$

gösterimlerden dolayı kolaylıkla yazarız. Diğer bir deyişle ,

$\varphi(t; x_0)$ $t = t_0$ da x_0 başlangıç değerine lineer olarak bağlıdır.

$\forall t$ için $\Psi(t;0) = 0$ dır. Bu durumda $x=\Psi(t)$ çözümü $t_0 \in I$ özel değeri için sifira eşit olursa I da da sifira eşit olur. Bunun sonucunda I da $\varphi_1(t) \dots \varphi_k(t)$ k tane çözüm olduğunu varsayalım.

$$\sum_i \lambda_i \varphi_i(t_0) = 0 \text{ ise } t \in I \text{ için } \sum_i \lambda_i \varphi_i(t) = 0$$

olacak şekilde hepsi sifir olmayan $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sabitleri varolur. Yani k tane φ_i çözümleri lineer bağımlıdır.

4.1.2. denklemi ile karşılaştırılarak $\Psi : I \rightarrow E$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere, diğer lineer homojen diferensiyel denklem olan $R(t)$ bilinmeyen fonksiyonunun $\mathcal{L}(E;E)$ de değerler aldığı varsavılır. Bu denklem

$$\frac{dR}{dt} = A(t) \circ R(t) \quad (4.2.1) \text{ olur.}$$

$$\frac{dR}{dt} = R'(t) \in \mathcal{L}(E;E) \text{ türevi}$$

$$A(t) \in \mathcal{L}(E;E)$$

ve $R(t) \in \mathcal{L}(E;E)$ lineer eşlemelerinin bileşkesine eşittir.

Buda bir lineer homojen denklemi oluşturur;

$E' = \mathcal{L}(E;E)$ kümesi böyle ise $A(t)$ elemanı

$E' \rightarrow E'$ lineer sürekli bir dönüşüm tanımlar ;

$f \rightarrow A(t) \circ f \quad (f \in \mathcal{L}(E;E) \text{ için})$

$\mathcal{L}(E';E')$ nin elemanını $C(t)$ ile belirtelim, bu $A(t)$ ile tanımlı

$$\|A(t) \circ f\| \leq \|A(t)\| \cdot \|f\| \text{ olduğundan}$$

$$\|C(t)\| \leq \|A(t)\| \text{ eşitsizliğine sahip oluruz.}$$

Bununla birlikte ,

$A : I \rightarrow \mathcal{L}(E;E)$ sürekli dir, bu yüzden

$$A(t) = \lim_{t' \rightarrow t} A(t')$$

Yani

$$\lim_{t' \rightarrow t} \|A(t') - A(t)\| = 0$$

$$\|C(t') - C(t)\| \leq \|A(t') - A(t)\| \text{ dir.}$$

$t' \rightarrow t$ ile $C(t')$ nin $C(t)$ ye yakınsadığı görülür.

Diğer bir değişle

$C : I \rightarrow \mathcal{L}(E';E')$ sürekli fonksiyondur. Bu da

istenilen ispattır.

(4.2.1) diferensiyel denklemini araştırmak için form oluşturalım. (3.9.1) varlık ve teklik teoremini (4.2.1) denklemine uygulayabiliriz.

$1_E \in \mathcal{L}(E;E)$ E uzayından E ye birim eslemeyi tanımlamak üzere , $t = t_0$ da 1_E değerini aldığı kabul edilen (4.2.1) denkleminin çözümü $R(t,t_0)$ ile tanımlanır.

Teorem 4.2.1 :

$t = t_0$ da 1_E değerini alan (4.2.1) denkleminin çözümü $R(t,t_0)$ olmak üzere.

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x \quad (4.1.2)$$

diferensiyel denkleminin $t = t_0$ da x_0 değerini alan çözümü

$$R(t,t_0) \cdot x_0 \text{ ile verilir ([5].Cartan).}$$

Tanım :

$R(t, t_0)$ çözümüne (4.1.2) denkleminin resolvanı (yada resolvant çekirdeği) adı verilir.

Teorem 4.2.2 :

Eğer t_0, t_1 ve t I nin üç noktası ise

$$R(t, t_0) = R(t, t_1) \circ R(t_1, t_0) \quad (4.2.2) \text{ olur.}$$

Kanıt :

(4.2.2) eşitliğinin sağ tarafı $S(t)$ ile tanımlansın;

0 zaman

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \left(\frac{d}{dt} R(t, t_1) \right) \circ R(t_1, t_0) \\ &= A(t) \circ R(t, t_1) \circ R(t_1, t_0) = A(t) \circ S(t) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Bundan dolayı $S(t)$ fonksiyonu (4.2.1) denkleminin çözümüdür.

$t=t_1$ de değeri

$$1_E \circ R(t_1, t_0) = R(t_1, t_0) \text{ ile verilir.}$$

Bu yüzden $S(t)$ fonksiyonu $t = t_1$ de $R(t_1, t_0)$ değerini alan çözümdür.

Bu sebeple (4.2.2) eşitliğinin sol tarafı ,yani $R(t, t_0)$

$t = t_1$ de $R(t_1, t_0)$ değerini alan (4.2.1) denkleminin çözümüdür. Böylece (4.2.2) eşitliği kanıtlanmış olur.

Sonuç 4.2.3.

$R(t, t_0)$ Isom $(E;E)$, terside $R(t_0, t)$ izomorfizmadır.

Gerçekten ;

$$R(t_0, t) \circ R(t, t_0) = R(t_0, t_0) = 1_E$$

$$R(t, t_0) \circ R(t_0, t) = R(t, t) = 1_E$$

4.3. Sonlu Boyutlu E Uzayı

Eğer E uzayının boyutu n ise orada iki teori vardır. Reel ve Kompleks . Reel teoride E uzayı \mathbb{R}^n uzayına izomorfik, kompleks teoride E , \mathbb{C}^n uzayına izomorfiktir. E için bir taban seçelim. Endomorfizm kare matrisle tanımlı olan $A(t)$ ile belirtilir. $a_{ij}(t)$ I aralığında sürekli fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar reel durumda reel değerli fonksiyonlardır.

E içerisinde değerler alan $x(t)$ bilinmeyen fonksiyonu R de değerler alan n tane $x_i(t)$ fonksiyonu ile belirtilir ve (4.1.2) denklemi n tane diferensiyel denklemin oluşturduğu bir sistem olur. Bu diferensiyel denklem

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j \quad , \quad 1 \leq i \leq n \text{ dir.}$$

$t=t_0$ da n tane bilinmeyen fonksiyonun başlangıç değerleri $(x_i)_0$ ile belirtilir.

$R(t, t_0)$ resolvanı şu

$$(r_{ij}(t, t_0)) \text{ ve } r_{ij}(t_0, t_0) = \delta_{ij}$$

kare matrisi ile verilir.

$\det R(t, t_0) \neq 0$ ve $R(t, t_0)$ bir izomorfizmadır. Bu determinant $(a_{ij}(t))$ matrisi yardımıyla kolayca hesaplanabilir.

(a_{ij}) matrisinin izi vada sonlu boyutlu vektör uzayının A endomorfizminin izi

$$T_r(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \text{ ile tanımlıdır,}$$

matrisin izi tabanın seçiminden bağımsızdır.

$$T_r(A)$$

$\det(A - \lambda I_E) = 0$ karakteristik denkleminin köklerinin toplamına eşittir.

Önerme 4.3.1 :

$$\det R(t, t_0) = \exp \cdot \int_{t_0}^t T_r(A(\tau)) \cdot d\tau \quad (4.3.1)$$

Burada $y(t) = \det R(t, t_0)$ fonksiyonunun diferensiyel denkleminin çözümü olduğunu göstermek yeterlidir.

$$y'(t) = T_r(A(t)) \cdot y(t) \quad (4.3.2)$$

ve $y(t_0) = 1$ başlangıç şartını sağlar. İşlemi basitleştirmek için $R(t, t_0)$ yerine $R(t)$ alalım. (e_1, \dots, e_n) E uzayının bir tabanı olsun. E nin dış cebiri aşağıdaki bağıntı ile verilir.

$$R(t) e_1 \wedge \dots \wedge R(t) e_n = \det(R(t)) \cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

eşitliğin sol tarafının türevi

$$R'(t) e_1 \wedge R(t) e_2 \wedge \dots \wedge R(t) e_n + R(t) e_1 \wedge R'(t) e_2 \wedge \dots \wedge R(t) e_n \\ + \dots + R(t) e_1 \wedge R(t) e_2 \wedge \dots \wedge R(t) e_{n-1} \wedge R'(t) e_n$$

ile verilir. (Multilineer fonksiyonun türevidir.)

Yukarıdaki ifade (4.2.1) diferensiyel denklemi ile şuna eşittir.

$$(A(t) \circ R(t) e_1) \wedge R(t) e_2 \wedge \dots \wedge R(t) e_n + R(t) e_1 \wedge (A(t) \circ R(t) e_2) \\ \wedge \dots \wedge R(t) e_n + \dots + R(t) e_1 \wedge \dots \wedge R(t) e_{n-1} \wedge (A(t) \circ R(t) e_n)$$

dir.

Burada $R(t) e_i = e'_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) olarak işlem

$$(A(t)e'_1) \wedge e'_2 \wedge \dots \wedge e'_n + e'_1 \wedge (A(t)e'_2) \wedge \dots \wedge e'_n + \dots \\ + e'_1 \wedge \dots \wedge e'_{n-1} \wedge (A(t)e'_n) \quad (4.3.3)$$

olur.

(e'_1, \dots, e'_n) tabanına göre $A(t)$ nin matrisi $(a_{ij}(t))$ olsun.

O zaman (4.3.3) bağıntısının şuna eşit olduğu görülür.

$$\left(\sum_{i=0}^n a_{i+1}(t) \right) e'_1 \wedge \dots \wedge e'_n = T_r(A(t)) R(t) e_1 \wedge \dots \wedge R(t) e_n \\ = T_r(A(t)) \det(R(t)) (e_1 \wedge \dots \wedge e_n) \text{ dir.}$$

sonuçta

$$\frac{d}{dt} (\det R(t)) (e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = T_r(A(t)) \det(R(t)) (e_1 \wedge \dots \wedge e_n)$$

buradan

$$\frac{d}{dt} (\det R(t)) = T_r(A(t)) \det(R(t)) \text{ olur. Bu da}$$

(4.3.2) nin diferensiyel denklemidir.

4.4 " Serbest Terimli " Lineer Denklem

$$\frac{dx}{dt} = A(t) x + B(t) \quad (4.4.1)$$

denklemini gözönüne alalım. $R(t, t_0)$ karşı getirilen homojen denklemin rezolvantı olsun. (Teo.4.2.1)

$$x(t) = R(t, t_0) y(t) \quad (4.4.2)$$

bilinmeyen $x(t)$ fonksiyonu yerine $y(t)$ fonksiyonunu alarak bir " Parametrelerin değişim metodu" oluşturulur.

$R(t, t_0) \in \text{Isom}(E; E)$. (4.4.2) ile verilen $x(t)$ (4.4.1) 'i

sağlar ve $R(t, t_0)$ (4.2.1) denkleminin çözümü olduğundan

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dR}{dt} y(t) + R \frac{dy}{dt} = A(t)[R(t, t_0)y(t)] + R \frac{dy}{dt}$$

elde edilir.

Şimdi $\frac{dx}{dt}$ nin bu değerini (4.4.2) de kullanarak :

$$R(t, t_0) \frac{dv}{dt} = B(t) \quad (4.4.3)$$

ve $R(t, t_0)^{-1} = R(t_0, t)$ ile

$$\frac{dv}{dt} = R(t_0, t) \cdot B(t) \text{ bulunur.}$$

(4.4.2) formunda

$$x_0 = x(t_0) = R(t_0, t_0) y(t_0) = v(t_0) \text{ olur.}$$

Buradan ,

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^t R(t_0, \tau) B(\tau) d\tau$$

$y(t)$ nin bu değerini (4.4.2) de yerine koyarak

$$\begin{aligned} R(t, t_0) \int_{t_0}^t R(t_0, \tau) B(\tau) d\tau &= \int_{t_0}^t R(t, t_0) R(t_0, \tau) B(\tau) d\tau \\ &= \int_{t_0}^t R(t, \tau) B(\tau) d\tau \end{aligned}$$

sonuç olarak ,

$$x(t) = R(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^t R(t, \tau) B(\tau) d\tau \quad (4.4.4)$$

bulunur.

Homojen denklemin resolvanı aynı zamanda (4.4.1) " serbest terimli" denklemin çözümünü verir . (4.4.4) eşitliğinin sağ tarafı iki terimin toplamı : ilk terim $R(t, t_0) x_0$ homojen denklemin genel çözümüdür.

ikinci terim olan

$$\int_{t_0}^t R(t, \tau) B(\tau) d\tau \quad (4.4.5)$$

$t = t_0$ da sifıra eşitlenen (4.4.1) denkleminin çözümüdür.

4.5 n.mertebeden lineer homojen denklem

ilk olarak bulduğumuz sonuçları n. mertebeye taşıyacağız. Simdi n. mertebeden lineer homojen denklem alalım :

$$\begin{aligned} \frac{d^n x}{dt^n} &= A_0(t)x + A_1(t) \frac{dx}{dt} + \dots + A_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} A_i(t) \frac{d^i x}{dt^i}, \quad \left\{ \frac{d^i x}{dt^i} = x^{(i)} \right\} \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

$x(t) : I \rightarrow E$ bilinmeyen fonksiyon ve $A_i(t)$ katsayıları

$I \rightarrow \mathcal{L}(E;E)$ sürekli fonksiyonlardır.

$n=1$ durumu (4.2 de) gösterilmişti. E de degerler alan n tane bilinmeyen lineer ve homojen diferensiyel denklem sistemi gözönüne alınırsa genel durumu buna indirgeyerek sistem aşağıdaki gibi

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dx^2}{dt} = x'', \quad \dots, \quad \frac{dx^{(n-1)}}{dt} = x^{(n-1)} \quad (4.5.2)$$

$$\frac{dx^{(n-1)}}{dt} = A_0(t) \cdot x + A_1(t) \cdot x' + \dots + A_{n-1}(t) \cdot x^{(n-1)}$$

Bu sistem E^n de değerler alan bilinmeyen fonksiyonların tekil denklemi olur.

$x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)$ $X(t)$ fonksiyonun n tane bileşeni olur.

Böylece (4.5.2) sistemi $\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X$ şeklinde

yazılabilir.

$A(t) \in \mathcal{L}(E^n; E^n)$, elemanları $\mathcal{L}(E; E)$ de olan n satır , n sütunlu matris ile belirtilir:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1_E & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1_E & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1_E \\ A_0(t) & A_1(t) & A_2(t) & \dots & A_{n-1}(t) \end{bmatrix} \quad (4.5.3)$$

Bunun resolvanı $R(t, t_0)$ olsun ; bu n satır ve n sütunlu bir matristir. Bu resolvant matrisin birinci satırındaki elemanlar.

$R_0(t, t_0), R_1(t, t_0), \dots, R_{n-1}(t, t_0)$ ile tanımlanır.

$t = t_0$ da $X_0 = (x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)})$ değerini alan

$X(t) = [x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)]$ çözümü

$x(t) = R_0(t, t_0)x_0 + R_1(t, t_0)x'_0 + \dots + R_{n-1}(t, t_0)x_0^{(n-1)}$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} R_i(t, t_0) \cdot x_0^{(i)} \quad (4.5.4) \text{ ile verilir.}$$

t 'ye göre diferensiyelle (4.5.4) formundan

$x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)$ kolayca elde edilir.

$$\frac{d^j x}{dt^j} = \sum_{i=0}^{n-1} R_i^{(j)}(t, t_0) x^{(i)}(t_0) \quad (4.5.5)$$

(j) $(R_i^{(j)}(t, t_0) = R_i(t, t_0)$ 'in j. türevi olmak üzere)

Böylece resolvant matris

$$R(t, t_0) = \left[\begin{array}{c} \frac{d^i R_1}{dt^i}(t, t_0) \\ \vdots \\ \frac{d^j R_1}{dt^j}(t, t_0) \\ \vdots \\ \frac{d^i R_n}{dt^i}(t, t_0) \\ \vdots \\ \frac{d^j R_n}{dt^j}(t, t_0) \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} 0 \leq i \leq n-1 \\ 0 \leq j \leq n-1 \end{array} \quad (4.5.6)$$

ile verilirse (4.2.1) denklemini

$$\frac{d^n R_i}{dt^n} = \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t) \circ \frac{d^j R_i}{dt^j}, \quad 0 \leq i \leq n-1 \quad (4.5.7)$$

şeklinde yazabiliriz.

$$t = t_0 \text{ için } \frac{d^j R_i}{dt^j}(t_0, t_0) = \int_{1,1} 1_E \quad (4.5.8)$$

birim matris olur.

Bütün $R_i(t, t_0) \in \mathcal{L}(E; E)$ dir.

(4.5.8) ile verilen n-1 tane ilk türev başlangıç değeri olmak üzere n. mertebeden olan (4.5.7) denkleminin çözümüdür.

Şimdi bir boyutlu vektör uzayı olan E de özel durum gözönüne alalım. $E = \mathbb{R}$ durumu olsun.

$A_i(t)$ ler $a_i(t)$ ile tanımlı skaler değerli fonksiyonlarsa:

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) \frac{d^i x}{dt^i} \quad (4.5.9)$$

diferensiyel denkleminde $x(t)$ skaler değerli bilinmeyen fonksiyondur. $R(t, t_0)$ resolvant matrisi . elemanları skaler değerli fonksiyonlar olan n satır ve n sütunlu matrise :

$$R(t, t_0) = \left[\frac{d^j r_i}{dt^j} (t, t_0) \right]$$

$$\frac{d^n r_i}{dt^n} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) \frac{d^j r_i}{dt^j} \quad \text{denkleminin çözümü olan her } r_i(t)$$

fonksiyonu $t = t_0$ da $\frac{d^j r_i}{dt^j} = \delta_{ij}$ başlangıç

koşulunu sağlarlar.

(4.5.9) denkleminin genel çözümü

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i(t, t_0) x_0 \quad \text{ile verilir.} \quad (i)$$

Verilen bir t_0 için $r_i(t, t_0)$ formu (4.5.9) denkleminin çözümlerinin vektör uzayı için taban oluşturur. Buda n boyutlu vektör uzayıdır. Buradan ,

$$\det R(t, t_0) = \det \left[\frac{d^j r_i}{dt^j} (t, t_0) \right] \quad \text{olur.}$$

(4.3.1) bağıntısını şimdiki duruma uygularsak

$T_r(A) = a_{n-1}(t)$ elde ederiz. Buradan

$$\det \left[\frac{d^j r_i}{dt^j} (t, t_0) \right] = \exp \int_{t_0}^t a_{n-1}(\tau) d\tau \quad (4.5.10) \quad \text{olur.}$$

Yukarıdaki ifade

$$x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0) \quad '1$$

$x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)$ ye dönüştüren lineer dönüşümün determinantıdır. (Bu (4.5.8) 'in her $x(t)$ çözümü için doğrudur.)

(4.5.8) denkleminin n tane $x_1(t), \dots, x_n(t)$ çözümleri gözönüne alınırsa

$$\det \begin{bmatrix} x_1(t) & x_1'(t) & \dots & x_1^{(n-1)}(t) \\ x_2(t) & x_2'(t) & \dots & x_2^{(n-1)}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n(t) & x_n'(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

determinantı (4.5.10) determinantı ile $t=t_0$ daki değerlerin çarpımına eşittir. (Bu determinanta n çözümün Wronskiani adı verilir.) Özellikle eğer özel bir t_0 değeri için n çözümün Wronskiani sifıra eşitse her t değeri için sifıra eşit olur:

Bu koşullar :

$$\sum_{i=1}^n C_i x_i(t) = 0$$

hepsi sifır olmayan sabit C_i katsayıları bir lineer bağıntının varlığını gösterir.

4.6 n. Merteben "Serbest Terimli " Lineer Diferensiyel

Denklemler

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \sum_{i=0}^{n-1} A_i(t) \frac{d^i x}{dt^i} + B(t) \quad (4.6.1)$$

denklemin göz önüne alalım burada

$x : I \rightarrow E$ E Banach uzayında değerler alan bilinmeyen fonksiyon , verilen $A_i(t)$ fonksiyonları da $I \rightarrow \mathcal{L}(E;E)$ sürekli fonksiyonlar ve $B(t)$ fonksiyonu da $I \rightarrow E$ sürekli fonksiyondur.

4.4 Kısmının Sonucunu

$$C(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ B(t) \end{bmatrix} \quad \text{olan ve } A(t) \text{ matrisi}$$

(4.5.3) ile verilmek üzere

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + C(t) \quad \text{sistemine uygulanırsa}$$

(4.6.1) denkleminin genel çözümü $t=t_0$ da ilk $(n-1)$ tane türevleriyle beraber sıfıra eşit olan (4.6.1) 'in çözümünün ve (4.5.4) formu ile verilen) homojen denklemin genel çözümünün toplamıdır. (4.4.4) 'ün uygun yorumlanmasıyla
Çözüm :

$$\int_{t_0}^t R_{n-1}(t,\tau)B(\tau) d\tau \quad (4.6.2) \text{ ile verilir.}$$

$R_{n-1}(t,\tau)$ nin $t = \tau$ da $(n-2)$ tanesinin ilk türevleri sıfıra eşit olan ve $(n-1)$. türev olan $\frac{d^{n-1}S}{dt^{n-1}}$ $t = \tau$ da

1e değerini aldığı kabul edilen ve $\mathcal{L}(E;E)$ de değerler alan

$$\frac{d^n S}{dt^n} = \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t) \circ \frac{d^j S}{dt^j} \quad \text{denkleminin tek çözümüdür.}$$

(Bu (4.5.7) ve (4.5.8) bağıntılarından görülür.)

(4.6.2) çözümü (4.6.1) serbest terimli denklemin çözümüdür.

4.7. Sabit Katsayılı Lineer Diferansiyel Denklem

Bu kısımda özel bir durum çalışacağız.

$A : I \rightarrow \mathcal{L}(E;E)$ verilen sabit fonksiyon ve

$A \in \mathcal{L}(E;E)$ olmak üzere ilk olarak

$$\frac{dx}{dt} = A x \quad (4.7.1)$$

Lineer homojen denklemi araştıracaqız. Bu durumda $I = R$ alabiliriz:

$R(t, 0) = R(t)$ resolvanı $R \rightarrow \mathcal{L}(E; E)$ fonksiyonu

$$\frac{dR}{dt} = A \circ R \quad (4.7.2) \quad \text{diferensiyel denklemin çözümü ve}$$

$R(0) = I_E$ başlangıç koşulunu sağlar. Bu fonksiyonu daha detaylı çalışalım.

$$A \in \mathcal{L}(E; E) \quad \text{icin} \quad \exp A = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} A^n \quad (4.7.3)$$

eksponansiyel ([5], Cartan) tanımlıdır. ($A^0 = I_E$).

(4.7.3) eşitliğinin sağ tarafı

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n \quad \text{olduğundan} \quad \text{normda} \quad \text{yakınsak} \quad \text{seridir.}$$

Eger $t \in \mathbb{R}$ için $R(t) = \exp(tA)$ olursa

bu $R(t)$ fonksiyonu (4.7.2) denklemini sağlar; $R(0) = I_E$

olduğu aşıkardır. Bu yüzden $R(t)$ istenen resolvanıdır.

$$R(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} A^n \quad (4.7.4)$$

$t \in \mathbb{R}$ lerle katsavıları $\mathcal{L}(E; E)$ de olan serilerin toplamıdır.

Buradan

$$R'(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} A^{n+1}$$

Burada A yı bir çarpan olarak alabiliriz, o zaman

$$R'(t) = A \circ \left(\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} A^n \right) = A \circ R(t) \quad \text{olur.}$$

Buradan $t = t_0$ da x_0 değerini alan (4.7.1) denkleminin

çözümü

$$x(t) = \exp((t-t_0)A) x_0 \quad (4.7.5)$$

ile verilir. Bu verilerden sonra (4.2.2) bağıntısı

$\exp[(t_1-t_0)A] = \exp[(t-t_1)A] \circ \exp[(t_1-t_0)A]$ şeklinde yazılabilir.

$\exp[(t_1+t_2)A] = \exp(t_1A) \circ \exp(t_2A)$ ve daha genel olarak

$$\exp(A_1+A_2) = (\exp(A_1)) \circ (\exp(A_2)) \text{ olur.}$$

Eğer A_1 ve A_2 değişmeli endomorfizmalarsa:

$$A_1 \circ A_2 = A_2 \circ A_1 \text{ olur.}$$

$\exp(tA) \circ \exp(-tA) = 1_E$ bağıntısı bize $\exp(tA) \in \text{Isom}(E;E)$ olduğunu açıklar.

Şimdi "Serbest terimli" bir diferensiyel denklem alalım :

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B(t) :$$

(4.4.4) bağıntısına göre $t = t_0$ da sifıra eşit olan çözüm

$$x(t) = \int_{t_0}^t \exp[(t-\tau)A]B(\tau) d\tau \text{ ile verilir.}$$

4.8. Sabit Katsayılı Denklemler : Sonlu Boyutlu E Uzayı

Burada n boyutlu E kompleks vektör uzayının sınırlı olması durumunu ele alacağız $A \in \mathcal{L}_E(E;E)$,

$$\exp(tA) \in \text{Isom}_E(E;E)$$

A endomorfizminin karakteristik denklemi :

$$\det(A - \lambda 1_E) = 0 \quad (4.8.1)$$

D'alambert Gauss teoremine göre bu denklemin n kökü vardır.

λ_i kökünün kuvveti $k_i \geq 1$ olsun. Aşağıdaki matrisi köşegen forma indirgeyerek ispatlanabilen :

Aşağıdaki sonucun bilindiği varsayalım .A köşegen matrisinin anlamı E nin tabanı olmasıdır.Lemma λ_1 (4.8.1) denkleminin k_1 (kuvvetinin) herhangi bir kökü , E_1

$$(A - \lambda_1 I_E)^{k_1} x = 0 \quad (4.8.2) \text{ olacak şekilde bütün}$$

$x \in E$ in bir alt vektör uzayı olsun ; E_1 uzayı k_1 boyutludur ve E uzayı E_1 alt uzavlarınınin direkt toplamıdır. (tabiki $\sum k_1 = n$ dir).

Bu lemmayla

$$((A - \lambda_1 I_E)^{k_1} \circ A)x = A (A - \lambda_1 I_E)^{k_1} x = A((A - \lambda_1 I_E)^{k_1} x) = 0$$

olduğundan $x \in E_1$ ise $Ax \in E_1$ dir.

$A_1 \in (E_1; E_1)$ ler A ile belirlenmiş lineer eşlemeler ise.

$$(A_1 - \lambda_1 I_{E_1})^{k_1} = 0 \quad (4.8.3) \text{ olur.}$$

Bu koşullarla

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x \text{ homojen denklemi}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = A_1 \cdot x_1 \quad (4.8.4) \text{ homojen denklemler sistemine}$$

esittir.Burada $x_1(t)$ fonksiyonları E_1 uzayında değerler alan fonksiyonlardır.

(4.8.4) 'ün çözümü

$$x_1(t) = \exp(tA_1) \cdot u_1 \text{ ve } u_1 = x_1(0) \in E_1 \text{ ile verilir.}$$

Bununla beraber (4.8.3) görüsü içinde $\exp(tA_1)$

basitleştirilebilir.Bu basitleştirme ile

$$A_1 - \lambda_1 I_{E_1} \text{ yerine } A_1 - \lambda_1 I_{E_1} \text{ yazarak şunu elde ederiz:}$$

$$\exp(tA) = e^{\lambda_1 t} \exp t(A_1 - \lambda_1 I) = e^{\lambda_1 t} (I + t(A_1 - \lambda_1 I) + \dots + \frac{t^{k_1-1}}{(k_1-1)!} (A_1 - \lambda_1 I)^{k_1-1}) = e^{\lambda_1 t} P_1(t),$$

$P_1(t) \in \mathcal{L}(E_1; E_1)$ deki değerlerle derecesi $\leq k_1-1$ olan polinom olmak üzere $P_1(t) \cdot u_1$ polinomları, E nin alt uzayında yani E_1 deki değerlerle derecesi $\leq k_1-1$ polinomlarının oluşturduğu k_1 boyutlu vektör uzayıdır.

Dnerme 4.8.1 :

A nin herhangi bir λ_1 özdeğeri için

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x \quad (4.8.5) \text{ homojen denklemi } k_1 \text{ boyutlu bir}$$

vektör uzayı formu olan çözümlere sahip ve $e^{\lambda_1 t} Q_1(t)$, şeklinindedir. $Q_1(t)$ E_1 de değerler alan derecesi $\leq k_1-1$ olan polinomdur.

(4.8.5) in herhangi bir çözüümü bu çözümlerin toplamıdır:

$$x(t) = \sum_i e^{\lambda_i t} Q_i(t), \text{ bu toplam farklı özdeğerlerin}$$

üzerinde olur.

Özel durum:Eğer (4.8.1) karakteristik denkleminin n farklı kökü varsa $\forall \lambda_i$ özdeğerleri için (4.8.5) denklemi

$e^{\lambda_i t} c_i$ şeklinde çözüme sahip ($c_i \in E$, $c_i \neq 0$) ve her çözüm n tane özel çözümün lineer bileşimidir.

4.9 n. Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Denklem

n . mertebeden sabit katsayılı lineer denklemi oluşturmak için (4.5) ve (4.7) tezlimlerini birleştirmek yeterlidir.

$A_i \in \mathcal{L}(E;E)$ verilmek üzere ve $x : \mathbb{R} \rightarrow E$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$\frac{d^n x}{dt^n} = A_0 x + A_1 \frac{dx}{dt} + \dots + A_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} \quad (4.9.1)$$

denklemini verir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1_E & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1_E & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_0 & A_1 & A_2 & \dots & A_{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.9.2)$$

$$\exp(tA) = \begin{bmatrix} R_0(t) & R_1(t) & \dots & R_{n-1}(t) \\ R'_0(t) & R'_1(t) & \dots & R'_{(n-1)}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R^{(n-1)}_0(t) & R^{(n-1)}_1(t) & \dots & R^{(n-1)}_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

$t = t_0$ da $(n-1)$ tane ilk türevler sifira eşitlenen

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \frac{d^i x}{dt^i} + B(t) \quad \text{"serbest terimli"}$$

denklemin çözümü

$$\int_{t_0}^t R_{n-1}(t-\tau) \cdot B(\tau) d\tau \quad \text{ile verilir.}$$

Şimdi özel olarak, Bir boyutlu kompleks uzay olan E uzayının durumunu daha detaylı olarak inceleyelim.

$E = C$ durumu :

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^i x}{dt^i} \quad (4.9.3) \text{ homojen denklemi varsa,}$$

$a_i \in C$ verilen sabitler ve $x(t)$ kompleks değerli bilinmeyen fonksiyondur.

$A \in \mathcal{L}(C^n: C^n)$, (4.9.2) matrisinde A_i yerine a_i değerlerinin yerleştirilmesiyle elde edilen matrisle tanımlanmış lineer eşleme olsun .

$\det (A - \lambda) = 0$ karakteristik denklemi ise

$$\lambda^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i \quad (4.9.4) \text{ durumuna indirgenir;}$$

λ değeri için bir özvektor vardır. $x = e^{\lambda t}$ formunun anlamı (4.9.3) un bir çözümünün varolmasıdır. Buradan (4.9.4) bağıntısını elde ederiz. (4.8) kesimindeki sonuçlardan eğer λ_i (4.9.4) denkleminin k_i mertebeden kökü ise (4.9.3) diferensiyel denkleminin k_i tane lineer bağımsız çözümleri

$$e^{\lambda_i t} q_i(t) \text{ formundadır. Burada } q_i(t) \text{ derecesi} \\ \leq k_i - 1 \text{ olan skaler değerli}$$

polinomlardır. Bu formdaki polinomlar k_i boyutlu vektör uzayıdır. Bu yüzden derecesi $\leq k_i - 1$ olan herhangi bir polinom için

$$e^{\lambda_i t} q_i(t) \quad (4.9.3) \text{ denkleminin çözümüdür.}$$

Önerme 4.9.1 :

(4.9.3) homojen denkleminin genel çözümü

$$\sum_i e^{\lambda_i t} q_i(t) \text{ formundadır. ([5], Cartan).}$$

KAYNAKLAR

- [1] Bourbaki.N.,1969 .Éléments d'histoire des mathématiques,
Hermann PARIS.
- [2] Bourbaki.N.,1953.Espaces vectoriels topologiques
Hermann PARIS.
- [3] Berge,C., 1966 . Espaces topologiques, Dunod PARIS.
- [4] Brown .L.W., 1976 ,Topoloji ders notları.
- [5] Cartan,H.. 1971 . Differential calculus , Kershaw
Publishing Company L.T.D. LONDON.
- [6] Çallıalp,F.,Kuruoğlu,N.,Lineer cebir , Ondokuz Mayıs
Universitesi Fen - Edb. Fakültesi.
- [7] Erdem,M.,Kılıç,S.A..Fonksiyonel analize giriş,Gazi
Universitesi Fen Fakültesi yayınları.
- [8] Garnir,H.G.,M. De Wilde .J. Schmets.1968 Analyse
Fonctionnelle ,Birkhäuser Verlag Basel und STUTTGART.
- [9] Taylor,A.E., [23] Introduction to functional analysis,
Wiley New York 1958.
- [10] Sturm,C.,Sur les équations différentielles linéaires du
second ordre,Journ. de Math.(1) t.I(1836),p.106-108.

Ö Z G E Ç M İ Ş

15.02.1967 yılında Silivri 'de dünyaya geldim . İlkokul öğrenimimi Çanta köyü ilkokulunda Ortaokul ve lise öğrenimimi Silivri Lisesinde tamamladım. 1985 yılında Trakya Univesitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümüne kayıt oldum ve Haziran 1989 da bu bölümden mezun oldum . Ekim 1989 yılında T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsünün açmış olduğu yüksek lisans sınavını kazandım ve yüksek lisansa başladım T.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 1990 yılında açmış olduğu araştırma görevlisi sınavını Fonksiyonlar teorisi ve fonksiyonel analiz anabilim dalında kazandım . Halen araştırma görevlisi olarak görevimi sürdürmekteyim.