

**BAZI FONKSİYON UZAYLARINDA
YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ**

OĞUZ OĞUR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T.C
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI FONKSİYON UZAYLARINDA YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

OĞUZ OĞUR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. CENAP DUYAR

SAMSUN-2011

BAZI FONKSİYON UZAYLARINDA YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ**ÖZET**

Bu tezin birinci bölümünde iki değişkenli fonksiyonlara karşılık gelen Steklov fonksiyonları tanımlanmış olup Sandberg ve Dingankar (1995)'ın çalışmalarındaki tek değişkenli durum için verilen özellikler iki değişkene göre değerlendirilmiştir. Tezin ikinci bölümünde ise tek değişkenli fonksiyonlar için Riemann-Stieltjes integrali aracılığıyla Steklov fonksiyonu tanımlanmış yine aynı çalışmadaki özellikler bu fonksiyonlar için değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Steklov fonksiyonu, Riemann-Stieltjes integrali, L_p uzayı

THE PROPERTIES OF APPROXIMATION IN SOME FUNCTION SPACES
ABSTRACT

In the first chapter of this thesis, Steklov functions corresponding to the functions of two variables are described and the features which are given for condition with one variable in the study of Sandberg and Dingankar (1995) are evaluated for functions of two variables. In the second chapter of the thesis, Steklov function is described through the mediation of Riemann-Stieltjes integral for the functions of one variable and again the features in the same study are evaluated for these functions.

Key words: Steklov function, Riemann-Stieltjes integral, L_p space

TEŞEKKÜR

Tez konumu veren ve çalışmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Cenap DUYAR' a,

Bilgi ve deneyimlerini sınırsızca paylaşan saygıdeğer hocalarım, Doç. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR ve Yrd. Doç. Dr. İlker ERYILMAZ' a,

Başta ailem ve dostlarım olmak üzere bana inanan ve beni destekleyen herkese teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

1. Giriş	1
2. Genel Bilgiler	2
3. Materyal ve Yöntemler	8
4. Bulgular	9
4.1. $L_p(A)$, $1 \leq p < \infty$ Uzayı Üzerindeki Sürekli Lineer Fonksiyonellere Yaklaşım	9
4.2. $L_p([a, b])$, $1 \leq p < \infty$ Uzayı Üzerindeki Sürekli Lineer Fonksiyonellere Riemann-Stieltjes Anlamında Yaklaşım	18
5. Tartışma	27
6. Sonuç ve Öneriler	28
7. Kaynaklar	29
8. Özgeçmiş	30

SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}^n$	: n – boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
L_p	: Lebesgue uzayı
$C(A)$	: A kümesi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_c(A)$	: A kümesi üzerinde tanımlı, sürekli ve kompakt destekli fonksiyonlar Uzayı

1.GİRİŞ

Matematik, fizik ve mühendislik gibi kimi uygulamalı bilimlerde bazı problemlerin bilinen yollarla analitik olarak çözülmesi mümkün olmayabilir. Bu gibi durumlarda asgari bir yanılma payıyla çözüme yaklaşılabılır. Bu amaçla geliştirilen teoriye “yaklaşım teori” adı verilmiştir. Bu teori ile ilgili ilk adımı Leonhard Euler Çarlık Rusyasının yaklaşık bir haritasını çizerek atmıştır. Daha sonra 1799 yılında Laplace, yaklaşım teori yardımıyla dünyanın elipsoid şeklinde olduğunu teorik olarak ispatlamıştır. Fakat yaklaşım teori ilk olarak 1853 yılında P. L. Chebyshev tarafından “Theory of functions deviating the least possible from zero” adlı çalışmasıyla sağlam bir zemine oturtulmuştur. Chebyshev, bu çalışmasıyla reel değerli analitik fonksiyonlara polinomlarla yaklaşılabileceğini ispatlamıştır. Ardından 1885 yılında Karl Weierstrass sürekli her fonksiyona polinomlar ile düzgün olarak yaklaşılabileceğini ispatlayarak konuyu bir adım daha ileriye taşımıştır. 1900 yılında L. Fejer her fonksiyona ilgili fonksiyonun Fourier serisi ile yaklaşılabileceğini ispatlamıştır. Fejer ayrıca her sürekli fonksiyonun Hermite-Fejer interpolasyonunun fonksiyona yakınsadığını ispatlamıştır. Konuyla ilgili olarak ayrıca S. N. Bernstein kendi adıyla anılan polinomlarla sürekli her fonksiyona yaklaşılabileceğini ispatlamıştır. Bernstein bu yaklaşımı ile Weierstrass teoreminin alternatif bir ispatını da yapmış oldu. Bernstein’ nin elde ettiği sonuçlar daha sonraki yıllarda çıkacak olan modern yaklaşım teorisinin iskeletini oluşturmuştur.

1990’ lı yıllarda insan beyninin işleyişinden hareketle yapay sinir ağlarının tanımlanması fonksiyon yaklaşımına yani bir boyut kazandırmıştır. 1993 yılında Chen ve Chen tarafından yayınlanan çalışmada sürekli fonksiyonlara yapay sinir ağları ile yaklaşıma ve bu yaklaşımın dinamik sistemlere uygulanişına yer verilmiştir. 1995 yılında Sandberg ve Dingankar ortak çalışmalarında Steklov fonksiyonu yardımıyla tanımlanan polinomlarla L_p uzayı üzerinde tanımlı sürekli lineer fonksiyonellere yaklaşılabileceğini göstermişlerdir.

Tezin birinci bölümünde iki değişkenli fonksiyonlar aracılığıyla Steklov fonksiyonu tanımlanmış ve Sandberg ve Dingankar (1995) çalışmasında verilen özellikler bu anlamda incelenmiştir. Tezin son bölümünde ise tek değişkenli fonksiyonlar için Riemann-Stieltjes integrali aracılığıyla Steklov fonksiyonu tanımlanmış, Sandberg ve Dingankar (1995) çalışmasındaki özellikler bu anlamda incelenmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1.Tanım: (X, μ) bir ölçüm uzayı ve $1 \leq p < \infty$ olsun. X üzerinde tanımlı, reel (veya karmaşık) değerli, ölçülebilir ve

$$\int_X |f(x)|^p d\mu < \infty \quad (2.1)$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının hemen hemen her yerde bağıntısıyla tanımlı denklik sınıflarının oluşturduğu vektör uzayı $L_p(X)$ ile gösterilir. Ayrıca $L_p(X)$ uzayı $f \in L_p(X)$ olmak üzere

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.2)$$

fonksiyonu ile normlu uzaydır (Rudin, 1987).

2.2.Tanım: Ölçülebilir bir X uzayı üzerinde sonlu tane değer alan fonksiyonlara basit fonksiyon denir. $a_1, a_2, \dots, a_n$ reel sayıları s basit fonksiyonun aldığı değerler olsun. Eğer $i = 1, 2, \dots, n$ için A_i kümeleri $A_i = \{x: s(x) = a_i\}$ şeklinde tanımlanırsa

$$\text{ve } \chi_{A_i} = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A_i \\ 0 & , \quad x \notin A_i \end{cases} \quad , \quad A_i \text{ kümelerinin karakteristik fonksiyonlarını göstermek}$$

üzere

$$s(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x) \quad (2.3)$$

şeklinde yazılır (Rudin, 1987).

2.3.Tanım: Bir A kümesi üzerinde tanımlı reel (veya karmaşık) değerli sürekli fonksiyonlar uzayı $C(A)$ ile gösterilir.

Ayrıca A kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu için

$$\{x: f(x) \neq 0\} \quad (2.4)$$

kümesinin norm ile elde edilen topolojiye göre alınan kapanışına f fonksiyonunun desteği denir. A kümesi üzerinde tanımlı desteği kompakt olan bütün reel (veya

karmaşık) değerli ve sürekli fonksiyonların oluşturduğu uzay $C_c(A)$ ile gösterilir.

Eğer A kümesi kompakt ise $C(A)$ ile $C_c(A)$ uzayları çakışır (Rudin, 1987).

2.4.Teorem: A bir ölçüm uzayı ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $C_c(A)$ uzayı $L_p(A)$ uzayında yoğundur (Rudin, 1987).

2.5.Teorem(Hölder Eşitsizliği): $p \geq 1$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($p=1$ için $q = \infty$)

eşitliği sağlansın. Eğer $f \in L_p$ ve $g \in L_q$ ise $fg \in L_1$ olur ve

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad (2.5)$$

eşitsizliği sağlanır (Bartle, 1995).

2.6.Teorem(Minkowski Eşitsizliği): $p \geq 1$ olmak üzere herhangi $f, g \in L_p$ için $f + g \in L_p$ ve

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (2.6)$$

eşitsizliği sağlanır (Bartle, 1995).

2.7.Teorem (Riesz Temsil Teoremi): (X, μ) bir ölçüm uzayı ve $p \geq 1$ olmak üzere

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($p=1$ için $q = \infty$) koşulu sağlansın. Eğer ϕ dönüşümü $L_p(X)$ uzayı

üzerinde sınırlı bir lineer dönüşüm ise o zaman her $f \in L_p(X)$ için

$$\phi(f) = \int_X gf \, d\mu \quad (2.7)$$

olacak şekilde $g \in L_q(X)$ fonksiyoneli vardır. Ayrıca $\|\phi\| = \sup_{\|f\|_p \leq 1} |\phi(f)|$ operatör norm

olmak üzere

$$\|\phi\| = \|g\|_q \quad (2.8)$$

sağlanır (Bartle, 1995).

2.8.Tanım: Bir f reel değerli fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı olsun. $[a, b]$ kapalı aralığının tüm $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ parçalanışlarının $\wp$ ailesi üzerinden alınan supremum değeri

$$V(f) = \sup_{P \in \wp} \sum_{k=0}^{n_P-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \quad (2.9)$$

sonlu ise f fonksiyonuna sonlu varyasyonlu denir (Natanson, 1964).

2.9.Tanım: f ve α fonksiyonları $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve sonlu değer alan iki fonksiyon olsun ve bir $[a, b]$ kapalı aralığı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ noktaları aracılığıyla alt aralıklara bölünsün. Herbir $k = 0, 1, \dots, n-1$ için $z_k \in [x_k, x_{k+1}]$ seçilsin ve

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) (\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)) \quad (2.10)$$

toplamı biçimlendirilsin. Eğer σ toplamı $\lambda = \max(x_{k+1} - x_k) \rightarrow 0$ iken bir I sonlu limitine yakınsıyorsa, o zaman hem alt aralığa bölme metodu hem de z_k noktalarının seçiminden bağımsız olarak bu limite f fonksiyonunun α fonksiyonuna göre Riemann-Stieltjes integrali denir ve

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) \quad (2.11)$$

şeklinde gösterilir. Burada eğer $\alpha(x) = x$ alınırsa Riemann integrali elde edilir (Natanson, 1964).

2.10.Teorem: Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ve α fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde sonlu varyasyonlu ise (2.11) ile gösterilen integral vardır (Natanson, 1964).

2.11.Teorem: (2.11) ile tanımlanan Riemann-Stieltjes integrali için aşağıdaki özellikler vardır.

$$\text{i) } \int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) d\alpha(x) = \int_a^b f_1(x) d\alpha(x) + \int_a^b f_2(x) d\alpha(x)$$

$$\text{ii)} \quad \int_a^b f(x) d[\alpha_1(x) + \alpha_2(x)] = \int_a^b f(x) d\alpha_1(x) + \int_a^b f(x) d\alpha_2(x)$$

$$\text{iii)} \quad k \text{ ve } l \text{ sabit sayılar olmak üzere} \quad \int_a^b (kf(x)) d(l\alpha(x)) = kl \int_a^b f(x) d\alpha(x)$$

iv) Eğer (2.11) integrali varsa $a < c < b$ olmak üzere

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^c f(x) d\alpha(x) + \int_c^b f(x) d\alpha(x) \quad (2.12)$$

eşitliği gerçekleşir. Fakat tersi genelde doğru değildir. Yani $\int_a^c f(x) d\alpha(x)$ ve

$\int_c^b f(x) d\alpha(x)$ integrallerinin var olması (2.12) integralinin var olmasını gerektirmez

(Natanson, 1964).

2.12.Örnek: f ve α fonksiyonları $[-1,1]$ kapalı aralığı üzerinde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & , \quad 0 < x \leq 1 \end{cases} , \quad \alpha(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -1 \leq x < 0 \\ 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlansınlar. Bu takdirde

$$\int_{-1}^0 f(x) d\alpha(x) = \int_0^1 f(x) d\alpha(x) = 0$$

olduğu kolayca görülür. $k = 0, 1, \dots, n$ için $x_k \neq 0$ olmak üzere $[-1,1]$ kapalı aralığı

$[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ şeklinde alt aralıklara bölünsün. Eğer $x_i < 0 < x_{i+1}$ ise $[x_i, x_{i+1}]$

alt aralığı dışında aynı alt aralıkta bulunan noktalar için $\alpha(x_{k+1}) = \alpha(x_k)$ olacağından

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) (\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)) = f(z_i) (\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)) = f(z_i)$$

yazılır. $z_i \leq 0$ ise $\sigma = 0$ ve $z_i > 0$ ise $\sigma = 1$ olur. Toplam noktanın seçiminden

bağımsız olmadığı için $\int_{-1}^1 f(x) d\alpha(x)$ integrali yoktur (Natanson, 1964).

2.13.Tanım: x fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı, $[a, b]$ kapalı aralığı dışında sıfır değerini alan reel değerli p . dereceden mutlak integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Her $h > 0$ sayısı ve $t \in [a, b]$ için

$$x_h(t) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} x(r) dr \quad (2.14)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Steklov fonksiyonu denir (Sandberg ve Dingankar, 1995).

2.14.Teorem: (2.14) ile verilen x_h fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde süreklidir ve dolayısıyla x_h fonksiyonu $L_p([a, b])$ uzayındadır (Chen ve Chen, 1993).

2.15.Teorem: $G \subset \mathbb{R}^n$ kapalı ve sınırlı bir küme, $B(t, r)$ kümesi de $t \in G$ merkezli r yarıçaplı bir yuvar olsun. p . dereceden integrallenebilir ve G kümesi dışında sıfır değeri alan her $x: G \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için m_r sayısı $B(t, r)$ yuvarının ölçümünü göstermek üzere

$$x_r(t) = \frac{1}{m_r} \int_{B(t, r)} x(s) ds$$

şeklinde tanımlanan n – boyutlu Steklov fonksiyonu için

$$\|x_r\|_p \leq \|x\|_p \quad (2.15)$$

eşitsizliği sağlanır (Krasnosel'skii ve Rutickii).

2.16.Tanım: A ve B normlu lineer uzaylar ve $f: A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in A$ için

$$\|f(x) - f(y)\|_B \leq M \|x - y\|_A \quad (2.16)$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna Lipschitz koşulunu sağlıyor denir (Kufner ve ark., 1977).

2.17.Teorem: A ve B normlu lineer uzaylar, K kümesi A uzayının kompakt bir alt kümesi olmak üzere $G: K \rightarrow B$ dönüşümü Lipschitz koşulunu sağlasın. Ayrıca $\mathfrak{B}$

ailesi verilen herhangi $\delta > 0$ sayısı ve K kümesinin sonlu elemanlı herhangi bir $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ alt kümesi için $i = 1, 2, \dots, r$ olmak üzere

$$\|G(x_i) - H(x_i)\|_B < \delta \quad (2.17)$$

koşulunu sağlayan $H : K \rightarrow B$ Lipschitz dönüşümlerinin bir ailesi olsun. Bu takdirde herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $x \in K$ için

$$\|G(x) - H(x)\|_B < \varepsilon \quad (2.18)$$

olacak şekilde bir $H \in \mathfrak{B}$ vardır (Sandberg, 1994)

3.MATERYAL VE YÖNTEMLAR

Bulgular bölümünün birinci ve ikinci bölümünde Chen ve Chen (1993) , Sandberg (1994), Sandberg ve Dingankar (1995) çalışmalarındaki yöntemler kullanılarak sırasıyla iki değişkenli fonksiyonlara karşılık Steklov fonksiyonu ve Riemann-Stieltjes integrali yardımı ile tek değişkenli fonksiyonlar için Steklov fonksiyonu tanımlandı ve bazı temel özellikleri incelendi. Ayrıca yine aynı çalışmalardaki yöntemler kullanılarak Lebesgue uzayı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonellere sırasıyla iki boyutlu ve Stieltjes anlamında Steklov fonksiyonları yardımıyla yaklaşım incelendi.

4. BULGULAR

4.1. $L_p(A), 1 \leq p < \infty$ Uzayı Üzerindeki Sürekli Lineer Fonksiyonellere Yaklaşım

$[a, b] \subset \mathbb{R}$ kapalı aralığı üzerinde Steklov fonksiyonu 2.13.Tanımda ifade edilmişti. Burada $A = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ kümesi üzerinde tanımlı p . dereceden mutlak integrallenebilen fonksiyonlar için Steklov fonksiyonu tanımlanacaktır.

4.1.1.Tanım: p . dereceden mutlak integrallenebilir ve A kümesi dışında sıfır değeri alan herhangi bir $x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Herhangi $h > 0, l > 0$ sayıları için $(t, r) \in A$ olmak üzere

$$x_{h,l}(t, r) = \frac{1}{4hl} \int_{r-l}^{r+l} \int_{t-h}^{t+h} x(\tau, \mu) d\tau d\mu \quad (4.1.1)$$

biçiminde tanımlanan $x_{h,l}: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna iki değişkenli Steklov fonksiyonu denir.

4.1.2.Önerme: Her bir $x_{h,l}$ Steklov fonksiyonu A kümesi üzerinde sınırlıdır ve süreklidir.

İspat: $x \in L_p$ olduğundan $\|x\|_p \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ vardır. O zaman Hölder eşitsizliği ile her $(t, r) \in A$ için

$$\begin{aligned} |x_{h,l}(t, r)| &= \left| \frac{1}{4hl} \int_{r-l}^{r+l} \int_{t-h}^{t+h} x(\tau, \mu) d\tau d\mu \right| \\ &\leq \frac{1}{4hl} \int_{r-l}^{r+l} \int_{t-h}^{t+h} |x(\tau, \mu)| d\tau d\mu \\ &\leq \left(\frac{1}{4hl} \right) \left(\int_{r-l}^{r+l} \int_{t-h}^{t+h} |x(\tau, \mu)|^p d\tau d\mu \right)^{\frac{1}{p}} (4hl)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\frac{1}{4hl} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{r-l}^{r+l} \int_{t-h}^{t+h} |x(\tau, \mu)|^p d\tau d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{1}{4hl} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_c^d \int_a^b |x(\tau, \mu)|^p d\tau d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\frac{1}{4hl} \right)^{\frac{1}{p}} M$$

elde edilir. Buna göre $x_{h,l}$ fonksiyonu sınırlıdır.

$(t_0, r_0) \in A$ herhangi bir nokta olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$h > 0, l > 0$ için $\lambda = \max\{(d-c), (b-a)\}$ olmak üzere $\delta = \lambda \left(\frac{\varepsilon hl}{M} \right)^q$ alınırsa

$\|(t_0, r_0) - (t, r)\|_2 = \sqrt{(t-t_0)^2 + (r-r_0)^2} < \delta$ olduğunda

$$\begin{aligned} |x_{h,l}(t_0, r_0) - x_{h,l}(t, r)| &= \left| \frac{1}{4hl} \int_{r_0-l}^{r_0+l} \int_{t_0-h}^{t_0+h} x(\tau, \mu) d\tau d\mu - \frac{1}{4hl} \int_{r-l}^{r+l} \int_{t-h}^{t+h} x(\tau, \mu) d\tau d\mu \right| \\ &= \frac{1}{4hl} \left| \int_{r_0-l}^{r_0+l} \int_{t_0-h}^{t-h} x(\tau, \mu) d\tau d\mu + \int_{r_0-l}^{r_0+l} \int_{t-h}^{t_0+h} x(\tau, \mu) d\tau d\mu - \int_{r-l}^{r+l} \int_{t-h}^{t_0+h} x(\tau, \mu) d\tau d\mu - \int_{r-l}^{r+l} \int_{t_0+h}^{t+h} x(\tau, \mu) d\tau d\mu \right| \\ &\leq \frac{1}{4hl} \left(\left| \int_{r_0-l}^{r_0+l} \int_{t_0-h}^{t-h} x d\tau d\mu \right| + \left| \int_{r_0-l}^{r_0+l} \int_{t-h}^{t_0+h} x d\tau d\mu - \int_{r-l}^{r+l} \int_{t-h}^{t_0+h} x d\tau d\mu \right| + \left| \int_{r-l}^{r+l} \int_{t_0+h}^{t+h} x d\tau d\mu \right| \right) \end{aligned}$$

Şimdi parantez içindeki ifadeler ayrı ayrı incelensin. İlk terim için

$$\begin{aligned} \left| \int_{r_0-l}^{r_0+l} \int_{t_0-h}^{t-h} x d\tau d\mu \right| &\leq \left| \int_{r_0-l}^{r_0+l} \int_{t_0-h}^{t-h} |x| d\tau d\mu \right| \\ &\leq \left| \int_c^d \int_{t_0-h}^{t-h} |x| d\tau d\mu \right| \\ &\leq \left(\int_c^d \int_{t_0-h}^{t-h} |x|^p d\tau d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left((d-c) |t-t_0| \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq M \lambda^{\frac{1}{q}} |t-t_0|^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

olur. İkinci terim için

$$\begin{aligned}
\left| \int_{r_0-l}^{r_0+l} \int_{t-h}^{t_0+h} x d\tau d\mu - \int_{r-l}^{r+l} \int_{t-h}^{t_0+h} x d\tau d\mu \right| &= \left| \int_{r_0-l}^{r-l} \int_{t-h}^{t_0+h} x d\tau d\mu + \int_{r-l}^{r_0+l} \int_{t-h}^{t_0+h} x d\tau d\mu - \int_{r-l}^{r_0+l} \int_{t-h}^{t_0+h} x d\tau d\mu - \int_{r_0+l}^{r+l} \int_{t-h}^{t_0+h} x d\tau d\mu \right| \\
&\leq \left| \int_{r_0-l}^{r-l} \int_{t-h}^{t_0+h} x d\tau d\mu \right| + \left| \int_{r_0+l}^{r+l} \int_{t-h}^{t_0+h} x d\tau d\mu \right| \\
&\leq \left| \int_{r_0-l}^{r-l} \int_a^b |x| d\tau d\mu \right| + \left| \int_{r_0+l}^{r+l} \int_a^b |x| d\tau d\mu \right| \\
&\leq \left| \left(\int_{r_0-l}^{r-l} \int_a^b |x|^p d\tau d\mu \right)^{\frac{1}{p}} ((b-a)|r-r_0|)^{\frac{1}{q}} \right| + \left| \left(\int_{r_0+l}^{r+l} \int_a^b |x|^p d\tau d\mu \right)^{\frac{1}{p}} ((b-a)|r-r_0|)^{\frac{1}{q}} \right| \\
&\leq 2M \lambda^{\frac{1}{q}} |r-r_0|^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

bulunur. Son terim için

$$\begin{aligned}
\left| \int_{r-l}^{r+l} \int_{t_0+h}^{t+h} x d\tau d\mu \right| &\leq \left| \int_{r-l}^{r+l} \int_{t_0+h}^{t+h} |x| d\tau d\mu \right| \\
&\leq \left| \int_c^d \int_{t_0+h}^{t+h} |x| d\tau d\mu \right| \\
&\leq \left| \left(\int_c^d \int_{t_0+h}^{t+h} |x|^p d\tau d\mu \right)^{\frac{1}{p}} ((d-c)|t-t_0|)^{\frac{1}{q}} \right| \\
&\leq M \lambda^{\frac{1}{q}} |t-t_0|^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $|t-t_0| < \delta$ ve $|r-r_0| < \delta$ olduğunda

$$|x_{h,l}(t_0, r_0) - x_{h,l}(t, r)| \leq \frac{M \lambda^{\frac{1}{q}} \delta^{\frac{1}{q}}}{hl} < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise istenendir.

4.1.3.Önerme : $D \subset L_p(A)$ kompakt bir alt küme olsun. $h > 0, l > 0$ keyfi fakat sabit olarak alınan sayılar olmak üzere $\phi(x) = x_{h,l}$ şeklinde tanımlanan $\phi: D \rightarrow C(A)$ dönüşümü süreklidir.

İspat: $x_0 \in D$ keyfi fakat sabit olarak alınan bir nokta olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$

sayısına karşılık $\delta = \varepsilon (4hl)^{\frac{1}{p}}$ seçilirse $\|x - x_0\|_p < \delta$ ve $x \in D$ olduğunda

$$\begin{aligned}
 \|\phi(x) - \phi(x_0)\|_\infty &= \|x_{h,l} - x_{0h,l}\|_\infty \\
 &= \sup_{(t,r) \in A} |x_{h,l}(t,r) - x_{0h,l}(t,r)| \\
 &= \sup_{(t,r) \in A} \left| \frac{1}{4hl} \int_{r-l}^{r+l} \int_{t-h}^{t+h} (x(\tau, \mu) - x_0(\tau, \mu)) d\tau d\mu \right| \\
 &\leq \sup_{(t,r) \in A} \left| \frac{1}{4hl} \int_{r-l}^{r+l} \int_{t-h}^{t+h} |x(\tau, \mu) - x_0(\tau, \mu)| d\tau d\mu \right| \\
 &\leq \sup_{(t,r) \in A} \left| \frac{1}{4hl} \left(\int_{r-l}^{r+l} \int_{t-h}^{t+h} |x(\tau, \mu) - x_0(\tau, \mu)|^p d\tau d\mu \right)^{\frac{1}{p}} (4hl)^{\frac{1}{q}} \right| \\
 &\leq \left(\frac{1}{4hl} \right)^{\frac{1}{p}} \|x - x_0\|_p \\
 &< \varepsilon
 \end{aligned}$$

yazılır. Bu ise istenendir.

4.1.4.Önerme: $\phi(D) = \{x_{h,l}; x \in D\} \subset C(A)$ şeklinde tanımlı bir alt küme olsun. Bu takdirde $\psi(x_{h,l}) = \|x_{h,l}\|_\infty$ şeklinde tanımlanan herbir $\psi: \phi(D) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü süreklidir.

İspat: Bir $x_{0h,l} \in \{x_{h,l}; x \in D\}$ keyfi fonksiyonu verilmiş olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$

sayısına karşılık $\delta = \varepsilon$ seçilirse $\|x_{h,l} - x_{0h,l}\|_\infty < \delta$ olduğunda

$$\left| \|x_{h,l}\|_\infty - \|x_{0h,l}\|_\infty \right| \leq \|x_{h,l} - x_{0h,l}\|_\infty < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise isteneni verir.

4.1.5.Sonuç: ϕ ve ψ dönüşümleri sırası ile 4.1.3.Önerme ve 4.1.4.Önerme' de tanımlanan dönüşümler olmak üzere herhangi $h > 0, l > 0$ sayıları için

$\psi \circ \phi : D \subset L_p \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü süreklidir. Dolayısıyla supremum ve infimum değerini

D kompakt kümesi üzerinde alır. Böylece $M = \sup_{x \in D} \sup_{(t,r) \in A} |x_{h,l}(t,r)|$ sonludur.

4.1.6.Önerme: $[a, b]$ ve $[c, d]$ aralıklarının düzgün parçalanışları sırasıyla

$\alpha_i = a + i \frac{b-a}{n}, 1 \leq i \leq n$ ve $\beta_j = c + j \frac{d-c}{m}, 1 \leq j \leq m$ sayıları yardımıyla oluşturulmuş

olsun. Verilen $n, m \in \mathbb{N}$ ve $h > 0, l > 0$ sayıları için

$$S_{n,m,h,l} = \left\{ s : L_p(A) \rightarrow \mathbb{R}; s(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_{i,j} x_{h,l}(\alpha_i, \beta_j), c_{i,j} \in \mathbb{R} \right\}$$

olmak üzere $S = \bigcup_{\substack{n,m \in \mathbb{N} \\ h>0, l>0}} S_{n,m,h,l}$ şeklinde tanımlansın. S kümesinin bütün elemanları

Lipschitz koşulunu sağlar.

İspat: Herhangi $x, y \in L_p(A)$ ve herhangi bir $s \in S$ için $k = \left(\max |c_{i,j}| \right) \frac{mn}{(4hl)^{\frac{1}{p}}}$

seçilirse

$$\begin{aligned} |s(x) - s(y)| &= \left| \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_{i,j} (x_{h,l}(\alpha_i, \beta_j) - y_{h,l}(\alpha_i, \beta_j)) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n |c_{i,j}| \left| (x_{h,l}(\alpha_i, \beta_j) - y_{h,l}(\alpha_i, \beta_j)) \right| \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n |c_{i,j}| \left| \frac{1}{4hl} \int_{\beta_j-l}^{\beta_j+l} \int_{\alpha_i-h}^{\alpha_i+h} (x(t,r) - y(t,r)) dt dr \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n |c_{i,j}| \frac{1}{4hl} \int_{\beta_j-l}^{\beta_j+l} \int_{\alpha_i-h}^{\alpha_i+h} |x(t,r) - y(t,r)| dt dr \\ &\leq \left(\max |c_{i,j}| \right) \left(\frac{1}{4hl} \right)^{\frac{1}{p}} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left(\int_c^d \int_a^b |x(t,r) - y(t,r)|^p dt dr \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\max_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i \leq n}} |c_{i,j}| \right) \frac{mn}{(4hl)^{\frac{1}{p}}} \|x - y\|_p \\ &= k \|x - y\|_p \end{aligned}$$

elde edilir. Bu isteneni verir.

4.1.7.Önerme: $D \subset L_p(A)$ bir kompakt alt küme ve $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir adım fonksiyonu olmak üzere herhangi $h > 0, l > 0$ sayıları için

$$G(x) = \int_c^d \int_a^b g(t, r) x_{h,l}(t, r) dt dr \quad (4.1.2)$$

ile tanımlı $G : D \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü Lipschitz koşulunu sağlar.

İspat: Her $(t, r) \in A$ için $|g(t, r)| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ vardır. Eğer $K = M((b-a)(d-c))^{\frac{1}{q}}$ olacak şekilde alınırsa o zaman her $x, y \in D$ için

$$\begin{aligned} |G(x) - G(y)| &= \left| \int_c^d \int_a^b g(t, r) (x_{h,l}(t, r) - y_{h,l}(t, r)) dt dr \right| \\ &\leq \int_c^d \int_a^b |g(t, r)| |x_{h,l}(t, r) - y_{h,l}(t, r)| dt dr \\ &\leq M \left(\int_c^d \int_a^b |x_{h,l}(t, r) - y_{h,l}(t, r)|^p dt dr \right)^{\frac{1}{p}} ((b-a)(d-c))^{\frac{1}{q}} \\ &= M((b-a)(d-c))^{\frac{1}{q}} \|x_{h,l} - y_{h,l}\|_p \\ &\leq K \|x - y\|_p \end{aligned}$$

elde edilir.

4.1.8.Önerme: Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve her $x \in L_p(A)$ için

$$\|x - x_{h,l}\|_p < \varepsilon \quad (4.1.3)$$

olacak şekilde $h > 0, l > 0$ sayıları vardır.

İspat: Herhangi bir $x \in L_p(A)$ ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun. O zaman $C(A)$ uzayının $L_p(A)$ uzayında yoğun olması gereğince

$$\|x - y\|_p < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.1.4)$$

olacak şekilde en az bir $y \in C(A)$ vardır. Ayrıca $y \in C(A)$ olduğundan

$$|t-u| < h, |r-v| < l \text{ ise } |y(t,r) - y(u,v)| < \frac{\varepsilon}{3((b-a)(d-c))^{\frac{1}{p}}} \text{ olacak şekilde } h > 0 \text{ ve}$$

$l > 0$ sayıları vardır. Aynı $y \in C(A)$ için

$$\begin{aligned} \|y - y_{h,l}\|_p^p &= \int_c^d \int_a^b |y(t,r) - y_{h,l}(t,r)|^p dt dr \\ &= \int_c^d \int_a^b \left| \frac{1}{4hl} \int_{r-l}^{r+l} \int_{t-h}^{t+h} y(t,r) dudv - \frac{1}{4hl} \int_{r-l}^{r+l} \int_{t-h}^{t+h} y(u,v) dudv \right|^p dt dr \\ &= \int_c^d \int_a^b \left| \frac{1}{4hl} \int_{r-l}^{r+l} \int_{t-h}^{t+h} (y(t,r) - y(u,v)) dudv \right|^p dt dr \\ &\leq \int_c^d \int_a^b \left| \frac{1}{4hl} \int_{r-l}^{r+l} \int_{t-h}^{t+h} |y(t,r) - y(u,v)| dudv \right|^p dt dr \end{aligned}$$

olur ve böylece

$$\|y - y_{h,l}\|_p < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.1.5)$$

yazılabilir. Son olarak 2.15. Teorem kullanılırsa

$$\|x_{h,l} - y_{h,l}\|_p \leq \|x - y\|_p < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.1.6)$$

olur. Dolayısıyla (4.1.4), (4.1.5), (4.1.6) ifadelerinden yukarıda tanımlanan $h > 0, l > 0$ sayıları için

$$\begin{aligned} \|x - x_{h,l}\|_p &= \|x - y + y - y_{h,l} + y_{h,l} - x_{h,l}\|_p \\ &\leq \|x - y\|_p + \|x_{h,l} - y_{h,l}\|_p + \|y_{h,l} - y\|_p \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir.

4.1.9. Teorem: f fonksiyonu $L_p(A)$ uzayı üzerinde tanımlı, sürekli, reel değerli lineer fonksiyonel ve D kümesi de $L_p(A)$ uzayının kompakt bir altkümesi olsun. Bu takdirde S kümesi 4.1.6. Önerme’de tanımlanan küme olmak üzere her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in D$ için

$$|f(x) - s(x)| < \varepsilon \quad (4.1.7)$$

olacak şekilde bir $s \in S$ vardır.

İspat: Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Herhangi bir $\delta > 0$ sayısı ve her $x \in D$ için 4.1.8.Önerme' den $\|x - x_{h,l}\|_p < \delta$ olacak şekilde $h > 0, l > 0$ sayıları vardır. f fonksiyonunun D kümesi üzerinde düzgün sürekli olması kullanılarak

$$|f(x) - f(x_{h,l})| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.1.8)$$

olacak şekilde $h > 0, l > 0$ seçilmiş olsun. f fonksiyonu $L_p(A)$ uzayı üzerinde sürekli bir lineer fonksiyonel olduğundan 2.7.Teorem' e göre $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$f(x_{h,l}) = \int_c^d \int_a^b k(t, r) x_{h,l}(t, r) dt dr \quad (4.1.9)$$

olacak şekilde $k \in L_q(A)$ vardır. 4.1.5.Sonuçtan her $x \in D$ için

$$M = \sup_{x \in D} \left(\sup_{\substack{t \in [a, b] \\ r \in [c, d]}} |x_{h,l}(t, r)| \right) \text{ sayısı sonludur. } k \text{ fonksiyoneli integrallenebilir olduğundan}$$

$$M \int_c^d \int_a^b |k(t, r) - g(t, r)| dt dr < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.1.10)$$

olacak şekilde A kümesi üzerinde tanımlı g basit fonksiyonu vardır. (4.1.8)

(4.1.9), (4.1.10) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \int_c^d \int_a^b g(t, r) x_{h,l}(t, r) dt dr \right| &\leq |f(x) - f(x_{h,l})| + \left| f(x_{h,l}) - \int_c^d \int_a^b g(t, r) x_{h,l}(t, r) dt dr \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \left| \int_c^d \int_a^b (k(t, r) - g(t, r)) x_{h,l}(t, r) dt dr \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + M \int_c^d \int_a^b |k(t, r) - g(t, r)| dt dr \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\left| f(x) - \int_c^d \int_a^b g(t, r) x_{h,l}(t, r) dt dr \right| < \frac{2\varepsilon}{3} \quad (4.1.11)$$

bulunur.

Her $x \in D$ için $G(x) = \int_c^d \int_a^b g(t, r) x_{h,l}(t, r) dt dr$ şeklinde tanımlanan dönüşümün

Lipschitz koşulunu sağladığı 4.1.7. Önerme’ de gösterildi. Şimdi S deki fonksiyonların, 2.17.Teorem’ de verilen $\mathfrak{B}$ ailesindeki elemanların koşullarını sağladığı gösterilsin. Bunun için $\delta > 0$ sayısı verilmiş olsun. Yine $[a, b]$ ve $[c, d]$

kapalı aralıklarının düzgün parçalanmaları $\gamma_i = a + i \frac{b-a}{n}, 1 \leq i \leq n$, ve

$\beta_j = c + j \frac{d-c}{m}, 1 \leq j \leq m$ sayıları yardımıyla oluşturulmuş olsun. $g_{x_{h,l}}$ fonksiyonu

A kümesi üzerinde sınırlı olup, parçalı olarak sürekli olduğundan her $n \geq n_1(x)$ ve $m \geq m_1(x)$ için

$$\left| \int_c^d \int_a^b g(t, r) x_{h,l}(t, r) dt dr - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n g(\gamma_i, \beta_j) x_{h,l}(\gamma_i, \beta_j) \frac{(b-a)(d-c)}{mn} \right| < \delta \quad (4.1.12)$$

olacak şekilde $n_1(x), m_1(x) \in \mathbb{N}$ sayıları vardır. D kümesinin herhangi bir sonlu $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ alt kümesi verildiğinde $1 \leq k \leq r$ için $n = \max_{1 \leq k \leq r} (n_1(x_k))$, $m = \max_{1 \leq k \leq r} (m_1(x_k))$

ve $c_{i,j} = \frac{(b-a)(d-c)}{mn} g(\gamma_i, \beta_j)$ şeklinde tanımlanırsa

$$\left| G(x_k) - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_{i,j} x_{k,h,l}(\gamma_i, \beta_j) \right| < \delta \quad (4.1.13)$$

yazılır. O halde 2.17.Teoreme göre her $x \in D$ için

$$|G(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.1.14)$$

olacak şekilde $s \in S$ vardır. (4.1.11) ve (4.1.14) ifadeleri kullanılırsa

$$|f(x) - s(x)| \leq |f(x) - G(x)| + |s(x) - G(x)| < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise istenendir.

4.2. $L_p([a, b])$, $1 \leq p < \infty$ Uzayı Üzerindeki Sürekli Lineer Fonksiyonellere Riemann-Stieltjes Anlamında Yaklaşım

Bu kesimde 2.13.Tanım' da ifade edilen Steklov fonksiyonu Riemann-Stieltjes integrali kullanılarak tanımlanacaktır.

4.2.1.Tanım: $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton artan bir fonksiyon olsun. $[a, b]$ kapalı aralığı dışında sıfır değeri alan ve p . dereceden mutlak integrallenebilen herhangi bir $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aracılığıyla.

$$x_h(t) = \frac{1}{(\alpha(t+h) - \alpha(t-h))} \int_{t-h}^{t+h} x(r) d\alpha(r) \quad (4.2.1)$$

şeklinde tanımlanan $x_h(t)$ fonksiyonuna Riemann-Stieltjes anlamında Steklov fonksiyonu denir.

Ω_p^α kümesi $L_p([a, b])$ uzayının aşağıdaki koşulları sağlayan bir alt uzayı olsun:

- 1) Herhangi $x, y \in \Omega_p^\alpha$ için $\|(x+y)_h\|_p \leq \|x+y\|_p, \forall h > 0$,
- 2) Herhangi $x \in \Omega_p^\alpha$ için $x(\mathbb{R} - [a, b]) = \{0\}$.

4.2.2.Önerme: α fonksiyonu monoton artan bir doğru fonksiyonu olmak üzere $x_h(t)$ fonksiyonu sınırlıdır ve süreklidir.

İspat: Herhangi bir $h > 0$ verilsin. Her $x \in L_p([a, b])$ için $\|x\|_p \leq M$ olacak şekilde en az bir $M > 0$ vardır. $\alpha(r) = mr + n$ olmak üzere Hölder eşitsizliği kullanılırsa, her $t \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} |x_h(t)| &= \left| \frac{1}{(\alpha(t+h) - \alpha(t-h))} \int_{t-h}^{t+h} x(r) d\alpha(r) \right| \\ &\leq \frac{1}{(2mh)} \int_{t-h}^{t+h} |x(r)| d\alpha(r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2mh} \left(\int_{t-h}^{t+h} |x(r)|^p d\alpha(r) \right)^{\frac{1}{p}} (\alpha(t+h) - \alpha(t-h))^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{1}{2mh} \left(\int_{t-h}^{t+h} |x(r)|^p d\alpha(r) \right)^{\frac{1}{p}} (2mh)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\frac{1}{2mh} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |x(r)|^p d\alpha(r) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\frac{1}{2mh} \right)^{\frac{1}{p}} M
\end{aligned}$$

elde edilir.

$t_0 \in [a, b]$ herhangi bir nokta olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $h > 0$

için $\delta = \left(\frac{\varepsilon m^{\frac{1}{p}} h}{M} \right)^q$ seçilirse $|t - t_0| < \delta$ olduğunda

$$\begin{aligned}
|x_h(t) - x_h(t_0)| &= \left| \frac{1}{\alpha(t+h) - \alpha(t-h)} \int_{t-h}^{t+h} x(r) d\alpha(r) - \frac{1}{\alpha(t_0+h) - \alpha(t_0-h)} \int_{t_0-h}^{t_0+h} x(r) d\alpha(r) \right| \\
&= \frac{1}{2mh} \left| \int_{t-h}^{t_0-h} x(r) d\alpha(r) + \int_{t_0-h}^{t+h} x(r) d\alpha(r) - \int_{t_0-h}^{t+h} x(r) d\alpha(r) - \int_{t+h}^{t_0+h} x(r) d\alpha(r) \right| \\
&\leq \frac{1}{2mh} \left(\left| \int_{t-h}^{t_0-h} x(r) d\alpha(r) \right| + \left| \int_{t+h}^{t_0+h} x(r) d\alpha(r) \right| \right) \\
&\leq \frac{1}{2mh} \left(\left| \int_{t-h}^{t_0-h} |x(r)| d\alpha(r) \right| + \left| \int_{t+h}^{t_0+h} |x(r)| d\alpha(r) \right| \right) \\
&\leq \frac{1}{2mh} \left(\left(\int_{t-h}^{t_0-h} |x(r)|^p d\alpha(r) \right)^{\frac{1}{p}} (|\alpha(t_0-h) - \alpha(t-h)|)^{\frac{1}{q}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2mh} \left(\left(\int_{t+h}^{t_0+h} |x(r)|^p d\alpha(r) \right)^{\frac{1}{p}} (|\alpha(t_0+h) - \alpha(t+h)|)^{\frac{1}{q}} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2mh} \left(\left(\int_{t-h}^{t_0-h} |x(r)|^p d\alpha(r) \right)^{\frac{1}{p}} (m|t - t_0|)^{\frac{1}{q}} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2mh} \left| \left(\int_{t+h}^{t_0+h} |x(r)|^p d\alpha(r) \right)^{\frac{1}{p}} (m|t-t_0|)^{\frac{1}{q}} \right| \\
& \leq \frac{\|x\|_p |t-t_0|^{\frac{1}{q}}}{\frac{1}{m^p h}} \\
& \leq \frac{M |t-t_0|^{\frac{1}{q}}}{\frac{1}{m^p h}} \\
& < \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise isteneni verir.

4.2.3.Önerme: Herhangi bir $\varepsilon > 0$ verilsin. $V \subset \Omega_p^\alpha$ kompakt bir alt küme olmak üzere

her $x \in V \subset \Omega_p^\alpha$ için

$$\|x - x_h\|_p < \varepsilon \quad (4.2.2)$$

olacak şekilde bir $h > 0$ sayısı vardır.

İspat: Her $x \in V \subset \Omega_p^\alpha$ için verilen herhangi $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\|x - y\|_p < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.2.3)$$

olacak şekilde en az bir $y \in C([a, b])$ vardır. Ayrıca $y \in C([a, b])$ olduğundan

yukarıda verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $|t - r| < h$ olduğunda

$$|y(t) - y(r)| < \frac{\varepsilon}{3(\alpha(b) - \alpha(a))^{\frac{1}{p}}} \text{ olacak şekilde } h > 0 \text{ sayısı vardır. Aynı } y \in C([a, b])$$

için

$$\begin{aligned}
\|y - y_h\|_p^p &= \int_a^b |y(t) - y_h(t)|^p d\alpha(t) \\
&= \int_a^b \left| \frac{1}{\alpha(t+h) - \alpha(t-h)} \int_{t-h}^{t+h} (y(t) - y(r)) d\alpha(r) \right|^p d\alpha(t) \\
&\leq \int_a^b \left| \frac{1}{\alpha(t+h) - \alpha(t-h)} \int_{t-h}^{t+h} |y(t) - y(r)| d\alpha(r) \right|^p d\alpha(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& < \int_a^b \left| \frac{1}{\alpha(t+h) - \alpha(t-h)} \int_{t-h}^{t+h} \left(\frac{\varepsilon}{3(\alpha(b) - \alpha(a))^{\frac{1}{p}}} \right) d\alpha(r) \right|^p d\alpha(t) \\
& = \int_a^b \frac{\varepsilon^p}{3^p (\alpha(b) - \alpha(a))} d\alpha(t) \\
& = \frac{\varepsilon^p}{3^p}
\end{aligned}$$

olur ve böylece

$$\|y - y_h\|_p < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.2.4)$$

bulunur. Ayrıca Ω_p^α uzayının birinci özelliği kullanılırsa

$$\|x_h - y_h\|_p = \|(x - y)_h\| \leq \|x - y\|_p < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.2.5)$$

olur. Dolayısıyla (4.2.3), (4.2.4), (4.2.5) ifadelerinden yukarıda tanımlanan $h > 0$ sayısı için

$$\begin{aligned}
\|x - x_h\| &= \|x + y - y + y_h - y_h - x_h\| \\
&\leq \|x - y\| + \|y - y_h\| + \|x_h - y_h\| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.2.4.Önerme : $V \subset L_p([a, b])$ kompakt bir altküme ve $\alpha(t) = mt + n$ monoton artan bir doğru fonksiyonu olsun. Herhangi bir $h > 0$ sayısı için $\phi(x) = x_h$ şeklinde tanımlanan $\phi: V \rightarrow C([a, b])$ dönüşümü süreklidir.

İspat : $x_0 \in V$ keyfi fakat sabit olarak alınan bir nokta olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$

sayısına karşılık $\delta = \varepsilon (2mh)^{\frac{1}{p}}$ seçilirse $\|x - x_0\|_p < \delta$ ve $x \in V$ olduğunda Hölder

eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|\phi(x) - \phi(x_0)\|_\infty &= \|x_h - x_{0h}\|_\infty \\
&= \sup_{t \in [a, b]} |x_h(t) - x_{0h}(t)|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{t \in [a, b]} \left| \frac{1}{\alpha(t+h) - \alpha(t-h)} \int_{t-h}^{t+h} (x(r) - x_0(r)) d\alpha(r) \right| \\
&\leq \sup_{t \in [a, b]} \left(\frac{1}{2mh} \int_{t-h}^{t+h} |x(r) - x_0(r)| d\alpha(r) \right) \\
&\leq \sup_{t \in [a, b]} \left(\frac{1}{2mh} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{t-h}^{t+h} |x(r) - x_0(r)|^p d\alpha(r) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\frac{1}{2mh} \right)^{\frac{1}{p}} \|x - x_0\|_p \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise istenendir.

4.2.5.Önerme: $\phi(V) = \{x_h; x \in V\} \subset C([a, b])$ alt küme olmak üzere $\psi(x_h) = \|x_h\|_\infty$ şeklinde tanımlanan her bir $\psi: \phi(V) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü süreklidir.

İspat: $x_{0h} \in \phi(V)$ keyfi fakat sabit olarak alınan bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\delta = \varepsilon$ seçilirse $\|x_h - x_{0h}\|_\infty < \delta$ olduğunda

$$|\|x_h\|_\infty - \|x_{0h}\|_\infty| \leq \|x_h - x_{0h}\|_\infty < \varepsilon$$

elde edilir.

4.2.6.Sonuç : ϕ ve ψ dönüşümleri herhangi bir $h > 0$ sayısı için sırası ile 4.2.4.Önerme ve 4.2.5.Önerme' de tanımlanan dönüşümler olmak üzere $\psi \circ \phi: V \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü süreklidir. Dolayısıyla supremum ve infimum değerini V kompakt kümesi üzerinde alır. Böylece $M = \sup_{x \in V} \sup_{t \in [a, b]} |x_h(t)|$ sayısı sonludur.

4.2.7.Önerme : $[a, b]$ kapalı aralığının düzgün parçalanışı $\beta_j = a + j \frac{(b-a)}{n}, 1 \leq j \leq n$

sayıları yardımıyla oluşturulmuş olsun. Verilen $n \in \mathbb{N}$ ve $h > 0$ sayıları için

$$S_{n,h} = \left\{ s: L_p \rightarrow \mathbb{R}; s(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_h(\beta_j), c_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq n \right\}$$

olmak üzere $S = \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ h > 0}} S_{n,h}$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde S kümesinin elemanları

Lipshitz koşulunu sağlar.

İspat: Herhangi bir $s \in S$ ve herhangi $x, y \in L_p([a, b])$ için

$$\begin{aligned}
 k &= \left(\max_{1 \leq j \leq n} |c_j| \right) \sum_{j=1}^n \frac{1}{(\alpha(\beta_j + h) - \alpha(\beta_j - h))^{\frac{1}{p}}} \quad \text{seçilirse} \\
 |s(x) - s(y)| &= \left| \sum_{j=1}^n c_j (x_h(\beta_j) - y_h(\beta_j)) \right| \\
 &\leq \sum_{j=1}^n |c_j| \left| \frac{1}{(\alpha(\beta_j + h) - \alpha(\beta_j - h))} \int_{\beta_j - h}^{\beta_j + h} (x(r) - y(r)) d\alpha(r) \right| \\
 &\leq \sum_{j=1}^n |c_j| \frac{1}{(\alpha(\beta_j + h) - \alpha(\beta_j - h))} \int_{\beta_j - h}^{\beta_j + h} |x(r) - y(r)| d\alpha(r) \\
 &\leq \sum_{j=1}^n |c_j| \frac{1}{(\alpha(\beta_j + h) - \alpha(\beta_j - h))^{\frac{1}{p}}} \left(\int_{\beta_j - h}^{\beta_j + h} |x(r) - y(r)|^p d\alpha(r) \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \sum_{j=1}^n |c_j| \frac{1}{(\alpha(\beta_j + h) - \alpha(\beta_j - h))^{\frac{1}{p}}} \left(\int_a^b |x(r) - y(r)|^p d\alpha(r) \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} |c_j| \right) \sum_{j=1}^n \frac{1}{(\alpha(\beta_j + h) - \alpha(\beta_j - h))^{\frac{1}{p}}} \|x - y\|_p \\
 &= k \|x - y\|_p
 \end{aligned}$$

elde edilir.

4.2.8.Önerme: $V \subseteq \Omega_p^\alpha$ kompakt alt küme ve $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir adım fonksiyonu olmak üzere herhangi $h > 0$ sayısı için

$$G(x) = \int_a^b g(r) x_h(r) d\alpha(r) \quad (4.2.6)$$

ile tanımlı $G : V \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü Lipschitz koşulunu sağlar.

İspat: g adım fonksiyonu olduğundan her $t \in [a, b]$ için $|g(t)| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. Eğer $\gamma = M (\alpha(b) - \alpha(a))^{\frac{1}{q}}$ seçilirse, o zaman her $x, y \in V$ için

$$\begin{aligned}
 \left| \int_a^b g(r) x_h(r) d\alpha(r) - \int_a^b g(r) y_h(r) d\alpha(r) \right| &= \left| \int_a^b g(r) (x_h(r) - y_h(r)) d\alpha(r) \right| \\
 &\leq \int_a^b |g(r)| |x_h(r) - y_h(r)| d\alpha(r) \\
 &\leq M \int_a^b |x_h(r) - y_h(r)| d\alpha(r) \\
 &\leq M \left(\int_a^b |x_h(r) - y_h(r)|^p d\alpha(r) \right)^{\frac{1}{p}} (\alpha(b) - \alpha(a))^{\frac{1}{q}} \\
 &= M \|x_h - y_h\|_p (\alpha(b) - \alpha(a))^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq \gamma \|x - y\|_p
 \end{aligned}$$

elde edilir.

4.2.9. Teorem: f fonksiyonu $L_p([a, b])$ uzayı üzerinde tanımlı sürekli, reel değerli lineer fonksiyonel ve V kümesi de Ω_p^α alt uzayının kompakt bir alt kümesi olsun. Bu takdirde α monoton artan bir doğru fonksiyon ve S kümesinde 4.2.7.Önerme’de tanımlanan küme olmak üzere her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in V$ için

$$|f(x) - s(x)| < \varepsilon \quad (4.2.7)$$

olacak şekilde bir $s \in S$ vardır.

İspat: Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Herhangi bir $\delta > 0$ sayısı ve her $x \in V$ için 4.2.3.Önerme’ den $\|x - x_h\|_p < \delta$ olacak şekilde $h > 0$ sayısı vardır. f fonksiyonunun V kümesi üzerinde düzgün sürekli olması kullanılarak

$$|f(x) - f(x_h)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.2.8)$$

olacak şekilde $h > 0$ seçilmiş olsun. f fonksiyonu $L_p([a, b])$ uzayı üzerinde sürekli bir lineer fonksiyonel olduğundan 2.7.Teorem'e göre $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$f(x_h) = \int_a^b k(r)x_h(r)d\alpha(r) \quad (4.2.9)$$

olacak şekilde $k \in L_q([a, b])$ vardır. 4.2.6.Sonuç'tan her $x \in V$ için

$M = \sup_{x \in C} \sup_{t \in [a, b]} |x_h(t)|$ sayısı sonludur. k fonksiyoneli integrallenebilir olduğundan

$$M \int_a^b |k(r) - g(r)| d\alpha(r) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.2.10)$$

olacak şekilde $[a, b]$ üzerinde tanımlı bir g adım fonksiyonu vardır. (4.2.8), (4.2.9), (4.2.10) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \int_a^b g(r)x_h(r)d\alpha(r) \right| &= \left| f(x) + \int_a^b k(r)x_h(r)d\alpha(r) - \int_a^b k(r)x_h(r)d\alpha(r) - \int_a^b g(r)x_h(r)d\alpha(r) \right| \\ &\leq \left| f(x) - \int_a^b k(r)x_h(r)d\alpha(r) \right| + \left| \int_a^b k(r)x_h(r)d\alpha(r) - \int_a^b g(r)x_h(r)d\alpha(r) \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \left| \int_a^b (k(r) - g(r))x_h(r)d\alpha(r) \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + M \int_a^b |k(r) - g(r)| d\alpha(r) \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\left| f(x) - \int_a^b g(r)x_h(r)d\alpha(r) \right| < \frac{2\varepsilon}{3} \quad (4.2.11)$$

bulunur.

Her $x \in V$ için $G(x) = \int_a^b g(r)x_h(r)d\alpha(r)$ şeklinde tanımlanan dönüşümün

Lipschitz koşulunu sağladığı 4.2.8.Önerme'de gösterildi. Şimdi S 'deki fonksiyonellerin, 2.17.Teorem'de verilen $\mathfrak{B}$ ailesindeki elemanların koşullarını

sağladığı gösterilsin. Bunun için $\delta > 0$ sayısı verilmiş olsun. Yine $[a, b]$ kapalı aralığının bir parçalanması $\beta_j = a + j \frac{b-a}{n}, 1 \leq j \leq n$ sayıları yardımıyla oluşturulmuş olsun. $\alpha(t)$ fonksiyonu monoton artan bir doğru fonksiyon olduğundan gx_h fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde sınırlı ve parçalı sürekli olur. O zaman her $n \geq n_0(x)$ olduğunda

$$\left| \int_a^b g(r)x_h(r)d\alpha(r) - \sum_{j=1}^n g(\beta_j)x_h(\beta_j)(\alpha(\beta_{j+1}) - \alpha(\beta_j)) \right| < \delta \quad (4.2.12)$$

olacak şekilde $n_0(x) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. V kümesinin elemanlarından oluşan herhangi bir sonlu $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ alt kümesi verildiğinde $1 \leq i \leq m$ için $n = \max_{1 \leq i \leq m} \{n_0(x_i)\}$ ve

$c_j = g(\beta_j)(\alpha(\beta_{j+1}) - \alpha(\beta_j))$ şeklinde tanımlanırsa

$$\left| G(x_i) - \sum_{j=1}^n c_j x_{ih}(\beta_j) \right| < \delta \quad (4.2.13)$$

yazılır. O halde 2.17. Teorem'e göre her $x \in V$ için

$$|G(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.2.14)$$

olacak şekilde $s \in S$ vardır. (4.2.11) ve (4.2.14) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} |f(x) - s(x)| &= |f(x) - G(x) + G(x) - s(x)| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise istenendir.

5. TARTIŞMA

Bu çalışmanın birinci bölümünde Sandberg ve Dingankar (1995) çalışmasında tek değişkenli fonksiyonlar için tanımlanan Steklov fonksiyonu iki değişkenli fonksiyonlar aracılığı ile yeniden tanımlandı ve bazı temel özellikleri incelendi. Yine aynı çalışmada tek değişkenli fonksiyonlar için verilen özellikler iki değişkenli fonksiyonlar için değerlendirildi. Bulgular kısmının ikinci bölümünde ise tek değişkenli fonksiyonlar için Riemann-Stieltjes integrali aracılığıyla Steklov fonksiyonu tanımlanıp yine aynı çalışmadaki özellikler bu fonksiyonlar için incelendi.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın ilk bölümünde iki değişkenli fonksiyonlar için incelenen özellikler n – değişkenli fonksiyonlar için incelenebilir. İkinci bölümde tek değişkenli fonksiyonlar için Riemann-Stieltjes integrali yardımıyla tanımlanan Steklov fonksiyonu çok değişkenli fonksiyonlar için tekrar tanımlanabilir ve yapılan kısıtlamalar geliştirilerek daha genel durumlar için incelenebilir. Ayrıca α monoton artan bir doğru fonksiyonu olduğunda Steklov fonksiyonunun incelenen bazı özellikleri α fonksiyonunun doğru fonksiyonu olmadığı durumlar için geliştirilebilir.

7. KAYNAKLAR

- Bartle, R., G.,1995.** *The Elements of Integration and Lebesgue Meseure.* A Wiley-Interscience Publication,179s,New York
- Chen, T., Chen, H.,1993.** *Approximations of Continuous Functional by Neural Networks with Application to Dynamic Systems.* IEEE Transactions on Neural Networks,Vol.4,No.6,910-918
- Krasnosel'skii, M., A., Rutickii, Y., B.,1961.** *Convex Functions and Orlicz Spaces.* P. Noordhoff Ltd., 249s, Groningen
- Kufner, A., John, O., Fucik, S.,1977.** *Function Spaces.* Noordhoff International Publishing, 453s, Leyden
- Natanson, I., P., 1964.** *Theory of Functions of Real Variable.* Frederick Ungar Publishing Co.,277s,New York
- Rudin, W., 1987.** *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill Book Co.,416s,New York
- Sandberg, I., W., 1994.** *General Structures for Classification.* IEEE Transactions on Circuits and Systems 1:Fundamental Theory and Applications,Vol.41,No.5, 372-376
- Sandberg, I., W., Dingankar, A., 1995.** *On Approximation of Linear Functionals on L_p Spaces.* IEEE Transactions on Circuits and Systems 1:Fundamental Theory and Applications,Vol.42,No.7,402-404

8. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Oğuz OĞUR
Doğum Yeri : Samandağ/HATAY
Doğum tarihi : 11.06.1985
Medeni Hali : Bekar
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Samandağ Lisesi/1999-2002
Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü/2003-2007

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : Giresun Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik
Bölümü/2009-

İletişim Bilgileri

Adres : Giresun Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik
Bölümü
Tel : 0454 310 10 00-200
E-mail : oguz.ogur@giresun.edu.tr