

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**YUVARLANAN KÜRESEL ROBOT
MODELLENMESİ VE KONTROLÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Erkan KAYACAN**

Anabilim Dalı : Makina Mühendisliği

Programı : Sistem Dinamiği ve Kontrol

HAZİRAN 2010

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**YUVARLANAN KÜRESEL ROBOT
MODELLENMESİ VE KONTROLÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Erkan KAYACAN
(503081606)**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 7 Mayıs 2010

Tezin Savunulduğu Tarih : 2 Haziran 2010

**Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Zeki Y. BAYRAKTAROĞLU(İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Şeniz ERTUĞRUL (İTÜ)
Yrd. Doç. Dr. Levent OVACIK (İTÜ)**

HAZİRAN 2010

Babama,

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen ve beni her konuda destekleyen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Zeki Yağız BAYRAKTAROĞLU'na teşekkür ederim. Gerek lisans eğitimim sırasında gerçekleştirdiğimiz bitirme projesi kapsamında gerek yüksek lisans eğitimim sırasında gerçekleştirdiğimiz yüksek lisans tezi kapsamında kendisinden pek çok şey öğrendim. Çalışmalarım sırasında bana gerekli çalışma ortamını sağlayan İTÜ Makina mühendisliği bölümüne, değerli hocalarıma ve meslektaşlarıma teşekkürlerimi sunarım. Maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen ve bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Haziran 2010

Erkan KAYACAN

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
KISALTMALAR.....	ix
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xi
ŞEKİL LİSTESİ.....	xiii
SEMBOL LİSTESİ.....	xvii
ÖZET.....	xix
SUMMARY.....	xxi
1.GİRİŞ.....	1
2. KÜRESEL YUVARLANMA HAREKETİNİN MODELLENMESİ.....	7
2.1 Küresel Yuvarlanma.....	8
2.1.1 Kinematik Model.....	8
2.1.2 Dinamik Model.....	8
2.1.2.1 Non-Holonomik Kısıtlar	8
2.1.2.2 Euler-Lagrange Denklemleri.....	9
2.2 Küresel Robot Mekanizmaları.....	11
2.2.1 Tek Serbestlik Dereceli Sarkaç ile Doğrusal Yörüngede Yuvarlanma.....	11
2.2.1.1 Kinematik Model.....	11
2.2.1.2 Euler-Lagrange Denklemleri.....	13
2.2.2 Çift Serbestlik Dereceli Sarkaç ile Eğrisel Yörüngede Hareket.....	15
2.2.2.1 Kinematik Model.....	15
2.2.2.2 Euler-Lagrange Denklemleri.....	18
2.3 Ayrıştırılmış Dinamik ile Eğrisel Yörüngede Hareket.....	18
2.3.1 X Eksen Üzerindeki Hareket.....	19
2.3.1.1 Kinematik Model.....	20
2.3.1.2 Euler-Lagrange Denklemleri.....	21
2.3.2 Eğrisel Yörüngede Yuvarlanma.....	23
2.4 Hareket Analizi.....	25
2.4.1 Dönme Yarıçapı Tayini.....	25
2.4.2 Eğik Düzlemde Hareket.....	28
2.4.3 Tırmanma Açısı Tayini.....	30
2.4.4 Dönme Yarıçapı Tayini Engel Geçme Yükseklik Tayini.....	30
3. KONTROL.....	33
3.1 PID Kontrolörler.....	33
3.1.1 PID Tipi Kontrolörlerin Sınırları.....	35
3.2 Bulanık Mantık.....	35
3.2.1 Bulanık Mantığın Temel Kavramları.....	36
3.3 Bulanık Kontrol.....	37
3.3.1 Bulanıklaştırma.....	38

3.3.2 Kural Tabanı.....	38
3.3.3 Davranış Tanımlama.....	38
3.3.4 Netleştirme.....	38
3.3.5 Bulanık Kontrolün Avantaj ve Dezavantajları.....	39
3.4 Gri Sistem Kuramı.....	39
3.4.1 GM(m,n) Model.....	41
3.4.2 GM(1,1) Model.....	41
3.4.3 Yuvarlanan GM(1,1) Model.....	43
4. BENZETİMLER.....	45
4.1 Kontrolör Tasarımı.....	46
4.2 Bulanık Kontrolör için Kural Tablosu ve Üyelik Fonksiyonları.....	47
4.3 Gri Öngörüsöl Kontrolör.....	48
4.4 Tek Serbestlik Dereceli Sarkaç ile Doğrusal Yörüngede Hareket Kontrolü.....	49
4.4.1 Doğrusal Yörüngede Sabit Hızla Hareket.....	49
4.5 Çift Serbestlik Dereceli Sarkaç ile Eğrisel Yörüngede Hareket Kontrolü.....	59
4.5.1 Dairesel Yörünge Üzerinde Konum Kontrolü.....	59
5. SONUÇLAR.....	69
KAYNAKLAR.....	71
EKLER.....	77

KISALTMALAR

HTK	: Hesaplanmış Tork Kontrol
BHTK	: Bulanık Hesaplanmış Tork Kontrol
GBHTK	: Gri Bulanık Hesaplanmış Tork Kontrol

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1 : Orantısal, İntegral ve Türevsel Kazançların Etkisi.	34
Çizelge 4.1 : Genel Bir Bulanık Kontrolör Kural Tablosu.....	47

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1	: Sphericle [1,3].....	2
Şekil 1.2	: Halme'nin Tasarımı [4]	2
Şekil 1.3	: Javadi'nin Tasarımı [5,6]	3
Şekil 1.4	: Joshi'nin Tasarımı [8,9]	3
Şekil 1.5	: Bhattacharya'nın Tasarımı [10]	4
Şekil 1.6	: Ming'in Tasarımı [14]	4
Şekil 2.1	: Eksen Takımları.....	7
Şekil 2.2	: Tek Serbestlik Derecesine Sahip Sarkaç ile Modellenen Sistemin Serbestlik Dereceleri.....	11
Şekil 2.3	: Çift Serbestlik Derecesine Sahip Sarkaç ile Modellenen Sistemin Serbestlik Dereceleri.....	16
Şekil 2.4	: Sistemin Serbestlik Dereceleri.....	19
Şekil 2.5	: Bir Nokta Etrafında Küresel Robotun Dönüşünün Modellenmesi....	26
Şekil 2.6	: Bir Nokta Etrafında Dönen Küresel Robotun Üzerine Etkiyen Kuvvetler.....	26
Şekil 2.7	: Sarkacın Serbestlik Derecesine Karşılık Dönme Yarıçapı.....	28
Şekil 2.8	: Küresel Robotun Eğik Düzlemde Serbestlik Dereceleri.....	29
Şekil 2.9	: Küresel Robotun Engel ile Karşılaşması.....	31
Şekil 3.1	: PID Tipi Kontrolörün Blok Diagramı.....	33
Şekil 3.2	: Bir Keskin Küme için Üyelik Fonksiyonu.....	37
Şekil 3.3	: Bir Bulanık Küme için Üyelik Fonksiyonu.....	37
Şekil 3.4	: Bulanık Kontrolör Blok Diagramı.....	38
Şekil 4.1	: Nicemleyici Gösterimi için Blok Diagramı.....	45
Şekil 4.2	: Hesaplanmış Tork Kontrol Methodu İçin Kontrolörün Genel Yapısal Diagramı.....	46
Şekil 4.3	: e , $\dot{e}$ ve u 'nın Üyelik İşlevleri.....	47
Şekil 4.4	: Bulanık Hesaplanmış Tork Kontrol Methodu için Kontrolörün Genel Yapısal Diagramı.....	48
Şekil 4.5	: Gri Bulanık Hesaplanmış Tork Kontrol Methodu için Kontrolörün Genel Yapısal Diagramı.....	48
Şekil 4.6	: Referans θ Açısal Konum.....	49
Şekil 4.7	: Referans θ Açısal Hız.....	50
Şekil 4.8	: Referans θ Açısal İvme.....	50
Şekil 4.9	: HTK Methodu İçin Sistem Cevabı - K_v Katsayısını Belirleme.....	51
Şekil 4.10	: $K_p = 0.8$, $K_v = 1$ Katsayı Değerleri İçin Giriş Momenti.....	52
Şekil 4.11	: $K_p = 0.8$, $K_v = 1,25$ Katsayı Değerleri İçin Giriş Momenti.....	52
Şekil 4.12	: HTK Methodu İçin Sistem Cevabı - K_p Katsayısını Belirleme.....	53
Şekil 4.13	: $K_p = 1$, $K_v = 1$ Katsayı Değerleri İçin Giriş Momenti.....	54

Şekil 4.14 : $K_p = 1.5$, $K_v = 1$ Katsayı Değerleri İçin Giriş Momenti.....	54
Şekil 4.15 : Bulanık HTK Methodu İçin Sistem Cevabı.....	55
Şekil 4.16 : Bulanık HTK Methodu İçin Giriş Momenti.....	56
Şekil 4.17 : Gri Öngörüsül HTK Methodu İçin Sistem Cevabı.....	57
Şekil 4.18 : Gri Öngörüsül HTK Methodu İçin Giriş Momenti.....	57
Şekil 4.19 : Gri Öngörüsül Bulanık HTK Methodu İçin Sistem Cevabı.....	58
Şekil 4.20 : Gri Öngörüsül Bulanık HTK Methodu İçin Giriş Momenti.....	58
Şekil 4.21 : Referans θ Açısıl Konum.....	59
Şekil 4.22 : Referans θ Açısıl Hız.....	60
Şekil 4.23 : Referans θ Açısıl İvme.....	60
Şekil 4.24 : Referans ϕ Açısıl Konum.....	61
Şekil 4.25 : Referans ϕ Açısıl Hız.....	61
Şekil 4.26 : Referans ϕ Açısıl İvme.....	62
Şekil 4.27 : HTK Methodu İçin Sistem Cevabı – Ayırıklaştırma Zamanı: 0.001 Saniye.....	63
Şekil 4.28 : HTK Methodu İçin Sistem Cevabı – Ayırıklaştırma Zamanı: 0.1 Saniye.....	63
Şekil 4.29 : HTK Methodu İçin Sistem Cevabı – Ayırıklaştırma Zamanı: 0.15 Saniye.....	64
Şekil 4.30 : BHTK Methodu İçin Sistem Cevabı – Ayırıklaştırma Zamanı: 0.001 Saniye.....	65
Şekil 4.31 : BHTK Methodu İçin Sistem Cevabı – Ayırıklaştırma Zamanı: 0.1 Saniye.....	65
Şekil 4.32 : BHTK Methodu İçin Sistem Cevabı – Ayırıklaştırma Zamanı: 0.15 Saniye.....	66
Şekil 4.33 : GBHTK Methodu İçin Sistem Cevabı – Ayırıklaştırma Zamanı: 0.001 Saniye.....	67
Şekil 4.34 : GBHTK Methodu İçin Sistem Cevabı – Ayırıklaştırma Zamanı: 0.1 Saniye.....	67
Şekil 4.35 : GBHTK Methodu İçin Sistem Cevabı – Ayırıklaştırma Zamanı: 0,15 Saniye.....	68
Şekil A.1 : Boş Küre Hareket Denklemlerinin Maple Paket Programında Elde Edilişi.....	78
Şekil A.2 : Tek Serbestlik Dereceli Sarkaç ile Hareketi Sağlanan Küresel Robotun Hareket Denklemlerinin Maple Paket Programında Elde Edilişi.....	82
Şekil A.3 : Çift Serbestlik Dereceli Sarkaç ile Hareketi Sağlanan Küresel Robotun Hareket Denklemlerinin Maple Paket Programında Elde Edilişi.....	84
Şekil B.1 : Sabit Hız Kontrolü İçin Simulink Blok Diagramı - Hesaplanmış Tork Kontrol Methodu.....	88
Şekil B.2 : Sabit Hız Kontrolü İçin Simulink Blok Diagramı - Bulanık Hesaplanmış Tork Kontrol Methodu.....	89
Şekil B.3 : Sabit Hız Kontrolü İçin Simulink Blok Diagramı - Gri Bulanık Hesaplanmış Tork Kontrol Methodu.....	90
Şekil B.4 : Dairesel Konum Kontrolü için Simulink Blok Diagramı - Hesaplanmış Tork Kontrol Methodu.....	91
Şekil B.5 : Dairesel Konum Kontrolü için Simulink Blok Diagramı - Bulanık Hesaplanmış Tork Kontrol Methodu.....	92

Şekil B.6 : Dairesel Konum Kontrolü için Simulink Blok Diagramı - Gri Bulanık Hesaplanmış Tork Kontrol Methodu.....	93
---	----

SEMBOL LİSTESİ

Rot	: Rotasyon matrisi
ϕ, θ, ψ	: Euler açıları
$\vec{\omega}_s$	: O-XYZ koordinat sistemine göre kürenin açısal hız vektörü
$\vec{v}_s$	: O-XYZ koordinat sistemine göre kürenin çizgisel hız vektörü
$\dot{x}, \dot{y}$	: Kürenin çizgisel hızları
ω_x	: Kürenin x eksenine etrafındaki açısal hızı
ω_y	: Kürenin y eksenine etrafındaki açısal hızı
E_k	: Kinetik enerji
E_p	: Potansiyel enerji
L	: Lagrange fonksiyonu
M_s	: Küresel kabuğun kütlesi
I_s	: Küresel kabuğun atalet momenti
μ_x, μ_y	: Lagrange çarpanları
Q_i	: Sistemi harekete geçirmek için uygulanacak giriş
$\vec{r}_p, \vec{r}_{p1}, \vec{r}_{p0}$	: Sarkacın kütle merkezinin, merkezi O , O_o ve O_1 olan eksen takımlarına göre konumu göre açısal hızı
$\vec{\omega}_p, \vec{\omega}_{p1}, \vec{\omega}_{p0}$	: Sarkacın kütle merkezinin, merkezi O , O_o ve O_1 olan eksen takımlarına göre konumu göre açısal hızı
$\vec{v}_p$	: Sarkacın kütle merkezinin, merkezi O , O_o ve O_1 olan eksen takımlarına göre konumu göre çizgisel hızı
R	: Küre yarıçapı
l	: Küre merkezi ile sarkacın merkezi arasındaki uzaklık
g	: Yerçekimi ivmesi
m_p	: Sarkacın kütlesi
I_p	: Sarkacın atalet momenti
r_{p-z}	: Sarkacın z eksenine üzerindeki konum bileşeni
α, β	: Sarkaca ait dönme açıları
c_α	: $\cos \alpha$
s_α	: $\sin \alpha$
$\mathcal{G}$	: Kürenin x eksenine etrafındaki yuvarlanma açısı
φ	: Kürenin y eksenine etrafındaki yuvarlanma açısı
τ_x	: X eksenine etrafındaki tork girişi
τ_y	: Y eksenine etrafındaki tork girişi
Ω	: Açısal dönme hızı

ω	: Dönem hareketi boyunca sistemin açısal hızı
F_{c1}	: Küreye etkiyen merkezkaç kuvveti
F_{c2}	: Sarkaca etkiyen merkezkaç kuvveti
F_f	: Sürtünme kuvveti
N	: Tepki kuvveti
e	: Dönme yarı çapı
$\vec{L}$	: Açısal momentum
γ	: Eğik düzlemin eğim açısı
h	: Engel yüksekliği

YUVARLANAN KÜRESEL ROBOT MODELLENMESİ VE KONTROLÜ

ÖZET

Bu tezde, yuvarlanarak hareket edebilecek küresel mobil robot modellenmesi ve kontrolü konu alınmıştır. Çalışma kapsamında çift serbestlik derecesine sahip sarkaç ile hareketi sağlanan yuvarlanan küresel robotun modellenmesi, hareket analizi ve dinamik benzetimlerle kontrolü gerçekleştirilmiştir. Yuvarlanan küresel robotu oluşturan sistem bileşenleri üzerindeki eksen takımlarının birbirlerine göre dönme hareketi yapması nedeniyle Euler açıları gibi ardışık dönme düzeni yaklaşımları kullanılarak kinematik model elde edilmiştir. Küresel yuvarlanma hareketi, nonlineer ve holonomik olmayan, oldukça karmaşık dinamik denklemlerle modellenebilmektedir. Dinamik modelin sistemin kontrolünde kullanılabilmesi için ayrıştırılmış dinamik yöntemi uygulanmıştır. Dönme yarıçapı tayini, eğik düzlemde hareket, tırmanma açısı tayini ve engel geçme yükseklik tayini gibi hareket analizleri gerçekleştirilmiştir.

Sistemin kontrolü için hesaplanmış tork kontrol, bulanık hesaplanmış tork kontrol ve gri bulanık hesaplanmış tork kontrol yöntemleri önerilmiştir. Gri öngörü kontrolü ve bulanık kontrol birbirlerinden farklı matematik temellere sahiptir. Bu iki kontrol yönteminin ortak noktası ise her ikisinin de sistemdeki belirsizliklere karşı çalışmasıdır. Önerilen gri bulanık hesaplanmış tork kontrol yöntemi sistemin kontrolünü kalıcı hal hatası olmaksızın sağlamaktadır. Gri öngörü kontrolünün en büyük avantajı PID kontrolörlere göre sistemi çok küçük bir aşım ile kontrol edebilmesidir. Tasarlanan kontrolörler dinamik model üzerinde dinamik benzetimler yoluyla uygulanmış ve performansları karşılaştırılmıştır.

MODELING AND CONTROL OF SPHERICAL ROLLING ROBOT

SUMMARY

This study deals with spherical rolling robot, a kind of mobile robot. Modeling, motion analysis and control of the spherical rolling robot driven through a pendulum with two degrees of freedom have been investigated. Since the reference frames attached to the rigid bodies rotate with respect to each other, the kinematic model has been obtained by using the Euler angles. Decoupled dynamic approach is applied in order to obtain simplified dynamics of the spherical rolling robot whose original dynamics is highly non-linear and non-holonomic. Analysis of uphill motion (climbing angle), motion over curvilinear trajectories (radius of curvature) and obstacle crossing have been achieved.

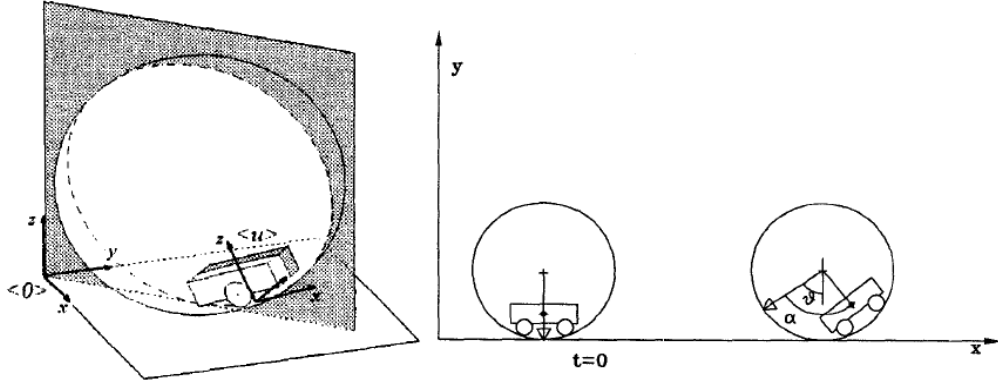
Various control approaches including computed torque control, fuzzy computed torque control and grey prediction based fuzzy computed torque control methods have been studied. Grey prediction control and fuzzy control have different mathematical basis with respect to each other. Both methods aim to deal with uncertainties. Proposed grey fuzzy computed torque control method eliminate the steady-state error. The most important advantage of the grey prediction control with respect to PID controllers is that it controls the system with a little amount of overshoot. The proposed controllers have been applied in dynamic simulations and performances have been compared.

1. GİRİŞ

Mobil robotlar endüstriyel uygulamalardan güvenlik ve eğlence sektörlerine kadar çok çeşitli alanlarda sağladıkları esnek çözümler ile geniş bir kullanım potansiyeline sahiptir. Hareket ettikleri ortama veya hareketi sağlayan eyleyicilerin yapısına göre sınıflandırılabilirler. Küresel robotlar, tüm bileşenleri dış kabuk görevi de yapan bir küre içerisine yerleştirilmiş ve bu küreye ait yüzeyin yer üzerinde yuvarlanarak hareketin gerçekleştirildiği mobil robotlardır. Ayrıca, dinamik sistemler holonomik olmayan kısıtlar bulundurup bulundurmadıklarına göre sırasıyla, holonomik olmayan sistemler ve holonomik sistemler olarak sınıflandırılırlar. Bir yüzey üzerinde kaymadan yuvarlanan bir küre holonomik olmayan kısıtlarla modellenenebildiğinden, küresel robotlar holonomik olmayan dinamik sistemler sınıfında yer alır. Küresel robotların, yüzey üzerinde hareket eden diğer tekerlekli, ayaklı ve ayaksız robotlara göre bazı avantajları bulunmaktadır. Bunlar düşük yarıçaplar dönerek yön değiştirebilme, elektronik ve mekanik bileşenlerin dış kabuk içerisinde saklanması, devrilme gibi sorunların yaşanmaması gibi avantajlardır. İşlevsel avantajlarının yanı sıra doğrusal ve holonomik olmama gibi dezavantajları bulunmaktadır. Bu sebeplerden dolayı gerçek zamanlı uygulaması zordur ve etkili doğrusallaştırma yaklaşımları küresel robotlara uygulanamaz.

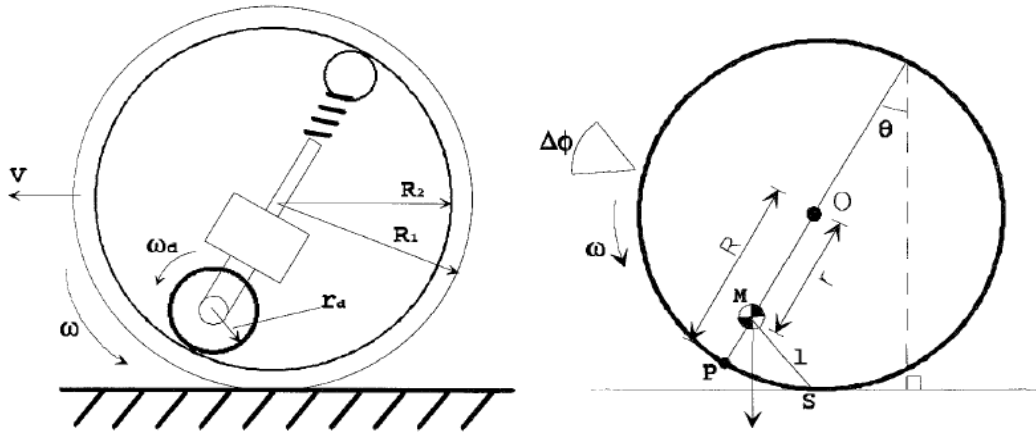
Son yıllarda, pek çok küresel robot prototipi gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmalardan bazılarında kürenin içine altı ile temas halde bulunan bir tekerlekli araba yerleştirilerek mekanik yapı oluşturulmuştur. Bu düzende hareket araba tekerlekleri ile küre arasındaki etkileşim sonucu sağlanmaktadır. Hem arabanın tekerlekleri ile kürenin iç yüzeyi arasındaki temas hem de kürenin dış yüzeyi ile yer arasındaki temas kaymadan yuvarlanma şartına göre modellendiğinde bu iki temas için yazılan matematiksel ifadeler non-holonomik denklemlerdir. Dolayısıyla, toplam sistem iki non-holonomik sistemin birleşimi olmuştur [1,2]. Daha sonra sadece arabanın boylamasına dinamiğini hesaba katılarak sistem için doğrusal bir model önerildi [3]. Fakat bu çalışmada doğrusallaştırma yaklaşımlarının bu sistem için uygulanabilir

olmadığı görülmüştür. Küre ile tekerlekli arabanın şematik gösterimi Şekil 1.1'de gösterilmektedir.



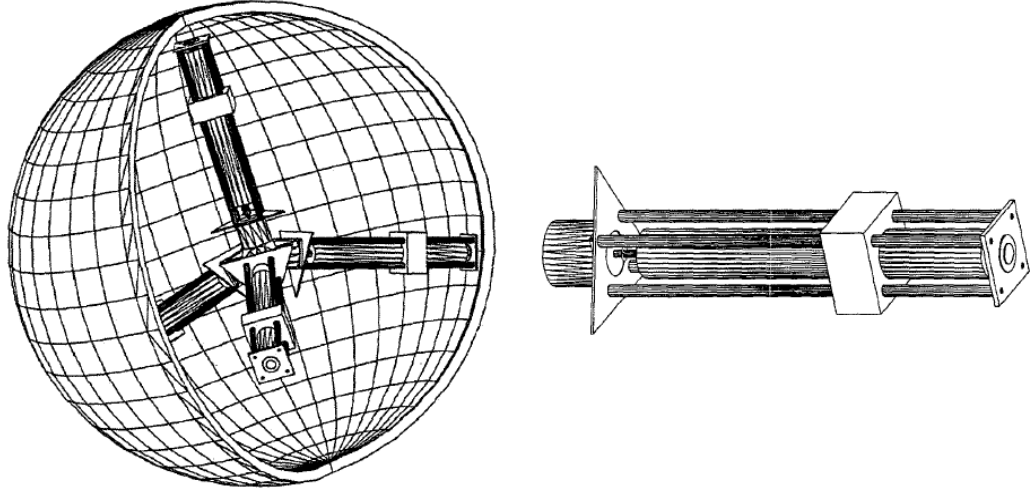
Şekil 1.1 : Sphericle [1,3].

Bazı araştırmalarda ise robotun dönme hareketi düşünülmeden sadece ilerleme hareketi hesaba katılmış kürenin altı ile temas halde bulunan bir tekerlek yerleştirilerek tasarım gerçekleştirilmiştir [4]. Şekil 1.2'nin sol tarafında sistemin basitleştirilmiş mekanik yapısı gösterilmektedir. Şek. 1.2'nin sağ tarafında gösterildiği gibi bütün sistem tek bir kütesel nokta olarak düşünülmüş ve bu varsayıma göre Newton hareket kanunları kullanılarak sistemin dinamik modeli elde edilmiştir.



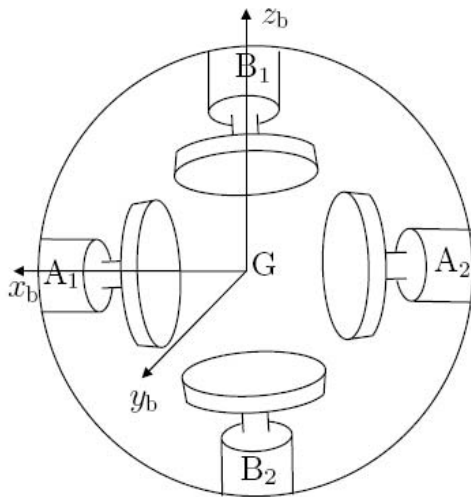
Şekil 1.2 : Halme'nin Tasarımı [4].

Başka bir mekanik tasarımda ise kürenin iç yüzeyine temas halde birbirine bağlı üç adet çubuk yerleştirilip bu çubukların üzerindeki kütlelerin radyal yönde dağıtılması sonucu robotun hareketi sağlanmıştır [5-7]. Şekil 1.3'ün sol tarafında sistemin görünüşü, sağ tarafında ise çubukların tasarımı gösterilmektedir.



Şekil 1.3 : Javadi'nin Tasarımı [5,6].

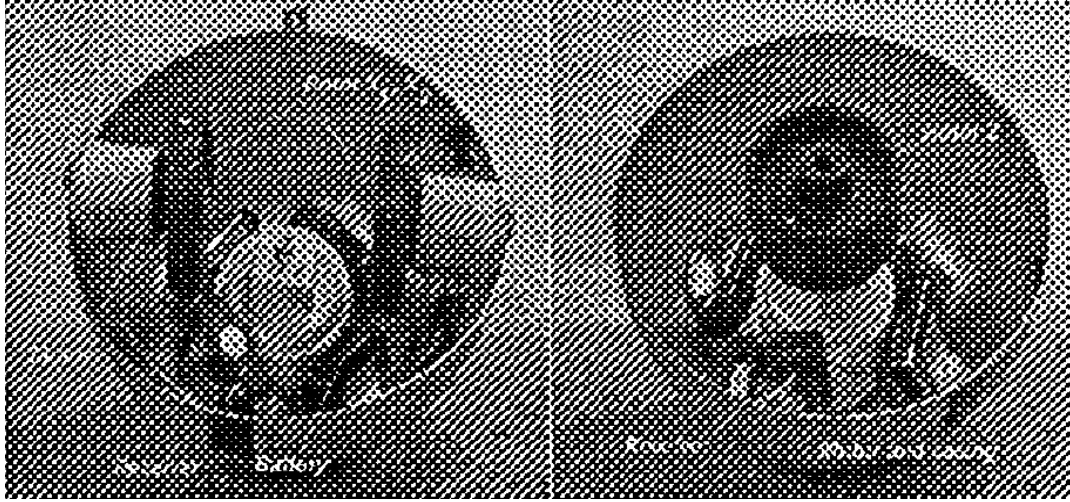
Joshi ise kürenin içine herbiri bir rotora bağlı iki adet doğru akım motorunu bağlayarak bir tasarım gerçekleştirmiştir [8,9]. Açısal momentumun korunumu gereği rotorlar bir yönde dönme hareketi gerçekleştirdiğinde küresel robot rotorların gerçekleştirdiği dönme yönüne ters yönde yol almaktadır. Sistem eğrisel yörüngeyi takip edememekte, doğrusal yörüngeyi takip etmektedir. Sistem belirli bir doğrusal yörüngeyi takip ederken yönünü değiştirmesi gerektiğinde önce durup, daha sonra da dikey z ekseninde dönerek yönünü değiştirmektedir. Şekil 1.4'de sistemin tasarımı gösterilmektedir.



Şekil 1.4 : Joshi'nin Tasarımı [8,9].

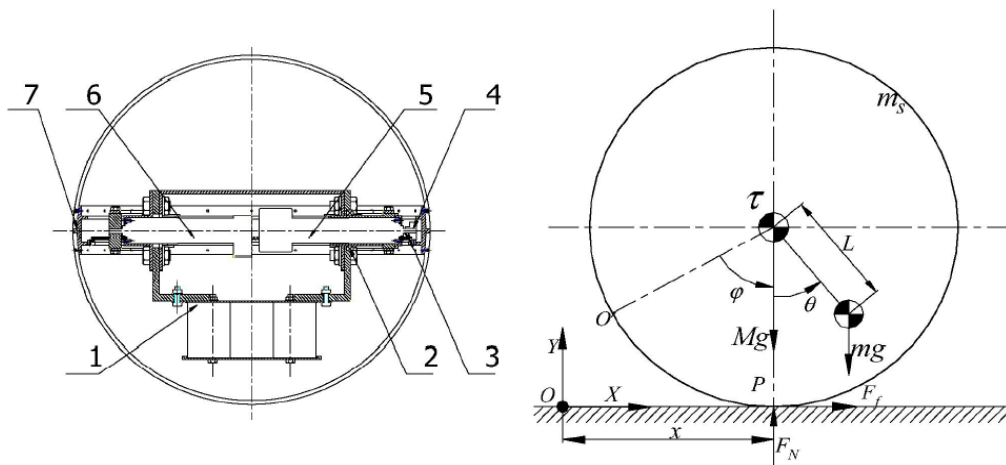
Araştırmacılar tarafından otonom küresel yuvarlanan robotlar tasarlanmıştır. Bu robotlarında hareketi sağlayan mekanizmalar kürenin içine monte edilen rotorlardır. Bu robotların hareketi için kaymadan yuvarlanma kısıtı ve açısal momentumun

korunumu kullanılarak birinci derece matematiksel model önerilmiştir [10,11]. Şekil 1.5'de prototipi gerçekleştirilen robotun ortadan ikiye ayrılmış hali gösterilmektedir.



Şekil 1.5 : Bhattacharya'nın Tasarımı [10].

Bir kürenin yüzey üzerindeki hareketi Euler-Lagrange metodu ve Euler açıları kullanılarak tanımlanmıştı [12,13]. Bu tanımlama sonucunda elde edilen denklemler kaymadan yuvarlanma şartını sağlamaktadır. Buna ek olarak ilerleme hareketinin tek serbestlik dereceli sarkaç ile sürekli sağlandığı küresel robot tasarlanmıştır [14]. Dönme hareketi ise sistem durduktan sonra sarkacın bağlı olduğu yapı döndürülerek sağlanmaktadır. Joshi'nin tasarımındaki gibi sistem gene eğrisel yörüngeyi takip edememekte doğrusal yörünge takibi yapmaktadır. Şekil 1.6'da sistemin tasarımı gösterilmektedir. Ayrıca, Qiang sistemin dinamiği için basitleştirilmiş Boltzmann-Hamel denklemlerini yayınlamıştır [15].



Şekil 1.6 : Ming'in Tasarımı [14].

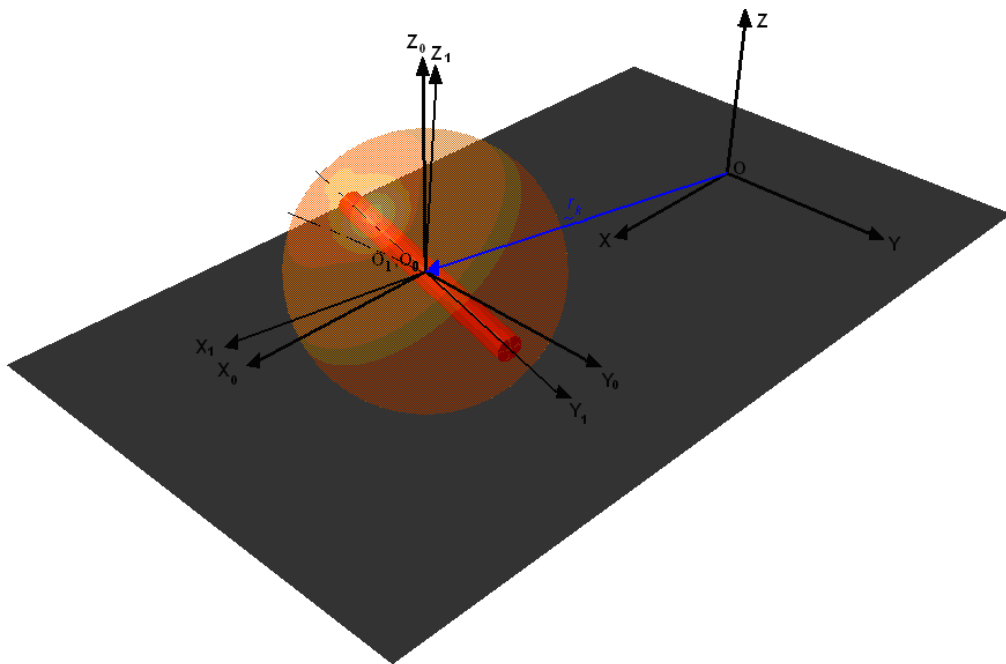
Diğer taraftan sistemi modellemek için Euler-Lagrange metodu yerine Kane metodunun kullanıldığı örnekler de olmuştur [16].

Bu çalışmada çift serbestlik dereceli sarkaç kullanılarak sistem harekete geçirilmektedir. Sarkaç eğrisel yörünge üzerinde yuvarlanma hareketini sağlamak için kullanılmıştır. Sistem elemanları birbirlerine göre ve yere göre dönme hareketi gerçekleştirdiğinden açısal hareketleri tanımlamak için Euler açıları kullanılmıştır. Sistemin hareket denklemleri, Euler-Lagrange denklemleri yazılarak elde edilmiştir.

2. KÜRESEL YUVARLANMA HAREKETİNİN MODELLENMESİ

Çeşitli serbestlik derecelerine sahip sarkaç ile hareketi sağlanan küresel robotun kinematik ve dinamik denklemlerinin elde edilmesi için aşağıdaki varsayımlar yapılmıştır:

1. Küre hareket düzlemi üzerinde kaymadan yuvarlanmaktadır.
 2. Küresel robotun ağırlık merkezi kürenin geometrik merkezindedir.
 3. Küre statik dengede iken sarkaç hareket düzlemine dik konumdadır.
 4. Küresel robotun hareketi bir O-xyz koordinat sistemine göre tanımlanmıştır.
- O-xy düzlemi hareket düzlemine paraleldir.



Şekil 2.1 : Eksen Takımları.

O-XYZ yere sabit referans eksen takımıdır. $O - X_0Y_0Z_0$, O-XYZ eksen takımına göre yalnızca öteleme hareketi yapan ve orjini küre merkezinde bulunan eksen takımıdır. $O - X_1Y_1Z_1$, O-XYZ eksen takımına göre öteleme ve dönme, $O - X_0Y_0Z_0$ eksen takımına göre ise yalnızca dönme hareketi yapan, orjini küre merkezinde olan eksen takımıdır. $O - X_1Y_1Z_1$ eksen takımının $O - X_0Y_0Z_0$ eksen takımına göre açısıl

konumu Euler açıları, yalpa-dalma-yuvarlanma açıları, Tait-Bryan açıları gibi çeşitli yaklaşımlarla ifade edilebilir. Kullanılan eksen takımları Şekil 2.1'de gösterilmektedir.

2.1 Küresel Yuvarlanma

Boş bir kürenin bir yüzey üzerinde yuvarlanmasını ifade eden kinematik ve dinamik eşitlikler [17,18]'de ifade edilmektedir. Bu bölümde [17,18]'deki eşitlikler baz alınarak küresel yuvarlanma hareketi tanımlanacaktır.

2.1.1 Kinematik Model

Küresel yuvarlanma hareketini tanımlamak için Euler açıları kullanılır. Euler açıları kullanılarak rotasyon matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$Rot = \begin{bmatrix} c_\psi c_\phi - s_\psi c_\theta s_\phi & c_\psi s_\phi + s_\psi c_\theta c_\phi & s_\psi s_\theta \\ -s_\psi c_\phi - c_\psi c_\theta s_\phi & -s_\psi s_\phi + c_\psi c_\theta c_\phi & c_\psi s_\theta \\ s_\theta s_\phi & -s_\theta c_\phi & c_\theta \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$\vec{\omega}_s$ O-XYZ koordinat sistemine göre kürenin açısal hız vektörü:

$$\vec{\omega}_s = (\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi) \vec{i} + (\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi) \vec{j} + (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \vec{k} \quad (2.2)$$

$\vec{v}_s$ O-XYZ koordinat sistemine göre kürenin çizgisel hız vektörü:

$$\vec{v}_s = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} \quad (2.3)$$

olarak elde edilir.

2.1.2 Dinamik Model

Bu bölümde öncelikle sisteme ait non-holonomik kısıtlar verilecek daha sonra ise sistemin hareket denklemleri Euler-Lagrange methodu kullanılarak elde edilecektir.

2.1.2.1 Non-Holonomik Kısıtlar

Bir kürenin hareketi O-xy düzleminde iki eksen de gerçekleşiyorsa x ve y eksenini için iki kısıt yazılarak ifade edilir. Ancak, bu kısıtlar holonomik olmayan kısıtlardır

ve integre edilemezler. Bu sebeple, bir kürenin bir düzlem üzerinde hareket etmesini ifade eden kısıtlar holonomik olmayan kısıtlardır. Bu holonomik olmayan kısıtlar aynı zamanda küre ile yer arasındaki kaymadan yuvarlanma şartını ifade eden eşitliklerdir. Bu şart R küre yarıçapı, $\dot{x}$ ve $\dot{y}$ kürenin çizgisel hızları, θ , ϕ , ψ euler açıları, $\vec{\omega}_x$ kürenin x eksenine etrafındaki açısal hızı, $\vec{\omega}_y$ kürenin y eksenine etrafındaki açısal hızı olmak üzere aşağıdaki gibi ifade edilir [17,18]:

$$\begin{aligned} F_x &= R\omega_y = \dot{x} = R(\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi) \\ F_y &= R\omega_x = -\dot{y} = R(\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Bazı araştırmacılar madeni bir paranın yuvarlanması örneğinde olduğu gibi non-holonomik kısıtları direk Lagrange fonksiyonunun içine yazarak sistemin denklemlerini elde etmişlerdir. Fakat bu yaklaşım doğru sonuç vermemektedir [19]. Non-holonomik kısıtlar Lagrange fonksiyonu oluşturulurken hesaba katılmamalı, Euler-Lagrange metodu ile elde edilen hareket denklemlerine ek denklem takımı olarak yazılmalıdır [18].

2.1.2.2 Euler-Lagrange Denklemleri

E_k sistemin toplam kinetik enerjisi, E_p sistemin toplam potansiyel enerjisi olmak üzere Lagrange fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır:

$$L = E_k - E_p \quad (2.5)$$

Toplam kinetik enerji kürenin kütlesi, atalet momenti, çizgisel hızı ve açısal hızıyla ifade edilir. M_s küresel kabuğun kütlesi, I_s küresel kabuğun atalet momenti, $\vec{v}_s$ kürenin çizgisel hızı, $\vec{\omega}_s$ kürenin açısal hızıdır. Toplam kinetik enerji ifadesi aşağıdaki gibi yazılır:

$$E_k = \frac{1}{2} M_s \|\vec{v}_s\|^2 + \frac{1}{2} I_s \|\vec{\omega}_s\|^2 \quad (2.6)$$

Sistemin toplam potansiyel enerjisi kürenin merkezine göre aşağıdaki gibi yazılır:

$$E_p = 0 \quad (2.7)$$

Euler-Lagrange denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i + \mu_x \frac{\partial F_x}{\partial \dot{q}_i} + \mu_y \frac{\partial F_y}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.8)$$

Yukarıdaki denklemde Q_i sistemi harekete geçirmek için uygulanacak girişi, μ_x ve μ_y ise Lagrange çarpanlarını temsil etmektedir.

Genelleştirilmiş koordinatlar aşağıdaki gibidir:

$$q = (q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5)^T = (x \quad y \quad \phi \quad \theta \quad \psi)^T \quad (2.9)$$

X ekseninde sisteme etki eden torku u_1 girişi, y ekseninde sisteme etki eden torku u_2 girişi temsil etmektedir. Denklem (2.8) hesaplandıktan sonra ifadeler düzenlendiğinde;

$$\begin{aligned} M_s \ddot{x} &= -\mu_x + u_1 \\ M_s \ddot{y} &= \mu_y + u_2 \\ I_s (\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta) &= R \sin \theta (-\mu_x \cos \phi + \mu_y \sin \phi) \\ I_s (\ddot{\theta} + \ddot{\psi} \sin \theta) &= R (\mu_x \sin \phi + \mu_y \cos \phi) \\ I_s (\ddot{\phi} + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \theta) &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem takımı matris formunda yazılırsa;

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s & 0 & I_s \cos q_4 \\ 0 & 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & I_s \cos q_4 & 0 & I_s \end{bmatrix}, \quad V(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_s \dot{q}_4 \dot{q}_5 \sin q_4 \\ I_s \dot{q}_3 \dot{q}_5 \sin q_4 \\ -I_s \dot{q}_3 \dot{q}_4 \sin q_4 \end{bmatrix},$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H(q) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R \sin q_3 & R \cos q_3 & 0 & 0 & 0 \\ -R \cos q_3 \sin q_4 & R \sin q_3 \sin q_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mu(q) = \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, sistemin hareket denklemleri aşağıdaki genel formda yazılır:

Küresel robot sadece x eksenini etrafında döndüğünden dolayı Euler açıları ϕ ve ψ 'de değişim gözlenmez. Dolayısıyla, rotasyon matrisi aşağıdaki gibi yazılır:

$$Rot = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$\vec{\omega}_s$ O-XYZ koordinat sistemine göre kürenin açısal hız vektörü:

$$\vec{\omega}_s = \dot{\theta} \vec{i} \quad (2.13)$$

$\vec{v}_s$ O-XYZ koordinat sistemine göre kürenin çizgisel hız vektörü:

$$\vec{v}_s = R \dot{\theta} \vec{j} \quad (2.14)$$

$\vec{r}_{p1}$ O – $X_1Y_1Z_1$ koordinat sistemine göre sarkacın kütle merkezi ile kürenin kütle merkezi arasındaki konum vektörü:

$$\vec{r}_{p1} = l \sin \alpha \vec{j} - l \cos \alpha \vec{k} \quad (2.15)$$

$\vec{r}_{p0}$ O – $X_0Y_0Z_0$ koordinat sistemine göre sarkacın kütle merkezi ile kürenin kütle merkezi arasındaki konum vektörü:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{p0} &= Rot \vec{r}_{p1} \\ \vec{r}_{p0} &= -l \sin(\theta - \alpha) \vec{j} - l \cos(\theta - \alpha) \vec{k} \end{aligned} \quad (2.16)$$

$\vec{r}_p$ O-XYZ koordinat sistemine göre sarkacın kütle merkezi ile kürenin kütle merkezi arasındaki konum vektörüdür ve $\vec{r}_{p0}$ ile aynıdır.

$\vec{\omega}_{p1}$ sarkacın O – $X_1Y_1Z_1$ koordinat sistemine göre açısal hız vektörüdür.

$$\vec{\omega}_{p1} = \dot{\alpha} \vec{i} \quad (2.17)$$

$\vec{\omega}_{p0}$ sarkacın $O - X_0Y_0Z_0$ koordinat sistemine göre açısal hız vektörüdür.

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_{p0} &= Rot \vec{\omega}_{p1} \\ \vec{\omega}_{p0} &= (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \vec{i}\end{aligned}\quad (2.18)$$

$\vec{\omega}_p$ sarkacın O-XYZ koordinat sistemine göre açısal hız vektörüdür ve $\vec{\omega}_{p0}$ ile aynıdır.

$\vec{v}_p$ O-XYZ koordinat sistemine göre sarkacın kütle merkezinin çizgisel hız vektörü:

$$\begin{aligned}\vec{v}_p &= \vec{v}_s + \vec{\omega}_p \times \vec{r}_p \\ \vec{v}_p &= [R\dot{\theta} + l \cos(\theta - \alpha)(\dot{\theta} + \dot{\alpha})] \vec{j} - l \sin(\theta - \alpha)(\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \vec{k}\end{aligned}\quad (2.19)$$

olarak yazılır.

2.2.1.2 Euler-Lagrange Denklemleri

Sistemin Lagrange fonksiyonu ($\text{ref}\{\text{lagrangefonksiyonu}\}$) numaralı denklemde olduğu gibi yazılır. Toplam kinetik enerji sistemin kütlesi, atalet momenti, çizgisel hızı ve açısal hızıyla ifade edilir. M_s küresel kabuğun kütlesi, I_s küresel kabuğun atalet momenti, $\vec{v}_s$ kürenin çizgisel hızı, $\vec{\omega}_s$ kürenin açısal hızı, m_p sarkacın kütlesi, I_p sarkacın atalet momenti, $\vec{v}_p$ sarkacın çizgisel hızı, $\vec{\omega}_p$ sarkacın açısal hızıdır. Toplam kinetik enerji ifadesi aşağıdaki gibi yazılır:

$$E_k = \frac{1}{2} M_s \|\vec{v}_s\|^2 + \frac{1}{2} I_s \|\vec{\omega}_s\|^2 + \frac{1}{2} m_p \|\vec{v}_p\|^2 + \frac{1}{2} I_p \|\vec{\omega}_p\|^2 \quad (2.20)$$

r_{p-z} sarkacın z eksenini üzerindeki konum bileşenidir. Sistemin toplam potansiyel enerjisi kürenin merkezine göre aşağıdaki gibi yazılır:

$$E_p = m_p g r_{p-z} \quad (2.21)$$

Euler-Lagrange denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (2.22)$$

Yukarıdaki denklemde Q_i sistemi harekete geçirmek için uygulanacak girişi temsil etmektedir. İleri yönde küresel robotun yuvarlanma hareketini sağlayacak tahrik torku sarkacın dönme açısı α etrafında olacaktır. Buna karşın mil üzerinde ise sarkaca etki eden tahrik torkuna karşı yönde bir tepki torku oluşacaktır [14]. Bu oluşan tepki torkuda θ etrafında olacaktır. Sistemi harekete geçiren giriş torku θ ve α etrafında aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} Q_\theta &= \tau_x \\ Q_\alpha &= \tau_x \end{aligned} \quad (2.23)$$

Genelleştirilmiş koordinatlar aşağıdaki gibidir:

$$q = (q_1 \quad q_2)^T = (\theta \quad \alpha)^T \quad (2.24)$$

Denklem (2.22) hesaplandıktan sonra ifadeler düzenlendiğinde;

$$\begin{aligned} \tau_x &= (M_s R^2 + m_p R^2 + m_p l^2 + I_s + I_p + 2m_p Rl \cos(\theta - \alpha))\ddot{\theta} \\ &\quad + (m_p l^2 + I_p + m_p Rl \cos(\theta - \alpha))\ddot{\alpha} - m_p Rl \sin(\theta - \alpha)\dot{\theta}^2 \\ &\quad + m_p Rl \sin(\theta - \alpha)\dot{\alpha}^2 + 2m_p Rl \sin(\theta - \alpha)\dot{\theta}\dot{\alpha} + m_p gl \sin(\theta - \alpha) \\ \tau_x &= (m_p l^2 + I_p + m_p Rl \cos(\theta - \alpha))\ddot{\theta} + (m_p l^2 + I_p)\ddot{\alpha} \\ &\quad - 2m_p Rl \sin(\theta - \alpha)\dot{\theta}^2 - m_p gl \sin(\theta - \alpha) \end{aligned} \quad (2.25)$$

elde edilir. Genel olarak mekanik sistemlerin hareket denklemleri aşağıdaki formda yazılır:

$$M(q(t))\ddot{q}(t) + V(q(t), \dot{q}(t)) = u(t) \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= M_s R^2 + m_p R^2 + m_p l^2 + I_s + I_p + 2m_p Rl \cos(q_1 - q_2) \\ M_{12} &= m_p l^2 + I_p + m_p Rl \cos(q_1 - q_2) \\ M_{21} &= m_p l^2 + I_p + m_p Rl \cos(q_1 - q_2) \\ M_{22} &= m_p l^2 + I_p \\ V_{11} &= -m_p Rl \sin(q_1 - q_2)\dot{q}_1^2 + m_p Rl \sin(q_1 - q_2)\dot{q}_2^2 \\ &\quad + 2m_p Rl \sin(q_1 - q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_p gl \sin(q_1 - q_2) \\ V_{21} &= -2m_p Rl \sin(q_1 - q_2)\dot{q}_1^2 - m_p gl \sin(q_1 - q_2) \end{aligned} \quad (2.27)$$

olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_x \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

olarak yazılır. Genel olarak robotların hareket denklemleri aşağıdaki formda yazılır:

$$\begin{aligned} A_{11} &= M_s R^2 + m_p R^2 + m_p l^2 + I_s + I_p + 2m_p Rl \cos(\theta - \alpha) \\ A_{12} &= m_p l^2 + I_p + m_p Rl \cos(\theta - \alpha) \\ A_{21} &= m_p l^2 + I_p + m_p Rl \cos(\theta - \alpha) \\ A_{22} &= m_p l^2 + I_p \\ B_{11} &= -m_p Rl \sin(\theta - \alpha) \\ B_{12} &= m_p Rl \sin(\theta - \alpha) \\ B_{21} &= -2m_p Rl \sin(\theta - \alpha) \\ B_{22} &= 0 \\ C_{11} &= 2m_p Rl \sin(\theta - \alpha) \\ C_{21} &= 0 \\ D_{11} &= m_p gl \sin(\theta - \alpha) \\ D_{21} &= -m_p gl \sin(\theta - \alpha) \end{aligned} \quad (2.29)$$

olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\alpha}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix} [\dot{\theta}\dot{\alpha}] + \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_x \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

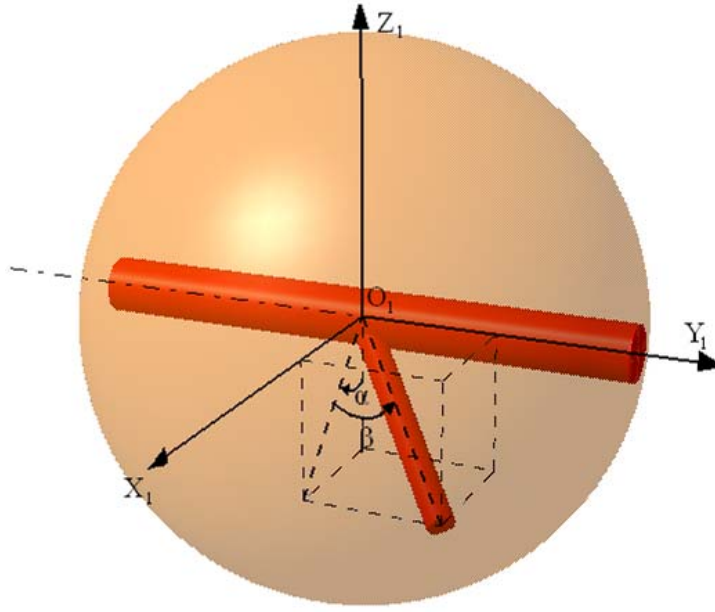
olarak yazılır.

2.2.2 Çift Serbestlik Dereceli Sarkaç ile Eğrisel Yörüngede Hareket

Çift serbestlik dereceli sarkaca sahip küresel yuvarlanan robotun sırasıyla kinematik ve dinamik modeli ele alınacaktır.

2.2.2.1 Kinematik Model

Çift serbestlik derecesine sahip sarkaç ile modellenen küresel robotun serbestlik dereceleri Şekil 2.3 'de gösterilmektedir.



Şekil 2.3 : Çift Serbestlik Derecesine Sahip Sarkaç ile Modellenen Sistemin Serbestlik Dereceleri.

Rotasyon matrisi (2.1) numaralı denklemde oluşturulduğu gibidir.

$\vec{\omega}_s$ O-XYZ koordinat sistemine göre kürenin açısal hız vektörü:

$$\vec{\omega}_s = (\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi) \vec{i} + (\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi) \vec{j} + (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \vec{k} \quad (2.31)$$

$\vec{v}_s$ O-XYZ koordinat sistemine göre kürenin çizgisel hız vektörü:

$$\vec{v}_s = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} \quad (2.32)$$

$\vec{r}_{p1}$ O - $X_1Y_1Z_1$ koordinat sistemine göre sarkacın kütle merkezi ile kürenin kütle merkezi arasındaki konum vektörü:

$$\vec{r}_{p1} = l \cos \alpha \sin \beta \vec{i} + l \sin \alpha \cos \beta \vec{j} - l \cos \alpha \cos \beta \vec{k} \quad (2.33)$$

$\vec{r}_{p0}$ O - $X_0Y_0Z_0$ koordinat sistemine göre sarkacın kütle merkezi ile kürenin kütle merkezi arasındaki konum vektörü:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{p0} &= Rot \vec{r}_{p1} \\
\vec{r}_{p0} &= \begin{bmatrix} c_\psi c_\phi - s_\psi c_\theta s_\phi & c_\psi s_\phi + s_\psi c_\theta c_\phi & s_\psi s_\theta \\ -s_\psi c_\phi - c_\psi c_\theta s_\phi & -s_\psi s_\phi + c_\psi c_\theta c_\phi & c_\psi s_\theta \\ s_\theta s_\phi & -s_\theta c_\phi & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l c_\alpha s_\beta \\ l s_\alpha c_\beta \\ l c_\alpha c_\beta \end{bmatrix} \\
&= l(c_\alpha s_\beta (c_\psi c_\phi - s_\psi c_\theta s_\phi) + s_\alpha c_\beta (c_\psi s_\phi + s_\psi c_\theta c_\phi) + c_\alpha c_\beta s_\psi s_\theta) \vec{i} \\
&\quad + l(c_\alpha s_\beta (-s_\psi c_\phi - c_\psi c_\theta s_\phi) + s_\alpha c_\beta (-s_\psi s_\phi + c_\psi c_\theta c_\phi) + c_\alpha c_\beta c_\psi s_\theta) \vec{j} \\
&\quad + l(c_\alpha s_\beta s_\theta s_\phi - s_\alpha c_\beta s_\theta c_\phi + c_\alpha c_\beta c_\theta) \vec{k}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$\vec{r}_p$ O-XYZ koordinat sistemine göre sarkacın kütle merkezi ile kürenin kütle merkezi arasındaki konum vektörüdür ve $\vec{r}_{p0}$ ile aynıdır.

$\vec{\omega}_{p1}$ sarkacın $O - X_1 Y_1 Z_1$ koordinat sistemine göre açısal hız vektörüdür.

$$\vec{\omega}_{p1} = \dot{\alpha} \vec{i} + \dot{\beta} \vec{j} \tag{2.35}$$

$\vec{\omega}_{p0}$ sarkacın $O - X_0 Y_0 Z_0$ koordinat sistemine göre açısal hız vektörüdür.

$$\begin{aligned}
\vec{\omega}_{p0} &= \vec{\omega}_s + Rot \vec{\omega}_{p1} \\
\vec{\omega}_{p0} &= \begin{bmatrix} \dot{\alpha} c_\phi + \dot{\psi} s_\theta s_\phi \\ \dot{\beta} c_\phi - \dot{\psi} s_\theta c_\phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} c_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_\psi c_\phi - s_\psi c_\theta s_\phi & c_\psi s_\phi + s_\psi c_\theta c_\phi & s_\psi s_\theta \\ -s_\psi c_\phi - c_\psi c_\theta s_\phi & -s_\psi s_\phi + c_\psi c_\theta c_\phi & c_\psi s_\theta \\ s_\theta s_\phi & -s_\theta c_\phi & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= (\dot{\alpha} c_\phi + \dot{\psi} s_\theta s_\phi + \dot{\alpha} (c_\psi c_\phi - s_\psi c_\theta s_\phi) + \dot{\beta} (c_\psi s_\phi + s_\psi c_\theta c_\phi)) \vec{i} \\
&\quad + (\dot{\beta} c_\phi - \dot{\psi} s_\theta c_\phi + \dot{\alpha} (-s_\psi c_\phi - c_\psi c_\theta s_\phi) + \dot{\beta} (-s_\psi s_\phi + c_\psi c_\theta c_\phi)) \vec{j} \\
&\quad + (\dot{\phi} + \dot{\psi} c_\theta + \dot{\alpha} s_\theta s_\phi - \dot{\beta} s_\theta c_\phi) \vec{k}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

$\vec{\omega}_p$ sarkacın O-XYZ koordinat sistemine göre açısal hız vektörüdür ve $\vec{\omega}_{p0}$ ile aynıdır.

$\vec{v}_p$ O-XYZ koordinat sistemine göre sarkacın kütle merkezinin çizgisel hız vektörü:

$$\vec{v}_p = \vec{v}_s + \vec{\omega}_p \times \vec{r}_p \tag{2.37}$$

olarak yazılır.

2.2.2.2 Euler-Lagrange Denklemleri

Lagrange fonksiyonu (2.5) ve Lagrange denklemi (2.8) numaralı denklemlerde olduğu gibi yazılır.

Genelleştirilmiş koordinatlar aşağıdaki gibidir:

$$q = (q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6 \quad q_7)^T = (x \quad y \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad \alpha \quad \beta)^T \quad (2.38)$$

Euler-Lagrange denklemlerinden yedi adet hareket denklemi ve (2.4) numaralı denklemde ifade edilen iki adet non-holonamik kısıt denklemi hesaba katılarak sistemin hareketini ifade toplam dokuz adet denklem takımı elde edilir.

Elde edilen hareket denklemlerinde çok sayıda terim bulunması nedeniyle oluşan ağır hesap yükü, tüm terimlerin dikkate alındığı bu modelin sayısal çözümlemesinin yapılamamasına neden olmuştur.

2.3 Ayırıştırılmış Dinamik ile Eğrisel Yörüngede Hareket

Karmaşık sistemlerin basit dinamik denklemlerini elde etmek için serbestlik derecelerinin birbirlerinden ayırıştırılması yoluna gidilir. Bu varsayımda sistemin bir serbestlik derecesinin diğer bir serbestlik derecesine etki etmediği varsayımı yapılır [20]. Bu varsayımın en yaygın kullanıldığı uygulama alanı su altı araçlarıdır. Otonom su altı araçlarının karmaşık yapıları dolayısıyla dinamik denklemlerini elde etmek çok güçtür. Bu sebeple, sistemin denklemlerini elde etmek için sapma, yalpalama, dalgalanma ve yukarıya yönde kalkma hareketleri birbirlerinden ayırıştırılarak incelenir [20,21].

Ayırıştırılmış dinamik yaklaşımının uygulandığı diğer bir alan ise araç dinamiğidir. Araba dinamiği ön aks dinamiği ile sapma dinamiğinin birbirlerinden ayırıştırılmasıyla incelenir. Bu ayırıştırma aktif yönlendirilen araçların yönlendirme transfer fonksiyonlarının sade ifadeler olarak elde edilmesini sağlar [22,23].

Başka bir uygulama alanı ise otonom bisikletlerdir. Otonom tek ve çift tekerlekli bisikletlerin dinamiği ve kontrolü hakkında çalışmalar yapılmıştır [24,25]. Schoonwinkel tek tekerlekli bisikleti insan ile birlikte modellemiştir. Bu model üç ana parçadan oluşmaktadır. Sistemin dinamiği boylamasına ve yanlamasına ayırıştırılarak dinamik model elde edilmiştir.

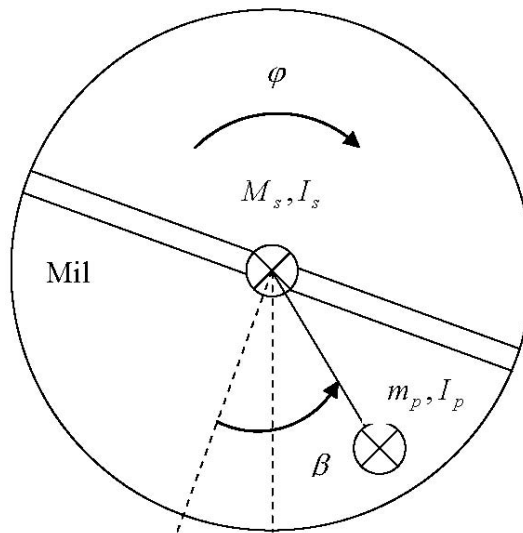
Yukarıdaki uygulama alanlarına ek olarak turbofan motoru modelinin elde edilmesini de ekleyebiliriz. Turbofan motorunda sistem bileşenleri arasındaki etkileşim belirsizlik içerdiğinden sistemin modeli elde edilirken ayrıştırılmış dinamik yaklaşımı kullanılır [26].

Ayrıştırılmış dinamik yaklaşımı sadece karmaşık sistemlerin dinamik modellerini elde etmek için kullanılmamıştır. Tekerlek robotlarda kontrol girişlerine göre dinamik model ayrıştırılmıştır [27].

Yukarıdaki örneklerde görüldüğü gibi karmaşık sistemlerin modelleri elde edilirken ayrıştırılmış dinamik yaklaşımı çok yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Bu yaklaşımın en son örneği bir yuvarlanan küresel robot örneğinde görülmüştür [28]. Sistemin hareketi hareket doğrultularında ayrıştırılarak sistemin dinamik modeli elde edilmiştir. Bu çalışmada sistemin hareket denklemleri x ve y eksenleri doğrultularında ayrıştırılarak elde edilecek. İlerleme hareketi için y eksenindeki hareketi tanımlayan bölüm 2.2.1'deki denklemler kullanılacaktır. Dönme hareketi için x eksenindeki hareketi tanımlayan denklemler kullanılacaktır. X eksenindeki hareketi tanımlayan denklemler aşağıda elde edilecektir.

2.3.1 X Eksenindeki Hareket

Y eksenindeki hareketi tanımlayan hareket denklemleri bölüm 2.2.1'de elde edilmişti. Bu bölümde de X eksenindeki hareketi tanımlayan hareket denklemleri elde edilecektir.



Şekil 2.4 : Sistemin Serbestlik Dereceleri

2.3.1.1 Kinematik Model

Küresel robotun dönme hareketinin şematik gösterimi Şekil 2.4'de gösterilmektedir. Küresel robot sadece y eksenini etrafında döndüğünden dolayı rotasyon matrisi aşağıdaki gibi yazılır:

$$Rot = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$\vec{\omega}_s$ O-XYZ koordinat sistemine göre kürenin açısal hız vektörü:

$$\vec{\omega}_s = \dot{\varphi} \cdot \vec{j} \quad (2.40)$$

$\vec{v}_s$ O-XYZ koordinat sistemine göre kürenin çizgisel hız vektörü:

$$\vec{v}_s = -R\dot{\varphi} \cdot \vec{i} \quad (2.41)$$

$\vec{r}_{p1}$ O – $X_1Y_1Z_1$ koordinat sistemine göre sarkacın kütle merkezi ile kürenin kütle merkezi arasındaki konum vektörü:

$$\vec{r}_{p1} = l \sin \beta \cdot \vec{i} - l \cos \beta \cdot \vec{k} \quad (2.42)$$

$\vec{r}_{p0}$ O – $X_0Y_0Z_0$ koordinat sistemine göre sarkacın kütle merkezi ile kürenin kütle merkezi arasındaki konum vektörü:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{p0} &= Rot \vec{r}_{p1} \\ \vec{r}_{p0} &= -l \sin(\varphi - \beta) \cdot \vec{i} - l \cos(\varphi - \beta) \cdot \vec{k} \end{aligned} \quad (2.43)$$

$\vec{r}_p$ O-XYZ koordinat sistemine göre sarkacın kütle merkezi ile kürenin kütle merkezi arasındaki konum vektörüdür ve $\vec{r}_{p0}$ ile aynıdır.

$\vec{\omega}_{p1}$ sarkacın O – $X_1Y_1Z_1$ koordinat sistemine göre açısal hız vektörüdür.

$$\vec{\omega}_{p1} = \dot{\beta} \cdot \vec{j} \quad (2.44)$$

$\vec{\omega}_{p0}$ sarkacın $O - X_0Y_0Z_0$ koordinat sistemine göre açısal hız vektörüdür.

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_{p0} &= Rot \vec{\omega}_{p1} \\ \vec{\omega}_{p0} &= (\dot{\varphi} + \dot{\beta}) \vec{j}\end{aligned}\tag{2.45}$$

$\vec{\omega}_p$ sarkacın O-XYZ koordinat sistemine göre açısal hız vektörüdür ve $\vec{\omega}_{p0}$ ile aynıdır.

$\vec{v}_p$ O-XYZ koordinat sistemine göre sarkacın kütle merkezinin çizgisel hız vektörü:

$$\begin{aligned}\vec{v}_p &= \vec{v}_s + \vec{\omega}_p \times \vec{r}_p \\ \vec{v}_p &= [R\dot{\varphi} + l \cos(\varphi - \beta)(\dot{\varphi} + \dot{\beta})] \vec{i} - l \sin(\varphi - \beta)(\dot{\varphi} + \dot{\beta}) \vec{k}\end{aligned}\tag{2.46}$$

olarak yazılır.

2.3.1.2 Euler-Lagrange Denklemleri

Sistemin Lagrange fonksiyonu (2.5), kinetik enerji ifadesi (2.20), potansiyel enerji ifadesi (2.21), Euler-Lagrange denklemleri (2.22) numaralı denklemlerde oldukları gibi yazılırlar.

(2.22) numaralı denklemde Q_i sistemi harekete geçirmek için uygulanacak girişi temsil etmektedir. İleri yönde küresel robotun yuvarlanma hareketini sağlayacak tahrik torku sarkacın dönme açısı β etrafında olacaktır. Buna karşın mil üzerinde ise sarkaca etki eden tahrik torkuna karşı yönde bir tepki torku oluşacaktır [14]. Bu oluşan tepki torkuda φ etrafında olacaktır. Sistemi harekete geçiren giriş torku φ ve β etrafında aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}Q_\varphi &= \tau_y \\ Q_\beta &= \tau_y\end{aligned}\tag{2.47}$$

Genelleştirilmiş koordinatlar aşağıdaki gibidir:

$$q = (q_1 \quad q_2)^T = (\varphi \quad \beta)^T\tag{2.48}$$

Denklem (2.22) hesaplandıktan sonra ifadeler düzenlendiğinde;

$$\begin{aligned}
\tau_y &= (M_s R^2 + m_p R^2 + m_p l^2 + I_s + I_p + 2m_p Rl \cos(\varphi - \beta)) \ddot{\varphi} \\
&\quad + (m_p l^2 + I_p + m_p Rl \cos(\varphi - \beta)) \ddot{\beta} - m_p Rl \sin(\varphi - \beta) \dot{\varphi}^2 \\
&\quad + m_p Rl \sin(\varphi - \beta) \dot{\beta}^2 + 2m_p Rl \sin(\varphi - \beta) \dot{\varphi} \dot{\beta} + m_p gl \sin(\varphi - \beta) \\
\tau_y &= (m_p l^2 + I_p + m_p Rl \cos(\varphi - \beta)) \ddot{\varphi} + (m_p l^2 + I_p) \ddot{\beta} \\
&\quad - 2m_p Rl \sin(\varphi - \beta) \dot{\varphi}^2 - m_p gl \sin(\varphi - \beta)
\end{aligned} \tag{2.49}$$

elde edilir. Genel olarak mekanik sistemlerin hareket denklemleri aşağıdaki formda yazılır:

$$M(q(t))\ddot{q}(t) + V(q(t), \dot{q}(t)) = u(t) \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned}
M_{11} &= M_s R^2 + m_p R^2 + m_p l^2 + I_s + I_p + 2m_p Rl \cos(q_1 - q_2) \\
M_{12} &= m_p l^2 + I_p + m_p Rl \cos(q_1 - q_2) \\
M_{21} &= m_p l^2 + I_p + m_p Rl \cos(q_1 - q_2) \\
M_{22} &= m_p l^2 + I_p \\
V_{11} &= -m_p Rl \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_1^2 + m_p Rl \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_2^2 \\
&\quad + 2m_p Rl \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_p gl \sin(q_1 - q_2) \\
V_{21} &= -2m_p Rl \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_1^2 - m_p gl \sin(q_1 - q_2)
\end{aligned} \tag{2.51}$$

olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_y \\ \tau_y \end{bmatrix} \tag{2.52}$$

olarak yazılır. Genel olarak robotların hareket denklemleri aşağıdaki formda yazılır:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= M_s R^2 + m_p R^2 + m_p l^2 + I_s + I_p + 2m_p Rl \cos(\varphi - \beta) \\
A_{12} &= m_p l^2 + I_p + m_p Rl \cos(\varphi - \beta) \\
A_{21} &= m_p l^2 + I_p + m_p Rl \cos(\varphi - \beta) \\
A_{22} &= m_p l^2 + I_p \\
B_{11} &= -m_p Rl \sin(\varphi - \beta) \\
B_{12} &= m_p Rl \sin(\varphi - \beta) \\
B_{21} &= -2m_p Rl \sin(\varphi - \beta) \\
B_{22} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{11} &= 2m_p Rl \sin(\varphi - \beta) \\
C_{21} &= 0 \\
D_{11} &= m_p gl \sin(\varphi - \beta) \\
D_{21} &= -m_p gl \sin(\varphi - \beta)
\end{aligned} \tag{2.53}$$

olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}^2 \\ \dot{\beta}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix} [\dot{\varphi}\dot{\beta}] + \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_y \\ \tau_y \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

olarak yazılır.

2.3.2 Eğrisel Yörüngede Yuvarlanma

Y eksenindeki hareket bölüm (2.2.1)'de, x eksenindeki hareket ise bölüm (2.31)'de tanımlanmıştır. Eğrisel yörüngede hareketi tanımlayan denklemler aşağıdaki gibi yazılır.

Genelleştirilmiş koordinatlar aşağıdaki gibidir:

$$q = (q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4)^T = (\vartheta \quad \alpha \quad \varphi \quad \beta)^T \tag{2.55}$$

Genel olarak mekanik sistemlerin hareket denklemleri aşağıdaki formda yazılır:

$$M(q(t))\ddot{q}(t) + V(q(t), \dot{q}(t)) = u(t) \tag{2.56}$$

$$\begin{aligned}
M_{11} &= M_s R^2 + m_p R^2 + m_p l^2 + I_s + I_p + 2m_p Rl \cos(q_1 - q_2) \\
M_{12} &= m_p l^2 + I_p + m_p Rl \cos(q_1 - q_2) \\
M_{13} &= M_{14} = 0 \\
M_{21} &= m_p l^2 + I_p + m_p Rl \cos(q_1 - q_2) \\
M_{22} &= m_p l^2 + I_p \\
M_{23} &= M_{24} = M_{31} = M_{32} = 0 \\
M_{33} &= M_s R^2 + m_p R^2 + m_p l^2 + I_s + I_p + 2m_p Rl \cos(q_3 - q_4) \\
M_{34} &= m_p l^2 + I_p + m_p Rl \cos(q_3 - q_4) \\
M_{41} &= M_{42} = 0 \\
M_{43} &= m_p l^2 + I_p + m_p Rl \cos(q_3 - q_4) \\
M_{44} &= m_p l^2 + I_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{11} &= -m_p R l \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_1^2 + m_p R l \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_2^2 \\
&\quad + 2m_p R l \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_p g l \sin(q_1 - q_2) \\
V_{21} &= -2m_p R l \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_1^2 - m_p g l \sin(q_1 - q_2) \\
V_{31} &= -m_p R l \sin(q_3 - q_4) \dot{q}_3^2 + m_p R l \sin(q_3 - q_4) \dot{q}_4^2 \\
&\quad + 2m_p R l \sin(q_3 - q_4) \dot{q}_3 \dot{q}_4 + m_p g l \sin(q_3 - q_4) \\
V_{21} &= -2m_p R l \sin(q_3 - q_4) \dot{q}_3^2 - m_p g l \sin(q_3 - q_4)
\end{aligned} \tag{2.57}$$

olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \\ V_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_y \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

olarak yazılır. Genel olarak robotların hareket denklemleri aşağıdaki formda yazılır:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= M_s R^2 + m_p R^2 + m_p l^2 + I_s + I_p + 2m_p R l \cos(\vartheta - \alpha) \\
A_{12} &= m_p l^2 + I_p + m_p R l \cos(\vartheta - \alpha) \\
A_{13} &= A_{14} = 0 \\
A_{21} &= m_p l^2 + I_p + m_p R l \cos(\vartheta - \alpha) \\
A_{22} &= m_p l^2 + I_p \\
A_{23} &= A_{24} = A_{31} = A_{32} = 0 \\
A_{33} &= M_s R^2 + m_p R^2 + m_p l^2 + I_s + I_p + 2m_p R l \cos(\varphi - \beta) \\
A_{34} &= m_p l^2 + I_p + m_p R l \cos(\varphi - \beta) \\
A_{41} &= A_{42} = 0 \\
A_{43} &= m_p l^2 + I_p + m_p R l \cos(\varphi - \beta) \\
A_{44} &= m_p l^2 + I_p \\
B_{11} &= -m_p R l \sin(\vartheta - \alpha) \\
B_{12} &= m_p R l \sin(\vartheta - \alpha) \\
B_{13} &= B_{14} = 0 \\
B_{21} &= -2m_p R l \sin(\vartheta - \alpha) \\
B_{22} &= B_{23} = B_{24} = B_{31} = B_{32} = 0 \\
B_{33} &= -m_p R l \sin(\varphi - \beta) \\
B_{34} &= m_p R l \sin(\varphi - \beta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{41} &= B_{42} = 0 \\
B_{43} &= -2m_p Rl \sin(\varphi - \beta) \\
B_{44} &= 0 \\
C_{11} &= 2m_p Rl \sin(\vartheta - \alpha) \\
C_{21} &= 0 \\
C_{31} &= 2m_p Rl \sin(\varphi - \beta) \\
C_{41} &= 0 \\
D_{11} &= m_p gl \sin(\vartheta - \alpha) \\
D_{21} &= -m_p gl \sin(\vartheta - \alpha) \\
D_{11} &= m_p gl \sin(\varphi - \beta) \\
D_{21} &= -m_p gl \sin(\varphi - \beta)
\end{aligned} \tag{2.59}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\vartheta} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}^2 \\ \dot{\alpha}^2 \\ \dot{\varphi}^2 \\ \dot{\beta}^2 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{31} \\ C_{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}\dot{\alpha} \\ \dot{\vartheta}\dot{\beta} \\ \dot{\varphi}\dot{\beta} \\ \dot{\varphi}\dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{21} \\ D_{31} \\ D_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_y \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.60}$$

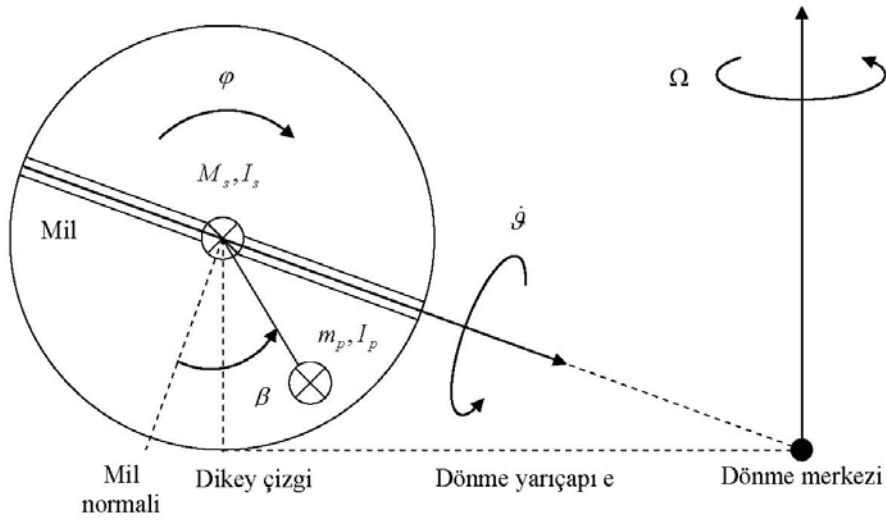
olarak yazılır.

2.4 Hareket Analizi

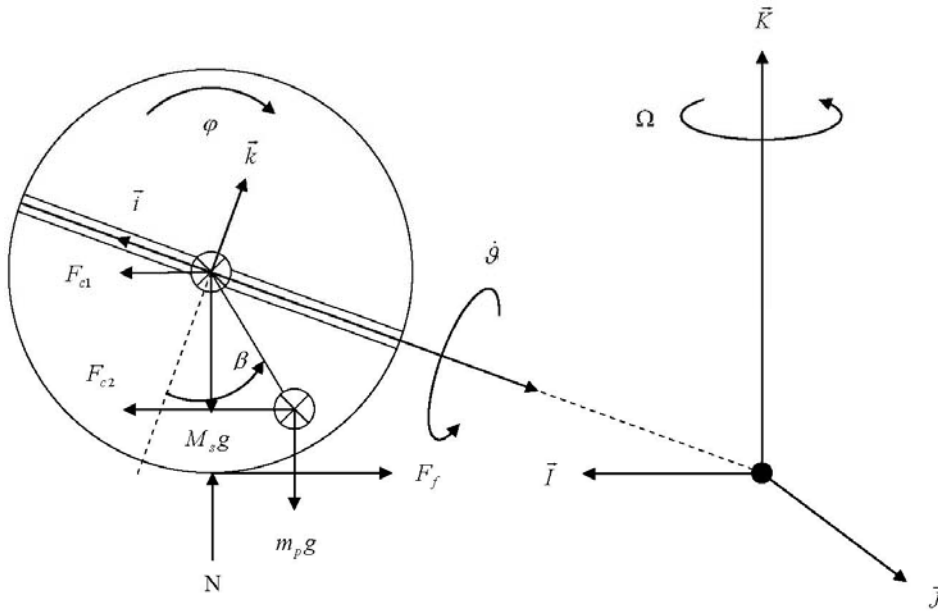
Bu bölümde öncelikle eğrisel bir yüzey üzerinde hareket eden küresel yuvarlanan robotun dönme yarıçapı tayini gerçekleştirilecektir. Daha sonra eğik düzlem üzerinde hareket eden küresel yuvarlanan robotun hareket denklemleri ve maksimum tırmanma açısı elde edilecektir. Son olarakta maksimum engel geçme yüksekliği bulunacaktır.

2.4.1 Dönme Yarıçapı Tayini

Küresel robotun serbest cisim diyagramı ve bir nokta etrafında küresel robotun açısal hareketi Şekil 2.5 ve Şekil 2.6'da gösterilmektedir.



Şekil 2.5 : Bir Nokta Etrafında Küresel Robotun Dönüşünün Modellenmesi.



Şekil 2.6 : Bir Nokta Etrafında Dönen Küresel Robotun Üzerine Etkiyen Kuvvetler.

Dönme yarı çapı hesaplanırken hem merkezkaç kuvvetleri hem de jiroskopik kuvvetler hesaba katılmalıdır.

Açısal dönme hızı ve ilerleme hareketinin açısal hızı arasındaki ilişki aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Omega = \frac{-R\dot{\varphi}}{e} \quad (2.61)$$

Küre ile yüzey arasındaki temas noktasındaki sürtünme kuvveti sisteme etkiyen toplam merkezkaç kuvvetine eşittir. Bu eşitlik aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} F_f &= F_{c1} + F_{c2} \\ &= M_s e \Omega^2 + m_p (e - l \sin(\beta - \varphi)) \Omega^2 \\ &\approx (M_s + m_p) e \Omega^2 \end{aligned} \quad (2.62)$$

Küresel robotun merkezi etrafındaki toplam tork aşağıda gösterildiği gibi yazılır:

$$\begin{aligned} T_1 &= m_p g l \sin(\beta - \varphi) + F_{c2} l \cos(\beta - \varphi) - R F_f \\ &\approx m_p g l \sin(\beta - \varphi) + m_p e \Omega^2 l \cos(\beta - \varphi) - R (M_s + m_p) e \Omega^2 \end{aligned} \quad (2.63)$$

Dönme hareketi boyunca küresel robotun açısal hızı aşağıda gösterildiği gibi yazılır:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \Omega \vec{K} - \dot{\varphi} \vec{J} - \dot{\vartheta} \vec{I} \\ &= \Omega \vec{K} - \dot{\varphi} \vec{J} - \dot{\vartheta} \cos \varphi \vec{I} - \dot{\vartheta} \sin \varphi \vec{K} \\ &= -\dot{\vartheta} \cos \varphi \vec{I} - \dot{\varphi} \vec{J} + (\Omega - \dot{\vartheta} \sin \varphi) \vec{K} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Dönme hareketi boyunca küresel robotun açısal momentumu aşağıda gösterildiği gibi yazılır:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= I \vec{\omega} \\ &= -I_s \dot{\vartheta} \cos \varphi \vec{I} - I_s \dot{\varphi} \vec{J} + I_s (\Omega - \dot{\vartheta} \sin \varphi) \vec{K} \end{aligned} \quad (2.65)$$

Küresel robota etkiyen tork açısal momentumun türevi alınarak bulunabilir.

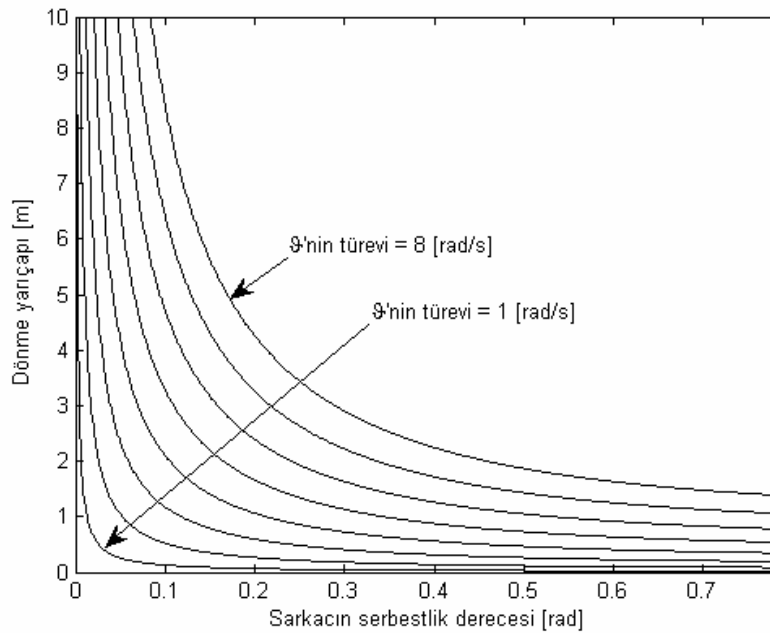
$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{dL}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L} \\ &= I_s \Omega \dot{\varphi} \vec{I} - I_s \Omega \dot{\vartheta} \cos \varphi \vec{J} \end{aligned} \quad (2.66)$$

(2.63) ve (2.66) numaralı denklemler $\vec{J}$ birim vektörü, $\vec{I}$ ve $\vec{K}$ birim vektörleri etrafındaki tork değerlerini tanımlamaktadır. (2.63) numaralı denklemde birim vektör $\vec{J}$ etrafındaki tork değeri, (2.66) numaralı denklemdeki tork değerine eşittir. Eşitlikleri basitleştirmek için φ 'nin çok küçük açı değerlerine sahip olduğu

varsayımı yapılır. Dönme yarıçapı (2.61) numaralı denklem ve $\varphi = 0$ kabulü çerçevesinde aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= T_2 \\
 -I_s \Omega \dot{\vartheta} \cos \varphi &\approx m_p g l \sin(\beta) + m_p e \Omega^2 l \cos(\beta) - R(M_s + m_p) e \Omega \\
 e &\approx \frac{R(\dot{\vartheta})^2 [I_s - m_p R l \cos(\beta) + R^2 (M_s + m_p)]}{m_p g l \sin(\beta)}
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

(2.67) numaralı denklemden görülebileceği gibi, eğer sarkacın serbestlik derecesi değişirse dönme yarı çapı e'de ilerleme hareketinin açısal hızına bağlı olarak değişecektir. Şekil 2.7 bu ilişkiyi ilerleme hareketinin açısal hızının 1'den 8 rad/s kadar her 1 rad/s artışı için göstermektedir. Bu eğriler önerilen bir sistemde referans dönme yarı çapı değeri olarak kullanılabilir.

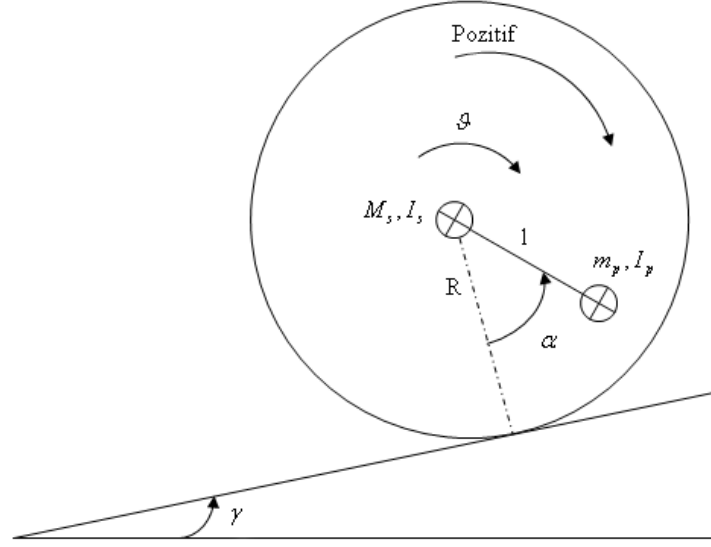


Şekil 2.7 : Sarkacın Serbestlik Derecesine Karşılık Dönme Yarıçapı.

2.4.2 Eğik Düzlemde Hareket

Sarkacın yer vektörü sistem eğik düzlemde olduğundan değişecektir.

$$\vec{r}_p = -l \sin(\vartheta - \alpha - \gamma) \vec{j} - l \cos(\vartheta - \alpha - \gamma) \vec{k} \tag{2.68}$$



Şekil 2.8 : Küresel Robotun Eğik Düzlemde Serbestlik Dereceleri.

Yatay ve eğik düzlem üzerindeki harekette tek fark yer çekiminin yönüdür. Bu sebeple yatay düzlem üzerindeki hareketteki kinetik enerji ifadesi eğik düzlem üzerindeki hareket içinde geçerlidir. Sadece potansiyel enerji farklılık gösterecektir. γ düzlemin eğim açısı olmak üzere:

$$\begin{aligned} E_p &= (M_s + m_p)gR\vartheta \sin \gamma + m_p g r_{p-z} \\ E_p &= (M_s + m_p)gR\vartheta \sin \gamma - m_p gl \cos(\vartheta - \alpha - \gamma) \end{aligned} \quad (2.69)$$

olarak tanımlanır. Sonuç olarak eğik yüzeyde hareket denklemleri

$$\begin{aligned} A_{11} &= M_s R^2 + m_p R^2 + m_p l^2 + I_s + I_p - 2m_p Rl \cos(\vartheta - \alpha) \\ A_{12} &= m_p l^2 + I_p - m_p Rl \cos(\vartheta - \alpha) \\ A_{21} &= m_p l^2 + I_p - m_p Rl \cos(\vartheta - \alpha) \\ A_{22} &= m_p l^2 + I_p \\ B_{11} &= m_p Rl \sin(\vartheta - \alpha) \\ B_{12} &= -m_p Rl \sin(\vartheta - \alpha) \\ B_{21} &= 2m_p Rl \sin(\vartheta - \alpha) \\ B_{22} &= 0 \\ C_{11} &= -2m_p Rl \sin(\vartheta - \alpha) \\ C_{21} &= 0 \\ D_{11} &= m_p gl \sin(\vartheta - \alpha - \gamma) + (M_s + m_p)gR \sin \gamma \\ D_{21} &= -m_p gl \sin(\vartheta - \alpha - \gamma) \end{aligned} \quad (2.70)$$

olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\alpha}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix} [\dot{\theta}\dot{\alpha}] + \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_x \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

olarak yazılır.

2.4.3 Tırmanma Açısı Tayini

Sistem yokuş yukarı tırmanırken sistem momentlerinin eşitliği aşağıdaki gibi yazılır:

$$M_s g R \sin \gamma + m_p g \sin \gamma (R - l \cos \alpha) = m_p g l \cos \gamma \sin \alpha \quad (2.72)$$

Sistem sarkacın hareketi ile belli miktarda bir tork üretebilecektir. Sarkac eğik düzlem yüzeyi ile paralel olduğunda sistem maksimum torku sağlayacaktır. (2.72)

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ radyan alınarak tekrar yazılırsa:

$$(M_s + m_p) g R \sin \gamma = m_p g l \cos \gamma \quad (2.73)$$

eşitliği elde edilecektir. Buradan da maksimum tırmanma açısı tayini (2.73) tekrar düzenlenirse:

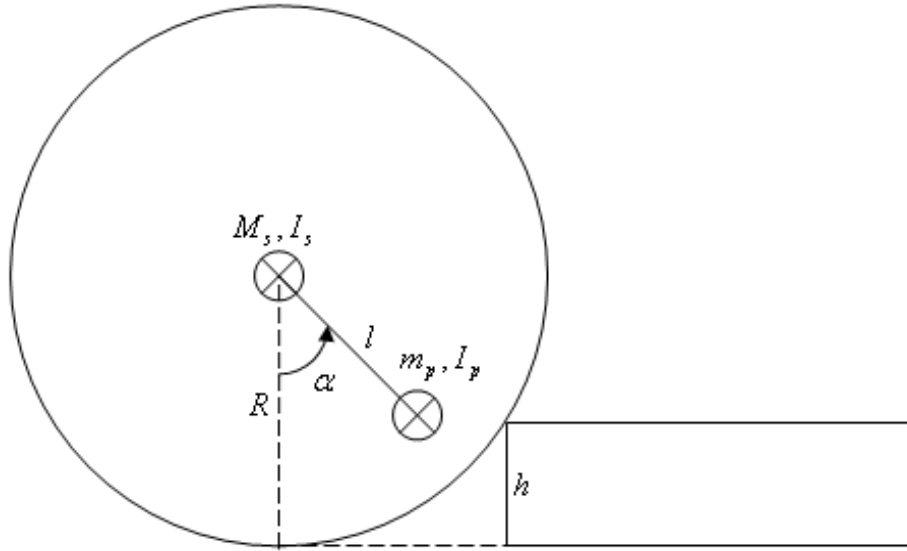
$$\tan \gamma = \frac{m_p g l}{(M_s + m_p) g R}$$

$$\gamma_{\max} = \tan^{-1} \left(\frac{m_p l}{(M_s + m_p) R} \right) \quad (2.74)$$

olarak elde edilir. Böylece, parametreleri belli bir sistemin maksimum kaç derecelik eğik bir düzlemi tırmanabileceği bulunur.

2.4.4 Engel Geçme Yükseklik Tayini

Robotun engeli geçme hareketi boyunca herhangi bir kayma meydana gelmediği veya başlangıç hızı olmadığı varsayılarak analiz gerçekleştirilmiştir. Küresel robotun engel ile karşılaşması Şekil 2.9'da gösterilmiştir.



Şekil 2.9 : Küresel Robotun Engel ile Karşılaşması.

Sistem karşısına çıkan bir engeli aşmak için hareketsiz durumda karşısındaki engelin ürettiği karşı torkdan daha fazla tork üretmek zorundadır. Küresel robotun karşısına h kadar yükseliğe sahip bir engelin çıktığını varsayarsak:

$$M_s g \sqrt{R^2 - (R-h)^2} + m_p g \left(\sqrt{R^2 - (R-h)^2} - l \sin \alpha \right) \geq M_s g \sqrt{R^2 - (R-h)^2} \quad (2.75)$$

denklemlerini elde ederiz. Bu denklemlerden h için

$$h \leq R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{2m_p l \sin \alpha}{M_s + m_p} \right)^2} \quad (2.76)$$

bağıntısı elde edilir. Maksimum h yüksekliğini belirlemek için $\sin \alpha = 1$ olarak alınır,

$$h_{\max} \leq R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{2m_p l}{M_s + m_p} \right)^2} \quad (2.77)$$

elde edilir. Böylece, ilk hızı bulunmayan parametreleri belli bir sistemin maksimum geçebileceği engel yüksekliği bulunur.

3. KONTROL

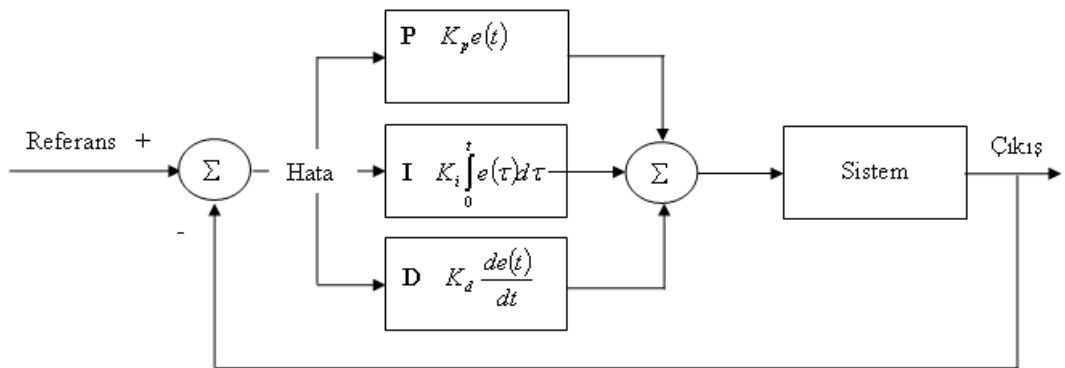
Bu bölümde yuvarlanan küresel robota uygulanacak kontrolör yapıları sırasıyla PID kontrolörler, bulanık kontrolörler ve gri öngörüsöl kontrolörler tanıtılacaktır.

3.1 PID Kontrolörler

PID kontrol en eski kontrol yöntemlerinden bir tanesidir. Bugünkü mikroişlemci uygulamalarına gelmeden önce ilk uygulamaları pnömatik sistemleri takiben analog elektronik devrelerde gerçekleştirilmiştir [29]. PID kontrolörün herhangi bir fabrika operatörünün anlayabileceği, kolayca ayarlayabileceği basit bir yapıya sahiptir. Yapısı PID kontrolden oluşan pek çok kontrol sistemi başarılı sonuçlar verdiğinden dolayı halen endüstride yaygın bir uygulama alanına sahiptir [30].

PID kontrolör oransal, integral ve türevsel olmak üzere 3 ayrı etkiden oluşur. Oransal etki anlık hata ile, integral etki hatanın toplamı ile, türevsel etki ise hatanın değişimi ile olan reaksiyona karar verir. Bu 3 etkinin toplamı bir sistemin kontrol edilen değişkeninin ayarlanmasını sağlar.

PID algoritmasında 3 farklı etkinin ağırlıklarını tetikleyen katsayıların ayarlanması ile sistemin kapalı çevrim dinamik davranışı kontrol edilir. PID kontrolör algoritması kullanılması sistemin optimal kontrolünü veya sistem kararlılığını garanti etmemektedir. Şekil 3.1'de paralel yapıdaki PID tipi kontrolörün blok diagramı gösterilmektedir.



Şekil 3.1 : PID Tipi Kontrolörün Blok Diagramı.

Oransal etki arttırıldığında sistem cevabı hızlanır [29], sürekli rejim hatası azalır fakat elemine edilemez [31]. Buna karşın salınımlar artar [32]. İstenilen referans değeri ile ölçülen sistem çıkışı arasındaki değere hata denir. P oransal ifadenin çıkışı, K_p oransal kazanç, e hata, t zaman değişkeni olmak üzere oransal ifade

$$P = K_p e(t) \quad (3.1)$$

olarak yazılır.

İntegral etki sistemin kapalı çevrim dinamik davranışının kararlı olduğu durumda birim basamak cevap için sürekli rejim hatasını elimine eder [29]. Diğer taraftan integral etki arttırıldığında salınımlar artacaktır [32]. İntegral ifadesi hem hata miktarı hem de hata süresi ile ilgilidir. I integral ifadenin çıkışı, K_i integral kazanç, e hata, t zaman, τ yapay integral değişkeni olmak üzere integral ifade

$$I = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (3.2)$$

olarak yazılır.

Kapalı çevrim dinamik davranışı salınımlı sistemler için kontrolör tasarlanırken türevsel etki kontrolörün yapısına eklenir [29]. Türevsel etki arttırıldığında sistem cevabı daha küçük salınımlara sahip olacaktır [32]. D türevsel ifadenin çıkışı, K_d türevsel kazanç, e hata, t zaman olmak üzere türevsel ifade

$$D = K_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (3.3)$$

olarak yazılır.

Oransal, integral ve türevsel kazançların etkileri Çizelge 3.1'de gösterilmektedir.

Çizelge 3.1 : Orantısal, İntegral ve Türevsel Kazançların Etkileri.

	Yükselme Zamanı	Aşım	Oturma Zamanı	Kararlı Hal Hatası
K_p	Azalır	Artar	Küçük Değişim	Azalır
K_i	Azalır	Artar	Artar	Elenir
K_d	Küçük Değişim	Azalır	Azalır	Küçük Değişim

PID tipi kontrolörün çıkışı oransal, integral ve türevsel etkiler toplanarak hesaplanır. Tanımlanan control çıkışı $u(t)$ aşağıdaki gibi yazılır.

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (3.4)$$

3.1.1 PID Tipi Kontrolörlerin Sınırları

PID tipi kontrolörlerin pek çok kontrol probleminde başarılı sonuçlar verirken bazı uygulamalarda yetersiz kaldıkları da görülmüştür. Özellikle, tek başlarına kullanıldıkları zaman kötü performans verebilirler.

PID tipi kontrolörler doğrusal olduklarından dolayı doğrusal olmayan sistemlerde PID tipi kontrolörlerin performansı değişkendir. Bu sebeple, çoğunlukla PID tipi kontrolörler PID kazanç planlaması veya bulanık mantık methodları ile geliştirilirler. Bu tezde, PID tipi kontrolör bulanık mantık methodu kullanılarak geliştirilecektir.

Pratik uygulamalarda sistemin parametre değerlerinde değişimler veya belirsizlikler söz konusu olabilir [33]. Ayrıca kontrolöre bağlı ölçü aletlerinden kaynaklanan sorunlar çıkabilir. Yeterli yüksek örnekleme oranı, ölçme hassasiyeti ve ölçme kesinliği yeterli kontrol performansını başarmak için gereklidir. Diğer bir problem ise türev ifadesinin gürültüden dolayı çıkışta büyük değişimlere sebep olabilmesidir. Bu sebeple, yüksek frekanstaki gürültü bileşenlerini silmek için ölçümleri alçakgeçiren filitrelerle süzmek yararlı olacaktır [32,34].

3.2 Bulanık Mantık

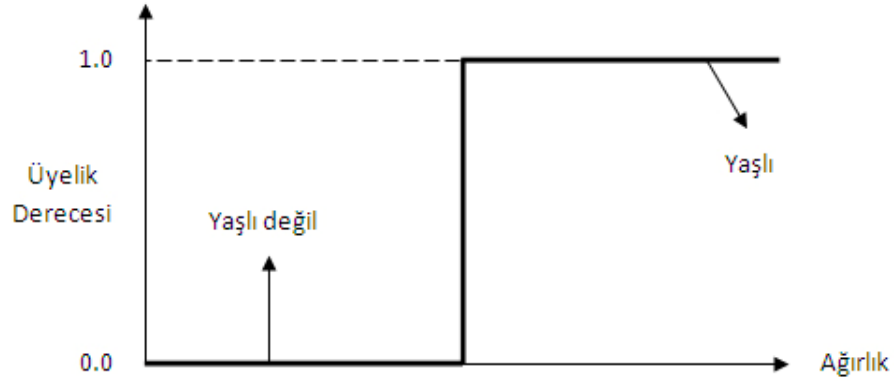
Klasik mantık sonuçları 0 ya da 1 olarak sınırlarken bulanık mantık çok değerli mantığın bir formu olduğundan ötürü sonuçları 0 ile 1 arasındaki değerler olarak belirtmektedir. Diğer bir deyişle, bulanık mantık mutlak doğru ve mutlak yanlış gibi kesin değerlendirmeler yapmak yerine yaklaşık değerler tanımlar. Bulanık mantık insan aklının düşünme mantığı gibi doğrunun derecesine dayalı bir değerlendirme yapar. Bu yönüyle bulanık mantık insan aklının düşünme biçimine en yakın mantık sistemidir [35,36]. Klasik mantığa göre insanın boyu ya uzundur ya da kısa. Fakat, bulanık mantığa göre insanın boyu çok uzun, uzun, kısa veya çok kısa olabilir.

"Fuzzy Sets [Bulanık Kümeler]" klasik küme kavramına alternatif olarak 1965 yılında Lotfy A. Zadeh tarafından yayınlandı [37]. İlerki yıllarda Lotfy A. Zadeh bulanık kümeler teorisine dayanarak dilbilimsel yaklaşım ve sistem analizi hakkında çalışmalarını genişletti [38-40]. Daha sonra Lotfy A. Zadeh tarafından bulanık kontrolün temel düşünceleri önerildi [40,41]. Bulanık kontrolün ilk uygulaması ise Mamdani tarafından bir buhar makinesini kontrol etmek amacıyla gerçekleştirildi [42-45]. Bu uygulama bulanık mantığın bir kontrol sistemine uygulanışının ilk örneğiydi. Aynı zamanda Kickert ve Van Nauta Lemke bir su tesisinin sıcaklık kontrolünü bulanık kontrol uygulayarak gerçekleştirdi [46]. Bu başarıdan sonra King ve Mamdani tarafından bir kimyasal reaktörün kontrolü gene bulanık kontrol kullanılarak gerçekleştirilmeye çalışıldı [47]. 1975 yılına gelindiğinde bulanık kontrolün ilk endüstri uygulaması Danimarka'da bir çimento fırınının kontrolünde gerçekleştirildi [48,49]. 1980'li yılların ortalarına gelindiğinde ard arda bulanık kontrol ilkelerine dayanan uygulamalar görülmeye başlandı. 1983 yılından başlayarak 1985 yılına kadar Seiji Yasunobu ve arkadaşları bulanık kontrolün otomatik tren operasyon kontrolü için daha iyi bir kontrolör olduğunu gösteren benzetim sonuçlarını yayınladı [50-53]. 1987 yılına gelindiğinde bu düşünce hayata geçirilerek Sendai demiryolundaki hızlanma, frenleme, durma gibi kritik bütün operasyonlar bulanık kontrol algoritması ile sağlandı. Bu başarılı uygulamadan cesaret alarak Seiji Yasunobu ve Toshitsugu Hasegava otomatik konteyner vinci operasyon sistemi çalışmalarını gerçekleştirdi [53-55]. Aynı yıllarda Takeshi Yamakawa bir klasik kontrol problemi olan ters sarkacı bulanık kontrol kullanarak gerçekleştirdi [56]. Bu uygulamalardan sonra hem endüstri hem de tüketici uygulamaları için çok geniş alanda bulanık sistemler geliştirildi. Daha sonraları bulanık mantık mühendis dışı alanlarda da uygulanmaya başlandı.

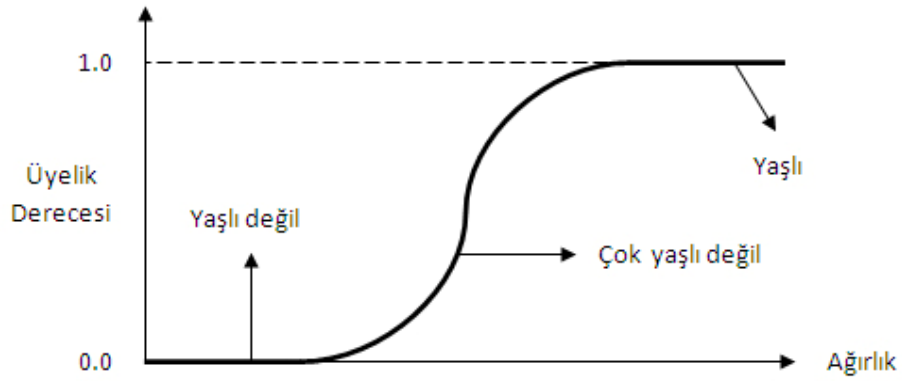
3.2.1 Bulanık Mantığın Temel Kavramları

Lotfy A. Zadeh 1965 yılındaki makalesinde bulanık mantığın temelini bulanık kümelere dayandırmıştı [37]. Klasik mantıkta bir eleman bir kümeye ya aittir ya da değildir. Bulanık mantık ise belirsizlik içerdiği için bir eleman bir kümeye hem ait olabilir hem de olmayabilir. Bulanık kümelerde her bir elemana bir üyelik derecesi atanır. Bu üyelik derecesine göre elemanın küme ile olan üyelik ilişkisi belirlenir. Eğer eleman kümeye ait ise elemanın üyelik derecesi 1'dir, eğer eleman kümeye ait

değil ise elemanın üyelik derecesi 0'dır. Üyelik fonksiyonunun girişleri kesin değerlerken çıkışları bulanık değerlerdir.



Şekil 3.2 : Bir Keskin Küme için Üyelik Fonksiyonu.



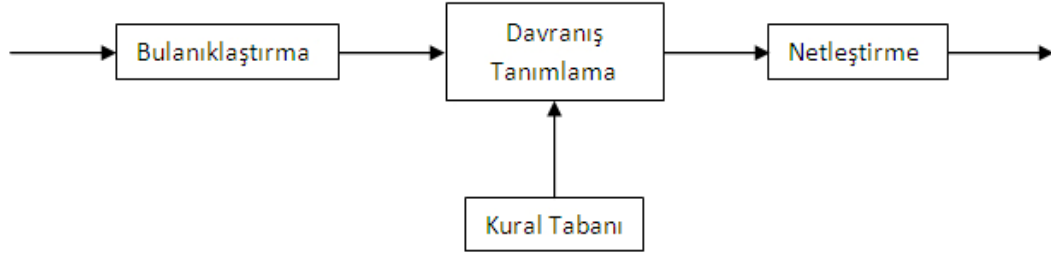
Şekil 3.3 : Bir Bulanık Küme için Üyelik Fonksiyonu.

Şekil [3.2] ve Şekil [3.3] klasik mantık ile bulanık mantık arasındaki farkı göstermektedir. Şekil [3.2]'de görüldüğü gibi üyelik fonksiyonu keskin geçişlidir. Giriş değerlerindeki küçük değişikliklere karşı çıkış değerlerinde büyük değişikliklere sebep olabilir. Şekil [3.3]'de üyelik fonksiyonu yumuşak geçişlidir.

Bulanık mantıkta karar aşaması "Eğer-İse" önermeleri formundaki kural tabanına dayanır. Kural tabanını oluşturan bu kurallar sistemi tasarımcı tarafından yazılır. "Eğer" kısmı antesedan adı verilen akıl yürütmenin bir kısmını, "İse" kısmı ise sonuç adı verilen diğer kısmı oluşturmaktadır.

3.3 Bulanık Kontrol

Şekil [3.4]'de görüldüğü gibi bir bulanık kontrolör bulanıklaştırma, davranış tanımlama, kural tabanı ve netleştirme olmak üzere 4 ana başlık altında toplanabilir.



Şekil 3.4 : Bulanık Kontrolör Blok Diagramı.

Bir bulanık kontrolörün girişine gelen kesin değerler *bulanıklaştırma* işleminde her giriş bulanık kümesi için bulanık değerlere çevrilir. Elde edilen bulanık değerler ile *davranış tanımlamada kural tabanındaki* kurallara dayanarak bulanık kararlar elde edilir. *Netleştirme* işleminde bulanık kararlar kesin değerlere çevrilir.

3.3.1 Bulanıklaştırma

Bulanıklaştırma kesin bir giriş değerini bir veya birden fazla bulanık kümeye ayırma işlemidir. Bulanıklaştırma işleminde giriş değerleri kural tabanındaki kurallarla karşılaştırılarak hangi dilbilimsel karşılığı elde edeceği belirlenir. Çok çeşitli eğriler olmasına rağmen gömülü kontrolörlerde temsili daha kolay olduğundan üçgen ve ikizkenar yamuk üyelik fonksiyonları en çok kullanılanlardır.

3.3.2 Kural Tabanı

Kural tabanı sistemin nasıl kontrol edileceğini içeren bilgiyi bir kural takım formunda içinde barındırır. Bu kural takımı "Eğer-İse" önermesi şeklindedir ve genellikle sistemi çok iyi bilen bir tasarımcı tarafından yazılır. Ancak bazı uygulamalarda kurallar sinir ağları ve genetik algoritma gibi yaklaşımlarla da elde edilebilir [57].

3.3.3 Davranış Tanımlama

Davranış tanımlama kural tabanındaki hangi kontrol kuralının amaca uygun olduğunu değerlendirir. Daha sonra kontrolör çıkışının ne olması gerektiğine karar verir. Sonuç bir bulanık kararlar kümesidir.

3.3.4 Netleştirme

Davranış tanımlama işleminden sonra dilbilimsel bir sonuç elde edilir. Bu sonucun sisteme bir kontrol sinyali olarak gönderilebilmesi için kesin bir sayısal değere çevrilmesi gerekir. Bulanıklaştırma işleminin tersi olan bu işleme netleştirme işlemi

denir. Birkaç netleştirme işlemi vardır. Bunlar "Centre of Gravity (COG)", "Centre of Gravity Method for Singletons (COGS)", "Bisector of Area (BOA)", "Mean of Maxima (MOM)", "Leftmost maximum (LM)" ve "Rightmost maximum (RM)" olarak sıralanabilir.

3.3.5 Bulanık Kontrolün Avantaj ve Dezavantajları

Bulanık kontrolörler sistemi iyi bilen bir tasarımcı performansını andırması için geliştirildiler. Tasarımcı bilgisi sözel kurallar formunda şifrelenerek kontrolörlerin yapısına eklendi. Bu yönleriyle geleneksel analitik kontrol yöntemlerine bir alternatif oluşturdular. geleneksel kontrolörlerin en büyük dezavantajı PID tipi kontrolörlerin sistemi doğrusal olarak varsayması veya belirli bir nokta etrafında doğrusal davrandığını kabul etmesidir. Bu sebeple bulanık kontrolörler PID tipi kontrolörlere göre doğrusal olmayan sistemlerde daha başarılı sonuç verirler.

Bir sistemin kesin matematiksel modelini elde etmek mümkün değildir. Pratikte doğrusal olmayan, belirsiz, zamanla değişen, karmaşık, iyi tanımlanmamış sistemler söz konusudur. Bu sebeple sistemlerin kontrolü için bulanık kontrolörler gibi kesin matematiksel modele ihtiyacı olmayan kontrolörler tasarlanmalıdır. Eğer sistem hakkında hiç birşey bilinmiyorsa sistem için bulanık kontrolör tasarlamak imkansızdır.

Bulanık kontrolün en belirgin dezavantajı kararlılık, dayanıklılık ve en iyilik gibi kontrolör performansını analiz etme eksikliğidir. Sistemin nasıl cevap vereceği önceden kestirilemez. Yapılacak tek şey benzetimlerle davranışı kestirmeye çalışmaktır. Bu sebeple, bulanık denetimde kullanılan kurallar deneyime çok bağlıdır. Diğer bir dezavantaj ise PID tipi kontrolör 3 tane ayarlanabilir parametre içerirken bulanık kontrolörler çok fazla ayarlanabilir parametre içerir. Bunlardan bazıları giriş ve çıkış üyelik fonksiyonlarının yapısı ve sayısı, kural tabanı olarak sıralanabilir. En önemli nokta kural tabanı ve üyelik fonksiyonunun parametrelerinin seçimidir.

3.4 Gri Sistem Kuramı

Gri sistem teorisinin adı araştırılan konuların renkleri üzerine dayandırılmıştır. Kontrol teorisinde renklerin koyuluğu elde edilen bilginin kesinlik derecesini işaret etmek için kullanılır. Örneğin bir sistemin matematiksel modeli, içsel ilişkileri ve

yapısı tamamen bilinmiyorsa siyah sistem olarak adlandırılır. Diğer taraftan tamamen biliniyorsa beyaz sistem olarak adlandırılır. Yukarıdaki tanımlar dikkate alınarak matematiksel modeli, içsel ilişkileri ve yapısı kısmi olarak bilinen ve kısmi olarak bilinmeyen sistem gri sistem olarak adlandırılır. Gerçek hayatta her sistem az veya çok belirsizlik içerdiğinden dolayı her sistem gri sistem olarak düşünülebilir.

İnsanların elde ettiği bilgiler hem içeriden ve hem de dışarıdan gelen bozucular ve kavramsal düzey sınırlamaları yüzünden daima belirsizdir. Bilim ve teknolojiadaki gelişmelerle birlikte çeşitli sistemlerdeki belirsizliği insanların anlaması öncesine göre daha kolaylaştı. 20. yüzyılın ortalarından sonra mühendislik alanında belirsizlik üzerine çeşitli sistem teorileri ve metotları ortaya çıkmıştır.

1982 yılında Julong Deng gri sistem üzerine ilk yayını "The Control Problem of Grey System" adıyla "System and Control Letters" adlı uluslararası dergide yayınladı [58]. Bu yayın gri sistem teorisinin yeni bir konu olarak doğuşunu başlatmıştı. Gri sistem teorisi 1980'li yılların başında yapısı ve davranışı üzerine bilgi eksikliği olan sistemler düşünülerek bir araç olarak önerilmiştir. Gri model öngöründe bulunmak ve karar vermek için uygulanabilir olduğundan dolayı tamamlanamayan veya belirsiz bilgiler içeren sistemlerin üstesinden gelmenin bir yoludur.

Gri kontrolörlerin en başarılı uygulamalarının gerçek zamanlı uygulamalarda olduğu görülmektedir. Gri sistem teori metodu sistemin çıkışından sadece 4 değer alarak sistemin bir sonraki değerini tahmin eder. Her zaman yeni bir veri alındığında, orijinal veri setindeki en eski veri silinerek onun yerine orijinal veri setine eklenir. Böylece gri öngörü doğrusal olmayan zamanla değişen sistemlerde öngörüyü sağlamak için kendini yeniler. Bu durumda gri kontrolörler belirsizliklere ve diğer bozucu etkenlere karşı klasik kontrolörlere göre çok daha gürbüz davranış gösterirler.

Gri öngörü kontrolörleri birçok farklı disipline uygulanmıştır. Bunlardan bazıları şöyle sıralanabilir. Torna işlemi sırasında kesme kuvvetini belirlerken belirsizlikler söz konusudur. Bu belirsizlikler göz önüne alınarak gri bulanık kontrolör önerildi [59-61]. Dingdu [62] elektrikli ocak kontrolünde ve Qi [63] teflon tencere oluşumunda polimerleşen tencerenin sıcaklık kontrolü için gri öngörü kontrolü önermiştir. Disiplinler arası bir konu olan elektro-hidrolik basınç kontrolünde gri öngörü kontrolör önerilmiştir [64]. Klasik bir kontrol problemi olan ters sarkaç kontrolünü için gri öngörü kontrolör önerilmiştir [65]. Gene yaygın olarak kullanılan

bir doğru akım motorunun kontrolünü için de gri öngörü kontrolör önerilmiştir [66]. Jiguang [67] çok daha farklı bir konu olan gemi denge kontrolünde gri öngörü kontrolörleri önermiştir. Mobil robot uygulamalarında yörünge kontrolü ve hedef konumu tahmini alanlarında gri sistemden yararlanılmıştır [68,69]. Mühendislik alanlarının yanı sıra sosyal bilimlerde de gri sistem uygulama alanları bulmuştur. Akay [70] gri öngörü metodunu kullanarak Türkiye'nin gelecekteki elektrik talebini tahmin etmişlerdir. Kontrol mühendisliğinde gri sistemin pek çok alanda uygulandığı görülür. Örneğin, Zhang [71] ayırık kontrolörler için gri öngörü kontrolör önerirken Ruiqing [72] büyük zaman gecikmeleri olan sistemler için gri öngörü tabanlı tek nöron yapılı kontrolörler önermiştir. Rongcheng [73] artık hata modelini geliştirerek adaptif gri bulanık kontrolörü, Wei [74] iteratif öğrenme tabanlı gri öngörü kontrolü analiz etmiştir. Wong [75] ve Feng [76] çevrimiçi olarak gri öngörü kontrolörün adım büyüklüğünü ayarlayan kontrolör tasarımı gerçekleştirmiştir. Chiang [77] ise G(2,1) modelini kullanarak eş zamanlı relüktans motorunun hız kontrolünü sağlamıştır.

3.4.1 GM(m,n) Model

Gri modeller sistemin matematiksel modelini, yapısını bilmeksizin sadece sistemin çıkış değerlerini alarak sistemin gelecekteki çıkış değerleri tahmin eder. Gri sistem kuramında GM(m,n) gösterimi, m'inci mertebeden bir diferansiyel denklemler ve n adet değişkenli bir modeli temsil eder. GM(1,1) modeli "Birinci Mertebeden Bir Değişkenli Gri Model" olarak okunur.

3.4.2 GM(1,1) Model

GM(1,1) model sadece sıfırdan büyük sistem çıkışları için kullanılabilir. Bu tezde doğrusal olmayan bir mobil robot ele alınmıştır. Söz konusu mobil robotun hızı daima sıfırdan büyük olacağı için, GM(1,1) modeli mobil robotun hız kontrolü için kullanılabilir.

Bir sistemin çıkışının aldığı değerler $X^{(0)}$ veri dizisi olarak ifade edilir:

$$X^{(0)} = (C_{i,1}^{(0)}, C_{i,2}^{(0)}, \dots, C_{i,n}^{(0)}) \quad n \geq 4 \quad (3.5)$$

$C_{i,k}^{(m)}$ ifadelerin matematiksel açılımı

$$C_{i,k}^{(m)} = \sum_{j=1}^k C_{i,j}^{(m-1)}, k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.6)$$

olmak üzere $X^{(0)}$ veri dizisine biriktirme işlemi uygulanırsa yeni bir veri dizisi olan $X^{(1)}$ veri dizisi

$$X^{(1)} = (C_{i,1}^{(1)}, C_{i,2}^{(1)}, \dots, C_{i,n}^{(1)}), n \geq 4 \quad (3.7)$$

olarak elde edilir.

İşlenmemiş veri dizisinin ardışık iki elemanının ortalama değerleri $d^{(1)}(k)$ dizisi

$$d^{(1)}(k) = 0,5C_{i,k}^{(m)} + 0,5C_{i,k-1}^{(m)}, k = 2, 3, \dots, n \quad (3.8)$$

olarak yazılır. $D^{(1)}$ dizisi

$$D^{(1)} = (d^{(1)}(1), d^{(1)}(2), \dots, d^{(1)}(n)) \quad (3.9)$$

olarak elde edilir.

Oluşturulan veri dizisinden bir doğrusal eğri oluşturulur. Böylece a ve b parametreleri aşağıdaki denklem yardımıyla elde edilir.

$$\frac{dX^1(t)}{dt} + aX^1(t) = b \quad (3.10)$$

Yukarıdaki denkleme göre $\hat{C}_{i,t}^{(1)}$ ifadesinin k anındaki çözümü

$$\hat{C}_{i,k+1}^{(1)} = \left[\hat{C}_{i,1}^{(0)} - \frac{b}{a} \right] e^{-ak} + \frac{b}{a} \quad (3.11)$$

olarak elde edilir.

Yukarıdaki $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ değişkenleri en küçük kareler yöntemi ile hesaplanır.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (3.12)$$

Y ve B matrisleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$Y = [C_{i,2}^{(0)}, C_{i,3}^{(0)}, \dots, C_{i,n}^{(0)}]^T \quad (3.13)$$

$$B = \begin{bmatrix} -d^{(1)}(2) & 1 \\ -d^{(1)}(3) & 1 \\ . & . \\ . & . \\ -d^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$\hat{C}_{i,k+1}^{(1)}$ veri dizinine ters birikim işlemi uygulanırsa öngörü modeli elde edilir.

$$\hat{C}_{i,k+1}^{(0)} = \hat{C}_{i,k+1}^{(1)} - \hat{C}_{i,k}^{(1)} = \left[\hat{C}_{i,1}^{(0)} - \frac{b}{a} \right] e^{-ak} (1 - e^a) \quad (3.15)$$

H adım sonraki değeri hesaplamak için kullanılacak matematiksel ifade:

$$\hat{C}_{i,k+H}^{(0)} = \left[\hat{C}_{i,1}^{(0)} - \frac{b}{a} \right] e^{-a(k+H-1)} (1 - e^a) \quad (3.16)$$

olarak elde edilir.

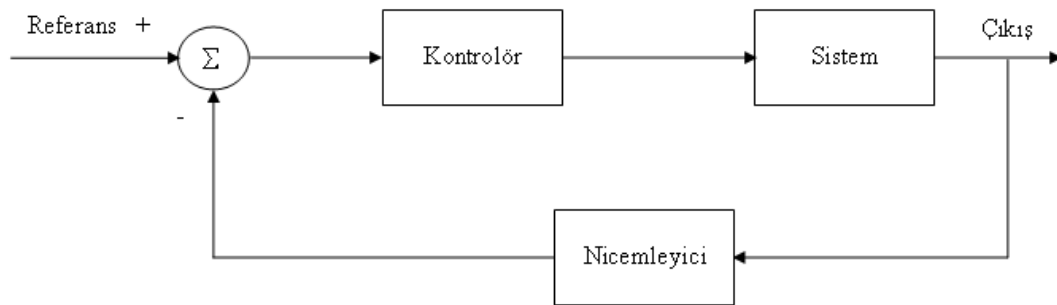
3.4.3 GM(1,1) Model

GM(1,1) modeli oluşturulurken veri dizisinde 4 adet veri tutulur. Eğer bu veri dizisinde tutulan 4 adet veri her yeni gelen veriler yardımıyla güncelleniyorsa buna "Yuvarlanan GM(1,1) model" denir.

Örneğin $C_{i,k}^{(0)}$, $C_{i,k+1}^{(0)}$, $C_{i,k+2}^{(0)}$ ve $C_{i,k+3}^{(0)}$ veri değerleri kullanılarak $C_{i,k+4}^{(0)}$ tahmin edilirse veri dizindeki ilk veri atılır, tahmin edilen değer veri dizinin sonuna eklenir. Böylece $C_{i,k+1}^{(0)}$, $C_{i,k+2}^{(0)}$, $C_{i,k+3}^{(0)}$ ve $C_{i,k+4}^{(0)}$ veri dizisi elde edilir ve bu veri dizisi kullanılarak $C_{i,k+5}^{(0)}$ verisi tahmin edilir. Bu düzen en son aşamaya kadar sürekli olarak devam eder. Bu tezde yuvarlanan GM(1,1) modeli, doğrusal olmayan mobil robot hızının öngörülmesi amacıyla kullanılmıştır.

4. BENZETİMLER

Pratikte, kontrolör ayrık zamanda olacaktır. Bölüm 2’de elde edilen denklemler ise sürekli zamanlıdır. Dolayısıyla benzetimler gerçekleştirilirken gerçeğe uygunluk açısından sistemin çıkışları ayrıştırılacaktır. Bu bölümde Simulink/MATLAB paket programı kullanılarak yapılan benzetimlerde sistem çıkışlarına "quantizer [nicemleyici]" konularak ayrıklaştırma işlemi yapılacaktır. Sabit hız kontrolü yapılırken ayrıklaştırma zamanı 0.001 s, yörünge kontrolünde ise ayrıklaştırma zamanı 0.001 s, 0.1 s ve 0.15 s olarak seçilmiştir. Ayrıklaştırma işleminin nasıl yapıldığına ait blok diyagramı Şekil 4.1’de gösterilmektedir.

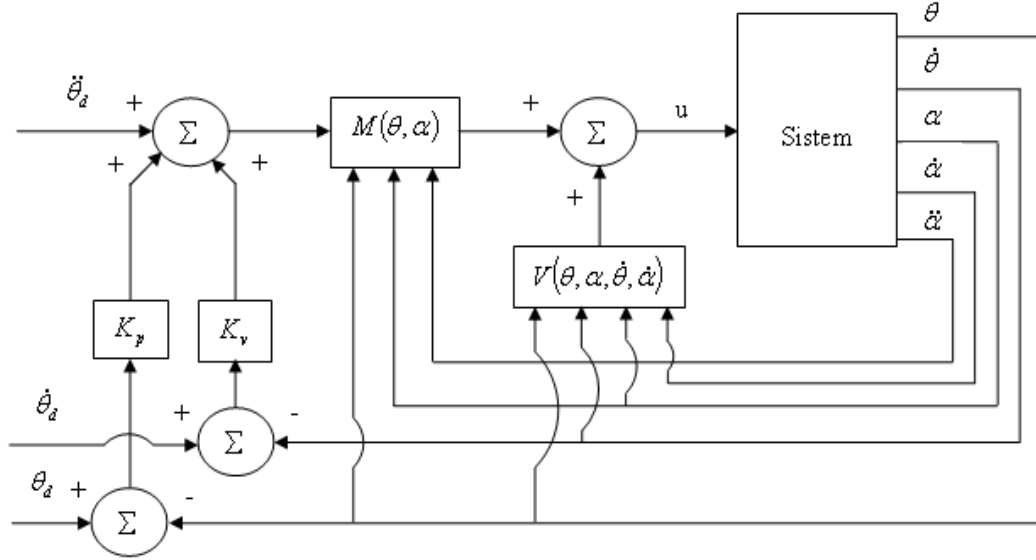


Şekil 4.1 : Nicemleyici Gösterimi için Blok Diagramı.

Dinamik modelde sürtünme etkisinin modellenmesi oldukça zordur. Bu nedenle, sürtünme etkisinin modellenmesi yerine sönüm fonksiyonu tanımlanır. Örneğin, bir manipulatör bir cismi tutup kaldırdığı zaman cismin atalet momenti ve kütlesi manipulatörün parametrelerini değiştirecektir. Bu sebeple, toplam kütle, atalet momenti ve kütle merkezinin yeni değerlerle güncelleştirilmesi gerekmektedir. Ancak, pek çok uygulamada tutup kaldırılan cismin kütlesi ve atalet momenti bilinmemektedir. Sonuç olarak, sistemin kesin dinamik modelini sürdürmek kolay değildir. Bu gibi durumlarda dinamik model kesin olarak bilinmediğinden dolayı hesaplanmış tork kontrol methodu kullanılarak manipulatörün kontrolü sağlanır [78].

Çift eksenli harekette küresel robotun hareket denklemlerini elde etmek için ayrıştırılmış dinamik yaklaşımı kullanılmıştır. Bu yaklaşımda bir serbestlik

derecesinin diğer bir serbestlik derecesine etki etmediğinin varsayıldığını Bölüm 2.3'de bahsetmiştik. Bu yaklaşım dikkate alınırsa sistemin dinamik modelinin kesin olarak bilinemeyeceği söylenebilir. Bu sebeple, hesaplanmış tork kontrol methodu sistemi kontrol etmek için kullanılır. Kontrolörün genel yapısı Şekil4.2'de gösterilmektedir.



Şekil 4.2 : Hesaplanmış Tork Kontrol Methodu İçin Kontrolörün Genel Yapısal Diagramı.

Benzetimlerde kullanılacak sisteme ait parametreler, $M_s = 3$ kg, $m_p = 2$ kg, $R = 0,2$ m, $l = 0,075$ m ve $g = 9,81$ m/s^2 olarak seçilmiştir. Örneklemme zamanı ise 0.1 s olarak alınmıştır.

4.1 Kontrolör Tasarımı

Genel olarak mekanik sistemlerin hareket denklemleri aşağıdaki formda yazılır:

$$M(q(t))\ddot{q}(t) + V(q(t), \dot{q}(t)) = u(t) \quad (4.1)$$

Sistemin kararlılık analizini yapmak için sistemdeki yüksek dereceden ifadeler yok edilmelidir [79]. Bu sebeple, u girişi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$u(t) = V(q(t), \dot{q}(t)) + K_v \dot{e}(t) + K_p e(t) + M(q(t))\ddot{q}_d(t) \quad (4.2)$$

K_p ve K_v pozitif sabitler olmak koşuluyla kararlı kapalı çevrim dinamiği aşağıdaki gibi elde edilir.

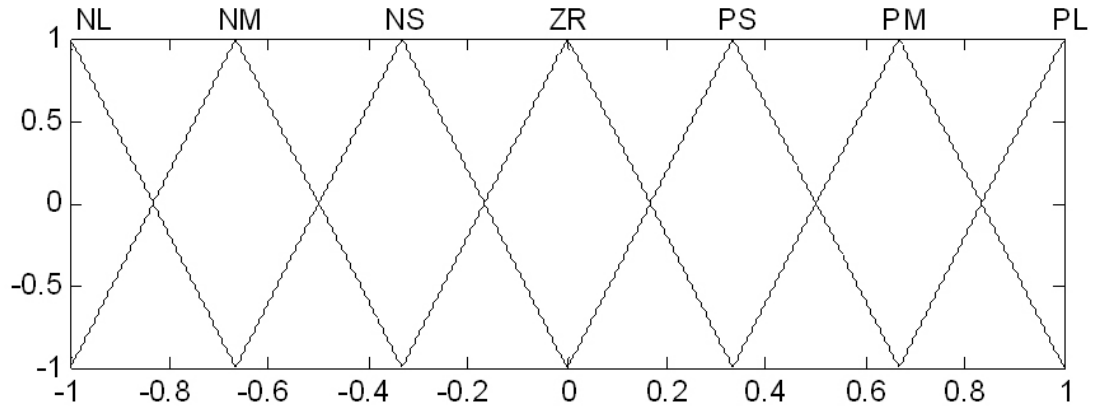
$$\ddot{e}(t) + K_v \dot{e}(t) + K_p e(t) = 0 \quad (4.3)$$

4.2 Bulanık Kontrolör için Kural Tablosu ve Üyelik Fonksiyonları

Bir bulanık kontrolör çıkarım tablosunda kurallar tasarımcı tarafından belirlenir. Bu çalışmada kullanılan bulanık kontrol kural tablosu Çizelge 4.1'de gösterilmiştir. Hatanın, hatanın türevinin ve kontrol işaretinin üyelik fonksiyonları üçgensel biçimli işlevler olarak seçilmiş ve Şekil 4.3'de gösterilmiştir.

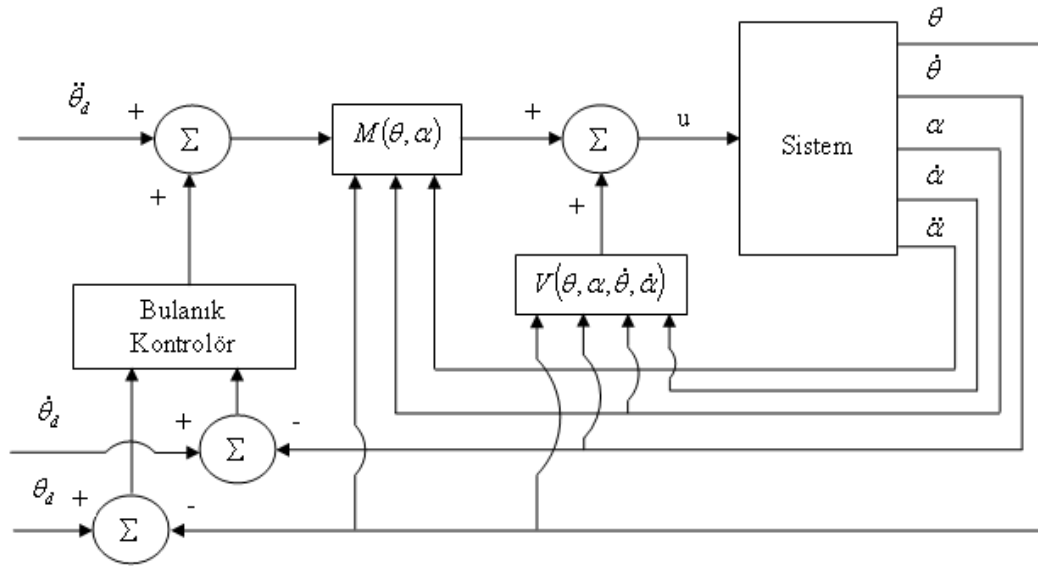
Çizelge 4.1 : Genel Bir Bulanık Kontrolör Kural Tablosu.

$e/\dot{e}$	NL	NM	NS	ZR	PS	PM	PL
PL	ZR	PS	PM	PL	PL	PL	PL
PM	NS	ZR	PS	PM	PL	PL	PL
PS	NM	NS	ZR	PS	PM	PL	PL
ZR	NL	NM	NS	ZR	PS	PM	PL
NS	NL	NL	NM	NS	ZR	PS	PM
NM	NL	NL	NL	NM	NS	ZR	PS
NL	NL	NL	NL	NL	NM	NS	ZR



Şekil 4.3 : e , $\dot{e}$ ve u 'nun Üyelik İşlevleri.

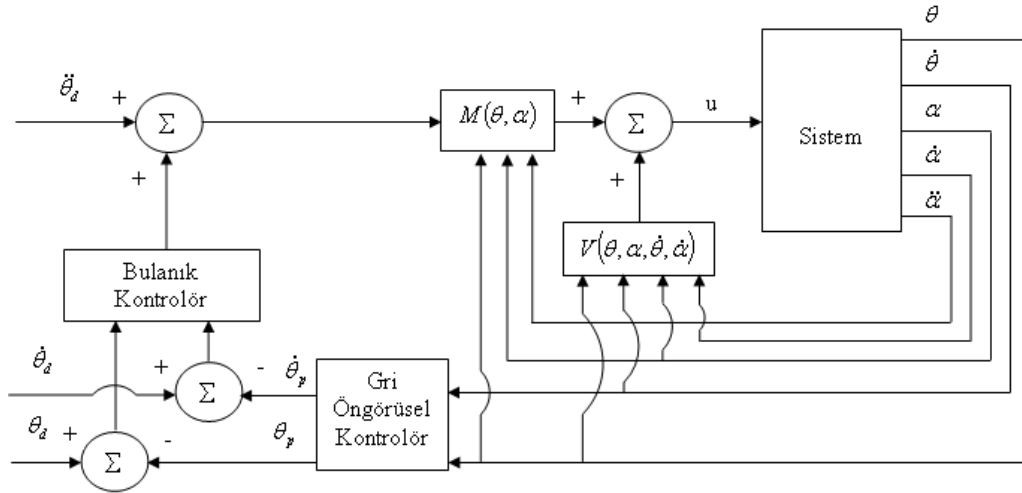
Bir bulanık kontrolör iki giriş ve bir çıkıştan oluşur. Bu nedenle, bir bulanık kontrolörün yaklaşık olarak zamanla parametreleri değişen bir geleneksel kontrolör gibi davrandığı söylenebilir. Şekil 4.4'de bulanık hesaplanmış tork kontrolü için kontrolörün genel yapısı gösterilmektedir.



Şekil 4.4 : Bulanık Hesaplanmış Tork Kontrol Methodu için Kontrolörün Genel Yapısal Diagramı.

4.3 Gri Öngörüsöl Kontrolör

Gri öngörü kontrolü sistemin çıkış değerlerinden en son 5 tanesini alır ve gelecekteki sistemin değerini tahmin eder. Şekil 4.5'de gri bulanık hesaplanmış tork kontrolü için kontrolörün genel yapısı gösterilmektedir.



Şekil 4.5 : Gri Bulanık Hesaplanmış Tork Kontrol Methodu için Kontrolörün Genel Yapısal Diagramı.

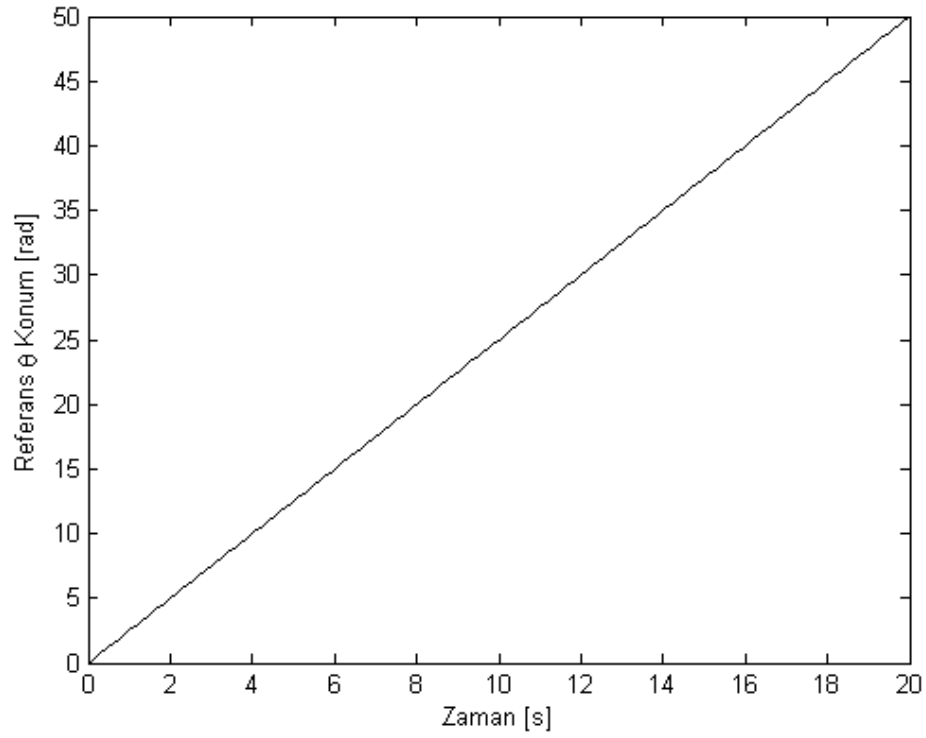
Bu bölümde gösterilen blok diyagramlarının simulink uygulamaları Ekler EK B.1 bölümünde gösterilmektedir.

4.4 Tek Serbestlik Dereceli Sarkaç ile Doğrusal Yörüngede Hareket Kontrolü

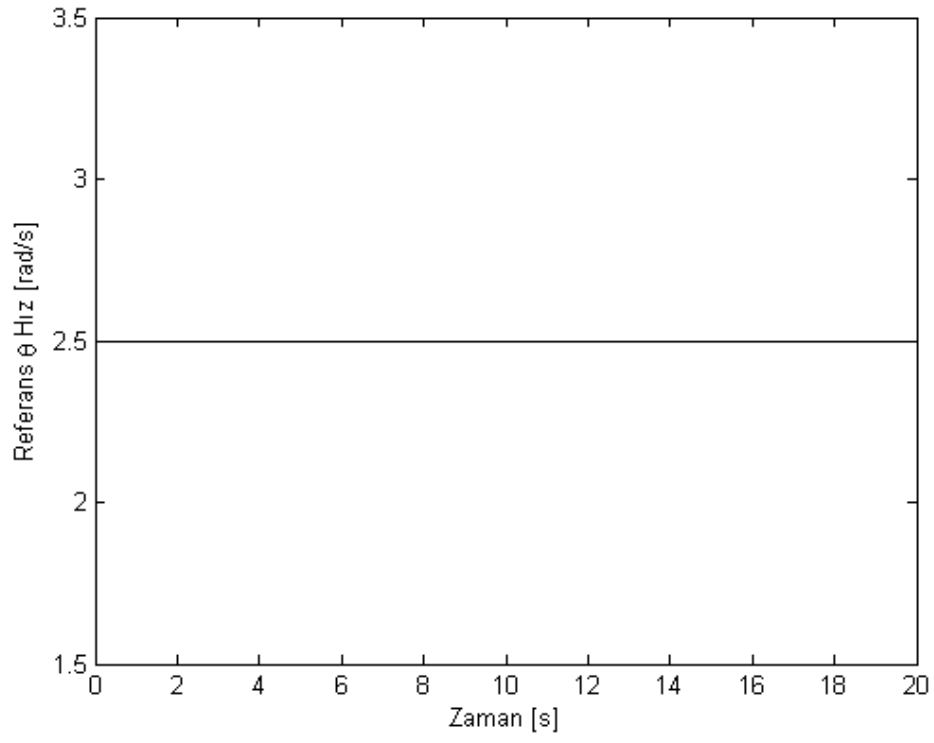
Tek serbestlik dereceli sarkaç ile doğrusal yörüngede sabit hız kontrolü yapılacaktır.

4.4.1 Doğrusal Yörüngede Sabit Hızla Hareket

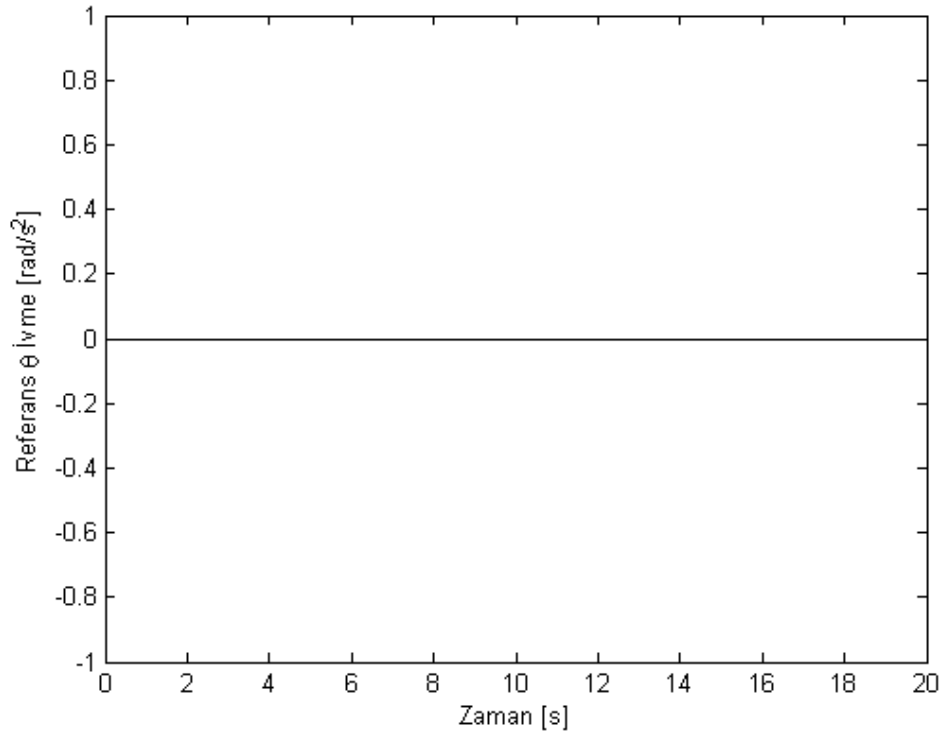
Doğrusal yörüngede sabit hızla hareket için referans konum, hız ve ivme grafikleri Şekil 4.6, 4.7 ve 4.8'de sırasıyla gösterilmektedir.



Şekil 4.6 : Referans θ Açısal Konum.

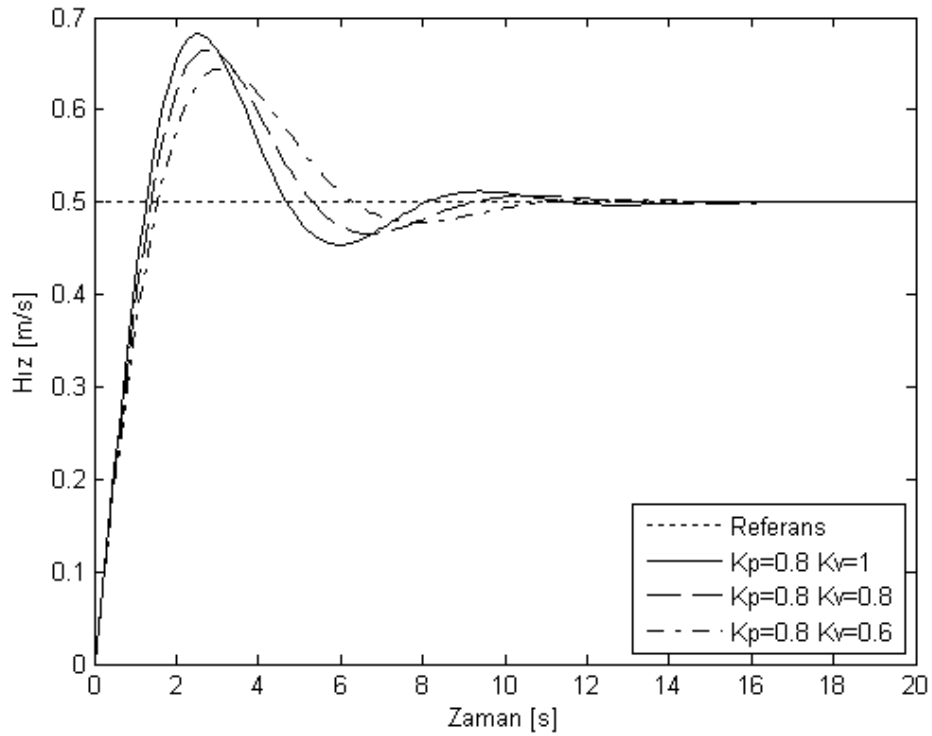


Şekil 4.7 : Referans θ Açısıl Hız.

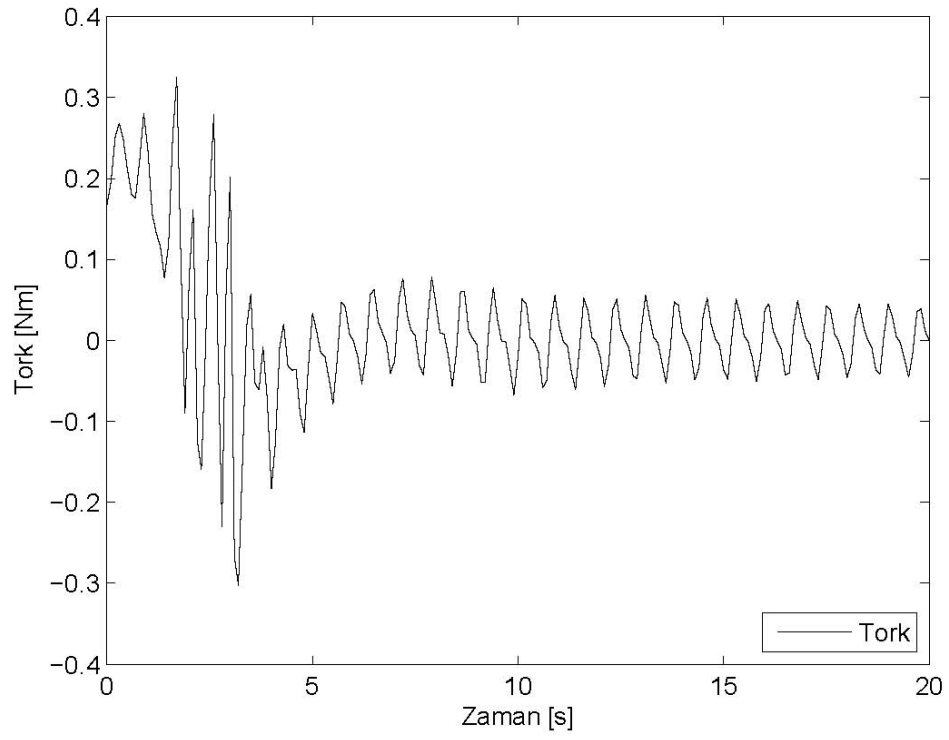


Şekil 4.8 : Referans θ Açısıl İvme.

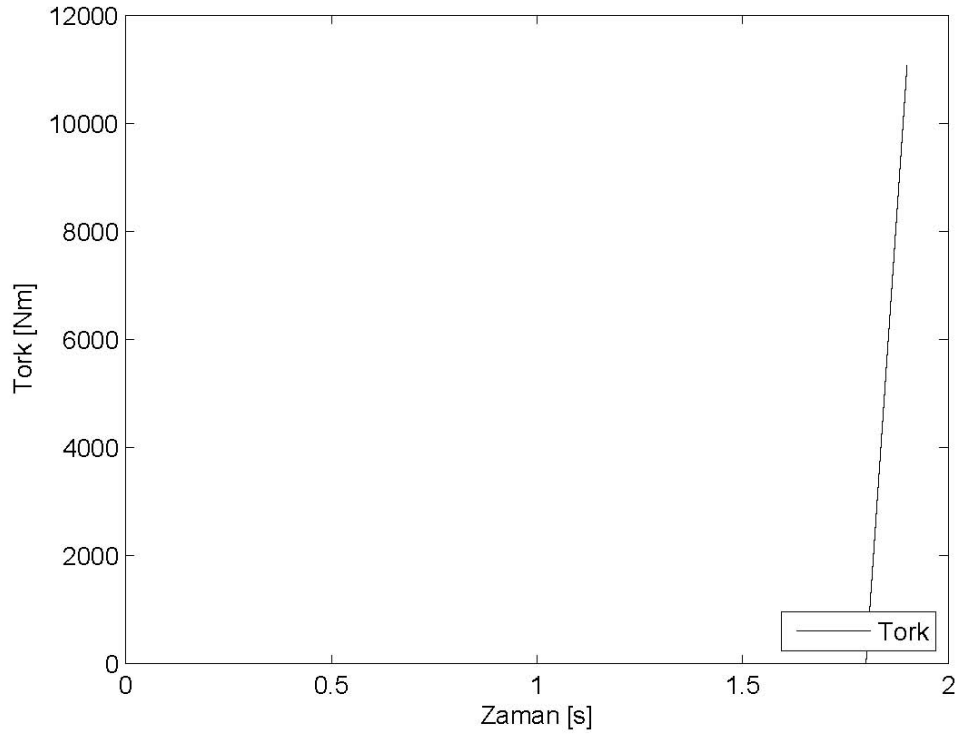
Şekil 4.9 hesaplanmış tork kontrol methodu için K_v sabitinin belirlenmesini göstermektedir. Şekilde de görüldüğü gibi K_v katsayısı arttıkça sistem cevabındaki aşma da artmaktadır. Gri öngörüsnel kontrolün sistemi düşük bir aşım ile kontrol edebileceği bildiğinden dolayı bu aşmaların büyük olması bu aşamada önemsenmez. K_v sabitinin değeri arttıkça sistem hızlanmakta aynı zamanda sistemin üretmesi gereken tork değeri de artmaktadır. Şekil 4.11 'de görüldüğü gibi $K_v = 1.25$ değeri için tork değeri sonsuza gitmektedir. Bu sebeple, sistem için K_v sabiti 1 olarak seçilir. $K_p = 0.8$, $K_v = 1$ için giriş momenti cevabı Şekil 4.10'de gösterilmektedir.



Şekil 4.9 : HTK Methodu İçin Sistem Cevabı - K_v Katsayısını Belirme.

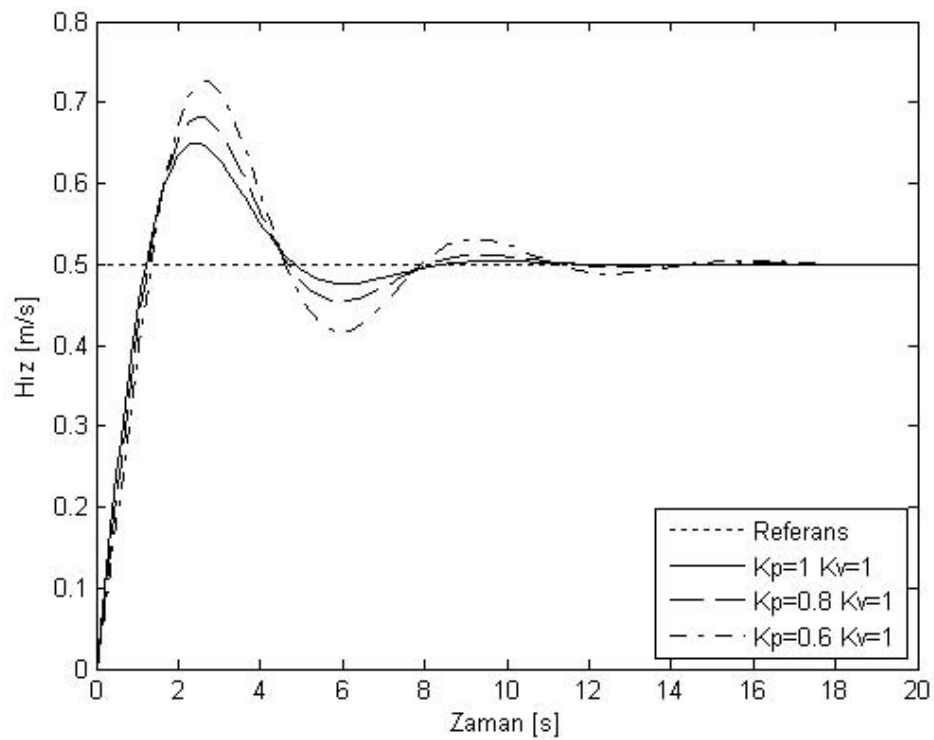


Şekil 4.10 : $K_p = 0.8$, $K_v = 1$ Katsayı Değerleri İçin Giriş Momenti.

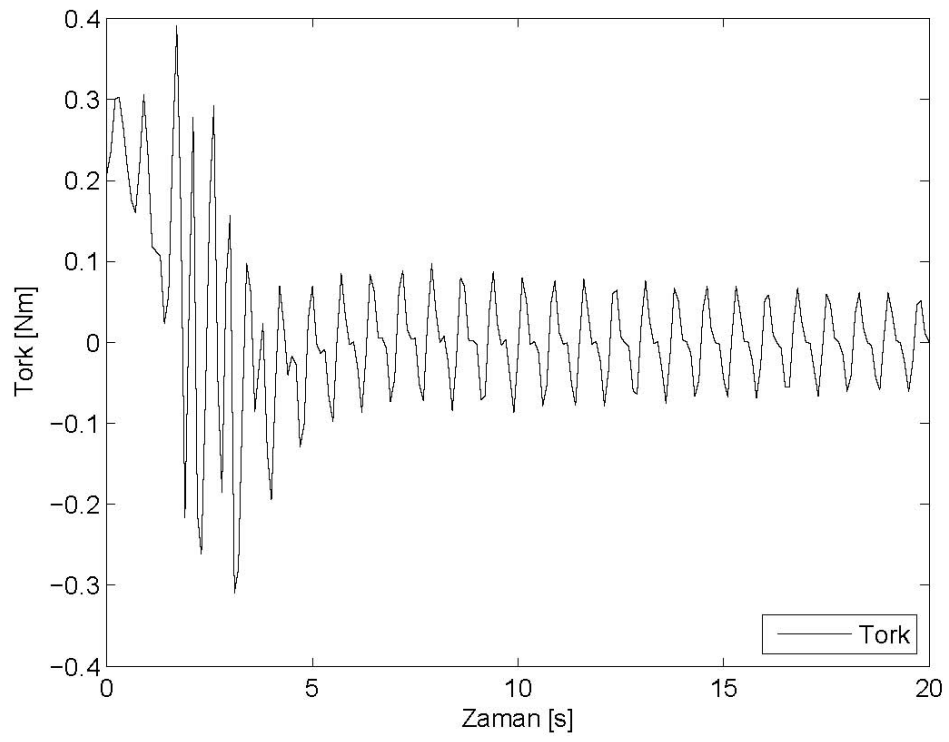


Şekil 4.11 : $K_p = 0.8$, $K_v = 1.25$ Katsayı Değerleri İçin Giriş Momenti.

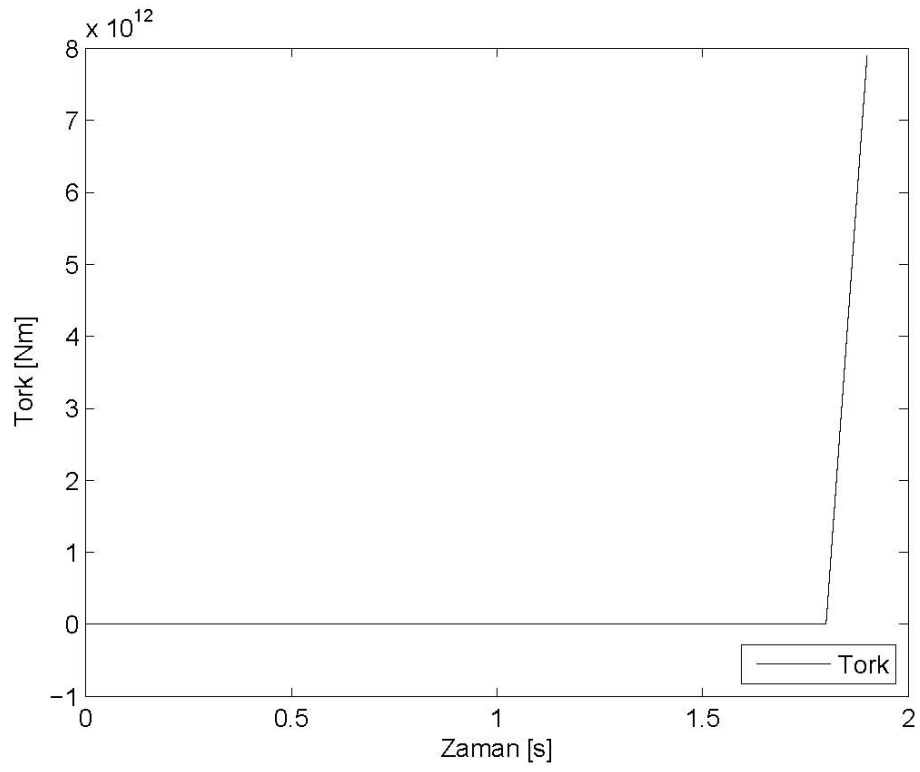
Şekil 4.12 hesaplanmış tork kontrol methodu için K_p sabitinin belirlenmesini göstermektedir. Şekilde de görüldüğü gibi K_p katsayısı arttıkça hem sistemin hızı artmakta hem de sistem cevabındaki aşma azalmaktadır. K_p sabitinin değeri arttıkça sistem hızlanmakta aynı zamanda sistemin üretmesi gereken tork değeride artmaktadır. Şekil 4.14'de görüldüğü gibi $K_p = 1,5$ değeri için tork değeri sonsuza gitmektedir. Bu sebeple, sistem için K_p sabiti 1 olarak seçilir. $K_p = 1$, $K_v = 1$ için giriş momenti Şekil 4.13 'de gösterilmektedir.



Şekil 4.12 : HTK Methodu İçin Sistem Cevabı - K_p Katsayısını Belirme.

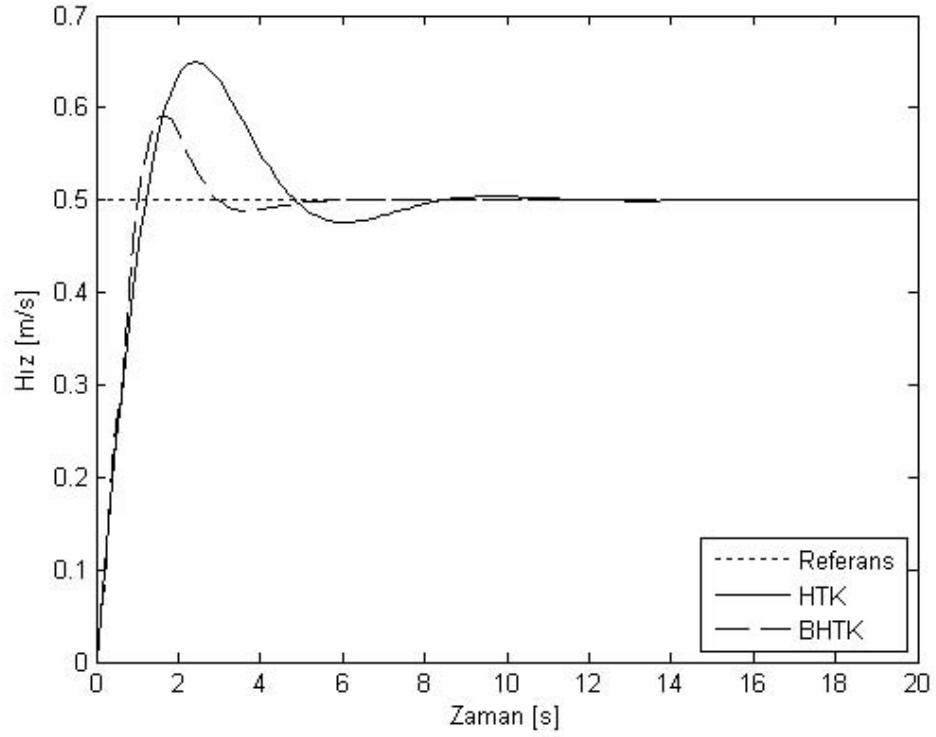


Şekil 4.13 : $K_p = 1$, $K_v = 1$ Katsayı Değerleri İçin Giriş Momenti.

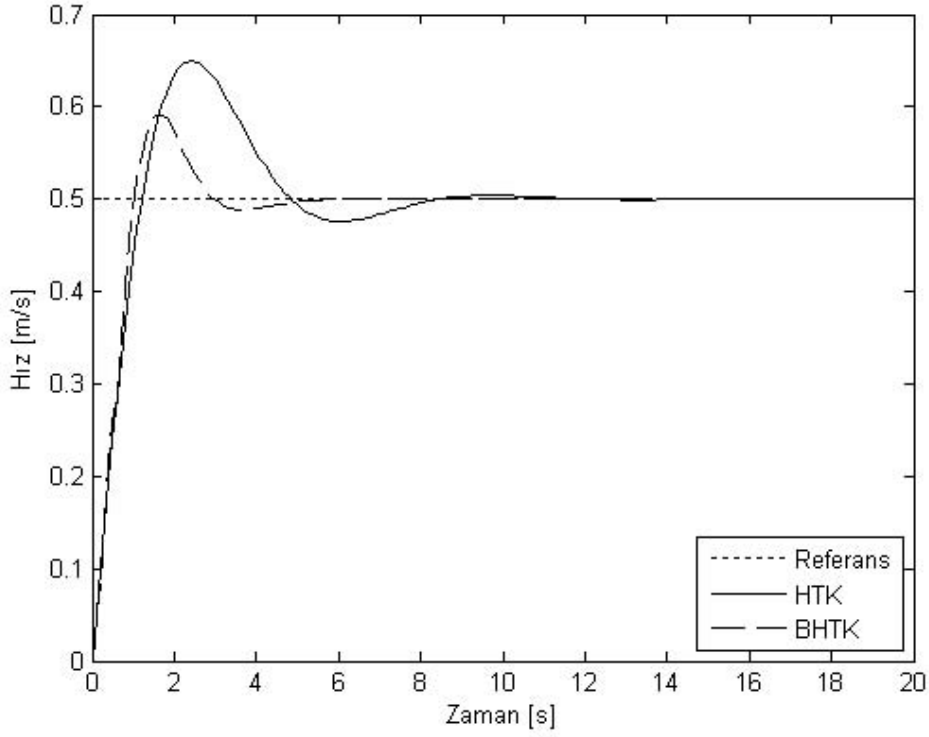


Şekil 4.14 : $K_p = 1,5$, $K_v = 1$ Katsayı Değerleri İçin Giriş Momenti.

Şekil 4.15'de hesaplanmış tork kontrol methodu ile bulanık hesaplanmış tork kontrol methodunun karşılaştırılması görülmektedir. Bulanık hesaplanmış tork kontrol methodu hesaplanmış tork kontrol methoduna göre daha hızlı ve az aşım ile sistemi kontrol etmektedir. Sistemin oturma zamanında da yadsınamayacak bir fark vardır. Bulanık hesaplanmış tork kontrol methodu için giriş momenti Şekil 4.16'de gösterilmektedir.

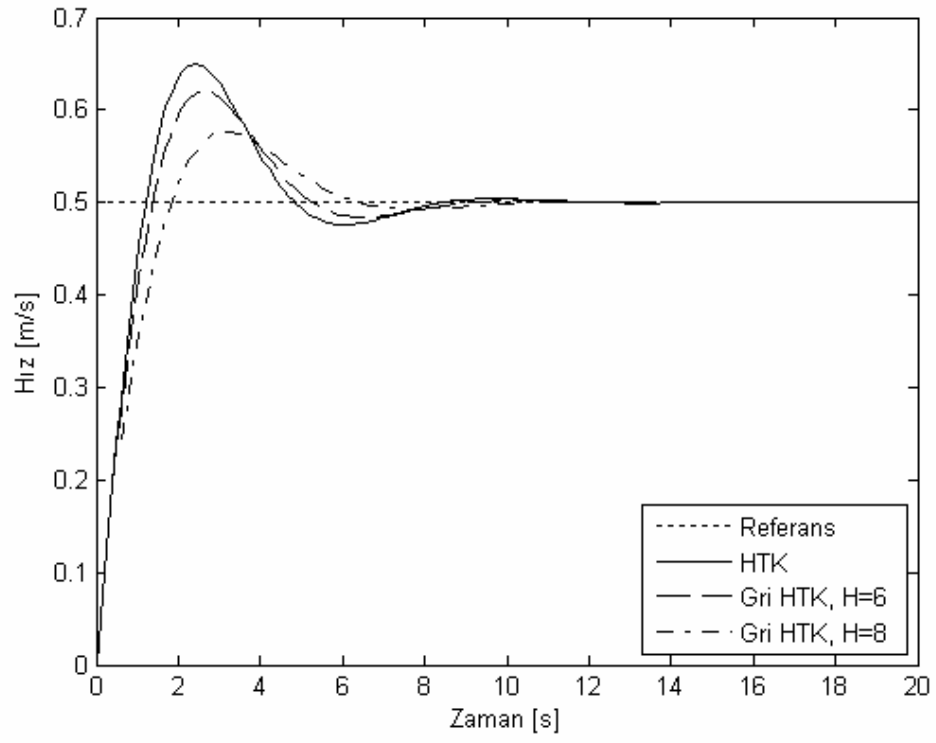


Şekil 4.15 : Bulanık HTK Methodu İçin Sistem Cevabı.

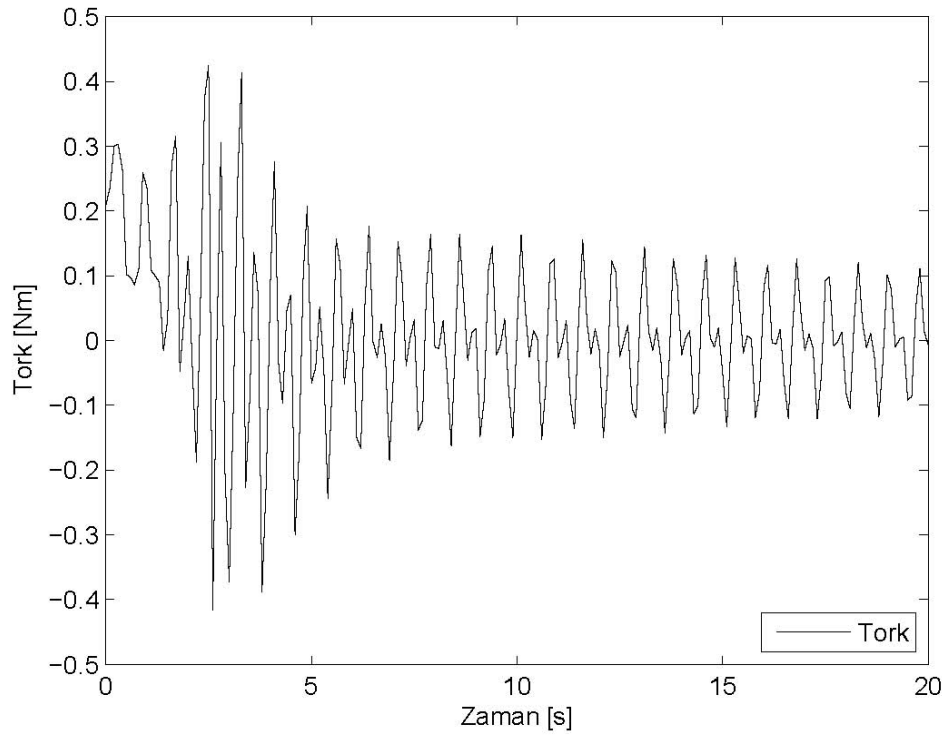


Şekil 4.16 : Bulanık HTK Methodu İçin Giriş Momenti.

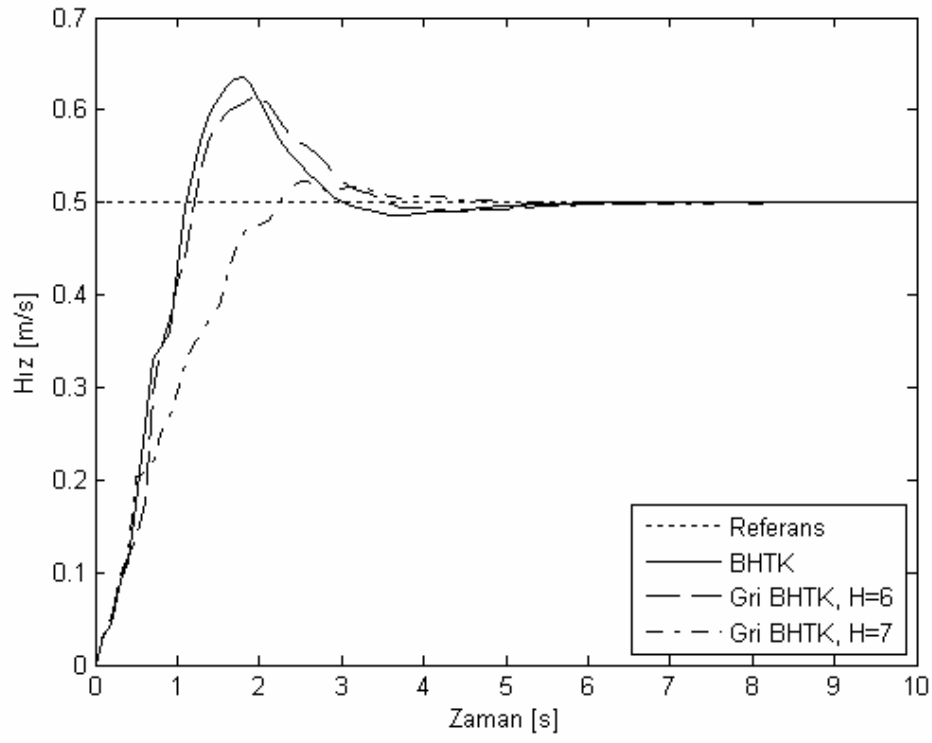
Şekil 4.17 ve 4.19 sırasıyla hesaplanmış tork kontrol methodu ile gri hesaplanmış tork kontrol methodunun, bulanık hesaplanmış tork kontrol methodu ile gri öngörüşel bulanık hesaplanmış tork kontrol methodunun karşılaştırılmalarını göstermektedirler. Görüldüğü gibi gri öngörüşel kontrol sistem cevabındaki aşımaları azaltma yeteneğine sahiptir. Gri öngörüşel kontrolde adım büyüklüğü ne kadar büyürse sistem cevabındaki aşımada buna paralel olarak azalmaktadır. Fakat, adım büyüklüğü çok büyütülürse sistem kararsızlaşır. Gri hesaplanmış tork kontrol methodu ve gri bulanık hesaplanmış tork kontrol methodu için giriş momentleri Şekil 4.18 ve 4.20'de gösterilmektedir.



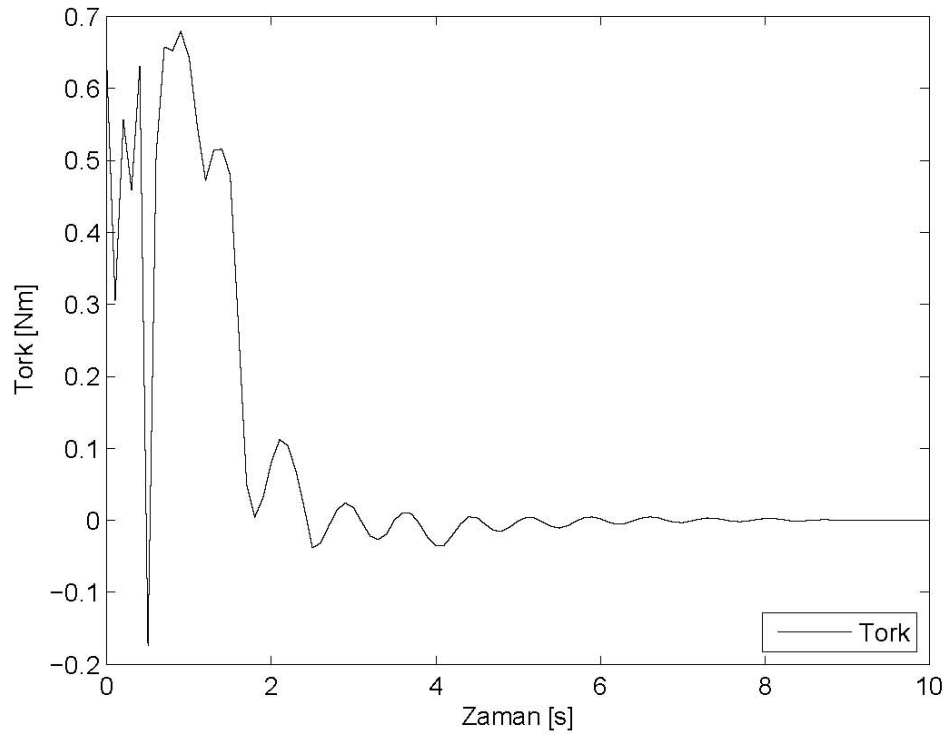
Şekil 4.17 : Gri Öngörüşel HTK Methodu İçin Sistem Cevabı.



Şekil 4.18 : Gri Öngörüşel HTK Methodu İçin Giriş Momenti.



Şekil 4.19 : Gri Öngörüsels Bulanık HTK Methodu İçin Sistem Cevabı.



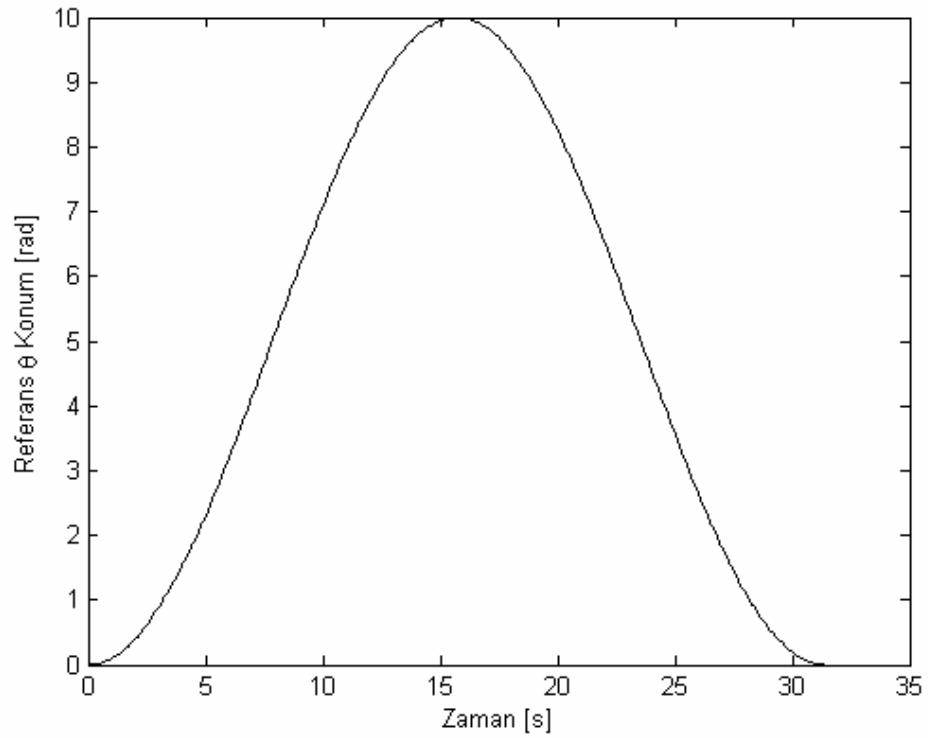
Şekil 4.20 : Gri Öngörüsels Bulanık HTK Methodu İçin Giriş Momenti.

4.5 Çift Serbestlik Dereceli Sarkaç ile Eğrisel Yörüngede Hareket Kontrolü

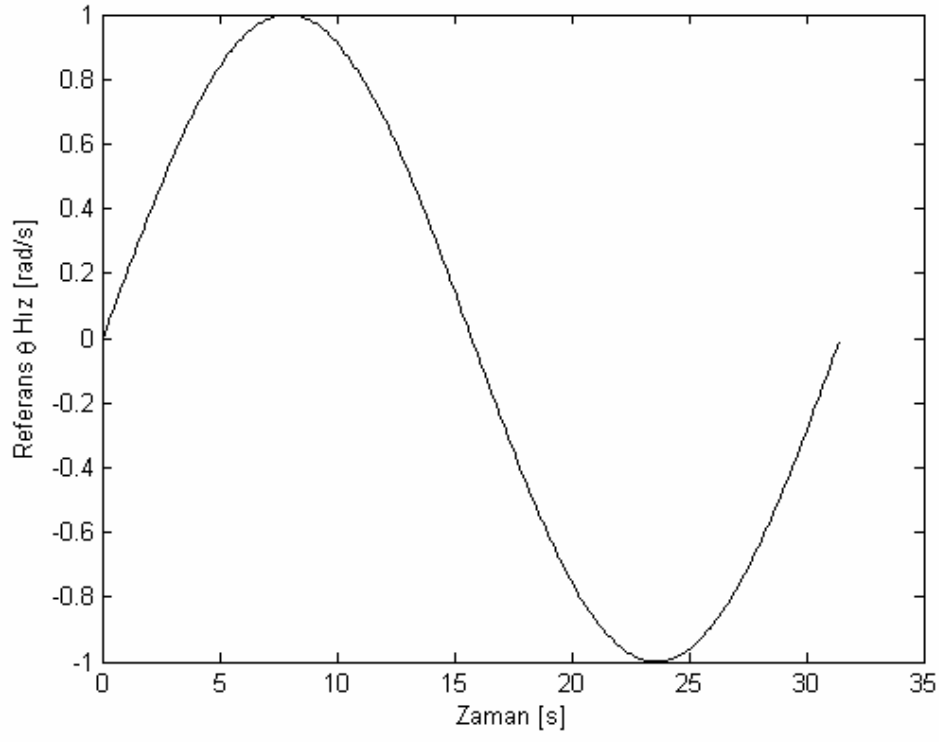
Çift serbestlik dereceli sarkaç ile eğrisel yörüngede dairesel yörünge üzerinde konum kontrolü yapılacaktır.

4.5.1 Dairesel Yörünge Üzerinde Konum Kontrolü

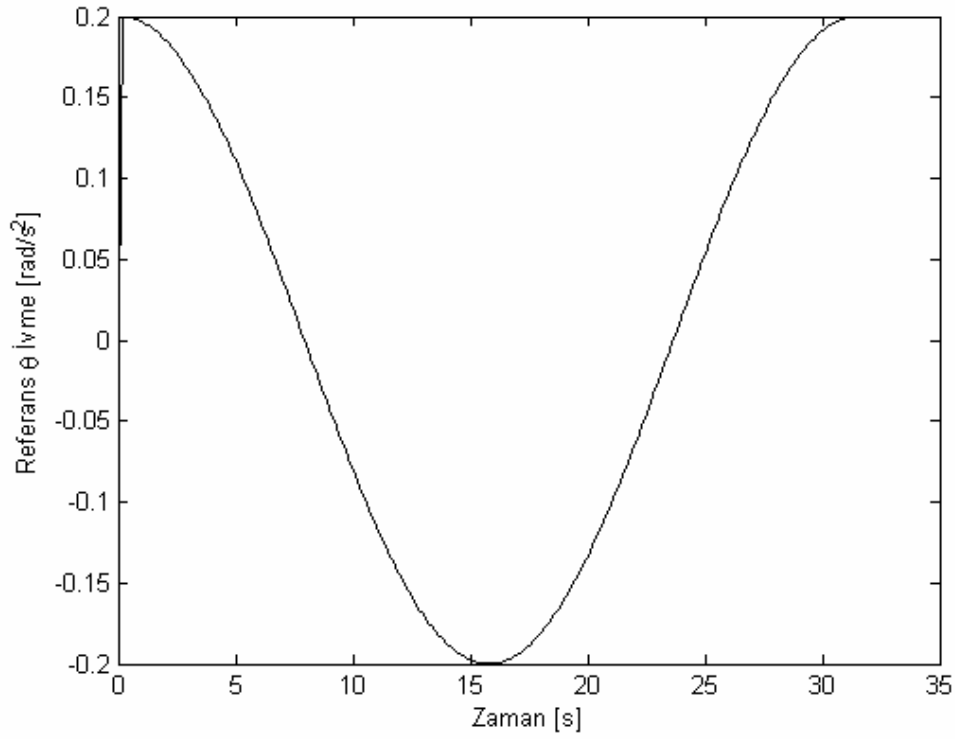
Dairesel yörünge üzerinde konum kontrolü için referans konum, hız ve ivme grafikleri Şekil 4.21, 4.22, 4.23, 4.24, 4.25 ve 4.26'de sırasıyla gösterilmektedir.



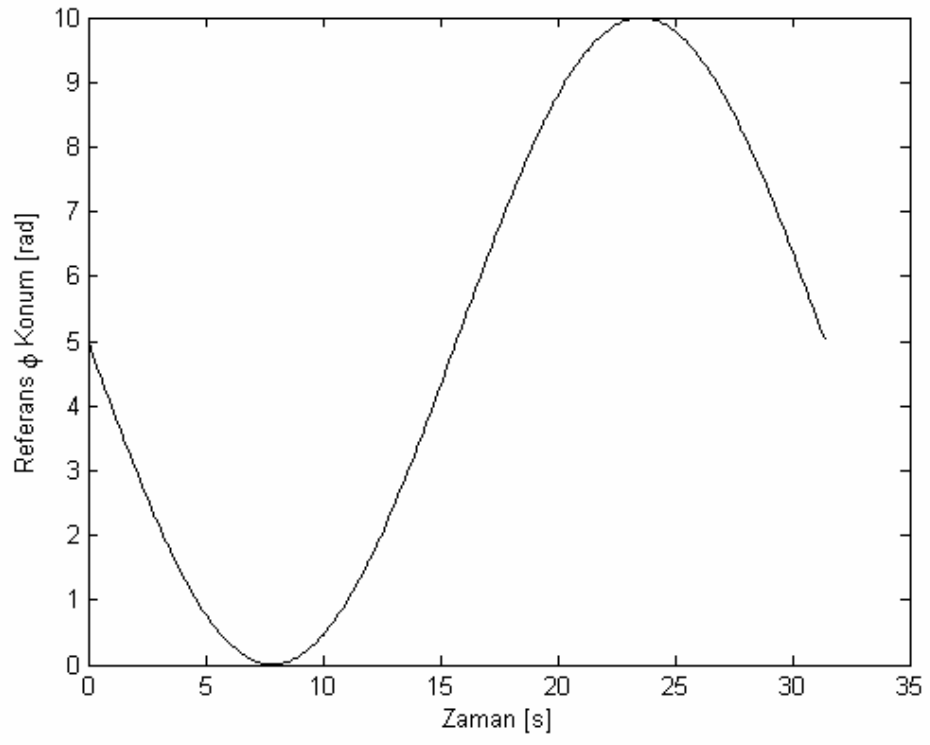
Şekil 4.21 : Referans θ Açısal Konum.



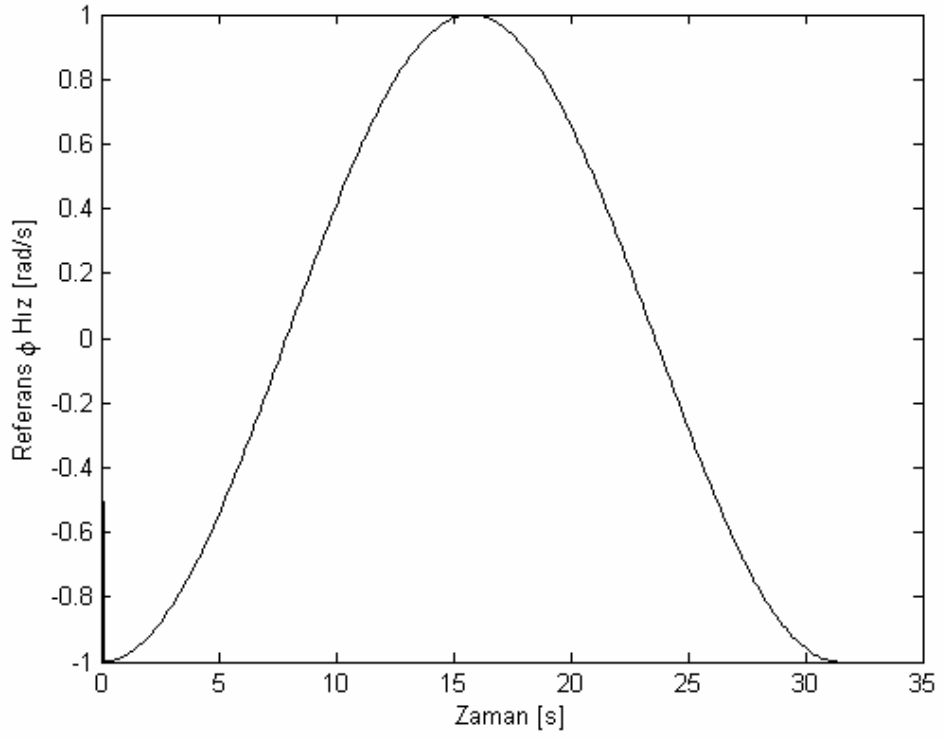
Şekil 4.22 : Referans θ Açısıl Hız.



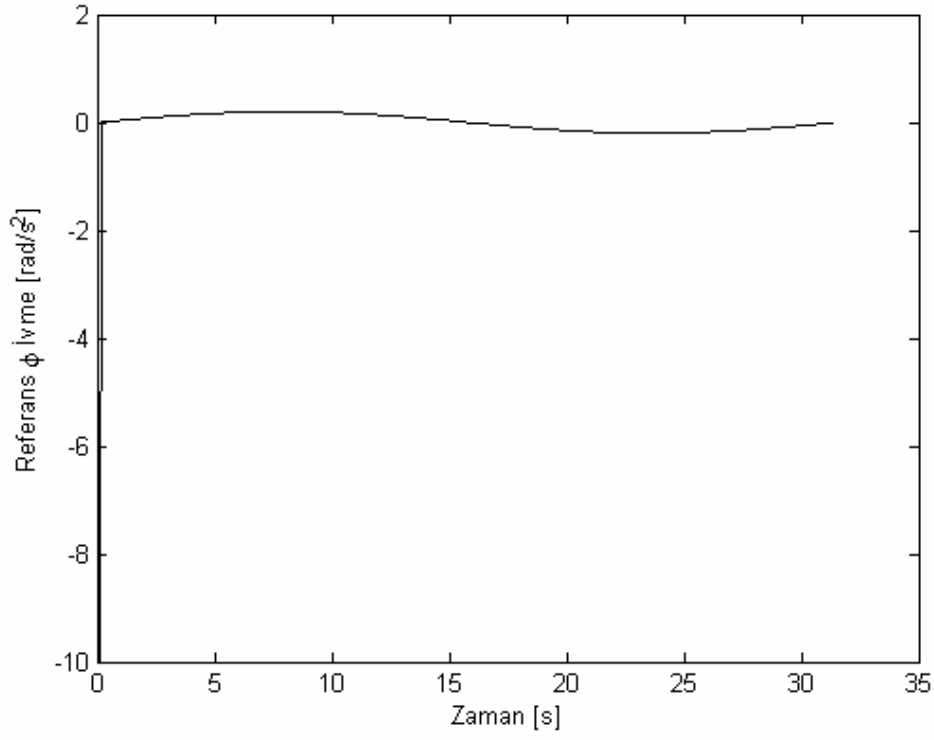
Şekil 4.23 : Referans θ Açısıl İvme.



Şekil 4.24 : Referans ϕ Açısal Konum.

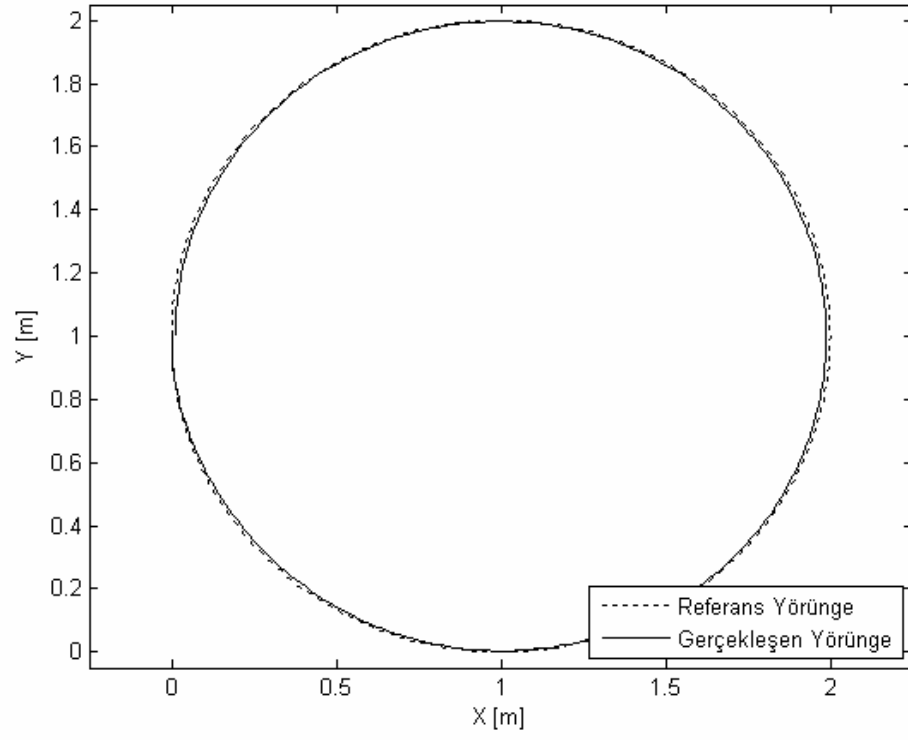


Şekil 4.25 : Referans ϕ Açısal Hız.

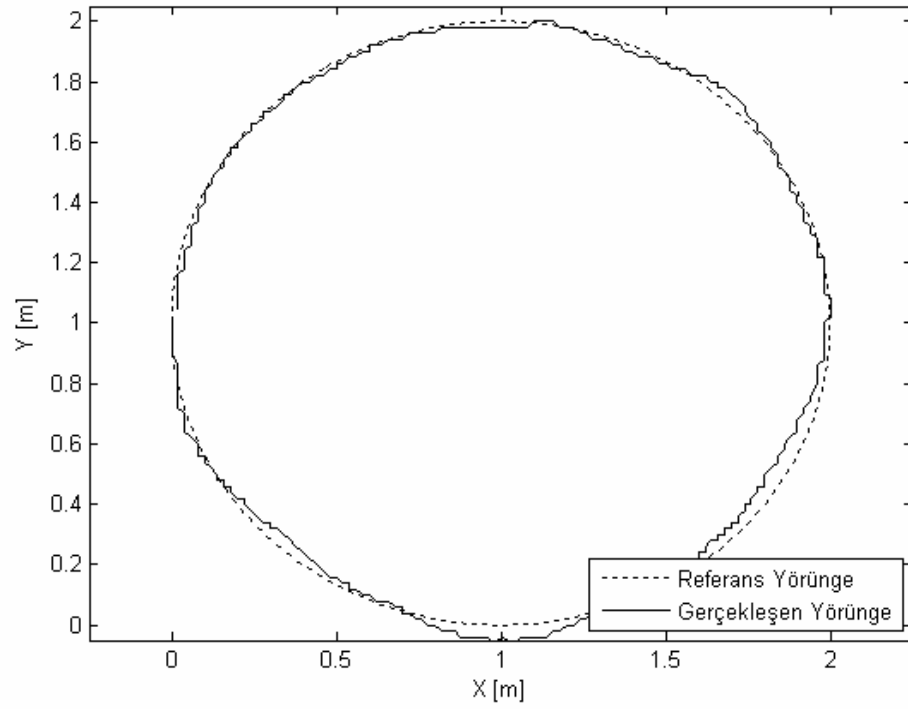


Şekil 4.26 : Referans ϕ Açısal İvme.

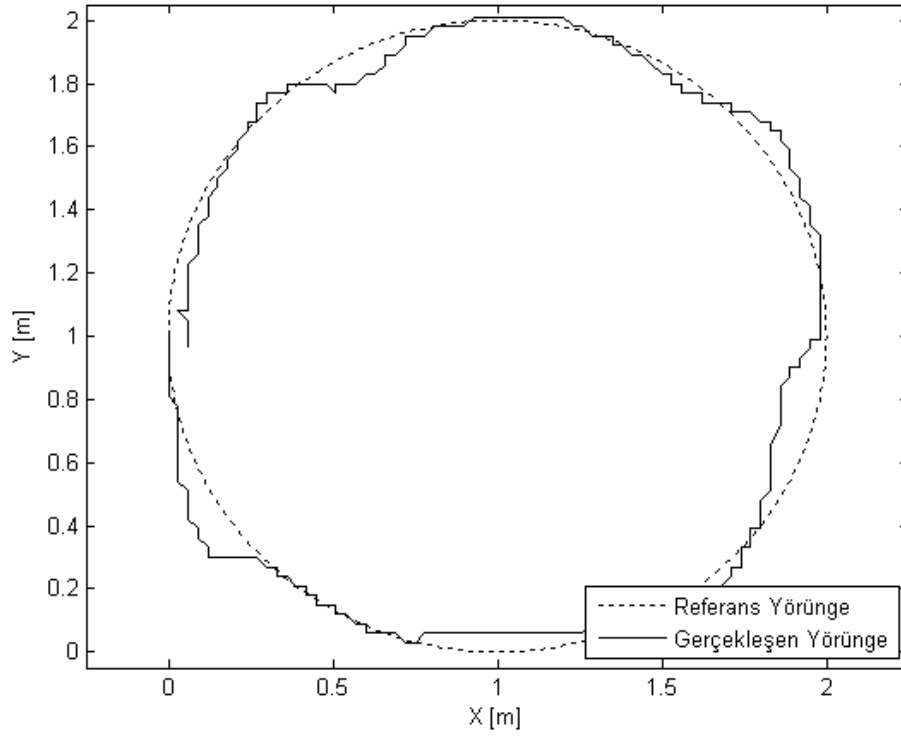
Şekil 4.27, 4.28 ve 4.29'de sistemin hesaplanmış tork kontrol methoduyla kontrol edilmesi sonucunda izlenen yörüngeler gösterilmektedir.



Şekil 4.27 : HTK Methodu İçin Sistem Cevabı - Ayrıklaştırma Zamanı: 0.001 Saniye.

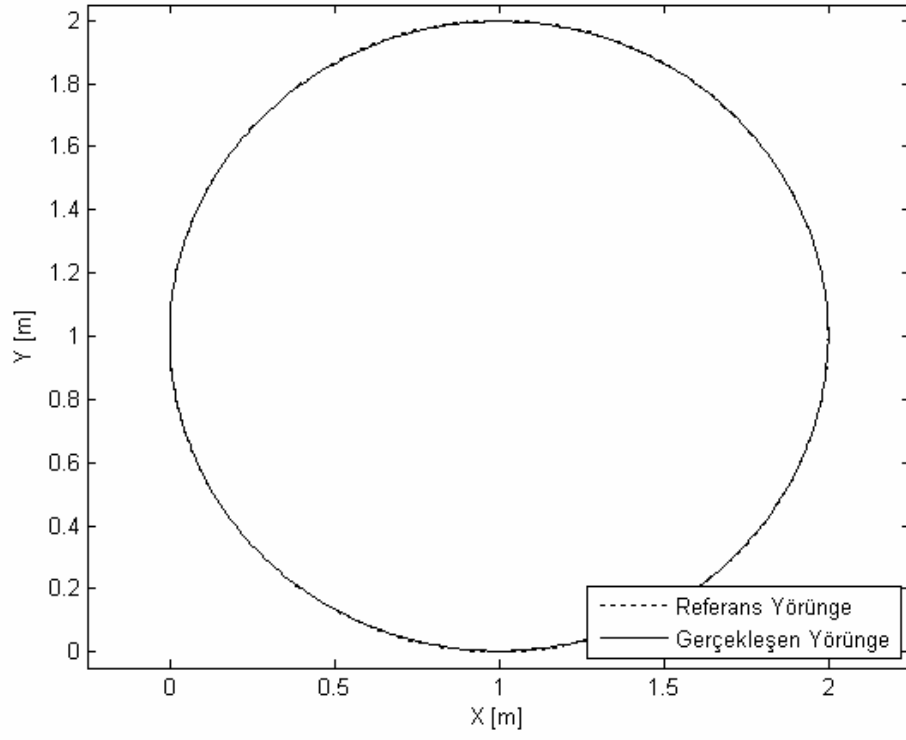


Şekil 4.28 : HTK Methodu İçin Sistem Cevabı - Ayrıklaştırma Zamanı: 0.1 Saniye.

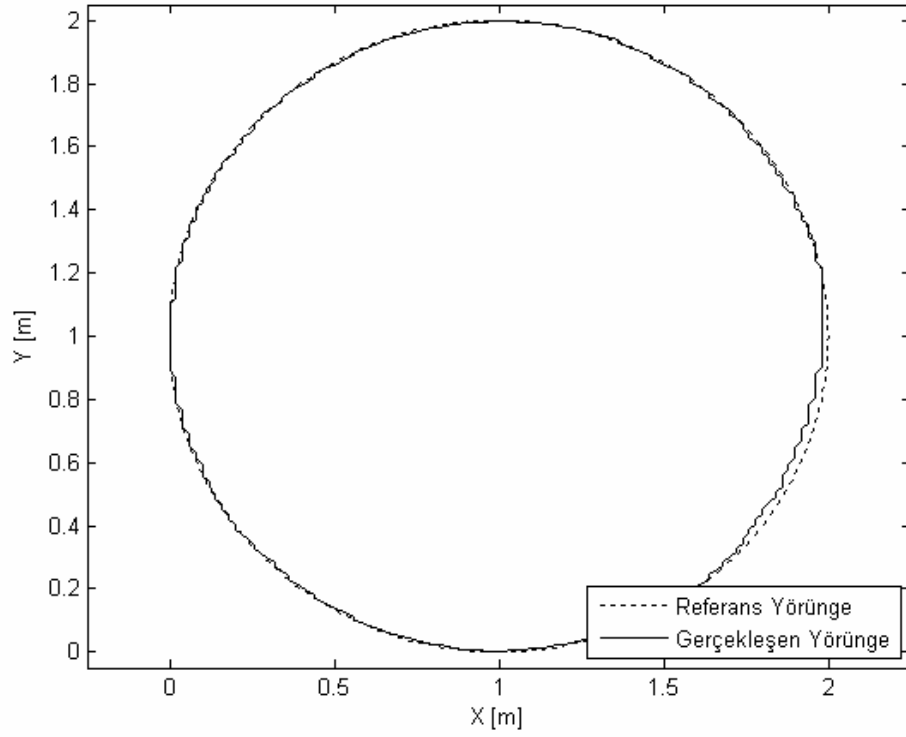


Şekil 4.29 : HTK Methodu İçin Sistem Cevabı - Ayrıklaştırma Zamanı: 0.15 Saniye.

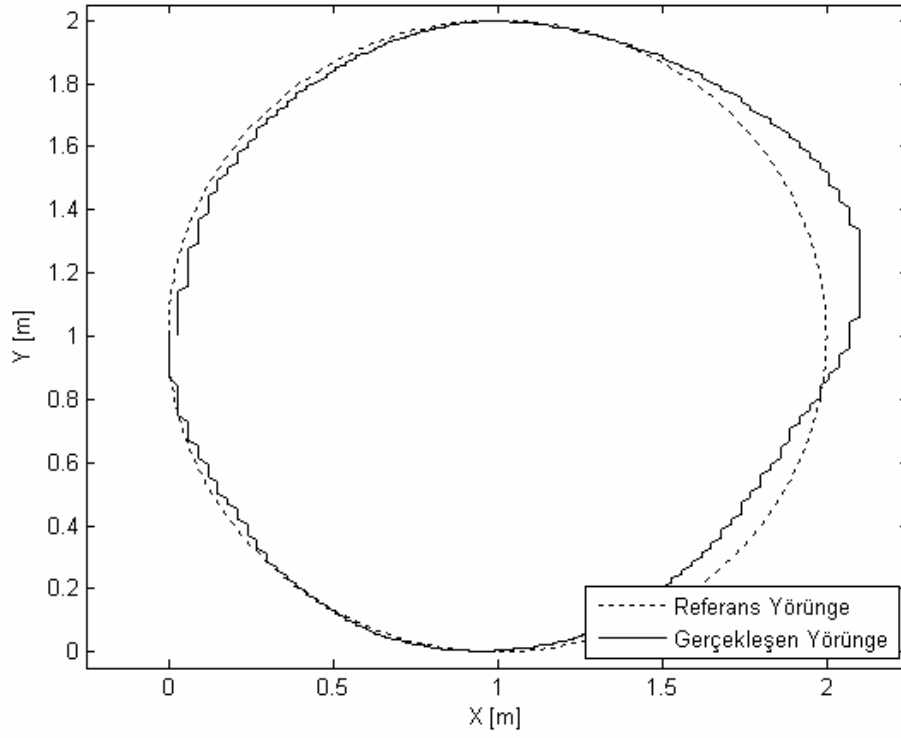
Şekil 4.30, 4.31 ve 4.32'de sistemin bulanık hesaplanmış tork kontrol methodu ile kontrol edilmesi sonucunda izlenen yörüngeler gösterilmektedir.



Şekil 4.30 : BHTK Methodu İçin Sistem Cevabı - Ayırıklaştırma Zamanı: 0.001 Saniye.

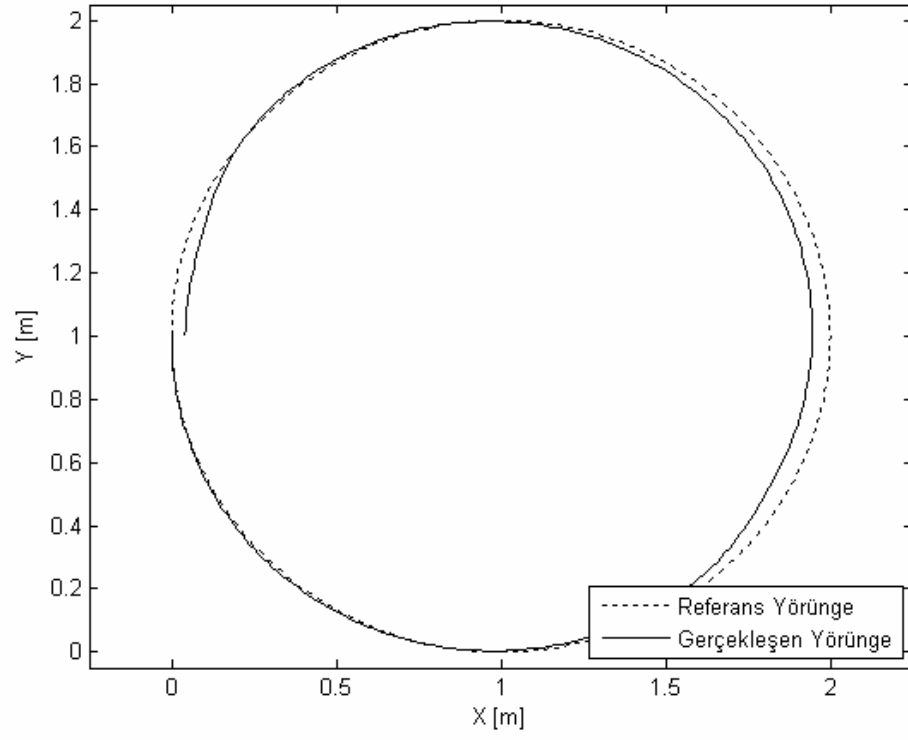


Şekil 4.31 : BHTK Methodu İçin Sistem Cevabı - Ayırıklaştırma Zamanı: 0.1 Saniye.

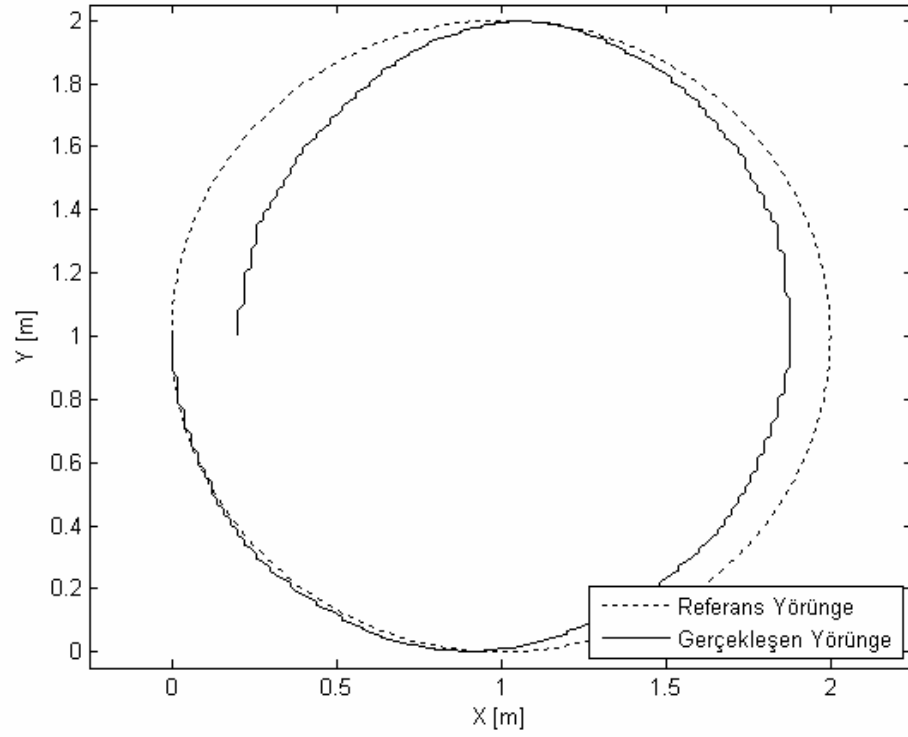


Şekil 4.32 : BHTK Methodu İçin Sistem Cevabı - Ayrıklaştırma Zamanı: 0.15 Saniye.

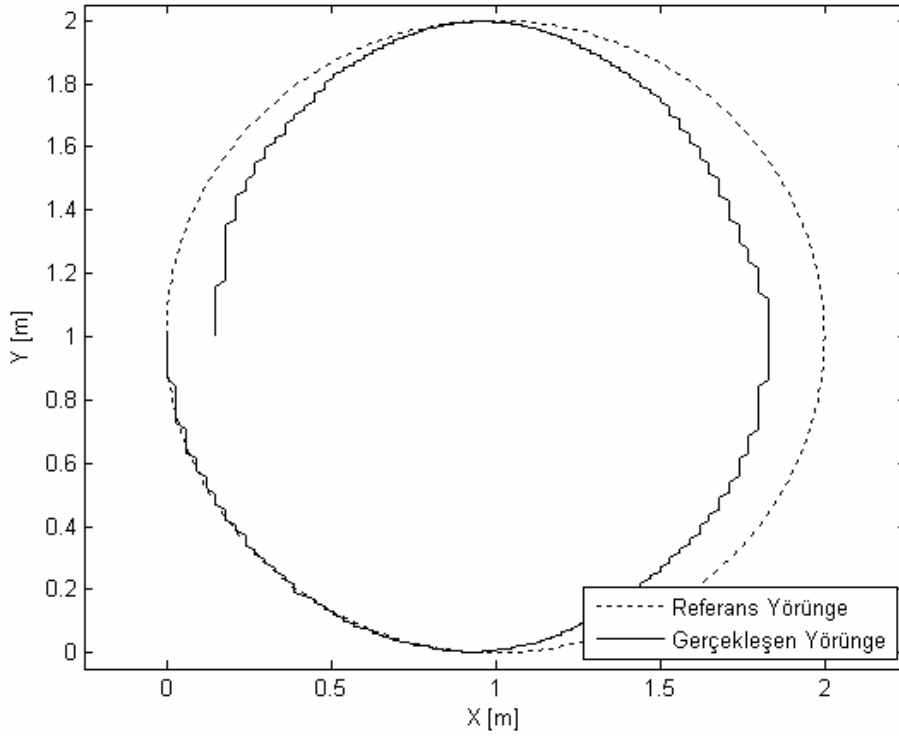
Şekil 4.33, 4.34 ve 4.35'de sistemin gri bulanık hesaplanmış tork kontrol methodu ile kontrol edilmesi sonucunda izlenen yörüngeler gösterilmektedir.



Şekil 4.33 : GBHTK Methodu İçin Sistem Cevabı - Ayrıklaştırma Zamanı: 0.001 Saniye.



Şekil 4.34 : GBHTK Methodu İçin Sistem Cevabı - Ayırıklaştırma Zamanı: 0.1 Saniye.



Şekil 4.35 : GBHTK Methodu İçin Sistem Cevabı - Ayırıklaştırma Zamanı: 0.15 Saniye.

Benzetimlerde görüldüğü gibi ayırıklaştırma zamanı arttırıldıkça sistemin referans yörüngeyi izlemesi zorlaşmaktadır. Gri bulanık hesaplanmış tork kontrol methodu, hesaplanmış tork kontrol methodu veya bulanık hesaplanmış tork kontrol methoduna göre daha fazla hata ile yörüngeyi takip etmektedir. Gri öngörü kontrolü sistemin çıkış değerlerini kullanarak gelecekteki çıkışları çevrimiçi olarak tahmin etmektedir. Bu tahmin sistemin dinamik modelinden bağımsız olarak gerçekleşir. Gri öngörü kontrolünün bulanık ve geleneksel kontrolörlere göre daha kötü sonuç vermesinin nedeni konum kontrolünde sistemin çıkış değerlerinin nonlinear olmasıdır. Gri öngörü kontrolü en küçük kareler yöntemini kullandığı için doğrusal bir öngörü yapar. Bu sebeple nonlinear çıkış değerlerine karşı başarılı sonuç vermez.

5. SONUÇLAR

Yuvarlanan küresel robot mekanizmasının öteleme hareketi, sistemde mevcut dönme hareketleri aracılığıyla sağlanmaktadır. Bu sebeple sistemi modellemek için Euler açıları, başvurma-yalpa-yuvarlanma açıları gibi dönme açılarına ihtiyaç duyulmuştur. Sistemin dinamik davranış modeli analitik yaklaşımla Euler-Lagrange denklemleri kullanılarak elde edilmiştir. Küresel yuvarlanmanın hareket denklemleri nonlinear ve nonhonomiktir. Hareket denklemlerini oluşturan diferansiyel denklemler "ayrıştırılmış dinamik" yaklaşımı ile sadeleştirilmiştir. Bu şekilde gerçek fiziksel sisteme daha uzak fakat kontrol için kullanılabilir bir model elde edilmiştir.

Bu tezde modelleme kısmında çift serbestlik derecesine sahip sarkac kullanılarak küresel robotun yuvarlanma hareketi sağlanmıştır. Robotun çizgisel ve eğrisel yörüngeler üzerindeki hareketleri incelenmiştir. Küresel robotun yatay ve eğimli düzlemlerdeki hareketleri incelenip her iki durum için ayrı hareket denklemleri elde edilmiştir. Eğik düzlemde maksimum tırmanma açısı ve engel geçme yükseklik tayini yapılmıştır.

Yüksek dereceden nonlinear ve belirsiz bir sistem olan yuvarlanan küresel robotun hız kontrolünü ve konum kontrolünü gerçekleştirmek için hesaplanmış tork kontrol yöntemi, bulanık hesaplanmış tork kontrol yöntemi ve gri bulanık hesaplanmış tork kontrol yöntemi önerilmiştir. Hem hız hem de konum kontrolünde bulanık kontrolörlerin geleneksel kontrolörlere göre daha iyi sonuç verdiği gözlenmiştir. Gri öngörüselsel kontrolörlerin ise hız kontrolünde geleneksel ve bulanık kontrolörlere göre daha iyi sonuç verdiği, konum kontrolünde ise daha kötü sonuç verdiği gözlenmiştir. Bunun sebebinin gri öngörü kontrolün sistemin çıkış değerlerini kullanarak gelecekteki çıkışları çevrimiçi olarak tahmin ettiği, bu tahmini yaparken ise en küçük kareler yöntemini kullandığı için doğrusal bir öngörü yaptığı belirtilmiştir. Konum kontrolünde ise sistem çıkışları nonlinear ifadelerdir. Dolayısıyla konum kontrolü için gri öngörüselsel yöntemin daha kötü performans göstermesi olası karşılanmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] **Bicchi, A., Balluchi, A., Prattichizzo, D. and Gorelli, A., 1997.** Introducing the SPHERICLE: an experimental testbed for research and teaching in nonholonomy, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, volume 3, Albuquerque, NM, USA, pp. 2620-2625.
- [2] **Alves, J. and Dias, J., 2003.** Design and control of a spherical mobile robot, Proceedings of the I MECH E Part I Journal of Systems and Control Engineering, **217**, 457-467.
- [3] **Camicia, C., Conticelli, F. and Bicchi, A., 2000.** Nonholonomic kinematics and dynamics of the Sphericle, Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, volume 1, Takamatsu, Japan, pp. 805-810.
- [4] **Halme, A., Schonberg, T. and Wang, Y., 1996.** Motion control of a spherical mobile robot, Proceedings of fourth International Workshop on Advanced Motion Control, volume 1, Albuquerque, NM, USA, pp. 259-264.
- [5] **Javadi, A.A.H. and Mojabi, P., 2002.** Introducing August: a novel strategy for an omnidirectional spherical rolling robot, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, volume 4, Washington DC, USA, pp. 3527-3533.
- [6] **Javadi, A.A.H. and Mojabi, P., 2004.** Introducing Glory: A Novel Strategy for an Omnidirectional Spherical Rolling Robot, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, **126**, 678-683.
- [7] **Mukherjee, R., Minor, M.A. and Pukrushpan, J.T., 1999.** Simple motion planning strategies for spherobot: a spherical mobile robot, Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, volume 3, Washington DC, USA, pp. 2132-2137.
- [8] **Joshi, V.A. and Banavar, R.N., 2009.** Motion analysis of a spherical mobile robot, Robotica, **27**, 343-353.
- [9] **Joshi, V.A., Banavar, R.N. and Hippalgaonkar, R., 2009.** Design and analysis of a spherical mobile robot, Mechanism and Machine Theory.
- [10] **Bhattacharya, S. and Agrawal, S.K., 2000.** Spherical rolling robot: a design and motion planning studies, IEEE Transactions on Robotics and Automation, **16**, 835-839.
- [11] **Bhattacharya, S. and Agrawal, S.K., 2000.** Design, experiments and motion planning of a spherical rolling robot, Proceedings of the International Conference on Robotics and Automation, volume 2, San Francisco, CA, USA, pp. 1207-1212.

- [12] **Rosen, A.**, 2000. Modified Lagrange Method to Analyze Problems of Sliding and Rolling, *Journal of applied mechanics*, **67**, 697-704.
- [13] **Bloch, A.M.**, 2004. *Nonholonomic mechanics and control*, Springer, New York, USA.
- [14] **Ming, Y., Zongquan, D., Xinyi, Y. and Weizhen, Y.**, 2006. Introducing HIT Spherical Robot: Dynamic Modeling and Analysis Based on Decoupled Subsystem, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, Harbin, China, p. 181-186.
- [15] **Qiang, Z., Zengbo, L. and Yao, C.**, 2008. A back-stepping based trajectory tracking controller for a non-chained nonholonomic spherical robot, *Chinese Journal of Aeronautics*, **21**, 472-480.
- [16] **Zhuang, W., Liu, X., Fang, C. and Sun, H.**, 2008. Dynamic Modeling of a Spherical Robot with Arms by Using Kane's Method, *Proceedings of Fourth International Conference on Natural Computation*, volume 4, Beijing, China, pp. 373-377.
- [17] **Url-1** <<http://www.phys.lsu.edu/faculty/gonzalez/Teaching/Phys7221/Hwk8Solutions.pdf>>, alındığı tarih 04.03.2010.
- [18] **Lemos, N.A.**, 2003, Nonholonomic constraints and Voronec's equations, *arXiv:physics/0306078v1 [physics.ed-ph]*.
- [19] **Hand, L.N. and Finch, J.D.**, 1998. *Analytical Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [20] **Gonzalez, L.A.**, 2004. *Design, Modelling and Control of an Autonomous Underwater Vehicle*, Ph.D. thesis, The University of Western Australia.
- [21] **Kennedy, J.**, 2002. *Decoupled Modelling and Controller Design for the Hybrid Autonomous Underwater Vehicle: MACO*, Ph.D. thesis, University of Victoria.
- [22] **Sienel, W.**, 1995. Robust decoupling for active car steering holds for arbitrary dynamic tire characteristics, *Proceedings of 3rd European Control Conference*, Rome, Italy, p. 744-748.
- [23] **Ackermann, J. and Bunte, T.**, 1996. Handling improvement for robustly decoupled car steering dynamics, *Proceedings of the 4th IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control and Automation*, Materne, Krete, Greece, pp. 83-88.
- [24] **Nakajima, R., Tsubouchi, T., Yuta, S. and Koyanagi, E.**, 1997. A development of a new mechanism of an autonomous unicycle, *Proceedings of 1997 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, volume 2, Grenoble, France, pp. 906-912.
- [25] **Schoonwinkel, A.**, 1987. *Design and test of a computer stabilized unicycle*, Ph.D. thesis, University of Stanford.
- [26] **Miklosovic, R. and Gao, Z.**, 2005. A Dynamic Decoupling Method for Controlling High Performance Turbofan Engines, *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic.

- [27] **Au, K.W. and Xu, Y.**, 1999. Decoupled dynamics and stabilization of single wheel robot, Proceedings of 1999 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, volume 1, Kyongju, Korea, pp. 197-203.
- [28] **Liu, D., Sun, H., Jia, Q. and Wang, L.**, 2008. Motion Control of a Spherical Mobile Robot by Feedback Linearization, Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation, Chongqing, China, pp. 965-970.
- [29] **Xue, D., Chen, Y. and Atherton, D.P.**, 2008. Linear Feedback Control, Society for Industrial Mathematics, 1 edition.
- [30] **Astrom, K.J. and Hagglund, T.**, 1995. New tuning methods for PID controllers, Proceedings of 3rd European Control Conference, Rome, Italy, pp. 2456-2462.
- [31] **Url-2** <<http://lorien.ncl.ac.uk/ming/pid/PID.pdf>>, alındığı tarih 09.03.2010.
- [32] **Url-3** <2010<http://www.cds.caltech.edu/~murray/courses/cds101/fa02/caltech/astrom-ch6.pdf> alındığı tarih 14.03.2010.
- [33] **Url-4** <<http://www.control.lth.se/~fusyntes/lectures2010/PIDControleight.pdf>>, alındığı tarih 12.03.2010.
- [34] **Shaw, J.A.**, 2003. The PID Control Algorithm, Process Control Solutions, 2 edition.
- [35] **Lee, C.C.**, 1990. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Fuzzy Logic in Control Systems: Fuzzy Logic Controller Part I, **20**, 404-418.
- [36] **Url-5** <http://www.ee.pdx.edu/~mperkows/class478-2005/robot-2005/seho-_nal-robotics.doc>, alındığı tarih 18.01.2010.
- [37] **Zadeh, L.A.**, 1965. Fuzzy Sets, Information and Control, **8**, 338-353.
- [38] **Zadeh, L.A.**, 1968. Fuzzy Algorithm, Information and Control, **12**, 94-102.
- [39] **Zadeh, L.**, 1971. Toward a theory of fuzzy systems, R. Kalman and N. DeClaris, editors, Aspects of Network and System Theory, Rinehart and Winston, New York, pp. 469-490.
- [40] **Zadeh, L.A.**, 1973. Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, **SMC-3**, 28-44.
- [41] **Zadeh, L.A.**, 1972. A rationale for fuzzy control, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, **94**, 3-4.
- [42] **Mamdani, E.H.**, 1974. Applications of fuzzy algorithms for control of a simple dynamic plant, Proceedings of IEE, **121**, 1585-1588.
- [43] **Mamdani, E.H. and Assilian, N.S.**, 1975. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller, International Journal of Man-Machine Studies, **7**, 1-13.
- [44] **Mamdani, E.H.**, 1976. Advances in the linguistic synthesis of fuzzy controllers, International Journal of Man-Machine Studies, **8**, 669-678.

- [45] **Assilian, N.S.**, 1974. A case study on the application of fuzzy set theory to automatic control, Proceedings of IFAC Stochastic Control Symp., volume 1, Budapest, pp. 805-810.
- [46] **Kickert, W.J.M. and Lemke, H.R.V.N.**, 1976. Application of a fuzzy controller in a warm water plant, Automatica, **12**, 301-308.
- [47] **King, P.J. and Mamdani, E.H.**, 1977. The application of Fuzzy Control Systems to Industrial Process, Automatica, **13**, 235-242.
- [48] **Holmblad, L.P. and Ostergaard, J.J.**, 1995. The FLS application of fuzzy logic, Fuzzy Sets and Systems, **70**, 135-146.
- [49] **Holmblad, L.P. and Ostergaard, J.J.**, 1982. Fuzzy Information and Decision Processes_ chapter Control of a cement kiln by fuzzy logic, Elsevier Science Ltd, North-Holland.
- [50] **Yasunobu, S., Miyamoto, S. and Ihara, H.**, 1983. Fuzzy control for automatic train operation system, 4th IFAC/IFIP/IFRS Int. Conf. on Transportation Systems, Baden-Baden, pp. 39-45.
- [51] **Yasunobu, S., Miyamoto, S., Takaoka, T. and Ohshima, H.**, 1984. Application of Predictive Fuzzy Control to Automatic Train Operation Controller, IECON'84, Baden-Baden, pp. 657-662.
- [52] **Yasunobu, S. and Miyamoto, S.**, 1985. Automatic train operation system by predictive fuzzy control, M. Sugeno, editor, Industrial Applications of Fuzzy Control, Elsevier Science Publishers, North-Holland, pp. 1-18.
- [53] **Yasunobu, S., Sekino, S. and Hasegava, T.**, 1987. Automatic train operation and automatic container crane operation systems based on predictive fuzzy control, Proc. 2nd IFSA Congress, Tokyo, Japan, pp. 835-838.
- [54] **Yasunobu, S. and Hasegava, T.**, 1986. Evaluation of an automatic container crane operation system based on predictive fuzzy control, Control Theory and Advanced Technology, **2**, 419-432.
- [55] **Yasunobu, S. and Hasegava, T.**, 1987. Predictive fuzzy control and its application for automatic container crane operation system, Proc. 2nd IFSA Congress, Tokyo, Japan, pp. 349-352.
- [56] **Yamakawa, T.**, 1989. Stabilization of an inverted pendulum by a high-speed fuzzy logic controller hardware system, Fuzzy Sets and Systems, **32**, 161-180.
- [57] **Ross, T.**, 1995. Fuzzy Logic with Engineering Applications, McGraw-Hill.
- [58] **Deng, J.**, 1982. Control problems of Grey System, Systems and Control Letter, **1**, 288-294.
- [59] **Chen, S.H., Chou, J.H. and Li, J.L.**, 2002. Optimal grey-fuzzy controller design for a constant turning force system, International Journal of Machine Tools and Manufacture, **42**, 343-355.
- [60] **Lian, R.J., Lin, B.F. and Huang, J.H.**, 2005. A grey prediction fuzzy controller for constant cutting force in turning, International Journal of Machine Tools and Manufacture, **45**, 1047-1056.

- [61] **Wang, W.P., Peng, Y.H. and Li, X.Y.**, 2002. Fuzzy-grey prediction of cutting force uncertainty in turning, *Journal of Materials Processing Technology*, **129**, 663-666.
- [62] **Dingdu, W.**, 2009. Electric Furnace Control System Based on the Grey Prediction Fuzzy Adaptive Control, *Proceedings of 2009 Sixth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery*, China, pp. 86-90.
- [63] **Qi, S. and Zhao, C.**, 2009. Application of Fuzzy PID Control in Polymerizing-kettle Based on Gray Prediction Model, *Proceedings of The Ninth International Conference on Electronic Measurement and Instruments*, China, pp. 193-196.
- [64] **Song, W., Xiao, J. and Wang, G.**, 2009. Switching Grey Prediction Fuzzy Control for Electro-hydraulic Proportional Pressure Control System, *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, China, pp. 850-854.
- [65] **Huang, S.J. and Huang, C.L.**, 2000. Control of an Inverted Pendulum Using Grey Prediction Model, *IEEE Trans. on Industrial Application*, **36**, 452-458.
- [66] **Yu, G.R., Chuang, C.W. and Hwang, R.C.**, 2001. Fuzzy control of brushless DC motors by gray prediction, *IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference*, 2001. Joint 9th, Canada, pp. 2819-2824.
- [67] **Jiguang, S., HongZhang, J., Lihua, L. and Hongyu, S.**, 2009. Variable Structure Control Based on Grey Prediction for Ship Fin Stabilizer, *Proceedings of IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, Korea, pp. 620-625.
- [68] **Luo, R.C. and Chen, T.M.**, 1999. Target Tracking by Grey Prediction Theory and Look-Ahead Fuzzy Logic Control, *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Detroit, Michigan, pp. 1176-1181.
- [69] **Wong, C.C., Lin, B.C. and Cheng, C.T.**, 2001. Fuzzy tracking method with a switching grey prediction for mobile robot, *Proceedings of 10th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Melbourne, Australia, pp. 103-106.
- [70] **Akay, D. and Atak, M.**, 2007. Grey prediction with rolling mechanism for electricity demand forecasting of Turkey, *Energy*, **32**, 1670-1675.
- [71] **Zhang, Y. and Jiao, Z.**, 2009. Study of Grey PID Control for Discrete System, *Proceedings of International Workshop on Intelligent Systems and Applications*, China, pp. 1-4.
- [72] **Ruiqing, G., Qiming, C., Xufeng, D. and Mingmei, W.**, 2009. The Single Neuron PID Control for Large Time-delay System Based on Grey Prediction, *Proceedings of 2009 International Conference on Artificial Intelligence and Computational Intelligence*, China, pp. 46-49.

- [73] **RongCheng, L., WenZhan, D. and Sen, X.**, 2008. A adaptive grey fuzzy prediction controller design based on the improving residual error model, Proceedings of IEEE Conference on Cybernetics and Intelligent Systems, China, pp. 652-656.
- [74] **Wei, L., Fei, M. and Zhao, W.**, 2008. Analysis of Grey Prediction Based Iterative Learning Control, Proceedings of the 2008 IEEE International Conference on Information and Automation, China, pp. 1096-110.
- [75] **Wong, C.C. and Chen, C.C.**, 1998. Design of fuzzy control systems with a switching grey prediction, Proceedings of IEEE Conference on Fuzzy Systems, pp. 561-571.
- [76] **Feng, H.M. and Wong, C.C.**, 2002. A on-line rule tuning grey prediction fuzzy control system design, Proceedings of 2002 International Joint Conference on Neural Networks, Hawaii, pp. 1316-1321.
- [77] **Chiang, H.K. and Tseng, C.H.**, 2004. The grey GM(2,1) integral variable structure controller of synchronous reluctance motor drive, Proceedings of The International Conference on Control Applications, Taipei, pp. 278-283.
- [78] **Craig, J.J.**, 1989. Introduction to Robotics: Mechanics and Control, Addison-Wesley Publishing.
- [79] **Slotine, J.J.E. and Li, W.**, 1991. Applied Nonlinear Control, Prentice Hall.

EKLER

- EK A.1 :** Maple Paket Programında Elde Edilen Boş Küre Denklemleri
- EK A.2 :** Maple Paket Programında Elde Edilen Küresel Robot Boş Küre Denklemleri – Tek Serbestlik Dereceli Sarkaç
- EK A.3 :** Maple Paket Programında Elde Edilen Küresel Robot Boş Küre Denklemleri – Çift Serbestlik Dereceli Sarkaç
- EK B.1 :** Simulink Blok Diyagramları

EK A.1

```

> restart;
> with(VectorCalculus):with(LinearAlgebra):with(diffalg):
1. Euler açıları için rotasyon matrisleri:
> PDEtools[declare]({x(t),y(t),theta(t),psi(t),phi(t)},prime=t,quiet);
> Rot1:=<<cos(phi(t)), -sin(phi(t)), 0>|<sin(phi(t)), cos(phi(t)), 0>|<0, 0, 1>>; Rot2:=<<1, 0, 0>
|<0, cos(theta(t)), -sin(theta(t))>|<0, sin(theta(t)), cos(theta(t))>>; Rot3:=<<cos(psi(t)),
-sin(psi(t)), 0>|<sin(psi(t)), cos(psi(t)), 0>|<0, 0, 1>>;


$$Rot1 := \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$


$$Rot2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$


$$Rot3 := \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> Rot:=Rot3.Rot2.Rot1;

$$Rot := \begin{bmatrix} \cos(\psi) \cos(\phi) - \sin(\psi) \cos(\theta) \sin(\phi) & \cos(\psi) \sin(\phi) + \sin(\psi) \cos(\theta) \cos(\phi) & \sin(\psi) \sin(\theta) \\ -\sin(\psi) \cos(\phi) - \cos(\psi) \cos(\theta) \sin(\phi) & -\sin(\psi) \sin(\phi) + \cos(\psi) \cos(\theta) \cos(\phi) & \cos(\psi) \sin(\theta) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & -\sin(\theta) \cos(\phi) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

2. Lagrange ifadesinde yer alan kinetik enerji tesiminin oluşturulması:
> E[k]:=1/2*M[k]*v[k]^2+1/2*J[k]*omega[k]^2;

$$E_k := \frac{1}{2} M_k v_k^2 + \frac{1}{2} J_k \omega_k^2$$

> omega[k]:=Transpose(diff(theta(t),t)*Row(Rot1,1)+diff(psi(t),t)*Row(Rot2.Rot1,3)+(diff(phi(t),t)*<0|0|1>));

$$\omega_k := \begin{bmatrix} \theta' \cos(\phi) + \psi' \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \theta' \sin(\phi) - \psi' \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \psi' \cos(\theta) + \phi' \end{bmatrix}$$

> v[k]:=<diff(x(t),t),diff(y(t),t),0>;

$$v_k := x' \mathbf{e}_x + y' \mathbf{e}_y$$

Kinetik enerji:
> E[k]:=1/2*M[k]*v[k].v[k]+1/2*J[k]*omega[k].omega[k];

$$E_k := \frac{1}{2} M_k x'^2 + \frac{1}{2} M_k y'^2 + \frac{1}{2} J_k (\theta' \cos(\phi) + \psi' \sin(\theta) \sin(\phi))^2 + \frac{1}{2} J_k (\theta' \sin(\phi) - \psi' \sin(\theta) \cos(\phi))^2 + \frac{1}{2} J_k (\psi' \cos(\theta) + \phi')^2$$

3. Lagrange ifadesi:
> L:=E[k];

$$L := \frac{1}{2} M_k x'^2 + \frac{1}{2} M_k y'^2 + \frac{1}{2} J_k (\theta' \cos(\phi) + \psi' \sin(\theta) \sin(\phi))^2 + \frac{1}{2} J_k (\theta' \sin(\phi) - \psi' \sin(\theta) \cos(\phi))^2 + \frac{1}{2} J_k (\psi' \cos(\theta) + \phi')^2$$

> L:=collect(collect(collect((collect(collect(L,diff(theta(t),t)),diff(psi(t),t))),cos(theta(t))),sin(theta(t))),diff(psi(t),t));

$$L := \left( \left( \frac{1}{2} J_k \sin(\phi)^2 + \frac{1}{2} J_k \cos(\phi)^2 \right) \sin(\theta)^2 + \frac{1}{2} J_k \cos(\theta)^2 \right) (\psi')^2 + J_k \phi' \cos(\theta) \psi' + \left( \frac{1}{2} J_k \sin(\phi)^2 + \frac{1}{2} J_k \cos(\phi)^2 \right) (\theta')^2 + \frac{1}{2} M_k x'^2 + \frac{1}{2} M_k y'^2 + \frac{1}{2} J_k (\phi')^2$$


```

Şekil A.1: Boş Küre Hareket Denklemlerinin Maple Paket Programında Elde Edilişi

```

> L:=subs(1/2*J[k]*sin(theta(t))^2+1/2*J[k]*cos(theta(t))^2=1/2*J[k],subs(1/2*J[k]*sin(phi(t))^2+1/2*J[k]*cos(phi(t))^2=1/2*J[k],1/2*J[k]*sin(phi(t))^2+1/2*J[k]*cos(phi(t))^2=1/2*J[k],L));


$$L := \frac{1}{2}J_k(\dot{\psi})^2 + J_k\dot{\phi}\cos(\theta)\dot{\psi} + \frac{1}{2}J_k(\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}M_k\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M_k\dot{y}^2 + \frac{1}{2}J_k(\dot{\phi})^2$$


4. Kısıt Denklemleri:
> F[x]:=R*(omega[k].<0,1,0>-diff(x(t),t));

$$F_x := R(\dot{\theta}\sin(\phi) - \dot{\psi}\sin(\theta)\cos(\phi) - \dot{x})$$

> F[y]:=R*(omega[k].<1,0,0>+diff(y(t),t));

$$F_y := R(\dot{\theta}\cos(\phi) + \dot{\psi}\sin(\theta)\sin(\phi) + \dot{y})$$


5. Hareket Denklemleri:
> f[x]:=diff(subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,L,X)),t)-subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,L,X))+subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,L,X))+mu[x]*subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,L,X))+mu[y]*subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,L,X))+u[1]),X))+u[1];


$$f_x := M_k \ddot{x} = -\mu_x R + u_1$$

> f[y]:=diff(subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,L,Y)),t)-subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,L,Y))+subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,L,Y))+mu[x]*subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,L,X))+mu[y]*subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,L,X))+u[2]),Y))+u[2];

```

Şekil A.1: (devam) Boş Küre Hareket Denklemlerinin Maple Paket Programında Elde Edilişi

```

>
<math display="block">f_y := M_k y'' = \mu_y R + u_2
> f[theta]:=diff(subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,L),Theta)),t)
-subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,L),theta))+subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,L),theta)),t)
=mu[x]*subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,L),theta)),t)
+mu[y]*subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,L),theta)),t)
<math display="block">f_\theta := J_k \theta'' + J_k \phi' \sin(\theta) \psi' = \mu_x R \sin(\phi) + \mu_y R \cos(\phi)
> f[psi]:=diff(subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,L),Psi)),t)
-subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,L),psi))+subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,L),theta)),t)
=mu[x]*subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,L),Psi)),t)
+mu[y]*subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,L),theta)),t)
<math display="block">f_\psi := J_k \psi'' + J_k \phi'' \cos(\theta) - J_k \phi' \sin(\theta) \theta' = -\mu_x R \sin(\theta) \cos(\phi) + \mu_y R \sin(\theta) \sin(\phi)
> f[phi]:=diff(subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,L),Phi)),t)
-subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,L),phi))+subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,L),theta)),t)
=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,L),Psi))

```

Şekil A.1: (devam) Boş Küre Hareket Denklemlerinin Maple Paket Programında Elde Edilişi

```

=mu[x]*subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,F[x]),Phi))
+mu[y]*subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,F[y]),Phi)) ;


$$f_{\phi} := -J_k \sin(\theta) \theta' \psi' + J_k \cos(\theta) \psi'' + J_k \phi'' = 0$$

> F[x];F[y];f[x];f[y];f[theta];f[psi];f[phi];


$$R(\theta' \sin(\phi) - \psi' \sin(\theta) \cos(\phi) - x')$$


$$R(\theta' \cos(\phi) + \psi' \sin(\theta) \sin(\phi) + y')$$


$$M_k x'' = -\mu_x R + u_1$$


$$M_k y'' = \mu_y R + u_2$$


$$J_k \theta'' + J_k \phi' \sin(\theta) \psi' = \mu_x R \sin(\phi) + \mu_y R \cos(\phi)$$


$$J_k \psi'' + J_k \phi'' \cos(\theta) - J_k \phi' \sin(\theta) \theta' = -\mu_x R \sin(\theta) \cos(\phi) + \mu_y R \sin(\theta) \sin(\phi)$$


$$-J_k \sin(\theta) \theta' \psi' + J_k \cos(\theta) \psi'' + J_k \phi'' = 0$$


```

Şekil A.1: (devam) Boş Küre Hareket Denklemlerinin Maple Paket Programında Elde Edilişi

EK A.2

```

> restart;
> with(VectorCalculus):with(LinearAlgebra):
> PDEtools[declare]({x(t),y(t),theta(t),psi(t),phi(t),alpha(t),beta(t)},prime=t,quiet);
> ihm1:={psi(t)=0,phi(t)=0,cos(psi(t))=1,cos(phi(t))=1,sin(psi(t))=0,sin(phi(t))=0};
      ihm1 := {ϕ = 0, ψ = 0, cos(ϕ) = 1, cos(ψ) = 1, sin(ϕ) = 0, sin(ψ) = 0}
1. Euler açıları için rotasyon matrisleri:
> Rot1:=<<cos(phi(t)), -sin(phi(t)), 0>>|<sin(phi(t)), cos(phi(t)), 0>>|<0, 0, 1>>;Rot2:=<<1, 0, 0>>|<0, cos(theta(t)), -sin(theta(t))>>|<0, sin(theta(t)), cos(theta(t))>>;Rot3:=<<cos(psi(t)), sin(psi(t)), 0>>|<-sin(psi(t)), cos(psi(t)), 0>>|<0, 0, 1>>;
      Rot1 :=  $\begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 
      Rot2 :=  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ 
      Rot3 :=  $\begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 
> Rot:=subs(ihm1, Rot3.Rot2.Rot1);
      Rot :=  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ 
2. Lagrange ifadesinde yer alan kinetik enerji tesiminin oluşturulması:
> E[k]:=1/2*M[k]*v[k]^2+1/2*J[k]*omega[k]^2+1/2*m[s]*v[s]^2+1/2*J[s]*omega[s]^2;
       $E_k := \frac{1}{2} M_k v_k^2 + \frac{1}{2} J_k \omega_k^2 + \frac{1}{2} m_s v_s^2 + \frac{1}{2} J_s \omega_s^2$ 
> omega[k]:=subs(ihm1,Transpose(diff(theta(t),t)*Row(Rot1,1)+diff(psi(t),t)*Row(Rot2.Rot1,3)+(diff(phi(t),t)*<0|0|1>)));
       $\omega_k := \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 
> v[k]:=<0,R*diff(theta(t),t),0>;
       $v_k := R \dot{\theta} \mathbf{e}_y$ 
2.1. Sarkacın kütle merkezinin çizgisel hızının edilmesi:
> r[s1]:=<0,1*sin(alpha(t)), -1*cos(alpha(t))>;
       $r_{s1} := l \sin(\alpha) \mathbf{e}_y - l \cos(\alpha) \mathbf{e}_z$ 
> r[s0]:=simplify(Rot.r[s1]);
       $r_{s0} := \begin{bmatrix} 0 \\ -l(-\cos(\theta) \sin(\alpha) + \sin(\theta) \cos(\alpha)) \\ -l(\sin(\theta) \sin(\alpha) + \cos(\theta) \cos(\alpha)) \end{bmatrix}$ 
> omega[s1]:=<diff(alpha(t),t),0,0>;
       $\omega_{s1} := \dot{\alpha} \mathbf{e}_x$ 
> omega[s0]:=simplify(omega[k]+Rot.omega[s1]);
       $\omega_{s0} := (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \mathbf{e}_x$ 

```

Şekil A.2 : Tek Serbestlik Dereceli Sarkaç ile Hareketi Sağlanan Küresel Robotun Hareket Denklemlerinin Maple Paket Programında Elde Edilişi

```

> v[s]:=simplify(simplify(v[k]+CrossProd(omega[s0],r[s0])),trig);

$$v_s := (R\dot{\theta} + l\dot{\theta}\sin(\theta)\sin(\alpha) + l\dot{\theta}\cos(\theta)\cos(\alpha) + l\dot{\alpha}\sin(\theta)\sin(\alpha) + l\dot{\alpha}\cos(\theta)\cos(\alpha))\mathbf{e}_y - (\dot{\theta} + \dot{\alpha})l(-\cos(\theta)\sin(\alpha) + \sin(\theta)\cos(\alpha))\mathbf{e}_z$$

2.2. Sarkacın kütle merkezinin açısal hızının edilmesi:
> omega[s]:=omega[s0];

$$\omega_s := (\dot{\theta} + \dot{\alpha})\mathbf{e}_x$$

Kinetik enerji:
> E[k]:=simplify(1/2*M[k]*v[k].v[k]+1/2*J[k]*omega[k].omega[k]+1/2*m[s]*v[s].v[s]+1/2*J[s]*BilinearForm(omega[s],omega[s],conjugate=false));

$$E_k := m_s R \dot{\theta} l \dot{\alpha} \sin(\theta) \sin(\alpha) + m_s R \dot{\theta} l \dot{\alpha} \cos(\theta) \cos(\alpha) + m_s R (\dot{\theta})^2 l \sin(\theta) \sin(\alpha) + m_s R (\dot{\theta})^2 l \cos(\theta) \cos(\alpha) + \frac{1}{2} m_s l^2 (\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} M_k R^2 (\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m_s R^2 (\dot{\theta})^2 + J_s \dot{\theta} \dot{\alpha} + \frac{1}{2} J_k (\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} J_s (\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} J_s (\dot{\alpha})^2 + m_s l^2 \dot{\theta} \dot{\alpha} + \frac{1}{2} m_s l^2 (\dot{\alpha})^2$$

3. Lagrange ifadesinde yer alan potansiyel enerji teriminin oluşturulması:
> E[p]:=simplify(M[k]*g*R+m[s]*g*(R+r[s0].<0,0,1>));

$$E_p := -g(-M_k R - m_s R + m_s \sin(\theta) l \sin(\alpha) + m_s \cos(\theta) l \cos(\alpha))$$

4. Lagrange ifadesi:
> L:=simplify(E[k]-E[p]);

$$L := m_s R \dot{\theta} l \dot{\alpha} \sin(\theta) \sin(\alpha) + m_s R \dot{\theta} l \dot{\alpha} \cos(\theta) \cos(\alpha) + m_s R (\dot{\theta})^2 l \sin(\theta) \sin(\alpha) + m_s R (\dot{\theta})^2 l \cos(\theta) \cos(\alpha) + \frac{1}{2} m_s l^2 (\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} M_k R^2 (\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m_s R^2 (\dot{\theta})^2 + J_s \dot{\theta} \dot{\alpha} + \frac{1}{2} J_k (\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} J_s (\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} J_s (\dot{\alpha})^2 + m_s l^2 \dot{\theta} \dot{\alpha} + \frac{1}{2} m_s l^2 (\dot{\alpha})^2 - M_k g R - g m_s R + g m_s \sin(\theta) l \sin(\alpha) + g m_s \cos(\theta) l \cos(\alpha)$$

6. Hareket Denklemleri:
> f[theta]:=simplify(diff(subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),alpha=alpha(t),beta=beta(t),B=diff(beta(t),t),A=diff(alpha(t),t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,diff(beta(t),t)=B,diff(alpha(t),t)=A,alpha(t)=alpha,beta(t)=beta,x(t)=x,y(t)=y,L),Theta)),t)-subs(alpha=alpha(t),beta=beta(t),theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),B=diff(beta(t),t),A=diff(alpha(t),t),diff(subs(diff(beta(t),t)=B,diff(alpha(t),t)=A,diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,alpha(t)=alpha,beta(t)=beta,L),theta))=tau[x]));

$$f_\theta := m_s R l \dot{\alpha} \sin(\theta) \sin(\alpha) - 2 m_s R l \dot{\alpha} \cos(\theta) \sin(\alpha) + m_s R l (\dot{\alpha})^2 \sin(\theta) \cos(\alpha) + m_s R l \dot{\alpha} \cos(\theta) \cos(\alpha) + 2 m_s R l \dot{\alpha} \sin(\theta) \cos(\alpha) - m_s R l (\dot{\alpha})^2 \cos(\theta) \sin(\alpha) + 2 m_s R \dot{\theta} l \sin(\theta) \sin(\alpha) + m_s R (\dot{\theta})^2 l \cos(\theta) \sin(\alpha) + 2 m_s R \dot{\theta} l \cos(\theta) \cos(\alpha) - m_s R (\dot{\theta})^2 l \sin(\theta) \cos(\alpha) + m_s l^2 \ddot{\theta} + M_k R^2 \ddot{\theta} + m_s R^2 \ddot{\theta} + J_s \ddot{\alpha} + J_k \ddot{\theta} + J_s \ddot{\theta} + m_s l^2 \ddot{\alpha} - g m_s \cos(\theta) l \sin(\alpha) + g m_s \sin(\theta) l \cos(\alpha) = \tau_x$$

> f[alpha]:=simplify(diff(subs(theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),alpha=alpha(t),beta=beta(t),B=diff(beta(t),t),A=diff(alpha(t),t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),diff(subs(diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,diff(beta(t),t)=B,diff(alpha(t),t)=A,alpha(t)=alpha,beta(t)=beta,x(t)=x,y(t)=y,L),A)),t)-subs(alpha=alpha(t),beta=beta(t),theta=theta(t),psi=psi(t),phi=phi(t),x=x(t),y=y(t),X=diff(x(t),t),Y=diff(y(t),t),Theta=diff(theta(t),t),Psi=diff(psi(t),t),Phi=diff(phi(t),t),B=diff(beta(t),t),A=diff(alpha(t),t),diff(subs(diff(beta(t),t)=B,diff(alpha(t),t)=A,diff(theta(t),t)=Theta,diff(psi(t),t)=Psi,diff(phi(t),t)=Phi,theta(t)=theta,psi(t)=psi,phi(t)=phi,diff(x(t),t)=X,diff(y(t),t)=Y,x(t)=x,y(t)=y,alpha(t)=alpha,beta(t)=beta,L),alpha))=tau[x]));

$$f_\alpha := m_s R \ddot{\theta} l \sin(\theta) \sin(\alpha) + 2 m_s R (\dot{\theta})^2 l \cos(\theta) \sin(\alpha) + m_s R \ddot{\theta} l \cos(\theta) \cos(\alpha) - 2 m_s R (\dot{\theta})^2 l \sin(\theta) \cos(\alpha) + J_s \ddot{\alpha} + J_s \ddot{\alpha} + m_s l^2 \ddot{\theta} + m_s l^2 \ddot{\alpha} + g m_s \cos(\theta) l \sin(\alpha) - g m_s \sin(\theta) l \cos(\alpha) = \tau_x$$


```

Şekil A.2 : (devam) Tek Serbestlik Dereceli Sarkaç ile Hareketi Sağlanan Küresel Robotun Hareket Denklemlerinin Maple Paket Programında Elde Edilişi

EK A.3

```

> restart;
> with(VectorCalculus):with(LinearAlgebra):
> PDEtools[declare]({x(t),y(t),theta(t),psi(t),phi(t),alpha(t),beta(t)},prime=t,quiet);

1. Euler açıları için rotasyon matrisleri:
> Rot1:=<<cos(phi(t)), -sin(phi(t)), 0>|<sin(phi(t)), cos(phi(t)), 0>|<0,0,1>>;Rot2:=<<1,0,0>|<0,cos(theta(t)), -sin(theta(t))>|<0,sin(theta(t)), cos(theta(t))>>;Rot3:=<<cos(psi(t)), -sin(psi(t)), 0>|<sin(psi(t)), cos(psi(t)), 0>|<0,0,1>>;


$$Rot1 := \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$


$$Rot2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$


$$Rot3 := \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> Rot:=subs(Rot3.Rot2.Rot1);


$$Rot := \begin{bmatrix} \cos(\psi) \cos(\phi) - \sin(\psi) \cos(\theta) \sin(\phi) & \cos(\psi) \sin(\phi) + \sin(\psi) \cos(\theta) \cos(\phi) & \sin(\psi) \sin(\theta) \\ -\sin(\psi) \cos(\phi) - \cos(\psi) \cos(\theta) \sin(\phi) & -\sin(\psi) \sin(\phi) + \cos(\psi) \cos(\theta) \cos(\phi) & \cos(\psi) \sin(\theta) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & -\sin(\theta) \cos(\phi) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

2. Lagrange ifadesinde yer alan kinetik enerji tesiminin oluşturulması:
> E[k]:=1/2*M[k]*v[k]^2+1/2*J[k]*omega[k]^2+1/2*m[s]*v[s]^2+1/2*J[s]*omega[s]^2;


$$E_k := \frac{1}{2} M_k v_k^2 + \frac{1}{2} J_k \omega_k^2 + \frac{1}{2} m_s v_s^2 + \frac{1}{2} J_s \omega_s^2$$

> omega[k]:=subs(Transpose(diff(theta(t),t)*Row(Rot1,1)+diff(psi(t),t)*Row(Rot2.Rot1,3)+(diff(phi(t),t)*<0|0|1>)));


$$\omega_k := \begin{bmatrix} \dot{\theta} \cos(\phi) + \dot{\psi} \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \dot{\theta} \sin(\phi) - \dot{\psi} \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \dot{\psi} \cos(\theta) + \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

> v[k]:=<diff(x(t),t),diff(y(t),t),0>;


$$v_k := x' \mathbf{e}_x + y' \mathbf{e}_y$$

2.1. Sarkacın kütle merkezinin çizgisel hızının edilmesi:
> r[s1]:=<1*cos(alpha(t))*sin(beta(t)),1*sin(alpha(t))*cos(beta(t)), -1*cos(alpha(t))*cos(beta(t))>;


$$r_{sl} := l \cos(\alpha) \sin(\beta) \mathbf{e}_x + l \sin(\alpha) \cos(\beta) \mathbf{e}_y - l \cos(\alpha) \cos(\beta) \mathbf{e}_z$$

> r[s0]:=simplify(Rot.r[s1]);
r_s0 :=
[ l (cos(alpha) sin(beta) cos(psi) cos(phi) - cos(alpha) sin(beta) sin(psi) cos(theta) sin(phi) + sin(alpha) cos(beta) cos(psi) sin(phi) + sin(alpha) cos(beta) sin(psi) cos(theta) cos(phi) - sin(psi) sin(theta) cos(alpha) cos(beta)) ]
[ l (-cos(alpha) sin(beta) sin(psi) cos(phi) - cos(alpha) sin(beta) cos(psi) cos(theta) sin(phi) - sin(alpha) cos(beta) sin(psi) sin(phi) + sin(alpha) cos(beta) cos(psi) cos(theta) cos(phi) - cos(psi) sin(theta) cos(alpha) cos(beta)) ]
[ -l (-sin(theta) sin(phi) cos(alpha) sin(beta) + sin(theta) cos(phi) sin(alpha) cos(beta) + cos(theta) cos(alpha) cos(beta)) ]
> omega[s1]:=<diff(alpha(t),t),diff(beta(t),t),0>;


$$\omega_{sl} := \alpha' \mathbf{e}_x + \beta' \mathbf{e}_y$$


```

Şekil A.3: Çift Serbestlik Dereceli Sarkaç ile Hareketi Sağlanan Küresel Robotun Hareket Denklemlerinin Maple Paket Programında Elde Edilişi

```

> omega[s0]:=simplify(omega[k]+Rot.omega[s1]);

$$\omega_{s0} :=$$


$$\begin{aligned} & (\theta' \cos(\phi) + \psi' \sin(\theta) \sin(\phi) + \alpha' \cos(\psi) \cos(\phi) - \alpha' \sin(\psi) \cos(\theta) \sin(\phi) + \beta' \cos(\psi) \sin(\phi) + \beta' \sin(\psi) \cos(\theta) \cos(\phi)) \\ & \mathbf{e}_x + \\ & (\theta' \sin(\phi) - \psi' \sin(\theta) \cos(\phi) - \alpha' \sin(\psi) \cos(\phi) - \alpha' \cos(\psi) \cos(\theta) \sin(\phi) - \beta' \sin(\psi) \sin(\phi) + \beta' \cos(\psi) \cos(\theta) \cos(\phi)) \\ & \mathbf{e}_y + (\psi' \cos(\theta) + \phi' + \sin(\theta) \sin(\phi) \alpha' - \sin(\theta) \cos(\phi) \beta') \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

> v[s]:=simplify(simplify(v[k]+CrossProd(omega[s0],r[s0])),trig);

$$\mathbf{v}_s := (x' + l \theta' \sin(\theta) \cos(\alpha) \sin(\beta) + l \psi' \cos(\phi)^2 \sin(\alpha) \cos(\beta) - l \theta' \sin(\phi) \cos(\theta) \cos(\alpha) \cos(\beta) + l \phi' \cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\psi) \cos(\phi) + l \phi' \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\psi) \sin(\phi) + l \phi' \cos(\psi) \sin(\theta) \cos(\alpha) \cos(\beta) - l \psi' \cos(\phi) \sin(\phi) \cos(\alpha) \sin(\beta) + l \alpha' \sin(\psi) \sin(\theta) \sin(\alpha) \cos(\beta) + l \alpha' \cos(\psi) \sin(\phi) \cos(\alpha) \cos(\beta) - l \beta' \sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\alpha) \sin(\beta) - l \beta' \cos(\psi) \cos(\phi) \cos(\alpha) \cos(\beta) - l \theta' \sin(\theta) \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\phi)^2 - l \psi' \cos(\phi)^2 \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\theta)^2 - l \theta' \sin(\phi) \sin(\theta) \cos(\phi) \sin(\alpha) \cos(\beta) + l \psi' \sin(\theta) \cos(\phi) \cos(\theta) \cos(\alpha) \cos(\beta) + l \alpha' \sin(\psi) \cos(\phi) \cos(\theta) \cos(\alpha) \cos(\beta) + l \beta' \sin(\psi) \sin(\phi) \cos(\theta) \cos(\alpha) \cos(\beta) + l \psi' \cos(\theta) \cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\psi) \cos(\phi) + l \psi' \cos(\theta)^2 \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\psi) \sin(\phi) + l \psi' \cos(\theta) \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\psi) \sin(\phi) - l \psi' \cos(\theta)^2 \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\psi) \cos(\phi) + l \psi' \cos(\theta) \cos(\psi) \sin(\theta) \cos(\alpha) \cos(\beta) + l \phi' \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\psi) \cos(\theta) \sin(\phi) - l \phi' \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\psi) \cos(\theta) \cos(\phi) + l \psi' \cos(\phi) \sin(\phi) \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\theta)^2) \mathbf{e}_x + (y' + l \psi' \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\phi)^2 - l \psi' \cos(\alpha) \sin(\beta) + l \phi' \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\psi) \cos(\phi) + l \phi' \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\psi) \sin(\phi) - l \phi' \sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\alpha) \cos(\beta) + l \theta' \cos(\phi)^2 \sin(\alpha) \cos(\beta) + l \theta' \cos(\phi) \cos(\theta) \cos(\alpha) \cos(\beta) + l \psi' \sin(\phi) \cos(\phi) \sin(\alpha) \cos(\beta) + l \sin(\theta) \alpha' \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\psi) - l \sin(\phi) \alpha' \sin(\psi) \cos(\alpha) \cos(\beta) - l \sin(\theta) \beta' \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\psi) + l \cos(\phi) \beta' \sin(\psi) \cos(\alpha) \cos(\beta) - l \psi' \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\theta)^2 \cos(\phi)^2 + l \psi' \cos(\theta) \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\psi) \cos(\phi) - l \psi' \cos(\theta)^2 \cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\psi) \sin(\phi) + l \psi' \cos(\theta) \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\psi) \sin(\phi) + l \psi' \cos(\theta)^2 \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\psi) \cos(\phi) - l \psi' \cos(\theta) \sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\alpha) \cos(\beta) - l \phi' \cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\psi) \cos(\theta) \sin(\phi) + l \phi' \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\psi) \cos(\theta) \cos(\phi) - l \theta' \cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\alpha) \sin(\beta) + l \psi' \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\theta) \cos(\alpha) \cos(\beta) + l \alpha' \cos(\psi) \cos(\phi) \cos(\theta) \cos(\alpha) \cos(\beta) + l \beta' \cos(\psi) \sin(\phi) \cos(\theta) \cos(\alpha) \cos(\beta) - l \psi' \sin(\phi) \cos(\phi) \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\theta)^2 + l \psi' \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\theta)^2) \mathbf{e}_y + l (\alpha' \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\theta) - \beta' \cos(\theta) \cos(\alpha) \sin(\beta) - \theta' \sin(\phi) \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\psi) \cos(\phi) + \theta' \sin(\phi) \sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\alpha) \cos(\beta) + \psi' \sin(\theta) \cos(\phi)^2 \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\psi) - \theta' \cos(\phi) \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\psi) \sin(\phi) + \theta' \cos(\phi)^2 \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\psi) \cos(\theta) - \theta' \cos(\phi) \cos(\psi) \sin(\theta) \cos(\alpha) \cos(\beta) - \psi' \sin(\theta) \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\psi) \cos(\theta) + \psi' \cos(\phi) \sin(\psi) \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\theta)^2 + \psi' \sin(\theta) \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\psi) \cos(\phi)^2 + \psi' \sin(\phi) \cos(\psi) \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\theta)^2 - \theta' \cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\psi) \cos(\theta) \cos(\phi)^2 - \theta' \cos(\phi) \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\psi) \cos(\theta) \sin(\phi) - \psi' \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\psi) \cos(\phi) - \theta' \sin(\phi) \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\psi) \cos(\theta) \cos(\phi) + \psi' \sin(\theta) \cos(\phi) \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\psi) \sin(\phi) + \psi' \sin(\theta) \cos(\phi)^2 \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\psi) \cos(\theta) + \psi' \sin(\theta) \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\psi) \cos(\theta) \cos(\phi)^2 - \theta' \cos(\phi)^2 \cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\psi) + \theta' \cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\psi) \cos(\theta) - \psi' \cos(\phi) \sin(\psi) \cos(\alpha) \cos(\beta) - \psi' \sin(\phi) \cos(\psi) \cos(\alpha) \cos(\beta) - \beta' \sin(\phi) \sin(\theta) \cos(\alpha) \cos(\beta) - \psi' \sin(\theta) \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\psi) + \theta' \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\psi) \cos(\phi)^2 - \alpha' \cos(\phi) \sin(\theta) \cos(\alpha) \cos(\beta) + \psi' \sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\psi) \cos(\theta) \cos(\phi) - \psi' \sin(\theta) \cos(\phi) \cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\psi) \cos(\theta) \sin(\phi) - \theta' \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\psi)) \mathbf{e}_z$$


```

Şekil A.3: (devam) Çift Serbestlik Dereceli Sarkaç ile Hareketi Sağlanan Küresel Robotun Hareket Denklemlerinin Maple Paket Programında Elde Edilişi

2.2. Sarkacın kütle merkezinin açısal hızının edilmesi:

```

> omega[s]:=omega[s0];
omega:=
(θ' cos(φ) + ψ' sin(θ) sin(φ) + α' cos(ψ) cos(φ) - α' sin(ψ) cos(θ) sin(φ) + β' cos(ψ) sin(φ) + β' sin(ψ) cos(θ) cos(φ))
e +
x
(θ' sin(φ) - ψ' sin(θ) cos(φ) - α' sin(ψ) cos(φ) - α' cos(ψ) cos(θ) sin(φ) - β' sin(ψ) sin(φ) + β' cos(ψ) cos(θ) cos(φ))
e + (ψ' cos(θ) + φ' + sin(θ) sin(φ) α' - sin(θ) cos(φ) β') e
y z
Kinetik enerji:
> E[k]:=simplify(1/2*M[k]*v[k].v[k]+1/2*J[k]*omega[k].omega[k]+1/2*m[s]*v[s].v[s]+1/2*J[s]
*BilinearForm(omega[s],omega[s],conjugate=false));
E_k:=-2 m_s I^2 ψ' cos(α)^2 sin(β) cos(φ)^3 θ' cos(β) cos(θ)^2 - 2 m_s I^2 ψ' cos(α)^2 sin(β) cos(φ) θ' cos(β) cos(ψ)^2 cos(θ)^2
+ 4 m_s I^2 ψ' cos(α)^2 sin(β) cos(φ)^3 θ' cos(β) cos(θ)^2 cos(ψ)^2 - m_s I^2 (ψ')^2 sin(φ) cos(α)^2 sin(ψ) cos(φ)^3 cos(ψ)
- m_s I^2 (ψ')^2 sin(θ) sin(φ) cos(α)^2 sin(β) cos(φ)^2 cos(β) cos(θ)^2 + m_s I^2 φ' cos(α)^2 cos(ψ) cos(θ) sin(φ) θ' sin(θ)
+ m_s I^2 ψ' cos(φ) cos(α)^2 sin(β) cos(θ)^2 α' cos(ψ) cos(β) + m_s I^2 φ' cos(α)^2 cos(ψ) cos(φ) ψ' cos(θ)^2
- m_s I^2 φ' cos(ψ) cos(α)^2 cos(β) θ' sin(β) cos(φ)^2
- 4 m_s I^2 (ψ')^2 cos(α) sin(β) sin(ψ) cos(φ)^2 sin(α) cos(β) cos(ψ) cos(θ)
- m_s I^2 ψ' sin(θ) sin(φ) cos(α)^2 cos(φ) θ' cos(θ) + 2 m_s I^2 ψ' sin(θ) sin(φ) cos(α)^2 cos(φ)^3 θ' cos(θ)
- 2 m_s I^2 (ψ')^2 sin(θ) cos(φ)^2 cos(α)^2 sin(β) cos(ψ)^2 sin(φ) cos(β)
+ 4 m_s I^2 ψ' sin(θ) cos(φ)^4 cos(α) sin(β) cos(ψ)^2 θ' sin(α) cos(β) - J_s φ' sin(θ) cos(φ) β'
- 2 m_s I^2 (ψ')^2 cos(θ)^3 cos(α) sin(β) cos(ψ) cos(φ)^2 sin(φ) sin(α) cos(β) - m_s I ψ' cos(θ)^2 cos(α) sin(β) sin(ψ) sin(φ) y'
+ m_s I ψ' cos(θ) sin(α) cos(β) cos(ψ) sin(φ) y' - m_s I ψ' cos(θ) sin(ψ) sin(θ) cos(α) cos(β) y'
+ m_s I^2 (ψ')^2 cos(θ)^2 cos(α)^2 sin(β) cos(ψ) cos(φ) sin(θ) sin(φ) cos(β) + m_s I ψ' cos(θ) cos(α) sin(β) cos(ψ) cos(φ) y'
+ 2 m_s I^2 (ψ')^2 cos(θ) cos(α) sin(β) cos(ψ) cos(φ)^2 sin(φ) sin(α) cos(β) + m_s I^2 sin(θ) β' cos(α)^2 cos(ψ) ψ'
+ m_s I^2 φ' cos(β)^2 cos(ψ) ψ' cos(φ)^3 cos(θ)^2 - m_s I^2 φ' sin(ψ) cos(α) cos(β)^2 θ' cos(φ)^2 sin(α)
+ 2 m_s I^2 φ' sin(θ) cos(α)^2 cos(β) ψ' cos(θ)^2 sin(β) sin(φ) - 2 m_s I^2 φ' sin(θ) cos(α) cos(β)^2 ψ' cos(θ)^2 sin(α) cos(φ)
- m_s I^2 (φ')^2 sin(θ) cos(α) cos(β)^2 sin(α) cos(θ) cos(φ) + m_s I^2 (ψ')^2 cos(θ)^3 sin(α) cos(β) cos(ψ) sin(φ) cos(α) sin(β)
+ 2 m_s I^2 (ψ')^2 cos(θ)^3 sin(α) cos(β)^2 sin(ψ) cos(φ) sin(θ) sin(φ) cos(α) + m_s I ψ' cos(θ)^2 sin(α) cos(β) sin(ψ) cos(φ) y'
+ m_s I^2 θ' sin(θ) cos(φ)^3 cos(β)^2 ψ' cos(θ) sin(ψ) + 2 m_s I^2 θ' cos(β)^2 cos(ψ) cos(φ)^4 ψ' sin(θ) sin(ψ)
- m_s I^2 φ' cos(β)^2 cos(ψ) cos(θ) cos(φ)^3 ψ' - m_s I^2 φ' sin(α) cos(β) sin(ψ) ψ' cos(φ) cos(α) sin(β)
- m_s I^2 φ' cos(α)^2 cos(ψ) cos(φ)^2 θ' sin(θ) sin(φ) - m_s I^2 φ' cos(α)^2 cos(ψ) cos(φ)^3 ψ' cos(θ)^2
- m_s I^2 φ' sin(α) cos(β) cos(ψ) θ' cos(φ) sin(θ) cos(α) sin(β) - m_s I^2 φ' cos(β)^2 cos(ψ) ψ' cos(φ) cos(θ)^2
- 2 m_s I^2 θ' sin(α) cos(β)^2 cos(ψ)^2 ψ' sin(φ) cos(α) cos(θ)^2 - 4 m_s I^2 ψ' sin(φ) cos(ψ)^2 cos(α) cos(β)^2 θ' sin(α) cos(φ)^2
- 2 m_s I^2 (ψ')^2 sin(φ) cos(ψ)^2 cos(α)^2 cos(β) sin(θ) sin(β) cos(θ) cos(φ)^2
+ 2 m_s I^2 φ' cos(α)^2 sin(ψ) cos(θ)^3 sin(φ) ψ' cos(β)^2 - m_s I^2 θ' cos(φ)^2 sin(α) cos(β)^2 ψ' cos(θ) sin(ψ) cos(α)
- m_s I^2 θ' cos(φ)^2 sin(α) cos(β) β' cos(α) sin(β) cos(ψ) - 2 m_s I^2 (ψ')^2 cos(θ)^3 sin(α) cos(β)^2 cos(φ) sin(θ) cos(α)
+ m_s I^2 θ' cos(α) sin(β) α' sin(ψ) sin(α) cos(β) + m_s I^2 ψ' cos(φ) sin(φ) cos(α)^2 β' sin(ψ) sin(θ)
+ m_s I^2 α' sin(ψ) sin(θ) cos(β)^2 ψ' cos(φ)^2 - 2 m_s I^2 (ψ')^2 cos(θ)^2 cos(α)^2 sin(ψ) sin(φ) cos(β)^2
+ m_s I^2 φ' cos(α)^2 sin(ψ) cos(φ)^2 ψ' sin(φ) cos(θ)^2 + m_s I^2 φ' sin(α) cos(β) sin(ψ) ψ' cos(φ) cos(α) sin(β) cos(θ)^2
+ m_s I^2 φ' cos(ψ) cos(α)^2 cos(β) θ' sin(β) - 2 m_s I^2 φ' cos(ψ) cos(α)^2 cos(β) θ' sin(β) cos(θ)^2

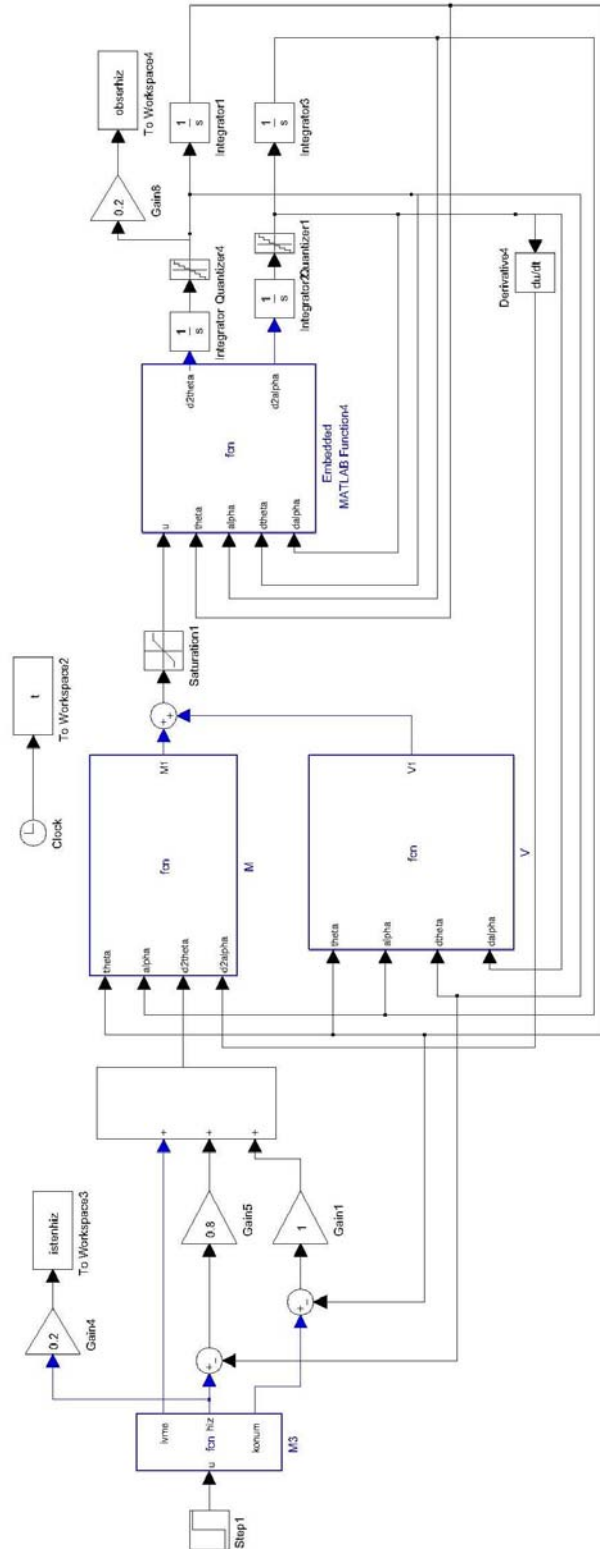
```

Şekil A.3: (devam) Çift Serbestlik Dereceli Sarkaç ile Hareketi Sağlanan Küresel Robotun Hareket Denklemlerinin Maple Paket Programında Elde Edilişi

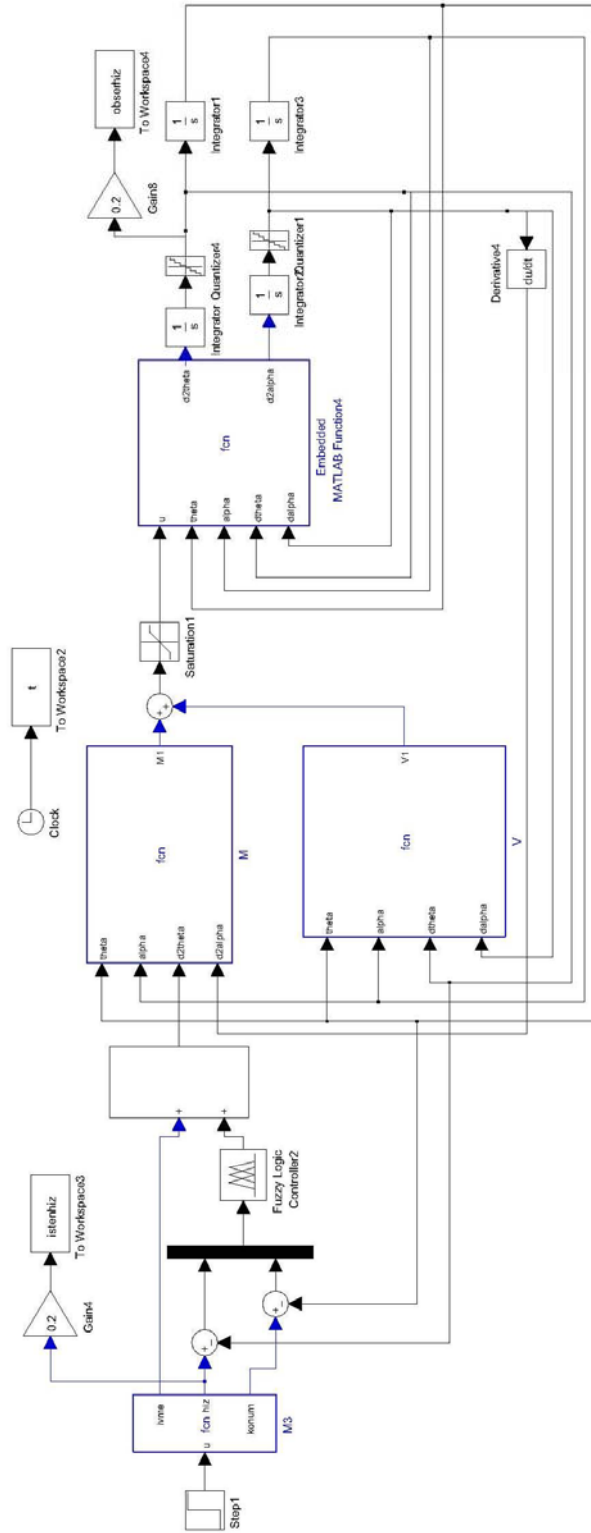
$$\begin{aligned}
& + m_s I^2 \phi' \cos(\beta)^2 \cos(\psi) \cos(\theta)^3 \cos(\phi)^3 \psi' + m_s I^2 (\phi')^2 \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\phi) \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\phi) \\
& + m_s I^2 \phi' \cos(\alpha)^2 \sin(\psi) \cos(\phi) \theta' \sin(\theta) + m_s I^2 \phi' \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\phi) \alpha' \sin(\theta) \sin(\alpha) \cos(\beta) \\
& + m_s I^2 \phi' \cos(\beta)^2 \sin(\psi) \sin(\phi) \psi' \cos(\phi)^2 + m_s I^2 (\psi')^2 \cos(\theta) \cos(\beta)^2 \sin(\psi) \sin(\phi) \cos(\phi)^2 \\
& + m_s I^2 (\psi')^2 \cos(\theta)^3 \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\psi) \cos(\phi) \cos(\alpha) \sin(\beta) + m_s I^2 \phi' \cos(\alpha)^2 \cos(\psi) \cos(\theta)^3 \psi' \cos(\phi) \\
& - m_s I^2 \phi' \cos(\alpha)^2 \cos(\psi) \cos(\theta)^3 \psi' \cos(\phi)^3 + m_s I^2 \psi' \cos(\theta) \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\phi) \alpha' \sin(\theta) \sin(\alpha) \cos(\beta) \\
& + m_s I^2 (\psi')^2 \cos(\theta)^3 \cos(\alpha)^2 \sin(\psi) \cos(\phi)^2 \sin(\phi) + m_s I^2 \psi' \cos(\theta)^2 \cos(\alpha)^2 \cos(\psi) \sin(\phi) \theta' \sin(\theta) \\
& + m_s I^2 \psi' \cos(\theta) \cos(\beta)^2 \sin(\phi) \alpha' \sin(\theta) - 2 m_s I^2 \psi' \cos(\theta)^3 \cos(\psi) \cos(\alpha)^2 \cos(\beta) \theta' \sin(\beta) \\
& - m_s I^2 \theta' \sin(\phi) \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\psi) \cos(\phi) \alpha' \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\theta) \\
& + m_s I^2 (\theta')^2 \sin(\phi) \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\psi)^2 \cos(\phi) \sin(\alpha) \cos(\beta) \\
& - 2 m_s I^2 (\theta')^2 \sin(\phi) \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\psi)^2 \cos(\phi)^3 \sin(\alpha) \cos(\beta) + \frac{1}{2} J_k (\phi')^2 + m_s I^2 (\psi')^2 \cos(\alpha)^2 \cos(\phi)^4 \cos(\theta)^3 \\
& - \frac{1}{2} m_s I^2 (\psi')^2 \cos(\alpha)^2 \cos(\theta)^4 \cos(\psi)^2 - \frac{1}{2} m_s I^2 (\psi')^2 \cos(\beta)^2 \cos(\theta)^2 \cos(\phi)^2 - \frac{1}{2} m_s I^2 (\phi')^2 \cos(\alpha)^2 \cos(\theta)^2 \cos(\phi)^2 \\
& - m_s I^2 (\psi')^2 \cos(\phi)^4 \cos(\beta)^2 \cos(\psi)^2 - 2 m_s I^2 (\psi')^2 \cos(\theta)^2 \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\psi) \cos(\phi) \cos(\alpha) \sin(\beta) \\
& + 2 m_s I^2 (\psi')^2 \cos(\theta)^2 \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\psi) \cos(\phi)^3 \cos(\alpha) \sin(\beta) \\
& + 2 m_s I^2 (\psi')^2 \cos(\theta)^4 \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\psi) \cos(\phi) \cos(\alpha) \sin(\beta) \\
& + 2 m_s I^2 \phi' \sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\alpha) \cos(\beta)^2 \psi' \sin(\phi) \cos(\phi) \sin(\alpha) \cos(\theta)^2 \\
& + m_s I^2 (\theta')^2 \cos(\phi)^3 \sin(\theta) \sin(\alpha) \cos(\beta)^2 \cos(\theta) \cos(\alpha) + m_s I^2 (\theta')^2 \cos(\phi) \cos(\beta)^2 \sin(\psi) \sin(\phi) \cos(\psi) \\
& + 4 m_s I^2 \theta' \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\theta) \psi' \sin(\theta) \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\phi)^2 + 2 m_s I^2 \theta' \cos(\phi)^2 \sin(\alpha) \cos(\beta)^2 \sin(\phi) \psi' \cos(\alpha) \\
& - m_s I^2 \phi' \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\phi) \beta' \sin(\theta) \cos(\alpha) \sin(\beta) + m_s I^2 \beta' \cos(\theta) \cos(\alpha) \cos(\beta)^2 \phi' \sin(\alpha) \\
& - m_s I^2 \psi' \cos(\theta) \cos(\alpha)^2 \cos(\psi) \cos(\phi)^2 \theta' \sin(\theta) \sin(\phi) - 2 m_s I^2 \psi' \cos(\theta)^3 \cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\phi) \phi' \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\phi) \\
& - m_s I^2 (\psi')^2 \cos(\theta)^2 \cos(\alpha)^2 \sin(\psi) \sin(\phi) \cos(\phi)^2 - m_s I^2 \psi' \cos(\theta) \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\psi) \theta' \cos(\phi) \sin(\theta) \cos(\alpha) \sin(\beta) \\
& - 2 m_s I^2 (\psi')^2 \cos(\theta)^4 \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\psi) \cos(\phi)^3 \cos(\alpha) \sin(\beta) \\
& - m_s I^2 (\psi')^2 \cos(\theta) \sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\alpha) \cos(\beta)^2 \sin(\phi) \cos(\phi) \sin(\alpha) \\
& + m_s I^2 (\psi')^2 \cos(\theta) \sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\alpha)^2 \cos(\beta) \sin(\beta) - m_s I^2 (\psi')^2 \cos(\theta) \sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\alpha)^2 \cos(\beta) \sin(\beta) \cos(\phi)^2 \\
& - 2 m_s I^2 (\psi')^2 \cos(\theta)^3 \sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\alpha)^2 \cos(\beta) \sin(\beta) \\
& + 2 m_s I^2 (\psi')^2 \cos(\theta)^3 \sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\alpha)^2 \cos(\beta) \sin(\beta) \cos(\phi)^2 - m_s I^2 \phi' \cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\psi) \cos(\theta) \sin(\phi) y' \\
& - m_s I^2 (\psi')^2 \cos(\theta)^4 \cos(\beta)^2 \sin(\psi) \cos(\phi)^2 \sin(\phi) - m_s I^2 (\phi')^2 \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\theta)^2 \sin(\phi) \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\phi) \\
& - m_s I^2 \phi' \cos(\alpha)^2 \sin(\psi) \cos(\theta) \sin(\phi) \psi' \cos(\phi)^2 + m_s I^2 \phi' \cos(\beta)^2 \cos(\psi) \sin(\phi) \theta' \cos(\phi)^2 \sin(\theta) \\
& + m_s I^2 \phi' \sin(\alpha) \cos(\beta)^2 \cos(\psi) \psi' \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\alpha) + m_s I^2 \phi' \sin(\psi) \cos(\alpha)^2 \cos(\beta) \theta' \cos(\phi) \sin(\phi) \sin(\beta) \\
& - 4 m_s I^2 \theta' \cos(\beta)^2 \sin(\psi) \cos(\theta) \cos(\phi)^2 \psi' \sin(\theta) \cos(\psi) + 4 m_s I^2 \theta' \cos(\beta)^2 \sin(\psi) \cos(\theta) \cos(\phi)^4 \psi' \sin(\theta) \cos(\psi) \\
& - 4 m_s I^2 \theta' \cos(\beta)^2 \sin(\psi) \cos(\theta) \cos(\phi)^2 \psi' \sin(\theta) \cos(\psi) + 4 m_s I^2 \theta' \cos(\beta)^2 \sin(\psi) \cos(\theta) \cos(\phi)^4 \psi' \sin(\theta) \cos(\psi) \\
& - m_s I^2 \theta' \sin(\phi) \cos(\beta)^2 \cos(\theta)^2 \cos(\phi)^3 \psi' \sin(\theta) + m_s I^2 (\theta')^2 \sin(\theta) \cos(\phi) \sin(\alpha) \cos(\beta)^2 \cos(\theta) \cos(\alpha) \cos(\psi)^2 \\
& + 2 m_s I^2 \phi' \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\psi) \cos(\phi)^2 \psi' \sin(\phi) \sin(\alpha) \cos(\beta) \\
& - 2 m_s I^2 \phi' \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\psi) \cos(\phi)^2 \psi' \sin(\phi) \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\theta)^2 \\
& + m_s I^2 \phi' \sin(\alpha) \cos(\beta)^2 \cos(\psi) \sin(\phi) \theta' \cos(\phi) \cos(\theta) \cos(\alpha) + m_s I^2 \psi' \sin(\theta) \cos(\phi) \cos(\beta)^2 \cos(\psi) \sin(\phi) \alpha' \cos(\theta) \\
& + m_s I^2 (\psi')^2 \sin(\phi) \cos(\beta)^2 \cos(\psi) \cos(\theta)^3 \cos(\phi) \sin(\psi) - m_s I^2 (\theta')^2 \cos(\phi)^3 \cos(\beta)^2 \sin(\psi) \sin(\phi) \cos(\psi) \\
& - 2 m_s I^2 \theta' \cos(\phi) \cos(\beta)^2 \sin(\phi) \psi' \sin(\theta) \cos(\psi)^2 + m_s I^2 \phi' \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\psi) \cos(\theta) \cos(\phi) y' \\
& - 2 m_s I^2 \phi' \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\psi) \cos(\theta) \cos(\phi) \psi' \cos(\alpha) \sin(\beta)
\end{aligned}$$

Şekil A.3: (devam) Çift Serbestlik Dereceli Sarkaç ile Hareketi Sağlanan Küresel Robotun Hareket Denklemlerinin Maple Paket Programında Elde Edilişi

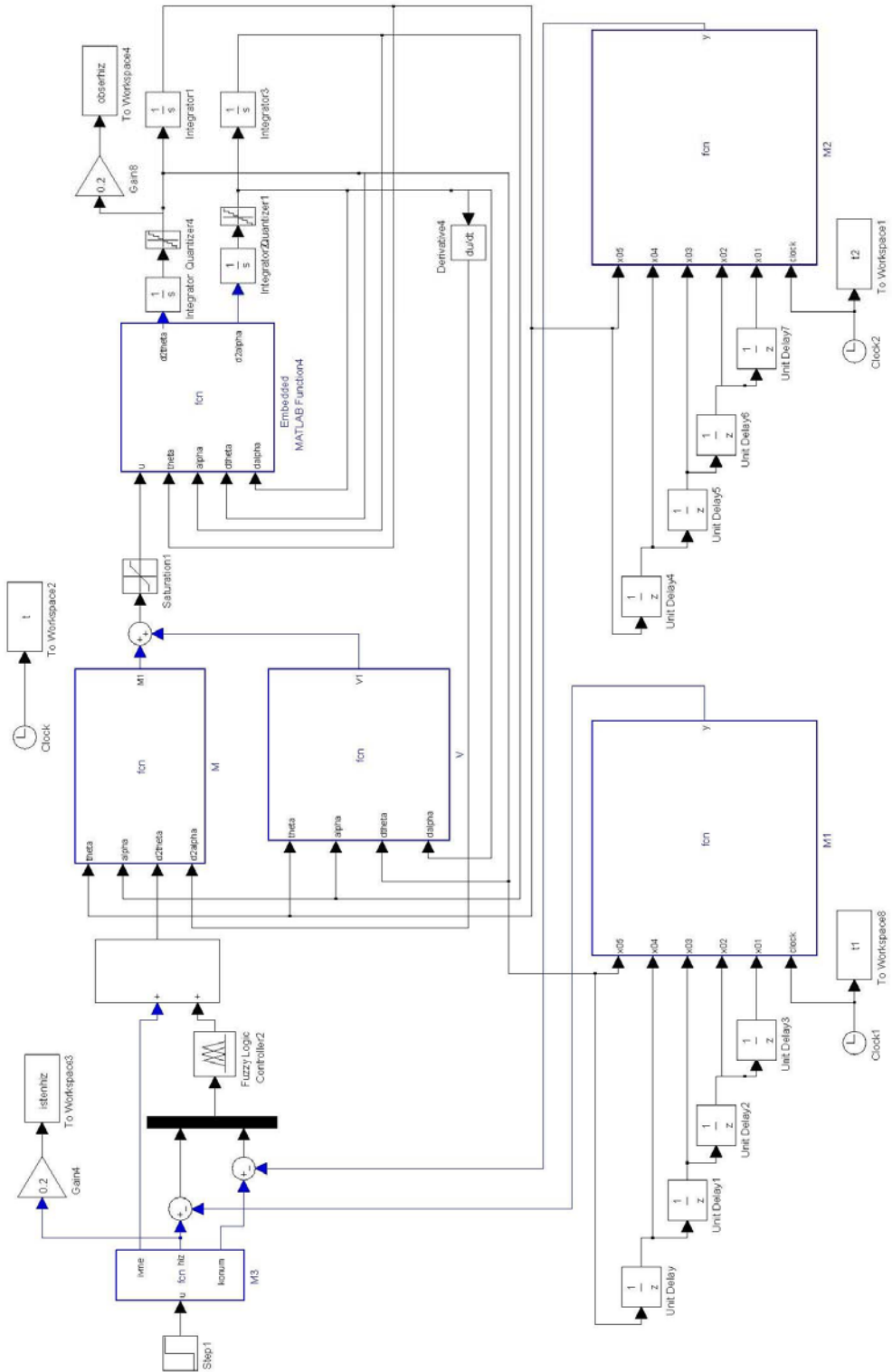
EK B.1



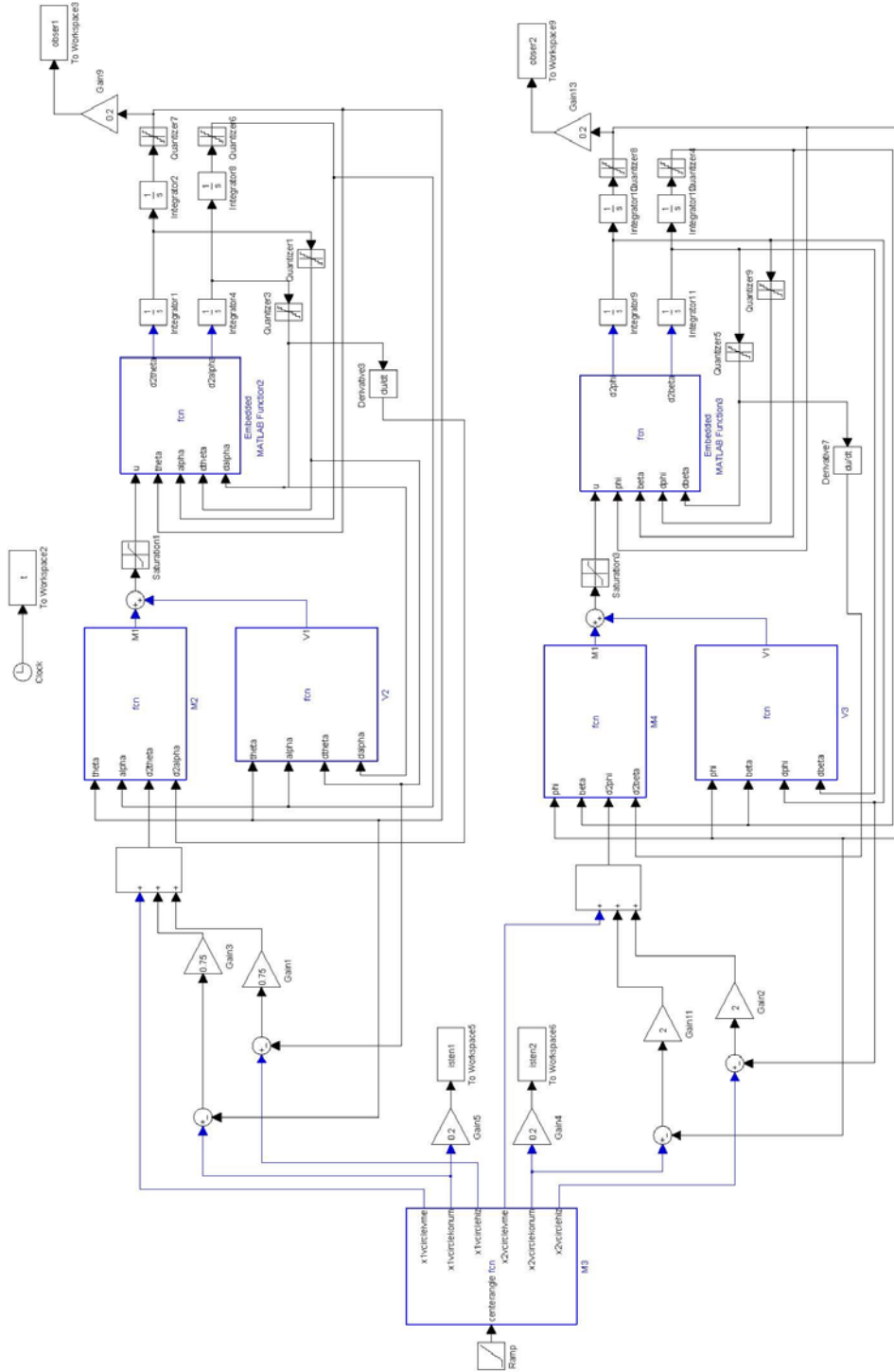
Şekil B.1 : Sabit Hız Kontrolü İçin Simulink Blok Diagramı - Hesaplanmış Tork Kontrol Methodu



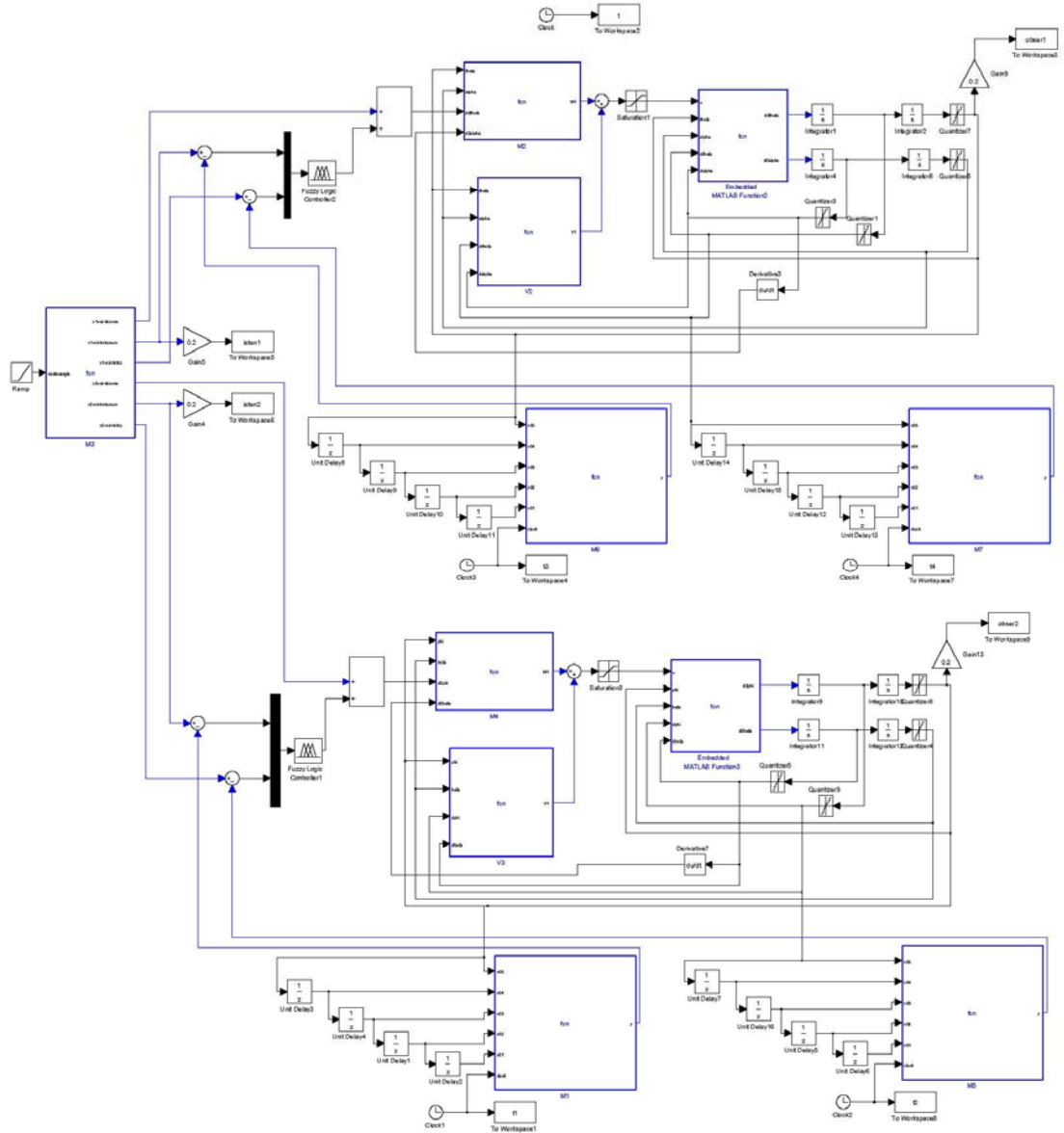
Şekil B.2: Sabit Hız Kontrolü İçin Simulink Blok Diagramı - Bulanık Hesaplanmış Tork Kontrol Methodu



Şekil B.3: Sabit Hız Kontrolü İçin Simulink Blok Diagramı - Gri Bulanık Hesaplanmış Tork Kontrol Methodu



Şekil B.4: Dairesel Konum Kontrolü için Simulink Blok Diagramı - Hesaplanmış Tork Kontrol Methodu



Şekil B.6: Dairesel Konum Kontrolü için Simulink Blok Diagramı - Gri Bulanık Hesaplanmış Tork Kontrol Methodu

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Erkan KAYACAN

Doğum Yeri ve Tarihi: İstanbul 19.04.1985

Lisans Üniversitesi: İstanbul Teknik Üniversitesi (İTÜ)