

T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİMETRİK OPERATÖRLERİN İNDİS DEFEKT
VE GENİŞLEME TEORİSİ

Hüseyin TUNA

Danışman: Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA – 2011

TEZ ONAYI

Hüseyin TUNA tarafından hazırlanan “**Simetrik Operatörlerin İndis Defekt ve Genişleme Teorisi**” adlı tez çalışması aşağıdaki juri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Süleyman Demirel Üniversitesi **Matematik** Anabilim Dalında **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU

Süleyman Demirel Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Juri Üyeleri :

Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Prof. Dr. Ali KÖKCE

Süleyman Demirel Üniversitesi, Fizik Anabilim Dalı

Yrd. Doç.Dr. Mevlide Yakıt ONGUN

Süleyman Demirel Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Yrd. Doç.Dr. Duygu Aruğaslan ÇİNÇİN

Süleyman Demirel Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Doç. Dr. Mehmet Cengiz KAYACAN

Enstitü Müdür Vekili

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	<i>i</i>
ÖZET.....	<i>ii</i>
ABSTRACT.....	<i>iii</i>
TEŞEKKÜR.....	<i>iv</i>
SİMGELER DİZİNİ.....	<i>v</i>
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
3. SİMETRİK OPERATÖRLERİN KENDİNE EŞ VE SİMETRİK GENİŞLEMELERİ	9
4. SİMETRİK OPERATÖRLERİN DİSİPATİF GENİŞLEMELERİ.....	24
4.1. Disipatif Operatörler.....	24
4.2. Lineer Bağıntılar.....	28
4.3. Sınır Değer Uzayları ve Disipatif Genişlemeler.....	31
5. 4. MERTEBEDEN DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN GENİŞLEMELERİ.....	36
5.1. (4,4) İndis Defekli 4. Mertebeden Diferensiyel Operatörlerin Disipatif Genişlemeleri.....	36
5.2. (3,3) İndis Defekli 4. Mertebeden Diferensiyel Operatörlerin Disipatif Genişlemeleri.....	49
5.3. (4n,4n) İndis Defekli 4. Mertebeden Diferensiyel Operatörlerin Disipatif Genişlemeleri.....	52
5.4. (2n+k,2n+k) İndis Defekli 4. Mertebeden Diferensiyel Operatörlerin Disipatif Genişlemeleri.....	59
6. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	67
7. KAYNAKLAR.....	69
ÖZGEÇMİŞ.....	73

ÖZET

Doktora Tezi

SİMETRİK OPERATÖRLERİN İNDİS DEFEKT VE GENİŞLEME TEORİSİ

Hüseyin TUNA

Süleyman Demirel Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU

Simetrik operatörlerin genişleme teorisi operatörler teorisinin temel araştırma alanlarından birisidir. Bu teoriyi oluşturacak bazı tanım ve teoremler ikinci bölümde verilmiştir. Üçüncü bölümde verilen bir simetrik operatörün kendine eş genişlemesi oluşturulmuştur.

Dördüncü bölümde lineer bağıntı, sınır değerler uzayı kavramları tanımlanmıştır. Bu kavramlar yardımıyla simetrik diferansiyel operatörlerin maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeleri sınır koşulları cinsinden verilmiştir.

Beşinci bölümde dördüncü mertebeden simetrik diferansiyel operatörler için sınır değer uzayı oluşturulmuştur. Dördüncü mertebeden simetrik diferansiyel operatörlerin disipatif, akretif, kendine eş genişlemeleri sınır koşulları cinsinden verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Simetrik operatör, Kendine eş operatör, disipatif operatör, akretif operatör, genişleme, sınır değer uzayı, sınır koşulları, indis defekt, lineer bağıntı.

ABSTRACT

Ph. Dr. Thesis

INDICES DEFECT AND EXTENSION OF SYMMETRIC OPERATORS THEORY

Hüseyin TUNA

Süleyman Demirel University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Mathematics Department

Supervisor: Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU

The theory of extensions of symmetric operators is one of the main research areas of operator theory. Some definitions and theorems based on this theory are given in the second section.

In the third section, self adjoint extension of a symmetric operator is constructed. In the fourth section, the notions of a space of boundary value and linear relations are defined. On that basis maximal dissipative and self adjoint extensions of a symmetric differential operator are described in terms of boundary conditions.

In the fifth section, a space of boundary value for fourth order differential operator is constructed. A description of all maximal dissipative, accretive, self adjoint and other extensions of fourth order differential operator is given in terms of boundary conditions.

Key Words: Symmetric operators, self adjoint operators, dissipative operators, accretive operators, a space of boundary value, boundary conditions, indices defect, linear relation.

2011, 73 pages

TEŐEKKÖR

Bu alıŐma için beni yönlendiren ve çalıŐmamın her aŐamasında ilgi ve desteğini benden esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Bilender PAŞAOğLU'na teŐekkr ve saygılarımı sunarım.

1911 D–09 No'lu Proje ile tezimi maddi olarak destekleyen Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yönetim Birimi BaŐkanlıęı'na teŐekkr ederim.

Doktora eęitimim süresince maddi ve manevi olarak bana destek olan aileme teŐekkr ederim.

HÜSEYİN TUNA
ISPARTA, 2011

SİMGELER DİZİNİ

H	Hilbert Uzayı
D (A)	A operatörünün tanım kümesi
R (A)	A operatörünün değer kümesi
A *	A nın eş (adjoint) operatörü
L ₀	Minimal simetrik operatör
L	Maksimal operatör
def L ₀	L_0 operatörünün defekt sayısı
\tilde{A}	A operatörün genişlemesi
R_λ	$(A - \lambda I)$ operatörünün değer kümesi
$R_{\bar{\lambda}}$	$(A - \bar{\lambda} I)$ operatörünün değer kümesi
N_λ	A operatörünün defekt uzayı
P	İzdüşüm operatörü
θ	Lineer bağıntı
$(\mathcal{K}, \Gamma_1, \Gamma_2)$	Sınır değer uzayı

1. GİRİŞ

Operatörler teorisinde kendine eş operatörlerle ilgili çok önemli özellikler vardır. Matematiksel fiziğin birçok alanında karşımıza çıkan denklemlerden elde edilen operatörler kendine eş değildir. Dolayısıyla kendine eş operatörlerle ilgili özellikler uygulanamamaktadır. Bu özellikleri kullanabilmek için simetrik operatörlerin kendine eş, disipatif, akretif genişlemelerini yapma ihtiyacı hissedilmiştir. 1910 yılında H. Weyl'in Sturm - Liouville problemi üzerine olan ünlü araştırmasında temelleri atılsa da simetrik operatörlerin genişleme teorisi ile ilgili ilk sonuçlar J. von Neumann (1929), tarafından elde edilmiştir. J. von Neumann hangi koşullarda simetrik operatörler kendine eş genişlemeye sahiptir ve bu genişlemenin nasıl olacağını göstermiştir. Rellich (1951), Krein (1947; 1952), Vishik (1952), Birman (1956), Phillips (1959), simetrik operatörlerin kendine eş genişlemeleri üzerinde çalışan matematikçilerden bazılarıdır.

Sonraları, lineer bağıntılar simetrik operatörlerin genişlemesinde kullanılmaya başlandı. Bu tipteki ilk sonuçlar Rofe-Beketov tarafından elde edildi (Rofe-Beketov, 1969). Lineer bağıntılar kullanarak simetrik diferansiyel operatörlerin kendine eş genişlemeleri sınır koşulları cinsinden ifade eden matematikçiler : Gorbachuk and Gorbachuk (1972), Bairamogly (1976), Kholkin (1980) dir.

Disipatif lineer bağıntılar kullanılarak operatör katsayılı simetrik diferansiyel operatörlerin disipatif ve kendine eş genişlemeleri Gorbachuk, Kochubei and Rybak (1972) tarafından verildi. Daha sonraları birbirinden bağımsız olarak Bruk (1976), Kochubei (1975) tarafından sınır değer uzayı kavramı yardımıyla simetrik operatörlerin disipatif, akretif, kendine eş ve diğer genişlemeleri yapıldı. Simetrik operatörlerin genişlemesi ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için bakınız: Gorbachuk, Gorbachuk and Kochubei, 1989.

$2n$. mertebeden simetrik diferansiyel operatörlerin kendine eş genişlemeleri; indis defektin (n, n) olduğu durumda Naimark (1968) tarafından, indis defektin $(2n, 2n)$ olduğu durumda Fulton (1977), Kholkin (1980) tarafından, indis defektin $(n + k, n + k)$ olduğu durumda Guseinov and Pashaev (1983) tarafından elde edilmiştir.

2.mertebeden simetrik diferansiyel operatörler için disipatif genişlemeler Allahverdiev (1991a; 1991b; 1995a; 1995b) tarafından verilmiştir.

Bu çalışmada $y^{(4)} + Q(x)y$ dördüncü mertebeden diferansiyel operatörü ele alındı. İlk olarak skaler durumda indis defektin $(4, 4)$ olduğunda $[0, \infty)$ ve $(-\infty, \infty)$ aralığında sınır değer uzayı oluşturuldu ve operatörün maksimal disipatif, akretif, kendine eş genişlemeleri sınır koşulları cinsinden ifade edildi. Daha sonra indis defektin $(3, 3)$ olduğu durumda $[0, \infty)$ aralığında maksimal disipatif, akretif, kendine eş genişlemeleri sınır koşulları cinsinden ifade edildi. Son olarakta indis defektin $(4n, 4n), (2n + k, 2n + k)$ olduğu matris değerli dördüncü mertebeden diferansiyel operatörlerin $[0, \infty)$ aralığında maksimal disipatif, akretif, kendine eş genişlemeleri sınır koşulları cinsinden ifade edildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, Hilbert uzayında simetrik lineer operatörlerin genişleme teorisi ile ilgili bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1. H , bir kompleks lineer uzay olmak üzere, her $x, y \in H$ için aşağıdaki şartları sağlayan ve (x, y) ile gösterilen kompleks sayısına x ve y elemanlarının *iç çarpımı* ve H lineer uzayına da *iç çarpım uzayı* denir:

1. $(x, x) \geq 0; (x, x) = 0 \iff x = 0$
2. $(x, y) = \overline{(y, x)}$
3. $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$
4. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$

Ayrıca verilen bu özellikler göz önünde bulundurularak, $(x, \lambda y) = \overline{\lambda} (x, y)$ ve $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$ özellikleri de verilebilir (Akhiezer and Glazman, 1963).

Tanım 2.2. Bir H iç çarpım uzayında

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

bir norm tanımladığından, bu iç çarpım uzayı bu norma göre lineer normlu uzay olacaktır.

Sayılabılır, tam ortonormal sistem içeren bir iç çarpım uzayına *Hilbert Uzayı* denir ve genellikle H ile gösterilir (Naimark, 1968).

Tanım 2.3. D , H Hilbert uzayının herhangi bir lineer alt uzayı ($D \subseteq H$) olsun.

$$A : D \subseteq H \longrightarrow H$$

dönüşümü ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve her $x, y \in D$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

eşitliği sağlamıyorsa, verilen A dönüşümüne *lineer operatör*, D ye de A operatörünün *tanım bölgesi* denir ve $D(A)$ ile gösterilir. Bu tanımlara bağlı olarak, A operatörünün *değer kümesi* de genellikle $R(A)$ ile gösterilir (Naimark, 1968).

Tanım 2.4. H Hilbert uzayının bir alt kümesinde tanımlanan herhangi bir F lineer operatörünün değer kümesi reel veya kompleks sayılar kümesi ise F , H de bir *lineer fonksiyoneldir* denir. Tüm H uzayında tanımlanıp aşağıdaki koşulları sağlayan, F fonksiyoneline *lineer sınırlı fonksiyonel* denir (Naimark, 1968).

1. $x, y \in H$ ve $\lambda, \mu \in R$ için

$$F(\lambda x + \mu y) = \lambda F(x) + \mu F(y)$$

2. Her $x \in H$ ve bir c sabit sayısı için

$$|F(x)| \leq c \|x\|$$

Tanım 2.5. H Hilbert uzayında tanımlanan bir A lineer operatörü olsun. Her $x \in H$ için

$$\|Ax\| \leq c \|x\|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir c sayısı varsa A ya *sınırlı operatör* denir. Bu c sayılarının en küçüğüne A sınırlı operatörünün *normu* denir ve $\|A\|$ ile gösterilir. A operatörünün normu alternatif olarak

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

eşitliği ile de hesaplanabilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.6. H bir Hilbert uzayı ve A bu uzayda bir lineer operatör olmak üzere, A nın tanım kümesi $D(A)$, H Hilbert uzayında yoğun olsun. Her $f \in D(A)$ için,

$$(Af, g) = (f, A^*g)$$

eşitliğini sağlayan A^* operatörüne A nın *eşlenik (adjoint) operatörü* denir. Bu eşitliği sağlayan $g \in H$ vektörler kümesine A^* nın tanım kümesi denir ve $D(A^*)$ ile gösterilir. A^* operatörü aşağıdaki eşitlikleri sağlar (Naimark, 1968):

- (i) $(A^*)^* = A$
- (ii) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$
- (iii) $(A + B)^* = A^* + B^*$
- (iv) $(AB)^* = B^* A^*$
- (v) $\|A^*\| = \|A\|$, (A sınırlı iken)

Tanım 2.7. $A^* = A$ ise, A ya *kendine eş (self-adjoint) operatör* adı verilir (Akhiezer and Glazman, 1963).

Tanım 2.8. Tanım kümesi $D(A)$ olan bir A lineer operatörü için, $f, g \in D(A)$ olmak üzere,

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

eşitliği sağlanırsa, A operatörüne *Hermitian* denir (Naimark, 1968).

Tanım 2.9. $A : D(A) \longrightarrow H$ lineer bir operatör ve $D(A)$ tanım bölgesi H Hilbert uzayında yoğun olsun ($\overline{D(A)} = H$). Her $f, g \in D(A)$ için,

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

ise, yani $A \subset A^*$ ise, A ya *simetrik operatör* denir (Naimark, 1968).

Tanım 2.10. $D(U)$, U operatörünün tanım bölgesi olmak üzere, her $x, y \in D(U)$ için

$$(Ux, Uy) = (x, y)$$

ise, U ya *izometrik operatör* denir (Akhiezer and Glazman, 1963).

Tanım 2.11. Bir U izometrik operatörünün tanım ve değer kümesi tüm H Hilbert uzayına eşit ise, U operatörüne *üniter operatör* denir.

Sınırlı bir izometrik U operatörünün üniter olabilmesi için gerek ve yeter şart $U^*U = UU^* = I$ olmasıdır (Akhiezer and Glazman, 1963).

Tanım 2.12. $f \in D(A)$ için,

$$\tilde{A}f = Af$$

ve $D(\tilde{A}) \subset D(A)$ oluyorsa, A operatörüne \tilde{A} operatörünün *genişlemesi* denir. \tilde{A} operatörüne ise A operatörünün *kısıtlaması* denir. Eğer A operatörü, simetrik \tilde{A} operatörünün bir simetrik genişlemesi ise, $A \subset \tilde{A}^*$ dir. Yani, \tilde{A} operatörünün her simetrik genişlemesi, \tilde{A}^* operatörünün bir kısıtlamasıdır (Naimark, 1968).

Tanım 2.13. Simetrik bir A operatörünün uygun bir simetrik genişlemesi yoksa, A operatörü *maksimaldir* denir (Naimark, 1968).

Kendine eş (self-adjoint) her A operatörü, maksimal simetrik bir operatördür.

Tanım 2.14. A , H Hilbert uzayında simetrik bir operatör ve λ , keyfi bir kompleks sayı olsun. R_λ ve $R_{\bar{\lambda}}$, sırasıyla, $(A - \lambda I)$ ve $(A - \bar{\lambda} I)$ operatörlerinin değer kümeleri olmak üzere,

$$N_\lambda = H \ominus R_\lambda \text{ ve } N_{\bar{\lambda}} = H \ominus R_{\bar{\lambda}}$$

uzaylarına, A operatörünün *defekt uzayları* denir. N_λ ve $N_{\bar{\lambda}}$ defekt uzayları, sırasıyla, λ ve $\bar{\lambda}$ özdeğerlerine ait A^* operatörünün çözümlerinin uzaylarıdır (Naimark, 1968).

Tanım 2.15. $m = \dim N_\lambda$ ve $n = \dim N_{\bar{\lambda}}$ ($\text{Im } \lambda > 0$) olmak üzere, (m, n) ikilisi, A operatörünün *indis defekti* olarak tanımlanır (Naimark, 1968).

Tanım 2.16. A lineer operatörünün $D(A)$ tanım kümesi H Hilbert uzayında yoğun olmak üzere, her $f \in D(A)$ için,

$$\text{Im}(Af, f) \geq 0 \tag{2.1}$$

ise, A lineer operatörüne *disipatif (dissipative) operatör* denir. Her $f \in D(A)$

için,

$$\operatorname{Im}(Af, f) \leq 0 \quad (2.2)$$

ise A lineer operatörüne *akretif (accretive) operatör* denir (Gorbachuk and Gorbachuk, 1991).

A lineer operatörü akretif (accretive) operatördür ancak ve ancak $-A$ operatörü disipatif operatördür.

Eğer A disipatif (akretif) operatörü kendinden farklı disipatif (akretif) genişlemeye sahip değilse A operatörüne maksimal disipatif (maksimal akretif) operatör denir.

Disipatif operatör daima kapanabilir. Disipatif operatörün kapanışı da disipatifdir. Maksimal disipatif operatör daima kapalıdır.

Teorem 2.17. $[a, b]$ aralığında tanımlı, kompleks değerli ve Lebesgue anlamında ölçülebilir olan $f(x)$ fonksiyonu için $|f(x)|^2$ fonksiyonu bu aralıkta Lebesgue anlamında integrallenebilir ise, $f(x)$ fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında *karesi integrallenebilir fonksiyon* denir.

(a, b) aralığının (sonlu veya sonsuz) üzerinde Lebesgue anlamında ölçülebilir ve karesi integrallenebilir tüm kompleks değerli $f(x)$ fonksiyonlarının tamamı $L^2(a, b)$ ile gösterilecektir. Her $f(x), g(x) \in L^2(a, b)$ için

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlanabilir (Jorgens, 1964).

$L^2(a, b)$ ile tanımlanan uzay bir Hilbert uzayıdır (Naimark, 1968).

Tanım 2.18. $\frac{1}{p_0(x)}, p_1(x), \dots, p_n(x)$ fonksiyonları (a, b) aralığında reel değerli, Lebesgue anlamında ölçülebilir ve (a, b) aralığının her sonlu $[\alpha, \beta]$ aralığında Lebesgue integrallenebilir olmak üzere,

$$l(y) = (-1)^n(p_0y^{(n)})^{(n)} + (-1)^{n-1}(p_1y^{(n-1)})^{(n-1)} + \dots + p_ny$$

ifadesine *kendine eş diferensiyel ifade* denir. $L^2(a, b)$ Hilbert uzayında, $(2n - 1)$. kuazi mertebeden türevi dahil tüm kuazi türevleri mutlak sürekli olan ve $l(y) \in L^2(a, b)$ olan $y(x)$ fonksiyonlarının kümesi D ile gösterilsin. D de, $l(y)$ diferensiyel ifadesi ile üretilen A operatörüne *maksimal diferensiyel operatör* denir ve her $y \in D$ için $Ay = l(y)$ şeklinde tanımlanır (Naimark, 1968).

Tanım 2.19. A simetrik operatör, λ keyfi reel olmayan bir sayı olmak üzere

$$V = (A - \lambda I) (A - \bar{\lambda} I)^{-1}$$

ifadesine A operatörünün *Cayley dönüşümü* denir (Naimark, 1968).

Tanım 2.20. M_1, M_2, \dots, M_n altuzaylarında

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0, \quad x_k \in M_k, k = 1, 2, \dots, n$$

için $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ oluyorsa M_1, M_2, \dots, M_n altuzayları *lineer bağımsızdır*. Eğer M_1, M_2, \dots, M_n altuzayları lineer bağımsız ise $M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ direkt toplamındaki bir x vektörü

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \quad x_k \in M_k, k = 1, 2, \dots, n$$

formunda tek türlü yazılabilir (Naimark, 1968).

3. SİMETRİK OPERATÖRLERİN KENDİNE EŞ VE SİMETRİK GENİŞLEMELERİ

Bu bölümde; simetrik operatörlerin kendine eş ve simetrik genişlemeleri verilecektir.

Teorem 3.1. $N_{\bar{\lambda}}$ ve N_{λ} A^* operatörünün $\bar{\lambda}$ ve λ ya karşılık gelen çözüm uzayıdır (Naimark, 1968).

İspat. $x \in N_{\lambda}$, $y \in D_A$ için

$$(Ay - \lambda y, x) = 0 \quad (3.1)$$

$$(Ay, x) = (y, \bar{\lambda}x) \quad (3.2)$$

olur. A^* operatörünün tanımı ile $x \in D_{A^*}$ ve $A^*x = \bar{\lambda}x$ dir.

Tersine $A^*x = \bar{\lambda}x$ olsun. $y \in D_A$ için (3.1) denklemi geçerlidir ve bu (3.2) ye denktir yani, $x \in N_{\lambda}$ dir.

Teorem 3.2. i) A simetrik operatörü tanım kümesi $R_{\bar{\lambda}}$, değer kümesi (range) R_{λ} olan izometrik bir operatördür.

ii) $\{y \in D_V \mid Vy - y\}$ kümesi H da yoğun bir kümedir.

iii) Her izometrik V operatörü belirli bir simetrik operatörün Cayley dönüşümüdür (Naimark, 1968).

İspat. i) $\forall y \in D_V$, R_{λ} ya ait olmalıdır. Tersine $y \in R_{\bar{\lambda}}$ elemanına $(A - \bar{\lambda}I)^{-1}$ operatörü uygulanırsa $(A - \bar{\lambda}I)^{-1}y \in D_A$ elde edilir. $(A - \lambda I)$ operatörü

$$(A - \bar{\lambda}I)^{-1}y$$

ifadesine uygulanabilir. Öyleyse $y \in D_V$ dir. Buradan $D_V = R_{\bar{\lambda}}$.

$$y = (A - \bar{\lambda}I)x \quad (3.3)$$

Buradan $y \in D_V$ ve

$$Vy = (A - \lambda I)x. \quad (3.4)$$

V operatörünün değer kümesi R_λ ile çakışır. Ayrıca

$$\begin{aligned}\|Vy\|^2 &= \|(A - \lambda I)x\|^2 = ((A - \lambda I)x, (A - \lambda I)x) \\ &= (Ax, Ax) - \bar{\lambda}(Ax, x) - \lambda(x, Ax) + |\lambda|^2(x, x)\end{aligned}$$

olur ve

$$\begin{aligned}\|y\|^2 &= \|(A - \bar{\lambda}I)x\|^2 = ((A - \bar{\lambda}I)x, (A - \bar{\lambda}I)x) \\ &= (Ax, Ax) - \bar{\lambda}(Ax, x) - \lambda(x, Ax) + |\lambda|^2(x, x)\end{aligned}$$

$(Ax, x) = (x, Ax)$ olduğundan

$$\|Vy\|^2 = \|y\|^2$$

dir, yani V izometrik operatördür.

ii) (3.3) ve (3.4) den $y - Vy = (\lambda - \bar{\lambda})x$

$$R_{I-V} = \{y \in D_V \mid y - Vy\} = D_A$$

buradan D_A , H uzayında yoğundur.

iii) V operatörü, (ii) koşulunu sağlayan izometrik operatör olsun. Bu operatörün 1 e eşit özdeğeri olmadığından, $y = Vy$ denklemi ancak $y = 0$ için sağlanır. Tersini doğru kabul edelim. Bu durumda $\forall z \in D_V$ için

$$(Vz - z, y) = (Vz, y) - (z, y) = (Vz, Vy) - (z, y) = 0$$

olur. Buradan $y \neq 0$ vektörü R_{I-V} ye ortogonal olur bu da mümkün değildir. O halde $(I - V)^{-1}$ vardır.

$$A = (\lambda I - \bar{\lambda}V)(I - V)^{-1} \tag{3.5}$$

A simetrik operatörünün Cayley dönüşümünün V operatörü ile özdeş olduğunu gösterelim. $D_A = R_{I-V}$, $y \in D_V$ için

$$A(y - Vy) = \lambda y - \bar{\lambda}Vy$$

dir. (ii) koşulu ile D_A , H uzayında yoğundur. $y_1, y_2 \in D_V$ için

$$\begin{aligned} (A(y_1 - Vy_1), y_2 - Vy_2) &= (\lambda y_1 - \bar{\lambda}Vy_1, y_2 - Vy_2) \\ &= (\lambda + \bar{\lambda})(y_1, y_2) - \bar{\lambda}(Vy_1, y_2) - \lambda(y_1, Vy_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} ((y_1 - Vy_1), A(y_2 - Vy_2)) &= ((y_1 - Vy_1), \lambda y_2 - \bar{\lambda}Vy_2) \\ &= (\lambda + \bar{\lambda})(y_1, y_2) - \bar{\lambda}(Vy_1, y_2) - \lambda(y_1, Vy_2) \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$(A(y_1 - Vy_1), y_2 - Vy_2) = ((y_1 - Vy_1), A(y_2 - Vy_2))$$

dir, yani A simetrik operatördür.

Son olarak $x = y - Vy, y \in D_V$ ise $Ax = \lambda y - \bar{\lambda}Vy$ dir. Buradan $Ax - \bar{\lambda}x = (\lambda - \bar{\lambda})y$, $Ax - \lambda x = (\lambda - \bar{\lambda})Vy$ olur. Bu denklemlerden A operatörünün Cayley dönüşümü V operatörüdür.

Teorem 3.3. A_1, A_2 simetrik operatörler, sırasıyla V_1, V_2 de onların Cayley dönüşümü olsun. A_2 operatörü, A_1 operatörünün genişlemesi olması için gerek ve yeter koşul V_2 operatörünün V_1 operatörünün genişlemesi olmasıdır. (Akhiezer and Glazman, 1963).

Teorem 3.4. A simetrik operatörünün kapalı olması için gerek ve yeter koşul, A operatörünün V Cayley dönüşümünün kapalı operatör olmasıdır. (Naimark, 1968).

Teorem 3.5. Eğer A kapalı simetrik operatör ise, $D_A, N_{\bar{\lambda}}, N_{\lambda}$ altuzayları lineer

bağımsızdır ve

$$D_{A^*} = D_A \oplus N_{\bar{\lambda}} \oplus N_{\lambda} \quad (3.6)$$

dir (Naimark, 1968).

İspat. İlk önce lineer bağımsızlığı gösterelim.

$$x + y + z = 0, x \in D_A, y \in N_{\bar{\lambda}}, z \in N_{\lambda} \quad (3.7)$$

olsun. $A^* - \lambda I$ operatörünü (3.7) ifadesinin her iki tarafına uygularsak

$$(A - \bar{\lambda}I)x + (\lambda - \bar{\lambda})y = 0 \quad (3.8)$$

olur. Fakat $(A - \bar{\lambda}I)x \in R_{\bar{\lambda}}$ ve $(\lambda - \bar{\lambda})y \in N_{\bar{\lambda}}$ ve bu iki alt uzay ortogonal olduğundan (3.8) ifadesi ancak $(A - \bar{\lambda}I)x = 0, (\lambda - \bar{\lambda})y = 0$ olduğunda gerçekleşir, yani $x = 0$ ve $y = 0$ olur. Buradan (3.7) ifadesinden $z = 0$ olur. Şimdi (3.6) formülünü ispatlayalım. $D_A, N_{\bar{\lambda}}, N_{\lambda}$ altuzaylarının herbiri D_{A^*} dadır. Buradan

$$D_{A^*} \supset D_A \oplus N_{\bar{\lambda}} \oplus N_{\lambda}, \quad (3.9)$$

yani, $u \in D_{A^*}$ için

$$u = x + y + z, x \in D_A, y \in N_{\bar{\lambda}}, z \in N_{\lambda} \quad (3.10)$$

olduğunu göstermek kalır. A kapalı operatör olduğundan $R_{\bar{\lambda}}$ kapalı alt uzay olmalıdır. Tammdan

$$R_{\bar{\lambda}} \oplus N_{\bar{\lambda}} = H \quad (3.11)$$

olur. $\forall v \in H$ için

$$v = v' + v'', v' \in R_{\bar{\lambda}}, v'' \in N_{\bar{\lambda}}$$

$v = (A^* - \bar{\lambda}I)u$ olsun. $v' \in R_{\bar{\lambda}}$ olduğundan $v' = (A - \bar{\lambda}I)x, x \in D_A$ olur.

$v'' = (\lambda - \bar{\lambda})y, y \in N_{\bar{\lambda}}$ için

$$(A^* - \bar{\lambda}I)u = (A - \bar{\lambda}I)x + (\lambda - \bar{\lambda})y = (A^* - \bar{\lambda}I)(x + y)$$

$A^*y = \lambda y$, $A^*x = Ax$ olduğundan

$$(A^* - \bar{\lambda}I)(u - x - y) = 0$$

elde edilir. $z = u - x - y$ ise $z = u - x - y \in N_\lambda$ dir. Böylece (3.6) gerçekleşir.

Tanım 3.6. (Neumann Formülü) (3.6) ifadesinde $\lambda = i$ yazarsak

$$D_{A^*} = D_A \oplus N_i \oplus N_{-i}$$

olur. Bu da gösterir ki $\forall x \in D_{A^*}$,

$$x = x^o + x^- + x^+, \quad x^o \in D_A, \quad x^- \in N_i, \quad x^+ \in N_{-i}$$

biçiminde tek türlü ifade edilebilir.

$$\text{Im}(A^*x, x) = \|x^+\|^2 - \|x^-\|^2 \quad (3.12)$$

ifadesine *Neumann Formülü* denir. Şimdi bu formülü ispat edelim:

$$(Ax^o, x^- + x^+) = (x^o, A(x^- + x^+)) = (x^o, -ix^- + ix^+)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} (A^*x, x) &= (Ax^o - ix^- + ix^+, x^o + x^- + x^+) \\ &= (Ax^o, x^o) + (x^o, -ix^- + ix^+) + (-ix^- + ix^+, x^o) \\ &\quad - \|x^-\|^2 + i\|x^+\|^2 - i(x^-, x^+) + i(x^+, x^-) \\ &= (Ax^o, x^o) + 2\text{Re}[(x^o, -ix^- + ix^+) + i(x^+, x^-)] \\ &\quad + i(\|x^+\|^2 - \|x^-\|^2). \end{aligned}$$

Buradan (3.12) formülünü elde ederiz (Naimark, 1968).

Tanım 3.7. ε^+ , ε^o , ε^- kümelerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\begin{aligned}\varepsilon^+ &= \left\{ x \in D_{A^*} : \|x^+\|^2 - \|x^-\|^2 > 0 \right\}, \\ \varepsilon^o &= \left\{ x \in D_{A^*} : \|x^+\|^2 - \|x^-\|^2 = 0 \right\}, \\ \varepsilon^- &= \left\{ x \in D_{A^*} : \|x^+\|^2 - \|x^-\|^2 < 0 \right\}.\end{aligned}$$

Bu durumda

$$D_A \subset \varepsilon^o, N_i \subset \varepsilon^- \cup \{0\}, N_{-i} \subset \varepsilon^+ \cup \{0\} \quad (3.13)$$

bağıntıları geçerlidir (Naimark, 1968).

Tanım 3.8. M ve N , H Hilbert uzayının iki alt uzayı olsunlar. Eğer N alt uzayında lineer birleşimleri M alt uzayında olmayan en çok n tane lineer bağımsız vektör varsa n sayısına M modülüne göre N alt uzayının boyutu denir (Naimark, 1968).

M modülüne göre N alt uzayının boyutu $\dim_M N$ ile gösterilir. (3.6) formülünden, $n_{\bar{\lambda}}$ ve n_{λ} sırasıyla $N_{\bar{\lambda}}$ ve N_{λ} alt uzaylarının boyutları olmak üzere

$$\dim_{D_{A^*}} D_A = n_{\bar{\lambda}} + n_{\lambda}$$

dir.

Önerme 3.9. m ve n , N_i ve N_{-i} alt uzaylarının boyutları olsun. O zaman ε^+ , ε^- D_A modülüne göre sırasıyla m ve n boyutludur (Naimark, 1968).

Önerme 3.10. $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ için A ve $B = \alpha A + \beta I$ operatörlerinin N_i ve N_{-i} defekt uzayları aynı boyutludur (Naimark, 1968).

Teorem 3.11. Üst yarı düzlemdeki $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\dim N_{\bar{\lambda}} = \dim N_{-i}, \quad \dim N_{\lambda} = \dim N_i$$

dir (Naimark, 1968).

İspat. $\lambda = \sigma + i\tau$, $\tau > 0$, $B = \tau A + \sigma I$ operatörünün defekt uzaylarını N'_i ve N'_{-i}

ile gösterelim. $N_\lambda = N'_i$, $N_{\bar{\lambda}} = N'_{-i}$ olduğu görülür.

Teorem 3.12. A kapalı simetrik operatör, B , H Hilbert uzayı üzerinde tanımlı sınırlı hermitian operatör ise A ve $A+B$ operatörleri aynı indis defekte sahiptirler (Naimark, 1968).

İspat. $(A+B)^* = A^* + B^*$ bağıntısından $D_{(A+B)^*} = D_{A^*}$ dir. $x \in D_{A^*}$ için

$$((A+B)^* x, x) = ((A^* + B^*) x, x) = (A^* x, x) + (B^* x, x)$$

olur. Burada $(B^* x, x)$ reel olduğundan

$$\text{Im}((A+B)^* x, x) = \text{Im}(A^* x, x)$$

olur. Buradan da A ve $A+B$ operatörleri için ε^+ , ε^- kümeleri özdeştir. Önerme (3.9) ile ispat tamamlanır.

Teorem 3.13. Verilen kapalı simetrik A operatörünün her kapalı simetrik \tilde{A} genişlemesi belli bir U izometrik operatör ile belirlenir ki bu U operatörünün tanım kümesi P , $N_{\bar{\lambda}}$ nin kapalı alt uzayı, değer kümesi L de N_λ nin kapalı alt uzayıdır. $D_{\tilde{A}}$

$$x^! = x + z - Uz, \quad x \in D_A, z \in P \quad (3.14)$$

vektörlerinden oluşur.

$$\tilde{A}x^! = x + \lambda z - \bar{\lambda}Uz \quad (3.15)$$

gerçeklenir.

Tersine böyle her U operatörü için A operatörü kapalı simetrik bir operatör belirler ve \tilde{A} operatörünün defekt uzayları

$$\tilde{N}_{\bar{\lambda}} = N_{\bar{\lambda}} - P, \quad \tilde{N}_\lambda = L \quad (3.16)$$

dir (Naimark, 1968).

İspat. A kapalı simetrik operatör olsun. \tilde{A} , A nin kapalı simetrik genişlemesi

olsun. A ve \tilde{A} nün Cayley dönüşümlerini V ve \tilde{V} ile gösterirsek $V \subset \tilde{V}$ dir. Buradan

$$D_V \subset D_{\tilde{V}}, R_V \subset R_{\tilde{V}}$$

dir. $P = D_{\tilde{V}} - D_V$ ve $L = R_{\tilde{V}} - R_V$ dersek

$$P \perp D_V, L \perp R_V$$

$$P \subset N_{\bar{\lambda}}, L \subset N_{\lambda}$$

olur. U operatörünü şöyle tanımlayalım. $x \in P$ için

$$Ux = \tilde{V}x \tag{3.17}$$

olsun. \tilde{V} operatörü D_V den R_V ye izometrik dönüşüm olduğundan P yi izometrik olarak L ye resmeder. (3.17) ile U operatörü tanım kümesi P , değer kümesi L olan izometrik operatördür.

Tersine U tanım kümesi $P \subset N_{\bar{\lambda}}$ değer kümesi $L \subset N_{\lambda}$ olan izometrik operatör olsun. $y \in D_V, z \in P$ için

$$\tilde{V}(y + z) = Vy + Uz$$

alırsak V operatörünün genişlemelerini gösteren izometrik \tilde{V} operatörü elde edilir. \tilde{V} operatörü belli bir A operatörünün kapalı simetrik genişlemesinin Cayley dönüşümüdür. Bu \tilde{A} genişlemesini U operatörü ile inşa edelim. Teorem 3.2. ile $D_{\tilde{A}}$

$$x' = (y + z) - \tilde{V}(y + z) = (y + z) - (Vy + Uz) = (y - Vy) + z - Uz$$

$y \in D_V, z \in P$ vektörlerinden oluşur. Fakat $x = y - Vy, y \in D_V$ vektörleri, A operatörünün D_A tanım kümesindedir. Burada $D_{\tilde{A}}$

$$x' = x + z - Uz, x \in D_A, z \in P$$

vektörlerinden oluşur. $\tilde{A} \subset A^*$, $z \in N_{\bar{\lambda}}$, $Uz \in N_{\lambda}$ olduğundan

$$\tilde{A}x' = x + \lambda z - \bar{\lambda}Uz$$

dir. \tilde{A} operatörünün tanımından kendisinin defekt uzayları

$$\tilde{N}_{\bar{\lambda}} = N_{\bar{\lambda}} - P, \quad \tilde{N}_{\lambda} = N_{\lambda} - L$$

ile verilir.

Teorem 3.14. \tilde{A} operatörünün genişlemesi kendine eş olması için gerek ve yeter koşul U operatörünün tanım kümesinin $N_{\bar{\lambda}}$ ve değer kümesinin N_{λ} olmasıdır. Bir A operatörü kendine eş genişlemeye sahip olması için gerek ve yeter koşul $N_{\bar{\lambda}}$ ve N_{λ} alt uzaylarını boyutları eşit olmasıdır (Naimark, 1968).

Teorem 3.15. Kapalı simetrik A operatörü maksimal operatör olması için gerek ve yeter koşul A operatörünün indis defektlerinden en az biri sıfır, yani $(0, n)$ veya $(n, 0)$ olmasıdır (Naimark, 1968).

Teorem 3.16. $N_{\bar{\lambda}}$ ve N_{λ} alt uzayları sonlu ve eşit boyutlu iseler operatörün her maksimal genişlemesi kendine eştir (Naimark, 1968).

Tanım 3.17. $\forall x \in D_A$ için

$$\|(A - \lambda I)x\| \geq k \|x\| \tag{3.18}$$

olacak şekilde bir $k = k(\lambda) > 0$ sayısı varsa λ sayısına A operatörünün *regüler tipte noktası* denir. A operatörünün regüler tip noktalarının kümesine A operatörünün *regülerlik bölgesi* denir (Akhiezer and Glazman, 1963).

Teorem 3.18. A lineer operatörünün regülerlik bölgesi açık kümedir (Akhiezer and Glazman, 1963).

İspat. λ_0 , A operatörünün regüler tipte noktası olsun. $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta \leq \frac{1}{2}k(\lambda_0)$

ve $x \in D_A$ için

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda I)x\| &\geq \|(A - \lambda_0 I)x\| - |\lambda - \lambda_0| \|x\| \\ &\geq (k(\lambda_0) - \delta) \|x\| \geq \frac{1}{2} k(\lambda_0) \|x\| \end{aligned}$$

olur. Buradan λ_0 in $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$ komşuluğundaki her λ sayısı regüler tipte noktadır.

Teorem 3.19. A simetrik operatör ise her reel olmayan sayı operatörün regülerlik bölgesindedir (Akhiezer and Glazman, 1963).

İspat. $\lambda = \sigma + i\tau, \tau \neq 0, B = A - \sigma I$ olsun. B operatörü hermitiandır. $x \in D_A$ için

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda I)x\|^2 &= \|Bx - i\tau x\|^2 = (Bx - i\tau x, Bx - i\tau x) \\ &= (Bx, Bx) + i\tau [(Bx, x) - (x, Bx)] + \tau^2 (x, x) \\ &= \|Bx\|^2 + \tau^2 \|x\|^2 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\|(A - \lambda I)x\|^2 \geq \tau^2 \|x\|^2$$

dir. A operatörünün her regüler noktası (3.18) eşitsizliğini sağlar. Operatörün her regüler noktası regüler tip noktadır.

Tersi genelde doğru değildir. Eğer $(A - \lambda I)^{-1}$ operatörünün tanım kümesi tüm uzaya eşit olursa regüler tip bir nokta A operatörünün regüler noktasıdır. Bir operatörün regülerlik bölgesi operatörün bütün regüler noktalarını içerir. Örneğin reel olmayan her λ sayısı maksimal olmayan simetrik operatörün spektrumunun noktasıdır. Aynı zamanda operatörün regülerlik bölgesine aittir. Regülerlik bölgesinin tümleyeni A operatörünün spektrumundadır ve operatörünün *spektral çekirdeği* denir. Spektral çekirdek spektrumun parçasıdır fakat tüm spektrum değildir. Kendine eş operatörde regüler tip nokta ile regüler nokta eşittir. Kendine eş operatörün spektral çekirdeği spektrumu ile çıkarılır.

Eğer λ sayısı A simetrik operatörünün özdeğeri, M_λ λ özdeğerine karşılık gelen eigenuzay ise, $H - M_\lambda$ uzayı, A operatörüne göre invaryanttır. A operatörünün $H - M_\lambda$ daki parçasını \widehat{A}_λ ile gösterelim. \widehat{A}_λ operatörünün tanımını λ nın özdeğer olmadığı duruma genişletelim. $\widehat{A}_\lambda = A$ olarak \widehat{A}_λ nın bu tanımından $(\widehat{A}_\lambda - \lambda I)^{-1}$ vardır. Ters operatörlerin sınırlı olmadığı λ değerlerinin kümesi spektral çekirdek içindedir. Bu kümeye *spektral çekirdeğin sürekli parçası* denir. Spektral çekirdeğin her noktası ya nokta spektrumunda ya sürekli spektrumdadır ya da her ikisindedir.

Sonlu indis defektli simetrik A operatörünün simetrik genişlemelerinde spektral çekirdeğin sürekli parçası değişmez.

Teorem 3.20. Sonlu ve eşit indis defektli kapalı simetrik operatörün kendine eş genişlemeleri aynı sürekli spektruma sahiptir (Naimark, 1968).

Teorem 3.21. Sonlu ve eşit (m, m) indis defektli kapalı simetrik operatörün kendine eş genişlemesinde özdeğerlerin herbirinin katı en çok m birim artırılabilir. Yani özdeğerlerin katları en çok m olur (Naimark, 1968).

İspat. A sonlu (m, m) indis defektli kapalı simetrik operatör olsun. \widetilde{A} , A operatörünün kendine eş genişlemesi olsun. λ , A operatörünün katı p olan özdeğeri olsun. \widetilde{A} operatörünün özdeğeri olarak λ nın katı $p+q$ olsun ($q > 0$). $\widetilde{A}x - \lambda x = 0$ denkleminin $x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}, x_k \in D_A, k = 1, 2, \dots, p$ çözümlerinin lineer bağımsız sistemini seçelim. $D_{\widetilde{A}}$ nün D_A modülüne göre boyutu m olduğundan $q > m$ iken

$$\alpha_1 x_{p+1} + \alpha_2 x_{p+2} + \dots + \alpha_q x_{p+q} \in D_A$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan α_k sayıları vardır. O zaman

$$x = \alpha_1 x_{p+1} + \alpha_2 x_{p+2} + \dots + \alpha_q x_{p+q}$$

A nın λ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörüdür. x_1, x_2, \dots, x_p , lineer bağımsızdır. Bu da A nın özdeğeri olarak λ nın katının p den büyük olduğu anlamına gelir ki bu hipotezle çelişir.

Tanım 3.22. M_1, M_2 iki kapalı alt uzay, sırasıyla P_1, P_2 bu uzaylar üzerine olan iki izdüşüm operatörü olsunlar. M_1, M_2 uzayları arasındaki uzaklık:

$$\theta(M_1, M_2) = \|P_1 - P_2\| \quad (3.19)$$

olarak tanımlanır (Naimark, 1968). Tanımdan

$$\theta(H - M_1, H - M_2) = \theta(M_1, M_2). \quad (3.20)$$

Çünkü

$$\theta(H - M_1, H - M_2) = \|(1 - P_1) - (1 - P_2)\| = \|P_1 - P_2\|$$

dir.

$$\theta(M_1, M_2) \leq 1 \quad (3.21)$$

daima geçerlidir. Bunu ispatlayalım: Her $x \in H$ için $P_2(1 - P_1)x, P_1(1 - P_2)x$ ortogonaldirler ve farkları $(P_2 - P_1)x$ eşittir. Buradan

$$\begin{aligned} \|(P_2 - P_1)x\|^2 &= \|P_2(1 - P_1)x\|^2 + \|P_1(1 - P_2)x\|^2 \\ &\leq \|(1 - P_1)x\|^2 + \|P_1x\|^2 = \|x\|^2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\|P_1 - P_2\| \leq 1.$$

Teorem 3.23. $\theta(M_1, M_2) \leq 1$ ise $\dim M_1 = \dim M_2$ dir (Naimark, 1968).

İspat. $\dim M_2 > \dim M_1$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunu göstermek için M_2 uzayı içinde M_1 uzayına ortogonal bir vektörün bulunmadığını göstermeliyiz. $N = \overline{P_2 M_1}$ alalım. Açıktır ki $N \subset M_2$ ve

$$\dim N \leq \dim M_1 \leq \dim M_2,$$

$N \neq M_2$. M_2 uzayı içinde $N = \overline{P_2 M_1}$ e ortogonal bir $x \neq 0$ vektörü vardır.

$M_1 - N \perp M_2$ olduğundan bu vektör $M_1 - N$ e ortogonaldır. İki uzayın arasındaki uzaklığı şu şekilde de tanımlayabiliriz:

$$d_1 = \sup_{x \in M_2} \frac{\|(1 - P_1)x\|}{\|x\|}, d_2 = \sup_{x \in M_1} \frac{\|(1 - P_2)x\|}{\|x\|} \quad (3.23)$$

$$\theta(M_1, M_2) = \max\{d_1, d_2\} \quad (3.24)$$

olur. (3.24) ispat edelim. (3.22) den

$$\theta(M_1, M_2) = \sup_{x \in H} \frac{\|(P_2 - P_1)x\|}{\|x\|} = \sup_{x \in H} \frac{\sqrt{\|P_2(1 - P_1)x\|^2 + \|P_1(1 - P_2)x\|^2}}{\|x\|} \quad (3.25)$$

dir. $x \in M_1$ için $(1 - P_1)x = 0$, $(1 - P_2)P_1x = (1 - P_2)x$ olduğundan

$$\theta(M_1, M_2) \geq \sup_{x \in H} \frac{\sqrt{\|P_2(1 - P_1)x\|^2 + \|P_1(1 - P_2)x\|^2}}{\|x\|} = \sup_{x \in H} \frac{\|(1 - P_2)x\|}{\|x\|} = d_2$$

elde edilir. Benzer şekilde $\theta(M_1, M_2) \geq d_1$ olur. Buradan

$$\theta(M_1, M_2) \geq \max\{d_1, d_2\}$$

olur. Eşitsizliğin diğer tarafını ispatlayalım: d_2 tanımından

$$\|(1 - P_2)P_1x\|^2 \leq d_2^2 \|P_1x\|^2 \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \|P_2(1 - P_1)x\|^2 &= (P_2(1 - P_1)x, P_2(1 - P_1)x) \\ &= (P_2(1 - P_1)x, (1 - P_1)x) \\ &= (P_2(1 - P_1)x, (1 - P_1)^2x) \\ &= ((1 - P_1)P_2(1 - P_1)x, (1 - P_1)x) \\ &\leq \|(1 - P_1)P_2(1 - P_1)x\| \|(1 - P_1)x\|. \end{aligned}$$

Bu eşitsizlik ve (3.26) dan

$$\begin{aligned}
\|P_2(1 - P_1)x\|^2 + \|(1 - P_2)P_1x\|^2 &\leq d_2^2 \|P_1x\|^2 + d_1^2 \|(1 - P_1)x\|^2 \\
&\leq \max\{d_1^2, d_2^2\} (\|P_1x\|^2 + \|(1 - P_1)x\|^2) \\
&= \max\{d_1^2, d_2^2\} \|x\|^2
\end{aligned}$$

olur. (3.25) den

$$\theta(M_1, M_2) \leq \max\{d_1, d_2\}$$

elde edilir.

Teorem 3.24. Simetrik operatörün regülerlik bölgesinin bağlantılı parçasında (connected component), n_λ indis defekt sabit kalır (Naimark, 1968).

İspat. Bağlantılı parçayı Γ ile gösterelim. P_λ, N_λ uzayı üzerine izdüşüm operatörü olsun. Her $\lambda_0 \in \Gamma$ için $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ komşuluğunda

$$\theta(N_\lambda, N_{\lambda_0}) < 1$$

olduğunu ispat etmeliyiz. Teorem 3.23 ile bu komşulukta $n_\lambda = n_{\lambda_0}$ olduğu elde edilir. Heine Borel teoremi kullanılarak Γ içinde n_λ sabit olduğu çıkarılır. $\lambda_0 \in \Gamma, \forall x \in D_A$ vektörleri için

$$\|(A - \lambda_0 I)x\| \geq c \|x\|$$

dir. $\delta = \frac{1}{3}c$ seçelim. $|\lambda - \lambda_0| < \delta, x \in D_A$ için

$$\begin{aligned}
\|(A - \lambda_0 I)x\| &= \|(A - \lambda_0 I)x + (\lambda - \lambda_0)x\| \\
&> \|(A - \lambda_0 I)x\| - |\lambda - \lambda_0| \|x\| > \frac{2}{3}c \|x\|.
\end{aligned}$$

Diğer taraftan $1 - P_{\lambda_0}, A - \lambda_0 I$ operatörünün değer kümesi üzerine izdüşüm

operatörüdür. $y \in N_\lambda$, $\|y\| = 1$ için $y \perp (A - \lambda I)x$ olduğundan

$$\begin{aligned} \|(1 - P_{\lambda_0})y\| &= \sup_{x \in D_A} \frac{|(y, (A - \lambda I)x)|}{\|(A - \lambda_0 I)x\|} = \sup_{x \in D_A} \frac{|(y, (A - \lambda I)x + (\lambda - \lambda_0)x)|}{\|(A - \lambda_0 I)x\|} \\ &= \sup_{x \in D_A} \frac{|(y, x)| |\lambda - \lambda_0|}{\|(A - \lambda_0 I)x\|} \leq \frac{\frac{1}{3}c \|x\|}{\frac{2}{3}c \|x\|} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Bu eşitlik ve (3.24) den

$$\theta(N_\lambda, N_{\lambda_0}) \leq \frac{1}{2}$$

elde edilir. Teorem ispatlanır.

Teorem 3.25. Simetrik bir A operatörünün regülerlik bölgesine ait reel eksenin keyfi bir λ_0 noktası için A operatörünün indis defektlerinin ikisi de n_{λ_0} a eşittir (Naimark, 1968).

4. SİMETRİK OPERATÖRLERİN DİSİPATİF GENİŞLEMELERİ

Bu bölümde; simetrik operatörlerin disipatif genişlemeleri verilecektir.

4.1. Disipatif Operatörler

Teorem 4.1.1 Her disipatif operatör maksimal disipatif genişlemeye sahiptir. Disipatif A operatörü maksimal disipatif olması için gerek ve yeter koşul $\text{Im } \lambda < 0$ için

$$R(A - \lambda I) = H$$

olmasıdır (Gorbachuk and Gorbachuk,1991).

İspat. A kapalı disipatif operatör, $\text{Im } \lambda < 0$ olsun. O zaman $R(A - \lambda I)$ kapalıdır. (2.1) eşitsizliğinden

$$\text{Im}((A - \lambda I)f, f) \geq -\text{Im } \lambda (f, f)$$

dir. Fakat

$$\begin{aligned} \text{Im}((A - \lambda I)f, f) &\leq \|(A - \lambda I)f\| \|f\| \\ -\text{Im } \lambda &\leq \|(A - \lambda I)f\| \end{aligned}$$

dir. Buradan $R(A - \lambda I)$ kapalıdır. Şimdi iki durum oluşabilir:

1) $\text{Im } \lambda < 0$ için $R(A - \lambda I) = H$ olursa A maksimal disipatif operatör olur. Aksi halde A operatörünün kendisinden farklı disipatif \tilde{A} genişlemesi için bir $f_0 \neq 0$ elemanı bulunur öyle ki $(\tilde{A} - \lambda I)f_0 = 0$ olur. Buradan

$$\text{Im}(\tilde{A}f_0, f_0) = \text{Im } \lambda (f_0, f_0)$$

olur ki bu \tilde{A} nın disipatifliği ile çelişir.

2) $R(A - \lambda I) \neq H$ ise A operatörü kendisinden farklı disipatif genişlemeye sahip-

tir ve bu genişleme şu şekilde inşa edilir:

$$N = H \ominus R(A - \lambda I), \quad D_{\tilde{A}} = D_A + N,$$

$$\tilde{A}(f + u) = Af + \bar{\lambda}u, \quad f \in D_A, u \in N.$$

olarak tanımlayalım. \tilde{A} operatörü doğru tanımlanır: $f + u = 0$ ise

$$(Af, f) = (Au, u) = (u, \bar{\lambda}u) = \lambda(u, u)$$

dir. $\text{Im}(Af, f) \leq 0$ ise $u = 0, f = 0$ olur.

\tilde{A} operatörü disipatiftir:

$$\begin{aligned} \left(\tilde{A}(f + u), f + u \right) &= (Af, f) + \bar{\lambda}(u, u) + (Af, u) + \bar{\lambda}(u, f) \\ &= (Af, f) + \bar{\lambda}(u, u) + (f, A^*u) + \bar{\lambda}(u, f) \\ &= (Af, f) + \bar{\lambda}(u, u) + \lambda(f, u) + \bar{\lambda}(u, f) \end{aligned}$$

Buradan

$$\text{Im} \left(\tilde{A}(f + u), f + u \right) = \text{Im}(Af, f) + \text{Im} \bar{\lambda}(u, u) \geq 0.$$

Son olarak $R(\tilde{A} - \lambda I) = H$ olduğunu kontrol etmek zor değildir. Yukarıda gösterildiği gibi \tilde{A} operatörü maksimal disipatiftir.

Teorem 4.1.1 den bir operatör maksimal disipatif ve maksimal akretif olması için gerek ve yeter koşul operatörün kendine eş olmasıdır. Maksimal disipatif veya maksimal akretif simetrik operatöre maksimal simetrik operatör denir. Teorem 4.1.1 den A simetrik operatörü maksimal simetrik olması için gerek ve yeter koşul operatörün defekt sayılarından biri sıfıra eşit olmasıdır. A operatörünün maksimal simetrik olması için gerek ve yeter koşul A operatörünün kendinden farklı simetrik genişlemeye sahip olmamasıdır.

Teorem 4.1.2. \tilde{A} operatörü A simetrik operatörünün disipatif (akretif) genişlemesi olsun. O zaman $\tilde{A} \subset A^*$ dır (Gorbachuk and Gorbachuk, 1991).

İspat. Farz edelim ki $\tilde{A} \supset A$ disipatif bir genişleme olsun. Teorem 4.1.1 ile \tilde{A} operatörünü maksimal disipatif kabul edelim.

$$B = (A - iI)(A + iI)^{-1}, \tilde{B} = \left(\tilde{A} - iI\right) \left(\tilde{A} + iI\right)^{-1} \quad (4.1)$$

operatörlerini alalım. $-i$ disipatif (simetrik) operatörün özdeğeri olamayacağından (4.1) anlamlıdır. B operatörü $R(A + iI)$ uzayını $R(A - iI)$ uzayına izometrik olarak resmeder. Eğer $f \in R(A + iI)$, yani $f = (A + iI)g, g \in D_A$ ise,

$$\begin{aligned} \|Bf\|^2 &= \|(A - iI)g\|^2 = ((A - iI)g, (A - iI)g) \\ &= (Ag, Ag) - i(g, Ag) + i(Ag, g) + (g, g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \|(A + iI)g\|^2 = ((A + iI)g, (A + iI)g) \\ &= (Ag, Ag) + i(g, Ag) - i(Ag, g) + (g, g) \end{aligned}$$

dir.

$$(g, Ag) = (Ag, g)$$

ise

$$\|Bf\| = \|f\|$$

dir. Benzer şekilde \tilde{B} operatörünün bir büzülme operatörü olduğu gösterilir. (4.1) ifadesinden

$$A = -i(B + I)(B - I)^{-1}, \tilde{A} = -i(\tilde{B} + I)(\tilde{B} - I)^{-1}$$

dir. Açıktır ki \tilde{B} operatörü B operatörünün genişlemesidir. $u \in N_{-i}$ olsun. O zaman $u \perp D_B$ dir. $v \in D_B, \xi \in \mathbb{C}$ için

$$\|\xi v + u\|^2 - \left\| \tilde{B}(\xi v + u) \right\|^2 \geq 0 \quad (4.2)$$

dir.

$$\left\| \tilde{B}v \right\| = \|Bv\| = \|v\|$$

olduğunu hesaba katarsak (4.2) den

$$\|u\|^2 - \left\| \tilde{B}u \right\|^2 - 2 \operatorname{Re} \left(\xi \left(\tilde{B}v, \tilde{B}v \right) \right) \geq 0$$

elde edilir. ξ keyfi olduğundan

$$\left(\tilde{B}v, \tilde{B}v \right) = 0$$

olur. Böylece $\forall v \in D_B$ için $\tilde{B}u \perp \tilde{B}v = Bv$ dir. Yani $\tilde{B}u \perp R(A - iI)$, $\tilde{B}u \in N_i$. Buradan da C , N_{-i} den N_i ye büzülme operatörü olmak üzere $\tilde{B} = B \oplus C$.

$$g \in D_{\tilde{A}} \text{ olsun. } f = \left(\tilde{A} + iI \right) g$$

$$\tilde{B}f = \left(\tilde{A} - iI \right) g$$

olur. Son iki eşitlikten $f_1 \in R(A + iI)$, $f_2 \in N_{-i}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{2i} \left(f - \tilde{B}f \right) = \frac{1}{2i} \left(f_1 + f_2 - Bf_1 - Cf_2 \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(f_1 - Bf_1 \right) + \frac{1}{2i} \left(f_2 - Cf_2 \right) \end{aligned}$$

dir. B operatörünün tanımından $f_1 - Bf_1 \in D_A$. $f_2 - Cf_2 \in N_{-i} \oplus N_i$. Buradan $g \in D_{A^*}$ ve

$$\begin{aligned} A^*g &= \frac{1}{2i} \left(f_1 - Bf_1 \right) + \frac{1}{2i} \left(f_2 + Cf_2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(f_1 + Bf_1 \right) + \frac{1}{2} \left(f_2 + Cf_2 \right) \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan

$$\tilde{A}g = \frac{1}{2} \left(f + \tilde{B}f \right) = \frac{1}{2} \left(f_1 + Bf_1 \right) + \frac{1}{2} \left(f_2 + Cf_2 \right)$$

dir. Öyleyse

$$\tilde{A}g = A^*g$$

dir.

4.2. Lineer Bağıntılar

Tanım 4.2.1. H bir Hilbert uzay olsun. $\theta \in H \oplus H$ keyfi lineer kümesine *lineer bağıntı* denir. θ_1, θ_2 lineer bağıntılar olsunlar. $\theta_1 \subset \theta_2$ ise θ_2 ye θ_1 in *genişlemesi* denir (Gorbachuk and Gorbachuk, 1991).

Tanım 4.2.2. θ lineer bağıntısında $\{x, x'\} \in \theta$ için

$$\text{Im}(x', x) \geq 0, (\text{sırasıyla, } \text{Im}(x', x) \leq 0, \text{Im}(x', x) = 0)$$

oluyorsa θ lineer bağıntısına disipatif (sırasıyla, akretif, simetrik) bağıntı denir. Eğer disipatif (akretif, simetrik) bağıntının kendisinden farklı disipatif genişlemesi yoksa bağıntı maksimal disipatiftir. Aynı anda hem maksimal disipatif hem de maksimal akretif olan simetrik bağıntı kendine eştir (Gorbachuk and Gorbachuk, 1991).

θ disipatif bağıntısı ile eşleşen U_θ operatörünü tanımlayalım:

$$D_{U_\theta} = \{x' + ix : \{x, x'\} \in \theta\},$$

$$U_\theta(x' + ix) = x' - ix$$

olsun. U_θ operatörüne θ bağıntısının *Cayley dönüşümü* denir. U_θ operatörü iyi tanımlanmıştır. Eğer $\{x, x'\} \in \theta, \{y, y'\} \in \theta$ için $x' + ix = y' + iy$ olursa

$$\{x - y, x' - y'\} \in \theta, x' - y' = -i(x - y)$$

olur. Diğer taraftan

$$0 \leq \operatorname{Im} (x' - y', x - y) = \operatorname{Im} (-i(x - y), x - y) = -\|x - y\|^2$$

dir. Buradan $x = y, x' = y'$ elde edilir.

$$\|U_\theta (x' + ix)\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 - 2 \operatorname{Im} (x', x)$$

$$\|x' + ix\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 + 2 \operatorname{Im} (x', x)$$

dir. θ bağıntısı disipatif olduğundan

$$\|U_\theta (x' + ix)\| \leq \|x' + ix\|, \{x, x'\} \in \theta \quad (4.3)$$

elde edilir. θ bağıntısı simetrik ise (4.3) eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 4.2.3. K, H bir hilbert uzay üzerinde büzülme operatörü olsun.

$$(K - I)x' + i(K + I)x = 0 \quad (4.4)$$

$$(K - I)x' - i(K + I)x = 0 \quad (4.5)$$

eşitlikleri ile verilen lineer bağıntılar sırasıyla maksimal disipatif ve maksimal akretiftir. Tersine keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) bağıntı (4.4) ((4.5)) biçiminde gösterilebilir. K büzülme operatörü bağıntı ile tek türlü belirlenir.

Maksimal disipatif (maksimal akretif) bağıntı maksimal simetrik olması için gerek ve yeter koşul (4.4) ifadesindeki ((4.5) deki) K operatörü izometrik olmasıdır. Kendine eş bağıntıların genel formu (4.4) veya (4.5) ile verilir, burada K operatörü üniterdir (Gorbachuk and Gorbachuk, 1991).

İspat. (4.4) ile tanımlı θ lineer bağıntısını alalım. $\{x, x'\} \in \theta$ olsun.

$$K(x' + ix) = x' - ix$$

$$\|K(x' + ix)\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 - 2\operatorname{Im}(x', x)$$

$$\|x' + ix\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 + 2\operatorname{Im}(x', x).$$

Sonuncu eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa

$$4\operatorname{Im}(x', x) = \|x' + ix\|^2 - \|K(x' + ix)\|^2 \geq 0 \quad (4.6)$$

olur. Böylece θ bağıntısı disipatifdir. $u \in H$ için

$$x' = \frac{1}{2}(u + Ku), x = \frac{1}{2i}(u - Ku)$$

tanımlayalım. O zaman $\{x, x'\} \in \theta$, $x' + ix = u$, $x' - ix = Ku$ olur. Bu da $D_{U_\theta} = H$, $U_\theta = K$ olduğunu gösterir.

$\tilde{\theta}$ bağıntısı θ bağıntısının disipatif genişlemesi ise $U_{\tilde{\theta}} \supset U_\theta$ olur. Bu ise ancak $U_{\tilde{\theta}} = U_\theta$ olmasıyla mümkündür. Buradan $\tilde{\theta} = \theta$ olur. Yani θ maksimal disipatifdir.

θ keyfi maksimal disipatif bağıntı, U_θ da θ bağıntısının Cayley dönüşümü olsun. O zaman $D_{U_\theta} = H$ dir. Bunu ispatlayalım: Tersini kabul edelim. U_θ , $\overline{D_{U_\theta}}$ ya sürekli olarak genişletilebilir. $\overline{D_{U_\theta}} \neq H$ ise U_θ , $H \ominus \overline{D_{U_\theta}}$ üzerinde sıfıra eşitlenerek U_θ , H a genişletilir. Buradan $K \supset U_\theta$ büzülme operatörü tüm uzayda tanımlanır. K operatörünü inşa ederek (4.4) eşitliğine karşılık gelen $\tilde{\theta}$ bağıntısını ele alalım. Yukarıda ispat ettiğimiz gibi $\tilde{\theta}$ bağıntısı disipatif ve $\tilde{\theta} \supset \theta$ dir. θ bağıntısı maksimal disipatif olduğundan $\tilde{\theta} = \theta$, $U_{\tilde{\theta}} = U_\theta$ olur buradan bir çelişki elde edilir. Böylece U_θ , H üzerinde büzülme operatörüdür. Cayley dönüşümünün tanımından $\forall \{x, x'\} \in \theta$

$$U_\theta(x' + ix) = x' - ix \quad (4.7)$$

dir. Daha önceden belirttiğimiz gibi (4.7) maksimal disipatif $\tilde{\theta} \supset \theta$ bağıntısını tanımlar. θ bağıntısı maksimal disipatif olduğunda $\tilde{\theta} = \theta$, yani θ bağıntısı (4.4) ile belirlenir. (4.6) dan θ bağıntısı maksimal simetrik olması için gerek ve yeter koşul K izometrik operatör olmasıdır.

θ bağıntısı maksimal akretif olsun.

$$\theta_1 = \{ \{ -x, x' \} : \{ x, x' \} \in \theta \} \quad (4.8)$$

bağıntısı maksimal disipatifdir. Gösterdik ki

$$\{ x, x' \} \in \theta_1 (\text{veya } \{ -x, x' \} \in \theta) \iff (K - I)x' + i(K + I)(-x) = 0$$

dir. Bu ifade de (4.5) e denktir. Tersisi de benzer şekilde gösterilir.

Son olarak θ bağıntısı kendine eş olsun. O zaman K_1, K_2 operatörleri H üzerinde izometrik operatör olmak üzere

$$(K_1 - I)x' + i(K_1 + I)x = 0$$

$$(K_2 - I)x' - i(K_2 + I)x = 0$$

eşitlikleri denktir.

$$K_1 K_2 (x' - ix) = x' - ix, \quad K_2 K_1 (x' + ix) = x' + ix$$

elde edilir.

$$\{ x' + ix \mid \{ x, x' \} \in \theta \} = \{ x' - ix \mid \{ x, x' \} \in \theta \} = H$$

olduğundan

$$K_1 K_2 = K_2 K_1 = I$$

olur, yani K_1 ve K_2 üniterdir. Tersisi aşıkardır.

4.3. Sınır Değer Uzayları ve Disipatif Genişlemeler

Tanım 4.3.1. \mathcal{K} Hilbert uzay, $\Gamma_1, \Gamma_2 : D_{A^*} \rightarrow \mathcal{K}$ lineer dönüşümler olsun.

i) $f, g \in D_{A^*}$ için

$$(A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_{\mathcal{K}} - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{K}};$$

ii) Keyfi $F_1, F_2 \in \mathcal{K}$ için $\Gamma_1 f = F_1, \Gamma_2 f = F_2$ olacak şekilde bir $f \in D_{A^*}$ vektörü vardır;

şartlarını sağlayan $(\mathcal{K}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ üçlüsüne A operatörünün sınırlı değer uzayı denir (Gorbachuk and Gorbachuk, 1991).

Teorem 4.3.2. $n \leq \infty$ olmak üzere (n, n) indis defektli keyfi simetrik operatör için $\dim \mathcal{K} = n$ olmak üzere $(\mathcal{K}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ sınırlı değer uzayı vardır (Gorbachuk and Gorbachuk, 1991).

İspat.

$$D_{A^*} = D_A \oplus N_i \oplus N_{-i} \quad (4.9)$$

idi. $P_{-i}, P_i : D_{A^*} \rightarrow N_{-i}, N_i$ izdüşüm operatörleri olsun. $\dim N_{-i} = \dim N_i$ olduğundan $N_i \rightarrow N_{-i}$ izometrik bir dönüşüm vardır. Bunu U ile gösterelim.

$\mathcal{K} = N_{-i}$ alırsak (H dan indirgenen iç çarpıma göre)

$$\Gamma_1 = P_{-i} + UP_i, \Gamma_2 = -iP_{-i} + iUP_i$$

olsun. $(\mathcal{K}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ nin A operatörünün sınırlı değer uzayı olduğunu ispatlayalım. (4.9) ifadesinden $f, g \in D_{A^*}$ ise

$$f = f_0 + P_{-i}f + P_i f, g = g_0 + P_{-i}g + P_i g, f_0, g_0 \in D_A$$

dir.

$$A^*P_i = -iP_i, A^*P_{-i} = iP_{-i}$$

ve A operatörünün simetrik olduğunu dikkate alırsak

$$(A^*f, g) - (f, A^*g) = 2i((P_{-i}f, P_{-i}g) - (P_if, P_ig))$$

dir. Diğer taraftan U operatörünün izometrikliğine denk olarak

$$(\Gamma_1f, \Gamma_2g)_K - (\Gamma_2f, \Gamma_1g)_K = 2i((P_{-i}f, P_{-i}g) - (P_if, P_ig))$$

dir. Buradan sınır değer uzayının (i) koşulu sağlanır.

$F_1, F_2 \in \mathcal{K}$, $f \in D_{A^*}$ alalım.

$$f = f_0 + f_{-i} + f_i, f_0 \in D_A$$

$$f_{-i} = \frac{1}{2i}(iF_1 - F_2) \in N_{-i}, f_i = \frac{1}{2i}U^{-1}(iF_1 + F_2) \in N_i$$

olsun. O zaman $\Gamma_1f = F_1, \Gamma_2f = F_2$ olur.

Teorem 4.3.3. K, H Hilbert uzayında büzülme operatörü ise A^* operatörünün

$$(K - I)\Gamma_1f + i(K + I)\Gamma_2f = 0 \quad (4.10)$$

veya

$$(K - I)\Gamma_1f - i(K + I)\Gamma_2f = 0 \quad (4.11)$$

koşulunu sağlayan $f \in D_{A^*}$ vektörlerinin kümesine kısıtlaması sırasıyla A operatörünün maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemesidir.

Tersine A operatörünün keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemesi A^* operatörünün (4.10) ((4.11)) koşulunu sağlayan $f \in D_{A^*}$ vektörlerinin kümesine kısıtlamasıdır ki burada K büzülme operatörü genişleme ile tek türlü belirlenir. H Hilbert uzayı üzerinde A operatörünün maksimal simetrik genişlemesi (4.10) ((4.11)) koşulu ile belirlenir ki burada K izometrik operatördür. Eğer K üniter operatör ise bu koşullar kendine eş genişleme belirler. Son durumda (4.10), (4.11)

koşulları, C , H üzerinde kendine eş operatör olmak üzere

$$(\cos C) \Gamma_2 f - (\sin C) \Gamma_1 f = 0$$

koşuluna denktir. A operatörünün disipatif genişlemelerinin genel formu

$$K(\Gamma_1 f + i\Gamma_2 f) = \Gamma_1 f - i\Gamma_2 f, \Gamma_1 f + i\Gamma_2 f \in D_K \quad (4.12)$$

(sırasıyla

$$K(\Gamma_1 f - i\Gamma_2 f) = \Gamma_1 f + i\Gamma_2 f, \Gamma_1 f - i\Gamma_2 f \in D_K) \quad (4.13)$$

koşulu ile verilir. Burada K operatörü $f \in D_K$ için

$$\|Kf\| \leq \|f\|$$

sağlayan lineer operatördür. A operatörünün simetrik genişlemeleri ise K izometrik operatör olmak üzere (4.12), (4.13) formülleri ile verilir (Gorbachuk and Gorbachuk, 1991).

İspat. \tilde{A} , A operatörünün maksimal disipatif genişlemesi olsun. Teorem 4.1.3 ile $\tilde{A} \subset A^*$ dir. $(\mathcal{K}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, A operatörünün sınır değer uzayı olmak üzere

$$\theta = \{ \{ \Gamma_2 f, \Gamma_1 f \} : f \in D_{\tilde{A}} \}$$

olsun. $(\mathcal{K}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ nin (i) özelliğinden θ , \mathcal{K} da disipatif bağıntıdır. Eğer $\tilde{\theta} \supset \theta$ ve θ disipatif bağıntı ise $\widetilde{\tilde{A}}$ A^* operatörünün $D_{\widetilde{\tilde{A}}} = \{ f \in D_{A^*} : \{ \Gamma_2 f, \Gamma_1 f \} \in \tilde{\theta} \}$ kümesinin kısıtlaması olarak tanımlanan $\widetilde{\tilde{A}}$ operatörünün disipatif genişlemesidir. Buradan $\widetilde{\tilde{A}} = \tilde{A}$. Eğer $\{x, x'\} \in \tilde{\theta}$ ise belli bir $f \in D_{A^*}$, için $x = \Gamma_2 f$, $x' = \Gamma_1 f$, olur. Burada $f \in D_{\widetilde{\tilde{A}}}$, ve $f \in D_{\tilde{A}}$ dir, yani, $\{x, x'\} \in \theta$. Böylece $\tilde{\theta} = \theta$ ve θ maksimal disipatif bağıntıdır. Teorem 4.2.3 den istenen sonuçlar elde edilir.

Farz edelim ki \tilde{A} , A^* operatörünün (4.10) koşulunu sağlayan vektörlerin $D_{\tilde{A}}$

kümesine kısıtlaması olsun.

$$\theta = \{ \{ \Gamma_2 f, \Gamma_1 f \} : f \in D_{\tilde{A}} \}$$

ele alalım. Teorem 4.2.3 göre θ bağıntısı maksimal disipatiftir. $(\mathcal{K}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ nin (i) özelliğinden \tilde{A} disipatiftir.

Farz edelim ki $\widetilde{\tilde{A}}$ operatörü \tilde{A} operatörünün disipatif genişlemesi olsun.

$$\tilde{\theta} = \{ \{ \Gamma_2 f, \Gamma_1 f \} : f \in D_{\widetilde{\tilde{A}}} \}$$

dır. $\tilde{\theta}$ bağıntısı θ bağıntısının disipatif genişlemesi olduğundan $\tilde{\theta} = \theta$ dir. Eğer $f \in D_{\widetilde{\tilde{A}}}$ ise $g \in D_{\tilde{A}}$ için $\Gamma_1 f = \Gamma_1 g, \Gamma_2 f = \Gamma_2 g$. Bu ise $f - g \in D_A$, buradan $f \in D_{\tilde{A}}$. Böylece $\tilde{A} = \widetilde{\tilde{A}}$ ve \tilde{A} maksimal disipatiftir.

5. 4. MERTEBEDEN DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN GENİŞ- LEMELERİ

Bu bölümde; 4. mertebeden çeşitli indis defekte sahip diferansiyel operatörlerin disipatif genişlemeleri verilecektir.

5.1.(4,4) İndis Defekli 4. Mertebeden Diferensiyel Operatörlerin Disi- patif Genişlemeleri

q fonksiyonu, $[0, \infty)$ aralığı üzerinde sürekli olmak üzere

$$l(y) = y^{(4)} + q(x)y, \quad 0 \leq x < \infty \quad (5.1)$$

4. mertebeden diferansiyel ifadesini ele alalım. $L_2(0, \infty)$ uzayında (5.1) ile üretilen minimal operatörün kapanışı L_0 (D_0 da tanım kümesi) olsun. $D = \{y \in L_2(0, \infty) : y', y'', y'''$ fonksiyonları $[0, \infty)$ üzerinde lokal mutlak sürekli ve $l(y) \in L_2(0, \infty)\}$ olsun. D maksimal L operatörünün tanım kümesidir ve $L = L_0^*$ dır.

$q(x)$ öyle seçilsin ki L_0 operatörünün indis defekti $(4, 4)$ olsun. $l(y) = 0$ denkleminin

$$v_1(0) = 1, v_1'(0) = 0, v_1''(0) = 0, v_1'''(0) = 0,$$

$$v_2(0) = 0, v_2'(0) = 1, v_2''(0) = 0, v_2'''(0) = 0,$$

$$v_3(0) = 0, v_3'(0) = 0, v_3''(0) = 1, v_3'''(0) = 0,$$

$$v_4(0) = 0, v_4'(0) = 0, v_4''(0) = 0, v_4'''(0) = 1,$$

başlangıç koşullarını sağlayan $v_1(x), v_2(x), v_3(x), v_4(x)$ çözümlerini gözönüne alalım. $v_1(x), v_2(x), v_3(x), v_4(x)$ çözümleri lineer bağımsızdırlar ve Wronskiyenleri 1 e eşittir. L_0 operatörünün indis defekti $(4, 4)$ olduğundan

$$v_1, v_2, v_3, v_4 \in L_2(0, \infty)$$

dır.

$\Gamma_1, \Gamma_2 : D \rightarrow \mathbb{C}^4$ lineer dönüşümlerini $[y, z]_x = [y'''(x)z(x) - y(x)z'''(x)] - [y''(x)z'(x) - y'(x)z''(x)]$ ($0 \leq x < \infty$) olmak üzere

$$\Gamma_1 f = \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ [f, v_2]_\infty \\ [f, v_1]_\infty \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 f = \begin{pmatrix} f'''(0) \\ f''(0) \\ [f, v_4]_\infty \\ [f, v_3]_\infty \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

biçiminde tanımlayalım.

Lemma 5.1.1. $\forall y, z \in D$ için

$$(Ly, z)_{L^2} - (y, Lz)_{L^2} = (\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^4} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^4}$$

dır.

İspat. $f, g \in D$ $[f, g](x) = \begin{vmatrix} [v_2, g]_x & [g, v_4]_x \\ [v_2, f]_x & [f, v_4]_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} [v_1, g]_x & [g, v_3]_x \\ [v_1, f]_x & [f, v_3]_x \end{vmatrix}$ olduğunu biliyoruz (Fulton, 1989). Buradan

$$[f, g](x) = [v_2, g]_x [f, v_4]_x - [g, v_4]_x [v_2, f]_x + [v_1, g]_x [f, v_3]_x - [v_1, f]_x [g, v_3]_x \quad (5.3)$$

elde edilir.

$\forall y, z \in D$ için Green formülünü uygularsak

$$(Ly, z)_{L^2} - (y, Lz)_{L^2} = [y, \bar{z}]_\infty - [y, \bar{z}]_0$$

dır.

$$\begin{aligned} (\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^4} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^4} &= y(0) \bar{z}'''(0) - \bar{z}(0) y'''(0) \\ &\quad + y''(0) \bar{z}'(0) - \bar{z}''(0) y'(0) \\ &\quad + [y, v_2]_\infty [\bar{z}, v_4]_\infty - [\bar{z}, v_2]_\infty [y, v_4]_\infty \\ &\quad + [y, v_1]_\infty [\bar{z}, v_3]_\infty - [\bar{z}, v_1]_\infty [y, v_3]_\infty \end{aligned}$$

olur. (5.3) den

$$(\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^4} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^4} = [y, \bar{z}]_{\infty} - [y, \bar{z}]_0$$

olur. Öyleyse

$$(Ly, z)_{L^2} - (y, Lz)_{L^2} = (\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^4} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^4}.$$

Lemma 5.1.2. Keyfi $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{C}$ için öyle bir $y \in D$ fonksiyonu vardır ki aşağıdaki koşulları sağlar:

$$\begin{aligned} y(0) &= \alpha_0, \quad y'(0) = \alpha_1, \quad y''(0) = \alpha_2, \quad y'''(0) = \alpha_3 \\ [y, v_1]_{\infty} &= \beta_0, \quad [y, v_2]_{\infty} = \beta_1, \quad [y, v_3]_{\infty} = \beta_2, \quad [y, v_4]_{\infty} = \beta_3. \end{aligned} \quad (5.4)$$

İspat. Keyfi bir $f \in L_2(0, \infty)$ aşağıdaki koşulları sağlasın:

$$\begin{aligned} (f, v_1)_{L^2} &= \beta_0 - \alpha_3, \quad (f, v_3)_{L^2} = \beta_2 - \alpha_1, \\ (f, v_2)_{L^2} &= \beta_1 + \alpha_2, \quad (f, v_4)_{L^2} = \beta_3 + \alpha_0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

$f = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4$ diyelim. (5.5) koşulları c_1, c_2, c_3, c_4 sabitlerinin denklemler sistemidir ve determinantı v_1, v_2, v_3, v_4 lineer bağımsız fonksiyonların Gram determinantıdır dolayısıyla sıfırdan farklıdır.

$y(x)$, $l(y) = f$ denkleminin $y(0) = \alpha_0$, $y'(0) = \alpha_1$, $y''(0) = \alpha_2$, $y'''(0) = \alpha_3$, koşullarını sağlayan bir çözümü olsun. Bu durumda $y(x)$ e Green formülü uygulanırsa

$$(f, v_j)_{L^2} = (l(y), v_j)_{L^2} = [y, v_j]_{\infty} - [y, v_j]_0, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

olur. $l(v_j) = 0$ ($j = 1, 2, 3, 4$) idi. Ayrıca $y(0) = \alpha_0$, $y'(0) = \alpha_1$, $y''(0) = \alpha_2$, $y'''(0) = \alpha_3$ olduğundan

$$[y, v_j]_0 = \begin{cases} \alpha_3, & j = 1 \text{ ise} \\ -\alpha_2, & j = 2 \text{ ise} \\ \alpha_1, & j = 3 \text{ ise} \\ -\alpha_0, & j = 4 \text{ ise} \end{cases}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} (f, v_1)_{L^2} &= [y, v_1]_\infty - \alpha_3, & (f, v_2)_{L^2} &= [y, v_2]_\infty + \alpha_2 \\ (f, v_3)_{L^2} &= [y, v_3]_\infty - \alpha_1, & (f, v_4)_{L^2} &= [y, v_4]_\infty + \alpha_0 \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$[y, v_1]_\infty = \beta_0, [y, v_2]_\infty = \beta_1, [y, v_3]_\infty = \beta_2, [y, v_4]_\infty = \beta_3$$

elde edilir.

Teorem 5.1.3. (5.2) ile tanımlanan $(\mathbb{C}^4, \Gamma_1, \Gamma_2)$ üçlüsü L_0 operatörünün sınır değer uzayıdır.

İspat. Lemma 5.1.1 ve Lemma 5.1.2 sınır değer uzayının iki şartını sağlar.

Sonuç 5.1.4. K operatörü \mathbb{C}^4 üzerinde büzülme operatörü olduğunda L_0 operatörünün

$$(K - I) \Gamma_1 y + i(K + I) \Gamma_2 y = 0 \tag{5.6}$$

$$(K - I) \Gamma_1 y - i(K + I) \Gamma_2 y = 0 \tag{5.7}$$

koşullarını sağlayan $y \in D$ fonksiyonları kümesine kısıtlanmış sırasıyla maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemeleridir. Tersine L_0 operatörünün keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemeleri (5.6) ((5.7)) biçiminde gösterilebilir. K büzülme operatörü bağıntı ile tek türlü belirlenir. Eğer (5.6) (

(5.7)) ifadesindeki K operatörü izometrik operatör olursa L_0 operatörünün maksimal simetrik genişlemesini, eğer K operatörü üniter olursa L_0 operatörünün kendine eş genişlemesini verir. Disipatif ve akretif genişlemelerinin genel formu

$$K(\Gamma_1 y + i\Gamma_2 y) = \Gamma_1 y - i\Gamma_2 y, \Gamma_1 y + i\Gamma_2 y \in D(K)$$

$$K(\Gamma_1 y - i\Gamma_2 y) = \Gamma_1 y + i\Gamma_2 y, \Gamma_1 y - i\Gamma_2 y \in D(K)$$

biçimindedir. Burada K

$$\|Kf\| \leq \|f\|, f \in D(K)$$

koşulunu sağlayan lineer operatördür.

Sonuç 5.1.5.

$$y'''(0) + h_1 y(0) = 0 \tag{5.8}$$

$$y'(0) + h_2 y''(0) = 0 \tag{5.9}$$

$$[y, v_2]_\infty - h_3 [y, v_4]_\infty = 0 \tag{5.10}$$

$$[y, v_1]_\infty - h_4 [y, v_3]_\infty = 0 \tag{5.11}$$

$\text{Im } h_1 \geq 0$ veya $h_1 = \infty$, $\text{Im } h_2 \geq 0$ veya $h_2 = \infty$, $\text{Im } h_3 \geq 0$ veya $h_3 = \infty$ ve $\text{Im } h_4 \geq 0$ veya $h_4 = \infty$ ($\text{Im } h_1 = 0$ veya $h_1 = \infty$, $\text{Im } h_2 = 0$ veya $h_2 = \infty$, $\text{Im } h_3 = 0$ veya $h_3 = \infty$ ve $\text{Im } h_4 = 0$ veya $h_4 = \infty$) sınır koşulları L_0 operatörünün ayrık sınır koşulları ile maksimal disipatif (kendine eş) genişlemelerini verir.

Özel olarak $\text{Im } h_1 = 0$ veya $h_1 = \infty$, $\text{Im } h_2 = 0$ veya $h_2 = \infty$, $\text{Im } h_3 > 0$, $\text{Im } h_4 > 0$ olursa L_0 operatörü sonsuzda disipatif olur. $\text{Im } h_1 > 0$, $\text{Im } h_2 > 0$ ve $\text{Im } h_3 = 0$ veya $h_3 = \infty$ ve $\text{Im } h_4 = 0$ veya $h_4 = \infty$ olursa L_0 operatörü sıfırda disipatif olur.

İspat.

$$\begin{aligned}
(Ly, y) - (y, Ly) &= y(0)\bar{y}'''(0) - \bar{y}(0)y'''(0) + y''(0)\bar{y}'(0) \\
&\quad - \bar{y}''(0)y'(0) \\
&\quad + [y, v_2]_\infty [\bar{y}, v_4]_\infty - [\bar{y}, v_2]_\infty [y, v_4]_\infty \\
&\quad + [y, v_1]_\infty [\bar{y}, v_3]_\infty - [\bar{y}, v_1]_\infty [y, v_3]_\infty
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
y'''(0) &= -h_1 y(0), \quad y'(0) = -h_2 y''(0), \\
[y, v_2]_\infty &= h_3 [y, v_4]_\infty, \quad [y, v_1]_\infty = h_4 [y, v_3]_\infty
\end{aligned}$$

yazarsak

$$\begin{aligned}
(Ly, y) - (y, Ly) &= -\bar{h}_1 (y(0))^2 + h_1 (y(0))^2 \\
&\quad - \bar{h}_2 (y''(0))^2 + h_2 (y''(0))^2 \\
&\quad + h_3 ([y, v_4]_\infty)^2 - \bar{h}_3 ([y, v_4]_\infty)^2 \\
&\quad + h_4 ([y, v_3]_\infty)^2 - \bar{h}_4 ([y, v_3]_\infty)^2
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
(Ly, y) - (y, Ly) &= 2 \operatorname{Im} h_1 (y(0))^2 + 2 \operatorname{Im} h_2 (y''(0))^2 \\
&\quad + 2 \operatorname{Im} h_3 ([y, v_4]_\infty)^2 + 2 \operatorname{Im} h_4 ([y, v_3]_\infty)^2.
\end{aligned}$$

$h_1 = \infty$ olması $y(0) = 0$ olmasını sağlar. $h_2 = \infty$ ise $y''(0) = 0$, $h_3 = \infty$ ise $[y, v_4]_\infty = 0$, $h_4 = \infty$ ise $[y, v_3]_\infty = 0$ dir.

$\operatorname{Im} h_1 \geq 0$ veya $h_1 = \infty$, $\operatorname{Im} h_2 \geq 0$ veya $h_2 = \infty$, $\operatorname{Im} h_3 \geq 0$ veya $h_3 = \infty$ ve $\operatorname{Im} h_4 \geq 0$ veya $h_4 = \infty$ ($\operatorname{Im} h_1 = 0$ veya $h_1 = \infty$, $\operatorname{Im} h_2 = 0$ veya $h_2 = \infty$, $\operatorname{Im} h_3 = 0$ veya $h_3 = \infty$ ve $\operatorname{Im} h_4 = 0$ veya $h_4 = \infty$) sınır koşulları L_0 operatörünün ayrık sınır koşulları ile maksimal disipatif (kendine eş) genişlemelerini verdiği görülür.

$\text{Im } h_1 = 0$ veya $h_1 = \infty$, $\text{Im } h_2 = 0$ veya $h_2 = \infty$, $\text{Im } h_3 > 0$, $\text{Im } h_4 > 0$ olursa L_0 operatörü sonsuzda disipatif olur. $\text{Im } h_1 > 0$, $\text{Im } h_2 > 0$ ve $\text{Im } h_3 = 0$ veya $h_3 = \infty$ ve $\text{Im } h_4 = 0$ veya $h_4 = \infty$ olursa L_0 operatörü sıfırda disipatif olur.

Şimdi de tüm reel ekseninde genişlemeyi verelim. q fonksiyonu, $(-\infty, \infty)$ aralığı üzerinde sürekli olmak üzere

$$l(y) = y^{(4)} + q(x)y, \quad -\infty < x < \infty \quad (5.12)$$

4. mertebeden diferansiyel ifadesini ele alalım. $L_2(-\infty, \infty)$ uzayında (5.12) ile üretilen minimal operatörün kapanışını L_0 (D_0 da tanım kümesi) olsun. $D = \{y \in L_2(-\infty, \infty) : y', y'', y''' \text{ fonksiyonları } [0, \infty) \text{ üzerinde lokal mutlak sürekli ve } l(y) \in L_2(-\infty, \infty)\}$ olsun. D maksimal L operatörünün tanım kümesidir ve $L = L_0^*$ dir.

$q(x)$ öyle seçilsin ki L_0 operatörünün indis defekti $(2, 2)$ olsun. L_0^+ , $l(y)$ diferansiyel ifadesinin $[0, \infty)$ aralığında ürettiği minimal operatörün kapanışı olsun. L_0^- operatörü de $l(y)$ diferansiyel ifadesinin $(-\infty, 0]$ aralığında ürettiği minimal operatör olsun.

$$\text{def } L_0 = \text{def } L_0^+ + \text{def } L_0^- - 4$$

olduğunu biliyoruz (Naimark, 1968). Buradan

$$\text{def } L_0^+ + \text{def } L_0^- = 6$$

olur.

$$m_+ = \text{def } L_0^+, \quad m_- = \text{def } L_0^-$$

denirse $m_+ + m_- = 6$ olur. Bu durumda $m_- = 2$ ve $m_+ = 4$ olur. Yani L_0^+ operatörünün indis defekti $(4, 4)$ dür. $l(y) = ay$, $(0 \leq x < \infty)$ denkleminin 4 tane lineer bağımsız çözümü $L_2(0, \infty)$ a aittir.

$$y(x) = v_1(x)c_1 + v_2(x)c_2 + v_3(x)c_3 + v_4(x)c_4, \quad (5.13)$$

$c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}$, $v_1(x) = \varphi_1(x, a)$, $v_2(x) = \varphi_2(x, a)$, $v_3(x) = \varphi_3(x, a)$, $v_4(x) = \varphi_4(x, a)$ alalım. $y(x) \in L_2(0, \infty)$ ve D_+ , $L^+ = (L_0^+)^*$ maksimal operatörünün tanım kümesi olmak üzere $y(x) \in D_+$ olur.

Benzer şekilde $\Gamma_1, \Gamma_2 : D \rightarrow \mathbb{C}^2$ lineer dönüşümlerini

$$[y, z]_x = [y'''(x)z(x) - y(x)z'''(x)] - [y''(x)z'(x) - y'(x)z''(x)] \quad (0 \leq x < \infty)$$

olmak üzere

$$\Gamma_1 f = \begin{pmatrix} [f, v_2]_\infty \\ [f, v_1]_\infty \end{pmatrix}, \Gamma_2 f = \begin{pmatrix} [f, v_4]_\infty \\ [f, v_3]_\infty \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

biçiminde tanımlayalım.

Lemma 5.1.6. $\forall y, z \in D$ için

$$(Ly, z)_{L^2} - (y, Lz)_{L^2} = (\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^2} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^2}$$

dır.

İspat. L_0^- operatörünün indis defekti $(2, 2)$ olduğundan $\forall y, z \in D$ için Green formülünü uygularsak

$$(Ly, z)_{L^2} - (y, Lz)_{L^2} = [y, z]_\infty \quad (5.15)$$

dır. Lemma 5.1.1 den

$$\begin{aligned} (\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^2} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^2} &= [y, v_2]_\infty [\bar{z}, v_4]_\infty - [\bar{z}, v_2]_\infty [y, v_4]_\infty \\ &\quad + [y, v_1]_\infty [\bar{z}, v_3]_\infty - [\bar{z}, v_1]_\infty [y, v_3]_\infty \\ &= [y, z]_\infty \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (5.15) ispatlanır.

Lemma 5.1.7. Keyfi $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{C}$ için öyle bir $y(x) \in D$ fonksiyonu vardır

ki aşağıdaki koşulları sağlar:

$$[y, v_1]_\infty = \beta_0, [y, v_2]_\infty = \beta_1, [y, v_3]_\infty = \beta_2, [y, v_4]_\infty = \beta_3. \quad (5.16)$$

İspat. Lemma 5.1.2 den

$$\begin{aligned} y_+(0) &= \alpha_0, y'_+(0) = \alpha_1, \\ y''_+(0) &= \alpha_2, y'''_+(0) = \alpha_3, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C} \\ [y_+, v_1]_\infty &= \beta_0, [y_+, v_2]_\infty = \beta_1, \\ [y_+, v_3]_\infty &= \beta_2, [y_+, v_4]_\infty = \beta_3. \end{aligned} \quad (5.17)$$

koşullarını sağlayan $y_+(x) \in D_+$ fonksiyonu vardır.

$l(y)$ diferansiyel ifadesinin $[-1, 0]$ aralığında ürettiği minimal operatörün kapanışı L_{01}^- regüler operatörüne bakalım. L_{01}^- operatörünün indis defekti $(4, 4)$ olduğundan

$$\begin{aligned} y_-(0) &= \alpha_0, y'_-(0) = \alpha_1, y''_-(0) = \alpha_2, y'''_-(0) = \alpha_3, \\ y_-(-1) &= y'_-(-1) = y''_(-1) = y'''_(-1) = 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

koşulunu sağlayan $y_-(x) \in D((L_{01}^-)^*)$ vardır.

$$y(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & -\infty < x \leq -1, \\ y_-(x), & -1 \leq x \leq 0, \\ y_+(x), & 0 \leq x < \infty, \end{array} \right\}$$

olsun. (5.17), (5.18) koşullarından ve $y(x)$ fonksiyonu $x = -1$, $x = 0$ da düzgün olduğundan

$$[y, v_1]_\infty = \beta_0, [y, v_2]_\infty = \beta_1, [y, v_3]_\infty = \beta_2, [y, v_4]_\infty = \beta_3$$

olur.

Teorem 5.1.8. L_0^- operatörünün indis defekti $(2, 2)$, L_0^+ operatörünün indis defekti $(4, 4)$ olsun. (5.14) ile tanımlanan $(\mathbb{C}^2, \Gamma_1, \Gamma_2)$ üçlüsü L_0 operatörünün sınır değer uzayıdır.

İspat. Lemma 5.1.6 ve Lemma 5.1.7 sınır değer uzayının iki şartını sağlar.

Sonuç 5.1.9. K operatörü \mathbb{C}^2 üzerinde büzülme operatörü olduğunda L operatörünün

$$(K - I) \Gamma_1 y + i(K + I) \Gamma_2 y = 0 \quad (5.19)$$

$$(K - I) \Gamma_1 y - i(K + I) \Gamma_2 y = 0 \quad (5.20)$$

koşullarını sağlayan $y \in D$ fonksiyonları kümesine kısıtlanmış sırasıyla maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemeleridir. Tersine L_0 operatörünün keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemeleri (5.19) ((5.20)) biçiminde gösterilebilir. K büzülme operatörü bağıntı ile tek türlü belirlenir. Eğer (5.19) ((5.20)) ifadesindeki K operatörü izometrik operatör olursa L_0 operatörünün maksimal simetrik genişlemesini, eğer K operatörü üniter olursa L_0 operatörünün kendine eş genişlemesini verir. Disipatif ve akretif genişlemelerinin genel formu

$$K(\Gamma_1 y + i\Gamma_2 y) = \Gamma_1 y - i\Gamma_2 y, \Gamma_1 y + i\Gamma_2 y \in D(K)$$

$$K(\Gamma_1 y - i\Gamma_2 y) = \Gamma_1 y + i\Gamma_2 y, \Gamma_1 y - i\Gamma_2 y \in D(K)$$

biçimindedir. Burada K

$$\|Kf\| \leq \|f\|, f \in D(K)$$

koşulunu sağlayan lineer operatördür.

L_0 operatörünün indis defekti $(4, 4)$, L_0^- operatörünün indis defekti $(4, 4)$, L_0^+ operatörünün indis defekti $(4, 4)$ olsun. L_0^\pm operatörünün regüler tipte bir $a_\pm \in$

$(-\infty, \infty)$ noktası vardır. $l(y) = a_{\pm}y$, denkleminin 4 tane lineer bağımsız çözümü $L_2(R_{\pm})$, $R_+ = [0, \infty)$, $R_- = (-\infty, 0]$ aittir.

$$y_{\pm}(x) = v_{1\pm}(x)c_1^{\pm} + v_{2\pm}(x)c_2^{\pm} + v_{3\pm}(x)c_3^{\pm} + v_{4\pm}(x)c_4^{\pm}, y_{\pm}(x) \in L_2(R_{\pm})$$

$$c_1^{\pm}, c_2^{\pm}, c_3^{\pm}, c_4^{\pm} \in \mathbb{C}, v_{1\pm}(x) = \varphi_1(x, a_{\pm}),$$

$$v_{2\pm}(x) = \varphi_2(x, a_{\pm}), v_{3\pm}(x) = \varphi_3(x, a_{\pm}), v_{4\pm}(x) = \varphi_4(x, a_{\pm})$$

alalım.

$\Gamma_1, \Gamma_2 : D \rightarrow \mathbb{C}^4$ lineer dönüşümlerini

$$\Gamma_1 f = \begin{pmatrix} -[f_-, v_2]_{\infty} \\ [f_+, v_2]_{\infty} \\ -[f_-, v_1]_{\infty} \\ [f_+, v_1]_{\infty} \end{pmatrix}, \Gamma_2 y = \begin{pmatrix} [f_-, v_4]_{\infty} \\ [f_+, v_4]_{\infty} \\ [f_-, v_3]_{\infty} \\ [f_+, v_3]_{\infty} \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

biçiminde tanımlayalım.

Lemma 5.1.10. $\forall y, z \in D$ için

$$(Ly, z) - (y, Lz) = (\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^4} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^4}$$

dır.

İspat. $\forall y, z \in D$ için Green formülünü uygularsak

$$(Ly, z) - (y, Lz) = [y, z]_{\infty} - [y, z]_{-\infty} \quad (5.22)$$

dır. Lemma 5.1.1 den

$$\begin{aligned}
(\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^4} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^4} &= [y_+, v_2]_{\infty} [\bar{z}_+, v_4]_{\infty} - [\bar{z}_+, v_2]_{\infty} [y_+, v_4]_{\infty} \\
&+ [y_+, v_1]_{\infty} [\bar{z}_+, v_3]_{\infty} - [\bar{z}_+, v_1]_{\infty} [y_+, v_3]_{\infty} \\
&+ [y_-, v_2]_{-\infty} [\bar{z}_-, v_4]_{-\infty} - [\bar{z}_-, v_2]_{-\infty} [y_-, v_4]_{-\infty} \\
&+ [y_-, v_1]_{-\infty} [\bar{z}_-, v_3]_{-\infty} - [\bar{z}_-, v_1]_{-\infty} [y_-, v_3]_{-\infty} \\
&= [y_+, z_+]_{\infty} - [y_-, z_-]_{-\infty}
\end{aligned}$$

$$[y, z]_{\infty} = [y_+, z_+]_{\infty}, \quad [y, z]_{-\infty} = [y_-, z_-]_{-\infty}$$

ifadesi (5.22) yi ispatlar.

Lemma 5.1.11. Keyfi $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{C}$ için öyle bir $y(x) \in D$ fonksiyonu vardır ki aşağıdaki koşulları sağlar:

$$\begin{aligned}
-[y_-, v_1]_{-\infty} &= \alpha_0, \quad -[y_-, v_2]_{-\infty} = \alpha_1, & (5.23) \\
[y_-, v_3]_{-\infty} &= \alpha_2, \quad [y_-, v_4]_{-\infty} = \alpha_3 \\
[y_+, v_1]_{\infty} &= \beta_0, \quad [y_+, v_2]_{\infty} = \beta_1, \quad [y_+, v_3]_{\infty} = \beta_2, \quad [y_+, v_4]_{\infty} = \beta_3.
\end{aligned}$$

İspat. Lemma 5.1.2 den $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{C}$ için öyle bir

$$y_+, y_- \in D$$

fonksiyonu vardır ki aşağıdaki koşulları sağlar:

$$\begin{aligned}
y_-(0) &= y'_-(0) = y''_-(0) = y'''_-(0) = 0, & (5.24) \\
y_+(0) &= y'_+(0) = y''_+(0) = y'''_+(0) = 0, \quad -[y_-, v_1]_{-\infty} = \alpha_0, \\
-[y_-, v_2]_{-\infty} &= \alpha_1, \quad [y_-, v_3]_{-\infty} = \alpha_2, \quad [y_-, v_4]_{-\infty} = \alpha_3, \\
[y_+, v_1]_{\infty} &= \beta_0, \quad [y_+, v_2]_{\infty} = \beta_1, \\
[y_+, v_3]_{\infty} &= \beta_2, \quad [y_+, v_4]_{\infty} = \beta_3.
\end{aligned}$$

$$y(x) = \left\{ \begin{array}{l} y_-(x), \quad -\infty \leq x \leq 0, \\ y_+(x), \quad 0 \leq x < \infty, \end{array} \right\}$$

olsun. (5.24), koşullarından ve $y(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında düzgün olduğundan (5.23) elde edilir.

Teorem 5.1.12. L_0^- operatörünün indis defekti $(4, 4)$, L_0^+ operatörünün indis defekti $(4, 4)$ olsun. (5.21) ile tanımlanan $(\mathbb{C}^4, \Gamma_1, \Gamma_2)$ üçlüsü L_0 operatörünün sınır değer uzayıdır.

İspat. Lemma 5.1.10 ve Lemma 5.1.11 sınır değer uzayının iki şartını sağlar.

Sonuç 5.1.13. K operatörü \mathbb{C}^4 üzerinde büzülme operatörü olduğunda L operatörünün

$$(K - I) \Gamma_1 y + i(K + I) \Gamma_2 y = 0 \quad (5.25)$$

$$(K - I) \Gamma_1 y - i(K + I) \Gamma_2 y = 0 \quad (5.26)$$

koşullarını sağlayan $y \in D$ fonksiyonları kümesine kısıtlanmış sırasıyla maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemeleridir. Tersine L_0 operatörünün keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemeleri (5.25) (5.26) biçiminde gösterilebilir. K büzülme operatörü bağıntı ile tek türlü belirlenir. Eğer (5.25) (5.26) ifadesindeki K operatörü izometrik operatör olursa L_0 operatörünün maksimal simetrik genişlemesini, eğer K operatörü üniter olursa L_0 operatörünün kendine eş genişlemesini verir. Disipatif ve akretif genişlemelerinin genel formu

$$K(\Gamma_1 y + i\Gamma_2 y) = \Gamma_1 y - i\Gamma_2 y, \Gamma_1 y + i\Gamma_2 y \in D(K)$$

$$K(\Gamma_1 y - i\Gamma_2 y) = \Gamma_1 y + i\Gamma_2 y, \Gamma_1 y - i\Gamma_2 y \in D(K)$$

biçimindedir. Burada K

$$\|Kf\| \leq \|f\|, f \in D(K)$$

koşulunu sağlayan lineer operatördür.

5.2. (3,3) İndis Defekli 4. Mertebeden Diferensiyel Operatörlerin Disipatif Genişlemeleri

q fonksiyonu, $[0, \infty)$ aralığı üzerinde sürekli olmak üzere

$$l(y) = y^{(4)} + q(x)y, \quad 0 \leq x < \infty \quad (5.27)$$

4. mertebeden diferansiyel ifadesini ele alalım. $L_2(0, \infty)$ uzayında (5.27) ile üretilen minimal operatörün kapanışı L_0 (D_0 da tanım kümesi) olsun. $D = \{y \in L_2(0, \infty) : y', y'', y''' \text{ fonksiyonları } [0, \infty) \text{ aralığı üzerinde lokal mutlak sürekli ve } l(y) \in L_2((0, \infty); E)\}$ olsun. D maksimal L operatörünün tanım kümesidir ve $L = L_0^*$ dir.

$q(x)$ öyle seçilsin ki L_0 operatörünün indis defekti (3,3) olsun. $l(y) = 0$ denkleminin

$$\begin{aligned} v_1(0) &= 1, v_1'(0) = 0, v_1''(0) = 0, v_1'''(0) = 0, \\ v_2(0) &= 0, v_2'(0) = 1, v_2''(0) = 0, v_2'''(0) = 0, \\ v_3(0) &= 0, v_3'(0) = 0, v_3''(0) = 1, v_3'''(0) = 0, \end{aligned}$$

başlangıç koşullarını sağlayan $v_1(x), v_2(x), v_3(x)$ çözümlerini gözönüne alalım. $v_1(x), v_2(x), v_3(x)$ çözümleri lineer bağımsızdır ve Wronskiyenleri 1 e eşittir. L_0 operatörünün indis defekti (3,3) olduğundan

$$v_1, v_2, v_3 \in L_2(0, \infty)$$

dir.

$\Gamma_1, \Gamma_2 : D \rightarrow \mathbb{C}^3$ lineer dönüşümlerini

$$[y, z]_x = [y'''(x)z(x) - y(x)z'''(x)] - [y''(x)z'(x) - y'(x)z''(x)] \quad (0 \leq x < \infty)$$

olmak üzere

$$\Gamma_1 f = \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ [f, v_3]_\infty \end{pmatrix}, \Gamma_2 y = \begin{pmatrix} f'''(0) \\ f''(0) \\ [f, v_2]_\infty \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

biçiminde tanımlayalım.

Lemma 5.2.1. $\forall y, z \in D$ için

$$(Ly, z)_{L^2} - (y, Lz)_{L^2} = (\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^3} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^3}$$

dır.

İspat. $\forall y, z \in D$ için Green formülünü uygularsak

$$(Ly, z)_{L^2} - (y, Lz)_{L^2} = [y, \bar{z}]_\infty - [y, \bar{z}]_0$$

dır.

$$\begin{aligned} (\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^3} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^3} &= y(0) \bar{z}'''(0) - \bar{z}(0) y'''(0) \\ &\quad + y''(0) \bar{z}'(0) - \bar{z}''(0) y'(0) \\ &\quad + [y, v_2]_\infty [\bar{z}, v_3]_\infty - [\bar{z}, v_2]_\infty [y, v_3]_\infty \end{aligned}$$

olur.

$$[y, v_2]_\infty [\bar{z}, v_3]_\infty - [\bar{z}, v_2]_\infty [y, v_3]_\infty = [y, \bar{z}]_\infty$$

olduğunu biliyoruz (Guseinov and Pashaev, 1983). Buradan

$$(\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^3} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^3} = [y, \bar{z}]_\infty - [y, \bar{z}]_0$$

olur. Öyleyse

$$(Ly, z)_{L^2} - (y, Lz)_{L^2} = (\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^3} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^3}.$$

Lemma 5.2.2. Keyfi $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{C}$ için öyle bir $y \in D$ fonksiyonu vardır ki aşağıdaki koşulları sağlar:

$$\begin{aligned} y(0) &= \alpha_0, \quad y'(0) = \alpha_1, \quad y''(0) = \alpha_2, \quad y'''(0) = \alpha_3 \\ [y, v_2]_\infty &= \beta_0, \quad [y, v_3]_\infty = \beta_1. \end{aligned} \quad (5.29)$$

İspat. Keyfi bir $f \in L_2(0, \infty)$ aşağıdaki koşulları sağlasın:

$$(f, v_2)_{L^2} = \beta_0 + \alpha_2, \quad (f, v_3)_{L^2} = \beta_1 - \alpha_1. \quad (5.30)$$

$f = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$ diyelim. (5.30) koşulları c_1, c_2, c_3 sabitlerinin denklem sistemidir ve determinantı v_1, v_2, v_3 , lineer bağımsız fonksiyonların Gram determinantıdır dolayısıyla sıfırdan farklıdır.

$y(x)$, $l(y) = f$ denkleminin $y(0) = \alpha_0$, $y'(0) = \alpha_1$, $y''(0) = \alpha_2$, $y'''(0) = \alpha_3$, koşullarını sağlayan bir çözümü olsun. Bu durumda $y(x)$ e Green formülü uygulanırsa

$$(f, v_j)_{L^2} = (l(y), v_j)_{L^2} = [y, v_j]_\infty - [y, v_j]_0, \quad j = 2, 3$$

olur. $l(v_j) = 0$ ($j = 2, 3$) idi. Ayrıca

$$\begin{aligned} y(0) &= \alpha_0, \quad y'(0) = \alpha_1, \\ y''(0) &= \alpha_2, \quad y'''(0) = \alpha_3 \end{aligned}$$

olduğundan

$$[y, v_j]_0 = \begin{cases} -\alpha_2, & j = 2 \text{ ise} \\ \alpha_1, & j = 3 \text{ ise} \end{cases}$$

dır. Buradan

$$(f, v_2)_{L^2} = [y, v_2]_\infty + \alpha_2, \quad (f, v_3)_{L^2} = [y, v_3]_\infty - \alpha_1$$

olur. Sonuç olarak

$$[y, v_2]_\infty = \beta_0, [y, v_3]_\infty = \beta_1$$

elde edilir.

Teorem 5.2.3. (5.28) ile tanımlanan $(\mathbb{C}^3, \Gamma_1, \Gamma_2)$ üçlüsü L_0 operatörünün sınır değer uzayıdır.

İspat: Lemma 5.2.1 ve Lemma 5.2.2 sınır değer uzayının iki şartını sağlar.

Sonuç 1. K operatörü \mathbb{C}^3 üzerinde büzülme operatörü olduğunda L_0 operatörünün

$$(K - I) \Gamma_1 y + i(K + I) \Gamma_2 y = 0 \quad (5.31)$$

$$(K - I) \Gamma_1 y - i(K + I) \Gamma_2 y = 0 \quad (5.32)$$

koşullarını sağlayan $y \in D$ fonksiyonları kümesine kısıtlanışı sırasıyla maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemeleridir. Tersine L_0 operatörünün keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemeleri (5.31) ((5.32)) biçiminde gösterilebilir. K büzülme operatörü bağıntı ile tek türlü belirlenir. Eğer (5.31) ((5.32)) ifadesindeki K operatörü izometrik operatör olursa L_0 operatörünün maksimal simetrik genişlemesini, eğer K operatörü üniter olursa L_0 operatörünün kendine eş genişlemesini verir.

5.3.(4n,4n) İndis Defektli 4. Mertebeden Diferensiyel Operatörlerin Disipatif Genişlemeleri

E , n boyutlu bir Öklid uzayı olmak üzere

$$(u, v) = \int_0^\infty (u(t), v(t))_E dt$$

skaler çarpımı ile değerleri E de olan vektör değerli fonksiyonların kümesini $L_2((0, \infty); E)$ ile gösterelim. $Q(x) = Q^*(x)$, $[0, \infty)$ aralığı üzerinde matris

değerli sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$l(y) = y^{(4)} + Q(x)y, \quad 0 \leq x < \infty \quad (5.33)$$

4. mertebeden diferansiyel ifadesini ele alalım. $L_2((0, \infty); E)$ uzayında (5.33) ile üretilen minimal operatörün kapanışı L_0 (D_0 da tanım kümesi) olsun. $D = \{y \in L_2((0, \infty); E) : y', y'', y'''$ fonksiyonları $[0, \infty)$ üzerinde lokal mutlak sürekli ve $l(y) \in L_2((0, \infty); E)\}$ olsun. D maksimal L operatörünün tanım kümesidir ve $L = L_0^*$ dir.

$D_0 = \{y \in D : y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0, [y, z]_\infty = 0\}$ olsun. Burada her $z(x) \in D$ için

$$[y, z]_x = (y''', z)_E - (y, z''')_E - (y'', z')_E - (y', z'')_E \quad (0 \leq x < \infty)$$

dir.

$Q(x)$ öyle seçilsin ki L_0 operatörünün indis defekti $(4n, 4n)$ olsun. Buna göre $l(y) = \lambda y$ denklemi $L_2((0, \infty); E)$ ait $4n$ tane çözüme sahiptir. $l(y) = \lambda y$ denkleminin

$$\varphi_1(0, \lambda) = I, \varphi_1'(0, \lambda) = 0, \varphi_1''(0, \lambda) = 0, \varphi_1'''(0, \lambda) = 0,$$

$$\varphi_2(0, \lambda) = 0, \varphi_2'(0, \lambda) = I, \varphi_2''(0, \lambda) = 0, \varphi_2'''(0, \lambda) = 0,$$

$$\varphi_3(0, \lambda) = 0, \varphi_3'(0, \lambda) = 0, \varphi_3''(0, \lambda) = I, \varphi_3'''(0, \lambda) = 0,$$

$$\varphi_4(0, \lambda) = 0, \varphi_4'(0, \lambda) = 0, \varphi_4''(0, \lambda) = 0, \varphi_4'''(0, \lambda) = I,$$

başlangıç koşullarını sağlayan $\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda), \varphi_3(x, \lambda), \varphi_4(x, \lambda)$ çözümlerini gözönüne alalım.

$$v_1(x) = \varphi_1(x, 0), v_2(x) = \varphi_2(x, 0), v_3(x) = \varphi_3(x, 0), v_4(x) = \varphi_4(x, 0)$$

olmak üzere $y(x) = V(x)c = v_1(x)c_1 + v_2(x)c_2 + v_3(x)c_3 + v_4(x)c_4, c_1, c_2, c_3, c_4 \in$

E olsun $y(x) \in L_2((0, \infty); E)$ ve $y(x) \in D$ dir.

$$U(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) & v_3(x) & v_4(x) \\ v'_1(x) & v'_2(x) & v'_3(x) & v'_4(x) \\ v''_1(x) & v''_2(x) & v''_3(x) & v''_4(x) \\ v'''_1(x) & v'''_2(x) & v'''_3(x) & v'''_4(x) \end{pmatrix}$$

tanımlayalım.

$$J = i \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

olsun. $J = -J^*$ ve $J^2 = -I$ dir. $U^T J U = J$ olduğu açıktır.

Lemma 5.3.1. $W y(x) = U^{-1} \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y'''(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}$ ve \tilde{P} , E^4 nin E^2 altuzayı üzerine

ortogonal izdüşüm operatörü olmak üzere her $y(x) \in D$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{P}(W y)(x) = \tilde{P}(W y)(\infty) \quad (5.34)$$

limiti vardır. Özel olarak $y(x) = V(x)c$ ($c \in E^2$) ise

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (W y)(x) = (W y)(\infty) \in E^2 \quad (5.35)$$

limiti vardır.

İspat. $y, z \in D$ için Green formülünü uygularsak

$$(Ly, z) - (y, Lz) = [y, z]_\infty - [y, z]_0$$

$y(x) = V(x)c$ ($c \in E^2$) $z \in D$ için

$$\begin{aligned}
[y, z]_x &= \left(J \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y'''(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z(x) \\ z'(x) \\ z'''(x) \\ z''(x) \end{pmatrix} \right) = \left(JU(x)c, \begin{pmatrix} z(x) \\ z'(x) \\ z'''(x) \\ z''(x) \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(c, J^2 U^*(x) J \begin{pmatrix} z(x) \\ z'(x) \\ z'''(x) \\ z''(x) \end{pmatrix} \right) = \left(c, U^{-1}(x) \begin{pmatrix} z(x) \\ z'(x) \\ z'''(x) \\ z''(x) \end{pmatrix} \right) \\
&= (Jc, (Wz)(x)) = \left(\tilde{P}Jc, (Wz)(x) \right) = \left(Jc, \tilde{P}(Wz)(x) \right)_{E^4}
\end{aligned}$$

Öyle ise $\tilde{P}(Wz)(x) \in E^2$ dir. Jc keyfi olduğundan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{P}(Wz)(x) = \tilde{P}(Wz)(\infty) \in E^2$$

dir. Özel olarak $y(x) = V(x)c$ ($c \in E^2$) ise $(Wz)(x) \in E^2$ ve buradan (5.35) elde edilir.

Teorem 5.3.2. I_{2n}, E^2 de özdeşlik operatörü olsun.

$$P_1 = (I_{2n}, 0_{2n}), P_2 = (0_{2n}, I_{2n}) : E^4 \rightarrow E^2$$

ortogonal dönüşüm olsun. $S_1, S_2 : D \rightarrow E^2$ lineer dönüşümlerini

$$S_1 y = (P_1 W y)(\infty), S_2 y = (P_2 W y)(\infty)$$

ile tanımlayalım.

$$\Gamma_1, \Gamma_2 : D \rightarrow E^4$$

lineer dönüşümlerini

$$\Gamma_1 y = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ S_1 y \end{pmatrix}, \Gamma_2 y = \begin{pmatrix} y'''(0) \\ y''(0) \\ S_2 y \end{pmatrix}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda

$$(L^* y, z) - (y, L^* z) = (\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{E^4} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{E^4}$$

olur.

İspat.

$$(L^* y, z) - (y, L^* z) = [y, z]_\infty - [y, z]_0$$

dir.

$$(\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{E^4} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{E^4} = (S_1 y, S_2 z)_{E^2} - (S_2 y, S_1 z)_{E^2} - [y, z]_0$$

olur.

$$\begin{aligned} (S_1 y, S_2 z)_{E^2} - (S_2 y, S_1 z)_{E^2} &= (P_1(Wy)(x), P_2(Wz)(x))_{E^2} \\ &\quad - (P_2(Wy)(x), P_1(Wz)(x))_{E^2} \\ &= ((P_2^* P_1 - P_1^* P_2)(Wy)(x), (Wz)(x))_{E^4} \end{aligned}$$

dir.

$$P_2^* P_1 - P_1^* P_2 = J$$

olduğundan

$$(S_1 y, S_2 z)_{E^2} - (S_2 y, S_1 z)_{E^2} = (J(Wy)(x), (Wz)(x))_{E^4}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(JU^{-1}(x) \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y'''(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}, U^{-1}(x) \begin{pmatrix} z(x) \\ z'(x) \\ z'''(x) \\ z''(x) \end{pmatrix} \right)_{E^4} \\
&= \left(JU^{-1}(x) \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y'''(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}, -JU^*J(x) \begin{pmatrix} z(x) \\ z'(x) \\ z'''(x) \\ z''(x) \end{pmatrix} \right)_{E^4} \\
&= \left(JUJ^2U^{-1}(x) \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y'''(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z(x) \\ z'(x) \\ z'''(x) \\ z''(x) \end{pmatrix} \right)_{E^4} \\
&= \left(J \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y'''(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z(x) \\ z'(x) \\ z'''(x) \\ z''(x) \end{pmatrix} \right)_{E^4} \\
&= [y, z]_{\infty}
\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
(\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{E^4} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{E^4} &= (S_1 y, S_2 z)_{E^2} - (S_2 y, S_1 z)_{E^2} - [y, z]_0 \\
&= [y, z]_{\infty} - [y, z]_0
\end{aligned}$$

olur. İspat tamamlanır. Şimdi sınır değer uzayının (ii) koşulunu ispatlayalım.

$h = h_1 \oplus h_2 \oplus h_3$, $g = g_1 \oplus g_2 \oplus g_3$ $E \oplus E \oplus E^2$ de iki vektör olsunlar. ψ, ϕ (5.33) denkleminin aşağıdaki koşulları sağlayan iki çözümü olsunlar:

$$\phi(0) = h_1, \phi'(0) = h_2, \phi'''(0) = g_1, \phi''(0) = g_2$$

$$(S\psi)(\infty) = P_1^* h_3 + P_2^* g_3.$$

Açıktır ki

$$\begin{aligned} P_1^*P_1 + P_2P_2^* &= I_{E^4}, \quad P_2^*P_1 - P_1^*P_2 = J, \\ P_2JP_1^* &= -P_1JP_2^* = I_{E^2}, \\ P_1JP_1^* &= P_2JP_2^* = 0 \end{aligned}$$

dir. Buna göre

$$P_1(S\psi)(\infty) = P_1P_1^*h_3 + P_1P_2^*g_3 = P_2JP_1^*h_3 + P_2JP_2^*g_3 = h_3$$

$$P_2(S\psi)(\infty) = P_2P_1^*h_3 + P_2P_2^*g_3 = -P_1JP_1^*h_3 - P_1JP_2^*g_3 = g_3$$

dir. $0 \leq f_1(t), f_2(t) \in C_0^\infty$, $f_1(t) + f_2(t) = 1$ ve f_2 sıfırın komşuluğunda bire eşit, kompakt dayanaklı fonksiyon olsun.

$$y(x, \lambda) = f_1(x)\phi(x, \lambda) + f_2(x)\psi(x, \lambda)$$

olsun. Bu durumda $y \in D(L^*)$ ve $\Gamma_1 y = h, \Gamma_2 y = g$ olur. Sonuç olarak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 5.3.3. $(E^4, \Gamma_1, \Gamma_2)$ uzayı L_0 operatörünün sınır değer uzayıdır.

Sonuç 5.3.4. K operatörü E^4 üzerinde büzülme operatörü olduğunda

$$(K - I)\Gamma_1 y + i(K + I)\Gamma_2 y = 0 \quad (5.36)$$

$$(K - I)\Gamma_1 y - i(K + I)\Gamma_2 y = 0 \quad (5.37)$$

denklemleri ile verilen lineer bağıntılar sırasıyla L_0 operatörünün maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemeleridir. Tersine L_0 operatörünün keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemeleri (5.36) (5.37) biçiminde gösterilebilir. K büzülme operatörü bağıntı ile tek türlü belirlenir.

Eğer K operatörü üniter olursa bu sınır koşulları kendine eş genişlemeyi verir.

Bu durumda C operatörü, E^4 uzayı üzerinde kendine eş operatör olmak üzere

$$(\cos C) \Gamma_2 y - (\sin C) \Gamma_1 y = 0$$

koşulu (5.36) koşuluna denktir.

5.4. $(2n+k, 2n+k)$ İndis Defektli 4. Mertebeden Diferensiyel Operatörlerin Disipatif Genişlemeleri

E , n boyutlu bir Öklid uzayı olmak üzere

$$(u, v) = \int_0^\infty (u(t), v(t))_E dt$$

skaler çarpımı ile değerleri E de olan vektör değerli fonksiyonların kümesini $L_2((0, \infty); E)$ ile gösterelim. $Q(x) = Q^*(x)$, $[0, \infty)$ aralığı üzerinde matris değerli sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$l(y) = y^{(4)} + Q(x)y, \quad 0 \leq x < \infty \quad (5.38)$$

4. mertebeden diferansiyel ifadesini ele alalım. $L_2((0, \infty); E)$ uzayında (5.38) ile üretilen minimal operatörün kapanışı L_0 (D_0 da tanım kümesi) olsun. $D = \{y \in L_2((0, \infty); E) : y', y'', y''' \text{ fonksiyonları } [0, \infty) \text{ üzerinde lokal mutlak sürekli ve } l(y) \in L_2((0, \infty); E)\}$ olsun. D maksimal L operatörünün tanım kümesidir ve $L = L_0^*$ dir.

$D_0 = \{y \in D : y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0, [y, z]_\infty = 0\}$ olsun. Burada her $z(x) \in D$ için

$$[y, z]_x = (y''', z)_E - (y, z''')_E - (y'', z')_E - (y', z'')_E \quad (0 \leq x < \infty)$$

dir.

$Q(x)$ öyle seçilsin ki L_0 operatörünün indis defekti $1 \leq k \leq 2n$ olmak üzere $(2n+k, 2n+k)$ olsun. bu durumda L_0 operatörünün en azından bir $a \in (-\infty, \infty)$

reguler tip noktası olduğunu varsayalım. Buna göre

$$l(y) = ay$$

denklemini $L_2((0, \infty); E)$ uzayına ait $2n + k$ tane çözüme sahiptir.

$l(y) = \lambda y$ denkleminin

$$\varphi_1(0, \lambda) = I, \varphi_1'(0, \lambda) = 0, \varphi_1''(0, \lambda) = 0, \varphi_1'''(0, \lambda) = 0,$$

$$\varphi_2(0, \lambda) = 0, \varphi_2'(0, \lambda) = I, \varphi_2''(0, \lambda) = 0, \varphi_2'''(0, \lambda) = 0,$$

$$\varphi_3(0, \lambda) = 0, \varphi_3'(0, \lambda) = 0, \varphi_3''(0, \lambda) = I, \varphi_3'''(0, \lambda) = 0,$$

$$\varphi_4(0, \lambda) = 0, \varphi_4'(0, \lambda) = 0, \varphi_4''(0, \lambda) = 0, \varphi_4'''(0, \lambda) = I,$$

başlangıç koşullarını sağlayan $\varphi_1(x, \lambda)$, $\varphi_2(x, \lambda)$, $\varphi_3(x, \lambda)$, $\varphi_4(x, \lambda)$ çözümlerini gözönüne alalım.

$L_0^{(0)}$, $y(0) = y'(0) = 0, [y, z]_\infty = 0$ sınır koşulları ile (5.38) den üretilen simetrik operatör olsun. İndis defekti (k, k) dir. $L_0 \subset L_0^{(0)}$, $(L_0^{(0)})^* \subset L$ dir. $(L_0^{(0)})^*$ operatörünün tanım kümesi $\{y \in D : y(0) = y'(0) = 0\}$ dir. $l(y) = \lambda y$ denkleminin $D((L_0^{(0)})^*)$ a ait bir çözümü

$$y(x, \lambda) = \varphi_3(x, \lambda) c_1 + \varphi_4(x, \lambda) c_2, \quad c_1, c_2 \in E$$

biçimindedir. $L_0^{(0)}$ operatörünün indis defekti (k, k) olduğundan $l(y) = ay$ denklemini $D((L_0^{(0)})^*)$ a ait k tane $y_j(x, \lambda)$ ($j = 1, \dots, k$) çözüme sahiptir. Bu çözümler

$$y_j(x, \lambda) = \varphi_3(x, \lambda) c_{1j} + \varphi_4(x, \lambda) c_{2j}, \quad c_{1j}, c_{2j} \in E$$

dir. $y_j(x, \lambda)$ ler lineer bağımsız olduklarından c_{ij} ($i = 1, 2, j = 1, \dots, k$) ler E nin $E_k^{(1)}$ k boyutlu alt uzayını geren lineer bağımsız elemanlardır.

(5.38) ifadesi ve $y''(0) = y'''(0) = 0, [y, z]_\infty = 0$ sınır koşulları ile üretilen simetrik operatör $L_0^{(1)}$ ile gösterelim. $L_0^{(1)}$ in indis defekti (k, k) dir. Ayrıca $L_0 \subset$

$L_0^{(1)}, (L_0^{(1)})^* \subset L$ dir. $(L_0^{(1)})^*$ operatörünün tanım kümesi

$$\{y \in D : y''(0) = y'''(0) = 0\}$$

dir. $l(y) = \lambda y$ denkleminin $D(L_0^{(1)})^*$ a ait çözümleri

$$y_j(x, \lambda) = \varphi_1(x, \lambda) c_1 + \varphi_2(x, \lambda) c_2, \quad c_1, c_2 \in E$$

dir. $L_0^{(1)}$ operatörünün indis defekti (k, k) olduğundan $l(y) = ay$ denkleminin $D(L_0^{(1)})^*$ a ait $y_j(x, \lambda)$ ($j = 1, \dots, k$) lineer bağımsız çözümleri vardır. Bu çözümler

$$y_j(x, \lambda) = \varphi_1(x, \lambda) c_{1j} + \varphi_2(x, \lambda) c_{2j}, \quad c_{1j}, c_{2j} \in E$$

dir. $y_j(x, \lambda)$ vektörleri lineer bağımsız olduklarından c_{1j}, c_{2j} ler lineer bağımsızdır ve E nin $E_k^{(2)}$ alt uzayını geren elemanlarıdır. $E_k^{(1)} = E_k^{(2)} = E_k$ ($\dim E_k = k$) olduğu açıktır.

$$v_1(x) = \varphi_1(x, 0), \quad v_2(x) = \varphi_2(x, 0), \quad v_3(x) = \varphi_3(x, 0), \quad v_4(x) = \varphi_4(x, 0)$$

olmak üzere

$$y(x) = V(x)c = v_1(x)c_1 + v_2(x)c_2 + v_3(x)c_3 + v_4(x)c_4, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in E_k$$

olsun. $y \in L_2((0, \infty); E)$ ve $y \in D$ dir.

$$U(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) & v_3(x) & v_4(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) & v_3'(x) & v_4'(x) \\ v_1''(x) & v_2''(x) & v_3''(x) & v_4''(x) \\ v_1'''(x) & v_2'''(x) & v_3'''(x) & v_4'''(x) \end{pmatrix}$$

tanımlayalım.

$$J = i \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

olsun. $J = -J^*$ ve $J^2 = -I$ dir. $U^T J U = J$ olduğu açıktır.

Lemma 5.4.1. $W y(x) = U^{-1} \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y'''(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}$ ve \tilde{P} , E^4 nin E_k altuzayı üzerine

ortogonal izdüşüm operatörü olmak üzere her $y(x) \in D$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{P}(W y)(x) = \tilde{P}(W y)(\infty) \quad (5.39)$$

limiti vardır. Özel olarak $y(x) = V(x)c$ ($c \in E_k$) ise

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (W y)(x) = (W y)(\infty) \in E_k \quad (5.40)$$

limiti vardır.

İspat. $y, z \in D$ için Green formülünü uygularsak

$$(Ly, z) - (y, Lz) = [y, z]_\infty - [y, z]_0$$

$y(x) = V(x)c$ ($c \in E_k$) $z \in D$ için

$$\begin{aligned} [y, z]_x &= \left(J \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y'''(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z(x) \\ z'(x) \\ z'''(x) \\ z''(x) \end{pmatrix} \right) = \left(J U(x)c, \begin{pmatrix} z(x) \\ z'(x) \\ z'''(x) \\ z''(x) \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(c, J^2 U^*(x) J \begin{pmatrix} z(x) \\ z'(x) \\ z'''(x) \\ z''(x) \end{pmatrix} \right) = \left(c, U^{-1}(x) \begin{pmatrix} z(x) \\ z'(x) \\ z'''(x) \\ z''(x) \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$= (Jc, (Wz)(x)) = \left(\tilde{P}Jc, (Wz)(x) \right) = \left(Jc, \tilde{P}(Wz)(x) \right)_{E^4}$$

Öyle ise $\tilde{P}(Wz)(x) \in E_k$ dir. Jc keyfi olduğundan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{P}(Wz)(x) = \tilde{P}(Wz)(\infty) \in E_k$$

dir. Özel olarak $y(x) = V(x)c$ ($c \in E_k$) ise $(Wz)(x) \in E_k$ ve buradan (5.40) elde edilir.

Teorem 5.4.2. I_k, E_k uzayı üzerinde özdeşlik operatörü olsun.

$$P_1 = (I_k, 0_k), P_2 = (0_k, I_k) : E^4 \rightarrow E_k$$

ortogonal dönüşüm olsun. $S_1, S_2 : D \rightarrow E_k$ lineer dönüşümleri

$$S_1y = (P_1Wy)(\infty), S_2y = (P_2Wy)(\infty)$$

ile tanımlayalım. $\Gamma_1, \Gamma_2 : D \rightarrow E \oplus E \oplus E_k$ lineer dönüşümleri

$$\Gamma_1y = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ S_1y \end{pmatrix}, \Gamma_2y = \begin{pmatrix} y'''(0) \\ y''(0) \\ S_2y \end{pmatrix}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda

$$(L^*y, z) - (y, L^*z) = (\Gamma_1y, \Gamma_2z)_{E \oplus E \oplus E_k} - (\Gamma_2y, \Gamma_1z)_{E \oplus E \oplus E_k}$$

olur.

İspat.

$$(L^*y, z) - (y, L^*z) = [y, z]_\infty - [y, z]_0$$

dir.

$$(\Gamma_1y, \Gamma_2z)_{E \oplus E \oplus E_k} - (\Gamma_2y, \Gamma_1z)_{E \oplus E \oplus E_k} = (S_1y, S_2z)_{E_k} - (S_2y, S_1z)_{E_k} - [y, z]_0$$

olur.

$$\begin{aligned}
(S_1y, S_2z)_{E_k} - (S_2y, S_1z)_{E_k} &= (P_1(Wy)(x), P_2(Wz)(x))_{E_k} \\
&\quad - (P_2(Wy)(x), P_1(Wz)(x))_{E_k} \\
&= ((P_2^*P_1 - P_1^*P_2)(Wy)(x), (Wz)(x))_{E^4}
\end{aligned}$$

dir.

$$P_2^*P_1 - P_1^*P_2 = J$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
(S_1y, S_2z)_{E_k} - (S_2y, S_1z)_{E_k} &= (J(Wy)(x), (Wz)(x))_{E^4} \\
&= \left(JU^{-1}(x) \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y'''(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}, U^{-1}(x) \begin{pmatrix} z(x) \\ z'(x) \\ z'''(x) \\ z''(x) \end{pmatrix} \right)_{E^4} \\
&= \left(JU^{-1}(x) \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y'''(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}, -JU^*J(x) \begin{pmatrix} z(x) \\ z'(x) \\ z'''(x) \\ z''(x) \end{pmatrix} \right)_{E^4} \\
&= \left(JUJ^2U^{-1}(x) \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y'''(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z(x) \\ z'(x) \\ z'''(x) \\ z''(x) \end{pmatrix} \right)_{E^4} \\
&= \left(J \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y'''(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z(x) \\ z'(x) \\ z'''(x) \\ z''(x) \end{pmatrix} \right)_{E^4} = [y, z]_{\infty}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} (\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{E \oplus E \oplus E_k} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{E \oplus E \oplus E_k} &= (S_1 y, S_2 z)_{E_k} - (S_2 y, S_1 z)_{E_k} - [y, z]_0 \\ &= [y, z]_\infty - [y, z]_0 \end{aligned}$$

olur bu da ispatı tamamlar.

$h = h_1 \oplus h_2 \oplus h_3, g = g_1 \oplus g_2 \oplus g_3, E \oplus E \oplus E_k$ uzayında iki vektör olsunlar. ψ, ϕ fonksiyonları (5.38) denkleminin aşağıdaki koşulları sağlayan iki çözümü olsunlar:

$$\phi(0) = h_1, \phi'(0) = h_2, \phi'''(0) = g_1, \phi''(0) = g_2$$

$$(S\psi)(\infty) = P_1^* h_3 + P_2^* g_3.$$

Açıktır ki

$$P_1^* P_1 + P_2 P_2^* = I, P_2^* P_1 - P_1^* P_2 = J,$$

$$P_2 J P_1^* = -P_1 J P_2^* = I,$$

$$P_1 J P_1^* = P_2 J P_2^* = 0$$

dir. Buna göre

$$P_1 (S\psi)(\infty) = P_1 P_1^* h_3 + P_1 P_2^* g_3 = P_2 J P_1^* h_3 + P_2 J P_2^* g_3 = h_3$$

$$P_2 (S\psi)(\infty) = P_2 P_1^* h_3 + P_2 P_2^* g_3 = -P_1 J P_1^* h_3 - P_1 J P_2^* g_3 = g_3$$

dir. $0 \leq f_1(t), f_2(t) \in C_0^\infty, f_1(t) + f_2(t) = 1$ ve f_2 sıfır komşuluğunda bire eşit, kompakt supportlu fonksiyon olsun.

$$y(x, \lambda) = f_1(x) \phi(x, \lambda) + f_2(x) \psi(x, \lambda)$$

olsun. Bu durumda $y \in D(L^*)$ ve $\Gamma_1 y = h, \Gamma_2 y = g$ olur. Sonuç olarak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 5.4.3. $(E \oplus E \oplus E_k, \Gamma_1, \Gamma_2)$ L_0 operatörünün sınır değer uzayıdır.

Sonuç 5.4.5. K operatörü $E \oplus E \oplus E_k$ uzayı üzerinde büzülme operatörü olduğunda

$$(K - I) \Gamma_1 y + i(K + I) \Gamma_2 y = 0 \quad (5.41)$$

$$(K - I) \Gamma_1 y - i(K + I) \Gamma_2 y = 0 \quad (5.42)$$

denklemleri ile verilen lineer bağıntılar sırasıyla L_0 operatörünün maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemeleridir. Tersine L_0 operatörünün keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemeleri (5.41) ((5.42)) biçiminde gösterilebilir. K büzülme operatörü bağıntı ile tek türlü belirlenir.

Eğer K operatörü üniter olursa bu sınır koşulları kendine eş genişlemeyi verir. Bu durumda C , $E \oplus E \oplus E_k$ uzayı üzerinde kendine eş operatör olmak üzere

$$(\cos C) \Gamma_2 y - (\sin C) \Gamma_1 y = 0$$

koşulu (5.41) koşuluna denktir.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada $y^{(4)} + Q(x)y$ dördüncü mertebeden diferansiyel operatörünün çeşitli indis defekte sahip olduğu durumlarda sınır değer uzayı oluşturuldu ve operatörün maksimal disipatif, akretif, kendine eş genişlemeleri sınır koşulları cinsinden ifade edildi.

Bu çalışma Allahverdiev (1991a) in çalışmasına benzer olarak geliştirilebilir. Allahverdiev (1991a), çalışmasında limit çember durumunda disipatif Schrödinger operatörün kendine eş dilatasyonunu kurup karakteristik fonksiyonunu hesaplamıştır. Buradan disipatif operatörlerin öz fonksiyonlarının tamlığını ispatlamıştır. Allahverdiev (1991a) in çalışmasındaki operatörü 4. mertebeden operatör alınarak disipatif operatörün kendine eş dilatasyonu kurulabilir. Karakteristik fonksiyon hesaplanabilir. Öz fonksiyonların tamlığı ispatlanabilir.

7. KAYNAKLAR

- Akhiezer, N.I., and Glazman, I.M., 1963. Theory of Linear Operators in Hilbert Space, 364. New York.
- Atkinson, F. V., 1964. Discrete and Continuous Boundary Value Problems Academic Press, 570. New York
- Allahverdiev, B.P., 1991*a*. On dilation theory and spectral analysis of dissipative Schrödinger operators in Wey's limit circle case, Math. USSR Izvestiya 36, no.2, 247 – 262.
- Allahverdiev, B.P., 1991*b*. Selfadjoint and nonselfadjoint extensions of a symmetric operator generated by an infinite Jacobi matrix. (Russian) Mat. Zametki 50 no. 5, 3 – 8, 159; translation in Math. Notes 50(1991), no. 5 – 6, 1093 – 1097.
- Allahverdiev, B.P., 1995*a*. On selfadjoint and nonselfadjoint extensions of a Schrödinger-type symmetric operator with a matrix potential. (Russian) Akad. Nauk Azerb. Ser. Fiz.-Tekh. Mat. Nauk 17 (1996), no. 1 – 3, Izv. Mat. i Mekh., 31 – 35.
- Allahverdiev, B.P., 1995*b*. On extensions of symmetric Schrödinger operators with a matrix potential, Izvest. Ross. Akad. Nauk. Ser. Math. 59, 19 – 54; English transl. Izv. Math. 59, 45 – 62.
- Bairamogly, M., 1976. Self-adjoint extensions of an operator equation with a singularity, Izu. Akad. Nauk Azerb. SSR Ser. Fiz-Tekhn. Mat. Nauk 2, 140 – 143.
- Birman, M.Sh., 1956. On the theory of self-adjoint extensions of positive definite operators' Mat. Sb.38 , 431 – 450.
- Bruck, V.M., 1976. On a class of boundary –value problems with a spectral parameter in the boundary conditions, Mat. Sb.,100, 210 – 216.

- Coddington, E. A. and Levinson, N., 1955. Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, 429. New York.
- Dunford, N. and Schwartz, J. T., 1964. Linear Operators, Part II, Interscience, 1040. New York.
- Fulton, C.T., 1977. Parametrization of Titchmarsh's $m(\lambda)$ – functions in the limit circle case, Trans. Amer. Math. Soc. 229, 51 – 63.
- Fulton, C.T., 1989. The Bessel-squared equation in the lim-2, lim-3, and lim-4 cases, Quart. J. Math. Oxford (2), 40, 423 – 456.
- Glazman, I., 1965. Direct Methods of Qualitative Spectral Analysis of Singular Differential Operators. Isreal Program for Scientific Translations, 234. Jerusalem.
- Gorbachuk, M.L. and Mikhailets V. A., 1972. The spectrum of self-adjoint extensions of the minimal operator generated by the Sturm-Liouville equation with operator potential', Ukrain. Mat. Zh.24, 726 – 734; English transl. in Ukrainian Math. J. 24(1972), 582 – 588.
- Gorbachuk, M.L, Kochubei, A.N. and Rybak M.A., 1972. Dissipative extensions of differential operators in a space of vector-valued functions', Dokl. Akad .Nauk SSSR 205, 1029 – 1032; English transl., Soviet Math. Dokl. 13(1972), 1063 – 1067.
- Gorbachuk, M.L. and Mikhailets V. A., 1976. Semibounded self-adjoint extensions of symmetric operators, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 226, 765 – 768; English transl., Soviet Math.Dokl.17 : 1, (1976)185 – 187.
- Gorbachuk, M.L., Gorbachuk, V.I. and Kochubei A.N., 1989. The theory of extensions of symmetric operators and boundary-value problems for differential equations', Ukrain. Mat. Zh. 41, 1299 – 1312; English transl. in Ukrainian Math. J. 41(1989), 1117 – 1129.

- Gorbachuk, M.L. and Gorbachuk, V.I., 1991. Boundary Value Problems for Operator Differential Equations, Naukova Dumka, Kiev, 1984; English transl. Birkhauser Verlag.
- Guseĭnov, I. M. and Pashaev, R. T. 1983. Description of selfadjoint extensions of a class of differential operators of order $2n$ with defect indices $(n + k, n + k)$, $0 < k < n$. *Izv.Akad.Nauk Azerb. Ser. Fiz. Tekh. Mat. Nauk*, No.2, (1983), 15 – 19 (in Russian).
- Hartman, P., 1964. Ordinary Differential Equations, Wiley, 613. New York.
- Jorgens, K., 1964. Spectral Theory of Second-Order Ordinary Differential Operators, Aarhus, 198. Denmark.
- Kholkin, A.M., 1980. Self-adjoint boundary conditions at-infinity for absolutely indefinite system of differential equations of arbitrary order, Manuscript deposited at the All-union Institute for Scientific and Technical information no: 4801 – 80, pp. 23. (Russian)
- Kochubei, A. N., 1975. Extensions of symmetric operators and symmetric binary relations, *Mat. Zametki* 17, 41 – 48; English transl. in *Math. Notes* 17(1975), 25 – 28.
- Krein, M.G., 1947. The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded operators and its applications.' I, *Mat. Sb.* 20, 431 – 495; II, *Mat. Sb.* 21 (1947), 365 – 404
- Krein, M.G., 1952. On the indeterminate case of the Sturm-Liouville boundary-value problem in the interval $(0, \infty)$ ', *Akad. Nauk SSSR Ser Mat.* 16, 292 – 324
- Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis With Applications, Wiley, 681. New York.
- Kuzhel, A.V., 1996. Characteristics Functions and Models of Nonselfadjoint Ope-

- rators, Kluwer Academic Publisher, 273. Boston, London.
- Kuzhel, A.V., 1980. Regular extensions of Hermitian operators', Dokl. Akad. Nauk SSSR 251, 30 – 33; English transl., Soviet Math. Dokl. 21 : 2(1980), 370 – 373.
- Levitan, B. and Sargsjan, I. 1975. Introduction to Spectral Theory: Self-Adjoint Ordinary Differential Operators. AMS Translations of Math. Monographs 39. American Math. Soc., 525. Rhode Island.
- Lyantse, V.E. and Storozh, O.G., 1983. Methods of the theory of unbounded operators, Naukova Dumka, 211. Kiev.
- Maksudov, F.G., and Allahverdiev, B.P., 1993. On the Spectral Theory of Non-self-adjoint Second-Order Difference Operators with Matrix Coefficients, Russian Acad. Sci Dokl. Math Vol.47 No. 1, 146 – 149.
- Mikhailets, V.A., 1980. Spectra of operators and boundary-value problems, pp. 106 – 131, in: Spectral analysis of differential operators, Akad. Nauk. Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev, 106 – 131 .
- Naimark, M.A., 1968. Linear Differential Operators, 2nd edn., Naua, Moscow, 1969, English transl. of 1st. edn., Harrap, 492. London.
- Von Neumann, J., 1929. Allgemeine Eigenwertheorie Hermitescher Functionaloperatoren, Math. Ann. 102, 49 – 131.
- Philips, R.S., 1959. Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations', Trans. Amer. Math. Soc. 90, 193 – 254; Russian transl. In Matematika 6 : 4(1962)11 – 70.
- Rellich, F., 1951. Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung', Math. Ann. 122, 343 – 368.
- Rofe-Beketov, F.S., 1969. Self-adjoint extensions of differential operators in a

- space of vector valued functions, Dokl. Akad. Nauk SSSR 184, 1034 – 1037; English transl. in Soviet Math. Dokl. 10(1969), 188 – 192.
- Rofe-Beketov, F. S. and Kholkin A. M., 2005. Spectral Analysis of Differential Operators: Interplay between Spectral and Oscillatory Properties. World Scientific Monograph Series in Math. 7. World Scientific, 438. Hackensack.
- Stone, M.M., 1932. Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis, Vol.15. Amer.Math.Soc.Coll.Pub.
- Titchmarsh, E.C., 1946. Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Equations *I*, 2nd edn., Oxford Univ. Pres., 175. London
- Vainerman, L.I. , 1980. Extensions of closed operators in Hilbert space, Mat. Zametki 28, 833 – 841; English transl. in Math. Notes 28(1980), 871 – 875.
- Vishik, M.I., 1952. On general boundary-value problems for elliptic differential equations', Trudy Moskov. Mat Obshch 1, 187 – 246.
- Weidmann, J., 1980. Spectral Theory of Ordinary Differential Operators, Springer Verlag, 303. New York.
- Weyl, H., 1910. Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Functionen, Math. Ann., 68, 222 – 269.
- Zettl, A, 2005. Sturm-Liouville Theory. Math. Surveys & Monographs 121. American Math. Soc., 328. Rhode Island.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hüseyin Tuna
Doğum Yeri ve Yılı : Atabey, 1978
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce



Eğitim Durumu :

Lise : Isparta Gülkent Lisesi, 1991-1994
Lisans : Balıkesir Üniversitesi, 1994-1998
Yüksek Lisans : Süleyman Demirel Üniversitesi, 2001-2004

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

- 1) Senirkent İ.H.Ö. İşitme Engelliler Meslek Lisesi (2000-2005)
- 2)) Mustafa Kaçkoç Anadolu Lisesi (2006-)