EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(DOKTORA TEZİ)

ASAL HALKALARIN TEK YANLI İDEALLERİ ÜZERİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ BAZI ÖZDEŞLİKLER

Çağrı DEMİR

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Nurcan ARGAÇ

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 403.03.01
Sunuş Tarihi: 01.07.2011

Bornova-İZMİR
2011

Çağrı DEMİR tarafından **doktora** tezi olarak sunulan "**Asal Halkaların Tek Yanlı İdealleri Üzerinde Genelleştirilmiş Türevli Bazı Özdeşlikler**" başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve **01.07.2011** tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:		**İmza**
Jüri Başkanı	**: Prof. Dr. Hatice KANDAMAR**	....
Raportör Üye	**: Doç. Dr. Emine ALBAŞ**	....
Üye	**: Prof. Dr. Nurcan ARGAÇ**	....
Üye	**: Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU**	....
Üye	**: Prof. Dr. Neşet AYDIN**	....

ÖZET

ASAL HALKALARIN TEK YANLI İDEALLERİ ÜZERİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ BAZI ÖZDEŞLİKLER

DEMİR, Çağrı

Doktora Tezi, Matematik Bölümü
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Nurcan ARGAÇ
Temmuz 2011, 100 sayfa

Bu tez esas olarak altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde tez konusu tanıtılmış ve ilgili literatür kısaca özetlenmiştir. İkinci bölüm gerekli alt yapıya ve kafi düzeyde genelleştirilmiş polinom özdeşliği teorisine ayrılmıştır. Bu tezin ana çerçevesini oluşturan daha sonraki dört bölümde, asal halkaların tek yanlı idealleri üzerinde genelleştirilmiş türevleri ihtiva eden bazı özdeşlikler incelenmiştir.

Asal halkaların belirli türden dönüşümlerini ihtiva eden özdeşliklerin incelenmesindeki amaç bu özdeşliğe sahip halkanın yapısını karakterize etmek, yada bunun mümkün olmadığı durumlarda ise özdeşliğin ihtiva ettiği dönüşümlerin formunu belirlemektir.

Bu tez kapsamında göz önüne alınan özdeşlikler incelenirken, asal halkaların genelleştirilmiş ve diferansiyel özdeşlikleri teorisi ana araç olarak kullanılmıştır. Hem halkanın idealinin hem de bu özdeşliklerde ihtiva edilen genelleştirilmiş türevin mümkün olan en iyi betimlemesi verilmeye çalışılmıştır.

Tezin çıkarımları, literatürde iyi bilinen birçok sonucu ileri düzeyde bir genelliğe ulaştırmaktadır.

Anahtar sözcükler: Asal halka, genelleştirilmiş türev, maksimal sağ kesirler halkası, genelleştirilmiş polinom özdeşliği, diferansiyel özdeşlik.

ABSTRACT

SOME IDENTITIES OF PRIME RINGS WITH GENERALIZED DERIVATIONS ON ONE-SIDED IDEALS

DEMİR, Çağrı

PhD in Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Nurcan ARGAÇ
July 2011, 100 pages

This thesis essentially consists of six chapters. In the first chapter, the topic of the thesis is introduced and the corresponding literature is briefly outlined. The second chapter is devoted to necessary background and an adequate account of general GPI theory. Some identities of prime rings involving generalized derivations on one-sided ideals are examined in the subsequent four chapters which constitute the main frame of this thesis.

The goal of investigating identities involving certain types of mappings of prime rings is to characterize the structure of the ring admitting this identity, or, when this is not possible, to determine the form of the mappings those involved in the identity.

While studying the identities considered in the scope of this thesis, the theory of generalized and differential polynomial identities of prime rings is used as a main tool. It is striven to give the best possible characterization of both the ideal of the ring and of the generalized derivation involved in these identities.

The conclusions of the thesis extend most of the well known results in the literature at a high level of generality.

Key words: Prime ring, generalized derivation, maximal right ring of quotients, generalized polynomial identity, differential identity.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma boyunca her açıdan değerli görüşlerinden ve birikiminden faydalandığım danışman hocam Sayın Prof. Dr. Nurcan ARGAÇ'a, tez projesinin olgunlaşmasında ve neticelenmesinde değerli görüşlerini ve önerilerini esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU'na ve aynı zamanda ekip çalışmalarımızda deneyim, birikim ve fikirlerinden yararlandığım başta değerli hocam Sayın Doç. Dr. Emine ALBAŞ olmak üzere isimlerini buraya yazamadığım tüm ekip arkadaşlarıma, sağlamış oldukları katkılarından dolayı yürekten teşekkür ederim.

En başından beri her şartta desteğini esirgemeyen biricik yoldaşım ve aynı zamanda meslektaşım Emel ÜNVER DEMİR'e ve şimdi daha da büyümüş olan sevgili aileme göstermiş oldukları anlayıştan ve verdikleri eşsiz manevi destekten dolayı minnettarlıklarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$Z(R)$	R halkasının merkezi
$D(R)$	R halkasının yoğun sağ ideallerinin kümesi
$Ann_l(A)$	A'nın sağ sıfırlayanı
$Ann_r(A)$	A'nın sol sıfırlayanı
$\oplus$	Direkt toplam
$\otimes$	Tensör çarpım
$*$	Serbest çarpım
$Soc(R)$	R halkasının "socle"si
U	R halkasının sağ (sol) Utumi kesirler halkası
Q_r	R halkasının iki yanlı sağ Martindale kesirler halkası
Q_s	R halkasının simetrik Martindale kesirler halkası
C	R halkasının genişletilmiş merkezi
RC	R halkasının merkezi kapanışı
$K\{X\}$	X kümesi üzerindeki serbest K-cebir
$GF(q)$	q elemanlı Galois cismi
$[x,y]$	x ve y elemanlarının komütatör çarpımı

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

$ad(b)$	b elemanı ile belirli iç türev
$rank(r)$	r elemanının rankı
$End_R({}_R M)$	${}_R M$ sol R-modülünün sol R-homorfizmalarının kümesi
$M_n(D)$	D bölümlü halkası üzerindeki $n \times n$ matrisler halkası
a_l	a elemanı ile soldan çarpım
a_r	a elemanı ile sağdan çarpım

<u>Kısaltmalar</u>

GPI	Genelleştirilmiş polinom özdeşliği.
PI	Polinom özdeşliği.

1. GİRİŞ

Asal halkaların türevlerini ihtiva eden bazı özdeşliklerin cebirsel bir incelemesi ilk defa 1957 yılında Posner tarafından yapılmıştır (Posner, 1957). Bu çalışmada asal bir halkanın bileşkeleri de bir türev olan d_1 ve d_2 gibi iki türeve sahip olması problemi ele alınmıştır. Bu bağlamda problem, aslında her $x, y \in R$ için $d_1 d_2(xy) - d_1 d_2(x) y - x d_1 d_2(y) = 0$ özdeşliğini sağlayan asal halkaların ve türevlerinin incelenmesi problemidir. Posner, böyle bir özdeşliğin sağlanması durumunda halkanın karakteristiği 2 olmadıkça d_1 ve d_2 türevlerinden en az birinin sıfır türevi olması gerektiğini göstermiştir. Yine aynı çalışmada asal bir halkanın sıfırdan farklı merkezleyen bir d türevine sahip olması, yani her $x, y \in R$ için $[[d(x), x], y] = 0$ özdeşliğinin sağlanması, durumunda halkanın değişmeli olduğu sonucuna varılmıştır. Yukarıda bahsedilen özdeşliklerin her ikisi de aslında birer diferansiyel özdeşliktir. Özel olarak d, d_1 ve d_2 türevleri iç türevler olduğunda bu özdeşliklerin ikisi de birer genelleştirilmiş polinom özdeşliği olur.

Bahsettiğimiz bu sonuçlar, halkanın sağladığı bazı özdeşliklerin incelenmesi ile bazen halkanın, bazen de bu özdeşliğin ihtiva ettiği dönüşümlerin yapısı hakkında bir takım bilgiler toplanabileceğini göstermektedir. Posner'in ele aldığı özdeşliklerin incelenmesi bugün gelinen nokta itibariyle görece kolay olsa da alandaki gelişmeye yaptığı etki çok büyüktür. Zira takip eden 40 yıl içerisinde, yukarıdaki problemler ve benzerleri birçok matematikçi tarafından (yarı) asal halkalar kapsamında farklı açılardan ele alınmış ve başlarda değişmelilik teoremleri denilen birçok ilginç sonuç elde edilmiştir. Göz önüne alınan benzer nitelikteki bu ilk özdeşlikler halkanın endomorfizmaları, (α, β)-türevleri, yarı türevleri ve genelleştirilmiş türevleri gibi değişik türden dönüşümlerini ihtiva etmektedir (detaylar için bkz. Ashraf et al., 2006).

Yukarıda bahsettiğimiz gibi, özellikle değişmeli olmayan halkalar teorisinde karşılaşılan ve eleman bazında hesaplamaları içeren birçok problem, çoğunlukla genelleştirilmiş bir polinom özdeşliği (GPI) ile ifade edilebilir. 1965 yılında

Amitsur'un primitif GPI-halkaları üzerine yaptığı çalışmasıyla temelleri atılmış olan GPI teorisi, 1969 yılında Martindale tarafından asal GPI-halkalara genişletilmiştir. En önemli ilerlemelerden biri de 1970 yılında Kharchenko'nun asal halkaların türevlerini ve otomorfizmalarını ihtiva eden genelleştirilmiş polinom özdeşliklerini incelediği çalışmasıdır. Bu öncü ve yenilikçi çalışmaları izleyen, özellikle son 30 yıl içerisinde, asal GPI-halkaları teorisinde sağlanan ilerleme ile birlikte hem güçlü bir teknik alanın içerisine sokulmuş hem de aşikar olmayan birçok ilginç sonucun elde edilmesine olanak sağlanmıştır.

Bu çalışmadaki amacımız yukarıda bahsettiğimiz güçlü tekniği kullanarak literatürde var olan bazı sonuçları mümkün olduğunca ileri düzeyde bir genelliğe ulaştırmaktır. Tezde yer alan dört ana bölümün her birinde farklı bir özdeşlik ele alınacaktır. Bu özdeşliklerin her biri asal halkaların tek yanlı idealleri üzerinde genelleştirilmiş türevli özdeşlikler olacaktır. Her bölümün başında o bölümde ele alınacak problem tanıtılarak literatür özeti sunulacaktır.

2. ÖNBİLGİLER

2.1 Genel Bilgiler

Bu bölümde, tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak için halkalar teorisinde iyi bilinen bazı temel kavram ve sonuçlar hatırlatılacaktır.

Tanım 2.1.1 (Hungerford, 1974) R (birleşmeli) bir halka, ${}_RM$ bir sol R-modül olsun. $RM \neq (0)$ ve M'nin hiçbir öz alt modülü yoksa M'ye **basit (indirgenemez) modül** denir. R bir halka, $R^2 \neq (0)$ ve R'nin iki yanlı hiçbir öz ideali yoksa R'ye **basit halka** denir.

Yardımcı Özellik 2.1.1 (Herstein, 1976, Lemma 1.2.2) R birimli bir basit halka olsun. R'nin bir minimal sağ ideali varsa R bir Artin halkasıdır.

Tanım 2.1.2 (Hungerford, 1974) M, bir (sol) R-modül ve A, M'nin boştan farklı bir altkümesi olsun.

$$Ann_l(A) = \{r : r \in R \text{ ve her } a \in A \text{ için } ra = 0\}$$

kümesine A altkümesinin **sol sıfırlayanı** denir. Sağ sıfırlayan da benzer şekilde tanımlanır.

Tanım 2.1.3 (Hungerford, 1974, Definition 9.1.5) M, bir sol R-modül olsun. $Ann_l(M) = (0)$ ise M'ye **sol "faithful" modül** denir. Basit bir (sol) "faithful" R-modül varsa R halkasına **(sol) primitif halka** denir. Birimli basit bir halka primitiftir.

Tanım 2.1.4 (Hungerford, 1974, Definition 9.1.8) V, bir D bölümlü halkası üzerinde bir (sol) vektör uzayı, R de $End({}_DV)$'nin bir alt halkası olsun. Her n pozitif tamsayısı, V'nin lineer bağımsız her $\{u_1,\ldots,u_n\}$ altkümesi ve V'nin herhangi bir $\{v_1,\ldots,v_n\}$ altkümesi için $\theta(u_i) = v_i$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, olacak şekilde bir $\theta \in R$ varsa R'ye V'nin **endomorfizmalarının yoğun bir halkası** denir.

Teorem 2.1.1 (Hungerford, 1974, Theorem 9.1.9) R, bölümlü bir D halkası üzerindeki bir V sol (sağ) vektör uzayının endomorfizmalarının yoğun bir halkası olsun. O zaman R bir sol (sağ) Artin halkasıdır ancak ve ancak $dim_D\, V$ sonludur. Bu durumda $R = End_D\left(V\right)$'dir.

Teorem 2.1.2 (Hungerford, 1974, Theorem 9.1.12) R primitif bir halka, M "faithful" basit bir R-modül olsun. M'yi $D = End_R\left(M\right)$ bölümlü halkası üzerinde bir vektör uzayı olarak göz önüne alalım. O zaman R, M D-vektör uzayının endomorfizmalarının yoğun bir halkasına izomorftur.

Teorem 2.1.3 (Hungerford, 1974, Theorem 9.1.14) Bir R Artin halkası üzerindeki aşağıdaki şartlar denktir:

(***i***) R basit bir halkadır.

(***ii***) R primitif bir halkadır.

(***iii***) R, bölümlü bir D halkası üzerindeki sonlu boyutlu bir $V \neq \left(0\right)$ vektör uzayının endomorfizmalar halkasına izomorftur.

(***iv***) Pozitif bir n tamsayısı ve bölümlü bir D halkası için $R \cong M_n\left(D\right)$'dir.

Tanım 2.1.5 (Beidar et al., 1996) R bir halka olsun. Her $a \in R$ için $axa = a$ olacak şekilde bir $x \in R$ varsa R halkasına bir **(von Neumann) regüler halka** denir.

Yardımcı Özellik 2.1.2 (Lambek, 1966) R bir regüler halka olsun. Her $a, b \in R$ için $aR + bR = gR$ ve $g = g^2$ olacak şekilde bir $g \in R$ vardır. Üstelik $ga = a$ ve $gb = b$'dir.

Tanım 2.1.6 R bir halka olsun. $a, b \in R$ için $aRb = (0)$ olduğunda $a = 0$ veya $b = 0$ oluyorsa R halkasına **asal halka** denir. Primitif bir halka asaldır.

Tanım 2.1.7 R bir halka olsun. $a \in R$ için $aRa = (0)$ olduğunda $a = 0$ oluyorsa R halkasına **yarı asal halka** denir. Her asal halka bir yarı asal halkadır.

Tanım 2.1.8 R bir halka olsun.

$$Z(R) = \{x : x \in R \text{ ve her } r \in R \text{ için } xr = rx\}$$

kümesine R halkasının **merkezi** denir. $Z(R)$, R halkasının alt halkasıdır.

Yardımcı Özellik 2.1.3 R bir asal halka ve $a, b \in R$ olsun. $a \in Z(R)$ ve $ab \in Z(R)$ ise $b \in Z(R)$ veya $a = 0$ 'dır.

Yardımcı Özellik 2.1.4 R bir asal halka, I R 'nin sıfırdan farklı bir sağ (sol) ideali olsun. O zaman I idealinin sağ (sol) sıfırlayanı sıfırdır.

Tanım 2.1.9 (Beidar et al., 1996) R bir halka ve J, R halkasının bir sağ ideali olsun. Her $r_1, r_2 \in R,\ r_1 \neq 0$ için $r_1 r \neq 0$ ve $r_2 r \in J$ olacak şekilde bir $r \in R$ varsa J idealine bir **yoğun sağ ideal** denir. R halkasının yoğun sağ ideallerinin kümesi $D(R)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.10 (Beidar et al., 1996) R bir halka ve K, R halkasının bir sağ ideali olsun. R 'nin sıfırdan farklı her J sağ ideali için $K \cap J \neq (0)$ ise K 'ya R 'nin bir "**essential" sağ ideali** denir. Yoğun bir sağ ideal "essential" bir sağ idealdir.

Önerme 2.1.1 (Beidar et al., 1996, Proposition 4.3.3) I, R halkasının bir minimal ideali olsun. $I^2 \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $I = Re$ olacak şekilde bir $e \in I$ idempotent elemanı vardır. Üstelik eRe bölümlü bir halkadır. Ayrıca R yarı asal bir halka ve $f \in R$, fRf bölümlü bir halka olacak şekilde bir idempotent ise Rf, R 'nin bir minimal sol idealidir.

Tanım 2.1.11 (Beidar et al., 1996) Bir R halkasının tüm minimal sol ideallerinin toplamına R'nin **sol "socle"**si denir ve $Soc_l(R)$ ile gösterilir. Sağ "socle" kavramı da benzer şekilde tanımlanır. $Soc_l(R)$, R'nin bir idealidir ve R'nin minimal sol ideallerinin bir direkt toplamıdır. Genel halde bir R halkasının sol "socle"si ile sağ "socle"sinin eşit olması gerekmez. R, yarı asal bir halka ise $Soc_r(R) = Soc_l(R)$'dir. Bu durumda kısaca $Soc(R)$ gösterimi kullanılır.

Teorem 2.1.4 (Beidar et al., 1996, Theorem 4.3.7) R, sıfırdan farklı "socle"ye sahip primitif bir halka, V herhangi bir indirgenemez "faithful" R-modül ve $e \in R$ de R'nin minimal bir idempotent elemanı olsun (bkz. Tanım 2.1.20). $D = End_R(V_R)$ (ilişkili bölümlü halka) ve $\Delta = eRe$ diyelim. O zaman

(***i***) Halka olarak Δ ile D izomorftur.

(***ii***) R'nin sıfırdan farklı her sağ (sol) ideali minimal bir idempotent eleman içerir. (bkz. Tanım 2.1.20)

(***iii***) $Soc(R)$, $End({}_D V)$'nin bir sağ idealidir.

(***iv***) $Soc(R)$, R'nin her sağ (sol) "essential" idealinde kapsanır.

(***v***) $Soc(R)$, R'nin tek minimal idealidir.

(***vi***) $Soc(R)$ basit bir halkadır.

Önerme 2.1.2 (McCoy, 1964, Corollary 7.9 and Theorem 7.13) R minimal bir sağ ideale sahip basit bir halka ise $Soc(R)$ regülerdir.

Tanım 2.1.12 (Lambek, 1966) M_R, R halkası üzerinde sıfır olmayan bir modül olsun. Aşağıdaki şartlar birbirine denktir:

(***i***) $M = Soc(M)$

(***ii***) M , minimal alt modüllerinin toplamıdır.

(***iii***) M , indirgenemez modüllerin bir direkt toplamına izomorftur.

M , yukarıdaki denk şartları sağlıyorsa M 'ye **tamamen indirgenebilir modül** denir. Üstelik tamamen indirgenebilir bir modülün her alt modülü ve her bölüm modülü indirgenebilirdir.

Tanım 2.1.13 (Beidar et al., 1996) R yarı asal bir halka olsun.

$$M = \left\{ \left(f;J \right) | J \in D(R) \text{ ve } f : J_R \to R_R \text{ bir sağ } R-\text{homomorfizma} \right\}$$

kümesi üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

$$\left(f;J \right) \sim \left(g;K \right) :\Leftrightarrow L \subseteq I \cap K \text{ olacak şekilde bir } L \in D(R) \text{ vardır}$$

$$\text{ve } L \text{ üzerinde } f = g \text{ 'dir.}$$

Bir $\left(f;J \right) \in M$ elemanının denklik sınıfını $\left[f;J \right]$ ile gösterelim. Denklik sınıfları üzerinde toplama ve çarpma işlemlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\left[f;J \right] + \left[g;K \right] = \left[f+g; J \cap K \right]$$

$$\left[f;J \right] \left[g;K \right] = \left[fg; g^{-1}(J) \right].$$

Bu şekilde tanımlanan işlemlerle M 'nin elemanlarının denklik sınıflarının kümesi bir halka teşkil eder. Bu halkaya R 'nin **maksimal sağ kesirler halkası (sağ Utumi kesirler halkası)** denir ve $U = U(R)$ ile gösterilir. Herhangi bir R halkasının maksimal sağ kesirler halkası izomorfizmaya bağlı olarak aşağıdaki özellikleri sağlayan U halkası olarak karakterize edilebilir.

(***i***) R , U 'nun bir alt halkasıdır.

(***ii***) Her $q \in U$ için $qJ \subseteq R$ olacak şekilde bir $J \in D(R)$ vardır.

(***iii***) Her $q \in U$ ve $J \in D(R)$ için $qJ = (0)$ ise $q = 0$ 'dır.

(***iv***) Her $J \in D(R)$, $\varphi : J_R \to R_R$ sağ R-modül dönüşümü ve her $x \in J$ için $\varphi(x) = qx$ olacak şekilde bir $q \in U$ vardır.

Tanım 2.1.14 (Beidar et al., 1996) R yarı asal bir halka olsun.

$$N = \{I : I, R\text{ 'nin bir ideali ve } Ann_l(I) = (0)\}$$

kümesi çarpım ve sonlu arakesit altında kapalıdır.

$$T = \{(f;J) : J \in N,\ f : J_R \to R_R \text{ sağ } R-\text{homorfizması}\}$$

kümesini göz önüne alalım. T kümesi üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan $\approx$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır:

$$(f;J) \approx (g;K) :\Leftrightarrow L \subseteq I \cap K \text{ olacak şekilde bir } L \in N \text{ vardır}$$

$$\text{ve } L \text{ üzerinde } f = g \text{ 'dir.}$$

$\{f;J\}$, $(f;J) \in T$ elemanının denklik sınıfını göstersin. Denklik sınıfları üzerinde toplama ve çarpma işlemlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\{f;J\} + \{g;K\} = \{f + g; KJ\}$$

$$\{f;J\}\{g;K\} = \{fg; KJ\}$$

Bu şekilde tanımlanan işlemlerle T 'nin elemanlarının denklik sınıflarının kümesi bir halka teşkil eder. Bu halkaya R 'nin **iki yanlı sağ (Martindale) kesirler halkası** denir ve $Q_r = Q_r(R)$ ile gösterilir. Herhangi bir R yarı asal halkasının iki yanlı sağ kesirler halkası izomorfizmaya bağlı olarak aşağıdaki özellikleri sağlayan Q_r halkası olarak karakterize edilebilir.

(***i***) R , Q_r 'nin bir alt halkasıdır.

(***ii***) Her $q \in Q_r$ için $qJ \subseteq R$ olacak şekilde bir $J \in N$ vardır.

(***iii***) Her $q \in Q_r$ ve $J \in N$ için $qJ = (0)$ ise $q = 0$ 'dır.

(***iv***) Her $J \in N$, $\varphi : J_R \to R_R$ sağ R -modül dönüşümü ve her $x \in J$ için $\varphi(x) = qx$ olacak şekilde bir $q \in Q_r$ vardır.

Q_r 'nin

$$Q_s = Q_s\left(R\right) = \left\{q \in U : \text{bazı } J \in N \text{ için } qJ \cup Jq \subseteq R\right\}$$

alt halkasına R 'nin **simetrik (Martindale) kesirler halkası** denir. Q_r halkasının merkezine R 'nin **genişletilmiş merkezi** denir ve C ile gösterilir. R yarı asal bir halka ise

$$C = Z(Q_s(R)) = Z(Q_r(R)) = \left\{q \in U : \text{her } r \in R \text{ için } qr = rq\right\}$$

dir. Üstelik R asal bir halka ise C bir cisimdir.

Tanım 2.1.15 (Beidar et al., 1996) R yarı asal bir halka olsun. U 'nun RC alt halkasına R 'nin **merkezi kapanışı** denir. Ayrıca $RC = R$ ise R 'ye **merkezi kapalıdır** denir. Burada R asal (yarı asal) bir halka ise RC , U , Q_r ve Q_s 'nin de asal (yarı asal) olduğunu belirtelim.

Tanım 2.1.16 (Hungerford, 1974) K birimli, değişmeli bir halka ve A herhangi bir halka olsun. $(A,+)$, üniter bir K-modül ve her $a \in K$ ve $s,t \in A$ için $a(st) = (as)t = s(at)$ eşitlikleri sağlanıyorsa A , K değişmeli halkası üzerinde bir **cebir**dir veya A bir K **-cebir**dir denir.

Tanım 2.1.17 (Jacobson, 1975) K bir cisim ve A da basit bir K-cebir olsun. A'nın merkezi C bir cisimdir. Eğer A'nın merkezi $C = K \cdot 1$ ise A'ya K üzerinde **merkezi basit cebir** denir.

Teorem 2.1.5 (Erickson et al., 1975, Theorem 3.5) A, Φ üzerinde merkezi kapalı bir asal cebir ve F, Φ'nin bir cisim genişlemesi ise $A \otimes_{\Phi} F$, F üzerinde merkezi kapalı bir asal cebirdir.

Yardımcı Özellik 2.1.5 (Herstein, 1976) R birimli basit bir halka ve Q_r, R halkasının iki yanlı (sağ) Martindale kesirler halkası ise o zaman $Q_r = R = RC$'dir.

Yardımcı Özellik 2.1.6 (Herstein, 1969, Lemma 1.1) R bir halka ve I da R'nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. n sabit bir tamsayı olmak üzere herhangi bir $a \in I$ verildiğinde $a^n = 0$ ise R'nin sıfırdan farklı bir nilpotent ideali vardır (Levitzki Teoremi).

Tanım 2.1.18 (Herstein 1969) R bir halka ve $a \in R$, $a^2 = 0$ olsun. Her $x \in R$ için $\phi(x) = x - xa + ax - axa$ ile tanımlı dönüşüm R'nin bir otomorfizmasıdır. R halkasının bu tip otomorfizmalarına **özel iç otomorfizmalar** denir.

Tanım 2.1.19 (Rowen, 1980) R bir halka, M "faithful" basit bir R-modül olsun. $D = End_R(M)$ bölümlü halkası olmak üzere her $r \in R$ için rM, M'nin bir alt D-vektör uzayıdır. $rank(r) = dim_D(rM)$ boyutuna r elemanının **M-rankı** denir. Üstelik her $r, s \in R$ için $rank(r+s) \leq rank(r) + rank(s)$, $rank(rs) \leq rank(r)$ ve $rank(rs) \leq rank(s)$'dir. Dolayısıyla R halkasının sonlu ranklı elemanlarının kümesi R'nin bir idealidir. Ayrıca R yarı asal bir halka ise

$$Soc(R) = \{r : r \in R \text{ ve } rank(r) < \infty\} \text{'dir.}$$

Yardımcı Özellik 2.1.7 (Rowen, 1980, Lemma 7.1.11) R yarı asal bir halka, M bir basit "faithful" R-modül olsun. $r \in R$ için $rank(r)=1$ ise Rr, R'nin bir minimal sol idealidir.

Tanım 2.1.20 (Rowen, 1980) R yarı asal bir halka, $e \in R$ bir idempotent eleman olsun. $rank(e)=1$ ise e'ye **minimal idempotent** denir.

Tanım 2.1.21 R bir halka $d: R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için $d(xy)=d(x)y+xd(y)$ ise d dönüşümüne R'nin bir **türevi** denir. $a \in R$ olmak üzere her $x \in R$ için $\delta(x)=[a,x]$ ile tanımlı dönüşüm bir türevdir ve bu tip türevlere **iç türev** denir.

Tanım 2.1.22 (Hvala, 1998) R bir halka, $g: R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için $g(xy)=g(x)y+x\delta(y)$ olacak şekilde R'nin bir δ türevi varsa g dönüşümüne R'nin bir **genelleştirilmiş türevi** denir. Burada δ türevine, g genelleştirilmiş türevine **karşılık gelen türev** denir. $a, b \in R$ olmak üzere her $x \in R$ için $g(x)=ax+xb$ ile tanımlı dönüşüm bir genelleştirilmiş türevdir ve bu tip genelleştirilmiş türevlere **genelleştirilmiş iç türev** denir.

Teorem 2.1.6 (Lee, 1999, Theorem 2) R sol "faithful" bir halka ve U, R'nin sağ Utumi kesirler halkası olmak üzere R'nin herhangi bir I yoğun sağ idealinden U içine her türev U'da bir türeve tek türlü genişletilebilir.

Teorem 2.1.7 (Lee, 1999, Theorem 4) R yarı asal bir halka ve U, R'nin sağ Utumi kesirler halkası olmak üzere R'nin herhangi bir I yoğun sağ idealinden U içine her g genelleştirilmiş türevi U'da bir genelleştirilmiş türeve tek türlü genişletilebilir ve bazı $a \in U$ elemanı ve $d \in Der(U)$ türevi için $g(x)=ax+d(x)$ formundadır. Üstelik, a elemanı ve d türevi g genelleştirilmiş türevi ile tek türlü belirlidir.

2.2 Asal Halkaların Genelleştirilmiş Özdeşlikleri

Bu kısımda, tez boyunca sıkça kullanılacak bazı kavramlara ve sonuçlara yer verilecektir. Tez kapsamında ele alınacak özdeşliklerin asal halkaların genelleştirilmiş türevlerini ihtiva eden özdeşlikler olacağını daha önce belirtmiştik. Asal halkaların genelleştirilmiş türevlerinin ilk cebirsel incelemesi 1998'de Hvala tarafından yapılmıştır (Hvala, 1998). Daha sonra Lee (1999), Hvala'nın genelleştirilmiş türev tanımını (yarı) asal bir halkanın yoğun bir sağ idealinden Utumi kesirler halkası içine bir dönüşüm olarak genişletmiş ve tam bir karakterizasyonunu vermiştir (bkz. Teorem 2.1.7).

R bir halka ve $x, y \in R$ olmak üzere $[x, y] = xy - yx$ ile x ve y elemanlarının komütatör çarpımını göstereceğiz.

Tanım 2.2.1 (Jacobson, 1975) X herhangi bir sayılabilir küme ve $S\langle X\rangle$, X üzerindeki birimli serbest yarı grup olsun. K birimli değişmeli bir halka olsun. $K\{X\}$, $S\langle X\rangle$'i taban kabul eden serbest K-modülü göstersin. $K\{X\}$ üzerinde çarpma işlemini "yan yana koyma" olarak tanımlayalım. Bu durumda $K\{X\}$ bir K-cebir olur. Bu cebire X üzerindeki **serbest** K**-cebir** denir. $K\{X\}$ serbest cebrinin elemanlarına **polinom** denir ve $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ şeklinde gösterilir. Taban elemanlarına da **monomial** denir.

Tanım 2.2.2 (Jacobson, 1975) $f \in K\{X\}$ olsun. f, $K\{X\}$'in sonlu üretilmiş $K\{X_1, \ldots, X_n\}$ alt cebrine ait ise $f = f(X_1, \ldots, X_n)$ yazılır. A bir K-cebir olsun. Her $a_1, \ldots, a_n \in A$ için $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ ise f'ye A için bir **polinom özdeşliğidir (PI)** denir. A halkasına da **polinom özdeşliği halkası (PI-halkası)** denir. f polinomunun her monomiali X_i'de birinci dereceden ise f'ye X_i'de **doğrusaldır** denir. f polinomu her bir X_i'de doğrusal ise f'ye **çoklu doğrusal** denir.

S_n simetrik grup ve $sg : S_n \to \{1, -1\}$ işaret fonksiyonu olmak üzere

$$s_n(X_1,\ldots,X_n)=\sum_{\pi\in S_n} sg(\pi)\, X_{\pi(1)}\ldots X_{\pi(n)}$$

polinomuna n değişkenli **standart polinom** denir.

Tanım 2.2.3 (Leron, 1975) R bir halka ve $M_n\left(R\right)$, R üzerindeki $n\times n$ matrisler halkası olsun. R^*, R halkasına 1 elemanını ekleyerek elde edilen birimli halka ve e_{ij} de $\left(i,j\right)$-inci içeriği 1, diğer tüm içerikleri 0 olan matris olsun. $u=\left(A_1,\ldots,A_k\right)$, $M_n\left(R\right)$'de bir matris dizisi olsun. u dizisinin **değeri** $\left|\, u\,\right|=A_1\cdots A_k$ çarpımı olarak tanımlanır. $\left\{1,\ldots,k\right\}$ kümesinin bir σ permütasyonu için $u^{\sigma}=\left(A_{\sigma(1)},\ldots,A_{\sigma(k)}\right)$ dizisine u '**nun bir permütasyonu** denir. $M_n\left(R\right)$'de bir u dizisi, $a_i\in R$, $i\in\left\{1,\ldots,k\right\}$, olmak üzere $u=\left(a_1e_{i_1j_1},\ldots,a_ke_{i_kj_k}\right)$ formunda ise u dizisine **basit dizi** denir. Basit bir dizinin değeri uygun bir $a\in R$ için ae_{ij} formundadır.

u basit bir dizi olsun. Bazı σ permütasyonu için $\left|\, u^{\sigma}\,\right|=be_{ii}\neq 0$ ise u 'ya **çift** ve $i\neq j$ olmak üzere bazı σ permütasyonu için $\left|\, u^{\sigma}\,\right|=be_{ij}\neq 0$ ise u 'ya **tek** dizi denir.

Yardımcı Özellik 2.2.1 (Leron, 1975, Lemma 2) R bir halka ve $f\left(X_1,\ldots,X_k\right)$ çoklu doğrusal bir polinom olsun. $u=\left(A_1,\ldots,A_k\right)$, $M_n\left(R\right)$'de basit bir dizi olsun.

(i) u çift bir dizi ise $f\left(u\right)$ matrisi köşegendir.

(ii) u tek bir dizi ise bazı $a\in R$ ve $i\neq j$ için $f\left(u\right)=ae_{ij}$ formundadır.

Tanım 2.2.4 (Beidar et al., 1996) R yarı asal bir halka ve X değişmeli olmayan bilinmeyenlerin sayılabilir bir kümesi olsun. $T = U *_C C\{X\}$ serbest çarpımını ele alalım. T kümesinin elemanlarına **genelleştirilmiş polinom** denir. $q_i \in U$ ve $Y_i \in X$ olmak üzere, $m = q_0Y_1q_1Y_2q_2\ldots Y_nq_n$ tipindeki elemanlara **monomial**, q_i elemanlarına da m monomialinin **katsayıları** denir. T kümesinin her f elemanı, monomiallerin sonlu toplamı şeklindedir ve bu gösterim tek türlüdür. $f = f(X_1,\ldots,X_n) \in T$ olmak üzere her $r_1,\ldots,r_n \in R$ için $f(r_1,\ldots,r_n) = 0$ ise f polinomuna R için bir **genelleştirilmiş polinom özdeşliği (GPI)** ve R halkasına da bir **genelleştirilmiş polinom özdeşliği halkası (GPI-halkası)** denir.

Tanım 2.2.5 (Beidar et al., 1996) d, R asal halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. $f \in U *_C C\{X\}$ olmak üzere her $r_1,\ldots,r_n \in I$ için

$$f\left(r_1,\ldots,r_n,d(r_1),\ldots,d(r_n)\right) = 0$$

ise $f\left(X_1,\ldots,X_n,d(X_1),\ldots,d(X_n)\right)$ ifadesine I'da bir **diferansiyel özdeşlik** denir.

Teorem 2.2.1 (Beidar et al., 1996, Theorem 6.1.9) R, genişletilmiş merkezi C olan primitif bir halka olsun. R bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği halkasıdır ancak ve ancak $dim_C\left(eRe\right) < \infty$ olacak şekilde bir $e \in R$ idempotent elemanı vardır (Amitsur Teoremi).

Teorem 2.2.2 (Beidar et al., 1996, Theorem 6.1.10) R, genişletilmiş merkezi C olan primitif bir halka olsun. R, C üzerinde bir polinom özdeşliği halkasıdır ancak ve ancak R, C üzerinde sonlu boyutlu merkezi bir basit cebirdir (Kaplansky Teoremi).

Yardımcı Özellik 2.2.2 (Beidar et al., 1996, Proposition 4.4.3) L, bir A halkasının minimal bir sol (sağ) ideali olsun. $L^2 \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $L = Ae$ ($L = eA$) olacak şekilde bir $e = e^2 \in L$ idempotent elemanı vardır. Üstelik eAe bölümlü bir halkadır.

Teorem 2.2.3 (Beidar et al., 1996, Theorem 4.3.11) R, sıfırdan farklı bir $H = Soc(R)$ "socle"sine sahip primitif bir halka, $b_1,\ldots,b_m \in H$ ve s de $s \leq max\{rank(h) : h \in H\}$ olacak şekilde pozitif bir tamsayı olsun. O zaman $b_1,\ldots,b_m \in eRe$ olacak şekilde bir $e = e^2 \in H$ idempotenti vardır ve $rank(e) = n \geq s$ olmak üzere eRe, R'nin ilişkili bölümlü halkası D üzerindeki $n \times n$ matrisler halkasına izomorftur (Litoff Teoremi).

Teorem 2.2.4 (Martindale, 1969, Theorem 1) R asal bir halka olsun. $a,b \in RC$ olmak üzere her $x \in R$ için $axb = bxa$ ise a ve b, C-bağımlıdır.

Uyarı 2.2.1. (Chuang, 1988) R asal bir halka ve U, R'nin sağ Utumi kesirler halkası olsun. $a_1,\ldots,a_k \in U$ elemanları C üzerinde doğrusal bağımsız ve bazı $g_1,\ldots,g_k \in T = U *_C C\{X\}$ polinomları için

$$a_1 g_1(X_1,\ldots,X_n) + \cdots + a_k g_k(X_1,\ldots,X_n) = 0 \in T$$

olsun. Her bir $h_j \in T$ olmak üzere $g_i(X_1,\ldots,X_n) = \sum_{j=1}^{n} X_j h_j(X_1,\ldots,X_n)$ formunda ise $g_1,\ldots,g_k$ polinomları T serbest çarpımının sıfır elemanlarıdır. Aynı şekilde

$$g_1(X_1,\ldots,X_n)a_1 + \cdots + g_k(X_1,\ldots,X_n)a_k = 0 \in T$$

ve $h_j \in T$ olmak üzere $g_i(X_1,\ldots,X_n) = \sum_{j=1}^{n} h_j(X_1,\ldots,X_n)X_j$ formunda ise $g_1,\ldots,g_k$ polinomları yine T serbest çarpımının sıfır elemanlarıdır.

Aşağıdaki iki teorem (Teorem 2.2.5 ve 2.2.6) bu çalışma boyunca en sık kullanacağımız iki önemli sonuçtur. İlki Martindale'ye ait asal GPI-halkalarının sınıflama teoremidir. İkincisi ise asal halkaların diferansiyel özdeşliklerini betimleyen Kharchenko Teoremi'dir. Kharchenko Teoremi, teoremin ifadesinde belirtildiği türden bir diferansiyel özdeşlik sağlayan asal bir halkanın aslında bir GPI-halka olduğunu söyler.

Teorem 2.2.5 (Martindale, 1969, Theorem 3) R asal bir halka ve $S = RC$, R'nin merkezi kapanışı olsun. O zaman S, C üzerinde genelleştirilmiş bir polinom özdeşliği sağlar ancak ve ancak S, minimal bir eS sağ idealini içerir (dolayısıyla S primitiftir ve $Soc(S) \neq (0)$'dır) ve eSe, C üzerinde sonlu boyutlu bir bölümlü cebirdir (Martindale Teoremi).

Teorem 2.2.6 (Kharchenko, 1978, Theorem) d, R asal halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun.

$f\left(X_1,\ldots,X_n,d\left(X_1\right),\ldots,d\left(X_n\right)\right)$, I idealinde bir diferansiyel özdeşlik, yani her $r_1,\ldots,r_n \in I$ için

$$f\left(r_1,\ldots,r_n,d\left(r_1\right),\ldots,d\left(r_n\right)\right)=0$$

olsun. Bu durumda aşağıdakilerden biri sağlanır:

(i) d, Q_r iki yanlı sağ Martindale kesirler halkasında bir iç türevdir, yani her $x \in R$ için $d(x) = [q,x]$ olacak şekilde bir $q \in Q_r$ elemanı vardır ve I,

$$f\left(X_1,\ldots,X_n,[q,X_1],\ldots,[q,X_n]\right)$$

genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar, veya

(ii) d, Q_r iki yanlı sağ Martindale kesirler halkasında bir dış türevdir ve I ideali, $f\left(X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_n\right)$ genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar.

Yardımcı Özellik 2.2.3 (Lanski, 1993, Lemma 2) R merkezi $Z = Z(R)$ üzerinde değişmeli olmayan sonlu boyutlu basit bir cebir olsun. Eğer $\{X_1,...,X_t\}$'de d dereceli homojen olan $g(X_1,...,X_t) \in R *_Z Z\{X_j\}$ polinomu, R için bir özdeşlik ise uygun bir F cismi ve $n > 1$ tamsayısı için $R \subseteq M_n(F)$'dir ve $g(X_1,...,X_t)$, $M_n(F)$ için de bir özdeşliktir.

Teorem 2.2.7 (Chuang, 1988, Theorem 2) R asal bir halka ve U, R'nin sağ Utumi kesirler halkası olsun. U_R'nin herhangi bir yoğun alt modülü M için M'nin sağladığı genelleştirilmiş polinom özdeşlikleri ile U'nun sağladığı genelleştirilmiş polinom özdeşlikleri aynıdır.

Yardımcı Özellik 2.2.4 (Lee, 1995, Lemma 2) R yarı asal bir halka ve I, R'nin bir sağ ideali olsun. O zaman I ve IU, katsayıları U'da olan aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliklerini sağlar.

Teorem 2.2.8 (Lee, 1992, Theorem 2 and 3) R asal (yarı asal) bir halka, U, R'nin sağ Utumi kesirler halkası ve I_R, U_R'nin yoğun bir alt modülü olsun. O zaman I ve U aynı diferansiyel özdeşlikleri sağlar. Özel olarak, I R'nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olmak üzere I, IR ve IU aynı diferansiyel özdeşlikleri sağlar.

3. TEK YANLI İDEALLER ÜZERİNDE ENGEL KOŞULLU GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER

Bu bölümünde asal halkaların sol idealleri üzerinde genelleştirilmiş türevleri ihtiva eden Engel şartlı belirli bir özdeşlik incelenecektir[1,2].

Herhangi $x, y \in R$ için $[x, y]_1 = [x, y] = xy - yx$ olmak üzere her $k \geq 2$ için x ve y elemanlarının k-inci komütatörü $[x, y]_k = [[x, y]_{k-1}, y]$ olarak tanımlanır.

Lanski (1997), k ve n sabit pozitif tamsayılar olmak üzere bir d türevine sahip asal bir R halkasının sıfırdan farklı bir I sol ideali üzerinde her $x \in I$ için

$$\left[d\left(x^k\right), x^k\right]_n = 0$$

özdeşliğinin sağlanması durumunda $d = 0$ veya R'nin değişmeli olması gerektiğini göstermiştir. Daha sonra bu sonuç Albaş, Argaç ve De Filippis tarafından genelleştirilmiş türevlere genişletilmiştir (Albaş et al., 2008).

Lee ve Shiue (1999), değişmeli olmayan asal bir R halkasının sıfırdan farklı bir I sol ideali üzerinde benzer bir özdeşliği ele almışlardır. Bu çalışmalarında Lee ve Shiue, k, m, n, r sabit pozitif tamsayılar olmak üzere R halkası, her $x \in I$ için

$$\left[d\left(x^m\right)x^n, x^r\right]_k = 0$$

---

[1] Bu bölümde elde edilen sonuçlar Journal of Korean Mathematical Society dergisinde yayınlanmıştır (Demir and Argaç, 2010).

[2] Bu bölümde yapılan çalışma TÜBİTAK tarafından 108T257 nolu proje kapsamında desteklenmiştir.

olacak şekilde sıfırdan farklı bir $d : R \to R$ türevine sahip ise $R \cong M_2\left(GF\left(2\right)\right)$ olduğunu göstermişlerdir.

Bu bölümde amacımız Lee ve Shiue'nin yukarıdaki sonucunu genelleştirilmiş türevlere genişletmektir. Daha açık bir ifadeyle aşağıdaki teoremleri ispatlayacağız:

Teorem 3.1 R değişmeli olmayan asal bir halka ve k,m,n,r sabit pozitif tamsayılar olsun. Her $x \in R$ için $\left[g\left(x^m\right)x^n, x^r\right]_k = 0$ olacak şekilde R'nin bir g genelleştirilmiş türevi varsa o zaman uygun bir $a \in U$ elemanı ve her $x \in R$ için $g\left(x\right) = xa$ formundadır.

Teorem 3.2 R değişmeli olmayan asal bir halka, I da R'nin sıfırdan farklı bir sol ideali ve k,m,n,r sabit pozitif tamsayılar olsun. Her $x \in I$ için $\left[g\left(x^m\right)x^n, x^r\right]_k = 0$ olacak şekilde R'nin bir g genelleştirilmiş türevi varsa o zaman $R \cong M_2\left(GF\left(2\right)\right)$ ve $I\left[I,I\right] = \left(0\right)$ olmadıkça her $x \in R$ için $g\left(x\right) = xa$ olacak şekilde bir $a \in U$ elemanı vardır.

Teorem 3.1 ve Teorem 3.2'yi ispatlamak için ihtiyacımız olan bir dizi yardımcı özelliği ispatlayarak ilerleyelim.

Yardımcı Özellik 3.1 F bir cisim, $t \geq 2$ bir tamsayı, $R = M_t\left(F\right)$ ve $a,b \in R$ olsun. k,m,n,r sabit pozitif tamsayılar olmak üzere her $x \in R$ için

$$\left[ax^{m+n} + \left[b, x^m\right]x^n, x^r\right]_k = 0 \tag{3.1}$$

olduğunu kabul edelim. O zaman $a + b \in F$'dir.

İspat. $e \in R$ idempotent bir eleman olsun. (3.1) denkleminde $x = e$ alıp soldan $1-e$ ile çarparak herhangi bir e idempotent elemanı için $\left(1-e\right)\left(a+b\right)e = 0$ olduğu görülür. O halde $a + b$ köşegen bir matristir. Her $x \in R$ için

$$\left[\left(uau^{-1}\right)x^{m+n}+\left[\left(ubu^{-1}\right),x^{m}\right]x^{n},x^{r}\right]_{k}=0$$

olduğundan her $u \in R$ tersinir elemanı için $u(a+b)u^{-1}$ matrisi de köşegen olmalıdır. $\beta_i \in F$ olmak üzere $a+b=\sum_{i=1}^{t}\beta_i e_{ii}$ diyelim. O zaman her bir $j>1$ için $(1+e_{1j})(a+b)(1-e_{1j})$ matrisinin $(1,j)$ içeriği $\beta_j-\beta_1=0$'dır. Dolayısıyla $a+b \in F$'dir.

Yardımcı Özellik 3.2 R değişmeli olmayan asal bir halka ve k,m,n,r sabit pozitif tamsayılar olmak üzere $a,b \in R$ elemanları her $x \in R$ için

$$\left[ax^{m+n}+\left[b,x^{m}\right]x^{n},x^{r}\right]_{k}=0 \tag{3.2}$$

olacak şekilde olsun. O zaman $a+b \in Z(R)$'dir.

İspat. Çelişki elde etmek için $a+b \notin C$ olduğunu kabul edelim. O zaman

$$f(X)=\left[(a+b)X^{m+n}-X^{m}bX^{n},X^{r}\right]_{k}$$

R için aşikar olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir. Teorem 2.2.7'den $f(X)$, Q_r için de bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir. C'nin sonsuz ve sonlu olmasına göre F ile sırasıyla C'nin ya cebirsel kapanışını ya da C'nin kendisini gösterelim. O zaman standart bir muhakemeyle (bkz. Lee and Wong, 1995) $f(X)$, $Q_r \otimes_C F$ için de bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir. (Ericson et al., 1975), Theorem 2.5 ve 3.5 uyarınca $Q_r \otimes_C F$ merkezi kapalı asal bir F-cebir olduğundan R ve C'yi sırasıyla $Q_r \otimes_C F$ ve F ile yer değiştirerek R'nin merkezi kapalı ve C'nin ya sonlu ya da cebirsel kapalı olduğunu kabul edebiliriz. Martindale Teoremi'nin ışığında (bkz. Teorem 2.2.5), R C'yi ilişkili bölümlü halkası olarak kabul eden ve sıfırdan farklı bir H "socle"sine sahip primitif bir halkadır.

$a+b \notin C$ olduğundan bazı $h \in H$ için $[a+b,h] \neq 0$ 'dır. Litoff Teoremi'nden (bkz. Teorem 2.2.3) $h, ah, ha, bh, hb \in eRe$ olacak şekilde bir $e \in H$ idempotent elemanı vardır. $ef(eXe)e$, R için bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir. O halde

$$\left[(eae)X^{m+n} + \left[(ebe), X^m\right]X^n, X^r\right]_k$$

eRe için bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir. Bazı $s \geq 1$ için $eRe \cong M_s(C)$ olduğundan Yardımcı Özellik 3.1 uyarınca $eae+ebe$, eRe halkasının merkezi bir elemanıdır. O zaman $eae+ebe=ce$ olacak şekilde bir $c \in C$ vardır. Böylece

$$ch = eaeh + ebeh = eah + ebh = ah + bh = (a+b)h$$

olur. Benzer şekilde

$$hc = heae + hebe = hae + hbe = ha + hb = h(a+b)$$

dir. Buradan da $[a+b,h]=0$ çelişkisine ulaşılır. O halde $a+b \in Z(R)$ olmalıdır.

Sonuç 3.1 R asal bir halka ve k, m, n sabit pozitif tamsayılar olmak üzere $a \in R$ elemanı her $x \in R$ için

$$\left[ax^m, x^n\right]_k = 0$$

olacak şekilde ise $a \in Z(R)$ 'dir.

Teorem 3.1'in İspatı. R 'nin yoğun bir sol ideali üzerinde tanımlı her genelleştirilmiş türevin U 'ya tek türlü genişletilebileceğini ve uygun bir $a \in U$ elemanı ve $d \in Der(U)$ türevi için $g(x) = ax + d(x)$ formundan olduğunu belirtmiştik. $d=0$ ise o zaman her $x \in R$ için $\left[ax^{m+n}, x^r\right]_k = 0$ olur. U bu son özdeşliği sağlar (bkz. Teorem 2.2.7). Üstelik R asalken U da asal olduğundan R

ile U 'yu yer değiştirerek $a \in R$ ve $C = Z(R)$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda Sonuç 3.1 uyarınca $a \in C$ olur. Böylece her $x \in R$ için $g(x) = ax = xa$ olduğu görülür ve ispat biter. O zaman bundan sonra $d \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz.

Kharchenko Teoremi (bkz. Teorem 2.2.6) ışığında ispatı iki alt duruma ayıralım:

Durum I. d, bir $b \in U$ elemanı ile belirli iç türev, yani her $x \in U$ için $d(x) = [b, x]$ olsun. O zaman R, aşikar olmayan

$$\left[aX^{m+n} + \left[b, X^m\right]X^n, X^r\right]_k$$

genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar. Teorem 2.2.7 uyarınca U da yukarıdaki genelleştirilmiş polinom özdeşliği sağlar. Üstelik U asal olduğundan (bkz. Tanım 2.1.15) R ile U 'yi yer değiştirerek $a, b \in R$ ve $C = Z(R)$ olduğunu kabul edebiliriz. O zaman Yardımcı Özellik 3.2 uyarınca $a + b \in C$'dir. Bu durumda her $x \in R$ için $g(x) = (a+b)x - xb = x(a+b-b) = xa$ olur.

Durum II. Şimdi d, U 'nun bir dış türevi olsun. İspata devam etmeden önce, değişmeli olmayan X ve Y değişkenlerinin

$$G(Y, X) = \sum_{i=0}^{m-1} X^i Y X^{m-1-i}$$

polinomunu tanımlayalım. Şimdi $d\left(X^m\right) = \sum_{i=0}^{m-1} X^i d(X) X^{m-1-i} = G\big(d(X), X\big)$'dir.

O zaman R,

$$\left[aX^{m+n} + G\big(d(X), X\big)X^n, X^r\right]_k$$

diferansiyel özdeşliğini sağlar. Böylece Kharchenko Teoremi'nden R,

$$\left[aX^{m+n}+G(Y,X)X^{n},X^{r}\right]_{k}$$

özdeşliğini sağlar. Yani her $x,y\in R$ için $\left[ax^{m+n}+G(y,x)x^{n},x^{r}\right]_{k}=0$ 'dır. Özel olarak $y=0$ alınırsa her $x\in R$ için $\left[ax^{m+n},x^{r}\right]_{k}=0$ olduğu görülür. Böylece her $x\in R$ için

$$\left[d\left(x^{m}\right)x^{n},x^{r}\right]_{k}=0$$

olur. Lee and Shiue'deki (1999) Theorem 1 uyarınca $d=0$ olmalıdır. Bu çelişkiyle de ispat tamamlanır.

Lee and Shiue'deki (1999) muhakemenin hemen hemen aynısını kullanarak aşağıdaki yardımcı özelliği ispatlayalım.

Yardımcı Özellik 3.3 F bir cisim ve $t\geq 2$ olmak üzere $R=M_{t}\left(F\right)$ ve I da R halkasının bir minimal sol ideali olsun. m,n,r,k sabit pozitif tamsayılar olmak üzere her $x\in I$ için

$$\left[ax^{m+n}+\left[b,x^{m}\right]x^{n},x^{r}\right]_{k}=0$$

olduğunu kabul edelim. O zaman $R\cong M_{2}\left(GF\left(2\right)\right)$ olmadıkça $a+b\in F$ 'dir.

İspat. $a+b\notin F$ olduğunu kabul edelim. I bir minimal sol ideal olduğundan $I=Re_{11}$ olduğunu kabul edebiliriz. $e=e^{2}\in I$ herhangi bir idempotent eleman olsun. Hipotezden

$$\left[ae+\left[b,e\right]e,e\right]_{k}=0$$

olur. Bu son eşitliği soldan $1-e$ ile çarparsak, her $e=e^{2}\in I$ için

$$\left(1-e\right)\left(a+b\right)e=0 \qquad (3.3)$$

olduğu görülür. Şimdi $\beta \in F$ ve $x \in R$ keyfi elemanlar olsun. O zaman $f = e + (1-e)xe$ ve $g = e + \beta(1-e)xe$ de I 'da idempotent elemanlardır. Kısalık için $c = a + b$ diyelim. $c \notin F$ ve $(1-e)ce = 0$ 'dır. Dolayısıyla (3.3)'den $(1-f)cf = 0$ ve $(1-g)cg = 0$ 'dır. Böylece

$$\left((1-e)-(1-e)xe\right)c\left(e+(1-e)xe\right)=0$$

ve

$$\left((1-e)-\beta(1-e)xe\right)c\left(e+\beta(1-e)xe\right)=0$$

elde edilir. (3.3)'ü kullanarak aşağıdaki denklemlere ulaşılır:

$$(1-e)cxe-(1-e)xce-(1-e)xec(1-e)xe=0$$

ve

$$\beta(1-e)cxe-\beta(1-e)xce-\beta^2(1-e)xec(1-e)xe=0\,.$$

İlk denklemi β ile çarpıp ikinci denklemden çıkararak her $x \in R$ için

$$\left(\beta^2-\beta\right)(1-e)xec(1-e)xe=0$$

elde edilir. O zaman (Posner, 1957) Lemma 2'den ya $\beta \in \{0,1\}$ ya da $ec(1-e) = 0$ 'dır. İkinci olasılık sağlanıyorsa, özel olarak $e_{11}c(1-e_{11}) = 0$ olur. $x \in R$ herhangi bir eleman ise uygun bir $\mu \in F$ için

$$xe_{11}c = xe_{11}ce_{11} = \mu xe_{11}$$

olur. Diğer taraftan, (3.3) uyarınca her $e = e^2 \in I$ için $[c,e] = 0$ 'dır. O zaman $e = e^2 \in I$ için

$$[c,e]=[c-\mu,e]=(c-\mu)e$$

olduğu görülür. Her $x\in R$ için $e_{11}+(1-e_{11})xe_{11}\in I$ bir idempotent eleman olduğundan

$$(c-\mu)\big(e_{11}+(1-e_{11})xe_{11}\big)=0$$

olmalıdır. $(c-\mu)e_{11}=0$ olduğundan yukarıdaki son denklemden $(c-\mu)Re_{11}=(0)$ elde edilir. Buradan da $c=\mu\in F$ çelişkisine ulaşılır. O halde $F=GF(2)$ olmalıdır.

Şimdi $t=2$ olduğunu gösterelim. Çelişkiye ulaşmak için $t>2$ olduğunu kabul edelim. i ve j, $2\le i,j\le t$ olacak şekilde iki farklı tamsayı olsun. O zaman e_{11}, $e_{11}+e_{i1}$, $e_{11}+e_{j1}$ ve $e_{11}+e_{i1}+e_{j1}$ elemanları I 'da idempotent elemanlardır. (3.3) ışığında

$$ce_{11}=e_{11}ce_{11},$$

$$c(e_{11}+e_{i1})=(e_{11}+e_{i1})c(e_{11}+e_{i1}),$$

$$c(e_{11}+e_{j1})=(e_{11}+e_{j1})c(e_{11}+e_{j1})$$

ve

$$c(e_{11}+e_{i1}+e_{j1})=(e_{11}+e_{i1}+e_{j1})c(e_{11}+e_{i1}+e_{j1}) \qquad (3.4)$$

eşitliklerini elde ederiz. $ce_{11}=e_{11}ce_{11}$ olduğunu kullanıp diğer denklemleri karşılaştırırsak

$$e_{i1}ce_{j1}+e_{j1}ce_{i1}=0$$

sonucuna varırız. $\beta_{ij} \in F$ olmak üzere $c = \sum_{1 \le i, j \le t} \beta_{ij} e_{ij}$ diyelim. Yukarıdaki son denklemden $\beta_{1j} = 0 = \beta_{1i}$ elde edilir. Dolayısıyla (3.4)'deki ikinci denklem $ce_{i1} = \beta_{11} e_{i1}$ haline indirgenir. Böylece her $p \neq i$ için $\beta_{pi} = 0$ ve $\beta_{ii} = \beta_{11}$ olur. Buradan da $c = a + b \in F$ çelişkisine ulaşılır. O halde $t = 2$ olmalıdır ve böylece ispat biter.

Yardımcı Özellik 3.4 R asal bir halka, I da R halkasının sıfırdan farklı bir sol ideali ve $a \in R$ olsun. m, n, k sabit pozitif tamsayılar olmak üzere her $x \in I$ için

$$\left[ax^m, x^n\right]_k = 0$$

ise o zaman $R \cong M_2\left(GF(2)\right)$ ve $I[I, I] = (0)$ olmadıkça $a \in Z(R)$'dir.

İspat. Her $x \in I$ için $\left[ax^m, x^n\right]_k = 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman her $x \in I$ için

$$\left[\left[a, x^n\right] x^m, x^n\right]_k = \left[ax^m, x^n\right]_{k+1} = 0$$

olur. Şimdi (Lee and Shiue, 1999) Lemma 3 uyarınca $R \cong M_2\left(GF(2)\right)$ ve $I[I, I] = (0)$ olmadıkça $a \in Z(R)$'dir.

Yardımcı Özellik 3.5 R değişmeli olmayan asal bir halka, I da R halkasının sıfırdan farklı bir sol ideali ve $a, b \in R$ olsun. m, n, r, k sabit pozitif tamsayılar olmak üzere her $x \in I$ için

$$\left[ax^{m+n} + \left[b, x^m\right] x^n, x^r\right]_k = 0 \qquad (3.5)$$

ise o zaman $R \cong M_2\left(GF(2)\right)$ ve $I[I, I] = (0)$ olmadıkça $a + b \in Z(R)$'dir.

İspat. $a+b \notin C$ olduğunu kabul edelim. Eğer bazı $\beta \in C$ için $I(b-\beta)=(0)$ ise $b'=b-\beta$ diyerek $Ib'=(0)$ olur. Üstelik (3.5)'ten her $x \in I$ için

$$\left[ax^{m+n}+\left[b',x^{m}\right]x^{n},x^{r}\right]_{k}=0$$

dır. Buradan her $x \in I$ için $\left[(a+b')x^{m+n},x^{r}\right]_{k}=0$ olur. Yardımcı Özellik 2.2.4 uyarınca I ve UI aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliklerini sağladığından her $x \in UI$ için $\left[(a+b')x^{m+n},x^{r}\right]_{k}=0$'dır. Üstelik $UIb'=(0)$'dır ancak ve ancak $Ib'=(0)$'dır. Şimdi I ve UI aynı temel şartları sağlar. Dolayısıyla R ve I'yı sırasıyla U ve UI ile yer değiştirerek $a,b' \in R$ ve $C=Z(R)$ olduğunu kabul edebiliriz. Böylece $a+b' \notin C$ olduğundan Yardımcı Özellik 3.4 uyarınca $R \cong M_2(GF(2))$ ve $I[I,I]=(0)$ olduğu sonucuna varılır.

O halde her $\beta \in C$ için $I(b-\beta)\neq(0)$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda (Lee, 1995) Lemma 3 ışığında ya R bir polinom özdeşliği halkasıdır ya da ub ve u, C-bağımsız olacak şekilde bir $u \in I$ elemanı vardır. İkinci durumda

$$\left[a(Xu)^{m+n}+\left[b,(Xu)^{m}\right](Xu)^{n},(Xu)^{r}\right]_{k}$$

R için aşikar olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir.

Diğer taraftan Teorem 2.2.7'den her $x \in Q_r I$ için

$$\left[ax^{m+n}+\left[b,x^{m}\right]x^{n},x^{r}\right]_{k}=0$$

dır. Yardımcı Özellik 3.2'deki aynı muhakemeyi uygulayarak ve I ile $Q_r I$'yı yer değiştirerek, R halkasının C'yi ilişkili bölümlü halkası olarak kabul eden ve sıfırdan farklı bir H "socle"sine sahip primitif bir halka ve $I=IC$ olduğunu kabul edebiliriz. Üstelik C, ya cebirsel kapalıdır ya da sonludur. $H \neq (0)$

olduğundan R'nin minimal sağ (ve sol) idealleri vardır. Üstelik N, R'nin bir minimal sağ ideali ise o zaman $N^2 \neq (0)$ olacağından Yardımcı Özellik 2.2.2 uyarınca $N = eR$ olacak şekilde bir $e = e^2 \in R$ idempotent elemanı vardır. Şimdi eğer R aşikar olmayan idempotent elemanlar içermiyorsa, o zaman. $N = R$ olmalıdır. Yani R'nin kendisinden başka minimal sağ ideali yoktur. Dolayısıyla R'nin kendisinden ve (0) idealinden başka sağ ideali yoktur. Böylece R bir bölümlü halkadır ve $I = R$ olur. O zaman Teorem 3.1'in ispatından $a+b \in C$ çelişkisine ulaşırız. O halde R'nin aşikar olmayan bir idempotent içerdiğini kabul edebiliriz. Diğer taraftan

- $I[I,I] = (0)$'dır ancak ve ancak $HI[HI,HI] = (0)$'dır (bkz. Yardımcı Özellik 2.2.4).

- Bazı $\mu \in C$ için $I(b-\mu) = (0)$'dır ancak ve ancak $HI(b-\mu) = (0)$'dır.

O halde I'yı HI ile yer değiştirerek $I \subseteq H$ olduğunu kabul edebiliriz. Öncelikle $I[I,I] \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. O zaman I, rankı 2 veya 2'den büyük olan bir idempotent daima içerir. e, I'da böyle bir idempotent olsun. Şimdi (3.5) denkleminde x yerine exe alarak her $x \in R$ için

$$\left[a(exe)^{m+n} + \left[b,(exe)^m\right](exe)^n,(exe)^r\right]_k = 0$$

elde edilir. Bu son denklemi soldan e ile çarparsak her $x \in R$ için

$$\left[(eae)(exe)^{m+n} + \left[(ebe),(exe)^m\right](exe)^n,(exe)^r\right]_k = 0$$

olduğu görülür. Ancak $t = rank(e)$ olmak üzere Teorem 2.2.3'den $eRe \cong M_t(C)$'dir. Yardımcı Özellik 3.2'den $e(a+b)e \in Ce$ olduğu sonucuna varırız. (3.5) denkleminde $x = e$ alınırsa, $rank(e) \geq 2$ olacak şekildeki her $e \in I$ idempotenti için

$$\left(a+b\right)e=e\left(a+b\right)e\in Ce$$

olduğu görülür. Diğer taraftan, her $x\in R$ için $e+\left(1-e\right)xe\in I$ elemanı da $rank\left(e+\left(1-e\right)xe\right)=rank\left(e\right)\geq 2$ olacak şekilde bir idempotent elemandır (bkz. Tanım 2.1.19). $c=a+b$ dersek, $rank\left(e\right)\geq 2$ olacak şekildeki her $e\in I$ idempotenti için $ce=ece\in Ce$ olur. Özel olarak, her $x\in R$ için

$$c\left(e+\left(1-e\right)xe\right)\in C\left(e+\left(1-e\right)xe\right)$$

dir. Soldan e ile çarparak $ece+ecxe-ecexe\in Ce$ elde edilir. $ece=ce\in Ce$ olduğundan her $x\in R$ için $\left[e,c\right]xe\in Ce$ 'dir. Bir an için $\left[e,c\right]\neq 0$ olduğunu kabul edelim. $x_0\in R$ elemanını bazı $\beta\in C$ için $\left[e,c\right]x_0e=\beta e\neq 0$ olacak şekilde seçelim. O zaman

$$\beta exe=\left[e,c\right]x_0exe\in Ce$$

dir. Dolayısıyla $\beta\neq 0$ olduğundan $eRe=Ce$ 'dir. Ancak $eRe=Ce$ olması $rank\left(e\right)=1$ olmasını gerektirir. O halde $\left[e,c\right]=0$ olmalıdır. Şimdi I tamamen indirgenebilir bir H-modül olduğundan (bkz. Tanım 2.1.12) I 'nın her bir elemanı $rank\left(f\right)\geq 2$ olacak şekildeki uygun bir $f^2=f\in I$ idempotent elemanı için Hf içinde kapsanır ve $fc=cf\in Cf$ 'dir.

$x\in I$ olsun. O zaman $x=hf$ olacak şekilde bir $h\in H$ elemanı ve $f^2=f\in I$ idempotenti vardır. Buradan $xc=hfc\in Chf=Cx$ ve dolayısıyla her $x\in I$ için $\left[xc,x\right]=0$ elde edilir. Bu son denklemi doğrusallaştırarak her $x,y\in I$ için

$$\left[xc,y\right]+\left[yc,x\right]=0 \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.6)'da $y=e$ alıp $[e,c]=0$ olduğu kullanılırsa $e[c,x]=0$ olduğu görülür. Böylece her $x,y\in I$ için $0=e[c,xy]=ex[c,y]$ olur. Dolayısıyla $eRI[c,I]=(0)$, yani $I[c,I]=(0)$'dır. Özel olarak, her $x\in I$ için $[x[c,x],x]=0$'dır. (Lee and Shiue, 1999) Lemma 3 (*ii*) ışığında bazı $\lambda\in C$ için $I(c-\lambda)=(0)$ olduğu elde edilir. $x\in R$ olsun. O zaman $f=e+(1-e)xe\in I$, $rank(f)=rank(e)\geq 2$ olacak şekilde bir idempotent elemandır. $rank(e)\geq 2$ olacak şekildeki her $e^2=e\in I$ idempotent elemanı için $[c,e]=0$ olduğundan, özel olarak her $x\in R$ için $[c-\lambda,e+(1-e)xe]=0$'dır. Buradan

$$(c-\lambda)e+(c-\lambda)(1-e)xe=0$$

elde edilir. Diğer taraftan $(c-\lambda)e=[c-\lambda,e]=0$'dır. O halde her $x\in R$ için $(c-\lambda)xe=0$ olur. Bu durumda R'nin asallığı $c=\lambda\in C$ olmasını gerektirir. Böylece $a+b=c\in Z(R)$ çelişkisine ulaşılır. Yani $I[I,I]=(0)$ olmalıdır.

Eğer şimdi bazı $t\geq 2$ için $H\cong M_t(C)$ olsun. $I\subseteq H$, H'nin bir sol ideali ve $I[I,I]=(0)$ olduğundan (Brešar, 1995) Lemma 5.1 uyarınca I, H'nin bir minimal sol idealidir. Dolayısıyla Yardımcı Özellik 3.3 uyarınca ispatlanacak bir şey yoktur. O halde her $t\geq 2$ için $H\ncong M_t(C)$ olduğunu kabul edebiliriz. $c\notin C$ olduğundan bazı $h\in I$ için $ch\neq hc$'dir. Litoff Teoremi'nden (bkz. Teorem 2.2.3), $rank(e)\geq 3$ ve $ch,hc,h\in eHe$ olacak şekilde bir $e^2=e\in H$ idempotenti vardır. Şimdi $ece\notin Ce$'dir. Gerçekten $ece\in Ce$ olsaydı $eceh=hece$ olur ve buradan da $eh=h=he$, $ech=ch$ ve $hce=hc$ olduğundan $ch=hc$ çelişkisine ulaşılırdı. Diğer taraftan, $0\neq h\in I\cap eRe$'dir. R merkezi kapalı, $IC=I$ ve $I[I,I]=(0)$ olduğundan yine (Brešar, 1995) Lemma 5.1 uyarınca I, R'nin bir minimal sol idealidir. Ayrıca $I\cap eRe$ de eRe'nin bir minimal sol ideali ve $t=rank(e)\geq 3$ olmak üzere $eRe\cong M_t(C)$'dir. Gerçekten eğer eRe'nin bir J sol ideali $J\subset I\cap eRe$ olacak şekilde ise o zaman $RJ\subset RI\subset I$'dır. RJ, R'nin bir sol ideali ve I da R'nin bir minimal sol ideali olduğundan $RJ=(0)$ olmalıdır. Dolayısıyla R'nin asallığından $J=(0)$'dır. Şimdi hipotezden her $x\in R$ için

$$\left[(eae)(exe)^{m+n}+\left[(ebe),(exe)^{m}\right](exe)^{n},(exe)^{r}\right]_{k}=0$$

ve buradan da her $x\in I\cap eRe$ için

$$\left[(eae)x^{m+n}+\left[(ebe),x^{m}\right]x^{n},x^{r}\right]_{k}=0$$

olur. Yardımcı Özellik 3.3 gereğince $eRe\cong M_2\left(GF(2)\right)$ çelişkisine ulaşılır. Böylece ispat biter.

Örnek 3.1 $s\geq 2$ bir tamsayı ve $R=M_s(F)$, bir F cismi üzerinde tüm $s\times s$ matrislerin halkası olsun. $I=Re_{11}$ olmak üzere $a=1-e_{s1}$ ve $b=e_{s1}$ ise k,m,n,r sabit pozitif tamsayılar olmak üzere her $x\in I$ için $\left[ax^{m+n}+\left[b,x^{m}\right]x^{n},x^{r}\right]_{k}=0$ ve $a+b=1\in Z(R)$'dir.

Teorem 3.2'nin İspatı. R'nin yoğun bir sol ideali üzerindeki her genelleştirilmiş türevin U'ya tek türlü genişletilebileceğini ve uygun bir $a\in U$ elemanı ve $d\in Der(U)$ türevi için $g(x)=ax+d(x)$ formunda olduğunu daha önce belirtmiştik.

Eğer $d=0$ ise her $x\in I$ için $\left[ax^{m+n},x^{r}\right]_{k}=0$ olur. O zaman Yardımcı Özellik 3.4 uyarınca $R\cong M_2\left(GF(2)\right)$ ve $I[I,I]=(0)$ olmadıkça $a\in C$ sonucuna varırız. Eğer $a\in C$ ise her $x\in R$ için $g(x)=ax=xa$ olur. O halde $d\neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz.

Kharchenko Teoremi ışığında ispatı iki duruma ayıralım:

Durum I. d, $b \in U - C$ elemanı ile belirli iç türev, yani her $x \in U$ için $d(x) = [b, x]$ olsun. O zaman I, aşikar olmayan

$$\left[aX^{m+n} + \left[b, X^m\right]X^n, X^r\right]_k$$

genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar. Yardımcı Özellik 2.2.4'den RI da yukarıdaki genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar. R ve U aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliklerini sağladığından UI da bu son özdeşliği sağlar. O zaman Yardımcı Özellik 3.5'i UI sol idealine uygulayarak $U \cong M_2\left(GF(2)\right)$ ve $UI[UI, UI] = (0)$ olmadıkça $a + b \in C$ olduğu sonucuna varırız. Yardımcı Özellik 3.5'in ispatında olduğu gibi R ve I'yı sırasıyla U ve UI ile yer değiştirebiliriz. O zaman özel olarak, $R \cong M_2\left(GF(2)\right)$ ve $I[I, I] = (0)$ olmadıkça $a + b \in C$ olduğu sonucuna varırız. Şimdi $a + b \in C$ olduğundan her $x \in R$ için

$$g(x) = ax + [b, x] = (a+b)x - xb = x(a+b-b) = xa$$

olduğu görülür.

Durum II. d, U'nun bir dış türevi olsun. İspata devam etmeden önce değişmeli olmayan X ve Y değişkenlerinin $G(Y, X) = \sum_{i=0}^{m-1} X^i Y X^{m-1-i}$ polinomunu tanımlayalım. Şimdi $d\left(X^m\right) = G\left(d(X), X\right)$ olduğu açıktır.

$$\left[aX^{m+n} + G\left(d(X), X\right)X^n, X^r\right]_k,$$

I için bir özdeşlik olduğundan her $u \in I - C$ için

$$\left[a(Xu)^{m+n} + G\left(d(Xu), Xu\right)(Xu)^n, (Xu)^r\right]_k$$

da R için bir özdeşliktir. Dolayısıyla R

$$\left[a(Xu)^{m+n}+G\big(d(X)u+Xd(u),Xu\big)(Xu)^{n},(Xu)^{r}\right]_{k}.$$

özdeşliğini sağlar. Bu durumda Kharchenko Teoremi'nden R aşağıdaki özdeşliği de sağlar:

$$\left[a(Xu)^{m+n}+G\big(Yu+Xd(u),Xu\big)(Xu)^{n},(Xu)^{r}\right]_{k}.$$

O zaman her $x,y\in R$ için

$$\left[a(xu)^{m+n}+G\big(yu+xd(u),xu\big)(xu)^{n},(xu)^{r}\right]_{k}=0 \qquad (3.7)$$

dır. Özel olarak (3.7) denkleminde $y=0$ alınırsa her $x\in R$ için

$$\left[a(xu)^{m+n}+G\big(xd(u),xu\big)(xu)^{n},(xu)^{r}\right]_{k}=0 \qquad (3.8)$$

olduğu görülür. $G(Y,X)$, Y'ye göre lineer olduğundan (3.7) denkleminden (3.8) denklemini çıkarırsak her $x,y\in R$ için

$$\left[G(yu,xu)(xu)^{n},(xu)^{r}\right]_{k}=0$$

olduğu görülür. O zaman her $x,y\in R$ için

$$0=\left[\sum_{i+j=m-1}(xu)^{i}(yu)(xu)^{j+n},(xu)^{r}\right]_{k}=\sum_{i+j=m-1}(xu)^{i}\left[(yu),(xu)^{r}\right]_{k}(xu)^{j+n} \qquad (3.9)$$

elde edilir. $u\notin C$ olduğundan (3.9), R için aşikar olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir. Dolayısıyla Martindale Teoremi'nden RC sıfırdan farklı bir H "socle"sine sahip primitif bir halkadır. $J=HI$, H'nin sıfırdan farklı bir sol idealidir. Teorem 2.1.4'den H basit bir halka olduğundan $H^{2}=H$ ve buradan da $HJ=H^{2}I=HI=J$ olduğu görülür. Üstelik J ve I aynı temel şartları sağlar. Şimdi R'yi H ile I'yı da J ile yer değiştirerek genelliği bozmadan R'nin basit bir halka, $soc(R)=R$ ve $RI=I$ olduğunu kabul edebiliriz. $e=e^2\in I$ aşikar olmayan bir idempotent olsun. O halde her $x,y\in R$ için (3.9)'dan

$$\sum_{i+j=m-1}(xe)^i\left[(ye),(xe)^r\right]_k(xe)^{j+n}=0$$

dir. $s\in R$ herhangi bir eleman olmak üzere bu son denklemde $y=(1-e)s$ alırsak

$$(1-e)s(xe)^{kr+m+n-1}=0$$

olduğunu görürüz. Buradan da $e=0$ veya $e=1$ çelişkisi elde edilir. O halde I'nın herhangi bir idempotent elemanı aşikardır. Bu durumda $I=R$ olur. Dolayısıyla her $x,y\in R$ için

$$\sum_{i+j=m-1}x^i\left[y,x^r\right]_k x^{j+n}=0$$

durumunu göz önüne almalıyız. Bu durumda yukarıdaki özdeşlik R için bir polinom özdeşliğidir. (Lanski, 1997) Lemma 2'den uygun bir F cismi için $R\subseteq M_t(F)$'dir. Üstelik $M_t(F)$, R ile aynı polinom özdeşliğini sağlar. Özel olarak $M_t(F)$,

$$\sum_{i+j=m-1}X^i\left[Y,X^r\right]_k X^{j+n} \tag{3.10}$$

özdeşliğini sağlar. Bir an için $t\geq 2$ olduğunu kabul edelim. (3.10)'da $x=e_{11}$ ve $y=e_{21}$ alınırsa $e_{21}=0$ çelişkisine ulaşılır. O halde $s=1$ olmalıdır. Bu ise R'nin değişmeli olmayışı ile çelişir.

Aşağıdaki örnek sonuçlarımızın yarı asal halkalarda genellikle doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 3.2 F herhangi bir cisim ve $GF(2)$ iki elemanlı Galois cismi olsun.

$$R=\begin{pmatrix} GF(2) & GF(2) & 0 \\ GF(2) & GF(2) & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}$$

yarı asal halkasını ve R 'nin

$$I=\begin{pmatrix} GF(2) & 0 & 0 \\ GF(2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}$$

sol idealini göz önüne alalım. Eğer $a=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $\alpha \in F$ sabit bir eleman olmak üzere $b=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ ise her $u,v \in GF(2)$ için $uv(u+v)=0$ olduğundan her $x \in I$ için

$$\left[ax^2+[b,x]x,x\right]=0$$

olduğu kolayca görülebilir. O zaman $g(x)=ax+[b,x]=(a+b)x-xb$, her $x \in I$ için $\left[g(x)x,x\right]=0$ olacak şekilde bir genelleştirilmiş türevdir. Ancak

$$a+b \notin C=\left\{\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} : \lambda \in GF(2), \mu \in F\right\}$$

dir.

4. ÇOKLU DOĞRUSAL POLİNOMLAR ÜZERİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER

Bu bölümde asal halkaların sağ ideallerinin çoklu doğrusal polinomlar üzerindeki genelleştirilmiş türevli iki özdeşliği incelenecektir[1]. Daha açık bir ifadeyle aşağıdaki problem ele alınacaktır:

Problem. K birimli değişmeli bir halka olsun. R asal bir K-cebir, I R'nin bir sağ ideali, g R'nin sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türevi ve $f\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ de K üzerinde çoklu doğrusal bir polinom olsun.

1. Her $x_1,\ldots,x_n \in I$ için $g\left(f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right)f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0$ ise $f\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ polinomu, g genelleştirilmiş türevi ve R halkası hakkında ne söylenebilir?

2. Her $x_1,\ldots,x_n \in I$ için $g\left(f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right)f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in C$ ise $f\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ polinomu, g genelleştirilmiş türevi ve R halkası hakkında ne söylenebilir?

Lanski (1988), R asal bir halka ve L de R'nin değişmeli olmayan bir Lie ideali olmak üzere her $x \in L$ için $d\left(x\right)x = xd\left(x\right)$ olacak şekilde R'nin sıfırdan farklı bir d türevinin var olması durumunda $char\left(R\right)=2$ olduğunu ve R'nin s_4 standart özdeşliğini sağladığını göstermiştir.

Brešar (1993), değişmeli olmayan asal bir halkanın eş-merkezleyen türevlerinin sıfır türevine eşit olması gerektiğini göstermiştir. Daha açık bir ifadeyle R asal bir halka olmak üzere R'nin d ve δ gibi iki türevi her $x \in R$ için $d\left(x\right)x - x\delta\left(x\right) \in Z\left(R\right)$ olacak şekilde ise R değişmelidir veya $d = 0 = \delta$'dır.

[1] Bu bölümde elde edilen sonuçlar Algebra Colloquium adlı dergide yayınlanacaktır.

Lee ve Shiue (1998), Brešar'ın yukarıdaki sonucunu polinomlara şu şekilde genişletmişlerdir: R asal bir halka, $f(X_1,\ldots,X_n)$ de C üzerinde bir polinom ve d ile δ da R'nin türevleri olsun. Her $x_1,\ldots,x_n \in R$ için

$$d(f(x_1,\ldots,x_n))f(x_1,\ldots,x_n)-f(x_1,\ldots,x_n)\delta(f(x_1,\ldots,x_n))\in C$$

ve $f(X_1,\ldots,X_n)$, RC üzerinde merkezi değerli değil ise o zaman ya $d=0=\delta$ veya $char(R)=2$ ve $\dim_C RC=4$ olmadıkça $d=-\delta$'dır ve $f(X_1,\ldots,X_n)^2$, RC üzerinde merkezi değerlidir.

Bu bölüm için ana motivasyonumuz Lee ve Shiue'nin yukarıdaki sonucudur. Esas olarak bu sonucun asal halkaların sağ idealleri üzerinde genelleştirilmiş türevler için kısmi bir genellemesini elde etmeyi amaçlıyoruz.

Literatürde var olan şu sonuçlardan da bahsetmekte fayda vardır.

Brešar (1994), R asal bir halka, I R'nin sıfırdan farklı bir sağ ideali ve d de R'nin bir türevi olmak üzere $d(I)I=(0)$ olması için gerek ve yeter bir şartın her $x\in R$ için $d(x)=[q,x]$ ve $qI=(0)$ olacak şekilde bir $q\in U$ elemanının var olması olduğunu göstermiştir. Bu sonucun Teorem 4.1'de çoklu doğrusal polinomlar üzerinde genelleştirilmiş türevlere bir genellemesi elde edilecektir.

Albaş ve Argaç (2004) Posner'in bir sonucunu (Posner, 1957) genelleştirilmiş türevlere genişlettikleri çalışmalarında, değişmeli olmayan asal bir R halkasının her $x\in R$ elemanı için $[g(x),x]\in Z(R)$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir g genelleştirilmiş türevine sahip olması durumunda bazı $\lambda\in C$ ve her $x\in R$ için $g(x)=\lambda x$ formunda olması gerektiğini göstermişlerdir.

Daha yakın bir zamanda Ma ve Xu (2006), Brešar'ın (1993) yukarıda bahsettiğimiz sonucunu genelleştirilmiş türevler için ispatlamışlardır: R değişmeli olmayan asal bir halka ve g ile h de R'nin iki genelleştirilmiş türevi olsun. Her $x \in L$, R'nin merkezi olmayan bir Lie ideali, için $g(x)x - xh(x) \in Z(R)$ olacak şekilde ise o zaman ya R, s_4 standart özdeşliğini sağlar ya da her $x \in R$ için $g(x) = xa$ ve $h(x) = ax$ olacak şekilde bir $a \in U$ vardır.

Bu bölümde elde edilecek olan iki ana teorem aşağıda ispatlayacağımız bir dizi yardımcı özelliğin birer sonucu olacaktır. İlk olarak g genelleştirilmiş türevinin bir genelleştirilmiş iç türev olması durumunda problemimizdeki özdeşliği önce halka, daha sonra da halkanın sağ idealleri üzerinde inceleyerek ilerleyeceğiz.

Yardımcı Özellik 4.1 R, merkezi $Z(R)$ ve genişletilmiş merkezi C olan asal bir halka olsun. $a, b \in R$ ve $f(X_1, \ldots, X_n)$, C üzerinde çoklu doğrusal bir polinom olsun. $f(X_1, \ldots, X_n)$ polinomunun R için bir özdeşlik olmadığını ve her $x_1, \ldots, x_n \in R$ için

$$\left(af(x_1, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x_n)b\right)f(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

olduğunu kabul edelim. O zaman aşağıdakilerden biri sağlanır:

(*i*) $a = -b \in C$'dir,

(*ii*) $f(X_1, \ldots, X_n)$, R üzerinde merkezi değerlidir ve $a + b = 0$'dır.

İspat. Eğer $f(X_1, \ldots, X_n)$, R üzerinde merkezi değerli ise ispatlanacak bir şey yoktur. $f(X_1, \ldots, X_n)$ polinomunun merkezi değerli olmadığını ve ya $a \notin Z(R)$ ya da $b \notin Z(R)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\left(af(X_1, \ldots, X_n) + f(X_1, \ldots, X_n)b\right)f(X_1, \ldots, X_n)$$

R için aşikar olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir. Martindale Teoremi'nden RC sıfırdan farklı bir "socle"ye sahip primitif bir halkadır (Martindale, 1969). O zaman RC, bölümlü bir D halkası üzerindeki bir V vektör uzayının D-doğrusal dönüşümlerinin yoğun bir alt halkasıdır.

Eğer $\dim_D V = \infty$ ise (Wong, 1996) Lemma 2'den RC, $(aX + Xb)X$ özdeşliğini sağlar. Bu özdeşliği doğrusallaştırarak her $x, y \in RC$ için

$$(ax + xb)y + (ay + yb)x = 0$$

olduğu görülür. (Brešar, 1994) Lemma 4'ten her $x \in R$ için $ax + xb = 0$ elde edilir. Buradan da $a = -b \in C$ çelişkisine ulaşılır.

O halde $\dim_D V = k$ sonlu bir tamsayı olmalıdır. Bu durumda RC, aşikar olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği sağlayan basit bir halkadır. Yardımcı Özellik 2.2.3'den uygun bir F cismi için $RC \subseteq M_t(F)$'dir. Üstelik $M_t(F)$, RC ile aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar. Böylece her $x_1, \ldots, x_n \in M_t(F)$ için

$$\left(af(x_1, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x_n)b\right) f(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

dir. $f(X_1, \ldots, X_n)$ polinomunun $M_t(F)$ üzerinde merkezi değerli olması durumunda yukarıdaki denklem her $x_1, \ldots, x_n \in M_t(F)$ için

$$(a + b) f(x_1, \ldots, x_n)^2 = 0$$

denklemine indirgenir. Üstelik $f(X_1, \ldots, X_n)$, R için bir özdeşlik olmadığından $M_t(F)$ için de bir özdeşlik değildir. Dolayısıyla (Chang, 2003) Lemma 2'den $a + b = 0$ olmalıdır.

Diğer taraftan, $f(X_1,\dots,X_n)$ polinomu $M_t(F)$ üzerinde merkezi değerli bir polinom değilse o zaman Yardımcı Özellik 2.2.1'den $k \neq l$ olmak üzere $f(u_1,\dots,u_n) = \alpha e_{kl}$ olacak şekilde $u_1,\dots,u_n \in M_t(F)$ ve $0 \neq \alpha \in F$ vardır. Üstelik $\{f(u_1,\dots,u_n) : u_1,\dots,u_n \in M_t(F)\}$ kümesi $M_t(F)$'nin tüm F-otomorfizmaları altında değişmezdir. Herhangi $i \neq j$ için $\{1,\dots,n\}$ kümesinin bir σ permütasyonu $\sigma(k) = i$ ve $\sigma(l) = j$ olacak şekilde olsun. O zaman her $\sum_{1 \le r,s \le t} a_{rs} e_{rs} \in M_t(F)$ için $\psi\left(\sum_{1 \le r,s \le n} a_{rs} e_{rs}\right) = \sum_{1 \le r,s \le n} a_{rs} e_{\sigma(r)\sigma(s)}$ ile tanımlı dönüşüm bir F-otomorfizmadır. O zaman $\varphi(u_i) = r_i$ dersek her $i \neq j$ için

$$f(r_1,\dots,r_n) = f(\psi(u_1),\dots,\psi(u_n)) = \psi(f(u_1,\dots,u_n)) = \psi(\alpha e_{kl}) = \alpha e_{ij}$$

olacak şekilde $r_1,\dots,r_n \in M_t(F)$ vardır. O halde her $i \neq j$ için

$$0 = (a\alpha e_{ij} + \alpha e_{ij} b)\alpha e_{ij} = \alpha^2 b_{ji} e_{ij}$$

olduğu görülür. Böylece her $i \neq j$ için $b_{ji} = 0$, yani b köşegen bir matristir. Üstelik φ, $M_t(F)$'nin bir F-otomorfizması ise her $x_1,\dots,x_n \in M_t(F)$ için

$$\left(\varphi(a) f(x_1,\dots,x_n) + f(x_1,\dots,x_n)\varphi(b)\right) f(x_1,\dots,x_n) = 0$$

dır. O zaman yukarıdaki gibi $\varphi(b)$ köşegen bir matris olmalıdır. b köşegen bir matris olduğundan $\beta_i \in F$ olmak üzere $b = \sum_{i=1}^{t} \beta_i e_{ii}$ olsun. Şimdi herhangi $j > 1$ için $\varphi(b) = (1 + e_{1j}) b (1 - e_{1j})$ matrisinin $(1, j)$ içeriği $\beta_j - \beta_1 = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $b \in F$'dir. Bu durumda yine her $x_1,\dots,x_n \in M_t(F)$ için

$$(a + b) f(x_1,\dots,x_n)^2 = 0$$

olur. Yukarıdaki gibi (Chang, 2003) Lemma 2'den $a+b=0$ olduğu sonucuna varılır. Böylece $a=-b\in C$ çelişkisi ispatı bitirir.

Yardımcı Özellik 4.2 R, merkezi $Z(R)$ ve genişletilmiş merkezi C olan asal bir halka olsun. $a,b\in R$, $f(X_1,\ldots,X_n)$ C üzerinde çoklu doğrusal bir polinom ve I da R'nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. Her $x_1,\ldots,x_n\in I$ için

$$\left(af(x_1,\ldots,x_n)+f(x_1,\ldots,x_n)b\right)f(x_1,\ldots,x_n)=0$$

ise o zaman aşağıdakilerden biri sağlanır:

(***i***) $f(X_1,\ldots,X_n)X_{n+1}$, I için bir özdeşliktir,

(***ii***) her $x\in I$ için $ax=-bx\in Cx$'tir.

(***iii***) $(a+b)I=(0)$ ve $\left[f(X_1,\ldots,X_n),X_{n+1}\right]X_{n+2}$, I için bir özdeşliktir.

İspat. Eğer $f(X_1,\ldots,X_n)$, R için bir özdeşlik ise ispatlanacak bir şey yoktur. Dolayısıyla $f(X_1,\ldots,X_n)$ polinomunun R için bir özdeşlik olmadığını kabul edebiliriz. İlk olarak ya R'nin bir GPI-halkası olduğunu ya da yardımcı özelliğin sağlandığını göstermek istiyoruz. Eğer au ve u C-bağımsız olacak şekilde bir $u\in I$ varsa o zaman

$$\left(af(uX_1,\ldots,uX_n)+f(uX_1,\ldots,uX_n)b\right)f(uX_1,\ldots,uX_n) \tag{4.1}$$

R için aşikar olmayan bir polinom özdeşliğidir. Çünkü $af(uX_1,\ldots,uX_n)^2$ polinomunun (4.1) içinde aşikar olmayan bir geçişi vardır. Böylece R bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği halkasıdır. O halde her $u\in I$ için $au=\lambda u$ olacak şekilde bir $\lambda\in C$ elemanının var olduğunu kabul edebiliriz. O zaman R

$$\left(\lambda f(uX_1,\ldots,uX_n)+f(uX_1,\ldots,uX_n)b\right)f(uX_1,\ldots,uX_n) \tag{4.2}$$

özdeşliğini sağlar. Eğer bazı $u \in I$ için bu ve u C-bağımsız ise

$$f\left(uX_1,\ldots,uX_n\right)bf\left(uX_1,\ldots,uX_n\right)$$

polinomunun (4.2) içinde aşikar olmayan bir geçişi olduğundan yine R'nin bir GPI-halkası olduğu görülür. Dolayısıyla her $u \in I$ için $bu = \beta u$ olacak şekilde bir $\beta \in C$ elemanın var olduğunu kabul edebiliriz. O zaman her $x_1,\ldots,x_n \in R$ için

$$\left(\lambda+\beta\right)f\left(ux_1,\ldots,ux_n\right)^2 = 0$$

dır. Böylece ya $\lambda+\beta=0$ ya da her $x_1,\ldots,x_n \in R$ için $f\left(ux_1,\ldots,ux_n\right)^2 = 0$ olmalıdır. Eğer $\lambda+\beta=0$ ise her $u \in I$ için $au = -bu \in Cu$ olur. Şimdi ikinci durumun sağlandığını kabul edelim. O zaman I, $f\left(X_1,\ldots,X_n\right)^2$ polinom özdeşliğini sağlar. Bu durumda I aşikar olmayan bir polinom özdeşliği sağladığından (Lee, 1996) uyarınca $IC = eRC$ olacak şekilde bir $e \in Soc\left(RC\right)$ idempotent elemanı vardır. O halde R, $f\left(eX_1,\ldots,eX_n\right)^2$ özdeşliğini ve dolayısıyla $ef\left(eX_1,\ldots,eX_n\right)^2$ özdeşliğini sağlar. O zaman (Chuang and Lee, 1996)'daki ana teoremden R, $ef\left(eX_1,\ldots,eX_n\right)eX_{n+1}$ özdeşliğini sağlar. Bu ise I, $f\left(X_1,\ldots,X_n\right)X_{n+1}$ özdeşliğini sağlar demektir.

Bundan sonra R'nin bir GPI-halkası olduğunu kabul edebiliriz. (Martindale, 1969) uyarınca RC, sıfırdan farklı bir $J = IH$'yi sağ ideali kabul eden sıfırdan farklı bir H "socle"sine sahiptir. Bu noktada H'nin basit bir halka (bkz. Teorem 2.1.4), $J = JH$ olduğunu ve (Lee, 1992)'den J ile I'nın aynı temel şartları sağladığını belirtelim. R'yi H ile ve I'yı da J ile yer değiştirerek R'nin basit bir halka, $soc\left(R\right) = H$ ve $IR = I$ olduğunu kabul edebiliriz.

Yardımcı özellikte yer alan sonucun gerçeklenmediğini kabul edelim. O zaman ya

(i) $(a+b)u \neq 0$, ya

(ii) $au, bu \notin Cu$ ve $(a+b)v \neq 0$, ya da

(iii) $\left[f(b_1,\ldots,b_n),b_{n+1}\right]b_{n+2} \neq 0$

olacak şekilde $u,v,b_1,\ldots,b_{n+2} \in I$ vardır. Üstelik, her $1 \leq i \leq n$ için $t_i(X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_n)$, monomialleri içinde X_i değişkeninin bir geçişinin bulunmadığı $n-1$ değişkenli çoklu doğrusal polinom olmak üzere

$$f(X_1,\ldots,X_n) = \sum_{i=1}^{n} t_i(X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_n)X_i$$

şeklinde yazılabilir.

$f(X_1,\ldots,X_n)$ polinomunun I için bir özdeşlik olmadığı açıktır. O halde bazı $i \in \{1,\ldots,n\}$ için $t_i(X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_n)X_i$, I için bir özdeşlik değildir. Sadelik için $i=n$ diyelim. Yani $t_n(X_1,\ldots,X_{n-1})X_n$, I için bir özdeşlik değildir. O zaman

$$t_n(w_1,\ldots,w_{n-1})w_n \neq 0$$

olacak şekilde $w_1,\ldots,w_n \in I$ vardır. Önerme 2.1.2'den R regüler bir halka olduğundan

$$eR = uR + vR + \sum_{i=1}^{n} w_i R + \sum_{i=1}^{n+2} b_i R$$

dir. Üstelik $eu = u$, $ev = v$ ve her $i \in \{1,\ldots,n\}$ için $ew_i = w_i$ ve her $j \in \{1,\ldots,n+2\}$ için $eb_j = b_j$ olacak şekilde bir $e = e^2 \in I = IR$ idempotenti vardır (bkz. Yardımcı Özellik 2.1.2). Özel olarak, her $r_1,\ldots,r_n \in R$ için

$$0=\left(af\left(er_1,\ldots,er_n\left(1-e\right)\right)+f\left(er_1,\ldots,er_n\left(1-e\right)\right)b\right)f\left(er_1,\ldots,er_n\left(1-e\right)\right)$$
$$=\left(at_n\left(er_1,\ldots,er_{n-1}\right)er_n\left(1-e\right)+t_n\left(er_1,\ldots,er_{n-1}\right)er_n\left(1-e\right)b\right)t_n\left(er_1,\ldots,er_{n-1}\right)er_n\left(1-e\right)$$

dir. O zaman

$$t_n\left(er_1,\ldots,er_{n-1}\right)er_n\left(1-e\right)bt_n\left(er_1,\ldots,er_{n-1}\right)er_n\left(1-e\right)=0,$$

ve dolayısıyla

$$\left(\left(1-e\right)bet_n\left(er_1,\ldots,er_{n-1}\right)er_n\right)^3=0$$

dır. Bu durumda $\left(1-e\right)bet_n\left(er_1,\ldots,er_{n-1}\right)eR$, R'nin sınırlı indeksli nil bir sağ idealidir. O halde Yardımcı Özellik 2.1.6'dan her $r_1,\ldots,r_n\in R$ için $\left(1-e\right)bet_n\left(er_1,\ldots,er_{n-1}\right)er_n=0$'dır. Dolayısıyla (Chuang and Lee, 1996)'den ya $\left(1-e\right)be=0$ ya da $t_n\left(X_1,\ldots,X_{n-1}\right)X_n$, eR için bir özdeşliktir. Eğer ikinci durum sağlanırsa, özel olarak

$$0=t_n\left(ew_1,\ldots,ew_{n-1}\right)ew_n=t_n\left(w_1,\ldots,w_{n-1}\right)w_n\neq 0$$

çelişkisi elde edilir. O halde $\left(1-e\right)be=0$ olduğunu kabul edebiliriz. Üstelik her $r_1,\ldots,r_n\in R$ için

$$0=\left(af\left(er_1,\ldots,er_n\right)+f\left(er_1,\ldots,er_n\right)b\right)f\left(er_1,\ldots,er_n\right) \tag{4.3}$$

dır. (4.3) denklemini soldan $1-e$ ile çarparak $\left(1-e\right)aef\left(er_1,\ldots,er_n\right)^2=0$ denklemi elde edilir. Böylece (Chang, 2003)'den $\left(1-e\right)ae=0$ veya $f\left(er_1,\ldots,er_n\right)er_{n+1}=0$ olduğu sonucuna varılır. Eğer ikinci durum sağlanırsa

$$0=\left[f\left(eb_1,\ldots,eb_n\right),eb_{n+1}\right]eb_{n+2}=\left[f\left(b_1,\ldots,b_n\right),b_{n+1}\right]b_{n+2}\neq 0$$

çelişkisine ulaşılır. Dolayısıyla $(1-e)ae=0$ olmalıdır. Bu durumda her $x_1,\ldots,x_n \in R$ için

$$\left(eaef\left(ex_1e,\ldots,ex_ne\right)+f\left(ex_1e,\ldots,ex_ne\right)ebe\right)f\left(ex_1e,\ldots,ex_ne\right)=0$$

olduğu açıktır. Yardımcı Özellik 4.1'den ya

(i) $eae=-ebe\in Ce$, ya

(ii) $eae+ebe=0$ ve $f\left(X_1,\ldots,X_n\right)$, eRe üzerinde merkezi değerlidir, ya da

(iii) $f\left(X_1,\ldots,X_n\right)$, eRe için bir özdeşliktir.

Eğer ilk durum gerçeklenirse $ae=eae=-ebe=-be\in Ce$ ve buradan da

$$au=aeu=-beu=-bu\in Ceu=Cu$$

çelişkisi elde edilir. Eğer ikinci durum gerçeklenirse

$$\left[f\left(X_1,\ldots,X_n\right),X_{n+1}\right]X_{n+2}$$

eR üzerinde bir özdeşliktir. Buradan da yine

$$0=\left[f\left(eb_1,\ldots,eb_n\right),eb_{n+1}\right]eb_{n+2}=\left[f\left(b_1,\ldots,b_n\right),b_{n+1}\right]b_{n+2}\neq 0$$

ve $0=(eae+ebe)v=(ae+be)v=(a+b)ev=(a+b)v\neq 0$ çelişkilerine ulaşılır. Son olarak $f\left(X_1,\ldots,X_n\right)$, eRe için bir özdeşlik ise her $x_1,\ldots,x_{n+2}\in R$ için

$$\left[f\left(ex_1,\ldots,ex_n\right),ex_{n+1}\right]ex_{n+2}=0$$

olur. Yukarıdaki gibi bu da bir çelişki doğurur. Böylece ispat biter.

Teorem 4.1 K birimli değişmeli bir halka, R merkezi $Z(R)$ olan asal bir K-cebir, U ve C de sırasıyla R'nin sağ Utumi kesirler halkası ve genişletilmiş merkezi olsun. g, R'nin sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türevi, $f(X_1,\ldots,X_n)$ K üzerinde çoklu doğrusal bir polinom ve I da R'nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. Eğer her $x_1,\ldots,x_n \in I$ için

$$g\left(f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right)f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0$$

ise o zaman ya $f(X_1,\ldots,X_n)X_{n+1}$, I için bir özdeşliktir ya da her $x \in R$ için $g(x)=ax+[b,x]$ olacak şekilde $a,b \in U$ vardır ve aşağıdakilerden biri sağlanır:

(***i***) $aI=(0)$ ve $\left[f\left(X_1,\ldots,X_n\right),X_{n+1}\right]X_{n+2}$, I için bir özdeşliktir.

(***ii***) $aI=(0)$ ve $(b-\beta)I=(0)$ olacak şekilde bir $\beta \in C$ vardır.

İspat. Daha önce belirttiğimiz gibi R'nin yoğun bir sağ ideali üzerindeki her genelleştirilmiş türev U'ya tek türlü genişletilebilir ve uygun bir $a \in U$ elemanı ve $d \in Der(U)$ türevi için $g(x)=ax+d(x)$ formundadır. O zaman her $x_1,\ldots,x_n \in I$ için

$$\left(af\left(x_1,\ldots,x_n\right)+d\left(f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right)\right)f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0$$

dır. Dolayısıyla $u \in I$ için U,

$$\left(af\left(uX_1,\ldots,uX_n\right)+d\left(f\left(uX_1,\ldots,uX_n\right)\right)\right)f\left(uX_1,\ldots,uX_n\right)$$

özdeşliğini sağlar. $f(X_1,\ldots,X_n)X_{n+1}$ polinomunun I için bir özdeşlik olmadığını kabul edelim. Eğer $d=0$ ise her $x_1,\ldots,x_n \in I$ için $af\left(x_1,\ldots,x_n\right)^2=0$ olur. O zaman (Chang, 2003)'den $aI = (0)$ olmalıdır. Böylece her $x \in R$ için $g(x) = ax$ ve $aI = (0)$'dır. O halde $d \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz.

$f(X_1, \ldots, X_n)$ polinomu K üzerinde çoklu doğrusal bir polinom olduğundan $\alpha_\sigma \in K$ olmak üzere

$$f(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma X_{\sigma(1)} \cdots X_{\sigma(n)}$$

formundadır. R asal bir halka olduğundan $K \subseteq C$ olduğunu kabul edebiliriz ve dolayısıyla herhangi bir $\alpha \in K$ için $d(\alpha \cdot 1) \in C$'dir. $f^d(X_1, \ldots, X_n)$ ile $f(X_1, \ldots, X_n)$ polinomunun her bir α_σ katsayısı yerine $d(\alpha_\sigma \cdot 1)$ yazılarak elde edilen polinomu gösterelim. Böylece

$$d(f(X_1, \ldots, X_n)) = f^d(X_1, \ldots, X_n) + \sum_{i=1}^{n} f(X_1, \ldots, d(X_i), \ldots, X_n)$$

olur.

Bu durumda I,

$$\left(af(X_1, \ldots, X_n) + f^d(X_1, \ldots, X_n) + \sum_{i=1}^{n} f(X_1, \ldots, d(X_i), \ldots, X_n)\right) f(X_1, \ldots, X_n)$$

özdeşliğini sağlar. Kharchenko Teoremi ışığında ispatı iki duruma ayıralım:

Durum I. Eğer d bir $b \in U - C$ elemanı ile belirli iç türev, yani her $x \in U$ için $d(x) = [b, x]$ ise o zaman $g(x) = ax + d(x) = (a + b)x - xb$ olur ve I

$$((a + b) f(X_1, \ldots, X_n) - f(X_1, \ldots, X_n) b) f(X_1, \ldots, X_n)$$

özdeşliğini sağlar. Yardımcı Özellik 4.2'den aşağıdakilerden biri sağlanır:

(i) $f(X_1,\ldots,X_n)X_{n+1}$, I için bir özdeşliktir,

(ii) her $x \in I$ için $(a+b)x = bx \in Cx$, yani $ax = 0$ ve $bx \in Cx$ 'dir,

(iii) $[f(X_1,\ldots,X_n), X_{n+1}]X_{n+2}$, I için bir polinom özdeşliğidir ve $aI = (a+b-b)I = (0)$ 'dır.

Şimdi $f(X_1,\ldots,X_n)X_{n+1}$ polinomunun I için bir özdeşlik olmadığını kabul ettiğimizden ilk durum sağlanmaz. Eğer son durum sağlanıyorsa ispat biter. O halde ikinci durumun sağlandığını kabul edelim. O zaman $aI = (0)$ ve her $x \in I$ için $bx \in Cx$ 'dir. O zaman her $x \in I$ için $[bx, x] = 0$ olur. O halde bu son denklemi doğrusallaştırarak her $x, y \in I$ için $[b,x]y + [b,y]x = 0$ elde edilir. $r \in R$ olmak üzere y yerine yr yazarak ve tekrar yukarıdaki son denklemi kullanarak

$$[b,y][x,r] = y[b,r]x$$

elde edilir. Şimdi her $s \in R$ için x yerine xs yazarak $[b,I]I[R,R] = (0)$ olduğu görülür. O zaman R 'nin asallığından R değişmelidir veya $[b,I]I = (0)$ 'dır. Eğer R değişmeli ise $[b,I]I = (0)$ olduğu açıktır. Böylece (Brešar, 1994) Lemma'dan $(b-\beta)I = (0)$ olacak şekilde bir $\beta \in C$ vardır.

Durum II. Şimdi d, U 'nun bir dış türevi olsun. I ve IU aynı diferansiyel özdeşlikleri sağladığından (bkz. Teorem 2.2.8)

$$\left(af(X_1,\ldots,X_n) + d\left(f(X_1,\ldots,X_n)\right)\right)f(X_1,\ldots,X_n)$$

IU için bir özdeşliktir. O zaman U

$$\begin{pmatrix} af\left(uX_1,\dots,uX_n\right)+f^d\left(uX_1,\dots,uX_n\right) \\ \qquad +\sum_{i=1}^{n} f\left(uX_1,\dots,d\left(u\right)X_i+ud\left(X_i\right),\dots,uX_n\right) \end{pmatrix} f\left(uX_1,\dots,uX_n\right)$$

özdeşliğini sağlar. d bir dış türev olduğundan Karchenko Teoremi gereğince U

$$\begin{pmatrix} af\left(uX_1,\dots,uX_n\right)+f^d\left(uX_1,\dots,uX_n\right) \\ \qquad +\sum_{i=1}^{n} f\left(uX_1,\dots,d\left(u\right)X_i+uY_i,\dots,uX_n\right) \end{pmatrix} f\left(uX_1,\dots,uX_n\right)$$

özdeşliğini sağlar. Bu durumda U

$$f\left(uX_1,\dots,uY_i,\dots,uX_n\right)f\left(uX_1,\dots,uX_i,\dots,uX_n\right)$$

özdeşliğini sağlar. Özel olarak U, $f\left(uX_1,\dots,uX_i,\dots,uX_n\right)^2$ özdeşliğini sağlar. Bu durumda I, $f\left(X_1,\dots,X_n\right)^2$ özdeşliğini sağlar. Böylece $IC=eRC$ olacak şekilde bir $e=e^2\in Soc\left(RC\right)$ vardır (Lee, 1996). O halde R, $f\left(eX_1,\dots,eX_n\right)^2$ özdeşliğini, ve dolayısıyla $ef\left(eX_1,\dots,eX_n\right)^2$ özdeşliğini sağlar. O zaman (Chuang and Lee, 1996)'deki ana teoremden R, $ef\left(eX_1,\dots,eX_n\right)eX_{n+1}$ özdeşliğini sağlar. Yani $f\left(X_1,\dots,X_n\right)X_{n+1}$, $IC=eRC$ için bir özdeşliktir. Bu ise I'nın $f\left(X_1,\dots,X_n\right)X_{n+1}$ özdeşliğini sağlamıyor oluşuyla çelişir.

Sonuç 4.1 K birimli değişmeli bir halka, R merkezi $Z\left(R\right)$ olan asal bir K-cebir, U ve C de sırasıyla R'nin sağ Utumi kesirler halkası ve genişletilmiş merkezi olsun. g, R'nin sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türevi, $f\left(X_1,\dots,X_n\right)$ K üzerinde çoklu doğrusal bir polinom olsun. Eğer her $x_1,\dots,x_n\in R$ için

$$g\left(f\left(x_1,\dots,x_n\right)\right)f\left(x_1,\dots,x_n\right)=0$$

ise o zaman ya $f(X_1,\ldots,X_n)$, R için bir özdeşliktir ya da her $x\in R$ için $g(x)=[b,x]$ olacak şekilde $b\in U$ vardır ve $f(X_1,\ldots,X_n)$, R üzerinde merkezi değerlidir.

Yardımcı Özellik 4.3 K birimli değişmeli bir halka, R merkezi $Z(R)$ olan asal bir K-cebir, U ve C de sırasıyla R'nin sağ Utumi kesirler halkası ve genişletilmiş merkezi olsun. g, R'nin sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türevi, $f(X_1,\ldots,X_n)$ K üzerinde çoklu doğrusal bir polinom olsun. Eğer her $x_1,\ldots,x_n\in R$ için

$$g(f(x_1,\ldots,x_n))f(x_1,\ldots,x_n)\in C$$

ise o zaman ya

(***i***) $f(X_1,\ldots,X_n)$, R için bir özdeşliktir, ya da

(***ii***) $char(R)=2$'dir ve R, s_4 standart özdeşliğini sağlar, ya da

(***iii***) her $x\in R$ için $g(x)=ax+[b,x]$ olacak şekilde $a,b\in U$ vardır ve aşağıdakilerden biri sağlanır:

(1) $a,b\in C$ ve $f(X_1,\ldots,X_n)^2$, R üzerinde merkezi değerlidir,

(2) $a\in C$ ve $f(X_1,\ldots,X_n)$, R üzerinde merkezi değerlidir.

İspat. Uygun bir $a\in U$ elemanı ve $d\in Der(U)$ türevi için $g(x)=ax+d(x)$ formunda olduğundan her $x_1,\ldots,x_n\in R$ için

$$\left(af(x_1,\ldots,x_n)+d(f(x_1,\ldots,x_n))\right)f(x_1,\ldots,x_n)\in C$$

dir. Eğer her $x_1,\ldots,x_n \in R$ için

$$\left(af\left(x_1,\ldots,x_n\right)+d\left(f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right)\right)f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0$$

ise Sonuç 4.1'den ispat biter. Aksi halde $g\left(f\left(r_1,\ldots,r_n\right)\right)f\left(r_1,\ldots,r_n\right)\neq 0$ olacak şekilde $r_1,\ldots,r_n \in R$ elemanları vardır. Kabulümüzden her $x_1,\ldots,x_n \in R$ için

$$\left(af\left(x_1,\ldots,x_n\right)+f^d\left(x_1,\ldots,x_n\right)+\sum_{i=1}^{n} f\left(x_1,\ldots,d\left(x_i\right),\ldots,x_n\right)\right)f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in C$$

dir. O halde R merkezi bir

$$\left(af\left(X_1,\ldots,X_n\right)+f^d\left(X_1,\ldots,X_n\right)+\sum_{i=1}^{n} f\left(X_1,\ldots,d\left(X_i\right),\ldots,X_n\right)\right)f\left(X_1,\ldots,X_n\right) \tag{4.4}$$

diferansiyel polinomuna sahiptir. Chang and Lee'deki (1998) Theorem 1'den R bir polinom özdeşliği halkasıdır.

d türevinin bir $b \in U$ elemanı ile belirli bir U-iç türev olduğunu kabul edelim. O zaman U ve R aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliklerini sağladığından her $x_1,\ldots,x_n \in U$ için

$$\left(\left(a+b\right)f\left(x_1,\ldots,x_n\right)-f\left(x_1,\ldots,x_n\right)b\right)f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in C$$

dir. O halde U aşikar olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği sağlayan birimli bir basit halkadır. Dolayısıyla (Martindale, 1969)'den D, C üzerinde sonlu boyutlu bölümlü bir cebir olmak üzere $U=M_k\left(D\right)$'dir. Yardımcı Özellik 2.2.3'den $U\subseteq M_t\left(F\right)$ olacak şekilde uygun bir F cismi ve $t\geq 1$ tamsayısı vardır. Üstelik $M_t\left(F\right)$, merkezi değerli

$$\left(\left(a+b\right)f\left(X_1,\ldots,X_n\right)-f\left(X_1,\ldots,X_n\right)b\right)f\left(X_1,\ldots,X_n\right)$$

genelleştirilmiş polinomunu sağlar. $a_{ij},b_{ij}\in F$ için $a=\sum_{1\le i,j\le t}a_{ij}e_{ij}$ ve $b=\sum_{1\le i,j\le t}b_{ij}e_{ij}$ diyelim. Eğer $f\left(X_1,\ldots,X_n\right)$, $M_t\left(F\right)$ üzerinde merkezi değerli ise her $x_1,\ldots,x_n\in M_t\left(F\right)$ için $\left[b,f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right]=0$ olacağından

$$af\left(x_1,\ldots,x_n\right)^2\in Z\left(M_t\left(F\right)\right)=F$$

olur. Buradan da $f\left(X_1,\ldots,X_n\right)$, $M_t\left(F\right)$ için bir özdeşlik olmadıkça $a\in F$ olduğu sonucuna varılır.

Şimdi $f\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ polinomunun $M_t\left(F\right)$ üzerinde merkezi değerli olmadığını kabul edelim. O zaman Yardımcı Özellik 2.2.1'den $f\left(u_1,\ldots,u_n\right)=\alpha e_{kl}$ olacak şekilde $k\neq l$, $u_1,\ldots,u_n\in M_t\left(F\right)$ ve $0\neq\alpha\in F$ vardır. Üstelik $\left\{f\left(v_1,\ldots,v_n\right):v_1,\ldots,v_n\in M_t\left(F\right)\right\}$ kümesi $M_t\left(F\right)$'nin tüm F-otomorfizmaları altında değişmez kaldığından herhangi $i\neq j$ için $f\left(r_1,\ldots,r_n\right)=\alpha e_{ij}$ olacak şekilde $r_1,\ldots,r_n\in M_t\left(F\right)$ vardır. Dolayısıyla her $i\neq j$ için

$$\alpha^2\left(\left(a+b\right)e_{ij}-e_{ij}b\right)e_{ij}=-\alpha^2 b_{ji}e_{ij}\in F$$

dir. Diğer bir ifadeyle her $i\neq j$ için $b_{ji}=0$'dır. Yani b köşegen bir matristir. Üstelik φ, $M_t\left(F\right)$'nin bir F-otomorfizması ise her $x_1,\ldots,x_n\in M_t\left(F\right)$

$$\left(\varphi\left(a+b\right)f\left(x_1,\ldots,x_n\right)-f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\varphi\left(b\right)\right)f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in F$$

dir. Buradan da yukarıdaki gibi $\varphi\left(b\right)$ köşegen bir matristir. Dolayısıyla her $i\neq j$ için

$$\varphi\left(b\right)=\left(1+e_{ij}\right)b\left(1-e_{ij}\right)$$

köşegen bir matris olmalıdır. O zaman $\left(b_{jj}-b_{ii}\right)e_{ij}=0$, yani $b_{jj}=b_{ii}$'dir. O halde $b\in F$ olmalıdır. Bu durumda her $x_1,\ldots,x_n\in M_t\left(F\right)$ için $af\left(x_1,\ldots,x_n\right)^2\in F$'dir. Eğer $f\left(X_1,\ldots,X_n\right)^2$, $M_t\left(F\right)$ üzerinde merkezi değerli ise $a\in F$ olmalıdır. O zaman (*iii*-1) sağlanır. $f\left(X_1,\ldots,X_n\right)^2$, $M_t\left(F\right)$ üzerinde merkezi değerli değilse o zaman

$$\left\{f\left(x_1,\ldots,x_n\right)^2 : x_1,\ldots,x_n\in M_t\left(F\right)\right\}$$

kümesi ile üretilen toplamsal alt grubu düşünelim. $char\left(R\right)=2$ ve $t=2$ olmadıkça bu alt grup merkezi olmayan bir Lie ideal içerir (Chuang, 1987). Eğer ilk durum sağlanırsa ispat biter. O zaman $M_t\left(F\right)$'nin $aB\subseteq F$ olacak şekilde merkezi olmayan bir B Lie idealini içerdiğini ve $B=\left[M_t\left(F\right),M_t\left(F\right)\right]$ olduğunu kabul edebiliriz. O halde her $i\neq j$ için $e_{ij}\in B$'dir. Öyleyse $ae_{ij}\in F$ olduğundan $0=\left[e_{ij},ae_{ij}\right]=a_{ji}e_{ij}$'dir. Böylece a köşegen bir matristir. Yukarıdaki gibi $a\in F$ olduğu kolayca görülür ve yine (*iii*-1) sağlanır.

Şimdi d'nin bir U-dış türev olduğunu kabul edelim. Kharchenko Teoremi'ni (4.4) nolu özdeşliğe uygularsak her $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n\in R$ için

$$\left(af\left(x_1,\ldots,x_n\right)+f^d\left(x_1,\ldots,x_n\right)+\sum_{i=1}^{n}f\left(x_1,\ldots,y_i,\ldots,x_n\right)\right)f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in C$$

olur. Özel olarak, her $i\in\left\{1,\ldots,n\right\}$ için

$$f\left(x_1,\ldots,y_i,\ldots,x_n\right)f\left(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n\right)\in C$$

dir. $c\in U-C$ olsun. O zaman

$$\left[c,f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right]f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\sum_{i=1}^{n}f\left(x_1,\ldots,\left[c,x_i\right],\ldots,x_n\right)f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in C$$

olur. Böylece (Lee and Shiue, 1998) Theorem 2'den $char(R)=2$ olduğu ve R'nin s_4 standart özdeşliğini sağladığı sonucuna varılır.

Teorem 4.2 K birimli değişmeli bir halka, R merkezi $Z(R)$ olan asal bir K-cebir, U ve C de sırasıyla R'nin sağ Utumi kesirler halkası ve genişletilmiş merkezi olsun. g, R'nin sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türevi, $f(X_1,\ldots,X_n)$ K üzerinde çoklu doğrusal bir polinom ve I da R'nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. Eğer her $x_1,\ldots,x_n \in I$ için

$$g\left(f(x_1,\ldots,x_n)\right)f(x_1,\ldots,x_n)\in C$$

ise o zaman ya

(***i***) $f(X_1,\ldots,X_n)X_{n+1}$, I için bir özdeşliktir, ya da

(***ii***) $char(R)=2$'dir ve R s_4 standart özdeşliğini sağlar, ya da

(***iii***) her $x\in R$ için $g(x)=ax+[b,x]$ olacak şekilde $a,b\in U$ vardır ve aşağıdakilerden biri sağlanır:

(1) $a,b\in C$ ve $f(X_1,\ldots,X_n)^2$, R üzerinde merkezi değerlidir,

(2) $a\in C$ ve $f(X_1,\ldots,X_n)$, R üzerinde merkezi değerlidir,

(3) $aI=(0)$ ve $\left[f(X_1,\ldots,X_n),X_{n+1}\right]X_{n+2}$, I için bir özdeşliktir,

(4) $aI=(0)$ ve $(b-\beta)I=(0)$ olacak şekilde bir $\beta\in C$ vardır.

İspat. Eğer her $x_1,\ldots,x_n \in I$ için $g\left(f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right)f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0$ ise Teorem 4.1'den ispat biter. Aksi halde $g\left(f\left(r_1,\ldots,r_n\right)\right)f\left(r_1,\ldots,r_n\right)\neq 0$ olacak şekilde $r_1,\ldots,r_n \in I$ elemanları vardır. O zaman her $x_1,\ldots,x_n \in I$ için

$$\left(af\left(x_1,\ldots,x_n\right)+f^d\left(x_1,\ldots,x_n\right)+\sum_{i=1}^{n} f\left(x_1,\ldots,d\left(x_i\right),\ldots,x_n\right)\right)f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in C$$

dir. Bu durumda I merkezi bir

$$\left(af\left(X_1,\ldots,X_n\right)+f^d\left(X_1,\ldots,X_n\right)+\sum_{i=1}^{n} f\left(X_1,\ldots,d\left(X_i\right),\ldots,X_n\right)\right)f\left(X_1,\ldots,X_n\right)$$

diferansiyel polinomuna sahiptir. O zaman R bir PI-halkasıdır (Chang and Lee, 1998) ve Posner Teoremi'nden RC sonlu boyutlu merkezi bir basit C-cebirdir (Beidar et al., 1996). Wedderburn-Artin Teoremi'nden, $RC \cong M_s\left(D\right)$ olacak şekilde sonlu boyutlu merkezi bir D bölümlü C-cebri vardır. Her $x_1,\ldots,x_n \in IC$ için de

$$\left(af\left(x_1,\ldots,x_n\right)+d\left(f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right)\right)f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in C$$

dir. R'yi RC ile yer değiştirerek $R=M_s\left(D\right)$ olduğunu kabul edebiliriz. Her $x_1,\ldots,x_n \in I$ ve $r\in R$ için

$$\left(af\left(x_1r,\ldots,x_n\right)+f^d\left(x_1r,\ldots,x_n\right)+\sum_{i=1}^{n} f\left(x_1r,\ldots,d\left(x_i\right),\ldots,x_n\right)\right)f\left(x_1r,\ldots,x_n\right)\in C$$

dir. O zaman

$$\begin{pmatrix} af\left(x_1r,\ldots,x_n\right)+f^d\left(x_1r,\ldots,x_n\right)+ \\ \quad f\left(d\left(x_1\right)r+x_1d\left(r\right),x_2\ldots,x_n\right)\sum_{i=2}^{n} f\left(x_1r,\ldots,d\left(x_i\right),\ldots,x_n\right)\end{pmatrix} f\left(x_1r,\ldots,x_n\right)\in C$$

olur. d , U -dış türev ise o zaman Kharchenko Teoremi'nden her $x_1,\ldots,x_n \in I$ ve $r \in R$ için

$$\begin{pmatrix} af\left(x_1r,\ldots,x_n\right)+f^d\left(x_1r,\ldots,x_n\right)+ \\ f\left(d\left(x_1\right)r+x_1s,x_2\ldots,x_n\right)\sum_{i=2}^{n} f\left(x_1r,\ldots,d\left(x_i\right),\ldots,x_n\right)\end{pmatrix} f\left(x_1r,\ldots,x_n\right)\in C$$

dir. Özel olarak $s=0$ alarak

$$\begin{pmatrix} af\left(x_1r,\ldots,x_n\right)+f^d\left(x_1r,\ldots,x_n\right)+ \\ f\left(d\left(x_1\right)r,x_2\ldots,x_n\right)\sum_{i=2}^{n} f\left(x_1r,\ldots,d\left(x_i\right),\ldots,x_n\right)\end{pmatrix} f\left(x_1r,\ldots,x_n\right)\in C$$

olduğu görülür. Bu son iki özdeşlik karşılaştırılırsa her $x_1,\ldots,x_n \in I$ ve $r,s \in R$ için

$$f\left(x_1s,\ldots,x_n\right)f\left(x_1r,\ldots,x_n\right)\in C$$

elde edilir. Özel olarak her $x_1,\ldots,x_n \in I$ ve $s \in R$ için $f\left(x_1s,\ldots,x_n\right)^2 \in C$ 'dir. Dolayısıyla her $x_1,\ldots,x_n \in I$ için $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)^2 \in C$ 'dir. Eğer her $x_1,\ldots,x_n \in I$ için $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)^2 = 0$ ise $f\left(X_1,\ldots,X_n\right)X_{n+1}$, I için bir özdeşliktir (Chang, 2003). Eğer bazı $x_1,\ldots,x_n \in I$ için $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)^2 \neq 0$ ise o zaman $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)^2$ tersinirdir. Bu durumda $I=R$ olur ve Yardımcı Özellik 4.3'ten ispat biter.

Şimdi d 'nin bir $b \in U$ elemanı ile belirli iç türev olduğunu kabul edebiliriz. D 'nin maksimal bir K alt cismini seçelim. O zaman $m = s\left[K:C\right]$ olmak üzere $M_s\left(D\right)\otimes_C K = M_m\left(K\right)$ ve her $x_1,\ldots,x_n \in I\otimes_C K$ için Yardımcı Özellik 2.2.4 ve (Lee and Wong, 1995) Proposition'dan

$$\left(af\left(x_1,\ldots,x_n\right)+d\left(f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right)\right)f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in Z\left(M_m\left(K\right)\right)=K$$

dır. O halde $R = M_m(K)$ olduğunu ve $1 \le l \le m$ olmak üzere $I = eR = (e_{11} + \ldots + e_{ll})R$ olduğunu kabul edebiliriz. $g(I)I = (0)$ olması durumunda ispatlanacak bir şey yoktur. Üstelik $l = m$ ise $I = R$ olur ve Yardımcı Özellik 4.3'ten ispat biter. Dolayısıyla $g(I)I \ne (0)$ ve $l \ne m$ olduğunu kabul edelim.

$$f(X_1,\ldots,X_n) = \sum_{i=1}^{n} t_i(X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_n)X_i$$

şeklinde yazalım. $f(X_1,\ldots,X_n)$ polinomunun I için bir özdeşlik olmadığını kabul edelim. O zaman bazı $i \in \{1,\ldots,n\}$ için $t_i(X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_n)X_i$, I için bir özdeşlik değildir. Yardımcı Özellik 4.2'de olduğu gibi sadelik için $i = n$ alıp $t_n(X_1,\ldots,X_{n-1})X_n$ polinomunun I için bir özdeşlik olmadığını kabul edelim. Şimdi her $x_1,\ldots,x_n \in R$ için

$$\big(af(ex_1,\ldots,ex_n) + d\big(f(ex_1,\ldots,ex_n)\big)\big)f(ex_1,\ldots,ex_n) \in Z(R)$$

olduğundan

$$\Big[\big(af(ex_1,\ldots,ex_n) + d\big(f(ex_1,\ldots,ex_n)\big)\big)f(ex_1,\ldots,ex_n), 1-e\Big] = 0$$

elde edilir. O zaman $x_1,\ldots,x_n \in R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= \Big[\big((a+b)f(ex_1,\ldots,ex_n) - f(ex_1,\ldots,ex_n)b\big)f(ex_1,\ldots,ex_n), 1-e\Big]e \\ &= -(1-e)(a+b)f(ex_1,\ldots,ex_n)^2 e \end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde ya $f(eR)e = (0)$ ya da $(1-e)(a+b)e = 0$'dır (Chuang and Lee, 1996). İlk durumda istenilen sonuçlardan birini elde ederiz. Diğer durumda ise $(a+b)e = e(a+b)e \in I$ olur. Benzer şekilde her $x_1,\ldots,x_n \in R$ için

$$\left(af\left(ex_1,\ldots,ex_n\left(1-e\right)\right)+d\left(f\left(ex_1,\ldots,ex_n\left(1-e\right)\right)\right)\right)f\left(ex_1,\ldots,ex_n\left(1-e\right)\right)\in Z\left(R\right)$$

olduğundan

$$\left[\left(af\left(ex_1,\ldots,ex_n\left(1-e\right)\right)+d\left(f\left(ex_1,\ldots,ex_n\left(1-e\right)\right)\right)\right)f\left(ex_1,\ldots,ex_n\left(1-e\right)\right),e\right]=0$$

dır. Buradan da

$$t_n\left(ex_1,\ldots,ex_{n-1}\right)ex_n\left(1-e\right)bt_n\left(ex_1,\ldots,ex_{n-1}\right)ex_n\left(1-e\right)=0$$

elde edilir. O zaman her $x_1,\ldots,x_n\in R$ için $\left(\left(1-e\right)bet_n\left(ex_1,\ldots,ex_{n-1}\right)ex_n\right)^3=0$ ’dir. O halde Levitzki Teoremi’nden her $x_1,\ldots,x_n\in R$ için

$$\left(1-e\right)bet_n\left(ex_1,\ldots,ex_{n-1}\right)ex_n=0$$

olur. Yine (Chuang and Lee, 1996) uyarınca ya $f\left(eR\right)e=\left(0\right)$ ya da $\left(1-e\right)be=0$ ’dir. Eğer ikinci olasılık sağlanırsa $be=ebe\in I$ ve $ae=eae\in I$ olur. Bu ise $aI\subseteq I$ ve $bI\subseteq I$ demektir. Bu durumda $g\left(I\right)\subseteq\left(a+b\right)I-Ib\subseteq I$ olur.

Diğer taraftan $g\left(f\left(r_1,\ldots,r_n\right)\right)f\left(r_1,\ldots,r_n\right)\neq 0$ olacak şekilde $r_1,\ldots,r_n\in I$ elemanlarının var olduğunu kabul ettiğimizden $Z\left(R\right)\cap I\neq\left(0\right)$’dır. Üstelik matrisler halkasında sıfırdan farklı merkezi bir eleman tersinir olduğundan I tersinir elemanlar içerir. Böylece I tersinir elemanlar içerir ve dolayısıyla Yardımcı Özellik 4.3’ten ispat biter.

5. HOMOMORFİZMA VEYA TERS-HOMOMORFİZMA OLARAK HAREKET EDEN GENELLEŞTİLMİŞ TÜREVLER

Bu bölümde asal halkaların sağ idealleri üzerinde homomorfizma ya da ters-homomorfizma olarak hareket eden genelleştirilmiş türevler incelenecektir.

S, R halkasının boştan faklı bir altkümesi ve $g: R \to R$ de R'nin toplamsal bir dönüşümü olsun. Eğer her $x, y \in S$ için $g(xy) = g(x)g(y)$ oluyorsa g toplamsal dönüşümüne S kümesi üzerinde homomorfizma gibi hareket ediyor denir. Benzer şekilde eğer her $x, y \in S$ için $g(xy) = g(y)g(x)$ oluyorsa g dönüşümüne S kümesi üzerinde ters-homomorfizma gibi hareket ediyor denir.

Bu bölümde ele alınacak problem için ana motivasyonumuzun kaynağı Bell ve Kappe'nin (1989) yaptıkları çalışmadır. Sözü geçen bu çalışmada Bell ve Kappe, asal bir halkanın sıfırdan farklı bir sağ ideali üzerinde bir homomorfizma ya da bir ters-homomorfizma olarak hareket eden bir türevinin sıfır türevi olduğunu göstermişlerdir.

Literatürde Bell ve Kappe'nin yukarıdaki sonucunun farklı açılardan genelleştirmeleri bulunmaktadır. Yenigül ve Argaç (1994), aynı problemi yarı asal bir R halkasının bir d α-türevi için ele almış ve α örten bir endomorfizma ise $d = 0$ olduğunu göstermişlerdir.

Yine literatürde, asal halkaların Lie idealleri üzerinde homomorfizma ya da ters-homomorfizma olarak hareket eden türevlerinin incelendiği çalışmalar da bulunmaktadır. Asma, Rehman ve Shakir, 2-burulmasız asal bir halkanın her $x \in L$ için $x^2 \in L$ olacak şekildeki merkezi olmayan bir L Lie ideali üzerinde homomorfizma ya da ters-homomorfizma olarak hareket eden bir d türevinin sıfır türevi olduğunu göstermişlerdir (Asma et al., 2003). Daha sonra Wang ve You, yukarıdaki sonuçtaki "her $x \in L$ için $x^2 \in L$" olma şartını kaldırmışlardır (Wang and You, 2007).

Gusič, asal bir halkanın sıfırdan farklı iki yanlı bir ideali üzerinde homomorfizma ya da ters-homomorfizma olarak hareket eden bir F genelleştirilmiş türevinin sıfır dönüşümü veya halkanın birim dönüşümü olduğunu göstermiştir (Gusič, 2005).

Ali ve Kumar (2009), aynı problemi asal halkaların Jordan idealleri üzerinde genelleştirilmiş (σ,τ)-türevler için ele almışlardır. Son olarak, asal halkaların merkezi olmayan Lie idealleri üzerinde Jordan homomorfizması gibi hareket eden genelleştirilmiş türevlerin incelendiği, De Filippis'e (2009) ait çalışmadan da bahsetmekte fayda vardır.

Yardımcı Özellik 5.1 R değişmeli olmayan bir asal halka ve $a,b\in U$ olsun.

(***i***) Eğer her $x,y\in R$ için

$$axy+[b,xy]-(ax+[b,x])(ay+[b,y])=0 \tag{5.1}$$

ise $a\in\{0,1\}$ ve $b\in C$'dir.

(***ii***) Eğer her $x,y\in R$ için

$$axy+[b,xy]-(ay+[b,y])(ax+[b,x])=0 \tag{5.2}$$

ise $a=0$ ve $b\in C$'dir.

İspat.

(***i***) İlk olarak $b\in C$ olduğunu gösterelim. Çelişkiye ulaşmak için $b\notin C$ olduğunu kabul edelim. O zaman (5.1)'den

$$aXY+[b,XY]-(aX+[b,X])(aY+[b,Y])$$

genelleştirilmiş polinomu, R halkası için aşikar olmayan bir özdeşliktir. Teorem 2.2.7'den bu özdeşlik aynı zamanda U için de aşikar olmayan bir polinom özdeşliğidir. Üstelik, R asal olduğunda U da asal olduğundan R yerine U Utumi kesirler halkasını alarak C'nin R halkasının merkezi olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda R merkezi kapalı asal bir C-cebir, yani $R = RC$'dir (Erickson, 1975). Martindale Teoremi'nin ışığında, $R = RC$ sıfırdan farklı bir "socle"ye sahip primitif bir halkadır (Martindale, 1969). Böylece öyle bir D bölümlü halkası ve D üzerinde bir V_D vektör uzayı vardır ki R halkası $_D V$ üzerinde yoğun olarak hareket eder.

İlk olarak $\dim_D V \geq 3$ olduğunu kabul edelim.

1. Adım: Herhangi bir $v \in V$ için v ve bv vektörlerinin D üzerinde lineer bağımlı olduğunu göstermek istiyoruz. Öncelikle $bv = 0$ olduğunda v ve bv vektörleri D-bağımlı olacağından $bv \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Eğer v ve bv D-bağımsız ise o zaman $\dim_D V \geq 3$ olduğundan v, bv, w vektörleri de D-bağımsız olacak şekilde bir $w \in V$ vektörü vardır. R'nin yoğunluğundan

$$\begin{aligned} xv &= 0, & yv &= 0, \\ xbv &= w, & ybv &= v, \\ xw &= 0, & yw &= 0. \end{aligned}$$

olacak şekilde $x, y \in R$ elemanları vardır. O zaman

$$0 = \left(\left(axy + [b, xy] \right) - \left(ax + [b, x] \right) \left(ay + [b, y] \right) \right) v = -w$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla her $v \in V$ için v ve bv, D üzerinde lineer bağımlı olmalıdır.

2. Adım: Şimdi her $v \in V$ için $bv = v\lambda$ olacak şekilde bir $\lambda \in D$ elemanının var olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için $u, v \in V - \{0\}$ olsun. O zaman $bu = u\lambda_u$ ve $bv = v\lambda_v$ ve $b(u+v) = (u+v)\lambda_{u+v}$ olacak şekilde $\lambda_u, \lambda_v, \lambda_{u+v} \in D$ elemanları vardır. Böylece

$$0 = u\left(\lambda_{u+v} - \lambda_u\right) + v\left(\lambda_{u+v} - \lambda_v\right)$$

olur. Eğer u ve v lineer bağımsız ise $\lambda_u = \lambda_{u+v} = \lambda_v$ elde edilir. Aksi halde, $\dim_D V \geq 3$ olduğundan $\{u, w\}$ ve $\{v, w\}$ kümelerinin her ikisi de lineer bağımsız olacak şekilde bir $w \in V$ vardır. Bu durumda da yukarıdaki gibi $\lambda_u = \lambda_w = \lambda_v$ elde edilir. Böylece $\lambda_v = \lambda \in D$ elemanı v vektörünün seçilişinden bağımsızdır.

Şimdi $r \in R$ ve $v \in V$ olsun. O zaman $bv = v\lambda$, $r(bv) = r(v\lambda) = (rv)\lambda$ ve $b(rv) = (rv)\lambda$ olduğundan $[b,r]v = (br)v - (rb)v = b(rv) - r(bv) = 0$, yani $[b,R]V = (0)$ olur. Böylece V sol "faithful" indirgenemez bir R-modül olduğundan $[b,R] = (0)$ ve buradan da $b \in Z(R) \subseteq C$ çelişkisi elde edilir.

O halde $\dim_D V \leq 2$ olmalıdır. Bu durumda R birimli basit bir GPI-halkasıdır. Böylece R merkezi üzerinde sonlu boyutlu merkezi bir basit cebirdir. Dolayısıyla Yardımcı Özellik 2.2.3'den $R \subseteq M_k(F)$ olacak şekilde uygun bir F cismi vardır. Üstelik $M_k(F)$, R ile aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar. Eğer $k \geq 3$ olduğunu kabul edersek 1. ve 2. Adım'larda olduğu gibi bir çelişkiye varırız. Eğer $k = 1$ ise yine R halkasının değişmeli olduğu çelişkisine varırız. O halde $R \subseteq M_2(F)$ olduğunu ve $M_2(F)$, 2×2 matrisler halkasının

$$aXY + [b, XY] - \left(aX + [b, X]\right)\left(aY + [b, Y]\right)$$

polinom özdeşliğini sağladığını kabul edebiliriz. Şimdi $x = e_{12} = y$ alınırsa $xy = 0 = yx$ ve buradan $\left(ae_{12} + [b, e_{12}]\right)^2 = 0$ elde edilir. Bu son denklemi sağdan e_{12} ile çarparak

$$0 = e_{12} b e_{12} b e_{12} = b_{21}^2 e_{12}$$

elde edilir. Böylece $b_{21}=0$'dır. Benzer şekilde $x=e_{21}=y$ alınırsa $b_{12}=0$ olduğu görülür. O halde b köşegen bir matristir.

Herhangi bir $\varphi \in Aut_F\left(M_2\left(F\right)\right)$ otomorfizması için başlangıç hipotezinden her $x,y\in M_2\left(F\right)$ için

$$\varphi(a)\varphi(x)\varphi(y)+\left[\varphi(b),\varphi(x)\varphi(y)\right]=\left(\varphi(a)\varphi(x)+\left[\varphi(b),\varphi(x)\right]\right)\left(\varphi(a)\varphi(y)+\left[\varphi(b),\varphi(y)\right]\right)$$

olduğu görülür. Özel olarak φ, $\varphi(x)=(1+e_{12})x(1-e_{12})$ ile tanımlı otomorfizma ise yukarıdaki gibi

$$\begin{aligned}\varphi(b)&=(1+e_{12})b(1-e_{12})\\&=b+e_{12}b-be_{12}-e_{12}be_{12}\\&=b+(b_{22}-b_{11})e_{12}\end{aligned}$$

köşegen bir matris olmalıdır. Bu ise $b_{11}=b_{22}$, yani b merkezi demektir. Bu çelişki iddiamızı ispatlar.

Şimdi b merkezi bir eleman olduğundan (5.1) denklemi her $x,y\in R$ için $axy=axay$ denklemine indirgenir. R ve R'nin iki yanlı Martindale kesirler halkası Q_r aynı polinom özdeşliklerini sağladığından Teorem 2.2.7'den aynı zamanda her $x,y\in Q_r$ için $axy=axay$ olur. Q_r birimli olduğundan bu son denklemden her $x,y\in Q_r$ için $ax(1-a)y=0$ elde edilir. Dolayısıyla Q_r'nin asallığından $a=0$ veya $a=1$ elde edilir.

(*ii*)'nin ispatı (*i*)'ye benzer şekilde kolayca yapılabilir.

(***ii***) Öncelikle $b\in C$ olduğunu ispatlamak istiyoruz. Çelişkiye ulaşmak için $b\notin C$ olduğunu kabul edelim. O zaman (5.2)'den

$$aXY + [b, XY] - (aY + [b, Y])(aX + [b, X])$$

genelleştirilmiş polinomu, R halkası için aşikar olmayan bir özdeşliktir. Bu özdeşlik aynı zamanda U için de aşikar olmayan bir polinom özdeşliğidir. Üstelik, R asal olduğunda U da asal olduğundan R yerine U kesirler halkasını alarak C'nin R halkasının merkezi olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda R merkezi kapalı asal bir C-cebir, yani $R = RC$'dir. Martindale Teoremi'nin ışığında, $R = RC$ sıfırdan farklı bir "socle"ye sahip primitif bir halkadır. Böylece öyle bir D bölümlü halkası ve D üzerinde bir V_D vektör uzayı vardır ki R halkası ${}_DV$ üzerinde yoğun olarak hareket eder.

İlk olarak $\dim_D V \geq 3$ olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $v \in V$ için v ve bv vektörlerinin D üzerinde lineer bağımlı olduğunu göstermek istiyoruz. Öncelikle $bv = 0$ olduğunda v ve bv vektörleri D-bağımlı olacağından $bv \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Eğer v ve bv D-bağımsız ise o zaman $\dim_D V \geq 3$ olduğundan v, bv, w vektörleri de D-bağımsız olacak şekilde bir $w \in V$ vektörü vardır. R'nin yoğunluğundan

$$\begin{aligned} xv &= 0, & yv &= 0, \\ xbv &= v, & ybv &= w, \\ xw &= 0, & yw &= 0. \end{aligned}$$

olacak şekilde $x, y \in R$ elemanları vardır. O zaman

$$0 = \big((axy + [b, xy]) - (ay + [b, y])(ax + [b, x])\big)v = -w$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla her $v \in V$ için v ve bv, D üzerinde lineer bağımlı olmalıdır. (i)'nin 1. ve 2. Adım'larındaki muhakemelerin neredeyse aynısı kullanarak her $v \in V$ için $bv = v\lambda$ olacak şekilde bir $\lambda \in D$ elemanının var olduğu görülür. Dolayısıyla $\dim_D V \leq 2$ olmalıdır. Yardımcı Özellik 2.2.3'den $R \subseteq M_k(F)$ olacak şekilde uygun bir F cismi vardır. Üstelik $M_k(F)$, R ile aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar. (*i*)'deki gibi $k=2$ olduğunu ve $M_2(F)$, 2×2 matrisler halkasının

$$aXY+[b,XY]-(aX+[b,X])(aY+[b,Y])$$

polinom özdeşliğini sağladığını kabul edebiliriz. Şimdi $x=e_{12}=y$ alınırsa $xy=0=yx$ ve buradan $(ae_{12}+[b,e_{12}])^2=0$ elde edilir. Bu son denklemi sağdan e_{12} ile çarparak

$$0=e_{12}be_{12}be_{12}=b_{21}^2e_{12}$$

bulunur. Böylece $b_{21}=0$'dır. Benzer şekilde $x=e_{21}=y$ alınırsa $b_{12}=0$ olduğu görülür. O halde b köşegen bir matristir.

Herhangi bir $\varphi\in Aut_F(M_2(F))$ otomorfizması için başlangıç hipotezinden her $x,y\in M_2(F)$ için

$$\varphi(a)\varphi(x)\varphi(y)+[\varphi(b),\varphi(x)\varphi(y)]=(\varphi(a)\varphi(y)+[\varphi(b),\varphi(y)])$$
$$(\varphi(a)\varphi(x)+[\varphi(b),\varphi(x)])$$

dir. Özel olarak φ, $\varphi(x)=(1+e_{12})x(1-e_{12})$ ile tanımlı otomorfizma ise yukarıdaki gibi

$$\begin{aligned}\varphi(b)&=(1+e_{12})b(1-e_{12})\\&=b+e_{12}b-be_{12}-e_{12}be_{12}\\&=b+(b_{22}-b_{11})e_{12}\end{aligned}$$

köşegen bir matris olmalıdır. Bu ise $b_{11}=b_{22}$, yani b merkezi demektir. Bu çelişki iddiamızı ispatlar.

b merkezi bir eleman olduğundan (5.2) denklemi her $x, y \in R$ için $axy = ayax$ denklemine indirgenir. Teorem 2.2.7'den R ve Q_r aynı polinom özdeşliklerini sağladığından, aynı zamanda her $x, y \in Q_r$ için $axy = ayax$ olur. Bu son denklemden her $x, y, z \in Q_r$ için $axyz = azaxy = axzy$, yani $ax[y, z] = 0$ elde edilir. Dolayısıyla R değişmeli olmadığından ve Q_r'nin asallığından $a = 0$ elde edilir.

Teorem 5.1 R asal bir halka ve I da R'nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. R'nin bir g genelleştirilmiş türevi I üzerinde bir homomorfizma gibi hareket ediyorsa, o zaman aşağıdakilerden biri sağlanır:

(***i***) Her $r \in R$ için $g(r) = ar$ olacak şekilde bir $a \in U$ elemanı vardır. Üstelik $aI = (0)$'dır ya da her $x \in I$ için $ax = x$'tir.

(***ii***) Her $r \in R$ için $g(r) = ar + [b, r]$ olacak şekilde $a, b \in U$ elemanları vardır. Üstelik her $x \in I$ için $ax = x$ ve $bI = (0)$'dır.

İspat. Hipotezden her $x, y \in I$ için $g(xy) = g(x)g(y)$'dir. R'nin her genelleştirilmiş türevi U sağ Utumi kesirler halkasına tek türlü genişletilebilir olduğunu ve uygun bir $a \in U$ elemanı ve $d \in Der(U)$ türevi için $g(x) = ax + d(x)$ formunda olduğunu biliyoruz. O zaman her $x, y \in I$ için

$$axy + d(xy) = (ax + d(x))(ay + d(y)) \tag{5.3}$$

olur. Eğer $d = 0$ ise o zaman (5.3) denkleminden her $x, y \in I$ için $axy = axay$ olduğu görülür. Buradan da her $x, y \in I$ ve $r \in R$ için $axr(ay - y) = 0$ elde edilir. O zaman R'nin asallığından ya $aI = (0)$ ya da her $x \in I$ için $g(x) = ax = x$ olduğu sonucuna varılır ve dolayısıyla (*i*) sağlanır.

Şimdi $d \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz. İspatı iki alt duruma ayıralım:

I. Durum: İlk olarak d'nin bir U-iç türev olduğunu kabul edelim. O zaman $d = ad(b)$ olacak şekilde bir $b \in U - C$ elemanı vardır. O halde her $x, y \in I$ için

$$axy + [b, xy] = (ax + [b, x])(ay + [b, y]) \tag{5.4}$$

olur.

$$G(X,Y) = aXY + [b,X]Y + X[b,Y] - aXaY - aX[b,Y] - [b,X]aY - [b,X][b,Y]$$

diyelim. Bazı $\alpha, \beta \in C$ için $(b-\alpha)I = (0) = (a-\beta)I$ olduğunu iddia ediyoruz. Çelişkiye ulaşmak için her $\lambda \in C$ için $(b-\lambda)I \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. O zaman Lee'den (1995) ya R bir polinom özdeşliği halkasıdır ya da bu ve u, C-bağımsız olacak şekilde bir $u \in I$ elemanı vardır. R bir PI-halkası ise R'nin bir GPI-halkası olduğu açıktır. Diğer durumda ise $G(uX, uY)$, R için aşikar olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir. Üstelik $G(uX, uY)$, Q_r için de aşikar olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir. Şimdi F ile, C'nin sonsuz veya sonlu olmasına göre sırasıyla ya C'nin cebirsel kapanışını ya da C'nin kendisini gösterelim. O zaman standart bir muhakemeyle (Lee and Wong, 1995), $G(uX, uY)$, $Q_r \otimes_C F$ için de bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir. Teorem 2.1.5'den $Q_r \otimes_C F$, merkezi kapalı asal bir F-cebir olduğundan R ve C'yi sırasıyla $Q_r \otimes_C F$ ve F ile yer değiştirerek R'nin merkezi kapalı, yani $R = RC$ olduğunu ve C'nin ya sonlu ya da cebirsel kapalı olduğunu kabul edebiliriz. Martindale Teoremi ışığında, R C'yi ilişkili bölümlü halkası olarak kabul eden ve sıfırdan farklı bir H "socle"sine sahip primitif bir halkadır.

Eğer R aşikar olmayan idempotent elemanlar içermiyorsa R bölümlü bir halkadır ve dolayısıyla $I = R$ olur. Bu durumda R değişmeli olmadığından Yardımcı Özellik 5.1 (*i*) uyarınca $b \in C$ çelişkisine ulaşılır. O halde R'nin aşikar olmayan bir idempotent eleman içerdiğini kabul edebiliriz. Şimdi I ve IH aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliklerini sağladığından her $x, y \in IH$ için

$$axy+[b,x]y+x[b,y]-axay-ax[b,y]-[b,x]ay-[b,x][b,y]=0$$

olur. O zaman I ve IH 'yi yer değiştirerek $I\subseteq H$ olduğunu kabul edebiliriz. $e\in I$ bir idempotent olsun. $ae,be\in Ce$ olduğunu göstermek istiyoruz. $x,y\in R$ olmak üzere $ex(1-e)$, $ey(1-e)\in I$ 'dır. Hipotezden her $x,y\in R$ için

$$\begin{aligned}0 &= G\big(ex(1-e),ey(1-e)\big)\\ &= -aex(1-e)aey(1-e)-aex(1-e)\big[b,ey(1-e)\big]\\ &\quad -\big[b,ex(1-e)\big]aey(1-e)-\big[b,ex(1-e)\big]\big[b,ey(1-e)\big]\end{aligned} \tag{5.5}$$

elde edilir. (5.5) denklemini sağdan e ile çarparsak her $x,y\in R$ için

$$ex(1-e)bey(1-e)be=0$$

olduğu görülür. Böylece $(1-e)be=0$ 'dır. (5.5) denklemini soldan $1-e$ ile çarpıp $(1-e)be=0$ olduğunu kullanarak $(1-e)ae=0$ sonucuna varılır. $e\in H$ olduğundan $rank(e)$ sonludur (bkz. Tanım 2.1.19). Dolayısıyla Teorem 2.2.3 uyarınca $T=eRe$ halkası sonlu boyutlu merkezi bir basit C-cebirdir. $G(eX,eY)e$, R için bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği olduğundan

$$eaeXY+[ebe,XY]-\big(eaeX+[ebe,X]\big)\big(eaeY+[ebe,Y]\big)$$

eRe için bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir. Böylece Yardımcı Özellik 5.1 uyarınca $ae=eae, be=ebe\in Z\big(eRe\big)=Ce$ 'dir.

H_H, tamamen indirgenebilir bir sağ H-modül olduğundan, I_H de tamamen indirgenebilir bir sağ H-modüldür (bkz. Tanım 2.1.12). $y\in I$ olsun. I tamamen indirgenebilir olduğundan $y\in eH$ olacak şekilde bir $e\in I$ idempotent elemanı vardır. Bazı $x\in H$ için $y=ex$ diyelim. O zaman $by=bex\in Cex=Cy$ ve

$ay = aex \in Cex = Cy$ olur. Bu durumda her $y \in I$ için $[ay, y] = 0 = [by, y]$ olur. Şimdi her $y, z \in I$ için

$$0 = \left[a(y+z), y+z\right] = [ay, z] + [az, y]$$

ve bu son denklemden de her $y, z, w \in I$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [ay, zw] + [azw, y] \\ &= ([ay, z] + [az, y])w + z[ay, w] + az[w, y] \\ &= z[ay, w] + az[w, y] \\ &= z[a, w]y + [a, z][w, y] \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $y, z, w, t \in I$ için

$$\begin{aligned} 0 &= z[a, w]yt + [a, z][w, yt] \\ &= (z[a, w]y + [a, z][w, y])t + [a, z]y[w, t] \\ &= [a, z]y[w, t], \end{aligned}$$

yani $[a, I]I[I, I] = (0)$'dır. Bu durumda $[a, I]I = (0)$ ya da $[I, I] = (0)$'dır. $[I, I] = (0)$ olması R'nin değişmeli olmasını gerektireceğinden bir çelişkidir. O halde $[a, I]I = (0)$ olmalıdır. Bu durumda $(a - \beta)I = (0)$ olacak şekilde bir $\beta \in C$ vardır (Brešar, 1994). Benzer şekilde $(b - \alpha)I = (0)$ olacak şekilde bir $\alpha \in C$ vardır. Şimdi başlangıç hipotezimizden her $x, y \in I$ için

$$\begin{aligned} 0 &= axy + [b, xy] - (ax + [b, x])(ay + [b, y]) \\ &= xy(\alpha + \beta - b) - xy\beta(\alpha + \beta - b) \\ &= xy(1 - \beta)(\alpha + \beta - b) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $(1 - \beta)(\alpha + \beta - b) = 0$'dır. $\beta \neq 1$ ise $1 - \beta \in C$ olduğundan tersinirdir ve böylece $b = \alpha + \beta \in C$ çelişkisine ulaşılır. O zaman $\beta = 1$ olmalıdır. Bu durumda her $x \in I$ için $ax = x$ olduğu elde edilir. Üstelik

$d = ad(b) = ad(b-\alpha)$ olduğundan b yerine $b-\alpha$ alarak $bI = (0)$ olur. Bu ise bize (*ii*)'yi verir.

II. Durum: Şimdi d'nin U-dış türev olduğunu kabul edebiliriz. $u \in I$ sıfırdan farklı herhangi bir eleman olsun. O zaman (5.3) denkleminden her $x, y \in R$ için

$$auxuy + d(ux)uy + uxd(uy) = \left(aux + d(ux)\right)\left(auy + d(uy)\right)$$

elde edilir. Bu son denklemden de her $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned} &auxuy + d(u)xuy + ud(x)uy \\ &\qquad + uxd(u)y + uxud(y) = \left(aux + d(u)x + ud(x)\right)\left(auy + d(u)y + ud(y)\right) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Yukarıdaki bağıntı U için de bir diferansiyel özdeşliktir (bkz. Teorem 2.2.8). Şimdi Kharchenko Teoremi'nden her $x, y, z, w \in U$ için

$$auxuy + d(u)xuy + uzuy + uxd(u)y + uxuw = \left(aux + d(u)x + uz\right)\left(auy + d(u)y + uw\right)$$

olur. Özel olarak bu son denklemde $x = 0 = y$ alınırsa her $z, w \in U$ için $uzuw = 0$ elde edilir. U asal bir halka olduğundan da $u = 0$ çelişkisine varılır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.2 R asal bir halka ve I da R'nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. R'nin bir g genelleştirilmiş türevi I üzerinde bir ters-homomorfizma gibi hareket ediyorsa, o zaman aşağıdakilerden biri sağlanır:

(***i***) Her $r \in R$ için $g(r) = ar$ olacak şekilde bir $a \in U$ elemanı vardır. Üstelik $aI = (0)$'dır ya da her $x \in I$ için $ax = x$'tir.

(***ii***) Her $r \in R$ için $g(r) = ar + [b, r]$ olacak şekilde $a, b \in U$ elemanları vardır. Üstelik her $x \in I$ için $ax = x$ ve $bI = (0)$'dır.

İspat. Eğer R değişmeli ise Teorem 5.1 uyarınca ispatlanacak bir şey yoktur. O halde R'nin değişmeli olmadığını kabul edebiliriz. Her $x, y \in I$ için

$$g(xy) = g(y)g(x) \tag{5.6}$$

olduğunu kabul edelim. Şimdi g, R'nin bir genelleştirilmiş türevi olduğundan her $x \in R$ için $g(x) = ax + d(x)$ olacak şekilde bir $a \in U$ elemanı ve $d \in Der(U)$ türevi vardır. (5.6) özdeşliğinden her $x, y \in I$ için

$$axy + d(xy) = (ay + d(y))(ax + d(x)) \tag{5.7}$$

olur. İlk olarak $d = 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman her $x, y \in I$ için

$$axy = ayax \tag{5.8}$$

olur. $r \in R$ herhangi bir eleman olsun. (5.8) denkleminde y yerine yr alınır ve (5.8) tekrar kullanılırsa, her $x, y \in I$ ve $r \in R$ için $ay[ax, r] = 0$ elde edilir. Şimdi bu son denklemden her $x, y \in I$ ve $r, s \in R$ için

$$0 = ay[ax, rs] = ayr[ax, s]$$

olduğu görülür. O halde $aIR[aI, R] = (0)$'dır. R asal bir halka olduğundan $aI = (0)$ veya $[aI, R] = (0)$'dır. $aI = (0)$ ise (*i*)'deki durumu elde ederiz. Eğer $[aI, R] = (0)$ ise yukarıdaki gibi $aIR[R, R] = (0)$ olduğu görülür. R'nin değişmeli olmadığını kabul ettiğimizden yine $aI = (0)$ sonucuna varırız. Böylece her iki durumda da (*i*) sağlanır.

Şimdi $d \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Kharchenko Teoremi'nin ışığında (bkz. Teorem 2.2.6) ispatı iki alt duruma bölelim.

I. Durum: İlk olarak d'nin U-iç türev olduğunu kabul edelim. O zaman $d = ad(b)$ olacak şekilde bir $b \in U - C$ elemanı vardır.

$$G(X,Y) = aXY + [b,X]Y + X[b,Y] - aYaX - aY[b,X] - [b,Y]aX - [b,Y][b,X]$$

diyelim. Bazı $\lambda \in C$ için $(b-\lambda)I = (0)$ olduğunu iddia ediyoruz. Çelişki elde etmek için her $\alpha \in C$ için $(b-\alpha)I \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. (Lee, 1995) Lemma 3 ışığında ya R bir polinom özdeşliği halkasıdır ya da bu ve u C-bağımsız olacak şekilde bir $u \in I$ elemanı vardır. Eğer R bir polinom özdeşliği halkası ise R'nin aynı zamanda bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği halkası olduğu açıktır. Diğer durumda ise $G(uX,uY)$, R için aşikar olamayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir. R ve Q_r aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliklerini sağladığından $G(uX,uY)$ Q_r için de bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir. C'nin sonsuz veya sonlu oluşuna göre F ile sırasıyla ya C'nin cebirsel kapanışını ya da C'nin kendisini gösterelim. O zaman standart bir muhakemeyle (bkz. Lee and Wong, 1995, Proposition), $G(uX,uY)$, $Q_r \otimes_C F$ için de bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir. $Q_r \otimes_C F$ merkezi kapalı asal bir F-cebir olduğundan (Erickson et al., 1975) Theorem 2.5 ve 3.5 uyarınca, R ve C'yi sırasıyla $Q_r \otimes_C F$ ve F ile yer değiştirerek R'nin merkezi kapalı olduğunu ve C'nin ya sonlu ya da cebirsel kapalı olduğunu kabul edebiliriz. Martindale Teoremi'nden R, sıfırdan farklı bir H "socle"sine sahip ve karşılık gelen bölümlü halkası C olan primitif bir halkadır.

Eğer R aşikar olmayan idempotent elemanlar içermiyorsa, R'nin kendisi bölümlü bir halkadır ve dolayısıyla $I = R$ olur. Bu durumda Yardımcı Özellik 5.1 (*ii*)'den $b \in C$ çelişkisine ulaşılır. Böylece R'nin aşikar olmayan idempotent elemanlar içerdiğini kabul edebiliriz. O zaman R değişmeli değildir. Şimdi her $x, y \in IH$ için $G(x,y) = 0$'dır. Bu durumda I ve IH'yi yer değiştirerek $I \subseteq H$ olduğunu kabul edebiliriz. $e \in I$ bir idempotent olsun. $be \in Ce$ olduğunu iddia ediyoruz. Eğer $be = 0$ ise ispatlanacak bir şey yoktur. Dolayısıyla $be \neq 0$

olduğunu kabul edelim. $x, y \in R$ olsun. O zaman $ex(1-e), ey(1-e) \in I$ 'dır. Hipotezden her $x, y \in R$ için

$$0 = G\big(ex(1-e), ey(1-e)\big)e = ey(1-e)bex(1-e)be$$

elde edilir. O halde $(1-e)be = 0$ 'dır. Benzer şekilde

$$0 = (1-e)G\big(ex(1-e), ey(1-e)\big) = (1-e)aey(1-e)aex(1-e)$$

denkleminden $(1-e)ae = 0$ olduğu görülür. O halde

$$eaeXY + [ebe, XY] - \big(eaeY + [ebe, Y]\big)\big(eaeX + [ebe, X]\big)$$

eRe için bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir. $Z(eRe) = Ce$ olduğundan Yardımcı Özellik 5.1 uyarınca $ae = eae, be = ebe \in Ce$ olduğu görülür.

H_H, tamamen indirgenebilir bir sağ H-modül olduğundan, I_H de tamamen indirgenebilir bir sağ H-modüldür. $y \in I$ olsun. I tamamen indirgenebilir olduğundan $y \in eH$ olacak şekilde bir $e \in I$ idempotent elemanı vardır. Bazı $x \in H$ için $y = ex$ diyelim. O zaman $by = bex \in Cex = Cy$ ve $ay = aex \in Cex = Cy$ olur. Teorem 5.1'deki muhakemenin aynısını kullanarak bazı $\alpha, \beta \in C$ için $(b-\beta)I = (0) = (a-\alpha)I$ olduğu görülür. Üstelik $ad(b) = ad(b-\beta)$ olduğundan b yerine $b-\beta$ alarak $bI = (0)$ olduğunu kabul edebiliriz. Şimdi her $x, y \in I$ için

$$\begin{aligned} 0 &= axy + [b, xy] - \big(ay + [b, y]\big)\big(ax + [b, x]\big) \\ &= xy(\alpha - b) - y(\alpha - b)x(\alpha - b) \\ &= xy(\alpha - b) - yx\alpha(\alpha - b) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu durumda $x, y, z \in I$ için

$$0 = \left(xy\left(\alpha - b\right) - yx\alpha\left(\alpha - b\right)\right)z$$
$$= \alpha xyz - \alpha^2 yxz \qquad (5.9)$$

elde edilir. Eğer $\alpha = 0$ ise o zaman $aI = (0)$ olup bu ise hipotezden $b = 0$ çelişkisine ulaşmamıza sebep olur. Dolayısıyla $\alpha \neq 0$ olmalıdır. Şimdi (5.9) denkleminden $x, y, z \in I$ için $xyz = \alpha yxz$ ve buradan da y yerine wy alarak her $x, y, z, w \in I$ için $[x, w]yz = 0$ elde edilir. Bu ise $[I, I]I = (0)$ demektir. Yine (5.9) denkleminden $x, y, z \in I$ için $xyz = \alpha yxz = \alpha xyz$, yani $\alpha = 1$ elde edilir. O zaman her $x \in I$ için $ax = \alpha x = x$ olur. Bu ise (*ii*)'deki durumdur.

II. Durum: Şimdi d 'nin U -dış türev olduğunu kabul edebiliriz. $u \in I$ sıfırdan farklı herhangi bir eleman olsun. O zaman (5.7) denkleminden her $x, y \in R$ için

$$auxuy + d\left(ux\right)uy + uxd\left(uy\right) = \left(auy + d\left(uy\right)\right)\left(aux + d\left(ux\right)\right)$$

elde edilir. Bu son denklemden de her $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned} &auxuy + d\left(u\right)xuy + ud\left(x\right)uy \\ &\qquad + uxd\left(u\right)y + uxud\left(y\right) = \left(auy + d\left(u\right)y + ud\left(y\right)\right)\left(aux + d\left(u\right)x + ud\left(x\right)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki bağıntı U için de bir diferansiyel özdeşliktir (Lee, 1992). Şimdi Kharchenko Teoremi'nden her $x, y, z, w \in U$ için

$$auxuy + d\left(u\right)xuy + uzuy + uxd\left(u\right)y + uxuw = \left(auy + d\left(u\right)y + uw\right)\left(aux + d\left(u\right)x + uz\right)$$

olur. Özel olarak bu son denklemde $x = 0 = y$ alınırsa her $z, w \in U$ için $uwuz = 0$ olduğu görülür. U asal bir halka olduğundan da $u = 0$ çelişkisine varılır. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 5.1 R asal bir halka ve g de R 'nin bir genelleştirilmiş türevi olsun. Eğer g, R üzerinde bir homomorfizma veya bir ters-homomorfizma gibi hareket ediyorsa o zaman $g = 0$ ya da g R üzerinde birim dönüşümdür.

Elde edilen sonuçlar asal bir halkanın genelleştirilmiş bir türevinin halkanın sıfırdan farklı bir sağ ideali üzerinde homomorfizma olarak hareket etmesi şartı ile bir ters-homomorfizma olarak hareket etmesi şartının denk olduğunu göstermektedir.

Örnek 5.1 $R = M_2(F)$ asal halkasının $I = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} : x, y \in F \right\}$ sağ idealini göz önüne alalım. $\alpha, \beta, \gamma \in F$ sabit elemanlar olmak üzere

$$a = \begin{pmatrix} \beta & 1-\beta \\ \gamma & 1-\gamma \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad b = \begin{pmatrix} 1+\alpha & -1-\alpha \\ \alpha & -\alpha \end{pmatrix}$$

olsun. Her $r \in R$ için $g(r) = ar + [b, r]$ ile tanımlı dönüşüm bir genelleştirilmiş türevdir. Üstelik her $\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} \in I$ için $g\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} = (x+y)\begin{pmatrix} -\alpha & 1+\alpha \\ -\alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}$ olur. Burada $e = \begin{pmatrix} -\alpha & 1+\alpha \\ -\alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}$ matrisi idempotent bir matristir. Böylece her $\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix} \in I$ için

$$g\left(\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix} \right) = (x+y)(z+t)e$$

ve

$$g\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} g\begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix} = (x+y)e(z+t)e = (x+y)(z+t)e$$

$$g\begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix} g\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} = (z+t)e(x+y)e = (z+t)(x+y)e$$

olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla g, I üzerinde hem homomorfizma hem de ters-homomorfizma olarak hareket eder. Aslında $g(I) \subseteq Fe$ olduğundan $[g(I), g(I)] = (0)$'dır.

Aşağıdaki örnek elde edilen sonuçlarda asallık şartının kaldırılamayacağını göstermektedir.

Örnek 5.2 F karakteristiği 2 olan bir cisim olsun.

$$R = \begin{pmatrix} F & F & F \\ 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}$$

halkasının

$$I = \begin{pmatrix} F & F & F \\ 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

idealini göz önüne alalım. $Z(R) \cong F$'dir. Şimdi $\alpha, \beta \in F$ sabit elemanlar olmak üzere

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olsun. Her $x \in R$ için $g(x) = ax + xb$ şeklinde tanımlı dönüşüm bir genelleştirilmiş türevdir ve I üzerinde bir homomorfizma (aynı zamanda ters homomorfizma) olarak hareket eder. Üstelik her $\lambda \in F$ ve her $x \in R$ için $g(x) = (a+\lambda)x + x(b-\lambda)$ olduğunu da belirtelim. Ama her $x \in I$ için $(a+\lambda)x = x$ ise $\lambda = 0$'dır. Bu durumda $t \neq 0$ ise

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha t & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

olduğundan $(b-\lambda)I = bI \neq (0)$’dır.

6. ASAL HALKALARIN SAĞ İDEALLERİ ÜZERİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ BELİRLİ BİR ÖZDEŞLİK

Bu bölümde asal halkaların sağ idealleri üzerinde genelleştirilmiş türevlerini ihtiva eden özel bir özdeşlik ele alınarak hem genelleştirilmiş türev hem de ideal karakterize edilecektir. Daha açık bir ifadeyle aşağıdaki problemi inceleyeceğiz:

Problem. R asal bir halka, I R'nin sıfırdan farklı bir sağ ideali ve G de R'nin bir genelleştirilmiş türevi olsun. Her $x \in I$ için

$$\left[\left[G(x),x\right],G(x)\right]=0$$

ise G genelleştirilmiş türevini ve I idealini karakterize etmek mümkün müdür?

Teorem 6.1'de bu probleme tam bir cevap vereceğiz.

Yukarıdaki problem için esas motivasyonumuzu De Filippis'in (2008) aşağıdaki sonucundan alıyoruz:

R karakteristiği 2 olmayan asal bir halka ve G de R'nin bir genelleştirilmiş türevi olsun. Her $x \in R$ için $\left[\left[G(x),x\right],G(x)\right]=0$ ise o zaman ya R değişmelidir ya da her $x \in R$ için $G(x)=\lambda x$ olacak şekilde bir $\lambda \in C$ vardır.

Aynı çalışmada De Filippis elde ettiği bu sonucu değişmeli olmayan Banach cebirleriyle ilgili şu teoremi ispatlamak için kullanmıştır: A değişmeli olmayan bir Banach cebri, $a \in A$ ve $d: A \to A$ dönüşümü de A'nın sürekli bir türevi olsun. L_a, a elemanı ile belirli soldan çarpma dönüşümü olmak üzere $G = L_a + d$ (sürekli) genelleştirilmiş türevi, her $x \in A$ için $\left[\left[G(x),x\right],G(x)\right] \in J(A)$ (A'nın Jacobson radikali) olacak şekilde ise o zaman $\left[a,A\right] \subseteq J(A)$ ve $d(A) \subseteq J(A)$'dır.

Daha sonra De Filippis ve Tamam El-Sayiad benzer bir problemi merkezi olmayan Lie idealler üzerinde ele almışlardır (De Filippis and Tamam El-Sayiad, 2009).

Bahsedilen bu çalışmalardan daha önce Park (2005), yarı asal bir R halkasında her $x \in R$ için $\left[\left[d(x), x\right], d(x)\right] = 0$ veya $\left\langle\left\langle d(x), x\right\rangle, d(x)\right\rangle = 0$ ($\left\langle x, y\right\rangle = xy + yx$ Jordan çarpımını göstermektedir) olacak şekilde bir d türevinin var olması durumunda her $x \in R$ için $\left[d(x), x\right]$ elemanının nilpotent olacağını göstermiştir. Elde ettiği bu sonucu da değişmeli olmayan karmaşık Banach cebirleriyle ilgili şu sonucu ispatlamak için kullanmıştır: A değişmeli olmayan bir karmaşık Banach cebri ve $d : A \to A$ dönüşümü de her $x \in A$ için $\left[\left[d(x), x\right], d(x)\right] \in J(A)$ veya $\left\langle\left\langle d(x), x\right\rangle, d(x)\right\rangle \in J(A)$ (A'nın Jacobson radikali) olacak şekilde A'nın sürekli lineer bir türevi ise o zaman $d(A) \subseteq J(A)$'dır.

Detay vermeden yukarıda bahsettiğimiz sonuçların, değişmeli olmayan Banach cebirleri teorisinde Singer-Wermer Teoremi'yle yakından ilişkili olduğunu da belirtelim (bkz. Mathieu, 1994).

Yardımcı Özellik 6.1 R asal bir halka ve I R'nin bir sağ ideali olsun. $a \in R$ elemanı her $x \in I$ için $\left[ax, x\right] = 0$ olacak şekilde ise $(a - \lambda)I = (0)$ olacak şekilde bir $\lambda \in C$ vardır.

İspat. $\left[ax, x\right] = 0$ denklemini lineerleştirerek her $x, y \in I$ için

$$\left[a, x\right]y + \left[a, y\right]x = 0 \tag{6.1}$$

elde edilir. (6.1)'de $r \in R$ olmak üzere y yerine yr yazarak ve tekrar (6.1)'i kullanarak

$$\left[a, y\right]\left[x, r\right] = y\left[a, r\right]x \tag{6.2}$$

elde edilir. Şimdi her $s \in R$ için (6.2)'de x yerine xs yazarak $[a,I]I[R,R]=(0)$ olduğu görülür. O zaman R'nin asallığından R değişmelidir veya $[a,I]I=(0)$'dır. Eğer R değişmeli ise $[a,I]I=(0)$ olduğu açıktır. Böylece (Brešar, 1994) Lemma'dan $(a-\lambda)I=(0)$ olacak şekilde $\lambda \in C$ vardır.

Aşağıdaki yardımcı özellik önemlidir ve genelleştirilmiş iç türev durumunun ispatında kullanılacaktır.

Yardımcı Özellik 6.2 R karakteristiği 2 olmayan asal bir halka, I R'nin sıfırdan farklı bir sağ ideli ve $a,b \in R$ olsun.

(***i***) Her $x \in I$ için $[[ax,x],ax]=0$ ise bazı $\lambda \in C$ için $(a-\lambda)I=(0)$'dır.

(***ii***) Her $x \in I$ için $[[xb,x],xb]=0$ ise $bI=(0)$ veya $b \in Z(R)$'dir.

İspat.

(***i***) Hipotezden her $x \in I$ için

$$[[ax,x],ax]=0 \tag{6.3}$$

dır. Yardımcı Özellik 2.2.4'den (6.3) her $x \in IU$ için de sağlanır. R ve I'yı sırasıyla U ve IU ile yer değiştirerek $IC=I$ ve R'nin merkezi C üzerinde merkezi kapalı olduğunu kabul edebiliriz. C'nin sonsuz olması durumunda $\overline{C}$, C'nin cebirsel kapanışı olmak üzere $\overline{R}=R\otimes_C \overline{C}$ ve $\overline{I}=I\otimes_C \overline{C}$ diyelim. O zaman (Erickson et al., 1975)'den $\overline{R}$ merkezi $\overline{C}$ üzerinde merkezi kapalıdır ve (6.3) standart bir muhakeme ile her $x \in \overline{I}$ için sağlanır. Dolayısıyla R, I ve C'yi sırasıyla $\overline{R}$, $\overline{I}$ ve $\overline{C}$ ile yer değiştirerek C'nin sonlu ya da cebirsel kapalı olduğunu kabul edebiliriz. Bazı $\lambda \in C$ için $(a-\lambda)I=(0)$ olduğunu göstermek istiyoruz.

$u \in I$ olsun. O zaman her $x \in R$ için

$$[[aux, ux], aux] = 0$$

dir. Çelişki elde etmek için bazı $u \in I$ için au ve u elemanlarının C-bağımsız olduğunu kabul edelim. Şimdi

$$[[auX, uX], auX] \tag{6.4}$$

polinomunun R için aşikar olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği olduğunu iddia ediyoruz. Aksi halde

$$au(XuXauX - XauXuX + XuXauX) - u(XauXauX)$$

$T = U *_C C\{X\}$ serbest çarpımının sıfır elemanı olur. O zaman Uyarı 2.2.1'den

$$uXauXauX = 0 \in T$$

olması $au = 0$ çelişkisine sebep olur. O halde (6.4), R için aşikar olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir. O zaman Martindale Teoremi'nden R, C'yi ilişkili bölümlü halkası olarak kabul eden ve sıfırdan farklı bir $H = Soc(R)$ "socle"sine sahip primitif bir halkadır. Şimdi I ve IH, (6.3) denklemini sağlar. Dolayısıyla I ve IH'yi yer değiştirerek $I \subseteq H$ olduğunu kabul edebiliriz. $e = e^2 \in I$ herhangi bir idempotent olsun. O zaman her $r \in R$ için

$$[[aere, ere], aere] = 0 \tag{6.5}$$

dir. (6.5) denklemini soldan e ile çarparsak her $r \in R$ için

$$[[(eae)(ere), ere], (eae)(ere)] = 0$$

elde edilir. eRe asal bir halka $char(eRe) = char(R) \neq 2$ ve $eae \in eRe$ olduğundan (De Filippis, 2008) Proposition uyarınca ya eRe değişmelidir ya da $eae \in Z(eRe) = Ce$'dir. Her iki durumda da $eae \in Ce$ olur. Diğer taraftan, her $r \in R$ için

$$\left[\left[aer(1-e), er(1-e)\right], aer(1-e)\right] = 0$$

dir. Komütatörü açarak her $r \in R$ için $er(1-e)aer(1-e)aer(1-e) = 0$ elde edilir. O halde her $r \in R$ için $\left((1-e)aer\right)^4 = 0$'dır. Yani $(1-e)aeR$ sınırlı indeksli bir nil sağ idealdir. Levitzki Teoremi'nden (bkz. Yardımcı Özellik 2.1.6) $(1-e)ae = 0$ olmalıdır. Şimdi $ae = eae \in Ce$'dir. I tamamen indirgenebilir bir sağ H-modül olduğundan (bkz. Tanım 2.1.12) I'nın her bir elemanı uygun bir $f = f^2 \in I$ idempotenti için fH'de kapsanır. O zaman herhangi bir $x \in I$ elemanı için $x = fx$ olacak şekilde bir $f = f^2 \in I$ idempotenti vardır. Böylece

$$ax = afx = fafx \in Cfx = Cx$$

dir. Dolayısıyla her $x \in I$ için $[ax, x] = 0$ olur. Yardımcı Özellik 6.1'den bazı $\lambda \in C$ için $(a-\lambda)I = (0)$'dır.

(ii) İkinci kısmın ispatı ilk kısmın ispatına çok benzerdir. Şimdi her $x \in I$ için

$$\left[[xb, x], xb\right] = 0 \tag{6.6}$$

dir. Yine Yardımcı Özellik 2.2.4'den (6.6) her $x \in IU$ için de sağlanır. R ve I'yı sırasıyla U ve IU ile yer değiştirerek $IC = I$ ve R'nin merkezi C üzerinde merkezi kapalı olduğunu kabul edebiliriz. (*i*)'de olduğu gibi C sonsuz olduğunda R, I ve C'yi sırasıyla $\overline{R}$, $\overline{I}$ ve $\overline{C}$ ile yer değiştirerek C'nin sonlu ya da cebirsel kapalı olduğunu kabul edebiliriz.

$u \in I$ olsun. O zaman her $x \in R$ için

$$\left[\left[uxb,ux\right],uxb\right]=0 \tag{6.7}$$

dir. Çelişki elde etmek için $b \notin C$ ve $bI \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $bu \neq 0$ olacak şekilde bir $u \in I$ vardır.

$$\left[\left[uXb,uX\right],uXb\right]$$

polinomunun R için aşikar olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği olduğunu iddia ediyoruz. Eğer değilse

$$\left(uXbuXuX - uXuXbuX + uXbuXuX\right)b - \left(uXbuXbuX\right)$$

$T = U *_C C\{X\}$ serbest çarpımının sıfır elemanı olur. Uyarı 2.2.1'den

$$uXbuXbuX = 0 \in T$$

olur ve buradan da $bu = 0$ çelişkisi elde edilir. O zaman (6.7), R için aşikar olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir. Bu son durumda Martindale Teoremi'nden R, sıfırdan farklı bir $H = Soc(R)$ "socle"sine sahip primitif bir halkadır. Üstelik (6.6) IH tarafından da sağlandığından I ve IH'yi yer değiştirerek $I \subseteq H$ olduğunu kabul edebiliriz. Yukarıdakine benzer şekilde $e = e^2 \in I$ herhangi bir idempotent olsun. O zaman her $r \in R$ için

$$\left[\left[ereb,ere\right],ereb\right]=0 \tag{6.8}$$

dir. Yine eRe asal bir halka $char(eRe) = char(R) \neq 2$ ve $ebe \in eRe$ olduğundan (De Filippis, 2008) Proposition uyarınca ya eRe değişmelidir ya da $ebe \in Ce$'dir. Her iki durumda da $ebe \in Ce$ olur. Diğer taraftan, her $r \in R$ için

$$\left[\left[er(1-e)b,er(1-e)\right],er(1-e)b\right]=0$$

dir. Komütatörü açarak her $r \in R$ için $er(1-e)ber(1-e)ber(1-e)=0$ elde edilir. O halde $(1-e)beR$ sınırlı indeksli bir nil sağ idealdir. Yine Levitzki Teoremi'nden $(1-e)be=0$ olmalıdır. Dolayısıyla her $e \in I$ idempotenti için $be=ebe \in Ce$'dir. I tamamen indirgenebilir bir sağ H-modül olduğundan I'nın her bir elemanı uygun bir $f=f^2 \in I$ idempotenti için fH'de kapsanır. O zaman herhangi bir $x \in I$ elemanı için $x=fx$ olacak şekilde bir $f=f^2 \in I$ idempotenti vardır. Böylece

$$bx=bfx=fbfx \in Cfx=Cx$$

dir. Dolayısıyla her $x \in I$ için $[bx,x]=0$ olur. Yardımcı Özellik 6.1'den bazı $\mu \in C$ için $(a-\mu)I=(0)$'dır. Şimdi (6.6) denklemi her $x \in I$ için

$$0=\left[[xb,x],xb\right]=x^3\mu(b-\mu)$$

denklemine indirgenir. Özel olarak,

$$e\mu(b-\mu)=0$$

ve her $r \in R$ için

$$\left(e+er(1-e)\right)\mu(b-\mu)=0$$

olduğundan $eR\mu(b-\mu)=(0)$, yani $\mu=0$ veya $b=\mu \in C$'dir. $b \notin C$ kabul ettiğimizden $\mu=0$ olmalıdır. Ancak bu durumda da $bI=(0)$ çelişkisine ulaşılır.

Yardımcı Özellik 6.3 R karakteristiği 2 olmayan asal bir halka, I R'nin sıfırdan farklı bir sağ ideali ve $a,b \in R$ olsun. Her $x \in I$ için

$$\left[[ax+xb,x],ax+xb\right]=0 \tag{6.9}$$

ise aşağıdakilerden biri sağlanır:

(*i*) Bazı $\lambda \in C$ için $(a-\lambda)I=(0)=(b+\lambda)I$ 'dır,

(*ii*) Bazı $\lambda \in C$ için $(a-\lambda)I=(0)$ ve $b \in Z(R)$ 'dir.

İspat. $u \in I$ olsun. O zaman her $x \in R$ için

$$\left[\left[aux+uxb,ux\right],aux+uxb\right]=0 \tag{6.10}$$

dır. R ve U aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliklerini sağladığından (6.10) her $x \in U$ için de sağlanır. R ve I 'yı sırasıyla U ve IU ile yer değiştirerek $C=Z(R)$ olduğunu kabul edebiliriz. R 'nin ya bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği halkası olduğunu ya da yardımcı özelliğin sağlandığını göstermek istiyoruz. Dolayısıyla R 'nin bir GPI-halkası olmadığını kabul edelim. Ayrıca bazı $u \in I$ için au ve u elemanlarının C-bağımsız olduğunu da kabul edelim. O zaman R

$$\left[\left[auX+uXb,uX\right],auX+uXb\right]$$

polinomunu sağlar. (6.10) denklemi açılarak

$$f(x)=2xuxaux+2xuxuxb-xauxux-xuxbux$$

ve

$$\begin{aligned} g(x)=2xbuxaux+2xbuxuxb-xauxaux-xauxuxb \\ -xuxbaux-xuxbuxb-xbauxux-xbuxbux \end{aligned}$$

olmak üzere her $x \in R$ için

$$auf(x)+ug(x)=0$$

olduğu görülür. R aşikar olmayan hiçbir genelleştirilmiş polinom özdeşliği sağlamadığından Uyarı 2.2.1'den

$$auf(X) = 0 \in T = U *_C C\{X\}$$

olmalıdır. O zaman

$$2auXuXauX + 2auXuXuXb - auXauXuX - auXuXbuX, \tag{6.11}$$

T'nin sıfır elemanıdır. Şimdi eğer 1 ve b elemanları C-bağımlı, yani $b \in C$ ise o zaman (6.9) denklemi her $x \in I$ için

$$\left[\left[(a+b)x, x\right], (a+b)x\right] = 0$$

denklemine indirgenir. Böylece Yardımcı Özellik 6.2 (*i*) uyarınca $(a+b-\beta)I = (0)$ olacak şekilde bir $\beta \in C$ vardır. $b - \beta = -\lambda \in C$ dersek $(a-\lambda)I = (0)$ ve $b \in Z(R)$ olduğu görülür. Bu ise bize (*ii*)'yi verir.

O zaman 1 ve b elemanlarının C-bağımsız, yani $b \notin C$ olduğunu kabul edebiliriz. (6.11) denklemini bu sefer

$$\left(2a(uX)^2 auX - auXa(uX)^2 - a(uX)^2 buX\right) + \left(2a(uX)^3\right)b = 0 \in T$$

formunda yazalım. Yukarıdaki gibi $\left(2a(uX)^3\right)b = 0 \in T$ olduğu sonucuna varılır. Ancak bu durum $char(R) = 2$ veya $au = 0$ veya $b = 0$ olmadıkça mümkün değildir. Bu ise başlangıç hipotezleri ile çelişir. Şimdiye kadar bazı $u \in I$ için au ve u elemanları C-bağımsız olduğunda yardımcı özelliğin sağlandığını ya da R'nin bir GPI-halkası olduğunu gösterdik. O halde her $u \in I$ için au ve u elemanlarının C-bağımlı olduğunu kabul edebiliriz. O zaman her $u \in I$ için $[au, u] = 0$ olur ve dolayısıyla Yardımcı Özellik 6.1'den bazı $\lambda \in C$ için $(a-\lambda)I = 0$ olduğu görülür. Şimdi (6.9) denklemi her $x \in I$ için

$$\left[\left[x(b+\lambda),x\right],x(b+\lambda)\right]=0$$

denklemine indirgenir. Bu durumda Yardımcı Özellik 6.2 (*ii*)'den $b \in C$ veya $(b+\lambda)I=(0)$ elde edilir.

O halde şimdi R'nin bir GPI-halkası olduğu durumu göz önüne alabiliriz. O zaman Martindale Teoremi'nden R, C'yi ilişkili bölümlü halkası olarak kabul eden ve sıfırdan farklı bir H "socle"sine sahip primitif bir halkadır. Üstelik I ve IH sağ ideallerinin ikisi de (6.9) denklemini sağladığından I ile IH'yi yer değiştirerek $I \subseteq H$ olduğunu kabul edebiliriz. $e=e^2 \in I$ herhangi bir idempotent olsun. O zaman her $r \in R$ için

$$\left[\left[aere+ereb,ere\right],aere+ereb\right]=0 \qquad (6.12)$$

dır. (6.12) denklemi sağdan ve soldan $1-e$ ile çarpılırsa $char(R)\neq 2$ olduğundan her $r \in R$ için

$$(1-e)aerererereb(1-e)=0$$

elde edilir. R asal olduğundan (Richoux, 1979) Theorem'den $(1-e)ae=0$ veya $eb(1-e)=0$'dır. Eğer $(1-e)ae=0$ ise (6.12) denklemini sağdan e ile çarparak her $r \in R$ için

$$\left[\left[(eae)(ere)+(ere)(ebe),ere\right],(eae)(ere)+(ere)(ebe)\right]=0$$

elde edilir. Benzer şekilde $eb(1-e)=0$ ise (6.12) denklemini soldan e ile çarparak yine yukarıdaki aynı denklem elde edilir. O zaman her iki durumda da $a'=eae$ ve $b'=ebe$ olmak üzere her $x \in eRe$ için

$$\left[\left[a'x+xb',x\right],a'x+xb'\right]=0 \qquad (6.13)$$

olduğu görülür. eRe asal bir halka, $char(eRe)=char(R)\neq 2$ ve $a',b'\in eRe$ olduğundan (6.13) denkleminden (De Filippis, 2008) Proposition uyarınca ya eRe halkasının değişmeli olduğu ya da $a',b'\in Z(eRe)=Ce$ olduğu sonucuna varılır. O zaman her iki durumda da $a',b'\in Ce$'dir.

Şimdi herhangi bir $e=e^2\in I$ için $eb(1-e)=0$ ise $(1-e)ae=0$ olduğunu göstermek istiyoruz. O halde çelişki elde etmek için bazı $e=e^2\in I$ için $eb(1-e)=0$ ancak $(1-e)ae\neq 0$ olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $\alpha\in C$ ve $r\in R$ elemanlarını alıp $q=\alpha er(1-e)$ diyelim. O zaman $q^2=0$'dır ve $x\in R$ için $\varphi(x)=(1+q)x(1-q)$ ile tanımlı dönüşüm $\varphi(I)\subseteq I$ olacak şekilde R'nin bir C-otomorfizmasıdır. O halde her $x\in I$ için

$$\left[\left[\varphi(a)x+x\varphi(b),x\right],\varphi(a)x+x\varphi(b)\right]=0 \tag{6.15}$$

dır. Yukarıdaki gibi (6.15) denklemi $(1-e)\varphi(a)e=0$ veya $e\varphi(b)(1-e)=0$ olmasını gerektirir. Eğer $(1-e)\varphi(a)e=0$ ise o zaman

$$0=(1-e)\varphi(a)e=(1-e)ae$$

çelişkisi elde edilir. O halde $e\varphi(b)(1-e)=0$ olmalıdır. Hesaplamayla her $\alpha\in C$ ve $r\in R$ için

$$\alpha^2 er(1-e)ber(1-e)+\alpha eber(1-e)-\alpha er(1-e)b(1-e)=0 \tag{6.16}$$

olduğu görülür. Özel olarak (6.16) denkleminde önce $\alpha=1$ ve daha sonra $\alpha=-1$ alınıp bu şekilde elde edilen iki denklem toplanırsa $char(R)\neq 2$ olduğundan her $r\in R$ için $er(1-e)ber(1-e)=0$ elde edilir. O halde $(1-e)be=0$ ve böylece $eb=ebe=be$'dir. $s\in R$ ve $f=e+es(1-e)\in I$ olsun. $(1-f)af\neq 0$ olduğunu görmek kolaydır. O zaman $fb(1-f)=0$ olmalıdır. Bu ise yukarıdaki gibi $fb=bf$ olmasını gerektirir. Yani her $s\in R$ için

$$[b, e+es(1-e)]=0$$

dır. Böylece (Felzenszwalb, 1982) Lemma 1'den $b\in C$ olduğu sonucuna varılır. Şimdi (6.9) denklemi her $x\in I$ için

$$[[(a+b)x,x],(a+b)x]=0$$

denklemine indirgenir. O halde her $r\in R$ için

$$[[(a+b)er(1-e),er(1-e)],(a+b)er(1-e)]=0,$$

yani $er(1-e)aer(1-e)aer(1-e)=0$'dır. Buradan da $(1-e)ae=0$ çelişkisi elde edilir. Böylece iddiamızı ispatlamış oluruz. O zaman her $e=e^2\in I$ için $ae=eae\in Ce$'dir. Şimdi I tamamen indirgenebilir sağ H-modül olduğundan I'nın her elemanı uygun bir $f=f^2\in I$ idempotenti için fH'de kapsanır. $x\in I$ olsun. O zaman $fx=x$ olacak şekilde bir $f=f^2\in I$ idempotenti vardır. O halde $ax=afx=fafx\in Cfx=Cx$'dir. Bu ise her $x\in I$ için $[ax,x]=0$ demektir. Dolayısıyla Yardımcı Özellik 6.1'den bazı $\lambda\in C$ için $(a-\lambda)I=(0)$'dır. (6.9) denkleminden her $x\in I$ için

$$[[x(b+\lambda),x],x(b+\lambda)]=0$$

olduğu görülür. Böylece Yardımcı Özellik 6.2 (*ii*) uyarınca $(b+\lambda)I=(0)$ veya $b\in Z(R)$'dir ve ispat biter.

Teorem 6.1 R karakteristiği 2 olmayan asal bir halka, I R'nin sıfırdan farklı bir sağ ideli ve G de R'nin bir genelleştirilmiş türevi olsun. Her $x\in I$ için

$$\left[\left[G(x),x\right],G(x)\right]=0 \tag{6.17}$$

ise o zaman ya R değişmelidir ya da her $x\in R$ için $G(x)=ax+xb$ olacak şekilde $a,b\in U$ elemanları vardır ve aşağıdakilerden biri sağlanır:

(*i*) Bazı $\lambda\in C$ için $(a-\lambda)I=(0)=(b+\lambda)I$ 'dır,

(*ii*) Bazı $\lambda\in C$ için $(a-\lambda)I=(0)$ ve $b\in C$ 'dir.

İspat. Daha önce de belirttiğimiz gibi R 'nin yoğun bir sağ ideali üzerindeki her G genelleştirilmiş türevi U 'ya tek türlü genişletilebilir ve uygun bir $p\in U$ elemanı ve $d\in Der(U)$ türevi için $G(x)=px+d(x)$ formundadır. O zaman her $x\in I$ elemanı için

$$\left[\left[px+d(x),x\right],px+d(x)\right]=0 \tag{6.18}$$

dır. Teorem 2.2.8 uyarınca I ve IU aynı diferansiyel özdeşlikleri sağladığından (6.18) denklemi her $x\in IU$ için de sağlanır. Eğer $d=0$ ise her $x\in IU$ için $\left[\left[px,x\right],px\right]=0$ olur. Yardımcı Özellik 6.2 (*i*)'den bazı $\lambda\in C$ için $(p-\lambda)IU=(0)$'dır. O zaman $p=a$ dersek her $r\in R$ için $G(r)=ar$ ve $(a-\lambda)I=(0)$ olur. O halde $d\neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz.

Kharchenko Teoremi ışığında ispatı iki duruma ayıralım:

Durum I. d , bir $q\in U-C$ elemanı ile belirli iç türev olsun. O zaman (6.18)'den her $x\in IU$ için

$$\left[\left[(p+q)x-qx,x\right],(p+q)x-qx\right]=0 \tag{6.19}$$

dır. O halde R ve I 'yı sırasıyla U ve IU ile yer değiştirerek $p,q\in R$ olduğunu kabul edebiliriz. Kısalık için $a=p+q$ ve $b=-q$ diyelim. Şimdi Yardımcı

Özellik 6.3'ten bazı $\lambda \in C$ için $(a-\lambda)I=(0)=(b+\lambda)I$ veya $(a-\lambda)I=(0)$ ve $b \in C$'dir.

Durum II. Şimdi d, U'nun bir dış türevi olsun. İspata devam etmeden önce (6.18) denklemini doğrusallaştıralım. (6.18) denkleminde x yerine $x+y$ yazarak her $x,y \in I$ için

$$\begin{aligned}\big[[G(x),x],G(y)\big]+\big[[G(x),y],G(x)\big]+\big[[G(y),x],G(x)\big]\\ +\big[[G(x),y],G(y)\big]+\big[[G(y),x],G(y)\big]+\big[[G(y),y],G(x)\big]=0\end{aligned} \tag{6.21}$$

elde edilir. (6.21)'de x yerine $-x$ alıp elde edilen denklemi (6.21) ile toplayarak $char(R)\neq 2$ olduğundan her $x,y \in I$ için

$$\big[[G(x),x],G(y)\big]+\big[[G(x),y],G(x)\big]+\big[[G(y),x],G(x)\big]=0 \tag{6.22}$$

olduğu görülür. (6.22)'de x yerine xr yazarak her $x,y \in I$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned}\big[[G(x)r+xd(r),xr],G(y)\big]+\big[[G(x)r+xd(r),y],G(x)\big]\\ +\big[[G(y),xr],G(x)r+xd(r)\big]=0\end{aligned}$$

olur. Kharchenko Teoremi'nden R, her $x,y \in I$ ve $r,s \in R$ için

$$\big[[G(x)r+xs,xr],G(y)\big]+\big[[G(x)r+xs,y],G(x)\big]+\big[[G(y),xr],G(x)r+xs\big]=0$$

özdeşliğini sağlar. Özel olarak R, her $x,y \in I$ ve $s \in R$ (dolayısıyla her $s \in U$) için

$$\big[[xs,y],xs\big]=0$$

özdeşliğini sağlar. Bu son denklemde $s=1$ alınarak her $x,y\in I$ için $[[x,y],x]=0$ elde edilir. O zaman her $x,y,z\in I$ için

$$0=[[x,yz],x]=2[x,y][z,x]$$

ve $char(R)\neq 2$ olduğundan da $[x,y][x,z]=0$ olur. Şimdi bu son denklemde z yerine zr yazarak her $x,y,z\in I$ ve $r\in R$ için $[x,y]z[x,r]=0$ olduğu görülür. Dolayısıyla herhangi bir $x\in I$ için $[x,I]I=(0)$ veya $x\in Z(R)$'dir. Buradan da $[I,I]I=(0)$ veya R'nin değişmeli olduğu sonucuna varılır. Eğer $[I,I]I=(0)$ ise $x,y\in I$ için $[[x,y],x]=0$ oluşundan $x[x,y]=0$ elde edilir. Buradan da R'nin değişmeli olduğunu görmek kolaydır.

Teoremdeki karakteristik şartının kaldırılamayacağını gösteren aşağıdaki örnekle bu bölümü sonlandıralım.

Örnek 6.1 F karakteristiği 2 olan bir cisim, $R=M_2(F)$ ve $a\in R$ herhangi bir eleman olsun. O zaman her $x\in R$ için $G(x)=[a,x]$ ile tanımlı G türevi için $G(x)^2\in Z(R)$ olduğundan her $x\in R$ için

$$[[G(x),x],G(x)]=[G(x)^2,x]=0$$

dır.

7. SONUÇ

Bu tezin ana bölümlerini oluşturan 3-6. bölümlerde asal halkaların tek yanlı idealleri üzerinde genelleştirilmiş türevli birbirinden bağımsız dört farklı özdeşlik incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, asal halkaların sol idealleri üzerinde genelleştirilmiş türevleri ihtiva eden Engel koşullu belirli bir özdeşlik incelenmiştir. Böyle bir özdeşliği sağlayan asal bir halka $GF(2)$, 2 elemanlı Galois cismi, üzerindeki 2×2 matrisler halkası ve halkanın ideali de bir minimal ideal olmadıkça genelleştirilmiş türevin Utumi kesirler halkasından uygun bir eleman ile sağdan çarpma dönüşümü olduğu sonucuna varılmıştır.

Dördüncü bölümde, yine asal halkaların sağ idealleri üzerinde çoklu doğrusal bir polinomu ve halkanın bir genelleştirilmiş türevini ihtiva eden iki özdeşlik incelenmiştir. Bu türden özdeşliklerin sağlanması durumunda halkanın farklı yapılarda olabileceği gözlenmiş ve olası tüm durumların detaylı bir betimlemesi yapılmıştır (bkz. Teorem 4.1 ve 4.2). İdealin genelleştirilmiş türev altındaki görüntüsü, idealin sol sıfırlayanında kapsanmadıkça ya halkanın ya da idealinin bir polinom özdeşliğini sağlaması gerektiği sonucuna varılmıştır.

Beşinci bölümde, asal halkaların sağ idealleri üzerinde homomorfizma ya da ters-homomorfizma olarak hareket eden genelleştirilmiş türevler incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar, halkanın genelleştirilmiş bir türevinin tek yanlı bir ideal üzerinde homomorfizma gibi hareket etmesiyle anti-homomorfizma gibi hareket etmesinin birbirine denk durumlar olduğunu göstermektedir.

Altıncı bölümde ise karakteristiği 2 olmayan asal bir halkalanın bir I sağ ideali üzerinde yine halkanın bir G genelleştirilmiş türevini ihtiva eden özel bir özdeşlik incelenmiştir. Her $x\in I$ için $\left[\left[G(x),x\right],G(x)\right]=0$ ise G'nin bir genelleştirilmiş iç türev olması gerektiği sonucuna varılmış ve genelleştirilmiş türev ideal üzerinde sol sıfırlayan şartları ile betimlenmiştir.

Yapılan çalışmalarda elde edilen sonuçlar, literatürde mevcut olan bir çok sonucun bir genellemesi niteliğindedir. Hem özdeşliğin ihtiva ettiği genelleştirilmiş türevin, hem de ideal ve halkanın olası en iyi betimlemesi verilmeye çalışılmıştır.

Ele alınan problemlerin incelenmesinde asal halkaların genelleştirilmiş polinom özdeşliği teorisi araç olarak kullanılmış ve kullanılan bu yöntemin detaylı sonuçlar elde etmede ne kadar etkili ve faydalı olduğu bir kez daha görülmüştür.

Üçüncü bölümde sonuçlar ışığında ele alınabilecek diğer bir problem şudur: Asal bir R halkasının g ve h gibi genelleştirilmiş iki türevi R 'nin sıfırdan farklı bir I sağ (sol) ideali üzerinde her $x \in I$ için, k, m, n, r, s, t sabit pozitif tamsayılar olmak üzere, $\left[g\left(x^m\right)x^n - x^r h\left(x^s\right), x^t\right]_k = 0$ olacak şekilde ise R 'nin yapısı ve g ile h genelleştirilmiş türevleri hakkında ne söylenebilir? Böyle bir özdeşliğin sağlanması durumunda, özel olarak $m = r$ ve $n = s$ ise herhangi sabit bir $a \in U$ ve her $x \in R$ için $g\left(x\right) = xa$ ve $h\left(x\right) = ax$ formunda olabilir.

Özellikle dördüncü bölümde çözülen problemin motivasyonu ile asal halkaların çoklu doğrusal polinomlar üzerindeki eş-merkezleyen genelleştirilmiş türevleri incelenebilir. Bu problem görece daha zor bir problem olmakla beraber, çalışma boyunca kullandığımız yöntem bu problemin de olası bir çözümünde kullanılabilir niteliktedir.

Altıncı bölümde ele alınan problemin daha genel bir hali olan şu problem incelenebilir: n sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere her $x \in I$ için $\left[x, G\left(x\right)\right]_n = 0$ ise R asal halkasının yapısını betimlemek mümkün müdür? Karakteristik üzerinde bazı kısıtlamalarla sonuçların hemen hemen aynı olacağı tahmin edilmektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Albaş, E. and Argaç, N., 2004, Generalized Derivations of Prime Rings, Algebra Colloq., 11(3): 399–410pp.

Albaş, E., Argaç, N. and De Filippis, V., 2008, Generalized Derivations with Engel Conditions on One-Sided Ideals, Comm. Algebra, 36(6): 2063–2071pp.

Ali, A. and Kumar, D., 2009, Generalized Derivations as Homomorphisms or as Anti-Homomorphisms in a Prime Ring, Hacet. J. Math. Stat., 38(1): 17-20pp.

Asma, A, Rehman, N. and Shakir, A., 2003, On Lie Ideals with Dervations as Homomorphisms and Anti-Homomorphisms, Acta Math. Hungar, 101(1-2): 79–82pp.

Ashvaf, M., Ali, S. and Haetinger, C., 2006, On Derivations in Rings and Their Applications, Aligarh Bull. Math., 25(2): 79–107pp.

Beidar, K. I., Martindale III, W. S. and Mikhalev, A. V., 1996, Rings With Generalized Identities, Marcel Dekker Inc., New York, 419p.

Bell, H.E. and Kappe, L.C., 1989, Rings in which Derivations Satisfy Certain Algebraic Conditions, Acta Math. Hungar, 53(3-4): 339–346pp.

Brešar, M., 1993, Centralizing Mappings and Derivations in Prime Rings, J. Algebra, 156(2): 385–394pp.

Brešar, M., 1994, One-Sided Ideals and Derivations of Prime Rings, Proc. Amer. Math. Soc., 122(4): 979–983pp.

Brešar, M., 1995, On Generalized Biderivations and Related Maps, J. Algebra, 172 (3): 764–786pp.

Chang, C.M., 2003, Power Central Values of Derivations on Multilinear Polynomials, Taiwanese J. Math., 7(2):329–338pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Chang, C.M. and Lee, T.K., 1998, Annihilators of Power Values of Derivations in Prime Rings, Comm. Algebra, 26(7): 2091–2113pp.

Chuang, C.L., 1987, The Additive Subgroup Generated by a Polynomial, Israel J. Math., 59(1): 98–106pp.

Chuang, C.L., 1988, GPIs Having Coefficients in Utumi Quotient Rings, Proc. Amer. Math. Soc., 103(3): 723–728pp.

Chuang, C.L. and Lee, T.K., 1996, Rings with Annihilator Conditions on Multilinear Polynomials, Chinese J. Math., 24(2): 177–185pp.

De Filippis, V., 2008, Generalized Derivations in Prime Rings and Noncommutative Banach Algebras, Bull. Korean Math. Soc., 45(4): 621–629pp.

De Filippis, V., 2009, Generalized Derivations as Jordan Homomorphisms on Lie Ideals and Right Ideals, Acta Math. Sin., 25(12):1965–1974pp.

De Filippis, V. and Tammam El-Sayiad, M.S., 2009, A Note on Posner's Theorem with Generalized Derivations on Lie Ideals, Rend. Semin. Mat. Univ., Padova, 122: 55–64pp.

Demir, Ç. and Argaç, N., 2010, A Result on Generalized Derivations with Engel Conditions on One-Sided Ideals, J. Korean Math. Soc., 47(3): 483-494pp.

Erickson, T. S., Martindale III, W. S. and Osborn, J. M., 1975, Prime Nonassociative Algebras, Pacific J. Math., 60(1): 49–63pp.

Faith, C. and Utumi, Y., 1963, On a New Proof of Litoff's Theorem, Acta Math. Acad. Sci. Hungar, 14: 369–371pp.

Felzenszwalb, B., 1978, On a Result of Levitzki, Canad. Math. Bull., 21(2): 241–242pp.

Felzenszwalb, B., 1982, Derivations in Prime Rings, Proc. Amer. Math. Soc., 84(1): 16–20pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Gusič, I., 2005, A Note on Generalized Derivations of Prime Rings, Glas. Mat. Ser. III, 40(60)(1): 47–49pp.

Herstein, I.N., 1969, Topics in Ring Theory, The University Of Chicago Press, Chicago, 132p.

Herstein, I.N., 1976, Rings with Involution, University Of Chicago Press, Chicago, 247p.

Hungerford, T.W., 1974, Algebra, Holt, Rinehart and Winston, New York, 502p.

Hvala, B., 1998, Generalized Derivations in Rings, Comm. Algebra, 26(4): 1147–1166pp.

Jacobson, N., 1975, PI-Algebras, An Introduction, Lecture Notes in Math. 441, Springer Verlag, New York, 115p.

Kharchenko, V.K., 1978, Differential Identities of Prime Rings, English Translation: Algebra and Logic, 17(2): 155–168pp.

Lambek, J., 1966, Lectures on Rings and Modules, Blaisdell Publishing Company, Waltham, 183p.

Lanski, C., 1988, Differential Identities, Lie Ideals, and Posner's Theorems, Pacific J. Math., 134(2): 275–297pp.

Lanski, C., 1993, An Engel Condition with Derivation, Proc. Amer. Math. Soc., 118(3): 731–734pp.

Lanski, C., 1997, An Engel Condition with Derivation for Left Ideals, Proc. Amer. Math. Soc., 125(2): 339–345pp.

Lee, P. H. and Wong, T. L., 1995, Derivations Cocentralizing Lie Ideals, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 23(1): 1–5pp.

Lee, T.K., 1992, Semiprime Rings with Differential Identities, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 20 (1): 27–38pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Lee, T.K., 1995, Left Annihilators Characterized by GPIs, Trans. Amer. Math. Soc., 347(8): 3159–3165pp.

Lee, T.K., 1996, Power Reduction Property for Generalized Identities of One-Sided Ideals, Algebra Colloq., 3(1): 19–24pp.

Lee, T.K., 1999, Generalized Derivations of Left Faithful Rings, Comm. Algebra, 27(8): 4057–4073pp.

Lee, T.K. and Shiue, W.K., 1998, Derivations Cocentralizing Polynomials, Taiwanese J. Math., 2(4): 457–467pp.

Lee, T.K. and Shiue, W.K., 1999, A Result on Derivations with Engel Condition in Prime Rings, Southeast Asian Bull. Math., 23(3): 437–446pp.

Lee, T.K. and Shiue, W.K., 2001, Identities with Generalized Derivations, Comm. Algebra, 29(10): 4437–4450pp.

Leron, U., 1975, Nil and Power Central Valued Polynomials in Rings, Trans. Amer. Math. Soc., 202: 97–103pp.

Ma, J. and Xu, X., 2006, Cocentralizing Generalized Derivations in Prime Rings, Northeast. Math. J., 22 (1): 105–113pp.

Martindale III, W. S., 1969, Prime Rings Satisfying a Generalized Polynomial Identity, J. Algebra, 12: 576–584pp.

McCoy, N.H., 1964, The Theory of Rings, The Macmillan Co., New York; Collier-Macmillan Ltd., London , 161 p.

Park, K-H., 2005, On Derivations in Noncommutative Semiprime Rings and Banach Algebras, Bull. Korean Math. Soc., 42(4): 671–678pp.

Posner, E. C., 1957, Derivations in Prime Rings, Proc. Amer. Math. Soc., 8: 1093–1100pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Richoux, A., 1979, A Theorem for Prime Rings, Proc. Amer. Math. Soc., 77(1): 27–31pp.

Rowen, L.H., 1980, Polynomial Identities in Ring Theory, Pure Appl. Math., Acad. Press, New York, 365p.

Wang, Y. and You, H., 2007, Derivations as Homomorphisms or Anti-Homomorphisms on Lie Ideals, Acta Math. Sin., 23(6): 1149–1152pp.

Wong, T.L., 1996, Derivations with Power-Central Values on Multilinear Polynomials, Algebra Colloquium 3(4): 369–378pp.

Yenigül, M.Ş. and Argaç, N., 1994, On Prime and Semiprime Rings with α-Derivations, Turkish J. Math., 18(3): 280–283pp.

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Kırklareli'nde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Tekirdağ ve Kırklareli'nde tamamladı.

1999 yılında girdiği Ege Üniversitesi Matematik Bölümü, Teorik Matematik Ağırlıklı Matematik Lisans Öğretim Programından 2004 yılında mezun oldu. Aynı yıl Ege Üniversitesi'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. 2004 yılında Ege Üniversitesi'nde başladığı Yüksek Lisans Programını 2008 yılında tamamladı. 2005 yılında Eramus-Socrates Öğrenci Değişimi Programı çerçevesinde 9 aylığına İskoçya Aberdeen Üniversitesi'ne gitti. 2008 yılından itibaren Ege Üniversitesi Matematik Bölümü'nde doktora yapmaktadır.

2004-2006 yılları arasında TÜBİTAK Yurt İçi Yüksek Lisans bursiyerliği kazanmış ve 2008-2009 yılları arasında TÜBİTAK 1002 Hızlı Destek Programı çerçevesinde 108T257 nolu projede bursiyer olarak görev almıştır. 2010 yılında Asist. Prof. Vincenzo DE FILIPPIS'in davetlisi olarak lisansüstü kısa dersler vermek ve ortak çalışmalar yapmak üzere iki hafta İtalya'nın Messina Üniversitesi'nde bulunmuştur. Halen 2508 TÜBİTAK-ARRS (Slovenya) İkili İşbirliği Programı (2011-2013) çerçevesinde yürütülmekte olan 110T586 nolu projede bursiyer olarak görev almaktadır.