T.C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ZAMAN SKALALARINDA YÜZEYLER VE BAZI ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖMER AKGÜLLER

AĞUSTOS 2010
MUĞLA

T.C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ZAMAN SKALALARINDA YÜZEYLER VE BAZI ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ömer AKGÜLLER

MUĞLA 2010

T.C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Yrd. Doç. Dr. Sibel PAŞALI ATMACA danışmanlığında Ömer AKGÜLLER tarafından hazırlanan Zaman Skalalarında Yüzeyler ve Bazı Özellikleri başlıklı tez, 27/08/2010 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Mehmet SEZER	İmza :
Danışman	: Yrd. Doç. Dr. Sibel PAŞALI ATMACA	İmza :
Üye	: Prof. Dr. Ferhan MERDİVENCİ ATICI	İmza :

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın ortaya çıkmasını sağlayan, anlayışını ve bilgisini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Sibel PAŞALI ATMACA'ya; bana her konuda güven sağlayıp, eşsiz bilgisiyle beni yetiştiren hocam Murat ATMACA'ya; sorularımı hiçbir zaman cevapsız bırakmayıp konuya farklı bir vizyondan bakmamı sağlayan değerli hocam Ferhan MERDİVENCİ ATICI'ya; Matematik Bölümü'nün saygıdeğer hocalarına ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma; son olarak da hayatımı anlamlı kılan değerli eşim Özge AKGÜLLER'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ömer AKGÜLLER, Muğla, 2010

İÇİNDEKİLER

ZAMAN SKALALARINDA YÜZEYLER VE BAZI ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

ÖMER AKGÜLLER

MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2010

ÖZET

Bu çalışmanın amacı, zaman skalaları ile parametrelenen yüzeyleri tanımlamak ve bazı özelliklerini incelemektir. Zaman skalasında tanımlanan yüzeylere ait düzgün dönüşümler, tanjantlar ve tanjant düzlemleri araştırılmıştır. Zaman skalasında tanımlı vektör alanları incelenmiş, vektör alanları ile elde edilen kovaryant Δ-türevlerin yardımı ile yüzeylerin şekil operatörleri sunulmuştur. Zaman skalalarında paremetrelenmiş yüzeylerin vektörel analizi için vektör değerli fonksiyonlar tanımlanmış, kısmi Δ-türeve ait genel tanım ve teoremler ele alınmıştır. Yüzeyler üzerindeki eğriler yardımı ile yapılacak yüzey analizi için de genelleştirilmiş regüler eğriler ve tanjant doğruları verilmiştir. Sonuç olarak, dinamik denklemler üzerine yoğunlaşan zaman skalası analizi çalışmalarının, geometrik anlamlara da sahip olduğu, sürekli ve diskret yapıya sahip yüzeylerin analizi için de oldukça kullanışlı olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Zaman Skalaları, Yüzeyler, Şekil Operatörü

Sayfa adedi : 61
Tez yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Sibel PAŞALI ATMACA

SURFACES ON TIME SCALES AND SOME OF THEIR PROPERTIES

(M. Sc. Thesis)

ÖMER AKGÜLLER

MUĞLA UNIVERSITY
INSTITUTE of SCIENCE and TECHNOLOGY

2010

ABSTRACT

The aim of this study is to define surfaces which are parametrized on time scales and to investigate some of their properties. The regular transformations, tangents and tangent planes of surfaces defined on time scales have been researched. Vector fields which are defined on time scales have been studied, and by using covariant Δ-derivative which are obtained by vector fields, shape operators of surfaces have been presented. For vector analysis of surfaces parametrized by time scales, vector valued functions have been defined, and general definitions and theorems of the partial Δ-derivative have been considered. Generalized regular curves and tangent lines have been given to study surface analysis which is based on curves on surfaces. As a result, it is shown that studies of the time scale analysis which are focused on dynamic equations has also geometric meanings and are very useful for analysis of surfaces which have continuous and discrete form.

Key Words: Time Scales, Surfaces, Shape Operators

Page number : 61
Adviser : Yrd. Doç. Dr. Sibel PAŞALI ATMACA

SEMBOLLER

$\mathbb{T}$	Zaman skalası
σ	İleri atlama operatörü
ρ	Geri atlama operatörü
μ	Tanecik operatörü
f^{Δ}	f fonksiyonunun Hilger Δ-türevi
C_{rd}	Sürekli sağ yoğun fonksiyonlar kümesi
Λ^n	n-boyutlu zaman skalası
$\dfrac{\partial f}{\Delta t}$	f fonksiyonunun t değişkenine göre kısmi Δ-türevi
$\omega_p^{\Delta}[f]$	f fonksiyonunun ω_p vektörü yönündeki Δ-türevi
$T_p(\Lambda^n)$	Λ^n uzayında p noktasındaki Tanjant Uzay
$\mathcal{S}$	Yüzey
$J(\varphi)$	φ fonksiyonunun Jakobiyen Matrisi
C_{rd}^{∞}	Regüler fonksiyonlar kümesi
X	Vektör alanı
$D_{v_p}^{\Delta}X$	X vektör alanının v_p vektörü yönündeki Kovaryant Δ-türevi
S_p	Şekil operatörü

1. GİRİŞ

Zaman skalası analizi ilk olarak Stefan Hilger tarafından $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{R}$ üzerindeki diskret ve sürekli analizi birleştirmek için ortaya atılmıştır (Hilger, 1990). Hilger'in tanımladığı Δ-türev ve Δ-integral tanımları ile birlikte, bir çok araştırmacı bu konuyu ele almış ve daha ileri analiz tanım ve teoremlerini tanıtmıştır. Yapılan çalışmalar, sürekli ve diskret tanım kümelerinde aynı anda tanımlı dinamik denklemler üzerine yoğunlaşmıştır. Bu konu ile ilgili detaylı çalışmalar (Bohner ve Peterson, 2001),(Bohner ve Peterson, 2003), (Atıcı ve Guseinov, 2002) ve (Haile ve Hall, 2003)'de bulunabilir.

Bohner ve Guseinov'un (2004) yaptığı çalışma ile, zaman skalalarında kısmi Δ-diferansiyel kavramı tanıtılmıştır. Bu çalışma ile birlikte, zaman skalalarında temel geometrik yorumlar da verilmiştir. Bu yorumların temel tanım ve teoremleri (Guseinov ve Özyılmaz, 2001)'de bulunabilir. Genelleştirilmiş tanımlar ve teoremler ise (Aktan vd., 2008)'de bulunabilir.

Çalışmamızın ikinci bölümünde; zaman skalalarında analizin temel tanım ve teoremleri verilmiştir. Konuya yabancı olabilecek okuyucular için en temel teoremler ispatları ile birlikte verilmiştir. Ayrıca tek değişkenli fonksiyonlar için zincir kuralları ve polinomlar genel olarak bu bölümde ele alınmıştır. Daha detaylı çalışmalar (Bohner ve Peterson, 2001) ve (Agarwal ve Bohner, 1999)'da bulunabilir.

Çalışmamızın üçüncü bölümünde; zaman skalalarında geometrik yorumlar yapmamıza olanak sağlayan kısmi Δ-diferansiyel kavramı ele alınmıştır. Bu kavram ile ilgili en detaylı bilgi (Bohner ve Guseinov, 2004)'te bulunabilir. Bunun ile birlikte, geometrik analizi mümkün kılabilmesi için zaman skalalarında vektör değerli fonksiyonlar kavramı ile temel tanım ve teoremleri verilmiştir. Son olarak da regüler eğriler için tanjant doğruları ve yönlü Δ-türev kavramı verilmiştir. Bu kavramlar için detaylı bilgiler ise (Bohner ve Guseinov, 2004) ve (Guseinov ve Özyılmaz, 2001)'de bulunabilir.

Çalışmamızın dördüncü bölümünde ise; iki farklı zaman skalası ile parametrelenen yüzey yapıları ele alınmıştır. Zaman skalalarında tanımlı bir yapının yüzey olabilmesi için gerekli teoremler verilmiştir. Bunun ile birlikte, zaman skalalarında tanımlı yüzeylerin özellikleri ele alınmıştır. Ayrıca zaman skalalarında vektör alanları ve kovaryant Δ-türev kavramı verilmiştir. Bu kavramın bir geometrik yorumu olarak da zaman skalalarında tanımlı yüzeyler için şekil operatörleri ele alınmıştır. Şekil operatörü ile birlikte ortaya çıkan teoremler de bu bölümde ele alınmıştır.

Çalışmamızın son bölümü olan sonuç ve tartışma bölümünde; elde ettiğimiz sonuçlar genel olarak değerlendirilmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

2.1. Zaman Skalalarında Analiz

Zaman skalası; reel sayılar kümesinin boştan farklı kapalı herhangi bir alt kümesidir. Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$, doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$, tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$, Cantor kümesi zaman skalası örnekleridir. Fakat, rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$, irrasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}'$, karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C}$, $(0,1)$ açık aralığı zaman skalası değildir.

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi dışında,

$$\begin{aligned} h\mathbb{Z} &= \{hn : n \in \mathbb{Z}, h > 0\} \\ \mathbb{K}_q &= \{q^n : q \in \mathbb{Q}, q > 1, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\} \\ \mathbb{N}_0^q &= \{n^q : n \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{Q}\} \end{aligned}$$

gibi bir çok yapı zaman skalası olduğundan zaman skalasının *birleştirme* vasfı dışında *genişletme* vasfı da bulunmaktadır.

Bu çalışmamız boyunca bir zaman skalasını $\mathbb{T}$ ile göstereceğiz.

Bu bölümde, zaman skalaları ile ilişkili temel tanımlamaları ve bunlar yardımı ile zaman skalalarında tanımlı fonksiyonların diferansiyellerini ele alacağız.

Tanım 2.1 $\mathbb{T}$ *herhangi bir zaman skalası olsun.* $t \in \mathbb{T}$ *için* $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *öyle ki*

$$\sigma(t) = \inf\{s \in T \mid s > t\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona t *noktasının ileri atlama operatörü denir.*
Benzer şekilde; $t \in \mathbb{T}$ *için* $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *öyle ki*

$$\rho(t) = \sup\{s \in T \mid s < t\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona da t *noktasının geri atlama operatörü denir.*

Bu tanımda, $\emptyset$ boş küme olmak üzere, $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$ ve $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$ olarak kabul edilmektedir. Eğer $\sigma(t) > t$ ise t noktası sağ yayılmış, $\sigma(t) = t$ ise t sağ yoğun, $\rho(t) < t$ ise t sol yayılmış, $\rho(t) = t$ ise t sol yoğun olarak adlandırılır. Ayrıca $\rho(t) < t < \sigma(t)$ ise t ayrık, $\rho(t) = t = \sigma(t)$ ise t yoğun noktadır denir.

Tanım 2.2 *$\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için $\mu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ öyle ki*

$$\mu(t) = \sigma(t) - t$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona tanecik fonksiyonu denir.

Yukarıdaki tanımlarda; $t \in \mathbb{T}$ olduğunda $\sigma(t)$ ve $\rho(t)$ değerleri de $\mathbb{T}$ kümesinin elemanıdır. Bunun sebebi zaman skalalarının $\mathbb{T}$ kümesinin $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin kapalı bir alt kümesi olmasıdır.

Örnek 2.3 *$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ durumlarında yukarıda verdiğimiz tanımları inceleyelim;*

(i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *ise, herhangi bir* $t \in \mathbb{T}$ *için*

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{R} \mid s > t\} = \inf(t, \infty) = t \quad .$$

Benzer şekilde $\rho(t) = t$ olduğu da görülebilir. O halde $\mathbb{R}$ nin bütün noktaları yoğundur. Tanecik fonksiyonu ise;

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t - t = 0 \quad dır.$$

(ii) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *ise, herhangi bir* $t \in \mathbb{T}$ *için*

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z} \mid s < t\} = \inf(t+1, t+2, t+3, \ldots) = t + 1 \quad .$$

Benzer şekilde $\rho(t) = t - 1$ olduğu da görülebilir. O halde $\mathbb{Z}$ nin bütün noktaları ayrıktır. Tanecik fonksiyonu ise;

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t + 1 - t = 1 \quad dir.$$

Teorem 2.4 (Matematiksel Tümevarım)

$t_0 \in \mathbb{T}$ ve $\{S(t) \;:\; t \in [t_0, \infty)\}$ aşağıdaki ifadeleri sağlayan önermeler ailesi olsun;

(i.) $S(t_0)$ *önermesi doğrudur.*

(ii.) $t \in [t_0, \infty)$ *sağ yayılmış ve* $S(t)$ *doğru ise* $S(\sigma(t))$ *de doğrudur.*

(iii.) $t \in [t_0, \infty)$ *sağ yoğun ve* $S(t)$ *doğru ise* t *nin bir* U *komşuluğu vardır öyle ki her* $s \in U \cap (t, \infty)$ *için* $S(s)$ *önermesi doğrudur.*

(iv.) $t \in (t_0, \infty)$ *sol yoğun ve her* $s \in [t_0, t)$ *için* $S(s)$ *doğru ise* $S(t)$ *doğrudur.*

O halde $S(t)$ *her* $t \in [t_0, \infty)$ *için doğrudur.*

İspat: *(Bohner ve Peterson, 2001) bkz. Teorem 1.7* $\Box$

2.2. Zaman Skalasında Türev

Zaman skalasında Δ-türevi tanımlayabilmek için $\mathbb{T}$'den elde edilen Δ-türevlenebilirlik bölgesi $\mathbb{T}^\kappa$ aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\mathbb{T}^\kappa = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus (\rho(\max \mathbb{T}), \max \mathbb{T}], & \max T < \infty \\ \mathbb{T}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Tanım 2.5 $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *bir fonksiyon ve* $t \in \mathbb{T}^\kappa$ *olsun. Herhangi bir* $\varepsilon > 0$ *değeri için* t *nin bir* U *komşuluğu vardır öyle ki*

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s| \quad , \forall s \in U$$

özelliğini sağlayan $f^\Delta(t)$ *değerine,* f *fonksiyonunun* t *noktasındaki* Δ*-türevi denir.*

Örnek 2.6 *(i)* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu,* α *sabit olmak üzere* $f(t) = \alpha$ *ile tanımlansın. O halde; herhangi bir* $\varepsilon > 0$ *için*

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 0 \cdot [\sigma(t) - s]| = |\alpha - \alpha| = 0 \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

her $s \in \mathbb{T}$ *değeri için sağlanır ve* $f^\Delta(t) = 0$ *dır.*

(ii) $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu her* $t \in \mathbb{T}$ *için* $f(t) = t$ *olarak tanımlansın. Herhangi bir* $\varepsilon > 0$ *için*

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 1 \cdot [\sigma(t) - s]| = |\sigma(t) - s - (\sigma(t) - s)| = 0 \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

her $s \in \mathbb{T}$ *değeri için sağlanır ve* $f^\Delta(t) = 1$ *dır.*

Teorem 2.7 $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *bir fonksiyon ve* $t \in \mathbb{T}^\kappa$ *olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(i) f *fonksiyonu* t *noktasında diferansiyellenebilir ise* f *fonksiyonu* t *noktasında süreklidir.*

(ii) f *fonksiyonu* t *noktasında diferansiyellenebilir ve* t *noktası sağ yayılmış ise*

$$f^{\Delta} = \frac{f(\sigma(t) - f(t)}{\mu(t)} \quad .$$

(iii) t *noktası sağ yoğun ise* f *fonksiyonu* t *noktasında diferansiyellenebilirdir ancak ve ancak*

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

değeri var ve sonludur. Bu durumda

$$f^{\Delta} = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \quad .$$

(iv) f *fonksiyonu* t *noktasında diferansiyellenebilir ise*

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t) \quad .$$

İspat: *(Bohner ve Peterson, 2001) bkz. Teorem 1.16* $\square$

Örnek 2.8 *Tekrar* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *ve* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *durumlarını ele alalım.*

(i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *ise, Teorem (2.7) (iii)'den,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* Δ*-diferansiyellenebilirdir ancak ve ancak*

$$f'(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limiti vardır, bir başka değişle ancak ve ancak f *fonksiyonu diferansiyellenebilirdir. Bu durumda;*

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

olur.

(ii) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *ise, Teorem (2.7) (ii)'den,* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu,* Δ *ileri fark operatörü olmak üzere;*

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

ile Δ*-diferansiyellenebilirdir.*

Teorem 2.9 *$f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının $t \in \mathbb{T}^\kappa$ noktalarında diferansiyellenebilir olduklarını kabul edelim.*

(i) $(f+g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t)$

(ii) *α sabit bir sayı olmak üzere;* $(\alpha f)^\Delta(t) = \alpha(f)^\Delta(t)$

(iii) $(f.g)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(\sigma(t)) + f(t)g^\Delta(t)$

(iv) $f(t).f(\sigma(t)) \neq 0$ *ise;* $\left(\dfrac{1}{f}\right)^\Delta(t) = -\dfrac{f^\Delta(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$

(v) $g(t).g(\sigma(t)) \neq 0$ *ise;* $\left(\dfrac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \dfrac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t).g(\sigma(t))}$

İspat: *(Bohner ve Peterson, 2001) bkz. Teorem 1.20* $\square$

Teorem 2.10 *α bir sabit ve $m \in \mathbb{N}$ olsun.*

(i) $f(t) = (t-\alpha)^m$ *ile tanımlanan f fonksiyonu için;*

$$f^\Delta(t) = \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t) - \alpha)^v (t-\alpha)^{m-1-v}$$

(ii) $g(t) = \dfrac{1}{(t-\alpha)^m}$ *ile tanımlanan g fonksiyonu için;*

$$g^\Delta(t) = -\sum_{v=0}^{m-1} \frac{1}{(\sigma(t)-\alpha)^{m-v}(t-\alpha)^{v+1}}$$

İspat: *(Bohner ve Peterson, 2001) bkz. Teorem 1.24* $\square$

Tanım 2.11 *$t \in \mathbb{T}$, $\sigma^2(t) = \sigma(\sigma(t))$ ve $\rho^2(t) = \rho(\rho(t))$ olmak üzere; her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma^n(t)$ ve $\rho^n(t)$ tanımlı ise ; $f : \mathbb{T}^{\kappa^n} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu n kez diferansiyellenebilirdir denir.*

Örnek 2.12 *Genel olarak f ve g fonksiyonları iki kez diferansiyellenebilir ise fg fonksiyonunun da iki kez diferansiyellenebildiğini söyleyemeyiz.*

$$(fg)^\Delta = f^\Delta g + f^\sigma g^\Delta$$

ele alalım. f ve g fonksiyonları ikinci mertebeden diferansiyellenebilir ise

$$\begin{aligned}(fg)^{\Delta\Delta} &= (f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta})^{\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta}g + f^{\Delta\sigma}g^{\Delta} + f^{\sigma\Delta}g^{\Delta} + f^{\sigma\sigma}g^{\Delta\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta}g + (f^{\Delta\sigma} + f^{\sigma\Delta})g^{\Delta} + f^{\sigma\sigma}g^{\Delta\Delta}\end{aligned}$$

elde ederiz.

Örnek 2.13 *$h > 0$ olmak üzere $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ olsun. $t \in \mathbb{T}$ için;*

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} \ : \ s > t\} = \inf\{t + hn \ : \ n \in \mathbb{N}\} = t + h$$

ve benzer şekilde $\rho(t) = t - h$ bulunur. $\mathbb{T}$ nin her noktası izole nokta olduğu için;

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t + h - t = h$$

elde edilir, yani tanecik fonksiyonu sabittir. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için;

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} .$$

f fonksiyonunun ikinci mertebeden türevini ele alırsak;

$$\begin{aligned}f^{\Delta\Delta}(t) &= \frac{f^{\Delta}(\sigma(t)) - f^{\Delta}(t)}{\mu(t)} \\ &= \frac{f^{\Delta}(t+h) - f^{\Delta}(t)}{h} \\ &= \frac{\frac{f(t+2h)-f(t+h)}{h} - \frac{f(t+h)-f(t)}{h}}{h} \\ &= \frac{f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)}{h^2}\end{aligned}$$

elde edilir.

2.3. Zaman Skalasında İntegral

Bu bölümde zaman skalasında Δ-integral ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.14 *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun; $\mathbb{T}$ nin tüm sağ yoğun noktalarında sağ limit var ve $\mathbb{T}$ nin sol yoğun noktalarındaki sol limit değeri var ve bu limit değerleri sonlu ise bu f fonksiyonuna regüler denir.*

Tanım 2.15 *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun; $\mathbb{T}$ nin tüm sağ yoğun noktalarında sürekli ve $\mathbb{T}$ nin sol yoğun noktalarındaki sol limit değeri var ve bu limit değeri sonlu ise bu fonksiyona rd-sürekli denir. Çalışmamız boyunca rd-sürekli fonksiyonların kümesini*

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

ile göstereceğiz. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının n-inci mertebeden türevleri var ve sürekli iseler, bu fonksiyonların kümesi;

$$C_{rd}^{(n)} = C_{rd}^{(n)}(\mathbb{T}) = C_{rd}^{(n)}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

ile gösterilir.

Düzenli ve rd-sürekli fonksiyonların bazı sonuçları aşağıdaki teoremde ele alınmıştır.

Teorem 2.16 *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ olsun.*

(i) f sürekli ise f rd-süreklidir.

(ii) f rd-sürekli ise f düzenlidir.

(iii) İleri sıçrama operatörü $\sigma(t)$ rd-süreklidir.

(iv) f rd-sürekli veya düzenli ise f^{σ} da aynı özelliklidir.

(v) f sürekli olsun. $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu düzenli veya rd-sürekli ise $f \circ g$ de aynı özelliğe sahiptir.

İspat: *(Hilger, 1990) bkz. Teorem 4.1* □

Tanım 2.17 *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^{\kappa}$ üzerinde Δ-türevlenebilir ve her $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için $F^{\Delta}(t) = f(t)$ ise, F fonksiyonuna f nin Δ-antitürevi veya ilkeli denir.*

Tanım 2.18 *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun Δ-antitürevi varsa, f ye Δ-integrallenebilir fonksiyon denir. Bu durumda, $a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere f nin a'dan b'ye Δ-integrali*

$$\int_a^b f(t)\ \Delta t = F(b) - F(a)$$

olarak tanımlanır.

Örnek 2.19 *$a \neq 1$ sabit bir sayı ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için $\int a^t \Delta t$ integralini hesaplayalım.*

$$\left(\frac{a^t}{a-1}\right)^{\Delta} = \Delta\left(\frac{a^t}{a-1}\right) = \frac{a^{t+1} - a^t}{a-1} = a^t$$

olduğundan;

$$\int a^t \ \Delta t = \left(\frac{a^t}{a-1}\right) + C$$

olur.

Teorem 2.20 *Her rd-sürekli fonksiyonun antitürevi vardır.*

İspat: *(Bohner ve Peterson, 2001) bkz. Teorem 1.74* □

Teorem 2.21 *$f \in C_{rd}$ ve $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ ise*

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \ \Delta\tau = \mu(t) f(t) \quad .$$

İspat: *(Bohner ve Peterson, 2001) bkz. Teorem 1.75* □

Teorem 2.22 *$f^{\Delta}(t) \geq 0$ ise f artandır.*

İspat: *(Bohner ve Peterson, 2001) bkz. Teorem 1.76* □

Teorem 2.23 *$a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C_{rd}$ olmak üzere;*

(i) $\displaystyle\int_a^b [f(t) + g(t)] \ \Delta t = \int_a^b f(t) \ \Delta t + \int_a^b g(t) \ \Delta t$

(ii) $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t)) \ \Delta t = \alpha \int_a^b f(t) \ \Delta t$

(iii) $\displaystyle\int_a^b f(t) \ \Delta t = -\int_b^a f(t) \ \Delta t$

(iv) $\displaystyle\int_a^b f(t) \ \Delta t = \int_a^c f(t) \ \Delta t + \int_c^b f(t) \ \Delta t$

(v) $\displaystyle\int_a^b f(\sigma(t)) g^{\Delta}(t) \ \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t) g(t) \ \Delta t$

(vi) $\displaystyle\int_a^b f(t) g^{\Delta}(t) \ \Delta t = fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t) g(\sigma(t)) \ \Delta t$

(vii) $\displaystyle\int_a^a f(t) \ \Delta t = 0$

(viii) $[a,b)$ *aralığında* $|f(t)| \leq |g(t)|$ *ise*

$$\left|\int_a^b f(t)\ \Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\ \Delta t$$

(ix) Her $a \leq t < b$ *için* $f(t) \geq 0$ *ise* $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \Delta t \geq 0$

İspat: *(Bohner ve Peterson, 2001) bkz. Teorem 1.77* $\square$

Teorem (2.23)'un (v) ve (vi) şıkları kısmi integrasyon formülünü vermektedir. Ayrıca Teorem (2.23)'un bütün şıkları f ve g fonksiyonlarının regüler olma durumunda da geçerlidir.

Teorem 2.24 $a, b \in \mathbb{T}$ *ve* $f \in C_{rd}$ *olsun.*

(i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *ise*

$$\int_a^b f(t)\ \Delta t = \int_a^b f(t)\ dt \quad .$$

(ii) $[a,b]$ *aralığı sadece izole noktalardan oluşuyorsa*

$$\int_a^b f(t)\ \Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b)} \mu(t)f(t) & , a < b \\ 0 & , a = b \\ -\sum_{t\in[b,a)} \mu(t)f(t) & , a > b \end{cases}$$

(iii) $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk: \ k \in \mathbb{N}\}$, $h > 0$ *ise*

$$\int_a^b f(t)\ \Delta t = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h & , a < b \\ 0 & , a = b \\ -\sum_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh)h & , a > b \end{cases}$$

(iv) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *ise*

$$\int_a^b f(t)\ \Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t) & , a < b \\ 0 & , a = b \\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t) & , a > b \end{cases}$$

İspat: *(Bohner ve Peterson, 2001) bkz. Teorem 1.79* $\square$

Tanım 2.25 *$a \in \mathbb{T}$, $\sup \mathbb{T} = \infty$ ve f fonksiyonu $[a, \infty)$ aralığında rd-sürekli olsun.*

$$\int_a^\infty f(t)\ \Delta t = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(t)\ \Delta t$$

ile tanımlanan integrale improper integral denir.
Verilen limit değeri var ve sonlu ise improper integral bu limit değerine yakınsar. Aksi durumda ise improper integral için ıraksaktır denir.

2.4. Zincir Kuralları

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şeklindeki fonksiyonlar için zincir kuralının; g fonksiyonu t noktasında ve f fonksiyonu $g(t)$ noktasında türevlenebilir ise

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t))g'(t)$$

olduğunu biliyoruz. Fakat bu özellik her zaman skalası için geçerli değildir.

Örnek 2.26 *$f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonları $f(t) = t^2$ ve $g(t) = 2t$ ile tanımlansın ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda*

$$(f \circ g)^\Delta(t) = 8t + 4 \neq 8t + 2 = f^\Delta(g(t))g^\Delta(t)$$

eşitliğin sağlanmadığı görülür.

Bazı durumlarda aşağıdaki teoremde ele alınan türev ve Δ-türevin kullanılması kolaylık sağlar.

Teorem 2.27 *Kabul edelim ki $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli, $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^\kappa$ üzerinde Δ-diferansiyellenebilir, ve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli olarak türevlenebilir olsun.*

O halde öyle bir $c \in [t, \sigma(t)]$ vardır öyle ki

$$(f \circ g)^\Delta(t) = f'(g(c))g^\Delta(t) \quad .$$

İspat: *(Bohner ve Peterson, 2001) bkz. Teorem 1.87* □

Örnek 2.28 *Verilen $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $f(t) = t^2$ ve $g(t) = 2t$ için, Teorem (2.27)'den*

$$(f \circ g)^\Delta(3) = f'(g(c))g^\Delta(3)$$

olacak şekilde öyle bir c sayısının var olduğunu biliyoruz. Hesaplamaları yaptığımızda;

$$(f \circ g)^{\Delta}(3) = 28$$
$$f'(g(c))g^{\Delta}(3) = 8c$$

denkleminden c değerini çözersek $c = \frac{7}{2}$ *elde ederiz, ve* $c \in [3, 4]$ *dır.*

Aşağıdaki teoremde verilen zincir kuralı ise (Keller,1999) ve (Pötzsche,2001)'de tanımlanmıştır.

Teorem 2.29 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu sürekli olarak diferansiyellenebilir ve* $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu da* Δ*-diferansiyellenebilir olsun.*

O halde $f \circ g$ *fonksiyonu* Δ*-diferansiyellenebilirdir ve*

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = \left\{ \int_0^1 f'\left(g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t)\right)\ dh \right\} g^{\Delta}(t)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: *(Pötzsche,2001) bkz. Teorem 1* $\square$

Örnek 2.30 $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *ve* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonlarını* $g(t) = t^2$ *ve* $f(x) = \exp(x)$ *ile tanımlansın. O halde;*

$$g^{\Delta}(t) = (t+1)^2 - t^2 = 2t + 1 \quad ve \quad f'(x) = \exp(x)$$

olur. Teorem (2.29)'i uygularsak;

$$\begin{aligned}
(f \circ g)^{\Delta}(t) &= \left\{ \int_0^1 f'\left(g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t)\right)\ dh \right\} g^{\Delta}(t) \\
&= (2t+1) \int_0^1 \exp\left(t^2 + h(2t+1)\right)\ dh \\
&= (2t+1)\exp(t^2) \int_0^1 \exp\left(h(2t+1)\right)\ dh \\
&= (2t+1)\exp(t^2) \frac{1}{2t+1} \left[\exp(h(2t+1))\right]_{h=0}^{h=1} \\
&= \exp(t^2)\left(\exp(2t+1) - 1\right) \quad .
\end{aligned}$$

Bu bölümün geri kalanında (Ahlbrandt vd., 2000)'nin sonuçlarını ele alacağız.

Önerme 2.31 $\mathbb{T}$ *bir zaman skalası ve* $v : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *kesin artan bir fonksiyon olsun öyle ki* $\widetilde{\mathbb{T}} := v(\mathbb{T})$ *de zaman skalasıdır.* $\widetilde{\mathbb{T}}$ *nın ileri sıçrama operatörünü* $\widetilde{\sigma}$, *türev operatörünü de* $\widetilde{\Delta}$ *ile gösterelim.*

O halde $v \circ \sigma = \widetilde{\sigma} \circ v$ *dir.*

Teorem 2.32 *Kabul edelim ki* $v : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *kesin artan bir fonksiyon ve* $\widetilde{\mathbb{T}} := v(\mathbb{T})$ *de bir zaman skalası olsun.* $w : \widetilde{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonunu alalım.* $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ *için* $v^{\Delta}(t)$ *ve* $w^{\widetilde{\Delta}}(v(t))$ *değerleri var ise*

$$(w \circ v)^{\Delta} = (w^{\widetilde{\Delta}} \circ v)v^{\Delta}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: *(Bohner ve Peterson, 2001) bkz. Teorem 1.93* $\square$

Örnek 2.33 $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$ *ve* $v(t) = 4t + 1$ *olsun. O halde,*

$$\widetilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T}) = \{4n + 1 : n \in \mathbb{N}_0\} = \{1, 5, 9, ...\}$$

olur. Bununla birlikte, $w : \widetilde{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* $w(t) = t^2$ *olsun. O halde,*

$$(w \circ v)(t) = w(v(t)) = (4t + 1)^2$$

dir ve buradan

$$\begin{aligned} (w \circ v)^{\Delta}(t) &= [(4t + 1) + 1]^2 - (4t + 1)^2 \\ &= 16t^2 + 40t + 25 - 16t^2 - 8t - 1 \\ &= 32t + 24 \end{aligned}$$

elde ederiz. Teorem (2.32)'i uyguladığımızda bileşke fonksiyonun Δ*-türevini elde edebiliriz.*

İlk olarak $v^{\Delta} = 4$ *daha sonra da*

$$w^{\widetilde{\Delta}}(t) = \frac{w(\widetilde{\sigma}(t)) - w(t)}{\widetilde{\sigma}(t) - t} = \frac{(t + 4)^2 - t^2}{t + 4 - t} = 2t + 4$$

elde edebiliriz. Buradan,

$$(w^{\widetilde{\Delta}} \circ v)(t) = w^{\widetilde{\Delta}}(4t + 1) = 8t + 6 \quad .$$

O halde,

$$[(w^{\widetilde{\Delta}} \circ v)v^{\Delta}](t) = (8t + 6)4 = 32t + 24 = (w \circ v)^{\Delta}(t)$$

elde ederiz.

Teorem (2.32)'in bir sonucu olarak bir fonksiyonun tersinin türevinin formülünü aşağıdaki teoremde olduğu gibi verebiliriz.

Teorem 2.34 *Kabul edelim ki $v : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ kesin artan bir fonksiyon ve $\widetilde{\mathbb{T}} := v(\mathbb{T})$ de bir zaman skalası olsun.*

O halde $v^{\Delta} \neq 0$ olduğu noktalarda;

$$\frac{1}{v^{\Delta}} = (v^{-1})^{\tilde{\Delta}} \circ v$$

dir.

İspat: *(Bohner ve Peterson, 2001) bkz. Teorem 1.97* □

Benzer şekilde; Teorem (2.32)'in bir sonucu olarak, integralde yerine koyma kuralını aşağıdaki teoremde olduğu gibi verebiliriz.

Teorem 2.35 *Kabul edelim ki $v : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ kesin artan bir fonksiyon ve $\widetilde{\mathbb{T}} := v(\mathbb{T})$ de bir zaman skalası olsun.*

$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu rd-sürekli ve v, rd-sürekli şekilde diferansiyellenebiliyorsa, $a, b \in \mathbb{T}$ için

$$\int_a^b f(t)v^{\Delta}(t)\ \Delta t = \int_{v(a)}^{v(b)} (f \circ v^{-1})(s)\ \widetilde{\Delta} s \quad .$$

İspat: *(Bohner ve Peterson, 2001) bkz. Teorem 1.98* □

Örnek 2.36 *$t \in \mathbb{T} := \mathbb{N}_0^{\frac{1}{2}} = \{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ için*

$$\int_0^t \left(\sqrt{\tau^2+1} + \tau\right) 3^{\tau^2}\ \Delta\tau$$

integralini, yerine koyma metodu ile bulalım.

$t \in \mathbb{N}_0^{\frac{1}{2}}$ için $v(t) = t^2$ alalım. O halde $v : \mathbb{N}_0^{\frac{1}{2}} \to \mathbb{R}$ kesin artandır ve $v(\mathbb{N}_0^{\frac{1}{2}}) = \mathbb{N}_0$ bir zaman skalasıdır.

v fonksiyonunun Δ-türevini hesaplarsak;

$$v^{\Delta}(t) = \sqrt{t^2+1} + t$$

elde ederiz.

O halde, $f(t)=3^{t^2}$ *ise, Teorem (2.32)'den,*

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left(\sqrt{\tau^2+1}+\tau\right) 3^{\tau^2}\ \Delta\tau &= \int_0^t f(\tau)v^{\Delta}(\tau)\ \Delta\tau \\
&= \int_0^{t^2} f(\sqrt{s})\ \widetilde{\Delta} s \\
&= \int_0^{t^2} 3^s\ \widetilde{\Delta} s \\
&= \left[\frac{1}{2}3^s\right]_{s=0}^{s=t^2} \\
&= \frac{1}{2}(3^{t^2}-1)\quad .
\end{aligned}$$

2.5. Polinomlar

0'ın antitürevi 1, 1'in antitürevi t dir, fakat keyfi bir zaman skalası için t'nin antitürevini veren bir formül bulmak imkansızdır. Örneğin, $\frac{t^2}{2}$ nin Δ-türevi

$$\frac{\sigma(t)+t}{2}=t+\frac{\mu(t)}{2}$$

olduğundan; $\frac{t^2}{2}$ her zaman skalasında t nin antitürevi değildir. Aynı zamanda $\frac{t^2}{2}$ nin Δ-türevi, iki diferansiyellenebilir fonksiyonun çarpımı şeklinde ifade edilebiliyor olmasına rağmen, diferansiyellenebilir bir fonksiyon değildir.

Benzer bir durum polinomlar için de geçerlidir. Yani; hiç bir klasik polinom birden fazla mertebeden diferansiyellenebilir olmak zorunda değildir. O halde, zaman skalası üzerinde yapılacak analiz için hangi fonksiyonun önem taşıdığı sorusu ortaya çıkar. Bu fonksiyon

$$\int_0^t \sigma(\tau)\ \Delta\tau \quad \text{veya} \quad \int_0^t \tau\ \Delta\tau$$

integrallerinden biridir.

Gerçekte;

$$g_2(s,t)=\int_s^t (\sigma(\tau)-s)\ \Delta\tau \quad \text{ve} \quad \int_s^t h_2(t,s)=\int_s^t (\tau-s)\ \Delta\tau$$

şeklinde iki fonksiyon tanımlarsak, bunlar arasındaki ilişki;

$$\begin{aligned}
g_2(t,s) &= \int_s^t (\sigma(\tau)-s)\ \Delta\tau \\
&= \int_s^t (\sigma(\tau)-\tau)\ \Delta\tau - \int_s^t \tau\ \Delta\tau - \int_s^t s\ \Delta\tau \\
&= \int_s^t (\tau^2)^{\Delta}\ \Delta\tau + \int_t^s \tau\ \Delta\tau - s(t-s) \\
&= \int_t^s \tau\ \Delta\tau + t^2 - s^2 - s(t-s) \\
&= \int_t^s (\tau - t)\ \Delta\tau \\
&= h_2(s,t)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunabilir.

Bu bölümde herhangi bir zaman skalasında tanımlı fonksiyonlar için Taylor formülünü vereceğiz. Burada verdiğimiz sonuçlar dışındakiler (Agarwal ve Bohner, 1999)'da bulunabilir.

$k \in \mathbb{T}_0$ olmak üzere; $g_k, h_k : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ genelleştirilmiş polinomlar; rekusif olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.37 *Her $s, t \in \mathbb{T}$ olmak üzere,*

$$g_0(t,s) \equiv h_0(s,t) \equiv 1$$

ve, $k \in \mathbb{N}_0$ için verilen g_k ve h_k fonksiyonları için g_{k+1} ve h_{k+1}, her $s, t \in \mathbb{T}$ için, aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\begin{aligned}
g_{k+1}(t,s) &= \int_s^t g_k(\sigma(\tau), s)\ \Delta\tau \\
h_{k+1}(t,s) &= \int_s^t h_k(\tau, s)\ \Delta\tau
\end{aligned}$$

Uyarı 2.38 *$h^{\Delta}(t,s)$ değerini, s'yi sabit tutarak h_k'nın t değişkenine göre türevi olarak alırsak, $k \in \mathbb{N}$ ve $t \in \kappa$ için,*

$$h^{\Delta}(t,s) = h_{k-1}(t,s)$$

olur. Benzer şekilde,

$$g^{\Delta}(t,s) = g_{k-1}(\sigma(t), s)$$

dir. Ayrıca, yukarıdaki tanımlar açıkça

$$g_1(t,s) = h_1(t,s) = t - s$$

denklemini sağlar.

$k > 1$ için h_k ve g_k değerlerini bulmak, bazı zaman skalaları için kolay olsa da, her zaman kolay değildir. Zaman skalalarında Taylor formülünü vermeden önce aşağıdaki örneği ele alalım;

Örnek 2.39 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *ve* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *durumları için* h_k *ve* g_k *fonksiyonları kolayca bulunabilir.*

(i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *durumunu ele alalım:*

$t \in \mathbb{R}$ *için* $\sigma(t) = t$ *olacağından,* $k \in \mathbb{N}_0$ *için* $h_k = g_k$ *olur. Buradan,*

$$\begin{aligned} g_2(t,s) &= h_2(t,s) \\ &= \int_s^t (\tau - s)\, d\tau \\ &= \left.\frac{(\tau - s)^2}{2}\right|_{\tau=t}^{\tau=s} \\ &= \frac{(t-s)^2}{2} \end{aligned}$$

elde ederiz. Her $s, t \in \mathbb{R}$ *ve* $k \in \mathbb{N}_0$ *için*

$$g_k(t,s) = h_k(t,s) = \frac{(t-s)^k}{k!} \tag{1}$$

olduğunu ispatlamak için matematiksel tümevarım kullanacağız.

I. $k = 0$ *için (1) denkleminin sağlandığı açıktır.*

II. Kabul edelim ki herhangi bir $m \in \mathbb{N}_0$ *için (1) denkleminin sağlandığını kabul edelim. O halde,*

$$\begin{aligned} g_{m+1}(t,s) &= h_{m+1}(t,s) \\ &= \int_s^t \frac{(\tau - s)^m}{m!}\, d\tau \\ &= \left.\frac{(\tau - s)^{m+1}}{(m+1)!}\right|_{\tau=s}^{\tau=t} \\ &= \frac{(t-s)^{m+1}}{(m+1)!} \end{aligned}$$

olduğundan (1) denklemi $m + 1$ *için de sağlanır.*

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun k mertebeden türevlenebildiğini kabul edelim. O halde,

$$(-1)^k g_k(s,t) = (-1)^k \frac{(s-t)^k}{k!} = \frac{(t-s)^k}{k!} = h_k(t,s)$$

eşitliği de sağlanır.

(ii) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *durumunu ele alalım.*

$t \in \mathbb{Z}$ *için* $\sigma(t) = t+1$ *olacağından,* $t, s \in \mathbb{Z}$ *için*

$$\begin{aligned} h_2(t,s) &= \int_s^t h_1(\tau,s)\ \Delta s \\ &= \left[\frac{(\tau-s)^{(2)}}{2}\right]_{\tau=s}^{\tau=t} \\ &= \binom{t-s}{2} \end{aligned}$$

elde ederiz.

3. MATERYAL ve METOT

Zaman skalalarında analiz; Stefan Hilger tarafından ortaya atıldıktan sonra matematiğin geometri, cebir, uygulamalı matematik ve topoloji gibi temel alanlarında da kullanılmıştır. Zaman skalalarında parametrelenen bir eğrinin diferansiyel özelliklerini incelerken Δ-türev tanımı oldukça kullanışlı olmuştur. Benzer şekilde, iki zaman skalasında parametrelenen yüzeylerin diferansiyel özelliklerini incelerken kısmi Δ-diferansiyel tanım ve teoremleri kullanışlı olacaktır (Guseinov ve Özyılmaz,2001),(Aktan vd., 2008),(Özyılmaz,2006).

Martin Bohner ve Gusein Sh. Guseinov'un (2004) bilim dünyasına sunmuş olduğu makalede, zaman skalalarında kısmi Δ-türevin tanımı ve geometrik yorumu verilmiştir. Çalışmamızın temeli bu tanımlamalar ve teoremler üzerine kurulmuştur. Bununla birlikte Gusein Sh. Guseinov ve Emin Özyılmaz'ın (2001) detaylı olarak çalıştığı tanjant doğrular ve regüler eğriler de çalışmamızda kullanılacaktır.

3.1. Zaman Skalalarında Kısmi Türev

$n \in \mathbb{N}$ ve $i \in \{1, 2, ..., n\}$ olmak üzere, her bir $\mathbb{T}_i$ kümesi bir zaman skalası belirtsin.

$$\Lambda^n = \mathbb{T}_1 \times ... \times \mathbb{T}_n = \{(t_1, ..., t_n) : t_i \in \mathbb{T}_i \ , \forall i \in \{1, ..., n\}\}$$

kümesine n-boyutlu zaman skalası uzayı denir.

σ_i ve ρ_i , $\mathbb{T}_i$ kümeleri için sırasıyla ileri sıçrama ve geri sıçrama operatörleri olsunlar. $u \in \mathbb{T}_i$ için, $\sigma_i : \mathbb{T}_i \to \mathbb{T}_i$ ileri sıçrama fonksiyonu

$$\sigma_i(u) = \inf\{v \in \mathbb{T}_i \mid v > u\}$$

ile, $\rho_i : \mathbb{T} \to \mathbb{T}_i$ geri sıçrama fonksiyonu ise

$$\rho_i(u) = \sup\{v \in \mathbb{T}_i \mid v < u\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.1 *$f : \Lambda^n \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.*

$$\lim_{\substack{s_i \to t_i \\ s_i \neq \sigma_i(t)}} \frac{f(t_1, ..., t_{i-1}, \sigma_i(t_i), t_{i+1}, ..., t_n) - f(t_1, ..., t_{i-1}, s_i, t_{i+1}, ..., t_n)}{\sigma_i(t_i) - s_i}$$

limit değeri var ve sonlu ise, bu değere f fonksiyonunun $t_i \in \mathbb{T}_i^\kappa$ bileşenine göre kısmi Δ-türevi denir ve

$$\frac{\partial f(t)}{\Delta_i t_i} \quad \textit{veya} \quad f_{t_i}^{\Delta_i}(t)$$

ile gösterilir.

Benzer şekilde bir $f : \Lambda^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun yüksek mertebeden kısmi Δ-türevlerinden de bahsetmek mümkündür. $\frac{\partial f(t)}{\Delta_i t_i}$ nin t_i ye göre kısmi Δ-türevini

$$\frac{\partial^2 f(t)}{\Delta_i t_i^2}$$

ile ifade ederiz. Daha yüksek mertebeden kısmi Δ-türevler de benzer şekilde elde edilebilir.

Tanım 3.2 *δ yeteri kadar küçük bir sayı, $t^0 \in \Lambda^n$ noktasının δ-komşuluğu $U_\delta(t^0)$ ve her $i, j \in \{1, ..., n\}$ için;*

$$\lim_{t \to t^0} \alpha_i(t^0, t) = 0 \quad \textit{ve} \quad \lim_{t \to t^0} \beta_{ij}(t^0, t) = 0$$

ve $t = t^0$ noktasında 0 değerini alacak şekilde $U_\delta(t^0)$ da tanımlanan $\alpha_i = \alpha_i(t^0, t)$ ve $\beta_{ij} = \beta_{ij}(t^0, t)$ fonkiyonları verilsin.

$$f(t_1^0, ..., t_n^0) - f(t_1, ..., t_n) = \sum_{i=1}^{n} A_i(t_i^0 - t_i) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t_i^0 - t_i)$$

ve, her bir $j \in \{1, ..., n\}$ ve her $t \in U_\delta(t^0)$ için

$$\begin{aligned} & f(t_1^0, ..., \sigma_j(t_j^0), ..., t_n^0) - f(t_1, ..., t_j, ..., t_n) \\ & = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} A_i(t_i^0 - t_i) + \beta_{jj}[\sigma_j(t_j^0) - t_j] + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \beta_{ij}(t_i^0 - t_i) \end{aligned}$$

olacak şekilde $t = (t_1, ..., t_n) \in \Lambda^n$ dan bağımsız öyle $A_1, ..., A_n$ sayıları var ise $f : \Lambda^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $t^0 = (t_1^0, ..., t_n^0) \in \mathbb{T}_1^\kappa \times ... \times \mathbb{T}_n^\kappa$ noktasında tamamen Δ-diferansiyellenebilirdir denir.

Uyarı 3.3 *Tanım 3.2'den,* $f : \Lambda^n \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* $t^0 \in \mathbb{T}_1^\kappa \times ... \times \mathbb{T}_n^\kappa$ *noktasında tamamen* Δ*-diferansiyellenebilir ise bu noktada süreklidir ve* t^0 *noktasındaki birinci mertebeden kısmi* Δ*-türevleri sırası ile* $A_1, A_2, ..., A_n$ *değerlerine eşittir:*

$$\frac{\partial f(t^0)}{\Delta_1 t_1} = A_1 \ \ , \ ... \ , \quad \frac{\partial f(t^0)}{\Delta_n t_n} = A_n \ .$$

Tanım 3.4 $f : \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2 \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu yukarıda verilen koşullar altında tamamen* Δ*-diferansiyellenebiliyor ve* $V^{\sigma_1}(t^0, s^0)$*;* (t^0, s^0) *ve* $(\sigma_1(t^0), s^0)$ *noktalarının bazı komşuluklarının birleşimi olmak üzere, her* $(t, s) \in V^{\sigma_1}(t^0, s^0)$ *için* A_1 *ve* A_2 *değerleri ile birlikte* $(t, s) \in \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ *den bağımsız bir* B *değeri vardır öyle ki*

$$\begin{aligned} f(\sigma_1(t^0), \sigma_2(s^0)) - f(t, s) = A_1[\sigma_1(t^0) - t] \ &+ \ B[\sigma_2(s^0) - s] \\ &+ \ \gamma_1[\sigma_1(t^0) - t] + \gamma_2[\sigma_2(s^0) - s] \end{aligned} \tag{2}$$

oluyor ve $\gamma_1 = \gamma_1(t^0, s^0; t, s)$ *ve* $\gamma_2 = \gamma_2(t^0, s^0; s)$ *fonksiyonları* $(t, s) = (t^0, s^0)$ *noktasında sıfır değerini alır ve*

$$\lim_{(t,s)\to(t^0,s^0)} \gamma_1(t^0, s^0; t, s) = 0 \quad ve \quad \lim_{s\to s^0} \gamma_2(t^0, s^0; s) = 0$$

ise f *fonksiyonuna* $(t^0, s^0) \in \mathbb{T}_1^\kappa \times \mathbb{T}_2^\kappa$ *noktasında* σ_1*-tamamen* Δ*-diferansiyellenebilirdir denir.*

Uyarı 3.5 *(2) denkleminde* γ_2 *fonksiyonu sadece* s *değişkenine bağlıdır. Bu denklemde* $t = \sigma_1(t^0)$ *yazılır ise*

$$B = \frac{\partial f(\sigma_1(t^0), s^0}{\Delta_2 s}$$

elde edilir.

Tanım 3.6 $f : \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2 \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu yukarıda verilen koşullar altında tamamen* Δ*-diferansiyellenebiliyor ve* $V^{\sigma_2}(t^0, s^0)$*;* (t^0, s^0) *ve* $(t^0, \sigma_2(s^0))$ *noktalarının bazı komşuluklarının birleşimi olmak üzere, her* $(t, s) \in V^{\sigma_2}(t^0, s^0)$ *için* A_1 *ve* A_2 *değerleri ile birlikte* $(t, s) \in \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ *den bağımsız bir* D *değeri vardır öyle ki*

$$\begin{aligned} f(\sigma_1(t^0), \sigma_2(s^0)) - f(t, s) = D[\sigma_1(t^0) - t] \ &+ \ A_2[\sigma_2(s^0) - s] \\ &+ \ \eta_1[\sigma_1(t^0) - t] + \eta_2[\sigma_2(s^0) - s] \end{aligned} \tag{3}$$

oluyor ve $\eta_1 = \eta_1(t^0, s^0; t)$ *ve* $\eta_2 = \eta_2(t^0, s^0; t, s)$ *fonksiyonları* $(t, s) = (t^0, s^0)$ *noktasında sıfır değerini alır ve*

$$\lim_{t\to t^0} \eta_1(t^0, s^0; t) = 0 \quad ve \quad \lim_{(t,s)\to(t^0,s^0)} \eta_2(t^0, s^0; t, s) = 0$$

ise f fonksiyonuna $(t^0, s^0) \in \mathbb{T}_1^\kappa \times \mathbb{T}_2^\kappa$ noktasında σ_2-tamamen Δ-diferansiyellenebilirdir denir.

Uyarı 3.7 *(3) denkleminde η_1 fonksiyonu sadece t değişkenine bağlıdır. Bu denklemde $s = \sigma_2(s^0)$ yazılır ise*

$$D = \frac{\partial f(t^0, \sigma_2(s^0)}{\Delta_1 t}$$

elde edilir.

3.1.1. Zincir kuralı

Zaman skalalarında tanımlı tek değişkenli fonksiyonlar için zincir kurallarını vermiştik. Bu bölümde iki değişkenli fonksiyonlar için zincir kurallarını ele alacağız.

İki değişkenli fonksiyonlara geçiş yapmak için ilk olarak $\mathbb{T}$ zaman skalasını ele alalım. $\mathbb{T}$ zaman skalası için ileri sıçrama operatörü σ ve Δ diferansiyel operatörü olsun. Bununla birlikte

$$\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R} \text{ ve } \psi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonları verilsin.

$$\varphi(\mathbb{T}) = \mathbb{T}_1 \;\; ve \;\; \psi(\mathbb{T}) = \mathbb{T}_2$$

olarak belirleyelim. $\mathbb{T}_1$ ve $\mathbb{T}_2$ kümelerinin de birer zaman skalası olduklarını kabul edeceğiz.

$\mathbb{T}_1$ ve $\mathbb{T}_2$ için ileri sıçrama ve delta diferansiyel operatörleri sırası ile σ_1 , Δ_1, σ_2, Δ_2 olsun. $\xi^0 \in \mathbb{T}^\kappa$ noktası için

$$t^0 = \varphi(\xi^0) \;\; ve \;\; s^0 = \psi(\xi^0)$$

olarak belirleyelim.

Yukarıdaki hipotezler ile birlikte $f : \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.

Teorem 3.8 *f fonksiyonu (t^0, s^0) noktasında σ_1-tamamen Δ-diferansiyellenebilir olsun. φ ve ψ fonksiyonlarının ξ^0 noktasında Δ-türevleri var ise $\xi \in \mathbb{T}$ noktası için*

$$F(\xi) = f(\varphi(\xi), \psi(\xi))$$

bileşke fonksiyonun da ξ^0 noktasında Δ-türevi vardır ve

$$F^{\Delta}(\xi^0) = \frac{\partial f(t^0, s^0)}{\Delta_1 t}\varphi^{\Delta}(\xi^0) + \frac{\partial f(\sigma_1(t^0), s^0)}{\Delta_2 s}\psi^{\Delta}(\xi^0) \quad .$$

İspat: *(Bohner ve Guseinov, 2004) bkz. Teorem 7.1* $\square$

Teorem 3.9 *f fonksiyonu (t^0, s^0) noktasında σ_2-tamamen Δ-diferansiyellenebilir olsun. φ ve ψ fonksiyonlarının ξ^0 noktasında Δ-türevleri var ise $\xi \in \mathbb{T}$ noktası için*

$$F(\xi) = f(\varphi(\xi), \psi(\varphi))$$

bileşke fonksiyonun da ξ^0 noktasında Δ-türevi vardır ve

$$F^{\Delta}(\xi^0) = \frac{\partial f(t^0, \sigma_2(s^0))}{\Delta_1 t}\varphi^{\Delta}(\xi^0) + \frac{\partial f(t^0, s^0)}{\Delta_2 s}\psi^{\Delta}(\xi^0) \quad .$$

İspat: *(Bohner ve Guseinov, 2004) bkz. Teorem 7.2* $\square$

Şimdi, $\mathbb{T}_{(1)}$ ve $\mathbb{T}_{(2)}$ şeklinde iki zaman skalasını ele alalım. $\mathbb{T}_{(1)}$ ve $\mathbb{T}_{(2)}$ nin ileri sıçrama ve delta diferansiyel operatörleri sırası ile $\sigma_{(1)}$, $\Delta_{(1)}$, $\sigma_{(2)}$, $\Delta_{(2)}$ olsun. Bununla birlikte

$$\varphi : \mathbb{T}_{(1)} \times \mathbb{T}_{(2)} \to \mathbb{R} \text{ ve } \psi : \mathbb{T}_{(1)} \times \mathbb{T}_{(2)} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonları (ξ, η) değişkenleri ve (ξ^0, η^0) sabit noktaları ile verilsin.

$$\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_1(\eta^0) = \varphi(\mathbb{T}_{(1)}, \eta^0) \text{ ve } \mathbb{T}_2 = \mathbb{T}_2(\xi^0) = \psi(\xi^0, \mathbb{T}_{(2)})$$

ve

$$t^0 = \varphi(\xi^0, \eta^0) \text{ ve } s^0 = \psi(\xi^0, \eta^0)$$

olarak belirleyelim.$\mathbb{T}_1$ ve $\mathbb{T}_2$ kümelerinin de birer zaman skalası olduklarını kabul edeceğiz.

$\mathbb{T}_1$ ve $\mathbb{T}_2$ için ileri sıçrama ve delta diferansiyel operatörleri sırası ile σ_1 , Δ_1, σ_2, Δ_2 olsun.

Yukarıdaki hipotezler ile birlikte $f : \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.

Teorem 3.10 *f fonksiyonu (t^0, s^0) noktasında σ_1-tamamen Δ-diferansiyellenebilir olsun.φ ve ψ fonksiyonlarının $(\xi^0, \eta^0$ noktasında birinci mertebeden kısmi Δ-türevleri var ise $(\xi, \eta) \in \mathbb{T}_{(1)} \times \mathbb{T}_{(2)}$ noktası için*

$$F(\xi, \eta) = f(\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta))$$

bileşke fonksiyonun da (ξ^0, η^0) noktasında kısmi Δ-türevi vardır ve

$$\frac{\partial F(\xi^0, \eta^0)}{\Delta_{(1)}\xi} = \frac{\partial f(t^0, s^0)}{\Delta_1 t} \frac{\partial \varphi(\xi^0, \eta^0)}{\Delta_{(1)}\xi} + \frac{\partial f(\sigma_1(t^0), s^0)}{\Delta_2 s} \frac{\partial \psi(\xi^0, \eta^0)}{\Delta_{(1)}\xi}$$

ve

$$\frac{\partial F(\xi^0, \eta^0)}{\Delta_{(2)}\eta} = \frac{\partial f(t^0, s^0)}{\Delta_1 t} \frac{\partial \varphi(\xi^0, \eta^0)}{\Delta_{(2)}\eta} + \frac{\partial f(\sigma_1(t^0), s^0)}{\Delta_2 s} \frac{\partial \psi(\xi^0, \eta^0)}{\Delta_{(2)}\eta}$$

formülleri ile ifade edilir.

İspat: *(Bohner ve Guseinov, 2004) bkz. Teorem 7.4* □

Teorem 3.11 *f fonksiyonu (t^0, s^0) noktasında σ_2-tamamen Δ-diferansiyellenebilir olsun.φ ve ψ fonksiyonlarının $(\xi^0, \eta^0$ noktasında birinci mertebeden kısmi Δ-türevleri var ise $(\xi, \eta) \in \mathbb{T}_{(1)} \times \mathbb{T}_{(2)}$ noktası için*

$$F(\xi, \eta) = f(\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta))$$

bileşke fonksiyonun da (ξ^0, η^0) noktasında kısmi Δ-türevi vardır ve

$$\frac{\partial F(\xi^0, \eta^0)}{\Delta_{(1)}\xi} = \frac{\partial f(t^0, \sigma_2(s^0))}{\Delta_1 t} \frac{\partial \varphi(\xi^0, \eta^0)}{\Delta_{(1)}\xi} + \frac{\partial f(t^0, s^0)}{\Delta_2 s} \frac{\partial \psi(\xi^0, \eta^0)}{\Delta_{(1)}\xi}$$

ve

$$\frac{\partial F(\xi^0, \eta^0)}{\Delta_{(2)}\eta} = \frac{\partial f(t^0, \sigma_2(s^0))}{\Delta_1 t} \frac{\partial \varphi(\xi^0, \eta^0)}{\Delta_{(2)}\eta} + \frac{\partial f(t^0, s^0)}{\Delta_2 s} \frac{\partial \psi(\xi^0, \eta^0)}{\Delta_{(2)}\eta}$$

formülleri ile ifade edilir.

İspat: *(Bohner ve Guseinov, 2004) bkz. Teorem 7.5* □

3.2. Zaman Skalalarında Vektör Değerli Fonksiyonlar

$\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ ve $\varsigma = (\varsigma_1, ..., \varsigma_n)$ şeklindeki n-boyutlu iki vektörün skalar çarpımı

$$\xi \cdot \varsigma = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varsigma_i$$

dır. Herhangi bir ξ vektörünün normu ise,

$$\|\xi\| = \sqrt{\xi \cdot \xi} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}$$

şeklindedir.

Zaman skalasında tanımlı parametre t olsun. Eğer her bir t parametresine karşılık bir $r(t)$ vektörü atanıyorsa, bu $r(t)$ fonksiyonuna $t \in [a, b]$ parametresine karşılık gelen vektör değerli fonksiyon denir. $\{x, y, z\}$ koordinat sistemi olmak üzere, $r(t)$ fonksiyonu; $r(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ ile ifade edilir.

Tanım 3.12 *t değeri t_0 değerine yaklaşırken, $r(t) - r(t_0)$ değeri de sıfıra yaklaşıyor ise, $r(t_0)$ vektörüne $r(t)$ nin limit değeri denir ve,*

$$\lim_{t \to t_o} r(t) = r(t_0)$$

ile gösterilir.

$r(t)$ fonksiyonunun limit değeri olması için her bir $x(t)$, $y(t)$ ve $z(t)$ fonksiyonlarının da limit değeri olması gerekir.

Tanım 3.13 *Vektör değerli bir fonksiyonun Δ-türevi, her bir bileşeninin tek tek Δ-türevinin alınması ile elde edilir. Bir başka değişle,*

$$\lim_{s \to t} \frac{r(\sigma(t)) - r(s)}{\sigma(t) - s}$$

limit değeri var ve sonlu ise, bu değere $r(t)$ vektör değerli fonksiyonunun Δ-türevi denir.

Önerme 3.14 *$r_1(t)$ ve $r_2(t)$ iki vektör değerli fonksiyon olsun.*

i. $(r_1(t) + r_2(t))^{\Delta} = r_1^{\Delta}(t) + r_2^{\Delta}(t)$

ii. $(r_1 r_2)^{\Delta} = r_1^{\Delta} r_2 + r_1^{\sigma} r_2^{\Delta} = r_1^{\Delta} r_2^{\sigma} + r_1 r_2^{\Delta}$

İspat:

i.

$$\begin{aligned} (r_1(t) + r_2(t))^{\Delta} &= \lim_{s \to t} \frac{r_1(\sigma(t)) + r_2(\sigma(t)) - r_1(s) - r_2(s)}{\sigma(t) - s} \\ &= \lim_{s \to t} \frac{r_1(\sigma(t)) - r_1(s)}{\sigma(t) - s} + \lim_{s \to t} \frac{r_2(\sigma(t)) - r_2(s)}{\sigma(t) - s} \\ &= r_1^{\Delta}(t) + r_2^{\Delta}(t) \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
(r_1 r_2)^{\Delta}(t) &= \lim_{s\to t} \frac{r_1(\sigma(t))r_2(\sigma(t)) - r_1(s)r_2(s)}{\sigma(t)-s} \\
&= \lim_{s\to t} \frac{(r_1(\sigma(t)) - r_1(s))\, r_2(\sigma(t))}{\sigma(t)-s} + \lim_{s\to t} \frac{r_1(s)\,(r_2(\sigma(t)) - r_2(s))}{\sigma(t)-s} \\
&= r_1^{\Delta}(t).r_2^{\sigma}(t) + r_1(t) r_2^{\Delta}(t)
\end{aligned}$$

□

Vektör değerli fonksiyonların iç ve vektörel çarpımlarının Δ-türevi ise ardaşık eş çarpanların Δ-türevi ile hesaplanabilir.

Önerme 3.15 *$r_1(t)$ ve $r_2(t)$ iki vektör değerli fonksiyon olsun.*

i. $(r_1 \cdot r_2)^{\Delta} = r_1^{\Delta} \cdot r_2 + r_1^{\sigma} \cdot r_2^{\Delta} = r_1^{\Delta} \cdot r_2^{\sigma} + r_1 \cdot r_2^{\Delta}$

ii. $(r_1 \times r_2)^{\Delta} = r_1^{\Delta} \times r_2 + r_1^{\sigma} \times r_2^{\Delta} = r_1^{\Delta} \times r_2^{\sigma} + r_1 \times r_2^{\Delta}$

İspat:

i.

$$\begin{aligned}
(r_1 \cdot r_2)^{\Delta}(t) &= \lim_{s\to t} \frac{(r_1(\sigma(t)) \times r_2(\sigma(t))) - r_1(s) \cdot r_2(s)}{\sigma(t)-s} \\
&= \lim_{s\to t} \left[\frac{(r_1(\sigma(t)) - r_1(s)) \cdot r_2(\sigma(t))}{\sigma(t)-s} \right] \\
&\quad + \lim_{s\to t} \left[\frac{r_1(s) \cdot (r_2(\sigma(t)) - r_2(s))}{\sigma(t)-s} \right] \\
&= \left[\lim_{s\to t} \frac{r_1(\sigma(t)) - r_1(s)}{\sigma(t)-s} \cdot \lim_{s\to t} r_2(\sigma(t)) \right] \\
&\quad + \left[\lim_{s\to t} r_1(s) \cdot \lim_{s\to t} \frac{r_2(\sigma(t)) - r_2(s)}{\sigma(t)-s} \right] \\
&= (r_1^{\Delta} \cdot r_2^{\sigma}) + (r_1 \cdot r_2^{\Delta})
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
(r_1 \times r_2)^{\Delta}(t) &= \lim_{s\to t} \frac{(r_1(\sigma(t)) \times r_2(\sigma(t))) - r_1(s) \times r_2(s)}{\sigma(t) - s} \\
&= \lim_{s\to t} \left[\frac{(r_1(\sigma(t)) - r_1(s)) \times r_2(\sigma(t))}{\sigma(t) - s} \right] \\
&\quad + \lim_{s\to t} \left[\frac{r_1(s) \times (r_2(\sigma(t)) - r_2(s))}{\sigma(t) - s} \right] \\
&= \left[\lim_{s\to t} \frac{r_1(\sigma(t)) - r_1(s)}{\sigma(t) - s} \times \lim_{s\to t} r_2(\sigma(t)) \right] \\
&\quad + \left[\lim_{s\to t} r_1(s) \times \lim_{s\to t} \frac{r_2(\sigma(t)) - r_2(s)}{\sigma(t) - s} \right] \\
&= (r_1^{\Delta} \times r_2^{\sigma}) + (r_1 \times r_2^{\Delta})
\end{aligned}$$

$\square$

Tanım 3.16 (Vektör Değerli Fonksiyonlar İçin Taylor Açılımı)

$r(t)$ vektör değerli fonksiyonunun n-inci mertebeden Δ-türevleri var ve bu türevler rd-sürekli olsun.

$h_0(r,s) \equiv 1,\ k \in \mathbb{N}_0$ için

$$h_{k+1}(r,s) = \int_s^r h_k(\tau, s)\ \Delta\tau$$

ve $i = \{1,2,3\}$ olacak şekilde x_i koordinat fonksiyonları için

$$g_k(t,t_0) = \int_{t_0}^{\rho^{n-1}(t)} h_{n-1}(t, \sigma(\tau))\ x_i^{\Delta^n}(\tau)\ \Delta\tau$$

olmak üzere, $r(t)$ fonksiyonunun bileşenleri $x(t)$,$y(t)$ ve $z(t)$ için Taylor Açılımı;

$$x(t) = h_0(t,t_0)\ x(t_0) + h_1(t,t_0)\ x^{\Delta}(t_0) + h_2(t,t_0)\ x^{\Delta^2}(t_0) + \ldots + o_1(g_n(t,t_0))$$

$$y(t) = h_0(t,t_0)\ y(t_0) + h_1(t,t_0)\ y^{\Delta}(t_0) + h_2(t,t_0)\ y^{\Delta^2}(t_0) + \ldots + o_2(g_n(t,t_0))$$

$$z(t) = h_0(t,t_0)\ z(t_0) + h_1(t,t_0)\ z^{\Delta}(t_0) + h_2(t,t_0)\ z^{\Delta^2}(t_0) + \ldots + o_3(g_n(t,t_0))$$

şeklinde olur.

Yukarıda verilen üç denklem sistemi; $\lim\limits_{t\to t_0} g_n(t,t_0) = 0$ olduğundan, $o(g_n(t,t_0))$ uzunluğu sonsuzküçük olan vektörü göstermek üzere;

$$r(t) = h_0(t,t_0)\ r(t_0) + h_1(t,t_0)\ r^{\Delta}(t_0) + h_2\ (t,t_0)\ r^{\Delta^2}(t_0) + \ldots + o(g_n(t,t_0))$$

şeklinde yazılabilir.

Uyarı 3.17 *Skalar fonksiyonlar ve vektör değerli fonksiyonların Taylor açılımı arasında temel bir fark vardır. $f(t)$ skalar fonksiyonunu ele alacak olursak, $\rho^{n-1}(t)$ ve t arasındaki bir ξ noktası için;*

$$o(g_n(t,t_0)) = f^{\Delta^{k+1}}(\xi)\ h_{k+1}(t,t_0)\ .$$

Vektör değerli fonksiyonlar için benzer bir formül bulamayız. Çünkü; genel olarak $o(g_n(t,t_0))$ vektörünün farklı birleşenlerine karşılık gelen ξ noktaları da farklıdır. Fakat, $o(g_n(t,t_0))$ vektörünün $g_n(t,t_0)$ değerine karşılık olarak sonsuzküçük uzunlukta olması daha önemlidir.

3.3. Genelleştirilmiş Regüler Eğriler ve Tanjant Doğruları

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun.

Tanım 3.18 *Reel değerli f_1, f_2, f_3 fonksiyonları $[a,b]^\kappa \subset \mathbb{T}$ aralığında Δ-türevlenebilir ve Δ-türevleri rd-sürekli olmak üzere,*

$$x = f_1(t)\quad,\quad y = f_2(t)\quad,\quad z = f_3(t)\quad,\quad t \in [a,b] \tag{4}$$

dönüşümüyle oluşturulan Γ eğrisi,

$$|f_1^\Delta(t)|^2 + |f_2^\Delta(t)|^2 + |f_3^\Delta(t)|^2 \neq 0 \tag{5}$$

özelliğini her $t \in [a,b]^\kappa$ için sağlıyor ise, $[a,b] \subset \mathbb{T}$ aralığında parametrelenmiş Γ eğrisine Δ-regüler eğri denir.

Γ eğrisi için,

$$r = (x,y,z)\quad,\quad f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \tag{6}$$

dönüşümünü ele alırsak; (4) denklemi

$$r = f(t)\quad,\quad t \in [a,b] \tag{7}$$

ve (5) denklemi ise

$$\|f^\Delta(t)\| \neq 0\quad,\quad t \in [a,b]^\kappa \tag{8}$$

halini alır.

Γ , (4) formunda olduğu gibi parametrelenmiş bir eğri olsun.
O halde Γ eğrisi $\{(t, f(t)) \ : t \in [a, b] \subset \mathbb{T}\}$ kümesinin xy-düzlemindeki gösterimidir. $t^0 \in \mathbb{T}^\kappa$ olsun. $P_0 = (t^0, f(t^0))$, Γ üzerinde bir noktadır.

Tanım 3.19 *$\mathcal{L}_0$; Γ eğrisi üzerindeki sabit bir P_0 noktasından geçen doğru, P; Γ eğrisi üzerinde hareket eden bir nokta, $d(P, \mathcal{L}_0)$; P noktasının $\mathcal{L}_0$ doğrusuna uzaklığı, $d(P_0, P_0^\sigma)$; P_0 ve P_0^σ noktaları arasındaki uzaklık olmak üzere;*

i. $\mathcal{L}_0$ doğrusu aynı zamanda $P_0^\sigma = (\sigma(t^0), f(\sigma(t^0)))$ noktasından geçer;

ii. P_0 noktası Γ eğrisinin izole bir noktası değil ise

$$\lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \neq P_0}} \frac{d(P, \mathcal{L}_0)}{d(P_0, P_0^\sigma)} = 0 \tag{9}$$

şartları sağlanıyor ise, $\mathcal{L}_0$ doğrusuna Γ eğrisinin P_0 noktasındaki Δ-tanjant doğrusu denir.

Teorem 3.20 *f fonksiyonu t^0 noktasında tamamen Δ-diferansiyellenebilir ise, bu fonksiyon ile ifade edilen eğrinin $P_0 = (t^0, f(t^0))$ noktasında bir tek Δ-tanjant doğrusu vardır ve denklemi; $(x, y) \in \Gamma$ olmak üzere*

$$y - f(t^0) = f^\Delta(t^0)(x - t^0) \tag{10}$$

şeklindedir.

İspat: *f, $t^0 \in \mathbb{T}^\kappa$ noktasında tamamen Δ-diferansiyellenebilir bir fonksiyon, Γ bu fonksiyon tarafından belirlenen eğri, ve $\mathcal{L}_0$ da (10) denklemi ile verilen doğru olsun. Şimdi, $\mathcal{L}_0$ doğrusunun P_0^σ noktasından da geçtiğini gösterelim.*

Gerçekten de, $\sigma(t^0) = t^0$ ise $P_0^\sigma = P_0$ olur ve önermemiz doğrudur.

Şimdi $\sigma(t^0) > t^0$ olma durumunu ele alalım. P_0^σ noktasının koordinatlarını (10) denkleminde yerine yazarsak;

$$f(\sigma(t^0)) - f(t^0) = f^\Delta(t^0)[\sigma(t^0) - t^0]$$

elde ederiz ve bu ifade f sürekli olduğu için doğrudur.

Şimdi (9) özelliğinin sağlandığını kontrol edelim. P_0 noktasının Γ eğrisinde bir izole nokta olmadığını kabul edelim. $P \in \Gamma$ değişken noktasının koordinatları

$(t, f(t))$ dir. Analitik geometriden bilindiği gibi; $M = \sqrt{1 + [f^{\Delta}(t^0)]^2}$ olmak üzere, P noktası ile $\mathcal{L}_0$ doğrusu arasındaki uzaklık

$$d(P, \mathcal{L}_0) = \frac{1}{M}\left|f(t) - f(t^0) - f^{\Delta}(t^0)(t - t^0)\right|$$

formulü ile ifade edilir. Diferansiyellenebilirlik koşulundan; $A = f^{\Delta}(t^0)$ dır ve

$$d(P, \mathcal{L}_0) = \frac{1}{M}\left|\alpha(t - t^0)\right| = \frac{1}{M}\left|\alpha\right|\left|t - t^0\right|$$

olur. Daha sonra,

$$d(P, P_0) = \sqrt{(t - t^0)^2 + [f(t) - f(t^0)]^2} \geq \left|t - t^0\right|$$

olur. O halde

$$P \rightarrow P_0 \quad iken \quad \frac{d(P, \mathcal{L}_0)}{d(P, P_0)} \leq \frac{1}{M}|\alpha| \rightarrow 0 \quad .$$

Γ eğrisinin P_0 noktasındaki tanjant denkleminin (10) olduğunu göstermiş olduk. Şimdi, bu denklemin tek olduğunu gösterelim.

$P_0 \neq P$ ise bu ayrık noktalardan geçen Δ-tanjant doğrusu kendisiyle çakışır.

Şimdi, $P_0 = P_0^{\sigma}$ olacak şekilde izole olmayan bir noktayı ele alalım. Kabul edelim ki, Γ eğrisinin P_0 noktasındaki tanjant doğrusu $\mathcal{L}$ var ve denklemi $a^2 + b^2 = 1$ olacak şekilde

$$a(x - t^0) - b[y - f(t^0)] = 0 \tag{11}$$

ifade edilsin. $P \in \Gamma$ değişken noktasının koordinatları $(t, f(t))$ olsun. (11) denklemini kullanarak;

$$d(P, \mathcal{L}) = a(t - t^0) - b[f(t) - f(t^0)]$$

elde ederiz. Diferansiyellenebilirlik koşulundan; $A = f^{\Delta}(t^0)$ ve

$$d(P, \mathcal{L}) = \left|a - b[f^{\Delta}(t^0) + \alpha]\right|\left|t - t^0\right|$$

dır. Daha sonra, aynı diferansiyellenebilirlik koşulundan;

$$\begin{aligned} d(P, P_0) &= \sqrt{(t - t^0)^2 + [f(t) - f(t^0)]^2} \\ &= \sqrt{(t - t^0)^2 + [f^{\Delta}(t^0) + \alpha]^2 (t - t^0)^2} \\ &= \sqrt{1 + [f^{\Delta}(t^0) + \alpha]^2}\ |t - t^0| \quad . \end{aligned}$$

O halde;

$$\frac{d(P,\mathcal{L})}{d(P,P_0)}=\frac{|a-b[f^{\Delta}(t^0)+\alpha]|}{\sqrt{1+[f^{\Delta}(t^0)+\alpha]^2}}$$

elde ederiz. $t\to t^0$ *iken* $\alpha\to 0$ *olacağından,*

$$a-bf^{\Delta}(t^0)=0$$

elde ederiz. Buradan $b\neq 0$ *olduğunu görebiliriz. Aksi halde* $a=b=0$ *elde ederdik. O halde,* $\mathcal{L}$ *doğrusu (10) denklemi ile verilen doğrudur.* $\square$

Uyarı 3.21 P_0 *noktası* Γ *eğrisinin bir izole noktası ise,* P_0 *noktasından geçen* Δ*-tanjant doğrusu* P_0 *ile* P_0^{σ} *noktalarından geçen doğru ile çakışır.*

Uyarı 3.22 P_0 *noktası* Γ *eğrisinin bir izole noktası değil ve* Γ *nın* P_0 *da bir tanjant doğrusu var ise,* $P\to P_0$ *iken* PP_0 *doğrusu bu tanjant doğrusuna yakınsar.*

3.4. Yönlü Δ-Türev

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası, σ ve Δ sırasıyla ileri sıçrama ve delta türev operatörleri olsunlar. $0\in\mathbb{T}$ olduğunu kabul edeceğiz. Bunun ile birlikte, $\omega=\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ birim vektör ve $(t^0,s^0)\in\mathbb{R}^2$ sabir bir nokta olsun.

$$\mathbb{T}_1=\{t=t^0+\xi\omega_1\ :\ \xi\in\mathbb{T}\}\ \text{ ve }\ \mathbb{T}_2=\{s=s^0+\xi\omega_2\ :\ \xi\in\mathbb{T}\}$$

olarak alalım. O halde $\mathbb{T}_1$ ve $\mathbb{T}_2$ kümeleri zaman skalalarıdır ve $t^0\in\mathbb{T}_1$ ve $s^0\in\mathbb{T}_2$ dir. $\mathbb{T}_1$ ve $\mathbb{T}_2$ için ileri sıçrama ve delta diferansiyel operatörleri sırası ile σ_1 , Δ_1, σ_2, Δ_2 olsun.

Tanım 3.23 $f:\mathbb{T}_1\times\mathbb{T}_2\to\mathbb{R}$ *verilsin.* f *fonksiyonunun* $p=(t^0,s^0)$ *noktasındaki* ω *vektörü yönündeki türevi,*

$$F(\xi)=f(t^0+\xi\omega_1,s^0+\xi\omega_2,)$$

olmak üzere $\xi\in\mathbb{T}$ *için*

$$F^{\Delta}(0)=\omega_p^{\Delta}[f]=\frac{\partial f(t^0,s^0)}{\Delta\omega}$$

değeri ile tanımlanır.

Teorem 3.24 *f fonksiyonu $p = (t^0, s^0)$ noktasında σ_1-tamamen Δ-diferansiyellenebilir olsun. f nin (t^0, s^0) noktasında ω vektörü yönünde Δ-türevi vardır ve*

$$\omega_p^{\Delta}[f] = \frac{\partial f(p)}{\Delta_1 t}\omega_1 + \frac{\partial f(\sigma_1(t^0), s^0)}{\Delta_2 s}\omega_2$$

formülü ile ifade edilir.

İspat: *(Bohner ve Guseinov, 2004) bkz. Teorem 8.2* □

Teorem 3.25 *f fonksiyonu (t^0, s^0) noktasında σ_2-tamamen Δ-diferansiyellenebilir olsun. f nin (t^0, s^0) noktasında ω vektörü yönünde Δ-türevi vardır ve*

$$\omega_p^{\Delta}[f] == \frac{\partial f(t^0, \sigma_2(s^0))}{\Delta_1 t}\omega_1 + \frac{\partial f(t^0, s^0)}{\Delta_2 s}\omega_2$$

formülü ile ifade edilir.

İspat: *(Bohner ve Guseinov, 2004) bkz. Teorem 8.3* □

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Zaman Skalalarında Yüzeyler

$\Lambda^3 = \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2 \times \mathbb{T}_3$ olmak üzere, herhangi bir $\mathcal{S}$ yüzeyini Λ^3'ün alt kümesi olarak ele alabiliriz. Fakat Λ^3'ün her alt kümesi bir yüzey belirtmez. $\mathcal{S} \subset \Lambda^3$'ün yüzey olabilmesi için düzgün ve 2-boyutlu olması gerekmektedir.

Tanım 4.1 *$\mathcal{S}$, Λ^3 uzayının bir alt kümesi olsun. $\mathcal{S}$'in her bir P noktası için, P nin Λ^3 de bir A komşuluğu ve Λ^2 nin bir U kompakt alt kümesinden , Λ^3 uzayına bir φ fonksiyonu aşağıdaki iki önermeyi sağlayacak biçimde bulunabiliyor ise, $\mathcal{S}$'ye Λ^3 uzayında bir yüzey denir.*

(i) $\varphi : U \to \Lambda^3$ fonksiyonu Δ-diferansiyellenebilir ve $\forall(t,s) \in U$ için

$$\frac{\partial\varphi(t,s)}{\Delta_1 t} \times \frac{\partial\varphi(t,s)}{\Delta_2 s} \neq 0$$

yani regüler bir fonksiyondur.

(ii) $\varphi(U) = \mathcal{S} \cap A$ dır ve $\varphi : U \to \varphi(U)$ fonksiyonu homeomorfizmadır.

Yukarıdaki tanımda verilen (φ, U) ikilisine *basit yüzey*, $\varphi^{-1} : M \cap U \to U$ fonksiyonu ile oluşturulan (φ^{-1}, U) ikilisine de *koordinat sistemi* adı verilir. Ayrıca $\varphi : U \to \Lambda^3$ fonksiyonuna $\mathcal{S}$ yüzeyinin *yama fonksiyonu* da denir.

Tanım 4.2 *$\mathcal{S}$ yüzeyinin herbir P noktası için, $P \in \varphi(U)$ olacak şekilde φ yama fonksiyonu var ise $\mathcal{S}$ yüzeyine düzgün yüzey denir.*

Önerme 4.3 *U, $\mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ nin kompakt bir alt kümesi ve $f : U \to \Lambda^3$ fonksiyonu da Δ-diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda;*

$$\mathcal{S} = \{(t, s, f(t,s)) \mid (t,s) \in \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2\}$$

kümesi bir yüzeydir.

İspat: *Λ^2 deki Euclidyen koordinat sistemi $\{x_1, x_2\}$ olmak üzere U dan Λ^3 uzayına, $\varphi = (x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ eşitliğiyle tanımlanmış φ fonksiyonunun basit yüzey olduğu kolayca görülebilir.*

İlk olarak, koordinat fonksiyonları x_1, x_2 her zaman Δ-diferansiyellenebilir olduklarından ve f fonksiyonunun Δ-diferansiyellenebilirliği verildiğinden dolayı φ fonksiyonu da Δ-diferansiyellenebilirdir diyebiliriz.

Ayrıca,

$$J(\varphi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\Delta_1 x_1} & \frac{\partial x_1}{\Delta_2 x_2} \\ \frac{\partial x_2}{\Delta_1 x_1} & \frac{\partial x_2}{\Delta_2 x_2} \\ \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\Delta_1 x_1} & \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\Delta_2 x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\Delta_1 x_1} & \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\Delta_2 x_2} \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $\forall q = (q_1, q_2) \in U$ için $rank(J(\varphi)) = 2$ olduğundan φ fonksiyonu düzgündür.

φ fonksiyonunun homeomorfizma olduğu da apaçıktır. $\square$

Teorem 4.4 *U ve $\tilde{U}$, $\mathbb{R}^2$ kompakt iki alt kümesi ve $\varphi : U \to \Lambda^3$ regüler bir yüzey yaması olsun. $\Phi : \tilde{U} \to U$ bijektif ve C_{rd}^{∞} sınıfının elemanı ve $\Phi^{-1} : U \to \tilde{U}$ bijektif ve C_{rd}^{∞} sınıfının elemanı olsun. O halde;*

$$\tilde{\varphi} = \varphi \circ \Phi : \tilde{U} \to \Lambda^3$$

fonksiyonu da regüler bir yüzey yamasıdır.

İspat: *φ sürekli ve Φ fonksiyonu C_{rd}^{∞} sınıfının elemanı olduğundan, $\tilde{\varphi}$ fonksiyonu da C_{rd}^{∞} sınıfının elemanıdır.*

$(t, s) \in U$ ve $(\tilde{t}, \tilde{s}) \in \tilde{U}$ olmak üzere; Φ fonksiyonu için $\Phi(\tilde{t}, \tilde{s}) = (t, s)$ olsun.

Şimdi $\tilde{\varphi}$ fonksiyonunu σ_1-tamamen Δ-diferansiyellenebilir ve σ_2-tamamen Δ-diferansiyellenebilir olma durumlarına göre incelemeliyiz.

İlk olarak $\tilde{\varphi}$ fonksiyonunun σ_1-tamamen Δ-diferansiyellenebilir olma durumunu ele alalım; o halde zincir kuralından

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\Delta_{(1)} \tilde{t}} = \frac{\partial t}{\Delta_{(1)} \tilde{t}} \frac{\partial \varphi}{\Delta_1 t} + \frac{\partial s}{\Delta_{(1)} \tilde{t}} \frac{\partial \varphi^{\sigma_1}}{\Delta_2 s}$$

ve

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\Delta_{(2)} \tilde{s}} = \frac{\partial t}{\Delta_{(2)} \tilde{s}} \frac{\partial \varphi}{\Delta_1 t} + \frac{\partial s}{\Delta_{(2)} \tilde{s}} \frac{\partial \varphi^{\sigma_1}}{\Delta_2 s}$$

elde ederiz. O halde;

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\Delta_{(1)} \tilde{t}} \times \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\Delta_{(2)} \tilde{s}} = \left(\frac{\partial t}{\Delta_{(1)} \tilde{t}} \frac{\partial s}{\Delta_{(2)} \tilde{s}} - \frac{\partial t}{\Delta_{(2)} \tilde{s}} \frac{\partial s}{\Delta_{(1)} \tilde{t}} \right) \frac{\partial \varphi}{\Delta_1 t} \times \frac{\partial \varphi^{\sigma_1}}{\Delta_2 s} \qquad (12)$$

bulunabilir. (12) denkleminin sağ tarafındaki sabit değer ise

$$J(\Phi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial t}{\Delta_{(1)}\tilde{t}} & \frac{\partial s}{\Delta_{(1)}\tilde{t}} \\ \frac{\partial t}{\Delta_{(2)}\tilde{s}} & \frac{\partial s}{\Delta_{(2)}\tilde{s}} \end{bmatrix}$$

jakobiyen matrisinin determinantına eşittir.

Benzer şekilde; $\tilde{\varphi}$ *fonksiyonu* σ_2*-tamamen* Δ*-diferansiyellenebilir ise*

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\Delta_{(1)}\tilde{t}} \times \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\Delta_{(2)}\tilde{s}} = \left(\frac{\partial t}{\Delta_{(1)}\tilde{t}}\frac{\partial s}{\Delta_{(2)}\tilde{s}} - \frac{\partial t}{\Delta_{(2)}\tilde{s}}\frac{\partial s}{\Delta_{(1)}\tilde{t}}\right)\frac{\partial\varphi^{\sigma_2}}{\Delta_1 t} \times \frac{\partial\varphi}{\Delta_2 s} \tag{13}$$

bulunabilir. (13) denkleminin sağ tarafındaki sabit değer ise

$$J(\Phi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial t}{\Delta_{(1)}\tilde{t}} & \frac{\partial s}{\Delta_{(1)}\tilde{t}} \\ \frac{\partial t}{\Delta_{(2)}\tilde{s}} & \frac{\partial s}{\Delta_{(2)}\tilde{s}} \end{bmatrix}$$

jakobiyen matrisinin determinantına eşittir.

$J(\tilde{\Psi} \circ \Psi) = J(\tilde{\Psi})J(\Psi)$ *eşitliğinin sürekli fonksiyonlar için sağlandığı bilinmektedir. Bu eşitlikte* $\Psi = \Phi$ *ve* $\tilde{\Psi} = \Phi^{-1}$ *alırsak,* $J(\Phi^{-1}) = J(\Phi)^{-1}$ *olduğu görülebilir. Buradan* $J(\Phi)$ *nin tersi vardır diyebiliriz. O halde* $J(\Phi)$ *matrisinin determinantı hiçbir noktada sıfır olmaz. Sonuç olarak; (12) ve (13) denklemleri için,* $\tilde{\varphi}$ *fonksiyonu regülerdir diyebiliriz.* $\square$

4.1.1. Düzgün dönüşümler

$\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ ler düzgün yüzeyler olmak üzere $f : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ dönüşümünü ele alalım. $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ yüzeylerinin sırasıyla parametreden bağımsız olarak $\varphi_1 : U_1 \to \Lambda^3$ ve $\varphi_2 : U_2 \to \Lambda^3$ yamalarıyla örtülebileceğini bir önceki bölümde gördük. φ_1 ve φ_2 dönüşümleri bijektif olduğundan, herhangi bir $f : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ dönüşümü

$$\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1 : U_1 \to U_2$$

dönüşümünü doğurur.

Tanım 4.5 *Yukarıda verilen özelliklerdeki dönüşümler için,*

$$\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1 : U_1 \to U_2$$

dönüşümü C_{rd}^{∞} *sınıfının bir elemanı ise* $f : U_1 \to U_2$ *dönüşümüne de* C_{rd}^{∞} *sınıfının bir elemanı yani düzgün dönüşüm denir.*

Önerme 4.6 *$f : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ bir diffeomorfizma olsun. φ_1 dönüşümü bir yüzey yaması ise $f \circ \varphi_1$ dönüşümü de $\mathcal{S}_2$ için bir yüzey yamasıdır.*

İspat: *$\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ yüzeyleri sırası ile $\varphi_1 : U_1 \to \Lambda^3$ ve $\varphi_2 : U_2 \to \Lambda^3$ yüzey yamaları ile örtülüyor olsun.*
f diffeomorfizm olduğundan; $F : U_1 \to U_2$ birebir, örten, C^∞_{rd} sınıfının elemanı ve $F^{-1} \in C^\infty_{rd}$ olmak üzere;

$$f(\varphi_1(u,v)) = \varphi_2(F(u,v))$$

olur. Teorem (4.4)'den ispat sonlanır. $\square$

4.1.2. Tanjantlar ve Δ-türevler

Bir $\mathcal{S}$ yüzeyini incelemek için o yüzey üzerinde bulunan Γ eğrileri kullanılır.

Tanım 4.7 *Bir $\mathcal{S}$ yüzeyinin P noktasındaki tanjant vektörü, yüzeyin P noktasından geçen eğrisinin o noktadaki tanjant vektörüdür. $\mathcal{S}$ yüzeyinin tanjant uzayı, yüzeyin P noktasındaki bütün tanjant vektörlerinin kümesidir ve $T_P(\mathcal{S})$ ile gösterilir.*

Önerme 4.8 *$\varphi : U \to \Lambda^3$ dönüşümü $\mathcal{S}$ yüzeyinin P noktasını içeren bir yaması, (u,v) ikilisi U kompakt kümesinin koordinatları ve Γ eğrisi S yüzeyinde P noktasından geçen bir düzgün eğri olsun. $\varphi(u_0,v_0) = P$ olmak üzere;*

i. *Γ eğrisi σ_1-tamamen Δ-diferansiyellenebilir ise P noktasındaki tanjant uzay $\dfrac{\partial\varphi(u_0,v_0)}{\Delta_1 u}$ ve $\dfrac{\partial\varphi(\sigma_1(u_0),v_0)}{\Delta_2 v}$ vektörleri tarafından gerilen uzaydır.*

ii. *Γ eğrisi σ_2-tamamen Δ-diferansiyellenebilir ise P noktasındaki tanjant uzay $\dfrac{\partial\varphi(u_0,\sigma_2(v_0))}{\Delta_1 u}$ ve $\dfrac{\partial\varphi(u_0,v_0)}{\Delta_2 v}$ vektörleri tarafından gerilen uzaydır.*

İspat: *Γ düzgün eğrisi $\mathcal{S}$ yüzeyinde ve*

$$\Gamma(t) = \varphi(u(t),v(t))$$

olsun.

i. Γ *eğrisi* σ_1*-tamamen* Δ*-diferansiyellenebilir olsun. O halde;*

$$\Gamma^{\Delta} = \frac{\partial \varphi}{\Delta_1 u}\, u^{\Delta} + \frac{\partial \varphi^{\sigma_1}}{\Delta_2 v}\, v^{\Delta}$$

olur. O halde Γ^{Δ} *vektörü* $\dfrac{\partial \varphi}{\Delta_1 u}$ *ile* $\dfrac{\partial \varphi^{\sigma_1}}{\Delta_2 v}$ *vektörlerinin lineer kombinasyonudur.*

Tersi olarak, Λ^3 *uzayının bir alt vektör uzayında alacağımız her vektör, öyle* λ *ve* μ *sabitleri için* $\lambda\, \dfrac{\partial \varphi}{\Delta_1 u} + \mu\, \dfrac{\partial \varphi^{\sigma_1}}{\Delta_2 v}$ *şeklinde yazılabilir.*

$$\Gamma(t) = \varphi(u_0 + \lambda t, v_0 + \mu t)$$

tanımlayalım. $t = 0$ *noktasında , yani* $P \in \mathcal{S}$ *noktasında,* Γ *eğrisi düzgün bir eğridir. Buradan;*

$$\Gamma^{\Delta} = \lambda\, \frac{\partial \varphi}{\Delta_1 u} + \mu\, \frac{\partial \varphi^{\sigma_1}}{\Delta_2 v}$$

olur. Bu da göstermektedir ki $\dfrac{\partial \varphi}{\Delta_1 u}$ *ile* $\dfrac{\partial \varphi^{\sigma_1}}{\Delta_2 v}$ *vektörlerinin gerdiği her vektör* $\mathcal{S}$ *yüzeyindeki bir* Γ *eğrisinin* P *noktasındaki tanjant vektörüdür.*

ii. Γ *eğrisi* σ_2*-tamamen* Δ*-diferansiyellenebilir olsun. O halde;*

$$\Gamma^{\Delta} = \frac{\partial \varphi^{\sigma_2}}{\Delta_1 u}\, u^{\Delta} + \frac{\partial \varphi}{\Delta_2 v}\, v^{\Delta}$$

olur. O halde Γ^{Δ} *vektörü* $\dfrac{\partial \varphi^{\sigma_2}}{\Delta_1 u}$ *ile* $\dfrac{\partial \varphi}{\Delta_2 v}$ *vektörlerinin lineer kombinasyonudur.*

Tersi olarak, Λ^3 *uzayının bir alt vektör uzayında alacağımız her vektör, öyle* λ' *ve* μ' *sabitleri için* $\lambda'\, \dfrac{\partial \varphi^{\sigma_2}}{\Delta_1 u} + \mu'\, \dfrac{\partial \varphi}{\Delta_2 v}$ *şeklinde yazılabilir.*

$$\Gamma(t) = \varphi(u_0 + \lambda' t, v_0 + \mu' t)$$

tanımlayalım. $t = 0$ *noktasında , yani* $P \in \mathcal{S}$ *noktasında,* Γ *eğrisi düzgün bir eğridir. Buradan;*

$$\Gamma^{\Delta} = \lambda'\, \frac{\partial \varphi^{\sigma_2}}{\Delta_1 u} + \mu'\, \frac{\partial \varphi}{\Delta_2 v}$$

olur. Bu da göstermektedir ki $\dfrac{\partial \varphi^{\sigma_2}}{\Delta_1 u}$ *ile* $\dfrac{\partial \varphi}{\Delta_2 v}$ *vektörlerinin gerdiği her vektör* $\mathcal{S}$ *yüzeyindeki bir* Γ *eğrisinin* P *noktasındaki tanjant vektörüdür.*

$\square$

4.1.3. Tanjant düzlemleri

$(t^0, s^0) \in \mathbb{T}_1^\kappa \times \mathbb{T}_2^\kappa$ sabit bir nokta olsun.

Tanım 4.9 *Ω_0; $\mathcal{S}$ yüzeyi üzerindeki sabit bir $P_0 = (t^0, s^0, f(t^0, s^0))$ noktasından geçen düzlem, P; $\mathcal{S}$ yüzeyi üzerinde hareket eden bir nokta, $d(P, \Omega_0)$; P noktasının Ω_0 düzlemine uzaklığı, $d(P_0, P_0^\sigma)$; P_0 ve P_0^σ noktaları arasındaki uzaklık olmak üzere;*

i. Ω_0 düzlemi aynı zamanda $P_0^{\sigma_1} = (\sigma_1(t^0), s^0, f(\sigma_1(t^0), s^0))$ ve $P_0^{\sigma_2} = (t^0, \sigma_2(s^0), f(t^0, \sigma_2(s^0))$ noktalarından geçer;

ii. P_0 noktası $\mathcal{S}$ yüzeyinin izole bir noktası değil ise

$$\lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \neq P_0}} \frac{d(P, \Omega_0)}{d(P_0, P_0^\sigma)} = 0 \tag{14}$$

şartları sağlanıyor ise, Ω_0 düzlemine $\mathcal{S}$ yüzeyinin P_0 noktasındaki Δ-tanjant düzlemi denir.

Teorem 4.10 *f fonksiyonu (t^0, s^0) noktasında tamamen Δ-diferansiyellenebilir ise, bu fonksiyon ile ifade edilen yüzeyin $P_0 = ((t^0, s^0), f(t^0, s^0))$ noktasında bir tek Δ-tanjant düzlemi vardır ve denklemi; $(x, y, z) \in \mathcal{S}$ olmak üzere*

$$z - f(t^0, s^0) = \frac{\partial f(t^0, s^0)}{\Delta_1 t}(x - t^0) + \frac{\partial f(t^0, s^0)}{\Delta_2 s}(y - s^0) \tag{15}$$

şeklindedir.

İspat: *f, $(t^0, s^0) \in \mathbb{T}_1^\kappa \times \mathbb{T}_2^\kappa$ noktasında tamamen Δ-diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\mathcal{S}$ bu fonksiyon tarafından belirlenen yüzey, ve Ω_0 da (15) denklemi ile verilen düzlem olsun. Şimdi, Ω_0 düzleminin $P_0^{\sigma_1}$ noktasından da geçtiğini gösterelim.*

Gerçekten de, $\sigma_1(t^0) = t^0$ ise $P_0^{\sigma_1} = P_0$ olur ve önermemiz doğrudur.

Şimdi $\sigma_1(t^0) > t^0$ olma durumunu ele alalım. $P_0^{\sigma_1}$ noktasının koordinatlarını (15) denkleminde yerine yazarsak;

$$f(\sigma_1(t^0), s^0) - f(t^0, s^0) = \frac{\partial f(t^0, s^0)}{\Delta_1 t}[\sigma_1(t^0) - t^0]$$

elde ederiz ve bu ifade f fonksiyonu (t^0, s^0) noktasında sürekli olduğu için doğrudur. Benzer şekilde, Ω_0 düzleminin $P_0^{\sigma_2}$ noktasından da geçtiği gösterilebilir.

Şimdi (14) özelliğinin sağlandığını kontrol edelim. P_0 noktasının $\mathcal{S}$ yüzeyinde bir izole nokta olmadığını kabul edelim. $P \in \mathcal{S}$ değişken noktasının koordinatları $(t, s, f(t, s))$ dir. Analitik geometriden bilindiği gibi;

$$N = \sqrt{1 + [\frac{\partial f(t^0, s^0)}{\Delta_1 t}]^2 + [\frac{\partial f(t^0, s^0)}{\Delta_2 s}]^2}$$

olmak üzere, P noktası ile Ω_0 düzlemi arasındaki uzaklık

$$d(P, \Omega_0) = \frac{1}{N}\left| f(t, s) - f(t^0, s^0) - \frac{\partial f(t^0, s^0)}{\Delta_1 t}(t - t^0) - \frac{\partial f(t^0, s^0)}{\Delta_2 s}(s - s^0)\right|$$

formulü ile ifade edilir.

Diferansiyellenebilirlik koşulundan; $A_1 = \frac{\partial f(t^0,s^0)}{\Delta_1 t}$ ve $A_2 = \frac{\partial f(t^0,s^0)}{\Delta_2 s}$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} d(P, \Omega_0) &= \frac{1}{N}\left|\alpha_1(t - t^0) + \alpha_2(s - s^0)\right| \\ &\leq \frac{1}{N}\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\sqrt{(t - t^0)^2 + (s - s^0)^2} \end{aligned}$$

olur. Daha sonra,

$$\begin{aligned} d(P, P_0) &= \sqrt{(t - t^0)^2 + (s - s^0)^2 + [f(t, s) - f(t^0, s^0)]^2} \\ &\geq \sqrt{(t - t^0)^2 + (s - s^0)^2} \end{aligned}$$

olur. O halde

$$P \to P_0 \quad iken \quad \frac{d(P, \Omega_0)}{d(P, P_0)} \leq \frac{1}{N}\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \to 0 \quad .$$

$\mathcal{S}$ yüzeyinin P_0 noktasındaki tanjant denkleminin (15) olduğunu göstermiş olduk. Şimdi, bu denklemin tek olduğunu gösterelim.

$\sigma_1(t^0) > t^0$ ve $\sigma_2(s^0) > s^0$ durumu aynı anda sağlanıyor ise, $P_0 \neq P_0^{\sigma_1} \neq P_0^{\sigma_2}$ olur. Bu durumda Ω_0 Δ-tanjant düzlemi tektir ve bu ayrık üç noktadan geçer. Kalan olası durumları da incelememiz gerekmektedir.

Kabul edelim ki, $\mathcal{S}$ yüzeyinin P_0 noktasındaki tanjant düzlemi Ω var ve denklemi $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ olacak şekilde

$$a(x - t^0) - b(y - s^0) - c[z - f(t^0, s^0)] = 0 \tag{16}$$

ifade edilsin. $P \in \mathcal{S}$ değişken noktasının koordinatları $(t, s, f(t, s))$ olsun. (16) denklemini kullanarak;

$$d(P, \Omega) = \left|a(t - t^0) + b(s - s^0) + c[f(t, s) - f(t^0, s^0)]\right|$$

elde ederiz. Diferansiyellenebilirlik koşulundan; $A_1 = \frac{\partial f(t^0,s^0)}{\Delta_1 t}$ *ve* $A_2 = \frac{\partial f(t^0,s^0)}{\Delta_2 s}$ *için*

$$d(P,\Omega) = \big|[a - c(A_1+\alpha_1)](t-t^0) + [b - c(A_2+\alpha_2)](s-s^0)\big|$$

dır. Daha sonra, aynı diferansiyellenebilirlik koşulundan;

$$\begin{aligned} d(P,P_0) &= \sqrt{(t-t^0)^2 + (s-s^0)^2 + [f(t,s) - f(t^0,s^0)]^2} \\ &= \sqrt{(t-t^0)^2 + (s-s^0)^2 + [(A_1+\alpha_1)(t-t^0) + (A_2+\alpha_2)(s-s^0)]^2} \quad . \end{aligned}$$

O halde;

$$\frac{d(P,\Omega)}{d(P,P_0)} = \frac{|[a - c(A_1+\alpha_1)(t-t^0)] + [b - c(A_2+\alpha_2)(s-s^0)]|}{\sqrt{(t-t^0)^2 + (s-s^0)^2 + [(A_1+\alpha_1)(t-t^0) + (A_2+\alpha_2)(s-s^0)]^2}} \tag{17}$$

elde ederiz.

Şimdi kalan olası durumları ele alalım.

(a) $\sigma_1(t^0) = t^0$ *ve* $\sigma_2(s^0) = s^0$ *olsun. Kabulümüzden,* $P \to P_0$ *iken (17) denkleminin sol tarafı 0'a gider. (17) denkleminde* $s = s^0$ *alıp, denklemin sağ tarafındaki ifadenin payını ve paydasını* $|t - t^0|$ *ile bölüp, her iki tarafında* $t \to t^0$ *iken limit durumuna geçersek*

$$a - cA_1 = 0 \quad \text{yani} \quad a - c\frac{\partial f(t^0,s^0)}{\Delta_1 t} = 0 \tag{18}$$

elde ederiz. Benzer şekilde; (17) denkleminde $t = t^0$ *alıp, denklemin sağ tarafındaki ifadenin payını ve paydasını* $|s - s^0|$ *ile bölüp, her iki tarafında* $s \to s^0$ *iken limit durumuna geçersek*

$$b - cA_2 = 0 \quad \text{yani} \quad b - c\frac{\partial f(t^0,s^0)}{\Delta_2 s} = 0 \tag{19}$$

elde ederiz.

$c \neq 0$ *olduğu görülebilir. Çünkü, aksi halde* $a = b = c = 0$ *olurdu. O halde* Ω*, (15) denklemi ile verilen düzlemdir.*

(b) $\sigma_1(t^0) = t^0$ *ve* $\sigma_2(s^0) > s^0$ *olsun.Bu durumda, (18) denklemini (a) şıkkındakine benzer şekilde (17) denkleminden elde edebiliriz. Fakat,* s^0 *lar dan bazıları izole nokta olabileceğinden (19) denklemini (a) şıkkındakine benzer şekilde (17) denkleminden elde edemeyebiliriz. O halde,* (t^0, s^0) *noktasının* *yeteri kadar küçük komşuluğundaki her (t, s) noktası için $s = s^0$ elde edebiliriz, ve bu yüzden de $s \to s_0$ limit durumuna geçiş için $|s - s_0|$ bölmesini yapamayız.*

Δ-tanjant düzlemin tanımı gereğince, Ω düzleminin P^{σ_2} noktasından da geçmesi gerekmektedir, ve bu Ω düzlemi için

$$a(x - t^0) + b[y - \sigma(s_2)] - c[z - f(t^0, \sigma_2(s^0))] = 0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemi kullanarak;

$$d(P, \Omega) = \left|a(t - t^0) + b[s - \sigma_2(s^0)] + c[f(t, s) - f(t^0, \sigma_2(s^0))]\right|$$

elde ederiz. Buradan; diferansiyellenebilirlik koşulu ile

$$d(P, \Omega) = \left|[a - c(A_1 + \beta_{21})](t - t^0) + [b - c(A_2 + \beta_{22})](\sigma_2(s^0) - s)\right|$$

elde ederiz. O halde;

$$\frac{d(P, \Omega)}{d(P, P_0)} = \frac{|[a - c(A_1 + \beta_{21})](t - t^0) + [b - c(A_2 + \beta_{22})](\sigma_2(s^0) - s)|}{\sqrt{(t - t^0)^2 + (s - s^0)^2 + [(A_1 + \alpha_1)(t - t^0) + (A_2 + \alpha_2)(s - s^0)]^2}}$$

olur. Burada $s = s^0$ alıp (18) durumunu göz önünde bulundurursak;

$$\left.\frac{d(P, \Omega)}{d(P, P_0)}\right|_{s=s^0} = \frac{| - c\beta_{21}(t - t^0) + [b - c(A_2 + \beta_{22})](\sigma_2(s^0) - s)|}{|t - t^0|\sqrt{1 + (A_1 + \alpha_1)^2)}}$$

elde ederiz. $t \to t^0$ iken limit durumuna geçersek;

$$b - cA_2 = 0 \qquad yani \qquad b - c\frac{\partial f(t^0, s^0)}{\Delta_2 s} = 0$$

olduğu görülür. Bu eşitlik vardır, çünkü, aksi halinde sağ-taraf limit durumunda sonsuza gider. İspatın kalan kısmı (a) şıkkına benzer şekilde bitirilebilir.

(c) *Son olarak, kabul edelim ki $\sigma_1(t^0) > t^0$ ve $\sigma_2(s^0) = s^0$ olsun. Bu durumda,*

$$a[x - \sigma_1(t^0)] + b(y - s^0) - c[z - f(\sigma_1(t^0), s^0)] = 0$$

denklemi ve diferansiyellenebilirlik koşulları gözönüne alınarak (b) şıkkına benzer şekilde ispatlanabilir.

□

Uyarı 4.11 *$P_0 \neq P_0^{\sigma_1} \neq P_0^{\sigma_2}$ oluyor ve $\mathcal{S}$ yüzeyinin P_0 noktasında bir Δ-tanjant düzlemi var ise, bu düzlem P_0,$P_0^{\sigma_1}$ ve $P_0^{\sigma_2}$ noktalarından geçen tek düzlem ile çakışır.*

4.2. Vektör Alanları ve Kovaryant Δ-Türev

$\Lambda^n = \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2 \times ... \times \mathbb{T}_n$ ve $i = 1, ..., n$ için her bir $\mathbb{T}_i$ zaman skalasında tanımlı ileri sıçrama ve delta diferansiyel operatörleri sırasıyla σ_i ve Δ_i olsun.

Tanım 4.12 *U, Λ^n uzayının kapalı bir alt kümesi olsun. U nun her bir p noktasına, p noktasında bir tanjant uzay karşılık getiren fonksiyona U üzerinde bir vektör alanı denir. X, U üzerinde bir vektör alanı ise, her $p \in U$ için*

$$X : U \to \bigcup_{p \in U} T_p(\Lambda^n)$$

dir.

Örnek 4.13 *$\dfrac{\partial}{\Delta_i x_i}$, Λ^n üzerinde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanı, Λ^n uzayının her bir p noktasına, δ_{ij} Kronecker Deltası olmak üzere, bu noktada $\delta_{ij}(p) = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, ..., \delta_{in})_p$ tanjant vektörünü karşılık getiren fonksiyondur. Λ^n uzayının her bir p noktasındaki vektör alanlarının kümesi $\chi(\Lambda^n)$ ile gösterilir.*

Tanım 4.14 *$\dfrac{\partial}{\Delta_1 x_1}|_p, \dfrac{\partial}{\Delta_2 x_2}|_p, \dots, \dfrac{\partial}{\Delta_n x_n}|_p$ olacak şekilde, Λ^n üzerindeki her bir p noktasında n tane tanjant vektör seçelim. Bunların Λ^n deki dağılımı ile n tane vektör alanı elde edilir. $\left\{\dfrac{\partial}{\Delta_1 x_1}, ..., \dfrac{\partial}{\Delta_n x_n}\right\}$ vektör alanı n-lisine Λ^n üzerindeki doğal baz vektör alanları sistemi veya kısaca doğal baz alan sistemi denir.*

Demek oluyor ki $\dfrac{\partial}{\Delta_i x_i}$, $1 \leq i \leq n$ vektör alanı, $\mathbb{T}_i$ ye karşılık gelen pozitif Ox_i ekseni doğrultu ve yönündeki birim vektör alanıdır.

$X \in \chi(\Lambda^n)$ için vektör uzaylarında baz tanımından

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\Delta_i x_i}$$

ifadesi tek türlüdür. Burada geçen

$$\alpha_i : \Lambda^n \to \mathbb{R}$$

koordinat fonksiyonlarına X vektör alanının Euclid koordinat fonksiyonları denir.

α_i fonksiyonlarının sağladığı diferansiyellenebilirlik şartları, koordinat fonksiyonu olduğu vektör alanının da diferansiyellenebilirlik şartını da belirler. Yani,

α_i ler σ_i-tamamen Δ-türevlenebilir ise X vektör alanı için de σ_i-tamamen Δ-diferansiyellenebilirdir denir.

X, Λ^n uzayında bir vektör alanı ve $v_p \in T_p(\Lambda^n)$ olsun.

$$\beta : \mathbb{T} \to \Lambda^n \qquad \beta(t) = p + tv$$

olmak üzere, X vektör alanının β eğrisi üstüne kısıtlanışı adını verdiğimiz $X \circ \beta$ vektör alanını ele alalım. $X \circ \beta$, β eğrisi üstünde bir vektör alanıdır. $\beta(\mathbb{T})$ kümesi, p noktasından geçen ve v vektörüne paralel kapalı doğrudur. $(X \circ \beta)^{\Delta}$ vektörü, p noktasında, $T_p(\Lambda^n)$ uzayının bir elemanıdır.

Tanım 4.15 *$(X \circ \beta)^{\Delta}(0)$ vektörüne, X vektör alanının v_p vektörü yönündeki kovaryant Δ türevi denir ve $D^{\Delta}_{v_p}X$ şeklinde gösterilir.*

Teorem 4.16 *$v_p \in T_p(\Lambda^n)$ ve $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\Delta_i x_i}$ ise*

$$D^{\Delta}_{v_p}X = \sum_{i=1}^{n} v_p[\alpha_i] \frac{\partial}{\Delta_i x_i}$$

dir.

İspat: *$t \in \mathbb{T}$ için $\beta(t) = p + tv$ olmak üzere, $X \circ \beta = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \circ \beta)(\frac{\partial}{\Delta_i x_i} \circ \beta)$ olduğundan,*

$$D^{\Delta}_{v_p}X = (X \circ \beta)^{\Delta}(0) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \circ \beta)^{\Delta}(0) \frac{\partial}{\Delta_i x_i}(\beta(0)) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \circ \beta)^{\Delta}(0) \frac{\partial}{\Delta_i x_i}(p)$$

olur. $(\alpha_i \circ \beta)^{\Delta}(0)$ sayısı, α_i fonksiyonunun v_p yönündeki Δ-türevi olduğundan;

$$D^{\Delta}_{v_p}X = \sum_{i=1}^{n} v_p[\alpha_i] \frac{\partial}{\Delta_i x_i}$$

dir. □

Teorem 4.17 *Aşağıdaki önermeler doğrudur.*

i. Her $a, b \in \mathbb{R}$, $v_p, w_p \in T^{\Delta}_p(\Lambda^n)$, $X \in \chi(\Lambda^n)$ için,

$$D^{\Delta}_{av_p + bw_p}X = aD^{\Delta}_{v_p}X + bD^{\Delta}_{w_p}X$$

dır.

ii. Her $a, b \in \mathbb{R},\ v_p \in T_p^{\Delta}(\Lambda^n),\ X, Y \in \chi(\Lambda^n)$ *için,*

$$D^{\Delta}_{v_p}(aX + bY) = aD^{\Delta}_{v_p}X + bD^{\Delta}_{v_p}Y$$

dir.

İspat:

i. Her $a, b \in \mathbb{R},\ v_p, w_p \in T_p^{\Delta}(\Lambda^n),\ X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \dfrac{\partial}{\Delta_i x_i} \in \chi(\Lambda^n)$ *için,*

$$\begin{aligned} D^{\Delta}_{av_p+bw_p}X &= \sum_{i=1}^{n}(av_p + bw_p)[\alpha_i]\frac{\partial}{\Delta_i x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}(av_p[\alpha_i] + bw_p[\alpha_i])\frac{\partial}{\Delta_i x_i} \\ &= a\sum_{i=1}^{n} v_p[\alpha_i]\frac{\partial}{\Delta_i x_i} + b\sum_{i=1}^{n} w_p[\alpha_i]\frac{\partial}{\Delta_i x_i} \\ &= aD^{\Delta}_{v_p}X + bD^{\Delta}_{w_p}X \end{aligned}$$

ii. Her $a, b \in \mathbb{R},\ v_p \in T_p^{\Delta}(\Lambda^n),\ X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \dfrac{\partial}{\Delta_i x_i},\ Y = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \dfrac{\partial}{\Delta_i x_i} \in \chi(\Lambda^n)$ *için,*

$$\begin{aligned} D^{\Delta}_{v_p}(aX + bY) &= \sum_{i=1}^{n} v_p[a\alpha_i + b\gamma_i]\frac{\partial}{\Delta_i x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}(av_p[\alpha_i] + bv_p[\gamma_i])\frac{\partial}{\Delta_i x_i} \\ &= a\sum_{i=1}^{n} v_p[\alpha_i]\frac{\partial}{\Delta_i x_i} + b\sum_{i=1}^{n} v_p[\gamma_i]\frac{\partial}{\Delta_i x_i} \\ &= aD^{\Delta}_{v_p}X + bD^{\Delta}_{v_p}Y \end{aligned}$$

□

Teorem 4.18 $\mathbb{T}$ *ve* $\mathbb{T}_(1)$ *kümeleri zaman skalaları olmak üzere* $v_p \in T_p^{\Delta}(\Lambda^n)$ *ve* $f : \Lambda^3 \to \mathbb{T}_(1)$ *fonksiyonu* Δ*-diferansiyellenebilir olsun.* $\Gamma : \mathbb{T} \to \Lambda^3$ *eğrisi ve sabit bir* $t_0 \in \mathbb{T}$ *noktası için,* $\Gamma(t_0) = p$ *ve* $\Gamma^{\Delta}(t_0) = v_p$ *ise, bu durumda*

$$(f \circ \Gamma)^{\Delta}(t_0) = v_p^{\Delta}[f]$$

dır.

İspat: $\Gamma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2 \times \mathbb{T}_3$ *ve* $\Gamma_1(\mathbb{T}) = \mathbb{T}_1, \Gamma_2(\mathbb{T}) = \mathbb{T}_2, \Gamma_3(\mathbb{T}) = \mathbb{T}_3$ *olsun.* $\mathbb{T}_1$, $\mathbb{T}_2$ *ve* $\mathbb{T}_3$ *zaman skalalarının ileri sıçarama ve delta diferansiyel operatörlerini sırasıyla* σ_1, Δ_1, σ_2, Δ_2, σ_3, Δ_3 *olarak kabul edelim.*

i. f *fonksiyonu* σ_1*-tamamen* Δ*-diferansiyellenebilir ise*

$$(f \circ \Gamma)^\Delta = \frac{\partial f}{\Delta_1 x_1}\Gamma_1^\Delta + \frac{\partial f^{\sigma_1}}{\Delta_2 x_2}\Gamma_2^\Delta + \frac{\partial f^{\sigma_1}}{\Delta_3 x_3}\Gamma_3^\Delta \tag{20}$$

olur. $v_p = \Gamma^\Delta(t^0) = \{\Gamma_1^\Delta(t^0), \Gamma_2^\Delta(t^0), \Gamma_3^\Delta(t^0)\}$ *vektörü için, (20) denkleminin sağ tarafı* σ_1*-tamamen* Δ*-diferansiyellenebilir* f *fonksiyonunun* Δ*-türev vektörü ile* v_p *vektörünün iç çarpımına eşittir. O halde;*

$$(f \circ \Gamma)^\Delta(t_0) = v_p^\Delta[f]$$

dır.

ii. f *fonksiyonu* σ_2*-tamamen* Δ*-diferansiyellenebilir ise*

$$(f \circ \Gamma)^\Delta = \frac{\partial f^{\sigma_2}}{\Delta_1 x_1}\Gamma_1^\Delta + \frac{\partial f}{\Delta_2 x_2}\Gamma_2^\Delta + \frac{\partial f^{\sigma_2}}{\Delta_3 x_3}\Gamma_3^\Delta \tag{21}$$

olur. $v_p = \Gamma^\Delta(t^0) = \{\Gamma_1^\Delta(t^0), \Gamma_2^\Delta(t^0), \Gamma_3^\Delta(t^0)\}$ *vektörü için, (21) denkleminin sağ tarafı* σ_2*-tamamen* Δ*-diferansiyellenebilir* f *fonksiyonunun* Δ*-türev vektörü ile* v_p *vektörünün iç çarpımına eşittir. O halde;*

$$(f \circ \Gamma)^\Delta(t_0) = v_p^\Delta[f]$$

dır.

iii. f *fonksiyonu* σ_3*-tamamen* Δ*-diferansiyellenebilir ise*

$$(f \circ \Gamma)^\Delta = \frac{\partial f^{\sigma_3}}{\Delta_1 x_1}\Gamma_1^\Delta + \frac{\partial f^{\sigma_3}}{\Delta_2 x_2}\Gamma_2^\Delta + \frac{\partial f}{\Delta_3 x_3}\Gamma_3^\Delta \tag{22}$$

olur. $v_p = \Gamma^\Delta(t^0) = \{\Gamma_1^\Delta(t^0), \Gamma_2^\Delta(t^0), \Gamma_3^\Delta(t^0)\}$ *vektörü için, (22) denkleminin sağ tarafı* σ_3*-tamamen* Δ*-diferansiyellenebilir* f *fonksiyonunun* Δ*-türev vektörü ile* v_p *vektörünün iç çarpımına eşittir. O halde;*

$$(f \circ \Gamma)^\Delta(t_0) = v_p^\Delta[f]$$

dır.

$\square$

4.3. Zaman Skalalarında Yüzeylerin Şekil Operatörleri

Bu bölümde, $\mathcal{S} \subset \Lambda^3$ yüzeyinin her bir P noktasına, $T_p(\mathcal{S})$ uzayından, yine $T_p(\mathcal{S})$ uzayına giden lineer bir S_P dönüşümü karşılık getiren bir S dönüşümünü tanımlayacağız. Yüzeyin bir P noktası komşuluğundaki biçimi, S_P dönüşümü ile yakından ilgili olduğundan, S dönüşümüne yüzeyin şekil operatörü denir. Daha formal bir tanım aşağıda verilmiştir.

Tanım 4.19 *P; $\mathcal{S}$ yüzeyinin herhangi bir noktası ve U; P nin $\mathcal{S}$ yüzeyi üzerinde bir komşuluğundaki dik vektör alanı olmak üzere; P noktasındaki herbir tanjant vektör v_p ise*

$$S_P(v) = -D^{\Delta}_{v_p} U \quad .$$

S_P ye $\mathcal{S}$ yüzeyinin P noktasında U vektöründen elde edilen şekil operatörü denir.

Lemma 4.20 *$\mathcal{S} \subset \Lambda^3$ yüzeyinin her P noktası için, şekil operatörü*

$$S_P : T_P(\mathcal{S}) \rightarrow T_P(\mathcal{S})$$

lineer bir operatördür.

İspat: $\forall v_p, w_p \in T_P(\mathcal{S})$ *ve* $\forall a, b \in \mathbb{R}$ *için;*

$$\begin{aligned} S_p(av + bw) &= -D^{\Delta}_{av+bw}(U) \\ &= -aD^{\Delta}_{v}(U) - bD^{\Delta}_{w}(U) \\ &= aS_P(v) + bS_P(w) \end{aligned}$$

□

Teorem 4.21 *$\forall P \in \mathcal{S}$ için $S_P = 0$ ise $\mathcal{S}$ yüzeyi düzlemseldir.*

İspat: *$S_P = 0$ ise, şekil operatörünün tanımından $D^{\Delta}_{v_p}(U) = 0$ diyebiliriz.*

Bu durumda; her v_p vektörü için yüzeyin normal vektörü U; v_p tanjant vektörüne diktir. O halde yüzey bir düzlem üzerindedir. □

Teorem 4.22 Γ, $\mathcal{S} \subset \Lambda^3$ *yüzeyinde bir eğri ise*

$$\Gamma^{\Delta^2} \cdot U = S(\Gamma^{\Delta}) \cdot (\Gamma^{\Delta})^{\sigma}$$

dır.

İspat: Γ *eğrisi* $\mathcal{S}$ *yüzeyinde olduğundan,* Γ *nın birinci mertebeden* Δ *türev vektörleri* Γ^{Δ} *lar* $\mathcal{S}$ *yüzeyine her zaman teğettir. O halde;*

$$\Gamma^{\Delta} \cdot U = 0$$

olur. Bu ifadenin Δ*-türevi;*

$$\Gamma^{\Delta^2} \cdot U + (\Gamma^{\Delta})^{\sigma} \cdot U^{\delta} = 0$$

dır. $S(\Gamma^{\Delta}) = -D^{\Delta}_{\Gamma^{\Delta}}(U)$ *olduğunu biliyoruz. O halde;*

$$\Gamma^{\Delta^2} \cdot U = S(\Gamma^{\Delta}) \cdot (\Gamma^{\Delta})^{\sigma}$$

dır. $\square$

5. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Bu çalışmada hem ayrık hem sürekli yapıda olan geometrik şekillerin yüzey tanımları ve bazı özellikleri verilmiştir. Sonuç olarak, bu tip yapıdaki yüzeylerin analizlerinin yapılabilmesi için gerekli teoremler, zaman skalası teorisi yardımı ile oluşturulmuştur. Daha çok dinamik denklemler üzerine yoğunlaşan zaman skalası analizi çalışmalarının, geometrik anlamlara da sahip olduğu, sürekli ve diskret yapıya sahip yüzeylerin analizi için de oldukça kullanışlı olduğu gösterilmiştir.

Diferansiyel geometri, geometrik problemler üzerinde diferansiyel metodlar ve integral hesaplamalarıyla çalışan matematiksel bir disiplindir. Bu disiplin içerisinde, yüzey yapıları diferansiyel operatörlerle incelenmektedirler. Parametreye bağımlı olarak tanımlanan yüzeyler, parametrenin sürekli olduğu durumlarda türev operatörleri, parametrenin diskret olduğu durumlarda ise fark operatörleri ile incelenmektedir.

Zaman skalasında tanımlanan Δ-türev operatörü ile birlikte, parametrenin sürekli veya diskret olma durumları için birleştirilmiş bir teori ortaya atmak mümkün olmuştur.

Diferansiyel geometriden bildiğimiz üzere, eğrilerin hız vektörleri, eğrinin sürekli olduğu noktalardaki birinci türevi ile elde edilir. Eğrinin süreksiz olduğu noktalarda hız vektörlerinden bahsetmek mümkün değildir. Bohner ve Guseinov'un (2004) sunmuş olduğu çalışmada, zaman skalarında parametrelenmiş eğrilerin sağ yayılmış noktalarındaki hız vektörlerinin, eğrinin o noktasındaki birinci Δ-türevleri ile elde edilebileceği görülmektedir. Aynı çalışmada, iki zaman skalası ile parametrelendirilmiş yüzeylerin sağ sıçramaya sahip noktalarındaki tanjant düzlemleri de, yüzeylerin o noktalarındaki birinci mertebeden kısmi Δ-türevlerine bağlı olarak elde edilebileceği görülmektedir.

Vektör değerli fonksiyonlar diferansiyel geometri konularının analizinde önemli rol oynamaktadır. Zaman skalalarında tanımlı vektör değerli fonksiyonlar için de genelleştirilmiş bir teori bu çalışmamızda ele alınmıştır. Bu fonksiyonların Δ-türevlerinin tanım ve teoremleri elde edilmiştir. Buna bağlı olarak, zaman skalalarında tanımlı vektör değerli fonksiyonların Taylor açılımları ele alınmıştır. Bu tanım ile birlikte, zaman skalalarında tanımlı eğri ve yüzeylerin kuadratik incelemelerinin yapılabilmesi mümkündür. Ayrıca, üç boyutlu zaman skalası uzayının $\mathbb{R}^3$'ün bir alt uzayı olduğunu göz önüne alarak, $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının elemanlarının, zaman skalası uzayında yapacağımız vektörel analiz için de kullanılabileceği görülmektedir.

Zaman skalalarında tanımlı yüzeyler ilk olarak Bohner ve Guseinov'un (2004) çalışmasında tanımlanmıştır. Bu çalışmada, zaman skalalarında yüzeyler için elde edilen tanım ve teoremler, yüzeyin parametre aralığından görüntü uzayına tanımlanan regüler dönüşümlere bağımlı olarak verilmiştir. Bu tanım ile birlikte, zaman skalalarında yüzeylerin, reel parametrelendirilmiş yüzeylere benzer olarak, parametreden bağımsız oldukları yani aynı yüzeyin bir çok farklı şekilde parametreleneceği de gösterilmiştir. Aynı zamanda, diffeomorf olan iki yüzeyin parametre kümeleri arasındaki ilişki incelenmiş ve zaman skalalarında yüzeylerin tanjantlarının yüzeyler üzerinde bulunan eğrilerin Δ-türevleri ile incelenebilecceği gösterilmiştir. Kısmi Δ-türevler ile elde edilen vektörler kümesinin, yüzeyin tanjant düzlemi için bir baz olduğu da ispatlanmıştır. Yüzeyin, zaman skalası parametresine bağlı olarak sağ yayılmış noktalarındaki baz kümesi, ilgili zaman skalasının ileri atlama operatörü ile ilişkili olduğu gösterilmiştir. Bunun ile birlikte, Bohner ve Guseinov'un (2004) vermiş olduğu tanjant düzlem tanımına uygun olarak zaman skalalarında yüzeyler için tanjant düzlemleri elde edilmiştir.

Bir yüzeyin herbir noktasındaki tanjant vektörlerinin oluşturduğu matematiksel yapıya vektör alanı denilmektedir. Diferansiyel geometride yüzeylerin incelenmesinde büyük rol oynayan vektör alanlarının ve buna bağlı olarak tanımlanan kovaryant türevlerin zaman skalası karşılıkları çalışmamızda incelenmiştir. Kapalı bir parametre kümesinden, yüzeyin kısmi Δ-türevleri ile elde edilen tanjant uzayına bir dönüşüm olarak tanımlanan vektör alanlarının cebirsel özellikleri gösterilmiş ve tanımı için tekrardan kısmi Δ-türev operatörlerinin oluşturduğu baz kümesi kullanılmıştır. Ayrıca yüzey üzerinden geçen herhangi bir β eğrisi ele alınarak, yüzeyin tanjant vektör alanına bağlı olarak kovaryant Δ-türevin nasıl tanımlanacağı gösterilmiştir.

Vektör alanlarının ve kovaryant Δ-türevin tanımlanması ile birlikte zaman skalalarında yüzeylerin şekil operatörlerinin incelenmesi mümkün olmuştur. Zaman skalalarında yüzeylerin herhangi bir noktasındaki tanjant düzleminden aynı tanjant düzlemine bir dönüşüm olarak tanımlanan şekil operatörü, yüzeyin o noktasındaki komşuluğu ile yakından ilgilidir. Lineer bir operatör olan şekil operatörünün, yüzeyin düzlemsel olma durumunda sıfıra eşit olduğu da gösterilmiştir. Bunun ile birlikte, şekil operatörünün zaman skalalarında yüzeyler üzerindeki eğrilerin Δ-türevleri ile olan ilişkisi verilmiştir.

Çalışmamız boyunca, zaman skalalarında tanımlanmış yüzeylerin analizi için özellikle kısmi Δ-türevlerin oldukça kullanışlı olduğu görülmüştür. Ayrıca, diskret ve/veya sürekli parametre ile oluşturulan yüzeylerin regülerlik özelliklerinin, tanjant uzaylarının, bu uzaylarının bazlarının ve yüzeyin şeklinin incelenmesi için zaman skalası teorisinden yararlanılabileceği görülmüştür. Ayrıca bu çalışmamız, ileride yapılacak olan kuadratik yaklaşımlar ve eğrilikler ile ilgili olacak çalışmalara temel oluşturacaktır.

KAYNAKLAR

Bohner, M., Peterson, A., 2001. *Dynamical Equations on Time Scales*, Birkhäuser, Boston, 358p.

Bohner, M.,Guseinov, Sh. G., 2004. *Partial Differentiation on Time Scales*. Dynamic Systems and Applications,13: 351-379

Bohner, M., Peterson, A., 2003. *Advances in Dynamical Equations on Time Scales*, Birkhäuser, Boston, 348p.

Guseinov, Sh. G., Özyılmaz, E., 2001. *Tangent Lines of Generalized Regular Curves Parametrized by Time Scales*. Turk. J. Math., 25: 553-562

Aktan, N.,Sarıkaya, M. Z.,İlarslan, K.,Yıldırım, H., 2008. *Directional* ∇*-derivative and Curves on* n*-dimensional Time Scales*. Acta Appl. Math., DOI 10.1007/s10440-008-9264-9

Özyılmaz, E., 2006. *Directional Derivative of Vector Field and Regular Curves on Time Scales*. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), 27(10): 1349-1360

Agarwal, R. P.,Bohner M., 1999. *Basic Calculus on Time Scales and Some of Its Applications*. Resultate der Mathematik, 35 (1-2): 3-22

Keller, S., 1999. *Asymptotisches Verhalten auf Zeitskales*. Doktora Tezi. Universität Augsburg, Augsburg. 1999

Hilger, S., 1990. *Analysis on measure chains – a unified approach to continuous and discrete calculus*. Results Math., 18:18-56

Merdivenci Atici, F.,Guseinov, Sh. G., 2002. *On Green's functions and positive solutions for boundary value problems on time scales*. J. Comput. Appl. Math., 141(1-2)

Haile, B.D., Hall, L.M., 2003. *Polynomial and series solutions of dynamic equations on time scales*. Dynamic Systems and Applications 12(1-2), 149-158

Pötzsche, C., 2001. *Chain Rule and Invariance Principle on Measure Chains*. Journal of Computational and Applied Mathematics (0377-0427) 4/1/2002.

Ahlbrandt, C.D., Bohner, M., Ridenhour, J., 2000. *Hamiltonian Systems on Time Scales*. J. Math. Anal. Appl., 250:561-578

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında İzmir'de doğdu. İlk ve ortaöğretimini burada tamamladıktan sonra 2000 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yüksek öğrenimine başladı. 2007 yılında Muğla Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde yüksek lisans çalışmalarına başladı. Aynı yıl Muğla Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başlayan Ömer AKGÜLLER, hala görevini sürdürmektedir.