

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

MAJORANA NÖTRİNOLARININ FENOMENOLOJİSİ

Şeyhmus AKASLAN

FİZİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ANKARA

2011

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Şeyhmus AKASLAN tarafından hazırlanan “**Majorana Nötrinolarının Fenomenolojisi**” adlı tez çalışması 06 / 04 / 2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ali Ulvi YILMAZER

Jüri Üyeleri:

Başkan : Prof. Dr. Mehmet ZEYREK
O.D.T.Ü. Fizik A.B.D.

Üye : Prof. Dr. Ömer YAVAŞ
Ankara Üniversitesi Fizik Mühendisliği A.B.D.

Üye : Prof. Dr. Ali Ulvi YILMAZER
Ankara Üniversitesi Fizik Mühendisliği A.B.D.

Üye : Prof. Dr. Ali Murat GÜLER
O.D.T.Ü. Fizik A.B.D.

Üye : Doç. Dr. Okan OZANSOY
Ankara Üniversitesi Fizik Mühendisliği A.B.D.

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Özer KOLSARICI

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

MAJORANA NÖTRİNOLARININ FENOMENOLOJİSİ

Şeyhmus AKASLAN

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ali Ulvi YILMAZER

Standart Modelin açıklayamadığı ve SNO, KamLAND ve Süper Kamiokande gibi deneyler sonucunda son yıllarda kesinlik kazanmış en önemli fiziksel olaylardan biri nötrino osilasyonudur. Nötrino osilasyonu, nötrinoların sıfırdan farklı bir kütleyle sahip olduklarının kanıtıdır. Alan teorisi çerçevesinde nötrino kütlelerini Standart Model'e eklemenin iki farklı yöntemi vardır. Bu yöntemlerin sonucunda Dirac ve Majorana olmak üzere iki farklı karaktere sahip nötrino elde etmek mümkündür. Nötrinoların hangi karaktere sahip olduğunun tespiti günümüz fiziğinin en büyük problemlerinden biridir. Bu tezin asıl konusu $e^-e^- \rightarrow W^-W^-$ saçılmasını (Ters nötrinosuz çift beta bozunumu) tüm yönleriyle incelemektir. Ters nötrinosuz çift beta bozunumu nötrino yalnızca Majorana karakterinde ise gözlenebilir. Bu nedenle bu sürecin laboratuarda gözlenmesi veya gözlenememesi en büyük fizik problemlerinden birini elimine edecektir. Son otuz yıldır ters nötrinosuz çift beta bozunumu hakkında sayısız makale yayınlanmıştır. Bu tezde ağırlıklı olarak Dirac ve Majorana fazlarının tesir kesiti üzerindeki etkileri ve CP bozulumu incelenecektir.

Nisan 2011, 123 sayfa

Anahtar Kelimeler: Majorana, Dirac, nötrino, kütle, Higgs, triplet, elektron, saçılma

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

PHENOMENOLOGY OF MAJORANA NEUTRINOS

Şeyhmus AKASLAN

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Physics Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Ali Ulvi YILMAZER

Although the Standard Model (SM) of particle physics is phenomenologically very accurate it can't explain why neutrinos oscillate, simply because within SM framework neutrinos are massless. Oscillation has been confirmed by many physical experiments such as SNO, KamLAND and Super Kamiokande. Neutrino oscillation is the proof of neutrino mass, without a nonzero mass, neutrinos can't oscillate. In the framework of quantum field theory there are two ways to add a mass term to the SM Lagrangian. Resulting mass terms are called Dirac and Majorana masses and each one of them has a different characteristic. Determination of the true character of neutrinos is one of the biggest problems of today's particle physics. The subject of this thesis is to fully examine the $e^-e^- \rightarrow W^-W^-$ scattering also known as the inverse neutrinoless double beta decay. Inverse neutrinoless double beta decay is possible only if neutrinos are Majorana particles. Observing this process in the laboratory will certainly prove that the neutrinos are Majorana particles. For the last thirty years numerous studies have been done on inverse double beta decay. Apart from the other researches, the main subject of this thesis will be the effects of Dirac and Majorana phases on cross section and possibility of CP violation.

April 2011, 123 pages

Key Words: Majorana, Dirac, neutrino, mass, Higgs, triplet, electron, scattering

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımı yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek akademik ortamda olduğu kadar beşeri ilişkilerle de engin fikirleriyle yetişme ve gelişmeye katkıda bulunan danışman hocam sayın Prof. Dr. Ali Ulvi YILMAZER'e, çalışmalarım sırasında önemli katkılarda bulunan ve yönlendiren sayın Prof. Dr. Ömer YAVAŞ ve Prof. Dr. Mehmet ZEYREK'e, Tez izleme komitesine, bir arkadaş olarak desteğinin esirgemeyen Yrd. Doç. Deniz YILMAZ'a, eşi bulunmaz ve bu tezde başlıca kaynağım olan kitabı nedeniyle Carlo Giunti'ye en derin duygularla teşekkür ederim.

Şeyhmus AKASLAN

Ankara, Nisan 2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR.....	v
SİMGELER DİZİNİ.....	xi
ŞEKİLLER DİZİNİ	xiii
ÇİZELGE DİZİNİ	xv
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	2
2.1 Nötrinosuz Çift Beta Süreci	2
2.2 Standart Model.....	3
2.3 Nötrino Kütle Terimi	5
2.4 Zayıf Etkileşmeler	8
2.5 See-saw Mekanizması	11
2.6 Üç Nötrino Karışımı.....	12
2.7 N Nötrino Karışımı	15
2.8 Nötrino Osilasyonu.....	16
2.8.1 Antinötrino durumu.....	18
3. MATERYAL VE YÖNTEM	20
3.1 Spin Toplamları Yöntemi	20
3.1.1 Feynman genlik hesapları	21
3.1.2 Genlik mutlak kare hesabı.....	25
3.1.3 Tesir kesiti	44
3.1.4 Olay Sayısı	45
3.2 Helisite Genlikleri Yöntemi	47
3.2.1 Helisite	47

3.2.2 Kiralite.....	48
3.2.3 Dirac denklemi ve helisite özvektörleri	49
3.2.4 Spin-1 helisite özvektörleri.....	53
3.2.5 Feynman genlik hesabı.....	54
3.2.6 Üniterlik.....	56
3.2.7 Genlik kare hesabı.....	56
3.2.8 Antiparçacıklar	59
3.3 İki Yöntemin Karşılaştırması	63
4. BULGULAR.....	68
4.1 CP Asimetrisi.....	68
4.2 Üç Nötrino Karışımı.....	68
4.3 Dört Nötrino Karışımı.....	72
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	76
KAYNAKLAR.....	78
EKLER.....	81
EK 1 Gamma Matris Cebiri	83
EK 2 Sık Kullanılan İz Eşitlikleri.....	85
EK 3 $Tr\{\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\kappa\gamma^\sigma\}$	87
EK 4 Mandelstam Değişkenleri.....	95
EK 5 Elektrozayıf Akımın Yük Eşleneği.....	99
EK 6 Feynman Köşe Faktörleri.....	101
ÖZGEÇMİŞ	103

SİMGELER DİZİNİ

A^{CP}	CP asimetrisi
E	Enerji
m	Kütle
M_X	Etkileşme genliği
p_μ	4'lü Momentum
SM	Standart Model
$u(p,s)$	Lepton spinörü
$v(p,s)$	Antilepton spinörü
σ	Tesir kesiti
$\epsilon(1)$	Bozon 4'lü vektörü
Δ^{++}, Δ^{--}	Çift yüklü Higgs tripleti
U_{CKM}	Cabibbo-Kobayashi-Maskawa matrisi
U_{PMNS}	Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata matrisi
SNO	Sudbury nötrino gözlemevi
KamLAND	Kamioka likit sintilatör anti nötrino dedektörü
$\mathcal{L}$	Lagranjiyen
θ	Saçılma açısı
δ_{13}	Karışım matrisi Dirac fazı
$\lambda_{2,3}$	Karışım matrisi Majorana fazları

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Karışım açısı ve kütle kare farklarının gözlenebilir bölgeleri.	15
Şekil 3.1 t kanal genliği.....	21
Şekil 3.2 u kanal genliği.....	22
Şekil 3.3 s kanal genliği	23
Şekil 3.4 Elektron - elektron saçılması	54
Şekil 4.1 $ M_{-1-100} ^2$ için çizilen diferansiyel tesir kesiti – enerji bağıntıları.....	69
Şekil 4.2 $ M_{-1-110} ^2$ için çizilen diferansiyel tesir kesiti – enerji bağıntıları.....	70
Şekil 4.3 $ M_{-1-1-10} ^2$ için çizilen diferansiyel tesir kesiti – enerji bağıntıları	70
Şekil 4.4 $ M_{-1-111} ^2$ için çizilen diferansiyel tesir kesiti – enerji bağıntıları.....	71
Şekil 4.5 $ M_{-1-1-1-1} ^2$ için çizilen diferansiyel tesir kesiti – enerji bağıntıları.....	71
Şekil 4.6 $ M ^2$ için çizilen diferansiyel tesir kesiti – enerji bağıntıları	72
Şekil 4.7 $ M_{-1-100} ^2$ için çizilen Diferansiyel Tesir kesiti – Enerji bağıntıları.....	73
Şekil 4.8 $ M_{-1-110} ^2$ için çizilen Diferansiyel Tesir kesiti – Enerji bağıntıları.....	73
Şekil 4.9 $ M_{-1-1-10} ^2$ için çizilen Diferansiyel Tesir kesiti – Enerji bağıntıları.....	74
Şekil 4.10 $ M_{-1-111} ^2$ için çizilen Diferansiyel Tesir kesiti – Enerji bağıntıları	74
Şekil 4.11 $ M_{-1-1-1-1} ^2$ için çizilen Diferansiyel Tesir kesiti – Enerji bağıntıları	75
Şekil 4.12 $ M ^2$ için çizilen Diferansiyel Tesir kesiti – Enerji bağıntıları.....	75

ÇİZELGE DİZİNİ

Çizelge 2.1 Nötrino kütle kare ve karışım açıları verileri.....	14
---	----

1. GİRİŞ

Bugünkü parçacık fiziğinin en büyük problemlerinden ilki nötrino mutlak kütlelerinin ölçülmesi, diğeri ise Dirac ya da Majorana doğasının tespit edilmesidir. Nötrinoların sıfırdan farklı kütleye sahip oldukları yapılmış olan osilasyon deneylerinin sonucunda kesinlik kazanmıştır (Helmer 2000, Gonzales 2008, Simirnov 2008, Kajita 2009). Süper Kamiokande (Fukuda 1996), SNO (Ahmad 2001) ve KamLAND (Araki 2005) gibi deneyler nötrinoların kütle öz durumları arasındaki kütle kare farkını tespit etmelerine rağmen mutlak kütleleri hakkında en ufak bir bilgi vermemektedir. Benzer şekilde osilasyon deneyleri, nötrinoların Dirac ya da Majorana doğası hakkında herhangi bir bilgi vermemektedir. Majorana karakterini ortaya çıkarabilecek en etkili süreçler nötrinosuz çift beta bozunumu ve onun tersi olan süreçtir.

Bu tez çalışmasında, etkileşme genliği önce spin toplamları yöntemiyle hesaplanacak, ardından helisite genlikleri yöntemiyle incelenecek, hesaplara nötrino karışımı dahil edilecek, etkileşme tesir kesitinin Dirac ve Majorana fazlarına olan bağıllığı incelenecek ve CP asimetrisi irdelenecektir. Sonuç olarak etkileşme tesir kesitinin Dirac ve Majorana fazlarını içermesine rağmen CP asimetrisine sebep olamayacağı görülecektir. CP asimetrisinin gözlenebilmesi için başka tür reaksiyonlara ihtiyaç olduğu sonucuna varılacaktır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1 Nötrinosuz Çift Beta Süreci

Nötrinosuz çift- β -bozonumu SM de yasaklı olup aşağıda verildiği gibi gerçekleşir (Giunti 2007).

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(A, Z) &\rightarrow \mathcal{N}(A, Z + 2) + 2e^- \\ \mathcal{N}(A, Z) &\rightarrow \mathcal{N}(A, Z - 2) + 2e^+\end{aligned}$$

Nötrinosuz çift- β -bozonumu nötrinolar yalnızca kütleli Majorana parçacıkları ise gerçekleşebilir. Yukarıdaki bozunum ilk W.H. Furry tarafından önerilmiştir. Nötrinosuz çift- β -bozonumu yarı-ömrü üzerindeki alt limit Heidelberg-Moscow ^{76}Ge deneyinden elde edilmiştir. Gelecek için birçok yeni nötrinosuz çift β deneyi planlanmış ve hazırlanmaktadır.

$$T_{1/2}^{0\nu}({}^{76}\text{Ge}) > 1.9 \times 10^{25} \text{ y} \quad (2.1)$$

Nötrinosuz çift β bozunumunun, bozunum genliği efektif majorana nötrinosu kütlesiyle orantılıdır, $m_{2\beta} \equiv \sum_{k=1}^3 U_{ek}^2 m_k$. Efektif Majorana kütlesi, sadece Majorana nötrinolarının kütlesine bağlı olmayıp aynı zamanda karışım matrisinin elemanlarına da bağlıdır. Dahası her matris elemanı genel olarak bir kompleks sayı olup, toplam sembolü içerisinde karesi alınmış durumdadır. Bu ise farklı Majorana kütleleri arasında olası sıfırlamalara sebep olabilmektedir. Standart parametrizasyonda $\lambda_1 = 0$ dır.

$$m_{2\beta} = c_{12}^2 c_{13}^2 m_1 + e^{2i\lambda_2} s_{12}^2 c_{13}^2 m_2 + e^{2i(\lambda_3 - \delta_{13})} s_{13}^2 m_3 \quad (2.2)$$

Ters nötrinosuz çift beta bozunumunun etkileşme tesir kesiti nötrino efektif kütlesinin karesiyle orantılı olup, nötrino yalnızca Majorana parçacığı ise gerçekleşebilir.

Nötrinin Majorana doğasından dolayı bu süreç lepton sayısını $\Delta = 2$ birim bozmaktadır.

Çeşni elektron kütlesi üzerine getirilmiş en geniş üst limit Mainz (Karaus vd. 2005) ve Troitzk (Lobashev vd. 1999) tritium deneylerinden gelmiş olup aşağıda verilmiştir.

$$|m_e| \equiv \sum_i U_{ei}^{*2} m_i \leq 2.3 \text{ eV} \quad (2.3)$$

Benzer şekilde (Avignone 2008) tarafından double beta bozunumundan gelen limit aşağıda verilmiştir.

$$m_{ee} < 1 \text{ eV} \quad (2.4)$$

2.2 Standart Model

Standart Model (SM), kuantum alan teorisi çerçevesinde temel parçacıkların güçlü, elektromanyetik ve zayıf etkileşmelerini tarif eden bir teoridir. SM, lokal simetri grubu $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 'na dayanan bir ayar teorisidir. Burada alt indisler C, L ve Y sırasıyla renk, sol-el ve hiper-yükü temsil etmektedir. Ayar grubu, etkileşmeleri ve vektör bozon sayısını tam olarak belirler; vektör ayar bozonları olarak grubun jeneratörlerine karşılık gelir. Teoride $SU(3)_C$ 'nin sekiz jeneratörüne karşılık sekiz adet kütesiz gluon olup güçlü etkileşmelerde ara parçacık olarak değiş-tokuş edilirler; Üç adet kütleli ayar bozonu ($W^\pm, Z$) ve bir adet kütesiz ayar bozonu (γ) sırasıyla $SU(2)_L$ ve $U(1)_Y$ 'nin jeneratörlerine karşı gelen alanların uygun bir karışımıdır ve elektromanyetik etkileşmelerde değiş-tokuş edilirler. $SU(3)_C$ simetrisi kırılmadığından ve $SU(2)_L \times U(1)_Y$ sektörü ile arasında herhangi bir karışım olmadığından, SM'de elektrozayıf etkileşmeler güçlü etkileşmelerden bağımsız olarak incelenebilir. Diğer yandan elektromanyetik ve zayıf etkileşmeler beraber incelenmelidir çünkü $SU(2)_L$ ve $U(1)_Y$ nötral ayar bozonları arasında bir karışım vardır.

SM'nin simetri grubu, etkileşmeleri, vektör bozon sayısını ve özelliklerini tam olarak tarif eder. Diğer yandan üç etkileşme sabiti bilinmeyenler olup deneylerden elde edilirler. Fermiyon ve skaler bozon sayısı ve özellikleri teori tarafından kısıtlanmamış olmasına rağmen simetri grubu altında dönüşüm özellikleri üzerinde kısıtlama vardır.

SM, neden doğada üç fermiyon ailesinin olduğuna dair herhangi bir açıklama getirememektedir.

Bilinen tüm fermiyonlar kuarklar ve leptonlar olmak üzere iki kategoride incelenebilir. Kuarklar tüm etkileşmelere katılırken (güçlü, elektromanyetik, zayıf, gravitasyon), leptonlar güçlü etkileşme hariç diğer tüm etkileşmelere katılırlar. Tüm fermiyonların spini $\frac{1}{2}$ dir. Kuarklar hadronların temel yapı taşları olup doğada serbest parçacıklar olarak bulunmazlar. Bunun anlamı kuarkların klasik anlamda bir kütesinin olmadığı ve kütle değerinin tanıma bağlı olduğu sonucu çıkmaktadır.

SM de toplamda 19 serbest parametre vardır. Bu parametreler deneylerden elde edilmek zorundadırlar. Bu parametrelerden 9 tanesi fermiyon kütlelerinden (6 kuark, 3 yüklü lepton, nötrinolar kütesiz), 4 tanesi kuark kütle karışım matrisinden (3 açı, 1 faz), 3 tanesi etkileşme sabitlerinden, 1 tanesi güçlü CP probleminden, 2 tanesi Higgs sektöründen gelmektedir.

SM fenomenolojik olarak olarak çok başarılı bir teori olmasına rağmen gravitasyonu içermemesi ve nötrino osilasyonunu dolayısıyla nötrino kütesini açıklayamaması nedeniyle eksik bir teoridir.

Elektrozayıf SM Lagranjiyen en genel renormalize Lagranjiyen olup lokal simetri grubu $SU(2)_L \times U(1)_Y$ altında değişmez olup tanımı aşağıdaki denklemde yapılmıştır.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & i\overline{L}_L \mathcal{D}L_L + i\overline{Q}_L \mathcal{D}Q_L + \sum_{f=e,u,d} i\overline{f}_R \mathcal{D}f_R \\
& -\frac{1}{4}A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \\
& +(D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) -\mu^2\Phi^\dagger\Phi -\lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2 \\
& -y^e(\overline{L}_L\Phi e_R + \overline{e}_R\Phi^\dagger L_L) \\
& -y^d(\overline{Q}_L\Phi d_R + \overline{d}_R\Phi^\dagger Q_L) -y^u(\overline{Q}_L\Phi u_R + \overline{u}_R\Phi^\dagger Q_L)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

İlk satır tek aile için fermiyonların kinetik terimini ve ayar bozonlarıyla olan etkileşmelerini, ikinci satır ayar bozonlarının kinetik self-etkileşme terimlerini, üçüncü satır Higgs alanını, dördüncü ve beşinci satırlar Higgs-fermion-Yukawa etkileşme terimlerini göstermektedirler. Yüklü zayıf etkileşme Lagranjiyeni $\mathcal{L}_I^{CC}$, denklem (2.5)'in ilk satırından elde edilir.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_I^{CC} = & -\frac{g}{2\sqrt{2}}\{\overline{\nu}_{eL}W e_L + \overline{e}_{eL}W^\dagger \nu_L\} \\
= & -\frac{g}{2\sqrt{2}}\{\overline{\nu}_e\gamma^\mu(1-\gamma^5)eW_\mu + \overline{e}_e\gamma_\mu(1-\gamma^5)\nu W^{\mu\dagger}\} \\
= & -\frac{g}{2\sqrt{2}}j_{W,L}^\mu W_\mu + h.c.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Yukarıdaki denklemde $j_{W,L}^\mu$ leptonik yüklü akım olup tanımı aşağıdaki denklemde yapılmıştır.

$$j_{W,L}^\mu = \overline{\nu}_e\gamma^\mu(1-\gamma^5)e = 2\overline{\nu}_{eL}\gamma^\mu e_L \tag{2.7}$$

2.3 Nötrino Kütle Terimi

Bilinen üç aktif sol-elli nötrino alanına $\nu'_{eL}, \nu'_{\mu L}, \nu'_{\tau L}$ ilave olarak N_s tane steril sağ-elli nötrino alanının $\nu_{sR}, s=1\dots N$ bulunması SM çerçevesinde olasıdır. Steril sağ-elli nötrino notasyonunda üs işareti ihtiyacı yoktur çünkü bu alanlar zayıf etkileşmelere

girmezler. Tüm bu alanlarla birlikte Lagranjiyenin Dirac-Majorana kütle terimi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\mathcal{L}_{k\ddot{u}t\ddot{u}l\ddot{e}}^{D+M} = \mathcal{L}_{k\ddot{u}t\ddot{u}l\ddot{e}}^L + \mathcal{L}_{k\ddot{u}t\ddot{u}l\ddot{e}}^R + \mathcal{L}_{k\ddot{u}t\ddot{u}l\ddot{e}}^D \quad (2.8)$$

Burada Majorana kütle terimleri $L_{k\ddot{u}t\ddot{u}l\ddot{e}}^L, L_{k\ddot{u}t\ddot{u}l\ddot{e}}^R$ olup tanımları aşağıdaki eşitlikte yapılmıştır.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{k\ddot{u}t\ddot{u}l\ddot{e}}^L &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=e, \mu, \tau} \nu_{\alpha, L}'^T C^\dagger M_{\alpha\beta}^L \nu_{\beta, L}' + h.c. \\ \mathcal{L}_{k\ddot{u}t\ddot{u}l\ddot{e}}^R &= \frac{1}{2} \sum_{s, s'=s_1 \dots s_N} \nu_{s, R}^T C^\dagger M_{ss'}^L \nu_{s', R}' + h.c. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Benzer şekilde Dirac kütle teriminin tanımı aşağıdaki eşitlikte yapılmıştır.

$$\mathcal{L}_{k\ddot{u}t\ddot{u}l\ddot{e}}^D = - \sum_{s=s_1 \dots s_N} \sum_{\alpha=e, \mu, \tau} \bar{\nu}_{s, R} M_{s\alpha}^D \nu_{\alpha, L}' + h.c. \quad (2.10)$$

Tüm kütle matrisleri M^R, M^L ve M^D komplekstir. Majorana kütle matrisleri M^L ve M^R ise simetriktir. Sol-elli Majorana kütle matrisi M^L 3x3'lük, sağ-elli Majorana kütle matrisi M^R $N_s \times N_s$ 'lik karesel bir matristir. Dirac kütle matrisi M^D ise $N_s \times 3$ 'lük bir matristir. Mutlak nötrino kütleleri Dirac-Majorana kütle teriminin köşegenleştirilmesi sonucunda elde edilir. Bunun için $N = 3 + N_s$ boyutunda sol-elli alanları içeren bir sütun vektör tanımlamak yararlıdır.

$$N_L' \equiv \begin{pmatrix} \nu_L' \\ \nu_R^C \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Burada sağ-elli steril nötrino alanları ve sol-elli aktif nötrino alanları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} \nu'_L &= \begin{pmatrix} \nu'_{eL} \\ \nu'_{\mu L} \\ \nu'_{\tau L} \end{pmatrix} \\ \nu_R^C &= \begin{pmatrix} \nu_{s_1 R}^C \\ \vdots \\ \nu_{s_N R}^C \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Bu şekilde Dirac-Majorana kütle terimi olan denklem (2.8) kompakt bir formda yazılabilir.

$$\mathcal{L}^{D+M}_{k\ddot{u}t\ddot{u}l\ddot{e}} = \frac{1}{2} N_L'^T C^\dagger M^{D+M} N_L' + h.c. \quad (2.13)$$

Yukarıdaki denklemde M^{D+M} , $N \times N$ 'lik simetrik kütle matrisi olup tanımı aşağıdadır. Dirac-Majorana kütle teriminin köşegenleştirilmesi sonucunda kütleli nötrinoların Majorana parçacığı olduğu sonucu çıkmaktadır.

$$M^{D+M} \equiv \begin{pmatrix} M^L & M^{D^T} \\ M^D & M^R \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Kütle öz durum nötrino alanlarını elde etmek için denklem (2.14) köşegenleştirilmelidir.

$$\left(V_L^\nu \right)^T M^{D+M} V_L^\nu = M \quad \text{with } M_{kj} = m_k \delta_{kj} \quad (2.15)$$

Burada V_L^ν üniter, m_k 'lar ise reel ve pozitifdir. Sol-elli çepni alanları, kütleli alanların lineer kombinasyonu olarak yazabiliriz.

$$N_L' = V_L^\nu n_L \quad n_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \vdots \\ \nu_{NL} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Bu şekilde Dirac-Majorana kütle terimi olan denklem (2.13) kütleli alanlar cinsinden yazılabilir.

$$\mathcal{L}^{D+M}_{k\ddot{u}t\ddot{u}l\ddot{e}} = \frac{1}{2} n_L^T C^\dagger M n_L + h.c. = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k v_{kL}^T C^\dagger v_{kL} + h.c. \quad (2.17)$$

Ya da yük eşlenik alanları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathcal{L}^{D+M}_{k\ddot{u}t\ddot{u}l\ddot{e}} = -\frac{1}{2} \overline{n_L^C} M n_L + h.c. = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \overline{v_{kL}^C} v_{kL} + h.c. \quad (2.18)$$

Majorana nötrino alanlarından oluşan bir sütun matris tanımlayabiliriz.

$$n \equiv \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} \quad v_k = v_{kL} + v_{kL}^C \quad (2.19)$$

v_k 'lar Majorana alanları olup aşağıdaki koşulu sağlarlar.

$$v_k^C = v_k \quad (2.20)$$

Majorara alanlarını kullanarak serbest nötrino Lagranjiyenini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\mathcal{L}^{D+M} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \overline{v_k} (i\vec{\partial} - m_k) v_k = \overline{n} (i\vec{\partial} - M) n \quad (2.21)$$

2.4 Zayıf Etkileşmeler

Aktif ve steril nötrinoların karışımının denklem (2.16) zayıf etkileşmeler üzerinde önemli sonuçları vardır. Leptonik yüklü akım aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$j_{W,L}^{\mu} = 2\overline{v'_L}\gamma^{\mu}\ell'_L \quad (2.22)$$

Burada v'_L aktif sol-elli nötrino alanlarından oluşan bir sütun matrisidir (eşitlik (2.12)).

Benzer şekilde ℓ'_L 'in sol-elli yüklü lepton alanları olup tanımı aşağıda yapılmıştır.

$$\ell'_L \equiv \begin{pmatrix} e'_L \\ \mu'_L \\ \tau'_L \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Yüklü lepton kütle matrisinin köşegenleştirilmesi sonucunda kütleli yüklü lepton alanlarına ulaşılır.

$$\ell_L = V_L^{\ell\dagger} \ell'_L \equiv \begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \\ \tau_L \end{pmatrix} \quad \ell_R = V_R^{\ell\dagger} \ell'_R \equiv \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Leptonik yüklü akım ifadesi olan (2.22)'in kütleli alanlar cinsinden yazılışı aşağıdaki gibidir.

$$j_{W,L}^{\mu} = 2\overline{n_L}U^{\dagger}\gamma^{\mu}\ell_L \quad (2.25)$$

Burada U karışım matrisi olup tanımı ve elemanları aşağıdadır.

$$U_{\alpha k} = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} (V_L^{\ell\dagger})_{\alpha\beta} (V_L^{\nu})_{\beta k} \quad (2.26)$$

Yüklü lepton kütle matrisini köşegenleştiren V_L^{ℓ} matrisi 3x3'lük üniter bir matris iken, Dirac-Majorana kütle matrisini köşegenleştiren V_L^{ν} matrisi NxN'lik üniter bir matristir. Bu durumda U matrisi 3xN'lik bir matris olup üniter değildir.

$$UU^\dagger = 1 \quad U^\dagger U \neq 1 \quad (2.27)$$

Denklem (2.25)'deki U karışım matrisi, üç aktif çeşni nötrinosunu N kütleli nötrinoya bağlar. Sol-elli çeşni nötrino alanlarını tanımlamak faydalı olacaktır.

$$v_L = U n_L = V_L^{\ell\dagger} v'_L \quad v_L = \begin{pmatrix} v_{eL} \\ v_{\mu L} \\ v_{\tau L} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Bu şekilde leptonik yüklü akım SM'de olduğu gibi denklem (2.7) çeşni alanlar cinsinden yazılabilir.

$$j_{W,L}^\mu = 2 \overline{v_L} \gamma^\mu \ell_L = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{v_{\alpha L}} \gamma^\mu \ell_{\alpha L} \quad (2.29)$$

U karışım matrisinin parametrizasyonu $3 \times N$ 'lik bir matris olduğundan epey karışıktır. Buna rağmen parametrizasyon için $3 + 3N_s$ karışım açısı ve $3 + 3N_s$ faza ihtiyaç vardır. Bu fazlardan $1 + 2N_s$ tanesi Dirac fazı ve geri kalan $2 + N_s$ tanesi Majorana fazıdır.

Aktif ve steril nötrinolar arasındaki karışım açık bir şekilde aşağıdaki denklemlerde verilmiştir.

$$\begin{aligned} v_{\alpha L} &= \sum_{k=1}^N U_{\alpha k} v_{kL} \quad (\alpha = e, \mu, \tau) \\ v_{sR}^C &= \sum_{k=1}^N \left(V_L^\nu \right)_{sk} v_{kL} \quad (s = s_1 \dots s_N) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Bu karışım bağıntılarını kompakt bir formda yazmak mümkündür.

$$N_L \equiv \mathcal{U} n_L \quad (2.31)$$

$$N_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix} \quad \mathcal{U} \equiv \begin{pmatrix} U \\ V_L^\nu|_{N_s \times N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_L^{\ell^\dagger} V_L^\nu|_{3 \times N} \\ V_L^\nu|_{N_s \times N} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Burada $V_L^\nu|_{3 \times N}$ ve $V_L^\nu|_{N_s \times N}$ sırasıyla $3 \times N$ ve $N_s \times N$ 'lik matrisler olup V_L^ν 'nün ilk üç ve geri kalan satırlarının alınmasıyla elde edilirler. Dikkat edilirse $\mathcal{U}$ matrisi $N \times N$ 'lik olup üniterdir.

Aktif ve steril nötrino alanları aynı kütleli nötrino alanlarının bir lineer kombinasyonu olduğundan, aktif ve steril nötrinolar arasında osilasyon mümkündür. Başka bir ifadeyle U karışım matrisinin üniter olmaması, aktif çeşni nötrinolarının toplam olasılığının korunmadığı anlamına gelir.

2.5 See-saw Mekanizması

See-saw mekanizması nötrino kütlelerinin, SM deki diğer leptonlardan daha küçük olduğunu açıklayabilen önemli bir teoridir (Giunti 2007). Denklem (2.14) deki Dirac-Majorana kütle matrisi $M_L = 0$ için (Tip I see-saw),

$$M^{D+M} \equiv \begin{pmatrix} 0 & M^{D^T} \\ M^D & M^R \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

M^L , SM simetrileri tarafından yasaklanmış dolayısıyla sıfır alınabilir, M^D Dirac kütlesi Higgs mekanizması tarafından üretilip mertebesi elektrozayıf mertebeyi yani 10^2 GeV'yi geçemez ve M^R , SM singleti olduğundan SM simetrileri tarafından kısıtlanmaz dolayısıyla SM ötesinde yeni bir fizik tarafından üretilmiş olması mümkündür. Eğer M^R 'ın tüm özdeğerleri M^D 'nin elemanlarından çok fazla büyükse kütle matrisi $(M^R)^{-1} M^D$ kadarlık bir düzeltme payıyla birlikte bloklar halinde köşegenleştirilebilir.

$$W^T M^{D+M} W \simeq \begin{pmatrix} M_{hafif} & 0 \\ 0 & M_{ağır} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Burada W matrisi,

$$W \simeq \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} M^{D\dagger} (M^R M^{R\dagger})^{-1} M^D & \left[(M^R)^{-1} M^D \right]^\dagger \\ - (M^R)^{-1} M^D & 1 - \frac{1}{2} (M^R)^{-1} M^D M^{D\dagger} (M^{R\dagger})^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

olarak verilir. Hafif M_{hafif} ve ağır $M_{ağır}$ kütleleri aşağıda verilmiştir.

$$M_{hafif} \simeq -M^{D\dagger} (M^R)^{-1} M^D, \quad M_{ağır} \simeq M^R \quad (2.36)$$

See-saw mekanizması M^L 'in çok küçük fakat sıfırdan farklı olduğu durum için incelenebilir. Bu inceleme Type II see-saw olarak adlandırılmaktadır. Bu incelemede farklı olarak M^L kütlesi Higgs tripletinin vev'i tarafından üretilmiştir (Bkz. Bölüm 3.1.1). Tip I see-saw'dan farklı olarak bu modelde SM'e ilave olarak $SU(2)_L$ Higgs tripleti eklenir ve simetri kırılmasından sonra Majorana kütle terimi elde edilir.

2.6 Üç Nötrino Karışımı

Denklemin (2.26)'deki karışım matrisi U, N=3 için 3x3'lük üniter bir matristir. Etkileşme Lagranjienini aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathcal{L}_{I,L}^{(CC)} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \sum_{k=1}^3 \overline{\ell}_{\alpha L} \gamma^\mu U_{\alpha k} \nu_{kL} W_\mu^\dagger + h.c. = -\frac{g}{\sqrt{2}} \overline{\ell}_L \gamma^\mu U n_L W_\mu^\dagger + h.c. \quad (2.37)$$

Burada ℓ_L sol-elli yüklü lepton alanlarından oluşan sütun matrisi, n_L ise sol-elli kütleli nötrino alanlarından oluşan bir sütun matristir. Karışım matrisi $\frac{N(N-1)}{2} = 3$ karışım

açı ve $\frac{N(N-1)}{2} = 3$ fiziksel fazı ile parametrize edilebilir. Genel olarak karışım matrisi,

$$U = U^D D^M \quad (2.38)$$

formunda yazılabilir. Burada U^D , Dirac tipi karışım matrisi olup faz sayısı aşağıda verilmiştir.

$$\frac{(N-1)(N-2)}{2} = 1 \quad (2.39)$$

Majorana faz sayısı ise $3-1 = 2$ dir. Nötrino karışım matrisinin standart formülasyonu aşağıdaki gibidir (Giunti 2007).

$$\begin{aligned} U_{PMNS} &= R_{23} W_{13} R_{12} D(\lambda) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} e^{-i\delta_{13}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} e^{i\delta_{13}} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\lambda_3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\lambda_3} \end{pmatrix} \quad (2.40) \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13}e^{i\lambda_2} & s_{13}e^{-i\delta_{13}}e^{i\lambda_3} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23}e^{i\lambda_2} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}}e^{i\lambda_2} & s_{23}c_{13}e^{i\lambda_3} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23}e^{i\lambda_2} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}}e^{i\lambda_2} & c_{23}c_{13}e^{i\lambda_3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

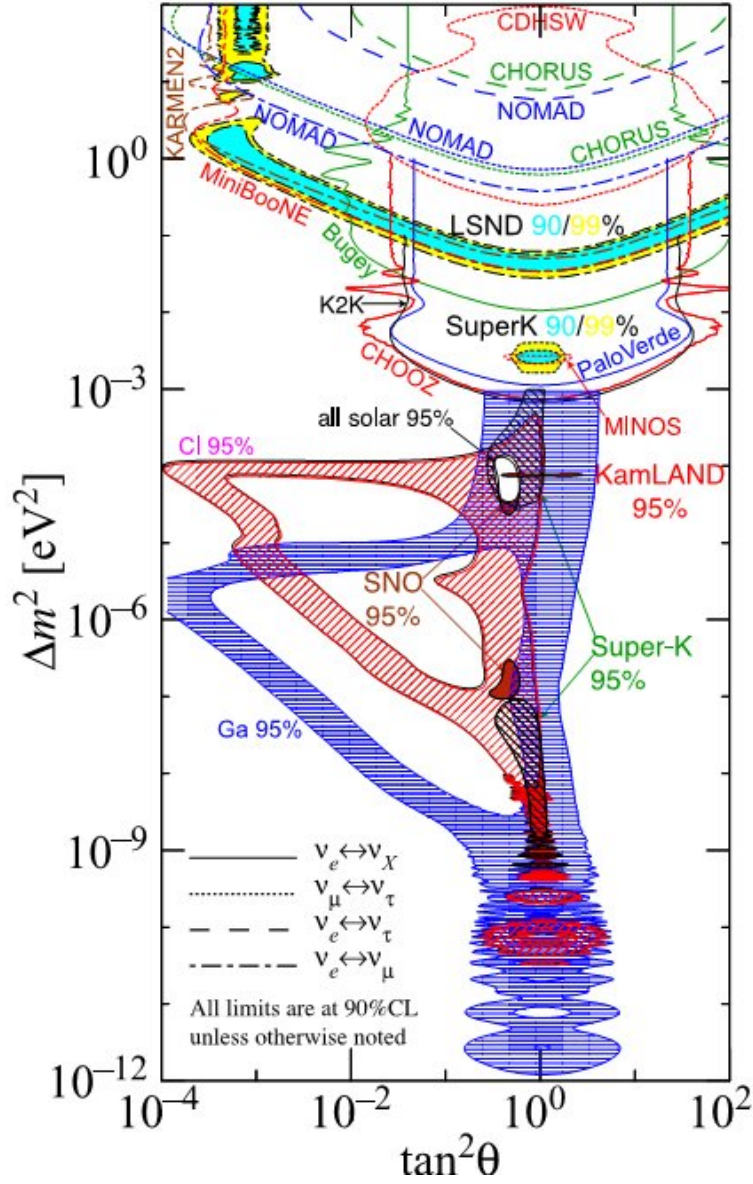
Burada λ_1, λ_2 Majorana fazları, δ_{13} ise Dirac fazıdır. Karışım açısı $\theta_{23} \cong \theta_{ATM}$ 'e, $\theta_{13} \cong \theta_{CHOOZ}$ 'a ve $\theta_{12} \cong \theta_{SUN}$ deneylerine duyarlıdır (Giunti 2007).

Aşağıdaki çizelgede, Particle Data Group tarafından (Nakamura vd. 2010) yayınlanmış olan 3-nötrino karışım matrisine matrisine ait açılar ve nötrino kütle kare farkları verilmiştir.

Çizelge 2.1 Nötrino kütle kare ve karışım açıları verileri

$\sin^2(2\theta_{12}) = 0.87 \pm 0.03$	$\Delta m_{21}^2 = (7.59 \pm 0.20) \times 10^{-5} eV^2$
$\sin^2(2\theta_{23}) > 0.92$	$\Delta m_{32}^2 = (2.43 \pm 0.13) \times 10^{-3} eV^2$
$\sin^2(2\theta_{13}) < 0.15, CL = 90\%$	

Şekil 2.1’de KamLAND, MINOS , Super-K ve LSND gibi deneylerden elde edilen dataların şekli görülmektedir (Guler 2000, Fukuda 2002, Ahmad 2001, Ahn 2006).



Şekil 2.1 Karışım açısı ve kütle kare farklarının gözlenebilir bölgeleri.

2.7 N Nötrino Karışımı

N nötrino karışımını parametrize etmek epey kompleks bir iş olmasına rağmen karışım matrisinin genel formu ve parametre sayılarını hesaplamak kolaydır. Leptonik yüklü akım Lagranjiyeni aşağıdaki formda yazılabilir (Giunti 2007).

$$\mathcal{L}_{l,L}^{(CC)} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \sum_{k=1}^N \overline{\ell}_{\alpha L} \gamma^\mu U_{\alpha k} \nu_{kL} W_\mu^\dagger + h.c. = -\frac{g}{\sqrt{2}} \overline{\ell}_L \gamma^\mu U_{nL} W_\mu^\dagger + h.c. \quad (2.41)$$

Karışım matrisi U , $3 \times N$ 'lik dikdörtgensel bir matris olup üniter değildir. U 'nun parametrizasyonunu yapabilmek için $N = N_A + N_s$ ayrıştırması yapılır. Burada $N_A = 3$ aktif çeşni sayısı ve N_s steril alan sayısını ifade eder. Karışım matrisi $3 + 3N_s$ karışım açısı ve $3 + 3N_s$ fiziksel faz ile ifade edilebilir. Bu fazlardan $2 + N_s$ tanesi Majorana fazı geri kalan $1 + 2N_s$ tanesi ise Dirac fazıdır (Giunti 2007).

Steril nötrino sayısı $N_s = 1$ için, U karışım matrisi 6 açı, 3 Majorana fazı ve 3 Dirac fazıyla parametrize edilir.

2.8 Nötrino Osilasyonu

Nötrino osilasyonu kuantum mekaniksel bir fenomen olup 1950 lerde Pontecorvo tarafından önerilmiştir. Osilasyonlar farklı kütleli nötrinoların girişimi sonucu oluşurlar. Kütleli bu nötrinolar küçük kütle farklarından dolayı koherent olarak üretilip gözlenirler. Nötrino osilasyon olasılığı aşağıdaki gibi ifade edilir (Giunti 2007).

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) \quad (2.42)$$

Bu ifade kaynak-dedektör mesafesinin L , ve nötrino enerjisinin E , deneye bağlı olduğunu ve osilasyon fazını tespit ettiğini göstermektedir. Osilasyon fazı,

$$\Phi_{kj} = -\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \quad (2.43)$$

şeklinde yazılır. Fazın ayrıca kütle kare farkıyla da Δm_{kj}^2 orantılı olduğu görülmektedir. Kütle kare farkı fiziksel bir sabittir. Nötrino osilasyonu her ne kadar nötrino kütle-kare farkları üzerinde deneysel sınırlamalar elde etse de hiçbir zaman mutlak kütleler üzerinde bir sınırlama koymamaktadır. Osilasyon olasılığı karışım matrisinin 4'lü çarpımıyla orantılıdır.

$$U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \quad (2.44)$$

4'lü çarpım karışım matrisinin herhangi bir parametrizasyondan bağımsız olup, Majorana fazlarından bağımsızdır. Osilasyon olasılığından denklem (2.42)'i $k = j$ ve $k \neq j$ için daha uygun bir formda yeniden yazabiliriz.

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \underbrace{\sum_k |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2}_{\text{sabit terim}} + \underbrace{2\Re \sum_{k>j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right)}_{\text{osilasyon terimi}} \quad (2.45)$$

Sabit terimini açabilmek için üniterlik bağıntısı kullanılır.

$$U^\dagger U = 1 \Rightarrow \sum_k U_{\alpha k} U_{\beta k}^* = \delta_{\alpha\beta} \quad (2.46)$$

Yukarıdaki ifadenin karesi alınırsa,

$$\begin{aligned} \sum_k |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 + 2 \sum_{k>j} \Re [U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*] &= \delta_{\alpha\beta} \\ \sum_k |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 &= \delta_{\alpha\beta} - 2 \sum_{k>j} \Re [U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*] \end{aligned} \quad (2.47)$$

elde edilir. Bu bağıntıyı osilasyon olasılığı olan denklem (2.45) de yerinde yazarsak, osilasyon olasılığındaki reel ve imajiner terimleri ayırtmış oluruz.

$$\begin{aligned} P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{k>j} \Re [U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*] \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right) \\ &\quad + 2 \sum_{k>j} \Im [U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*] \sin \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Farklı kanallar arasındaki $\alpha \neq \beta$ osilasyon olasılığı genellikle geçiş olasılığı denirken, aynı kanallar arasındaki $\alpha = \beta$ osilasyon olasılığına ise hayatta kalma olasılığı denir.

2.8.1 Antinötrino durumu

Çeşni nötrinolar leptonik yüklü akım vasıtası ile zayıf etkileşmelerde üretilirler.

$$j_{W,L}^\mu = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{\nu_{\alpha L}} \gamma^\mu \ell_{\alpha L} = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \sum_k U_{\alpha k}^* \overline{\nu_{kL}} \gamma^\mu \ell_{\alpha L} \quad (2.49)$$

Leptonik yüklü akım ifadesi olan (2.49), kütleli nötrinoların yaratma operatörlerini içerir. Antinötrinolar $\overline{\nu_\alpha}$, $\alpha = e, \mu, \tau$, benzer şekilde yüklü zayıf akım etkileşmesinden (2.49) ifadesi'in Hermitik eşleniği vasıtasıyla ya yüklü bir antileptondan ℓ^+ ($\ell_\alpha^+ \rightarrow \overline{\nu_\alpha}$ geçişi) ya da yüklü bir lepton ile beraber ℓ^- ($\ell_\alpha^- \overline{\nu_\alpha}$ yaratılışı) üretilirler.

Majorana nötrinolarında, nötrino ve antinötrino arasında fark olmamasına rağmen negatif helisiteli Majorana nötrinolarına *nötrino* ve pozitif helisiteli Majorana nötrinolarına ise *antinötrino* demek gelenektir.

Antinötrino osilasyon olasılığı yazacak olursak:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \overline{\nu}_\beta}(L, E) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{k>j} \Re[U_{\alpha k} U_{\beta k}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}] \sin^2\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) + 2 \sum_{k>j} \Im[U_{\alpha k} U_{\beta k}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}] \sin\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) \quad (2.50)$$

Nötrino durumundan tek farklı çeşni antinötrinolar ile başladığımızdan karışım matrisi U'nun elemanları kompleks eşleniği alınmış durumdadır. (2.50) ifadesindeki 4'lü U çarpımı yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta}(L, E) = & \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{k>j} \Re \left[U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \right] \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right) \\
& - 2 \sum_{k>j} \Im \left[U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \right] \sin \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right)
\end{aligned} \tag{2.51}$$

elde edilir. Dikkat edilirse imajiner terimin işareti değişmektedir. Bu işaret farkı CP asimetrisine sebep olmaktadır.

$$A_{\alpha\beta}^{CP} = P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} - P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta} \neq 0 \tag{2.52}$$

CP asimetrisi yalnızca farklı çeşni alanları $\alpha \neq \beta$ arasındaki geçişte sıfırdan farklıdır. Aynı çeşniler için ($\alpha = \beta$) geçiş olasılığındaki imajiner terim kaybolur.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

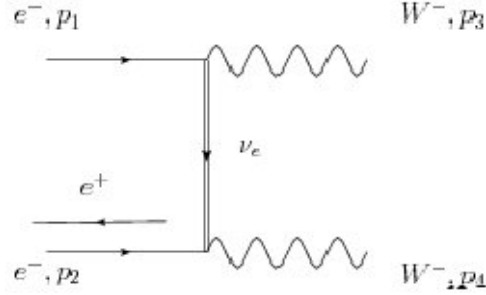
3.1 Spin Toplamları Yöntemi

$e^-e^- \rightarrow W^-W^-$ sürecinin tesir kesiti iki farklı yolla hesaplanacaktır. Yöntemlerden ilki spin toplamları yöntemidir. Bu yöntemde etkileşmeye giren parçacık spinleri üzerinden ortalama ve çıkan parçacık spinlerinin toplamı alınır. Helisite genlikleri yöntemi ise sürecin olası tüm spin konfigürasyonu için ayrı ayrı genlik kareleri hesaplanıp toplam alınır. Spin toplamları yöntemi, helisite genlikleri yöntemiyle hesap yapmaktan nispeten daha kolaydır. Spin toplamları yönteminde karşılaşılan en büyük zorluk uzun gamma matrislerinin izini hesaplamak olmasına rağmen, helisite genlikleri ile hesap yapmanın zorluğu ise spinörlerin açık ifadelerinin yer aldığı matris çarpımlarını yapmaktan geçmektedir.

Ters nötrinosuz çift beta bozunumu geçmiş yıllarda birçok fizikçi tarafından incelenmiştir (Rizzo 1982, Haber 1994, Helde vd. 1994, Belanger vd. 1996, Rodejohann 2010) vd.

Ters nötrinosuz çift beta süreci toplamda üç Feynman diyagramından ibarettir. t ve u kanal diyagramları Majorana nötrinosu alışverişiyle gerçekleşirken, s kanal Higgs tripleti alışverişiyle gerçekleşmektedir. Higgs tripleti üniterliği korumak için gereklidir. Literatürde Higgs tripleti eklemekten de üniterliği sağlamanın yolları olmasına rağmen bu tezde üniterliği sağlamak için Higgs tripleti kullanılacaktır.

3.1.1 Feynman genlik hesapları



Şekil 3.1 t kanal genliği

Genlik hesaplanmasında Feynman yöntemleri kullanılarak genlik hesaplanacaktır. Majorana parçacıkları söz konusu olduğunda Feynman hesapları yapılırken akımlardan birini tersten yazmak gerekir.

$$-iM_t = \left[\epsilon_\mu(4) U_{ei}^* \left(-i \frac{g_w}{\sqrt{2}} \gamma^\mu \gamma_- \right) u(2) \right] \left[\frac{i(q + m_i)}{m_i^2} \right] \left[\epsilon_\nu(3) U_{ei}^* \left(-i \frac{g_w}{\sqrt{2}} \gamma^\nu \gamma_- \right) u(1) \right] \quad (3.1)$$

Yukarıdaki $\epsilon_\mu(4) - u(2)$ akımını tersten yazılmalıdır¹(Bkz. EK 5); aksi halde genlik ifadesi anlamsız olur. Denklem (3.1) yeniden düzenlenirse,

$$-iM_t = - \left[\bar{v}(2) U_{ei}^* \left(-i \frac{g_w}{\sqrt{2}} \gamma^\mu \gamma_+ \right) \epsilon_\mu(4) \right] \left[\frac{i(q + m_i)}{m_i^2} \right] \left[\epsilon_\nu(3) U_{ei}^* \left(-i \frac{g_w}{\sqrt{2}} \gamma^\nu \gamma_- \right) u(1) \right] \quad (3.2)$$

¹ Akım tersten yazıldığında $u(2) \leftrightarrow \epsilon_\mu(4)$ yer değiştirirken γ_- de γ_+ olmaktadır.

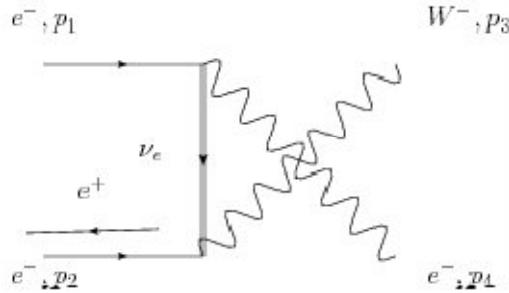
elde edilir. m_i 'ler kütleli Majorana nötrinolarının kütleleri, $q = p_1 - p_3$ momentum farkıdır. $\gamma_{\pm}$ lerden dolayı propagatördeki q terimini sıfıra gider. Kalan terimler toparlanacak olursa,

$$\begin{aligned}
 M_t &= - \underbrace{\left[\left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right)^2 \sum_i \frac{U_{ei}^{*2} m_i}{t - m_i^2} \right]}_{c_t} [\bar{\nu}(2) \not{\epsilon}(4) \gamma_+] [\not{\epsilon}(3) \gamma_- u(1)] \\
 &= -c_t [\bar{\nu}(2) \not{\epsilon}(4) \gamma_+ \not{\epsilon}(3) \gamma_- u(1)] \\
 &= -c_t [\bar{\nu}(2) \gamma_- \not{\epsilon}(4) \not{\epsilon}(3) u(1)]
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde c_t ,

$$c_t \equiv \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right)^2 \sum_i \frac{U_{ei}^{*2} m_i}{t - m_i^2} \tag{3.4}$$

olarak tanımlanmıştır.



Şekil 3.2 u kanal genliği

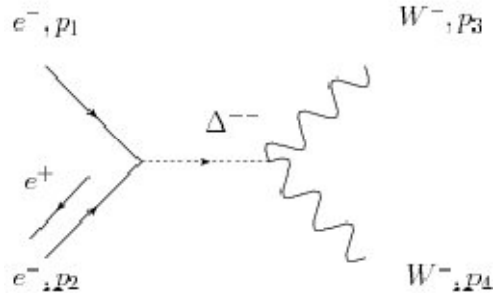
M_u 'yu hesaplamak için denklem (3.3)'de $\not{\epsilon}(4) \leftrightarrow \not{\epsilon}(3)$ değişimi yapmak yeterli olur.

$$\begin{aligned}
M_u &= - \underbrace{\left[\left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right)^2 \sum_i \frac{U_{ei}^{*2} m_i}{u - m_i^2} \right]}_{c_u} [\bar{v}(2) \gamma_- \not{\epsilon}(3) \not{\epsilon}(4) u(1)] \\
&= -c_u [\bar{v}(2) \gamma_- \not{\epsilon}(3) \not{\epsilon}(4) u(1)]
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Yukarıdaki denklemde c_u ,

$$c_u \equiv \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right)^2 \sum_i \frac{U_{ei}^{*2} m_i}{u - m_i^2} \tag{3.6}$$

olarak tanımlanmıştır.



Şekil 3.3 s kanal genliği

Majorana kütesini veren ve Higgs Tripletinin elektron ve W parçacıkları ile olan etkileşmesini tasvir eden Lagranjiyen aşağıda verilmiştir (Rizzo 1982, Rodejohann 2010).

$$ih_{\alpha\beta} \overline{\psi}_\alpha^c \tau_2 \Delta P_L \psi_\beta + h.c. \tag{3.7}$$

Burada $L_\alpha = (\nu_\alpha, \ell_\alpha)^T$ $\alpha = e, \mu, \tau$ lepton dubletini, $h_{\alpha\beta}$ simetrik Yukawa etkileşme matrisini ve Δ Higgs tripletinin 2×2 gösterimidir.

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta^+/\sqrt{2} & \Delta^{++} \\ \Delta^0 & -\Delta^+/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Denklem (3.7) bir adım daha açılırsa Higgs tripletinin etkileşme terimlerini ve kütle terimlerini verir.

$$\mathcal{L}_\Delta = h_{\alpha\beta} \left[\Delta^0 \bar{\nu}_\alpha P_L \nu_\beta^c - \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta^+ (\bar{\ell}_\alpha P_L \nu_\beta^c + \bar{\nu}_\alpha P_L \ell_\beta^c) - \Delta^{++} \bar{\ell}_\alpha P_L \ell_\beta^c \right] + h.c. \quad (3.9)$$

Higgs tripleti simetri kırılmasından sonra $\langle \Delta^0 \rangle = g/2$ vakum beklenen değerini alır.

Burada g , Higgs tripletinin vakum beklenen değeridir. Majorana kütle terimleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\mathcal{L}_\nu = h_{\alpha\beta} \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{L\alpha} \nu_{L\beta}^c + h.c. = \frac{1}{2} m_{\alpha\beta} \bar{\nu}_{L\alpha} \nu_{L\beta}^c + h.c. \quad (3.10)$$

Etkileşme köşe faktörleri ise aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$g_{e^-e^-\Delta} = \left(\frac{m_{\nu_e}}{g} \right) (1 - \gamma^5) \quad (3.11)$$

$$g_{WW\Delta} = g^2 g_{\mu\nu}$$

g üzerindeki ana kısıtlama elektrozayıf ρ parametresinden gelmekte ve kabaca $\rho < 8 GeV$ vermektedir. Model bağımsız bir düşünceyle $m_\Delta < 1 TeV$ varsayılabilir (Rodejohann 2010).

Diyagramları beraber inceleyebilmek için $\sqrt{2} h_{\alpha\beta} v = m_{\alpha\beta}$, $m_{ee} \equiv \sum_i U_{ei}^2 m_i$ tanımları yapılabilir. EK 6'da verilen Feynman genlik kuralları kullanılarak aşağıdaki hesapları yapmak mümkündür.

$$\begin{aligned}
-iM_s &= \left[\epsilon_\mu(4) (g_w^2 g^{\mu\nu}) \epsilon_\nu(3) \right] \left[\frac{i}{q^2 - m_\Delta^2} \right] \left[\bar{v}(2) \left(\frac{U_{ei}^{*2} m_i}{g} (1 - \gamma^5) \right) u(1) \right] \\
&= - \underbrace{\left[\left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right)^2 \sum_i \frac{4U_{ei}^{*2} m_i}{s - m_\Delta^2} \right]}_{c_s} \epsilon_\mu(4) \epsilon_\nu(3) g^{\mu\nu} \left[\bar{v}(2) \gamma_\mu u(1) \right] \\
&= -c_s \epsilon_\mu(4) \epsilon_\nu(3) g^{\mu\nu} \left[\bar{v}(2) \gamma_\mu u(1) \right]
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Yukarıdaki denklemde c_s ,

$$c_s \equiv \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right)^2 \sum_i \frac{4U_{ei}^{*2} m_i}{s - m_\Delta^2} \tag{3.13}$$

olarak tanımlanmıştır. Genlikler hesaplandıktan sonra artık genlik karelerin hesaplanmasına geçilebilir. Toplam genlik üç genliğin toplamına eşittir $M = M_t + M_u + M_s$.

3.1.2 Genlik mutlak kare hesabı

$$\begin{aligned}
|M|^2 &= |M_t + M_u + M_s|^2 \\
&= |M_t + M_u|^2 + 2\Re[(M_t + M_u) M_s^*] + |M_s|^2 \\
&= |M_t|^2 + |M_u|^2 + 2\Re[M_t M_u^*] + 2\Re[(M_t + M_u) M_s^*] + |M_s|^2
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$|M_t|^2$ Hesabı:

$$\begin{aligned}
|M_t|^2 &= |c_t|^2 \left[\bar{v}(2) \gamma_- \not{\epsilon}(4) \not{\epsilon}(3) u(1) \right] \left[\bar{v}(2) \gamma_- \not{\epsilon}(4) \not{\epsilon}(3) u(1) \right]^\dagger \\
|M_t|^2 &= |c_t|^2 \left[\bar{v}(2) \gamma_- \not{\epsilon}(4) \not{\epsilon}(3) u(1) u^\dagger(1) \not{\epsilon}^*(3) \not{\epsilon}^*(4) \gamma_- \gamma^{0\dagger} v(2) \right] \\
\sum_{s_1, s_2} |M_t|^2 &= |c_t|^2 \left[\overline{v^{(s_2)}}(2) \gamma_- \not{\epsilon}(4) \not{\epsilon}(3) \underbrace{\sum_{s_1, s_2} u^{(s_1)}(1) \overline{u^{(s_1)}}(1)}_{\not{p}_1 + m_e} \not{\epsilon}^*(3) \not{\epsilon}^*(4) \gamma_+ v^{(s_2)}(2) \right] \\
\sum_{s_1, s_2} |M_t|^2 &= |c_t|^2 \left[\overline{v^{(s_2)}}(2) \gamma_- \not{\epsilon}(4) \not{\epsilon}(3) \underbrace{\not{p}_1 \not{\epsilon}^*(3) \not{\epsilon}^*(4)}_{\not{Q}} v^{(s_2)}(2) \right]
\end{aligned}
\tag{3.15}$$

Yukarıdaki ifade matris elemanları cinsinden yazılıp yerleri değiştirilirse ize dönüşür.

$$\begin{aligned}
\sum_{s_1, s_2} |M_t|^2 &= |c_t|^2 \sum_{s_2} \left[\overline{v^{(s_2)}}(2) Q v^{(s_2)}(2) \right] \\
&= |c_t|^2 \sum_{i, j} Q_{ij} \sum_{s_2} v^{(s_2)}(2)_j \overline{v^{(s_2)}}(2)_i \\
&= |c_t|^2 \text{Tr} \left[Q (\not{p}_2 + m_2) \right], \quad m_2 = m_e
\end{aligned}
\tag{3.16}$$

Sonuç olarak $|M_t|^2$ aşağıdaki biçimde verilir.

$$|M_t|^2 = |c_t|^2 \epsilon_\mu(4) \epsilon_{\mu'}^*(4) \epsilon_\nu(3) \epsilon_{\nu'}^*(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr} \left[\gamma_- \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^{\nu'} \gamma^{\mu'} (\gamma^\sigma - m_e) \right] \tag{3.17}$$

W^- parçacıkları üzerinden spin toplamı alınırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_s \epsilon_\mu(4) \epsilon_{\mu'}^*(4) &= -g_{\mu\mu'} + \frac{p_\mu(4) p_{\mu'}(4)}{m_W^2} \\
\sum_s \epsilon_\nu(3) \epsilon_{\nu'}^*(3) &= -g_{\nu\nu'} + \frac{p_\nu(3) p_{\nu'}(3)}{m_W^2}
\end{aligned}
\tag{3.18}$$

ve yukarıdaki ifadeler denklem (3.17) de yerine yazılırsa toplam dört terimden oluşan bir çarpım elde edilir. Bunlar,

$$\begin{aligned}
\left(-g_{\mu\mu'} + \frac{p_\mu(4)p_{\mu'}(4)}{m_W^2}\right)\left(-g_{\nu\nu'} + \frac{p_\nu(3)p_{\nu'}(3)}{m_W^2}\right) &= \underbrace{g_{\mu\mu'}g_{\nu\nu'}}_I \\
&\quad - \underbrace{g_{\mu\mu'}\frac{p_\nu(3)p_{\nu'}(3)}{m_W^2}}_{II} \\
&\quad - \underbrace{g_{\nu\nu'}\frac{p_\mu(4)p_{\mu'}(4)}{m_W^2}}_{III} \\
&\quad + \underbrace{\frac{p_\mu(4)p_{\mu'}(4)}{m_W^2}\frac{p_\nu(3)p_{\nu'}(3)}{m_W^2}}_{IV}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

şeklinde özetlenebilir. Bunların tek tek çözülüp toplanması gerekmektedir.

$$\begin{aligned}
I &= g_{\mu\mu'}g_{\nu\nu'}p_{1\kappa}p_{2\sigma}Tr\left[\gamma_- \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^{\nu'} \gamma^{\mu'} \gamma^\sigma\right] \\
&= p_{1\kappa}p_{2\sigma}Tr\left[\gamma_- \gamma^\mu \underbrace{\gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma_\nu}_{-2\gamma^\kappa} \gamma_\mu \gamma^\sigma\right] \\
&= -2p_{1\kappa}p_{2\sigma}Tr\left[\gamma_- \gamma^\mu \underbrace{\gamma^\kappa \gamma_\mu}_{-2\gamma^\kappa} \gamma^\sigma\right] \\
&= 4p_{1\kappa}p_{2\sigma} \underbrace{Tr\left[\gamma_- \gamma^\kappa \gamma^\sigma\right]}_{2g^{\kappa\sigma}} \\
&= 8(p_1 \cdot p_2) \\
&= 4s
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Yukarıdaki işlemlerde son adım hesaplanırken,

$$\begin{aligned}
Tr[\gamma_- \gamma^\kappa \gamma^\sigma] &= \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{Tr[\gamma^\kappa \gamma^\sigma]}_{4g^{\kappa\sigma}} - \underbrace{Tr[\gamma^5 \gamma^\kappa \gamma^\sigma]}_0 \right\} \\
&= 2g^{\kappa\sigma}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

özdeşliği kullanıldı. Ayrıca tüm sonuçlar Mandelstam değişkenleri cinsinden yazıldı (Bkz. EK 4).

$$\begin{aligned}
II &= -\frac{1}{m_W^2} g_{\mu\mu'} p_\nu(3) p_{\nu'}(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} Tr[\gamma_- \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^{\nu'} \gamma^{\mu'} \gamma^\sigma] \\
&= -\frac{1}{m_W^2} p_\nu(3) p_{\nu'}(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} Tr \left[\gamma_- \underbrace{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^{\nu'} \gamma_\mu}_{-2\gamma^{\nu'} \gamma^\kappa \gamma^\nu} \gamma^\sigma \right] \\
&= \frac{2}{m_W^2} p_\nu(3) p_{\nu'}(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} Tr[\gamma_- \gamma^{\nu'} \gamma^\kappa \gamma^\nu \gamma^\sigma] \\
&= \frac{1}{m_W^2} p_\nu(3) p_{\nu'}(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} Tr[(1 - \gamma^5) \gamma^{\nu'} \gamma^\kappa \gamma^\nu \gamma^\sigma] \\
&= \frac{4}{m_W^2} p_\nu(3) p_{\nu'}(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \left[g^{\nu'\kappa} g^{\nu\sigma} - g^{\nu\nu'} g^{\kappa\sigma} + g^{\nu'\sigma} g^{\kappa\nu} - i \epsilon_{\underset{0}{\nu'\kappa\nu\sigma}} \right] \\
&= \frac{4}{m_W^2} [(p_3 \cdot p_1)(p_3 \cdot p_2) - p_3^2 (p_1 \cdot p_2) + (p_3 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_1)] \\
&= \frac{4}{m_W^2} [2(p_3 \cdot p_1)(p_3 \cdot p_2) - p_3^2 (p_1 \cdot p_2)], \quad p_3^2 = m_W^2 \\
&= \frac{4}{m_W^2} \left[2 \left(\frac{m_W^2 - t}{2} \right) \left(\frac{m_W^2 - u}{2} \right) - m_W^2 \left(\frac{s}{2} \right) \right] \\
&= \frac{2}{m_W^2} [(m_W^2 - t)(m_W^2 - u) - m_W^2 s] \\
&= 2 \left[\frac{1}{m_W^2} (m_W^2 - t)(m_W^2 - u) - s \right]
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Yukarıdaki işlemlerde $\epsilon^{\nu'\kappa\nu\sigma}$ 'nün sıfır alınmasının nedeni $\nu\nu'$ indislerine göre antisimetrik ve $p_\nu(3) p_{\nu'}(3)$ lerin $\nu\nu'$ indislerine göre simetrik olmasıdır.

$$\begin{aligned}
III &= -\frac{1}{m_W^2} g_{\nu\nu'} p_\mu(4) p_{\mu'}(4) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr} \left[\gamma_- \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^{\nu'} \gamma^{\mu'} \gamma^\sigma \right] \\
&= -\frac{1}{m_W^2} p_\mu(4) p_{\mu'}(4) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr} \left[\gamma_- \gamma^\mu \underbrace{\gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma_\nu}_{-2\gamma^\kappa} \gamma^{\mu'} \gamma^\sigma \right] \\
&= \frac{2}{m_W^2} p_\mu(4) p_{\mu'}(4) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr} \left[\gamma_- \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma^{\mu'} \gamma^\sigma \right] \\
&= \frac{1}{m_W^2} p_\mu(4) p_{\mu'}(4) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr} \left[(1 - \gamma^5) \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma^{\mu'} \gamma^\sigma \right] \\
&= \frac{4}{m_W^2} p_\mu(4) p_{\mu'}(4) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \left[g^{\mu\kappa} g^{\mu'\sigma} - g^{\mu\mu'} g^{\kappa\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\kappa\mu'} - i \epsilon^{\mu\kappa\mu'\sigma}_0 \right] \\
&= \frac{4}{m_W^2} \left[(p_4 \cdot p_1)(p_4 \cdot p_2) - p_4^2 (p_1 \cdot p_2) + (p_4 \cdot p_2)(p_4 \cdot p_1) \right], \quad p_4^2 = m_W^2 \\
&= \frac{4}{m_W^2} \left[2 \left(\frac{m_W^2 - u}{2} \right) \left(\frac{m_W^2 - t}{2} \right) - m_W^2 \left(\frac{s}{2} \right) \right] \\
&= 2 \left[\frac{1}{m_W^2} (m_W^2 - t)(m_W^2 - u) - s \right] \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Benzer şekilde yukarıdaki işlemler yapılırken $\epsilon^{\mu\kappa\mu'\sigma}$ terimini sıfır olmasının sebebi $\mu\mu'$ indislerine göre antisimetrik iken $p_\mu(4)p_{\mu'}(4)$ katsayısının $\mu\mu'$ indislerine göre simetrik olmasıdır.

$$\begin{aligned}
IV &= \frac{1}{m_W^4} p_\mu(4) p_{\mu'}(4) p_\nu(3) p_{\nu'}(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr} \left[\gamma_- \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^{\nu'} \gamma^{\mu'} \gamma^\sigma \right] \\
&= \frac{1}{2m_W^4} p_\mu(4) p_{\mu'}(4) p_\nu(3) p_{\nu'}(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr} \left[(1 - \gamma^5) \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^{\nu'} \gamma^{\mu'} \gamma^\sigma \right] \\
&= \frac{1}{2m_W^4} p_\mu(4) p_{\mu'}(4) p_\nu(3) p_{\nu'}(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \\
&\quad \left\{ \underbrace{\text{Tr} \left[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^{\nu'} \gamma^{\mu'} \gamma^\sigma \right]}_a - \underbrace{\text{Tr} \left[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^{\nu'} \gamma^{\mu'} \gamma^\sigma \right]}_b \right\} \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadedeki iz ifadesi hesapları kolaylaştırmak için ikiye ayrıştırıldı. İlki için hesap yapılacak olursa,

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{2m_W^4} p_\mu(4) p_{\mu'}(4) p_\nu(3) p_{\nu'}(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^{\nu'} \gamma^{\mu'} \gamma^\sigma \right] \\
&= \frac{2}{m_W^4} p_\mu(4) p_{\mu'}(4) p_\nu(3) p_{\nu'}(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \\
&\quad \left\{ g^{\mu\nu} \left(g^{\kappa\nu'} g^{\mu'\sigma} - g^{\kappa\mu'} g^{\nu'\sigma} + g^{\kappa\sigma} g^{\nu'\mu'} \right) \right. \\
&\quad - g^{\mu\kappa} \left(g^{\nu\nu'} g^{\mu'\sigma} - g^{\nu\mu'} g^{\nu'\sigma} + g^{\nu\sigma} g^{\nu'\mu'} \right) \\
&\quad + g^{\mu\nu'} \left(g^{\nu\kappa} g^{\mu'\sigma} - g^{\nu\mu'} g^{\kappa\sigma} + g^{\nu\sigma} g^{\kappa\mu'} \right) \\
&\quad - g^{\mu\mu'} \left(g^{\nu\kappa} g^{\nu'\sigma} - g^{\nu\nu'} g^{\kappa\sigma} + g^{\nu\sigma} g^{\kappa\nu'} \right) \\
&\quad \left. + g^{\mu\sigma} \left(g^{\nu\kappa} g^{\nu'\mu'} - g^{\nu\nu'} g^{\kappa\mu'} + g^{\nu\mu'} g^{\kappa\nu'} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\begin{aligned}
a &= \frac{2}{m_W^4} \left[(p_3 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_1)(p_4 \cdot p_2) - (p_3 \cdot p_4)(p_4 \cdot p_1)(p_3 \cdot p_2) + (p_3 \cdot p_4)^2 (p_1 \cdot p_2) \right. \\
&\quad - (p_4 \cdot p_1) p_3^2 (p_4 \cdot p_2) + (p_4 \cdot p_1)(p_4 \cdot p_3)(p_3 \cdot p_2) - (p_4 \cdot p_1)(p_3 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) \\
&\quad + (p_3 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_1)(p_4 \cdot p_2) - (p_3 \cdot p_4)^2 (p_1 \cdot p_2) + (p_3 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)(p_4 \cdot p_1) \\
&\quad - p_4^2 (p_3 \cdot p_1)(p_3 \cdot p_2) + p_4^2 p_3^2 (p_1 \cdot p_2) - p_4^2 (p_3 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_1) \\
&\quad \left. + (p_4 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_1)(p_3 \cdot p_4) - (p_4 \cdot p_2) p_3^2 (p_4 \cdot p_1) + (p_4 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_1) \right] \\
&= \frac{2}{m_W^4} \left[4(p_3 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_1)^2 - 4p_3^2 (p_3 \cdot p_1)(p_3 \cdot p_2) + p_3^4 (p_1 \cdot p_2) \right] \\
&= \frac{2}{m_W^4} \left[4 \left(\frac{s - 2m_W^2}{2} \right) \left(\frac{m_W^2 - t}{2} \right)^2 - 4m_W^2 \left(\frac{m_W^2 - t}{2} \right) \left(\frac{m_W^2 - u}{2} \right) + m_W^4 \left(\frac{s}{2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{m_W^4} (s - 2m_W^2) (m_W^2 - t)^2 - \frac{2}{m_W^2} (m_W^2 - t) (m_W^2 - u) + s
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
b &= \frac{1}{2m_W^4} p_\mu(4) p_{\mu'}(4) p_\nu(3) p_{\nu'}(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^{\nu'} \gamma^{\mu'} \gamma^\sigma] \\
&= \frac{2i}{m_W^4} p_\mu(4) p_{\mu'}(4) p_\nu(3) p_{\nu'}(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \\
&\quad \left[g^{\mu\nu} \epsilon^{\kappa\nu'\mu'\sigma} - g^{\mu\kappa} \epsilon^{\nu\nu'\mu'\sigma} + g^{\nu\kappa} \epsilon^{\mu\nu'\mu'\sigma} + g^{\mu'\sigma} \epsilon^{\mu\nu\kappa\nu'} - g^{\nu'\sigma} \epsilon^{\mu\nu\kappa\mu'} + g^{\nu'\mu'} \epsilon^{\mu\nu\kappa\sigma} \right] \\
&= \frac{2i}{m_W^4} \left[(p_3 \cdot p_4) p_{\nu'}(3) p_{\mu'}(4) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \epsilon^{\kappa\nu'\mu'\sigma} \right. \\
&\quad \underbrace{- (p_4 \cdot p_1) p_\nu(3) p_{\nu'}(3) p_{\mu'}(4) p_{2\sigma} \epsilon^{\nu\nu'\mu'\sigma}}_0 \\
&\quad \underbrace{+ (p_3 \cdot p_1) p_{\nu'}(3) p_\mu(4) p_{\mu'}(4) p_{2\sigma} \epsilon^{\mu\nu'\mu'\sigma}}_0 \\
&\quad \underbrace{+ (p_4 \cdot p_2) p_\nu(3) p_{\nu'}(3) p_\mu(4) p_{1\kappa} \epsilon^{\mu\nu\kappa\nu'}}_0 \\
&\quad \underbrace{- (p_3 \cdot p_2) p_\nu(3) p_\mu(4) p_{\mu'}(4) p_{1\kappa} \epsilon^{\mu\nu\kappa\mu'}}_0 \\
&\quad \left. + (p_3 \cdot p_4) p_\nu(3) p_\mu(4) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \epsilon^{\mu\nu\kappa\sigma} \right] \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki denklemde indis antisimetrizasyonundan dolayı çoğu terim sıfıra gider. Geriye birinci ve altıncı terimler kalır. Birinci terim, altıncı terimin zıttı olduğundan,

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\kappa\nu'\mu'\sigma} &= -\epsilon^{\kappa\mu'\nu'\sigma} \\
&= -\epsilon^{\mu'\nu'\kappa\sigma} \tag{3.28}
\end{aligned}$$

sonuçta $b = 0$ dır. $IV = a - b$ olduğu hatırlanırsa,

$$IV = \frac{1}{m_W^4} (s - 2m_W^2) (m_W^2 - t)^2 - \frac{2}{m_W^2} (m_W^2 - t) (m_W^2 - u) + s \tag{3.29}$$

elde edilmiş olur. $|M_t|^2$ için gerekli tüm ara işlemler yapıldığından sonuç yazılabilir.

$$\begin{aligned}
|M_t|^2 &= I + II + III + IV \\
&= |c_t|^2 \left[8(p_1 \cdot p_2) + \frac{16}{m_W^2} (p_3 \cdot p_1)(p_3 \cdot p_2) - 8(p_1 \cdot p_2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{8}{m_W^4} (p_3 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_1)^2 - \frac{8}{m_W^2} (p_3 \cdot p_1)(p_3 \cdot p_2) + 2(p_1 \cdot p_2) \right] \\
&= |c_t|^2 \left[2(p_1 \cdot p_2) + \frac{8}{m_W^2} (p_3 \cdot p_1)(p_3 \cdot p_2) + \frac{8}{m_W^4} (p_3 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_1)^2 \right] \quad (3.30) \\
&= |c_t|^2 \left[2\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{8}{m_W^2} \left(\frac{m_W^2 - t}{2}\right) \left(\frac{m_W^2 - u}{2}\right) + \frac{8}{m_W^4} \left(\frac{s - 2m_W^2}{2}\right) \left(\frac{m_W^2 - t}{2}\right)^2 \right] \\
&= |c_t|^2 \left[s + \frac{2}{m_W^2} (m_W^2 - t)(m_W^2 - u) + \frac{1}{m_W^4} (s - 2m_W^2)(m_W^2 - t)^2 \right]
\end{aligned}$$

$|M_u|^2$ Hesabı:

$|M_u|^2$ hesabı için tüm işlemleri baştan yapmaya gerek yoktur. $|M_t|^2$ için yapılmış olan hesap sonucunda denklem (3.30)'de $p_3 \leftrightarrow p_4$ değişimi yapmak yeterli olmaktadır.

$$\begin{aligned}
|M_u|^2 &= |c_u|^2 \left[2(p_1 \cdot p_2) + \frac{8}{m_W^2} (p_4 \cdot p_1)(p_4 \cdot p_2) + \frac{8}{m_W^4} (p_3 \cdot p_4)(p_4 \cdot p_1)^2 \right] \\
&= |c_u|^2 \left[2\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{8}{m_W^2} \left(\frac{m_W^2 - u}{2}\right) \left(\frac{m_W^2 - t}{2}\right) + \frac{8}{m_W^4} \left(\frac{s - 2m_W^2}{2}\right) \left(\frac{m_W^2 - u}{2}\right)^2 \right] \quad (3.31) \\
&= |c_u|^2 \left[s + \frac{2}{m_W^2} (m_W^2 - t)(m_W^2 - u) + \frac{1}{m_W^4} (s - 2m_W^2)(m_W^2 - u)^2 \right]
\end{aligned}$$

$|M_s|^2$ Hesabı:

$$\begin{aligned}
|M_s|^2 &= |c_s|^2 \epsilon_\mu(4) \epsilon_{\mu'}(4) \epsilon_\nu(3) \epsilon_{\nu'}(3) g^{\mu\nu} g^{\mu'\nu'} [\bar{v}(2) \gamma_- u(1)] [u(1)^\dagger \gamma_- \gamma^0 v(2)] \\
&= |c_s|^2 \left(-g_{\mu\mu'} + \frac{p_\mu(4) p_{\mu'}(4)}{m_W^2} \right) \left(-g_{\nu\nu'} + \frac{p_\nu(3) p_{\nu'}(3)}{m_W^2} \right) g^{\mu\nu} g^{\mu'\nu'} \\
&\quad \left[\bar{v}(2) \gamma_- \underbrace{u(1) \bar{u}(1)}_{\not{p}_1 + m_1} \gamma_+ v(2) \right] \\
&= |c_s|^2 \left[\underbrace{g_{\mu\mu'} g_{\nu\nu'}}_I - \underbrace{g_{\mu\mu'} \frac{p_\nu(3) p_{\nu'}(3)}{m_W^2}}_{II} - \underbrace{g_{\nu\nu'} \frac{p_\mu(4) p_{\mu'}(4)}{m_W^2}}_{III} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\frac{p_\mu(4) p_{\mu'}(4)}{m_W^2} \frac{p_\nu(3) p_{\nu'}(3)}{m_W^2}}_{IV} \right] \\
&\quad g^{\mu\nu} g^{\mu'\nu'} p_{1\kappa} p_{2\sigma} \underbrace{Tr[\gamma_- \gamma^\kappa (\gamma^\sigma - m_2)]}_{2g^{\kappa\sigma}} \\
&= |c_s|^2 2(p_1 \cdot p_2) [I + II + III + IV]
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$|M_s|^2$ 'nin hesaplanabilmesi için I, II, III ve IV' ün hesaplanması gerekir. Sırasıyla bu işlemler yapılır.

$$\begin{aligned}
I &= g_{\mu\mu'} g_{\nu\nu'} g^{\mu\nu} g^{\mu'\nu'} \\
&= \underbrace{g_{\mu\mu'} g^{\mu'\nu'}}_{\delta_\mu^{\nu'}} \underbrace{g_{\nu\nu'} g^{\mu\nu}}_{\delta_{\nu'}^\mu} \\
&= \delta_\mu^{\nu'} \delta_{\nu'}^\mu \\
&= \delta_\mu^\mu \\
&= 4
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
II &= -g_{\mu\mu'} \frac{p_\nu(3) p_{\nu'}(3)}{m_W^2} g^{\mu\nu} g^{\mu'\nu'} \\
&= -\frac{1}{m_W^2} p_\nu(3) p_{\nu'}(3) g^{\mu\nu} \underbrace{g_{\mu\mu'} g^{\mu'\nu'}}_{\delta_\mu^{\nu'}} \\
&= -\frac{1}{m_W^2} p_\nu(3) p_{\nu'}(3) g^{\nu\nu} \\
&= -\frac{1}{m_W^2} p_3^2 \\
&= -1
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
III &= -\frac{p_\mu(4) p_{\mu'}(4)}{m_W^2} g^{\mu\nu} \underbrace{g^{\mu'\nu'} g_{\nu\nu'}}_{\delta_{\nu'}^{\mu'}} \\
&= -\frac{1}{m_W^2} p_\mu(4) p_{\mu'}(4) g^{\mu\mu'} \\
&= -\frac{1}{m_W^2} p_4^2 \\
&= -1
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
IV &= \frac{1}{m_W^4} p_\mu(4) p_{\mu'}(4) p_\nu(3) p_{\nu'}(3) g^{\mu\nu} g^{\mu'\nu'} \\
&= \frac{1}{m_W^4} (p_3 \cdot p_4)^2 \\
&= \frac{1}{m_W^4} \left(\frac{s - 2m_W^2}{2} \right)^2 \\
&= \frac{1}{4m_W^4} (s - 2m_W^2)^2
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Yapılan işlemlerden sonra aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\begin{aligned}
|M_s|^2 &= |c_s|^2 s [I + II + III + IV] \\
&= |c_s|^2 s \left[2 + \frac{1}{4m_W^4} (s - 2m_W^2)^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$2\Re[M_t M_u^\dagger]$ **Hesabı:**

$$\begin{aligned}
M_t M_u^\dagger &= c_1 c_2^* \left[\bar{v}(2) \not{\epsilon}(4) \not{\epsilon}(3) \gamma_- u(1) \right] \left[\bar{v}(2) \not{\epsilon}(3) \not{\epsilon}(4) \gamma_- u(1) \right]^\dagger \\
&= c_1 c_2^* \left[\bar{v}(2) \not{\epsilon}(4) \not{\epsilon}(3) \gamma_- \underbrace{u(1) \bar{u}(1)}_{\not{p}_1 + m_1} \gamma_+ \not{\epsilon}^*(4) \not{\epsilon}^*(3) v(2) \right] \\
&= c_1 c_2^* \epsilon_\mu(4) \epsilon_{\mu'}^*(4) \epsilon_\nu(3) \epsilon_{\nu'}^*(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr} \left[\gamma_- \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^{\mu'} \gamma^{\nu'} (\gamma^\sigma - m_2) \right] \quad (3.38) \\
&= c_1 c_2^* \left[-g_{\mu\mu'} + \frac{p_\mu(4) p_{\mu'}(4)}{m_W^2} \right] \left[-g_{\nu\nu'} + \frac{p_\nu(3) p_{\nu'}(3)}{m_W^2} \right] p_{1\kappa} p_{2\sigma} \\
&\quad \text{Tr} \left[\gamma_- \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^{\mu'} \gamma^{\nu'} \gamma^\sigma \right]
\end{aligned}$$

Yukarıdaki işlem dört terimin toplamı olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned}
I &= g_{\mu\mu'} g_{\nu\nu'} p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr} \left[\gamma_- \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^{\mu'} \gamma^{\nu'} \gamma^\sigma \right] \\
&= p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr} \left[\gamma_- \underbrace{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma_\mu}_{4g^{\nu\kappa}} \gamma_\nu \gamma^\sigma \right] \\
&= 4 p_{1\kappa} p_{2\sigma} \underbrace{\text{Tr} \left[\gamma_- \gamma^\kappa \gamma^\sigma \right]}_{2g^{\kappa\sigma}} \quad (3.39) \\
&= 8(p_1 \cdot p_2) \\
&= 4s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
II &= -\frac{g_{\nu\nu'}}{m_W^2} p_\mu(4) p_{\mu'}(4) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr} \left[\gamma_- \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^{\mu'} \gamma^{\nu'} \gamma^\sigma \right] \\
&= -\frac{1}{m_W^2} p_\mu(4) p_{\mu'}(4) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr} \left[\gamma_- \gamma^\mu \underbrace{\gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^{\mu'} \gamma_\nu}_{4g^{\kappa\mu'}} \gamma^\sigma \right] \\
&= -\frac{4}{m_W^2} (p_4 \cdot p_1) p_\mu(4) p_{2\sigma} \underbrace{\text{Tr} [\gamma_- \gamma^\mu \gamma^\sigma]}_{2g^{\mu\sigma}} \\
&= -\frac{8}{m_W^2} (p_4 \cdot p_1) (p_4 \cdot p_2) \\
&= -\frac{8}{m_W^2} \left(\frac{m_W^2 - u}{2} \right) \left(\frac{m_W^2 - t}{2} \right) \\
&= -\frac{2}{m_W^2} (m_W^2 - u) (m_W^2 - t)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
III &= -g_{\mu\mu'} \frac{p_\nu(3) p_{\nu'}(3)}{m_W^2} p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr} \left[\gamma_- \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^{\mu'} \gamma^{\nu'} \gamma^\sigma \right] \\
&= -\frac{1}{m_W^2} p_\nu(3) p_{\nu'}(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr} \left[\gamma_- \gamma^\mu \underbrace{\gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma_\mu}_{4g^{\nu\kappa}} \gamma^{\nu'} \gamma^\sigma \right] \\
&= -\frac{4}{m_W^2} (p_3 \cdot p_1) p_{\nu'}(3) p_{2\sigma} \underbrace{\text{Tr} [\gamma_- \gamma^{\nu'} \gamma^\sigma]}_{2g^{\nu'\sigma}} \\
&= -\frac{8}{m_W^2} (p_3 \cdot p_1) (p_3 \cdot p_2) \\
&= -\frac{8}{m_W^2} \left(\frac{m_W^2 - t}{2} \right) \left(\frac{m_W^2 - u}{2} \right) \\
&= -\frac{2}{m_W^2} (m_W^2 - t) (m_W^2 - u)
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
IV &= \frac{p_\mu(4)p_{\mu'}(4)}{m_W^2} \frac{p_\nu(3)p_{\nu'}(3)}{m_W^2} p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr}[\gamma_- \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^{\mu'} \gamma^{\nu'} \gamma^\sigma] \\
&= \frac{1}{m_W^4} p_\mu(4)p_{\mu'}(4)p_\nu(3)p_{\nu'}(3)p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr}[\gamma_- \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^{\mu'} \gamma^{\nu'} \gamma^\sigma] \\
&= \frac{1}{2m_W^4} p_\mu(4)p_{\mu'}(4)p_\nu(3)p_{\nu'}(3)p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr}[(1-\gamma_5) \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^{\mu'} \gamma^{\nu'} \gamma^\sigma]
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Yukarıdaki denklemde görüldüğü üzere iz alma işlemini hesap kolaylığı sağlaması açısından iki ayrı adıma bölebiliriz.

$$IV = \frac{1}{2m_W^4} (a - b) \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}
a &= p_\mu(4)p_{\mu'}(4)p_\nu(3)p_{\nu'}(3)p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^{\mu'} \gamma^{\nu'} \gamma^\sigma] \\
&= 4p_\mu(4)p_{\mu'}(4)p_\nu(3)p_{\nu'}(3)p_{1\kappa} p_{2\sigma} \left[g^{\mu\nu} (g^{\kappa\mu'} g^{\nu'\sigma} - g^{\kappa\nu'} g^{\mu'\sigma} + g^{\kappa\sigma} g^{\mu'\nu'}) \right. \\
&\quad - g^{\mu\kappa} (g^{\nu\mu'} g^{\nu'\sigma} - g^{\nu\nu'} g^{\mu'\sigma} + g^{\nu\sigma} g^{\mu'\nu'}) \\
&\quad + g^{\mu\mu'} (g^{\nu\kappa} g^{\nu'\sigma} - g^{\nu\nu'} g^{\kappa\sigma} + g^{\nu\sigma} g^{\kappa\nu'}) \\
&\quad - g^{\mu\nu'} (g^{\nu\kappa} g^{\mu'\sigma} - g^{\nu\mu'} g^{\kappa\sigma} + g^{\nu\sigma} g^{\kappa\mu'}) \\
&\quad \left. + g^{\mu\sigma} (g^{\nu\kappa} g^{\mu'\nu'} - g^{\nu\mu'} g^{\kappa\nu'} + g^{\nu\nu'} g^{\kappa\mu'}) \right] \\
&= 4 \left[(p_3 \cdot p_4)(p_4 \cdot p_1)(p_3 \cdot p_2) - (p_3 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_1)(p_4 \cdot p_2) + (p_3 \cdot p_4)^2 (p_1 \cdot p_2) \right. \\
&\quad - (p_4 \cdot p_1)(p_3 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2) + (p_4 \cdot p_1)p_3^2 (p_4 \cdot p_2) - (p_4 \cdot p_1)(p_3 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) \\
&\quad + p_4^2 (p_3 \cdot p_1)(p_3 \cdot p_2) - p_4^2 p_3^2 (p_1 \cdot p_2) + p_4^2 (p_3 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_1) \\
&\quad - (p_3 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_1)(p_4 \cdot p_2) + (p_3 \cdot p_4)^2 (p_1 \cdot p_2) - (p_3 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)(p_4 \cdot p_1) \\
&\quad \left. + (p_4 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_1)(p_3 \cdot p_4) - (p_4 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_1) + (p_4 \cdot p_2)p_3^2 (p_4 \cdot p_1) \right]
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Yukarıdaki denklem bir adım daha sadeleştirilirse istenilen sonuca ulaşılmış olur.

$$\begin{aligned}
a &= 4 \left[-2(p_3 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)^2 - 2(p_3 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_1)^2 + 2(p_3 \cdot p_4)^2(p_1 \cdot p_2) \right. \\
&\quad \left. + 4p_3^2(p_4 \cdot p_1)(p_4 \cdot p_2) - p_4^2 p_3^2(p_1 \cdot p_2) \right] \\
&= -8 \left(\frac{s - 2m_W^2}{2} \right) \left[\left(\frac{m_W^2 - u}{2} \right) + \left(\frac{m_W^2 - t}{2} \right) \right] + 8 \left(\frac{s - 2m_W^2}{2} \right)^2 \left(\frac{s}{2} \right) \\
&\quad + 16m_W^2 \left(\frac{m_W^2 - u}{2} \right) \left(\frac{m_W^2 - t}{2} \right) - 4m_W^4 \left(\frac{s}{2} \right) \\
&= -(s - 2m_W^2) \left[(m_W^2 - u) + (m_W^2 - t) \right] + (s - 2m_W^2)^2 s \\
&\quad + 4m_W^2 (m_W^2 - u)(m_W^2 - t) - 2m_W^4 s
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
b &= p_\mu(4) p_{\mu'}(4) p_\nu(3) p_{\nu'}(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr} \left[\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^{\mu'} \gamma^{\nu'} \gamma^\sigma \right] \\
&= 4i p_\mu(4) p_{\mu'}(4) p_\nu(3) p_{\nu'}(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \\
&\quad \left[g^{\mu\nu} \epsilon^{\kappa\mu' \nu' \sigma} - g^{\mu\kappa} \epsilon^{\nu\mu' \nu' \sigma} + g^{\nu\kappa} \epsilon^{\mu\mu' \nu' \sigma} + g^{\nu'\sigma} \epsilon^{\mu\nu\kappa\mu'} - g^{\mu'\sigma} \epsilon^{\mu\nu\kappa\nu'} + g^{\mu'\nu'} \epsilon^{\mu\nu\kappa\sigma} \right] \\
&= 4i \left[(p_4 \cdot p_3) p_{\mu'}(4) p_{\nu'}(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \epsilon^{\kappa\mu' \nu' \sigma} \right. \\
&\quad \underbrace{-(p_4 \cdot p_1) p_{\mu'}(4) p_\nu(3) p_{\nu'}(3) p_{2\sigma} \epsilon^{\nu\mu' \nu' \sigma}}_0 \\
&\quad \underbrace{+(p_3 \cdot p_1) p_\mu(4) p_{\mu'}(4) p_{\nu'}(3) p_{2\sigma} \epsilon^{\mu\mu' \nu' \sigma}}_0 \\
&\quad \underbrace{+(p_3 \cdot p_2) p_\mu(4) p_{\mu'}(4) p_\nu(3) p_{1\kappa} \epsilon^{\mu\nu\kappa\mu'}}_0 \\
&\quad \underbrace{-(p_4 \cdot p_2) p_\mu(4) p_\nu(3) p_{\nu'}(3) p_{1\kappa} \epsilon^{\mu\nu\kappa\nu'}}_0 \\
&\quad \left. + (p_3 \cdot p_4) p_\mu(4) p_\nu(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \epsilon^{\mu\nu\kappa\sigma} \right]
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Yukarıdaki denklem b'nin birçok teriminin sıfır olduğu görülmektedir. Bunun sebebi ϵ 'ların indislerine göre antisimetrik iken p_i 'lerin indislerine göre simetrik olmasıdır. İlk terimde indisler yeniden düzenlenirse son terime eşit olduğu görülür.

$$\epsilon^{\kappa\mu' \nu' \sigma} = \epsilon^{\mu' \nu' \kappa \sigma} \tag{3.47}$$

Sonuç olarak b terimi için,

$$b = 8i(p_3 \cdot p_4) p_\mu(4) p_\nu(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \epsilon^{\mu\nu\kappa\sigma} \quad (3.48)$$

sonucuna ulaşılır. b terimi pure imajiner bir terimdir. Bu terimin nasıl sıfıra gittiğini görmek için $M_u M_t^\dagger$ terimine bakılmalıdır. $M_u M_t^\dagger$, $M_t M_u^\dagger$ 'nin kompleks eşleniği olduğundan her iki ifade toplanırsa pure imajiner terimler sıfıra gider. Sonuç olarak IV terimini aşağıdaki gibi son formunda yazabiliriz.

$$\begin{aligned} IV &= \frac{1}{2m_W^4} a \\ &= -\frac{1}{2m_W^4} (s - 2m_W^2) \left[(m_W^2 - u) + (m_W^2 - t) \right] + \frac{1}{2m_W^4} (s - 2m_W^2)^2 s \\ &\quad + \frac{2}{m_W^2} (m_W^2 - u)(m_W^2 - t) - s \end{aligned} \quad (3.49)$$

$2\Re[M_t M_u^\dagger]$ için gerekli tüm adımlar tamamlandığından sonucu yazabiliriz.

$$\begin{aligned} 2\Re[M_t M_u^\dagger] &= 2\Re[c_t c_u^*] (I + II + III + IV) \\ &= 2\Re[c_t c_u^*] \left\{ 4s - \frac{2}{m_W^2} (m_W^2 - u)(m_W^2 - t) - \frac{2}{m_W^2} (m_W^2 - t)(m_W^2 - u) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2m_W^4} (s - 2m_W^2) \left[(m_W^2 - u) + (m_W^2 - t) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2m_W^4} (s - 2m_W^2)^2 s + \frac{2}{m_W^2} (m_W^2 - u)(m_W^2 - t) - s \right\} \\ &= 2\Re[c_t c_u^*] \left\{ 3s - \frac{2}{m_W^2} (m_W^2 - u)(m_W^2 - t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2m_W^4} (s - 2m_W^2) \left[(m_W^2 - u) + (m_W^2 - t) - (s - 2m_W^2) s \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.50)$$

$|M_t + M_u|^2$ **Hesabı:**

$|M_t|^2$, $|M_u|^2$ ve $2\Re(M_t M_u^*)$ hesabı tamamlandığından artık $|M_t + M_u|^2$ hesabı yapılabilir.

$$\begin{aligned}
|M_t + M_u|^2 &= |M_t|^2 + |M_u|^2 + 2\Re[M_t M_u^*] \\
&= |c_t|^2 \left[\frac{2}{m_W^2} (m_W^2 - t)(m_W^2 - u) + \frac{1}{m_W^4} (s - 2m_W^2)(m_W^2 - t)^2 + s \right] \\
&\quad + |c_u|^2 \left[\frac{2}{m_W^2} (m_W^2 - t)(m_W^2 - u) + \frac{1}{m_W^4} (s - 2m_W^2)(m_W^2 - t)^2 + s \right] \\
&\quad + 2\Re(c_t c_u^*) \left[3s - \frac{2}{m_W^2} (m_W^2 - u)(m_W^2 - t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2m_W^4} (s - 2m_W^2) [(m_W^2 - u) + (m_W^2 - t) - (s - 2m_W^2)s] \right]
\end{aligned} \tag{3.51}$$

$2\Re[M_t M_s^*]$ **Hesabı:**

$$\begin{aligned}
2\Re[M_t M_s^*] &= 2\Re[c_t c_s^*] g^{\mu'\nu'} \epsilon_{\mu'}(4) \epsilon_{\nu'}(3) [\bar{v}(2) \not{\epsilon}(4) \not{\epsilon}(3) \gamma_- u(1)] \\
&\quad [\bar{v}(2) \gamma_- u(1)]^\dagger \\
&= 2\Re[c_t c_s^*] g^{\mu'\nu'} \epsilon_{\mu'}(4) \epsilon_{\nu'}(3) \\
&\quad \left[\bar{v}(2) \not{\epsilon}(4) \not{\epsilon}(3) \gamma_- \underbrace{u(1) \bar{u}(1)}_{p_1 + m_1} \gamma_+ v(2) \right] \\
&= 2\Re[c_t c_s^*] g^{\mu'\nu'} \underbrace{\epsilon_\mu(4) \epsilon_{\mu'}(4)}_{-g_{\mu\mu'} + \frac{p_\mu(4) p_{\mu'}(4)}{m_W^2}} \underbrace{\epsilon_\nu(3) \epsilon_{\nu'}(3)}_{-g_{\nu\nu'} + \frac{p_\nu(3) p_{\nu'}(3)}{m_W^2}} p_{1\kappa} p_{2\sigma} \\
&\quad Tr[\gamma_- \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa (\gamma^\sigma - m_2)] \\
&= 2\Re[c_t c_s^*] [I + II + III + IV]
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Sırasıyla I, II, III ve IV çözülmelidir.

$$\begin{aligned}
I &= \underbrace{g_{\mu\mu'} g_{\nu\nu'} g^{\mu'\nu'}}_{\delta_{\mu\nu}^{\mu'}} p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr} \left[\gamma_- \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^\sigma \right] \\
&= p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr} \left[\gamma_- \underbrace{\gamma^\mu \gamma_\mu}_4 \gamma^\kappa \gamma^\sigma \right] \\
&= 4 p_{1\kappa} p_{2\sigma} \underbrace{\text{Tr} \left[\gamma_- \gamma^\kappa \gamma^\sigma \right]}_{2g^{\kappa\sigma}} \\
&= 8(p_1 \cdot p_2) \\
&= 4s
\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
II &= -\frac{1}{m_W^2} \underbrace{g_{\mu\mu'} g^{\mu'\nu'}}_{\delta_\mu^{\nu'}} p_\nu(3) p_{\nu'}(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr} \left[\gamma_- \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^\sigma \right] \\
&= -\frac{1}{2m_W^2} p_\nu(3) p_\mu(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \left\{ \text{Tr} \left[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^\sigma \right] - \text{Tr} \left[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^\sigma \right] \right\} \\
&= -\frac{2}{m_W^2} p_\nu(3) p_\mu(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \left[g^{\mu\nu} g^{\kappa\sigma} - g^{\mu\kappa} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\kappa} - \underbrace{i\epsilon^{\mu\nu\kappa\sigma}}_0 \right] \\
&= -\frac{2}{m_W^2} \left[p_3^2 (p_1 \cdot p_2) - (p_3 \cdot p_1)(p_3 \cdot p_2) + (p_3 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_1) \right] \\
&= -2(p_1 \cdot p_2) \\
&= -s
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Yukarıda II no'lu terim hesaplanırken $\epsilon^{\mu\nu\kappa\sigma}$ teriminin sıfır olmasının nedeni μ, ν indislerine göre antisimetrik olmasına rağmen p_ν, p_μ lerin indislere göre simetrik olmasıdır.

$$\begin{aligned}
III &= -\frac{1}{m_W^2} \underbrace{g_{\nu\nu'} g^{\mu'\nu'}}_{\delta_\nu^{\mu'}} p_\mu(4) p_{\mu'}(4) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr}[\gamma_- \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^\sigma] \\
&= -\frac{1}{m_W^2} p_\mu(4) p_\nu(4) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr}[\gamma_- \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^\sigma] \\
&= -\frac{1}{2m_W^2} p_\mu(4) p_\nu(4) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \left\{ \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^\sigma] - \text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^\sigma] \right\} \\
&= -\frac{2}{m_W^2} p_\mu(4) p_\nu(4) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \left[g^{\mu\nu} g^{\kappa\sigma} - g^{\mu\kappa} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\kappa} - i \epsilon^{\mu\nu\kappa\sigma} \right] \quad (3.55) \\
&= -\frac{2}{m_W^2} \left[p_4^2 (p_1 \cdot p_2) - (p_4 \cdot p_1)(p_4 \cdot p_2) + (p_4 \cdot p_2)(p_4 \cdot p_1) \right] \\
&= -2(p_1 \cdot p_2) \\
&= -s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
IV &= \frac{1}{m_W^4} p_\mu(4) p_{\mu'}(4) p_\nu(3) p_{\nu'}(3) g^{\mu'\nu'} p_{1\kappa} p_{2\sigma} \text{Tr}[\gamma_- \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^\sigma] \\
&= \frac{2}{m_W^4} (p_3 \cdot p_4) p_\mu(4) p_\nu(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \left\{ \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^\sigma] - \text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^\sigma] \right\} \\
&= \frac{2}{m_W^4} (p_3 \cdot p_4) p_\mu(4) p_\nu(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \left[g^{\mu\nu} g^{\kappa\sigma} - g^{\mu\kappa} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\kappa} - i \epsilon^{\mu\nu\kappa\sigma} \right] \quad (3.56) \\
&= \frac{2}{m_W^4} (p_3 \cdot p_4) \left[(p_3 \cdot p_4)(p_1 \cdot p_2) - (p_4 \cdot p_1)(p_3 \cdot p_2) + (p_4 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_1) \right. \\
&\quad \left. - p_\mu(4) p_\nu(3) p_{1\kappa} p_{2\sigma} \epsilon^{\mu\nu\kappa\sigma} \right]
\end{aligned}$$

Yukarıdaki denklemde imajiner terim pure imajiner olup $M_s M_t^*$ ile toplandığında sıfıra gider.

$$\begin{aligned}
IV &= \frac{2}{m_W^4} (p_3 \cdot p_4) \left[(p_3 \cdot p_4)(p_1 \cdot p_2) - (p_3 \cdot p_2)^2 + (p_3 \cdot p_1)^2 \right] \\
&= \frac{1}{4m_W^4} (s - 2m_W^2) \left[(s - 2m_W^2)s - (m_W^2 - u)^2 + (m_W^2 - t)^2 \right] \quad (3.57)
\end{aligned}$$

I, II, III ve IV terimlerinin hesaplandığından artık sonuç yazılabilir.

$$\begin{aligned}
2\Re[M_t M_s^*] &= 2\Re[c_t c_s^*][I + II + III + IV] \\
&= 2\Re[c_t c_s^*] \\
&\quad \left\{ 2s + \frac{1}{4m_W^4} (s - 2m_W^2) \left[(s - 2m_W^2)s + (m_W^2 - t)^2 - (m_W^2 - u)^2 \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

$2\Re[M_u M_s^*]$ **Hesabı:**

$$\begin{aligned}
2\Re[M_u M_s^*] &= 2\Re(c_u c_t^*) \epsilon_{\mu'}(4) \epsilon_{\nu'}(3) g^{\mu'\nu'} \\
&\quad [\bar{v}(2) \not{\epsilon}(3) \not{\epsilon}(4) \gamma_- u(1)] [\bar{v}(2) \gamma_- u(1)]^\dagger
\end{aligned} \tag{3.59}$$

$M_t M_s^*$ çarpımından elde edilen sonuçta $\not{\epsilon}(3) \leftrightarrow \not{\epsilon}(4)$ değişimi yapılırsa denklem (3.59)'un çözümü bulunmuş olur. $\not{\epsilon}(3) \leftrightarrow \not{\epsilon}(4)$ değişimi yapmak $p_3 \leftrightarrow p_4$ değişimini yapmak demektir.

$$\begin{aligned}
2\Re[M_u M_s^*] &= 2\Re[c_u c_s^*] \\
&\quad \left\{ 2s + \frac{1}{4m_W^4} (s - 2m_W^2) \left[(s - 2m_W^2)s + (m_W^2 - u)^2 - (m_W^2 - t)^2 \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.60}$$

$2\Re[(M_t + M_u) M_s^*]$ **Hesabı:**

$2\Re[M_t M_s^*], 2\Re[M_u M_s^*]$ hesapları tamamlandığından artık girişim terimi yazılabilir.

$$2\Re[(M_t + M_u) M_s^*] = 2\Re[M_t M_s^*] + 2\Re[M_u M_s^*] \tag{3.61}$$

3.1.3 Tesir kesiti

Diferansiyel tesir kesitinin matematiksel formülasyonu aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\beta}{64\pi s} \langle |M|^2 \rangle \quad (3.62)$$

Burada $|M|^2$,

$$\begin{aligned} |M|^2 = & |c_t|^2 \left[s + \frac{2}{m_W^2} (m_W^2 - t)(m_W^2 - u) + \frac{1}{m_W^4} (s - 2m_W^2)(m_W^2 - t)^2 \right] \\ & + |c_u|^2 \left[\frac{2}{m_W^2} (m_W^2 - t)(m_W^2 - u) + \frac{1}{m_W^4} (s - 2m_W^2)(m_W^2 - t)^2 + s \right] \\ & + 2\Re(c_t c_u^*) \left[3s - \frac{2}{m_W^2} (m_W^2 - u)(m_W^2 - t) - \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{2m_W^4} (s - 2m_W^2) \left[(m_W^2 - u) + (m_W^2 - t) - (s - 2m_W^2)s \right] \right] \\ & + 2\Re[c_t c_s^*] \left\{ 2s + \frac{1}{4m_W^4} (s - 2m_W^2) \left[(s - 2m_W^2)s + (m_W^2 - t)^2 - (m_W^2 - u)^2 \right] \right\} \\ & + 2\Re[c_u c_s^*] \left\{ 2s + \frac{1}{4m_W^4} (s - 2m_W^2) \left[(s - 2m_W^2)s + (m_W^2 - u)^2 - (m_W^2 - t)^2 \right] \right\} \\ & + |c_s|^2 s \left[2 + \frac{1}{4m_W^4} (s - 2m_W^2)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.63)$$

olarak hesaplanmıştır. Yukarıdaki denklemde $\langle \rangle$ sembolü, giren parçacık spinleri üzerinden ortalama al anlamına gelmektedir.

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{1}{4} |M|^2 \quad (3.64)$$

β, t ve u değişkenlerinin tanımı aşağıda yapılmıştır.

$$\begin{aligned}
\beta &\equiv \sqrt{1 - \frac{4m_W^2}{s}} \\
t &= -\frac{s}{2}(1 - \beta \cos \theta) + m_W^2 \\
u &= -\frac{s}{2}(1 + \beta \cos \theta) + m_W^2
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Denklem (3.65)'deki u'nun türetilişi için tanımından yola çıkılır. Aynı işlem t için de yapılabilir.

$$\begin{aligned}
u &= (p_1 - p_4)^2 \\
&= p_1^2 + p_4^2 - 2p_1 \cdot p_4, \quad p_1^2 \simeq 0, p_4^2 = m_W^2 \\
&= m_W^2 - 2(E_1 E_4 - |\vec{p}_1| |\vec{p}_4| \cos \theta), \quad E_{1,3} = \sqrt{s}/2 \\
&= m_W^2 - 2\left(\frac{s}{4} + \frac{\sqrt{s}}{2} \sqrt{\frac{s}{4} - m_W^2} \cos \theta\right), \quad |\vec{p}_1| \simeq E_1, |\vec{p}_4| = \sqrt{E_3^2 - m_W^2} \\
&= m_W^2 - 2\left(\frac{s}{4} + \frac{s}{4} \sqrt{1 - \frac{4m_W^2}{s}} \cos \theta\right) \\
&= m_W^2 - \frac{s}{2}(1 + \beta \cos \theta)
\end{aligned} \tag{3.66}$$

3.1.4 Olay Sayısı

Olay sayısı (event rate)'nın formülasyonu aşağıda verilmiştir.

$$dN = \frac{d\sigma}{d \cos \theta} L dt \tag{3.67}$$

Denklem (3.67) da N olay sayısı olup, Lüminosite, tesir kesiti ve zamanın çarpımına eşittir. Lüminosite (L), birim zamanda birim alandan geçen parçacık sayısı olup hızlandırıcının bir karakteristiğidir. Mevcut parçacık hızlandırıcılarının lüminositesi $10^{30} - 10^{35} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ aralığındadır. Yalnızca hafif nötrinoları içeren bir tesir kesiti hesabında diferansiyel tesir kesiti 10^{-18} fb mertebesinde. 10^4 GeV kütleli ağır bir nötrinonun teoriye dahil edilmesiyle diferansiyel tesir kesiti [fb] mertebesine

yükselmektedir. Olay sayısını hem hafif nötrinolar için hem de ağır nötrinolar için hesaplamak mümkündür.

$\hbar = c = 1$ birim sisteminde tesir kesiti $\frac{1}{[GeV]^2}$ biriminde çıkar. Bu sonucu metre kare cinsinden yazmak için $\hbar c = 197 \text{ MeVfm}$ bağıntısı kullanılır. 1barn (b) = 10^{-24} cm^2 , 1 picobarn (pb) = 10^{-12} barn ve 1 femtobarn (fb) = 10^{-15} barn olduğu hatırlanırsa sonucu metre kare yerine fb ve pb cinsinden yazabiliriz.

$$\begin{aligned}\frac{1}{[GeV]^2} &= 197^2 \times 10^{-32} [\text{cm}]^2 \\ &= 197^2 \times 10^4 \text{ pb} \\ &= 197^2 \times 10^7 \text{ fb}\end{aligned}\tag{3.68}$$

Hafif nötrinolar için olay sayısı:

$$\begin{aligned}N &= \underbrace{10^{-18} 10^{-15} 10^{-24} \text{ cm}^2}_{\text{Diferansiyel Tesir Kesiti}} \times \underbrace{10^{35} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}}_{\text{Lüminosite}} \times \underbrace{31,5 \times 10^6 \text{ s}}_{\text{1 yıl}} \\ &= 31,5 \times 10^{-16} \text{ olay/yıl}\end{aligned}\tag{3.69}$$

Yukarıdaki sonuç yalnızca hafif nötrinolar ile ters nötrinosuz çift beta bozunumunu gözlemleyebilmeyi imkansız kılmaktadır. Yılda sadece 31 olay gözleyebilmek için diferansiyel tesir kesitinin 10^{-2} fb veya daha büyük olması gerekmektedir.

Ağır nötrinolar için olay sayısı:

$$\begin{aligned}N &= \underbrace{2,110^{-15} 10^{-24} \text{ cm}^2}_{\text{Diferansiyel Tesir Kesiti}} \times \underbrace{10^{35} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}}_{\text{Lüminosite}} \times \underbrace{31,5 \times 10^6 \text{ s}}_{\text{1 yıl}} \\ &= 6615 \text{ olay/sene}\end{aligned}\tag{3.70}$$

Yukarıda bulunan bu olay sayısı ile ters nötrinosuz çift beta bozunumunu gözlemleyebilmek mümkündür.

3.2 Helisite Genlikleri Yöntemi

Ters nötrinosuz çift beta bozunumu Bölüm 3.1’te spin toplamaları yöntemiyle incelendi. Spin toplamaları yönteminde parçacıkların spin bilgisi kaybolmaktadır. Spinler üzerinden toplam alınmazsa problemin fiziksel zenginliği artmakta ve daha fazla bilgi elde edilebilmektedir. Gelecek nesil parçacık hızlandırıcıları, parçacık spinleri üzerinde daha fazla kontrole sahip olacağı düşünülürse etkileşme problemleri incelenirken parçacık spinlerini muhafaza etmek en doğru yaklaşım olacaktır. Bu bölümde her spin konfigürasyonu için diferansiyel tesir kesiti hesaplanacak olup, diferansiyel tesir kesitine en büyük katkının hangi spin konfigürasyonundan geldiği görülecektir.

3.2.1 Helisite

Helisite operatörü aşağıdaki denklemde görüldüğü gibi verilir.

$$\hat{h} = \frac{\vec{S} \cdot \vec{P}}{s|\vec{P}|} = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|} \quad (3.71)$$

Burada $\vec{S}$ spin operatörü ve $\vec{P}$ momentum operatörü olup tanımları aşağıdaki denklemde verilmiştir.

$$\begin{aligned} S^k &= \frac{1}{4} \sum_{j,l} \epsilon^{kjl} \sigma^{jl} = \frac{1}{2} \Sigma^k \\ \Sigma^k &= \frac{1}{2} \sum_{j,l} \epsilon^{kjl} \sigma^{jl} = \frac{i}{2} \sum_{j,l} \epsilon^{kjl} \gamma^j \gamma^l \\ \Sigma^k &= \gamma^0 \gamma^k \gamma^5 \\ P^\mu &= i\partial^\mu \end{aligned} \quad (3.72)$$

Helisite operatörünün karesi bir olduğundan, bir Dirac fermiyonunun helisite özdeğerleri $h = \pm 1$ dir. Kütle ve spin (varsa diğer kuantum sayılarıyla beraber) farklı parçacıkları ayırt eder. Bir parçacığın farklı kuantum durumları, momentumunun ($\vec{P}$) üç bileşeni ve helisitesinin (h) iki bileşeniyle belirlenir.

3.2.2 Kiralite

γ^5 matrisi kiralite matrisi olarak adlandırılır. γ^5 Hermitik olduğundan, üniter bir dönüşümle köşegenleştirilebilir, $U\gamma^5U^\dagger = \gamma^5_{diag}$, $U^\dagger = U^{-1}$. $(\gamma^5)^2 = 1$ olduğundan özdeğerleri ± 1 dir. Dahası kiral gösterimde $\gamma^5_C = diag(1,1,-1,-1)$ köşegendir. γ^5 'in ± 1 özdeğerlerine karşı gelen özvektörleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}\gamma^5\psi_R &= +\psi_R \\ \gamma^5\psi_L &= -\psi_L\end{aligned}\tag{3.73}$$

Burada chiral alanlar ψ_R ve ψ_L sırasıyla sağ-elli ve sol-elli alanlar olarak adlandırılırlar. Herhangi bir spinör alanı ψ , sağ ve sol elli parçalarına ayrıştırılabilir, $\psi = \psi_R + \psi_L$.

$$\begin{aligned}\psi_R &= \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\psi \\ \psi_L &= \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\psi\end{aligned}\tag{3.74}$$

Yukarıdaki denklemde $\left(\frac{1\pm\gamma^5}{2}\right)$ kiralite projeksiyon operatörleri olarak tanımlanabilir.

$$\begin{aligned}P_R &\equiv \frac{1+\gamma^5}{2} \\ P_L &\equiv \frac{1-\gamma^5}{2}\end{aligned}\tag{3.75}$$

Bu operatörlerin bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}P_R + P_L &= 1 \\ P_R^2 &= P_R, \quad P_L^2 = P_L \\ P_R P_L &= P_L P_R = 0\end{aligned}\tag{3.76}$$

Kiralite ve helisite birbirinden farklı iki tanım olmasına rağmen kütlesiz parçacık limitinde iki operatör birbirine eşittir.

$$\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \psi(x, p) = \gamma^5 \psi(x, p) \quad (3.77)$$

Kütlesiz parçacık limitinde kiralite operatörünün özvektörleri aynı özdeğerli helisite operatörünün özvektörlerine eşittir.

$$\begin{aligned} \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \psi_R(x, p) &= \psi_R(x, p) \\ \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \psi_L(x, p) &= -\psi_L(x, p) \end{aligned} \quad (3.78)$$

Bu sebeple kütlesiz sağ-elli chiral alan $\psi_R(x, p)$ pozitif helisiteli ve kütlesiz sol-elli chiral alan $\psi_L(x, p)$ negatif helisitelidir.

3.2.3 Dirac denklemi ve helisite özvektörleri

Dirac denklemi aşağıda verilmiştir.

$$(i\partial - m)\psi(x) = 0 \quad (3.79)$$

ψ alanının en genel çözümü aşağıda verilmiştir.

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} \left[a^{(h)}(p) u^{(h)}(p) e^{-ip \cdot x} + b^{(h)\dagger}(p) v^{(h)}(p) e^{ip \cdot x} \right] \quad (3.80)$$

Burada h , helisitedir. Denklem (3.80), denklem (3.79)'da yerine yazılırsa momentum uzayında $u^{(h)}(p)$ ve $v^{(h)}(p)$ 'nin Dirac denklemini sağladığı görülür.

$$\begin{aligned}(p-m)u^{(h)}(p) &= 0 \\ (p+m)v^{(h)}(p) &= 0\end{aligned}\tag{3.81}$$

Denklem (3.81)'deki spinörlerin sağladığı helisite özellikleri aşağıdaki denklemlerde verilmiştir.

$$\begin{aligned}\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} u^{(h)}(p) &= h u^{(h)}(p) \\ \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} v^{(h)}(p) &= -h v^{(h)}(p)\end{aligned}\tag{3.82}$$

Enerji projeksiyon ve helisite projeksiyon operatörlerini tanımlamak faydalı olur.

$$\begin{aligned}\Lambda_{\pm}(p) &\equiv \frac{m \pm \not{p}}{2m} \\ P_h &\equiv \frac{1 + \gamma^5 \not{p}_h}{2}\end{aligned}\tag{3.83}$$

Gamma matrislerinin Dirac gösteriminde $u^{(h)}(p)$ ve $v^{(h)}(p)$ spinörlerinin açık ifadeleri aşağıda tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}u_D^{(h)}(p) &= \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} \chi^{(h)}(\vec{p}) \\ h \sqrt{E-m} \chi^{(h)}(\vec{p}) \end{pmatrix} \\ v_D^{(h)}(p) &= \begin{pmatrix} -\sqrt{E-m} \chi^{(-h)}(\vec{p}) \\ h \sqrt{E+m} \chi^{(-h)}(\vec{p}) \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{3.84}$$

Burada $\chi^{(h)}(p)$ 'ler ortonormal iki elemanlı helisite özvektör spinörleridir. Bu spinörler relativistik olmayan limitte $|\vec{p}| \ll m$ aşağıdaki spinörlere indirgenirler.

$$\begin{aligned}
u_D^{(h)}(p) &\simeq \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi^{(h)}(\vec{p}) \\ h \frac{|\vec{p}|}{2m} \chi^{(h)}(\vec{p}) \end{pmatrix} \\
v_D^{(h)}(p) &\simeq \sqrt{2m} \begin{pmatrix} -\frac{|\vec{p}|}{2m} \chi^{(-h)}(\vec{p}) \\ h \chi^{(-h)}(\vec{p}) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.85}$$

$u_D^{(h)}(p)$ için üstteki iki eleman büyük elemanlar olarak adlandırılırken, alttaki iki eleman ise küçük elemanlar olarak adlandırılır. $v_D^{(h)}(p)$ için büyük ve küçük elemanların yerleri terstir.

Denklem (3.84) ve (3.85) te karşılaşılan $\chi^{(h)}(p)$ 'ler iki-elemanlı helisite özvektör spinörleri olup aşağıdaki özdeğer denklemini sağlarlar.

$$\frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} \chi^{(h)}(\vec{p}) = h \chi^{(h)}(\vec{p}) \tag{3.86}$$

Yukarıdaki özdeğer denklemini $\chi^{(h)}(p)$ ve $\chi^{(-h)}(p)$ 'in ortogonal olduğunu garanti eder.

$$\left(\chi^{(h)}(\vec{p}) \right)^\dagger \chi^{(-h)}(\vec{p}) = 0 \tag{3.87}$$

$\chi^{(h)}(p)$ 'ler ayrıca bire normalize edilirler.

$$\left(\chi^{(h)}(\vec{p}) \right)^\dagger \chi^{(h)}(\vec{p}) = 1 \tag{3.88}$$

Üçlü momentum $\vec{p}$, küresel koordinatlarda, $0 \leq \theta < \pi$ ve $0 \leq \phi < 2\pi$ için aşağıdaki gibi yazılır.

$$\vec{p} = |\vec{p}|(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (3.89)$$

Benzer şekilde küresel koordinatlarda iki-elemanlı helisite özvektör spinörleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} \chi^{(+)}(\vec{p}) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \\ \chi^{(-)}(\vec{p}) &= \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.90)$$

$\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ dönüşümü altında, $\theta \rightarrow \pi - \theta$ ve $\phi \rightarrow \phi \pm \pi$ olduğundan iki-elemanlı helisite özvektör spinörleri, trigonometrik özdeşlikler yardımıyla aşağıdaki formda yazılabilirler.

$$\begin{aligned} \chi^{(+)}(-\vec{p}) &= \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \\ \chi^{(-)}(-\vec{p}) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.91)$$

$\vec{p}$ 'yi z ekseninde seçmek hesaplarda kolaylık sağladığından, $\vec{p} = (0, 0, |\vec{p}|)$ için $\theta = 0$ alınır. Bu durumda helisite özvektör spinörleri aşağıdaki formda yeniden yazılabilirler.

$$\begin{aligned}\chi^{(+)}(\vec{p}_z) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \chi^{(+)}(-\vec{p}_z) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \chi^{(-)}(\vec{p}_z) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \chi^{(-)}(-\vec{p}_z) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{3.92}$$

3.2.4 Spin-1 helisite özvektörleri

$\hat{k}$ doğrultusunda hareket eden spin-1 bir parçacığın dörtlü momentumu $k^\mu = (k^0, \vec{k})$ olsun. $\hat{k}$ vektörü, polar θ ve azimuthal ϕ açılarıyla ifade edilsin. Bu durumda bu parçacığın spin-1 dalga fonksiyonu ya da polarizasyon dörtlü vektörü olan $\epsilon^\mu(k, \lambda)$ helisite $\lambda = \pm 1$ için aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Haber 1994).

$$\begin{aligned}\epsilon^\mu(k, +1) &= \sqrt{\frac{1}{2}} e^{+i\phi} (0, -\cos\theta \cos\phi + i \sin\phi, -i \cos\phi - \cos\theta \sin\phi, \sin\theta) \\ \epsilon^\mu(k, -1) &= \sqrt{\frac{1}{2}} e^{-i\phi} (0, \cos\theta \cos\phi + i \sin\phi, -i \cos\phi + \cos\theta \sin\phi, -\sin\theta)\end{aligned}\tag{3.93}$$

Yukarıdaki sonuç hem kütlelessiz hem de kütleli spin-1 parçacıklar için geçerlidir. Eğer kütle $m \neq 0$ ise boyuna durum için de ($\lambda = 0$) polarizasyon dörtlü vektörü yazılabilir. W^- bozonları kütleli olduğundan dolayı fotonların aksine üç polarizasyon durumu mevcuttur.

$$\epsilon^\mu(k, 0) = \left(\frac{|\vec{k}|}{m}, \frac{k^0}{m} \hat{k} \right)\tag{3.94}$$

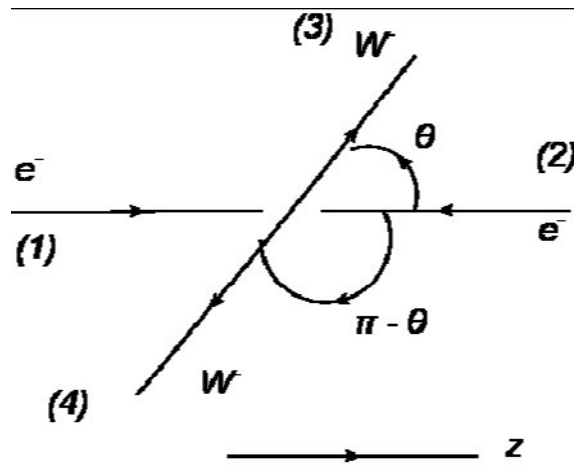
Spin polarizasyon dörtlü vektörleri aşağıdaki bağıntıları sağlarlar.

$$\begin{aligned}k \cdot \epsilon(k, \lambda) &= 0 \\ \epsilon(k, \lambda) \cdot \epsilon(k, \lambda')^* &= -\delta_{\lambda\lambda'}\end{aligned}\tag{3.95}$$

İkinci parçacık için yazılacak olan polarizasyon dörtlü vektörlerinde $\theta \rightarrow \pi - \theta$ ve $\varphi \rightarrow \varphi \pm \pi$ dönüşümü yapılır. Trigonometrik özdeşlikler yardımıyla aşağıdaki bağıntılara ulaşılır.

$$\begin{aligned}\epsilon^\mu(-k, +1) &= -\sqrt{\frac{1}{2}} e^{i\phi} (0, -\cos\theta \cos\phi - i \sin\phi, i \cos\phi - \cos\theta \sin\phi, \sin\theta) \\ \epsilon^\mu(-k, -1) &= -\sqrt{\frac{1}{2}} e^{-i\phi} (0, \cos\theta \cos\phi - i \sin\phi, i \cos\phi + \cos\theta \sin\phi, -\sin\theta) \quad (3.96) \\ \epsilon^\mu(-k, 0) &= \left(\frac{|\vec{k}|}{m}, -\frac{k^0}{m} \hat{k} \right)\end{aligned}$$

3.2.5 Feynman genlik hesabı



Şekil 3.4 Elektron - elektron saçılması

Saçılma süreci incelenirken hesap kolaylığı sağlaması açısından çarpışma doğrultusu z doğrultusunda seçilir. Bu seçimi yapmak fermiyon spinörlerini hatırı sayılır bir ölçüde sadeleştirecektir.

Şekil 3.4'te saçılma açısının θ olduğu görülmektedir. Benzer şekilde polarizasyon vektörlerini ve spinör ifadelerini sadeleştirdiği için azimuthal $\varphi=0$ seçilebilir.

Şekil 3.4'teki birinci ve dördüncü parçacık için spinör ve polarizasyon vektörleri yazılırken $\theta \rightarrow \pi - \theta$ ve $\varphi \rightarrow \varphi \pm \pi$ dönüşümü yapılmalıdır. Bu dönüşümler altında spinörler denklem (3.91) de gösterildiği ve bozonlar denklem (3.96) de gösterildiği gibi dönüşürler.

Olası her helisite konfigürasyonu için toplam genlik hesaplanır.

$$M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} = (M_t + M_u + M_s)_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} \quad (3.97)$$

Bu hesapları elle yapmak çok zahmetli olduğundan Reduce² bilgisayar programı kullanılarak hesaplar yapılmıştır. Genlik kare hesaplanırken denklem (3.97)'un sol tarafının önce karesi alınır sonra her spin konfigürasyonu üzerinden toplam alınır.

$$|M|^2 = \sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} |M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}|^2 \quad (3.98)$$

Etkileşmeye giren elektronlar iki farklı helisite durumunda ($\lambda_{1,2} = \pm 1$), W bozonları ise üç farklı helisite durumunda ($\lambda_{3,4} = 0, \pm 1$) bulunabileceğinden, süreç toplam 36 helisite konfigürasyonunda bulunabilir. Her bir konfigürasyon için Denklem (3.97) deki genlik hesabı yapıldığında sıfırdan farklı olan yedi sonuç elde edilir. Bunlar aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} M_{-1-110} &= -\left(\frac{s}{2\sqrt{2}m_W}\right)(\beta+1)\sin\theta(c_t - c_u) \\ M_{-1-101} &= -\left(\frac{s}{2\sqrt{2}m_W}\right)(\beta+1)\sin\theta(c_t - c_u) \\ M_{-1-1-10} &= \left(\frac{s}{2\sqrt{2}m_W}\right)(\beta-1)\sin\theta(c_t - c_u) \\ M_{-1-10-1} &= \left(\frac{s}{2\sqrt{2}m_W}\right)(\beta-1)\sin\theta(c_t - c_u) \\ M_{-1-111} &= \sqrt{s}[\cos\theta(c_t - c_u) + c_t + c_u + c_s] \\ M_{-1-1-1-1} &= -\sqrt{s}[\cos\theta(c_t - c_u) - c_t - c_u - c_s] \\ M_{-1-100} &= \left(\frac{s\sqrt{s}}{4m_W^2}\right)[2\beta\cos\theta(c_t - c_u) - (\beta^2 + 1)(c_t + c_u + c_s)] \end{aligned} \quad (3.99)$$

² www.reduce-algebra.com

Yukarıdaki eşitlikler incelenirse M_{-1-110} 'ın M_{-1-101} 'e ve $M_{-1-1-10}$ 'ın $M_{-1-10-1}$ 'e eşit olduğu görülmektedir. Bu nedenle bundan sonra çizilecek olan şekillerde yalnızca biri için çizim yapılacaktır.

3.2.6 Üniterlik

Denklem (3.99) de verilen tüm genlik ifadeleri için üniterlik kontrolü yapılabilir.

$s \gg m_w, m_\Delta$ için $\beta \approx 1$, $u \approx -\frac{s}{2}$ ve $t \approx -\frac{s}{2}$ olmaktadır.

$$\begin{aligned} c_t &\approx -2 \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right)^2 \sum_i \frac{U_{ei}^{*2} m_i}{s} \\ c_u &\approx -2 \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right)^2 \sum_i \frac{U_{ei}^{*2} m_i}{s} \\ c_s &\approx 4 \left(\frac{g_w}{\sqrt{2}} \right)^2 \sum_i \frac{U_{ei}^{*2} m_i}{s} \end{aligned} \quad (3.100)$$

Tüm genlik ifadeleri $(c_t - c_u) \approx 0$ ve $(c_t + c_u + c_s) \approx 0$ terimlerinden oluştuğundan denklem (3.99)'teki tüm genlik ifadeleri üniterdir.

3.2.7 Genlik kare hesabı

Etkileşme tesir kesitini hesaplayabilmek için eşitlik (3.99)'de verilen tüm genliklerin karesinin alınması ve toplanması gerekmektedir. Aşağıda yalnızca M_{-1-110} 'ın karesi alınacaktır. Diğer terimler için de benzer hesaplar yapmak mümkündür. Bu bölümde amaç Dirac ve Majorana fazlarının, genlik kare hesabında ne şekilde ortaya çıktığını görmektir.

$$|M_{-1-110}|^2 = \left(\frac{s}{2\sqrt{2}m_w} \right)^2 (\beta + 1)^2 \sin^2 \theta |c_t - c_u|^2 \quad (3.101)$$

Yukarıdaki ifadede fazları içeren terim $|c_t - c_u|^2$ terimidir. Bu terim aşağıda daha ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

$$\begin{aligned}
|c_t - c_u|^2 &= \left(\frac{g_W}{\sqrt{2}} \right)^4 \left| \sum_i \frac{U_{ei}^{*2} m_i}{t - m_i^2} - \sum_j \frac{U_{ej}^{*2} m_j}{u - m_j^2} \right|^2 \\
&= \left(\frac{g_W}{\sqrt{2}} \right)^4 \left| \sum_i U_{ei}^{*2} m_i \left(\frac{1}{t - m_i^2} - \frac{1}{u - m_i^2} \right) \right|^2 \\
&= \left(\frac{g_W}{\sqrt{2}} \right)^4 \left[\sum_{i,j} U_{ei}^{*2} U_{ej}^2 m_i m_j \left(\frac{1}{t - m_i^2} - \frac{1}{u - m_i^2} \right) \left(\frac{1}{t - m_j^2} - \frac{1}{u - m_j^2} \right) \right] \\
&= \left(\frac{g_W}{\sqrt{2}} \right)^4 \left[\sum_{i=j} |U_{ei}|^4 m_i^2 \left(\frac{1}{t - m_i^2} - \frac{1}{u - m_i^2} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i \neq j} (U_{ei}^{*2} U_{ej}^2 + U_{ej}^{*2} U_{ei}^2) m_i m_j \left(\frac{1}{t - m_i^2} - \frac{1}{u - m_i^2} \right) \left(\frac{1}{t - m_j^2} - \frac{1}{u - m_j^2} \right) \right] \\
&= \left(\frac{g_W}{\sqrt{2}} \right)^4 \left[\sum_{i=j} |U_{ei}|^4 m_i^2 \left(\frac{1}{t - m_i^2} - \frac{1}{u - m_i^2} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i>j} 2\Re(U_{ei}^* U_{ej})^2 m_i m_j \left(\frac{1}{t - m_i^2} - \frac{1}{u - m_i^2} \right) \left(\frac{1}{t - m_j^2} - \frac{1}{u - m_j^2} \right) \right] \\
&\quad (3.102)
\end{aligned}$$

Yukarıdaki ifade incelendiğinde, CP bozan fazların yalnızca $2\Re(U_{ei}^* U_{ej})^2$ teriminden geldiği görülür. $|U_{ei}|^4$ teriminin Dirac ve Majorana fazlarını içermeyeceği açıktır. $2\Re(U_{ei}^* U_{ej})^2$ terimi ise hem Majorana hem de Dirac fazlarını içerip üç terimin toplamı olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\sum_{i>j} 2\Re(U_{ei}^* U_{ej})^2 &= \sum_{i=2,j=1} 2\Re(U_{ei}^* U_{ej})^2 + \sum_{i=3,j=2} 2\Re(U_{ei}^* U_{ej})^2 + \sum_{i=3,j=1} 2\Re(U_{ei}^* U_{ej})^2 \\
&\quad (3.103)
\end{aligned}$$

Yukarıdaki ifade, CP bozan fazların daha açık görüldüğü bir formda yazılırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2,j=1} 2\Re(U_{ei}^* U_{ej})^2 &= 2\Re(s_{12}c_{13}e^{-i\lambda_2}c_{12}c_{13})^2 \\
&= 2s_{12}^2c_{12}^2c_{13}^4 \cos^2 \lambda_2 \\
\sum_{i=3,j=2} 2\Re(U_{ei}^* U_{ej})^2 &= 2\Re(s_{13}e^{-i(\lambda_3-\delta_{13})}s_{12}c_{13}e^{i\lambda_2})^2 \\
&= 2s_{13}^2s_{12}^2c_{13}^2 \cos^2 (\lambda_3 - \lambda_2 - \delta_{13}) \\
\sum_{i=3,j=1} 2\Re(U_{ei}^* U_{ej})^2 &= 2\Re(s_{13}e^{-i(\lambda_3-\delta_{13})}c_{12}c_{13})^2 \\
&= 2s_{13}^2c_{12}^2c_{13}^2 \cos^2 (\lambda_3 - \delta_{13})
\end{aligned} \tag{3.104}$$

Bu sonuçlar altında,

$$\begin{aligned}
|c_t - c_u|^2 &= \left(\frac{g_W}{\sqrt{2}}\right)^4 \left\{ \sum_{i=j} |U_{ei}|^4 m_i^2 \left(\frac{1}{t-m_i^2} - \frac{1}{u-m_i^2} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i>j} 2\Re(U_{ei}^* U_{ej})^2 m_i m_j \left(\frac{1}{t-m_i^2} - \frac{1}{u-m_i^2} \right) \left(\frac{1}{t-m_j^2} - \frac{1}{u-m_j^2} \right) \right\} \\
&= \left(\frac{g_W}{\sqrt{2}}\right)^4 \left\{ c_{12}^4 c_{13}^4 m_1^2 \left(\frac{1}{t-m_1^2} - \frac{1}{u-m_1^2} \right)^2 + \right. \\
&\quad + s_{12}^4 c_{13}^4 m_2^2 \left(\frac{1}{t-m_2^2} - \frac{1}{u-m_2^2} \right)^2 + \\
&\quad + s_{13}^4 \left(\frac{1}{t-m_3^2} - \frac{1}{u-m_3^2} \right)^2 + \\
&\quad + 2s_{12}^2 c_{12}^2 c_{13}^4 \cos^2 \lambda_2 m_2 m_1 \left(\frac{1}{t-m_2^2} - \frac{1}{u-m_1^2} \right) \left(\frac{1}{t-m_1^2} - \frac{1}{u-m_2^2} \right) \\
&\quad + 2s_{13}^2 s_{12}^2 c_{13}^2 \cos^2 (\lambda_3 - \lambda_2 - \delta_{13}) m_3 m_2 \left(\frac{1}{t-m_3^2} - \frac{1}{u-m_2^2} \right) \left(\frac{1}{t-m_2^2} - \frac{1}{u-m_3^2} \right) \\
&\quad \left. + 2s_{13}^2 c_{12}^2 c_{13}^2 \cos^2 (\lambda_3 - \delta_{13}) m_3 m_1 \left(\frac{1}{t-m_3^2} - \frac{1}{u-m_1^2} \right) \left(\frac{1}{t-m_1^2} - \frac{1}{u-m_3^2} \right) \right\} \tag{3.105}
\end{aligned}$$

elde edilir. Tesir kesiti hesaplanırken kullanılacak olan formül denklem (3.62) verilmişti. Fakat $\langle |M|^2 \rangle$ için, (3.64)'dan farklı olarak aşağıdaki eşitlik kullanılır.

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^7 |M_i|^2 \quad (3.106)$$

3.2.8 Antiparçacıklar

Ters nötrinosuz çift beta sürecinin tesir kesitinin CP asimetrisini gözlemleyebilmek için sürecin CP eşleniğinin ($e^+e^+ \rightarrow W^+W^+$) genlik kare hesapları yapılmalıdır.

$e^+e^+ \rightarrow W^+W^+$ süreci için t, u, ve s kanala ait genlik ifadeleri yazılırsa aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

$$\begin{aligned} -iM_t &= \left[\bar{v}(2)U_{ei} \left(-\frac{ig_W}{\sqrt{2}} \gamma^\mu \gamma_- \right) \epsilon_\mu^*(4) \right] \left[\frac{i(\not{q} + m_i)}{q^2 - m_i^2} \right] \\ &\quad \left[\bar{v}(1)U_{ei} \left(-\frac{ig_W}{\sqrt{2}} \gamma^\nu \gamma_- \right) \epsilon_\nu^*(3) \right] \\ &= \left[\bar{v}(2)U_{ei} \left(-\frac{ig_W}{\sqrt{2}} \gamma^\mu \gamma_- \right) \epsilon_\mu^*(4) \right] \left[\frac{i(\not{q} + m_i)}{q^2 - m_i^2} \right] \\ &\quad \left[\epsilon_\nu^*(3)U_{ei} \left(-\frac{ig_W}{\sqrt{2}} \gamma^\nu \gamma_+ \right) u(1) \right] \end{aligned} \quad (3.107)$$

M_t hesaplanırken Denklem (3.107)'de (p_1, p_3) köşesi akımı tersten yazıldı (Bkz EK 5). Artık M_t için son ifade yazılabilir.

$$M_t = - \underbrace{\left(\frac{g_W}{\sqrt{2}} \right)^2 \sum_i \frac{U_{ei}^2 m_i}{t - m_i^2}}_{c_i^*} \left[\bar{v}(2) \gamma_+ \not{\epsilon}^*(4) \not{\epsilon}^*(3) u(1) \right] \quad (3.108)$$

$$c_t^* \equiv \left(\frac{g_W}{\sqrt{2}} \right)^2 \sum_i \frac{U_{ei}^2 m_i}{t - m_i^2} \quad (3.109)$$

Yukarıdaki ifade (3.3) ifadesiyle karşılaştırılırsa form olarak birbirine benzer olduğu aralarındaki tek farkın U_{ei} karışım matrisinden geldiği görülür. Diğer bir deyişle, U_{ei}^* yerine kompleks eşleneği olan U_{ei} 'nin geldiği görülür. u kanal için tüm genlik hesabını tekrardan yapmak yerine M_t için yapılmış olan hesapta $\not{\epsilon}^*(4) \leftrightarrow \not{\epsilon}^*(3)$ yer değişimi yapılır.

$$M_u = - \underbrace{\left[\left(\frac{g_W}{\sqrt{2}} \right)^2 \sum_i \frac{U_{ei}^2 m_i}{u - m_i^2} \right]}_{c_u^*} \left[\bar{v}(2) \gamma_+ \not{\epsilon}^*(3) \not{\epsilon}^*(4) u(1) \right] \quad (3.110)$$

$$c_u^* \equiv \left(\frac{g_W}{\sqrt{2}} \right)^2 \sum_i \frac{U_{ei}^2 m_i}{u - m_i^2} \quad (3.111)$$

s kanal için yazılacak olan genlik hesabı için çift yüklü Higgs tripletinin (Δ^{--}) fermiyonlar ile etkileşme Lagranjiyen terimine (Bölüm 3.1.1) ve onun Hermitik eşleneğine bakılmalıdır.

$$\overline{\psi_{\alpha L}^c} \psi_{\alpha L} \Delta^{--} + \underbrace{\overline{\psi_{\alpha L}} \psi_{\alpha L}^c}_{h.c.} \Delta^{++} \quad (3.112)$$

Denklem (3.112)'da Hermitik eşlenik ifadesini kullanarak s kanal için genlik ifadesini yazılabilir.

$$\begin{aligned}
-iM_s &= \left[\epsilon_\mu^*(4) (2g_W^2 v g^{\mu\nu}) \gamma_\nu(3) \right] \left[\frac{i}{q^2 - m_\Delta^2} \right] \\
&\quad \left[\bar{v}(1) U_{ei}^2 \frac{m_i}{v} \gamma_+ \left(-\frac{ig_W}{\sqrt{2}} \gamma^\nu \right) u(2) \right] \\
M_s &= \underbrace{\left(\frac{g_W}{\sqrt{2}} \right)^2 \sum_i \frac{4U_{ei}^2 m_i}{s - m_\Delta^2}}_{c_s^*} \epsilon_\mu^*(4) \gamma_\nu(3) g^{\mu\nu} \left[\bar{v}(1) \gamma_+ u(2) \right]
\end{aligned} \tag{3.113}$$

$$c_s^* \equiv \left(\frac{g_W}{\sqrt{2}} \right)^2 \sum_i \frac{4U_{ei}^2 m_i}{s - m_\Delta^2} \tag{3.114}$$

Yukarıda elde edilen M_s ile Denklem (3.12) karşılaştırıldığında aradaki tek farkın U_{ei} karışım matrisinden geldiği görülür.

Helisite genlikleri yöntemi yardımıyla antiparçacıkları içeren $e^+e^+ \rightarrow W^+W^+$ süreci için genlik hesabı yapıldığında parçacık çözümlerine benzer sıfırdan farklı yedi spin konfigürasyonu elde edilir. Bu spin konfigürasyonları için elde edilen genlikler aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
M_{1110} &= -\left(\frac{s}{2\sqrt{2}m_W} \right) (\beta + 1) \sin \theta (c_t^* - c_u^*) \\
M_{1101} &= -\left(\frac{s}{2\sqrt{2}m_W} \right) (\beta + 1) \sin \theta (c_t^* - c_u^*) \\
M_{11-10} &= \left(\frac{s}{2\sqrt{2}m_W} \right) (\beta - 1) \sin \theta (c_t^* - c_u^*) \\
M_{-1-10-1} &= \left(\frac{s}{2\sqrt{2}m_W} \right) (\beta - 1) \sin \theta (c_t^* - c_u^*) \\
M_{1111} &= \sqrt{s} \left[\cos \theta (c_t^* - c_u^*) + c_t^* + c_u^* + c_s^* \right] \\
M_{11-1-1} &= -\sqrt{s} \left[\cos \theta (c_t^* - c_u^*) - c_t^* - c_u^* - c_s^* \right] \\
M_{1100} &= -\left(\frac{s\sqrt{s}}{4m_W^2} \right) \left[2\beta \cos \theta (c_t^* - c_u^*) - (\beta^2 + 1)(c_t^* + c_u^* + c_s^*) \right]
\end{aligned} \tag{3.115}$$

Bulunan bu sonuçlar (3.99) ifadeleriyle karşılaştırıldığında aralarındaki tek farkın c_i^* lerin içerisinde bulunan U_{ei} karışım matrisinden geldiği görülür. Genlik kareler parçacık çözümlerinde yapıldığı gibi yukarıdaki anti parçacık ifadeleri için de yapılabilir. Denklem (3.102)'te yapılan $|c_t - c_u|^2$ hesabını anti parçacıklar için yapmak istersek U_{ei}^* yerine kompleks eşleneği olan U_{ei} alınmalıdır. Anti parçacıklar için $|c_t - c_u|^2$ hesabının parçacık çözümlerine eşit olduğu aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}
|c_t^* - c_u^*|^2 &= \left(\frac{g_W}{\sqrt{2}} \right)^4 \left| \sum_i \frac{U_{ei}^2 m_i}{t - m_i^2} - \sum_j \frac{U_{ej}^2 m_j}{u - m_j^2} \right|^2 \\
&= \left(\frac{g_W}{\sqrt{2}} \right)^4 \left| \sum_i U_{ei}^2 m_i \left(\frac{1}{t - m_i^2} - \frac{1}{u - m_i^2} \right) \right|^2 \\
&= \left(\frac{g_W}{\sqrt{2}} \right)^4 \left[\sum_{i,j} U_{ei}^2 U_{ej}^{*2} m_i m_j \left(\frac{1}{t - m_i^2} - \frac{1}{u - m_i^2} \right) \left(\frac{1}{t - m_j^2} - \frac{1}{u - m_j^2} \right) \right] \\
&= \left(\frac{g_W}{\sqrt{2}} \right)^4 \left[\sum_{i=j} |U_{ei}|^4 m_i^2 \left(\frac{1}{t - m_i^2} - \frac{1}{u - m_i^2} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i \neq j} (U_{ei}^2 U_{ej}^{*2} + U_{ej}^2 U_{ei}^{*2}) m_i m_j \left(\frac{1}{t - m_i^2} - \frac{1}{u - m_i^2} \right) \left(\frac{1}{t - m_j^2} - \frac{1}{u - m_j^2} \right) \right] \\
&= \left(\frac{g_W}{\sqrt{2}} \right)^4 \left[\sum_{i=j} |U_{ei}|^4 m_i^2 \left(\frac{1}{t - m_i^2} - \frac{1}{u - m_i^2} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i>j} 2\Re(U_{ei}^* U_{ej})^2 m_i m_j \left(\frac{1}{t - m_i^2} - \frac{1}{u - m_i^2} \right) \left(\frac{1}{t - m_j^2} - \frac{1}{u - m_j^2} \right) \right] \\
&\quad (3.116)
\end{aligned}$$

Yukarıdaki ifade (3.102) ifadesi ile karşılaştırılacak olursa, asimetriye sebep olacak bir terim bulunmamaktadır. Hatırlanacak olursa nötrino osilasyonlarında, CP asimetrisine sebep olan terim imajiner terim idi (Bkz Denklem (2.51)).

3.3 İki Yöntemin Karşılaştırması

Bölüm 3.1’te spin toplamları yöntemi ile ve Bölüm 3.2’te helisite yöntemi ile genlik kare hesaplaması yapıldı. Bu bölümde iki yöntemin birbirine eşit olduğu gösterilecektir. Bunun için Denklem (3.99) ile verilen genliklerin mutlak karesi alınıp Bölüm 3.1.2’te elde edilen $|M_t|^2$, $|M_u|^2$, $|M_s|^2$ ve çapraz terimleri ile karşılaştırılmalıdır.

$$\begin{aligned}
 |M_{-1-111}|^2 &= (\sqrt{s})^2 \left| \cos \theta (c_t - c_u) + (c_t + c_u + c_s) \right|^2 \\
 &= s \left\{ \cos^2 \theta |c_t - c_u|^2 + |c_t + c_u + c_s|^2 + 2 \cos \theta \Re \left[(c_t - c_u)(c_t + c_u + c_s)^* \right] \right\} \\
 &= s \left\{ \left[|c_t|^2 + |c_u|^2 - 2 \Re(c_t c_u^*) \right] \cos^2 \theta \right. \\
 &\quad + \left[|c_t|^2 + |c_u|^2 + |c_s|^2 + 2 \Re(c_t c_u^*) + 2 \Re[(c_t + c_u) c_s^*] \right] \\
 &\quad \left. + 2 \cos \theta \Re \left[|c_t|^2 + c_t c_s^* - |c_u|^2 - c_u c_s^* \right] \right\} \\
 &\quad (3.117)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |M_{-1-1-1-1}|^2 &= (-\sqrt{s})^2 \left| \cos \theta (c_t - c_u) - (c_t + c_u + c_s) \right|^2 \\
 &= s \left\{ \cos^2 \theta |c_t - c_u|^2 + |c_t + c_u + c_s|^2 - 2 \cos \theta \Re \left[(c_t - c_u)(c_t + c_u + c_s)^* \right] \right\} \\
 &= s \left\{ \left[|c_t|^2 + |c_u|^2 - 2 \Re(c_t c_u^*) \right] \cos^2 \theta \right. \\
 &\quad + \left[|c_t|^2 + |c_u|^2 + |c_s|^2 + 2 \Re(c_t c_u^*) + 2 \Re[(c_t + c_u) c_s^*] \right] \\
 &\quad \left. - 2 \cos \theta \Re \left[|c_t|^2 + c_t c_s^* - |c_u|^2 - c_u c_s^* \right] \right\} \\
 &\quad (3.118)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|M_{-1-100}|^2 &= \left(\frac{s\sqrt{s}}{4m_W^2} \right)^2 \left| 2\beta \cos \theta (c_t - c_u) - (\beta^2 + 1)(c_t + c_u + c_s) \right|^2 \\
&= \frac{s^3}{16m_W^4} \left\{ 4\beta^2 \cos^2 \theta |c_t - c_u|^2 + (\beta^2 + 1)^2 |c_t + c_u + c_s|^2 \right. \\
&\quad \left. - 4\beta \cos \theta (\beta^2 + 1) \Re \left[(c_t - c_u)(c_t + c_u + c_s)^* \right] \right\} \\
&= \frac{s^3}{16m_W^4} \left\{ 4\beta^2 \cos^2 \theta \left[|c_t|^2 + |c_u|^2 - 2\Re(c_t c_u^*) \right] \right. \\
&\quad + (\beta^2 + 1)^2 \left[|c_t|^2 + |c_u|^2 + |c_s|^2 + 2\Re(c_t c_u^*) + 2\Re((c_t + c_u)c_s^*) \right] \\
&\quad \left. - 4\beta \cos \theta (\beta^2 + 1) \Re \left[|c_t|^2 + c_t c_s^* - |c_u|^2 - c_u c_s^* \right] \right\} \\
&\quad (3.119)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|M_{-1-10-1}|^2 &= \left(\frac{s}{2\sqrt{2}m_W} \right)^2 (\beta - 1)^2 \sin^2 \theta |c_t - c_u|^2 \\
&= \frac{s^2}{8m_W^2} (\beta - 1)^2 \sin^2 \theta \left[|c_t|^2 + |c_u|^2 - 2\Re(c_t c_u^*) \right] \\
&\quad (3.120)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|M_{-1-1-10}|^2 &= \left(\frac{s}{2\sqrt{2}m_W} \right)^2 (\beta - 1)^2 \sin^2 \theta |c_t - c_u|^2 \\
&= \frac{s^2}{8m_W^2} (\beta - 1)^2 \sin^2 \theta \left[|c_t|^2 + |c_u|^2 - 2\Re(c_t c_u^*) \right] \\
&\quad (3.121)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|M_{-1-1-10}|^2 &= \left(\frac{-s}{2\sqrt{2}m_W} \right)^2 (\beta + 1)^2 \sin^2 \theta |c_t - c_u|^2 \\
&= \frac{s^2}{8m_W^2} (\beta + 1)^2 \sin^2 \theta \left[|c_t|^2 + |c_u|^2 - 2\Re(c_t c_u^*) \right] \\
&\quad (3.122)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|M_{-1-101}|^2 &= \left(\frac{-s}{2\sqrt{2}m_W} \right)^2 (\beta + 1)^2 \sin^2 \theta |c_t - c_u|^2 \\
&= \frac{s^2}{8m_W^2} (\beta + 1)^2 \sin^2 \theta \left[|c_t|^2 + |c_u|^2 - 2\Re(c_t c_u^*) \right] \\
&\quad (3.123)
\end{aligned}$$

(3.117)-(3.123) denklemlerinin $|c_t|^2$ ile orantılı terimleri ayrıılıp toplanırda $|M_t|^2$ elde edilmelidir. Benzer şekilde $|c_u|^2$ ve $|c_s|^2$ ile orantılı terimlerin toplamı sırasıyla $|M_u|^2$ ve $|M_s|^2$ 'yi vermelidir. $c_t c_u^*$, $c_t c_s^*$ gibi çapraz çarpımlar ise $M_t M_u^*$ ve $M_t M_s^*$ gibi girişim terimlerini vermelidir.

İspatı tek bir terim için yapmak yeterlidir. Diğer terimler için de hesap tekniği aynıdır. $|c_t|^2$ 'li terimlerin toplamının $|M_t|^2$ 'ye eşit olduğunu göstermekle başlayabiliriz. İspatı yapabilmek için aşağıdaki eşitliklere ihtiyaç duyulacaktır.

$$\begin{aligned}
(\beta + 1)^2 &= \beta^2 + 2\beta + 1 \\
&= \left(1 - \frac{4m_W^2}{s}\right) + 2\beta + 1 \\
&= 2 - \frac{4m_W^2}{s} + 2\beta \\
(\beta - 1)^2 &= \beta^2 - 2\beta + 1 \\
&= 2 - \frac{4m_W^2}{s} - 2\beta \\
(\beta^2 + 1) &= 2 - \frac{4m_W^2}{s} \\
(\beta^2 + 1)^2 &= 4 - 16\frac{m_W^2}{s} + 16\frac{m_W^4}{s^2}
\end{aligned} \tag{3.124}$$

(3.117)-(3.123) denklemlerinden, $|c_t|^2$ katsayılı olan terimler aşağıda sırasıyla verilmiştir.

$$\begin{aligned}
& |c_t|^2 s \{ \cos^2 \theta + 2 \cos \theta + 1 \} \\
& |c_t|^2 s \{ \cos^2 \theta - 2 \cos \theta + 1 \} \\
& |c_t|^2 \frac{s^3}{16m_W^4} \{ 4\beta^2 \cos^2 \theta + (\beta^2 + 1)^2 - 4 \cos \theta \beta (\beta^2 + 1) \} \\
& |c_t|^2 \frac{s^2}{8m_W^2} (\beta - 1)^2 \sin^2 \theta \\
& |c_t|^2 \frac{s^2}{8m_W^2} (\beta - 1)^2 \sin^2 \theta \\
& |c_t|^2 \frac{s^2}{8m_W^2} (\beta + 1)^2 \sin^2 \theta \\
& |c_t|^2 \frac{s^2}{8m_W^2} (\beta + 1)^2 \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{3.125}$$

Yukarıdaki terimleri toplar ve m_W 'nun kuvvetlerine göre gruplarsak aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\begin{aligned}
& |c_t|^2 \left\{ 2s (\cos^2 \theta + 1) + \frac{s^3}{16m_W^4} [4\beta^2 \cos^2 \theta + (\beta^2 + 1)^2 - 4 \cos \theta \beta (\beta^2 + 1)] \right. \\
& \quad \left. + \underbrace{\frac{s^2}{4m_W^2} (\beta - 1)^2 \sin^2 \theta + \frac{s^2}{4m_W^2} (\beta + 1)^2 \sin^2 \theta}_{\frac{s^2}{2m_W^2} (\beta^2 + 1) \sin^2 \theta} \right\}
\end{aligned} \tag{3.126}$$

Denklem (3.124) de yazılan eşitlikler denklem (3.126) da yerine yazılırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$|c_t|^2 \left\{ s (4 \cos^2 \theta + 1) + \frac{s^3}{4m_W^4} [1 + \cos^2 \theta - 2\beta \cos \theta] - \frac{s^2}{m_W^2} (2 \cos^2 \theta - \beta \cos \theta) \right\} \tag{3.127}$$

Bulunan bu sonucun Denklem (3.30) de elde edilen $|M_t|^2$ ye eşit olduğu gösterilebilir. Bunun için $|M_t|^2$ tanımını alıp, üzerinde birkaç adım işlem yapmak yeterli olacaktır. (3.30) ifadesini burada tekrardan yazacak olursak;

$$|M_t|^2 = |c_t|^2 \left[s + \frac{2}{m_w^2} (m_w^2 - t)(m_w^2 - u) + \frac{1}{m_w^4} (s - 2m_w^2)(m_w^2 - t)^2 \right] \quad (3.128)$$

Yukarıdaki ifadede, t ve u için Denklem (3.65) de verilen tanımları kullanılıp yerlerine yazılırsa $|M_t|^2$ 'nin Denklem (3.127)'e eşit olduğu görülür.

$$\begin{aligned} |M_t|^2 &= |c_t|^2 \left\{ s + \frac{2}{m_w^2} \left(\cancel{m_w^2} + \frac{s}{2} (1 - \beta \cos \theta) - \cancel{m_w^2} \right) \left(\cancel{m_w^2} + \frac{s}{2} (1 + \beta \cos \theta) - \cancel{m_w^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m_w^4} (s - 2m_w^2) \left(\cancel{m_w^2} + \frac{s}{2} (1 - \beta \cos \theta) - \cancel{m_w^2} \right)^2 \right\} \\ &= |c_t|^2 \left\{ \frac{s^2}{2m_w^2} (1 - \beta^2 \cos^2 \theta) + \frac{s^2}{4m_w^4} (s - 2m_w^2) (1 - \beta \cos \theta)^2 + s \right\} \\ &= |c_t|^2 \left\{ \frac{s^2}{2m_w^2} \left(1 - \left(1 - \frac{4m_w^2}{s} \right) \cos^2 \theta \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{s^3}{4m_w^4} - \frac{s^2}{2m_w^2} \right) \left[1 - 2\beta \cos \theta + \left(1 - \frac{4m_w^2}{s} \right) \cos^2 \theta \right] + s \right\} \\ &= |c_t|^2 \left\{ \frac{s^2}{2m_w^2} (2\beta \cos \theta - 4 \cos^2 \theta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s^3}{4m_w^4} (1 - 2\beta \cos \theta + \cos^2 \theta) + s (4 \cos^2 \theta + 1) \right\} \\ &= |c_t|^2 \left\{ \frac{s^3}{4m_w^4} (1 - 2\beta \cos \theta + \cos^2 \theta) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{s^2}{m_w^2} (2 \cos^2 \theta - \beta \cos \theta) + s (4 \cos^2 \theta + 1) \right\} \end{aligned} \quad (3.129)$$

İspat burada tamamlanmış olur.

4. BULGULAR

4.1 CP Asimetrisi

Bölüm 3.2.7’de $e^-e^- \rightarrow W^-W^-$ için genlik kare hesabı yapıldı. Bölüm 3.2.8’da ise antiparçacıklar için $e^+e^+ \rightarrow W^+W^+$ genlik kare hesabı yapıldı. Genlik hesabında her ne kadar U’nun kompleks eşleniği gelmiş olsa da genliğin karesi alındığında tüm imajiner terimler ortadan kalkmıştır. Dolayısıyla hem parçacıkların, hem de antiparçacıkların yer aldığı bu iki farklı süreçte genlik kareler eşittir.

Asimetriyi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$A_{i}^{CP} = \frac{|M_i^{\text{parçacık}}|^2 - |M_i^{\text{anti parçacık}}|^2}{|M_i^{\text{parçacık}}|^2 + |M_i^{\text{anti parçacık}}|^2} \quad (4.1)$$

Burada i indisi olası tüm helisite konfigürasyonlarını ifade etmektedir. Parçacık ve antiparçacık çözümlerinin eşit olduğunu gördüğümüzden Denklem (4.1) de tanımlanan asimetri sıfırdır.

$$A^{CP} = 0 \quad (4.2)$$

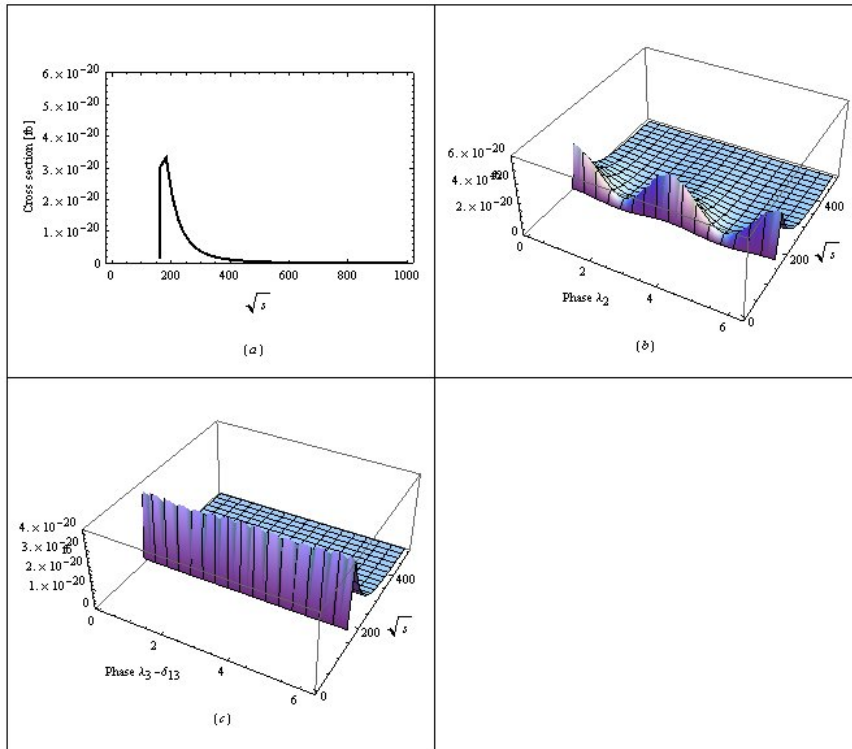
4.2 Üç Nötrino Karışımı

Bu bölümde Denklem (3.99)’deki sıfırdan farklı yedi genlik kare için diferansiyel tesir kesiti – enerji şekilleri³ çizilmiştir. Tüm grafiklerde saçılma açısı $\theta = 90^\circ$, Dirac fazı $0 \leq \delta_{13} < 2\pi$ aralığında, Majorana fazları $0 \leq \lambda_{2,3} < 2\pi$ aralığında ve çeşni elektron nötrino kütlesi $|m_e| \equiv \sum_i U_{ei}^{*2} m_i \leq 2.3 \text{ eV}$ ve Higgs triplet kütlesi 120 GeV olarak alınmıştır.

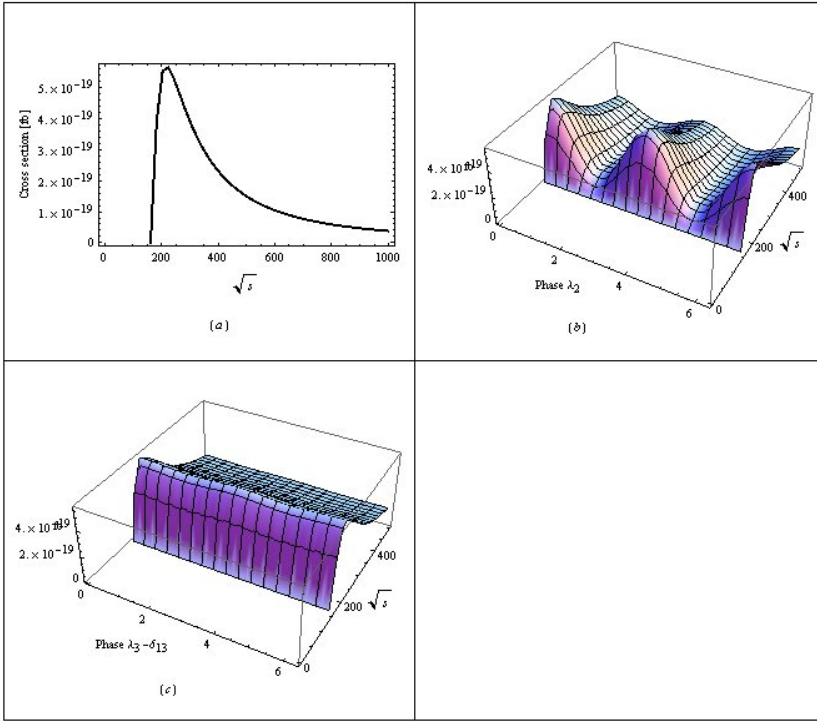
³ Şekiller Mathematica programı yardımıyla çizilmiştir. www.wolfram.com

Bu bölümde karışımının, üç hafif nötrino arasında gerçekleştiği varsayılacaktır. Her şekil üç alt şekilden (a-c) oluşmaktadır. U_{ei} nötrino karışım matrisindeki her fazın tesir kesitini ne ölçüde etkilediğini görebilmek için sırasıyla matristeki tüm terimler için faz-tesir kesiti grafiği çizilir ve diğer tüm fazlar sıfır kabul edilir. Bu alt şekillerden ilki (a), tüm fazların sıfır olduğu durum için; ikincisi (b), $\lambda_3 - \delta_{13}$ fazı sıfır için; üçüncüsü (c), Majorana λ_2 fazı sıfır için çizilmiş faz-tesir kesiti şekilleridir. Nötrino karışım matrisinin tam ifadesi denklem (2.40)'da verilmişti. Bu bölümde karışım matrisinin sadece ilk satırı ile yani $\alpha = e$ durumu ile ilgileniyoruz. Karışım matrisinin ilk satırı aşağıdaki gibi ifade edilir.

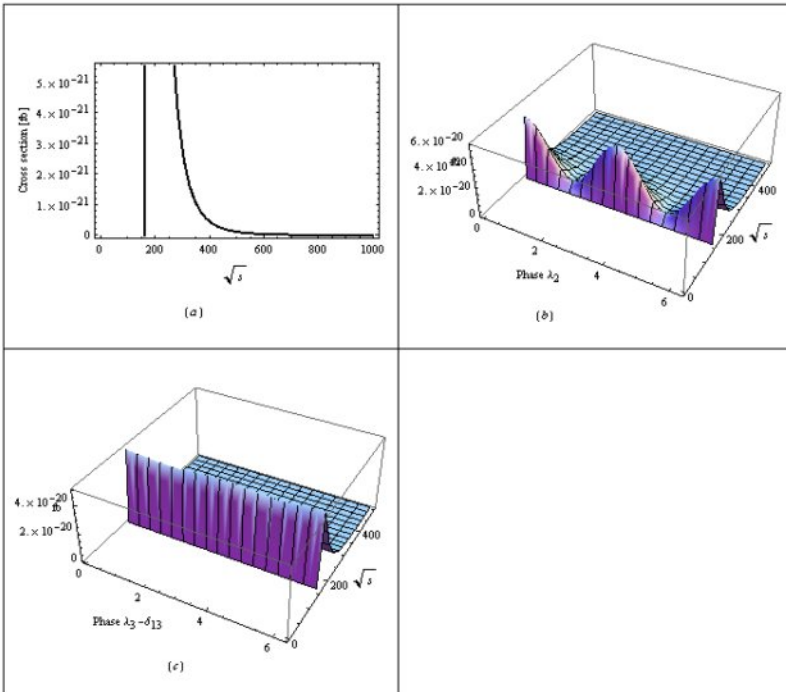
$$U_{ei} = \{c_{12}c_{13}, s_{12}c_{13}e^{i\lambda_2}, s_{13}e^{-i\delta_{13}}e^{i\lambda_3}\} \quad (4.3)$$



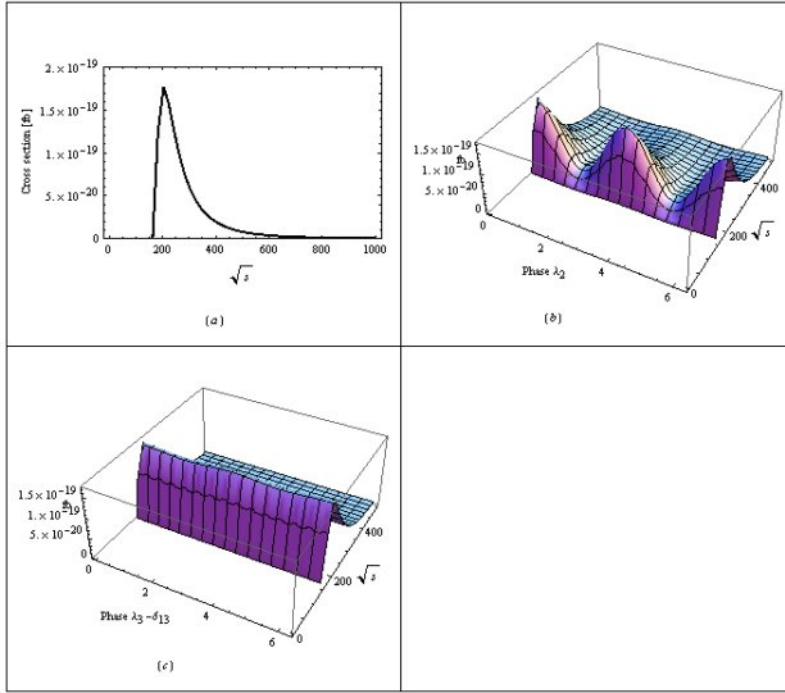
Şekil 4.1 $|M_{-1-100}|^2$ için çizilen diferansiyel tesir kesiti – enerji bağıntıları



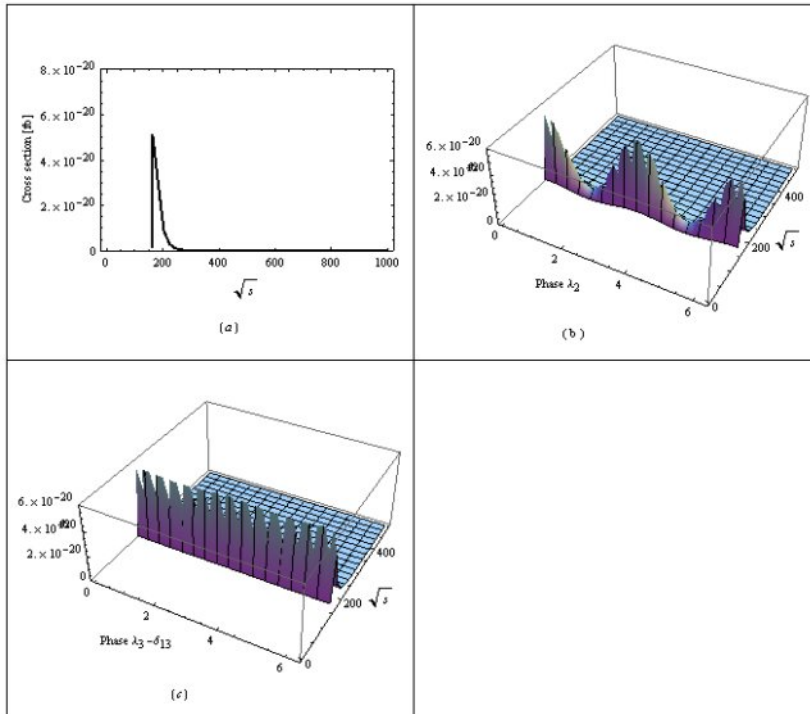
Şekil 4.2 $|M_{-1-110}|^2$ için çizilen diferansiyel tesir kesiti – enerji bağıntıları



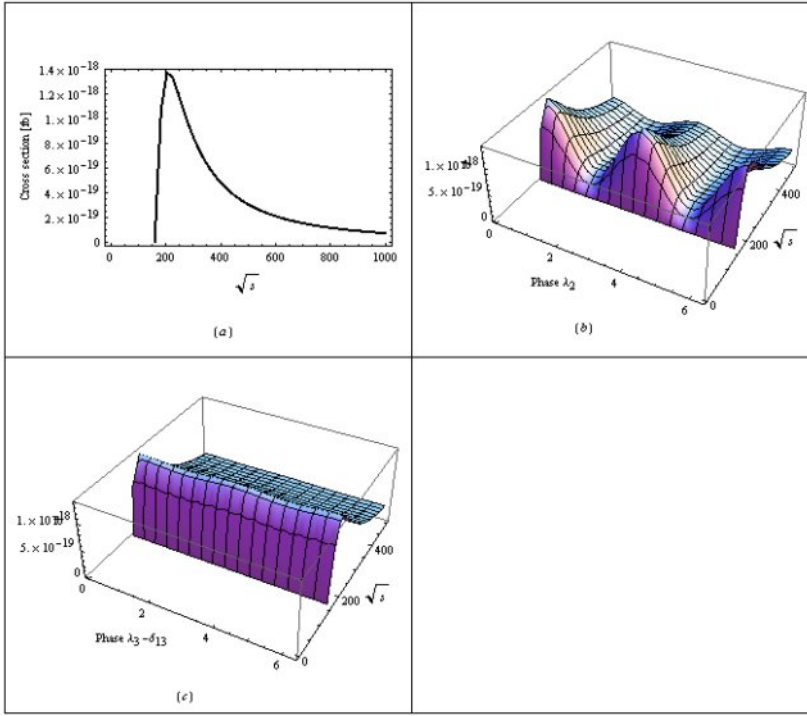
Şekil 4.3 $|M_{-1-1-10}|^2$ için çizilen diferansiyel tesir kesiti – enerji bağıntıları



Şekil 4.4 $|M_{-1-111}|^2$ için çizilen diferansiyel tesir kesiti – enerji bağıntıları



Şekil 4.5 $|M_{-1-1-1-1}|^2$ için çizilen diferansiyel tesir kesiti – enerji bağıntıları



Şekil 4.6 $|M|^2$ için çizilen diferansiyel tesir kesiti – enerji bağıntıları

4.3 Dört Nötrino Karışımı

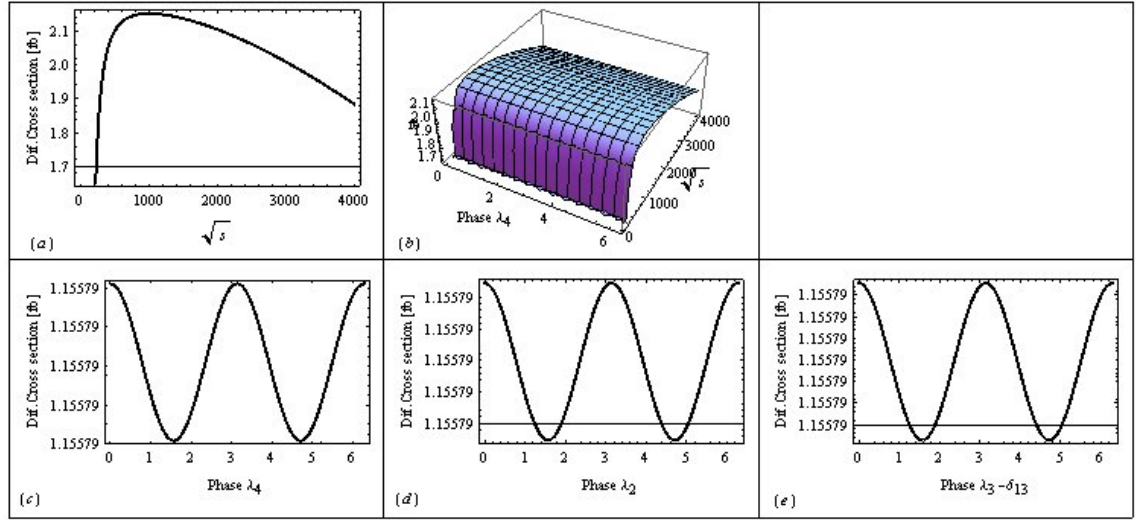
Bu bölümde karışımın, üç hafif ve biri ağır olmak üzere toplam dört nötrino arasında gerçekleştiği varsayılacaktır. Denklem (4.3), U_{ei} karışım matrisinin üç nötrino için yazılmış ifadesidir. Dördüncü bir nötrinin eklenmesiyle karışım matrisini,

$$U_{ei} = \{c_{12}c_{13}, s_{12}c_{13}e^{i\lambda_2}, s_{13}e^{-i\delta_{13}}e^{i\lambda_3}, |U_{e4}|e^{i\lambda_4}\} \quad (4.4)$$

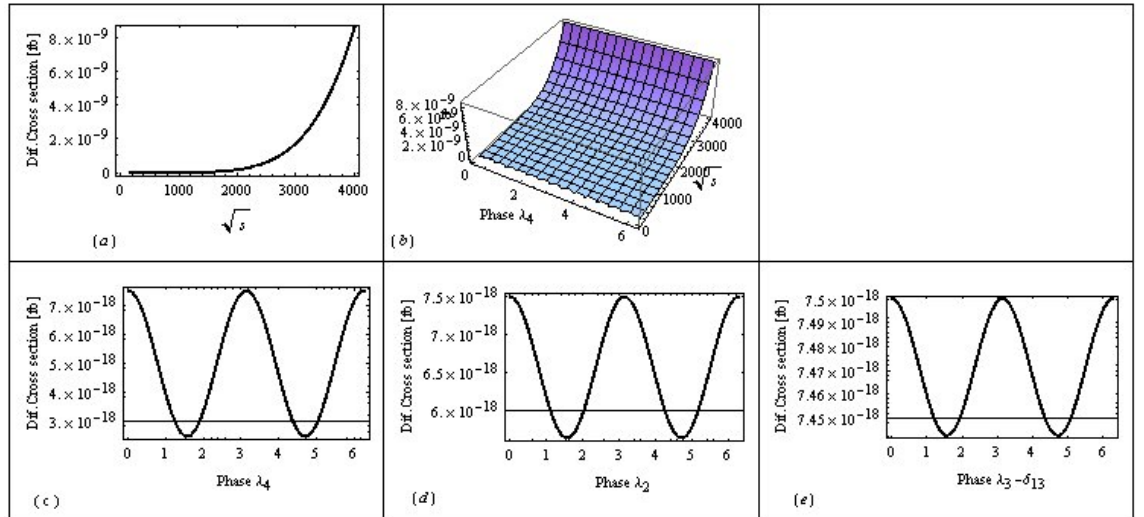
formunda ifade edebiliriz. $|U_{e4}|$ ağır nötrino karışım matris elemanı ve kütlesi için aşağıdaki deneysel kıstas esas alınmıştır (Rodejohann 2010).

$$\left| \sum_i \frac{U_{ei}^{*2}}{M_i} \right| \leq 5 \times 10^{-18} \text{ GeV}^{-1} \quad (4.5)$$

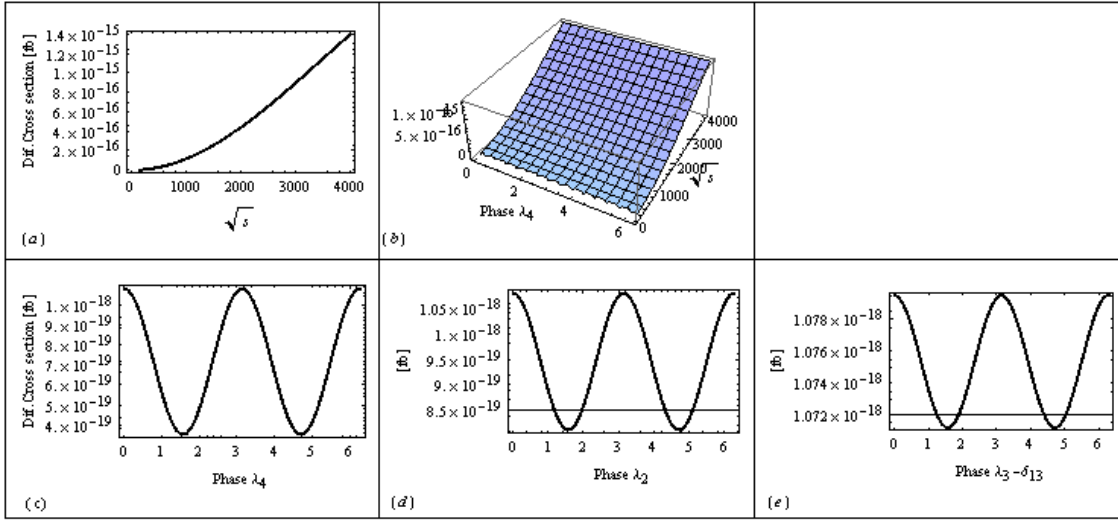
Dördüncü ağır nötrininonun kütlesi $m_4 = 10^4$ GeV alınmıştır. Bu bölümde çizilen şekillerin her biri beş alt şekilden (a-e) oluşmaktadır. Bu alt şekillerden ilki (a), tüm fazların sıfır olduğu durum için; ikincisi (b), λ_4 fazı ve tüm enerji skalası için; üçüncüsü (c), λ_4 fazı ve $\sqrt{s} = 180$ GeV için; dördüncüsü (d), λ_2 fazı için; son olarak beşincisi, δ_{13} fazı için tesir kesitine olan bağılılıklarının grafiği çizilmiştir.



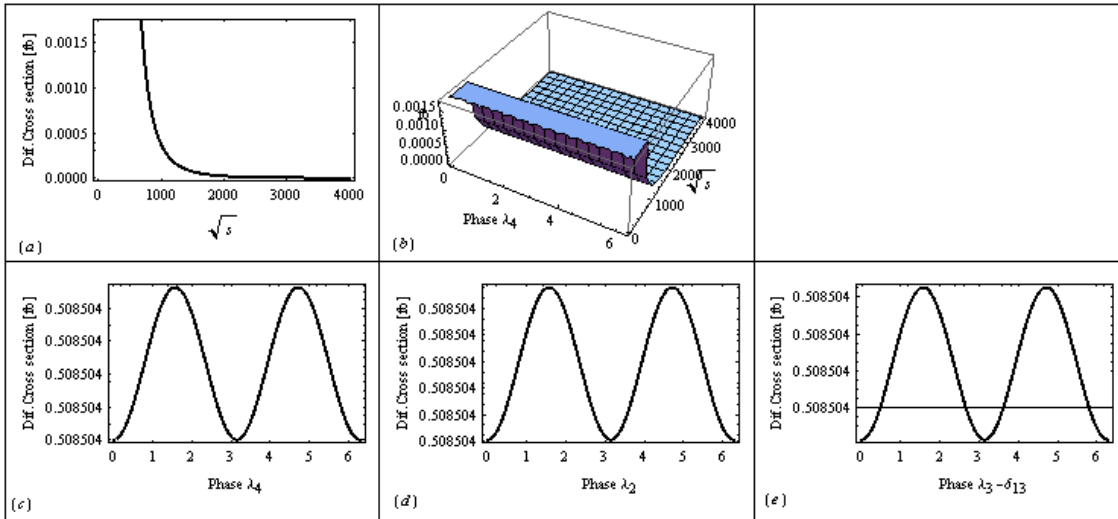
Şekil 4.7 $|M_{-1-100}|^2$ için çizilen Diferansiyel Tesir kesiti – Enerji bağıntıları



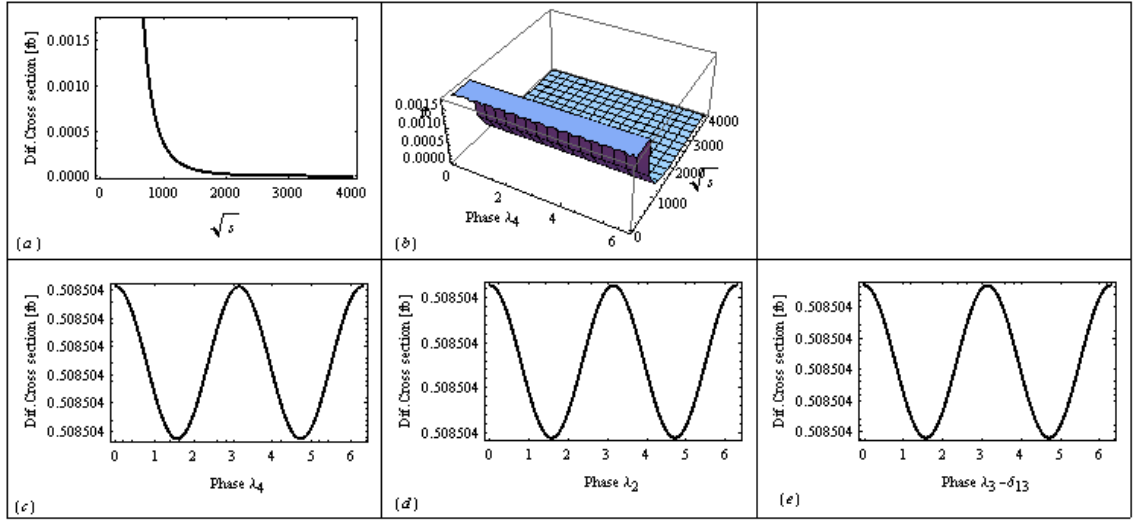
Şekil 4.8 $|M_{-1-110}|^2$ için çizilen Diferansiyel Tesir kesiti – Enerji bağıntıları



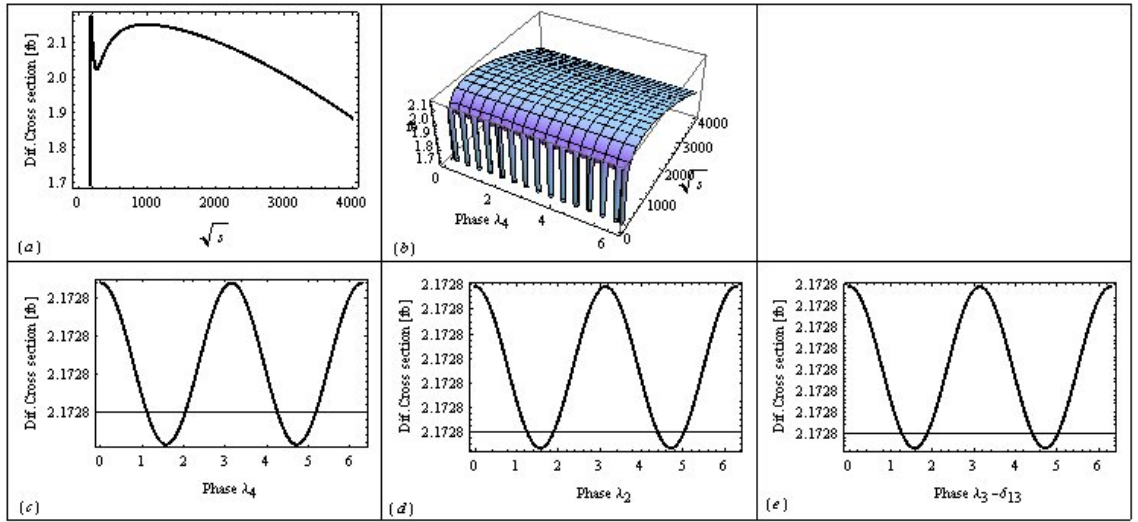
Şekil 4.9 $|M_{-1-1-10}|^2$ için çizilen Diferansiyel Tesir kesiti – Enerji bağıntıları



Şekil 4.10 $|M_{-1-111}|^2$ için çizilen Diferansiyel Tesir kesiti – Enerji bağıntıları



Şekil 4.11 $|M_{-1-1-1-1}|^2$ için çizilen Diferansiyel Tesir kesiti – Enerji bağıntıları



Şekil 4.12 $|M|^2$ için çizilen Diferansiyel Tesir kesiti – Enerji bağıntıları

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde $e^-e^- \rightarrow W^-W^-$ ters nötrinosuz çift beta saçılma süreci ayrıntılı olarak incelenmiştir. Giren ve çıkan parçacıkların spin-polarizasyonları da incelemeye katılmış ayrıca nötrino karışım matrisinin özellikle CP bozucu fazlarının tesir kesitine etkileri incelenmiştir.

Şekil 4.6 üç hafif nötrino karışımı varsayılarak çizilmiş grafik olup, dikkat edilirse tesir kesiti üzerinde en fazla etkinin, λ_2 Majorana fazından geldiği görülmektedir. (Şekil 4.1-Şekil 4.5) incelenecek olursa, tesir kesitine tüm helisite konfigürasyonlarından yaklaşık olarak aynı miktarda katkı geldiği görülmektedir. Tesir kesitinin sayısal değerinin 10^{-18} fb mertebesinde olduğu görülmektedir.

Şekil 4.12 incelenecek olursa, sadece hafif nötrinoları içeren Şekil 4.6'nin aksine burada Majorana ve Dirac fazlarının tesir kesiti üzerinde neredeyse hiç etkisi olmadığı görülmektedir. Şekil 4.8 ve Şekil 4.9 fazların en etkili olduğu terimlerdir. Şekil 4.7 yakından incelenecek olursa tesir kesitine en fazla katkının M_{-1-100} helisite konfigürasyonundan geldiği görülmektedir. Tesir kesitinin sayısal değerinin 2 fb mertebesinde olduğu görülmektedir.

Yalnızca SM nötrinoları kullanılarak (tesir kesiti $\sim 10^{-18}$ fb) ters nötrinosuz çift beta sürecinin gözlenemeyeceği Bölüm 3.1.4 de yapılmış olan olay sayısı hesapları ile kesinlik kazanmıştır. Ters nötrinosuz çift beta sürecini gözleyebilir kılmanın tek yolu teoriye en azından bir ağır nötrino eklemekten geçmektedir.

Bölüm 3.2.8'te parçacık ve anti parçacık çözümlerinin Dirac ve Majorana fazlarını içermesine rağmen form olarak birbirlerine eşit olduğu dolayısıyla Denklem (4.1) ile tanımlanan CP asimetrisinin gözlenemeyeceği sonucuna varılmıştır.

Majorana nötrinosunun ara parçacık olarak yer aldığı $\gamma e^- \rightarrow \nu \ell^- \ell^- W^+$, $\gamma \gamma \rightarrow \ell^+ \ell^+ W^- W^-$, $e^- e^- \rightarrow \nu_e \nu_e \ell^- \ell^-$, $e^- \gamma \rightarrow e^+ W^- W^-$ süreçler de literatürde incelenmiştir. Gelecekte inşa

edilecek foton hızlandırıcılarında bu tür süreçlerin helisite genlikleri yöntemi ile incelenmeleri de mümkündür ve ileriki bir çalışmanın konusunu oluşturacaktır.

KAYNAKLAR

- Adamson, P. *et al.* 2008. MINOS Collab. Phys.Rev.Lett. 101, 131802.
- Ahmad, Q.R. *et al.* 2001. SNO Collab. Phys.Rev.Lett. 87, 071301.
- Ahmad, Q.R. *et al.* 2002. SNO Collab. Phys.Rev.Lett. 89, 011301.
- Ahn, M.H. *et al.* 2006. K2K Collab. Phys.Rev.D74,0720003.
- Akaslan, S. ve Yilmazer, A. 2011. Effects of CP violating phases on the inverse neutrinoless double beta scattering $e-e^- \rightarrow W^-W^-$. article to be submitted.
- Ananthanarayan, B. and Minkowski, P. 1996. CP Violation in Heavy Neutrino Mediated $ee \rightarrow WW$. Physics Letters B , 130.
- Araki, T. *et al.* 2005. KamLAND Collab.Phys. Rev. Lett. 94, 081801.
- Ashie, Y. *et al.* 2004. Super Kamiokande Collab. Phys. Rev. Lett. 93, 101801.
- Atre, A., Han, T., Pascoli, S. and Zhang, B. 2009. The Search for heavy Majorana neutrinos. IOP Publishing .
- Avignone, F.T., Elliot , S.R. and Engel, J. 2008. Rev. Mod. Phys., 80, 481.
- Belanger, G., Boudjema, F., London, D. and Nadeau, H. 1996. Inverse neutrinoless double beta decay reexamined. Physical Review D , 6292-6300.
- Bilenky, S. 2006. Majorana neutrino mixing. IOP Publishing , R127-R129.
- Cvetic, G. and Kim, C. 1999. Heavy Majorana Neutrinos at $e-e^+$ Colliders. Physical Review Letters , 4761.
- Duka, P., Gluza, J. and Zralek, M. 1998. Influence of the left-handed part of the neutrino mass matrix on the lepton number violating $ee \rightarrow WW$ process. Physical Review D , 053009.
- Eguchi, K. *et al.* 2003. KamLAND Collab.Phys. Rev. Lett. 90, 021802.
- Fukuda, Y. *et al.* 1996. Kamiokande Collab. Phys. Rev. Lett. 77, 1683.
- Fukuda, Y. *et al.* 1998. Super Kamiokande Collab. Phys. Rev. Lett. 81, 1562.
- Fukuda, S., *et al.* 2002. Super Kamiokande. Phys. Lett. B539. 179.
- Giunti, C. 2007. Fundamentals of Neutrino Physics and Astropysics. United States: Oxford Univesity Press.
- Giunti, C. 2008. Neutrino Flavor States and the Quantum Theory of Neutrino Oscillations. arXiv:hp-ph/08010653 .
- Giunti, C. 2001. Neutrinoless double beta decay phenomenology. IPPP Workshop.

- Giunti, C. 2006. Theory and Phenomenology of Neutrino Mixing. arXiv:hep-ph/0611125 .
- Giunti, C. 2004. Theory of Neutrino Oscillations. arXiv:hep-ph/0409230.
- Guler, M. *et al.* 2000. OPERA Collab. CERN/SPSC. 2000-028.
- Gutierrez, T.D. 2006. Distinguishing between Dirac and Majorana Neutrinos with Two-Particle Interferometry. Physical Review Letters , 121802.
- Gonzales Garcia, M.C. 2008. Phenomenology with massive neutrinos. Phys.Reps. 460,1
- Greub, C. and Minkowski, P. 1996. Heavy Majorana neutrinos in ee collisions. arXiv:hep-ph/9612340 .
- Griffiths, D. 1987. Introduction to Elementary Particles. John Wiley & Sons.
- Haber, H.E. 1994. Spin Formalism and Applications to New Physics Searches. arXiv:hep-ph/9405376 .
- Helde, P., Huitu, K., Maalampi, J. and Raidal, M. 1994. Vector boson pair production in ee collisions with polarized beams. arXiv:hep-ph/9409320 .
- Helmer, R. 2000. First Neutrino Observations from the Sudbury Neutrino Observatory. Sixth International Tau Lepton Physics Conference . Victoria Canada .
- Kajita, T. 2009. Neutrino Oscillations: Discovery, current status and future directions Int. Journal of Modern Physics A, 24, 3437.
- Kayser, B. 2008. Neutrino Oscillation Phenomenology. arXiv:hep-ph/08041121 .
- Kraus C. *et al.* 2005. Eur.Phys. J., 40, 447, hep-ex/0412056.
- Lazarides, G., Shafi, Q. and Wetterich, C. 1981. Nucl. Phys. B181, 287.
- Lobashev, V.M. *et al.* 1999. Physics Letters, B460, 227-235.
- Lee, J. S. 2008. Higgs Triplet Model: Summary and Proposals. The 2nd Working Class Meeting on LHC Phenomenology.
- Michael, D.G. *et al.* 2006. MINOS Collab. Phys.Rev.Lett. 97, 191801.
- Mohapatra, R.N. and Senjanovic, G. 1981. Phys. Rev. D23,165.
- Nakamura, K. and Petcov, S.T. 2010. Particle Data Group.
- Pontecorvo, B. 1967. Zh. Eksp. Teor. Fiz. 53, 1717
- Pressutti, J., Sampayo, O. and I.Aranda, J. 2001. Signatures for Majorana neutrinos in e - γ colliders. Physical Review D , 073007.
- Rizzo, T. G. 1982. Inverse Neutrinoless Double Beta Decay. *Physics Letters* , 23-28.

- Rodejohann, W. 2003. A Parametrization for the Neutrino Mixing Matrix. arXiv:hep-ph/0309249 .
- Rodejohann, W. 2010. Inverse neutrinoless double beta decay revisited: Neutrinos, Higgs triplet, and a muon collider. Physical Review D , 114001.
- Rodejohann, W. 2001. Phenomenological Aspects of Majorana Neutrino Mass Matrices. Dissertation . University of Dortmund.
- Schechter, J. and Valle, J.W.F. 1980. Phys.Rev. D22,2227.
- Simirnov, A. 2008. Neutrino Physics: Recent theoretical developments. Acta Physica Polonica B. 39, 2717.

EKLER

EK 1 GAMMA MATRİS CEBİRİ	83
EK 2 SIK KULLANILAN İZ EŞİTLİKLERİ	85
EK 3 $Tr\{\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\kappa\gamma^\sigma\}$	87
EK 4 Mandelstam Değişkenleri.....	95
EK 5 Elektrozayıf Akımın Yük Eşleneği.....	99
EK 6 FEYNMAN KÖŞE FAKTÖRLERİ	101

EK 1 Gamma Matris Cebiri

Tezin geri kalan kısmı ağırlıklı olarak gamma matrislerinin çarpımını ve izlerini içerdiğinden bu bölümde gamma matrisleri hakkında özet bir bilgi vermek yerinde olacaktır.

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (1.1)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \quad (1.2)$$

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (1.3)$$

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^i)^2 = -1, \quad (\gamma^5)^2 = 1 \quad (1.4)$$

$$\gamma^{0\dagger} = 1, \quad \gamma^{i\dagger} = -1, \quad \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \gamma^{5\dagger} &= -i\gamma^{3\dagger}\gamma^{2\dagger}\gamma^{1\dagger}\gamma^{0\dagger} \\ &= -i(-\gamma^3)(-\gamma^2)(-\gamma^1)(\gamma^0) \\ &= i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 \\ &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\ &= \gamma^5 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\gamma_\pm = \left(\frac{1 \pm \gamma^5}{2} \right), \quad (\gamma_\pm)^\dagger = \left(\frac{1 \pm \gamma^{5\dagger}}{2} \right) = \gamma_\pm \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} (1 \pm \gamma^5)^2 &= 1 \pm 2\gamma^5 + (\gamma^5)^2 \\ &= 2 \pm 2\gamma^5 \\ &= 2(1 \pm \gamma^5) \end{aligned} \quad (1.8)$$

EK 2 Sık Kullanılan İz Eşitlikleri

Ters nötrinosuz çift beta bozunumu tesir kesiti hesabında spin toplamları yöntemiyle hesap yapıldığında gamma matrislerinin çok uzun dizilerinin izinin hesaplanması gerekmektedir. Bu dizilerin uzunluğu altı gamma matrisine kadar çıkmaktadır. Spin toplamları yöntemiyle yapılacak olan hesaplara hazırlık olması açısından bu bölümde en çok karşılaşılan gamma matris dizileri ve bu dizilerin iz hesapları yapılacaktır. Dört farklı gamma matrisi olduğundan, dörtten daha fazla gamma matrisinin çarpımı dört veya daha az gamma matrisi çarpımına indirgenebilir.

$$\begin{aligned} Tr\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\sigma\} &= g^{\mu\nu} Tr\{\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\sigma\} - g^{\mu\alpha} Tr\{\gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\sigma\} \\ &+ g^{\mu\beta} Tr\{\gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\sigma\} - g^{\mu\rho} Tr\{\gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\sigma\} \\ &+ g^{\mu\sigma} Tr\{\gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\rho\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha})$$

(2.1) ifadesinde altı gamma matrisi çarpımı, dört gamma matrisi çarpımına indirgenmiştir.

$$\begin{aligned} Tr(\gamma^\mu) &= 0, \quad Tr\left(\underbrace{\gamma \dots \gamma}_{\text{tek sayı}}\right) = 0 \\ Tr(\gamma^5) &= 0, \quad Tr\left(\gamma^5 \underbrace{\gamma \dots \gamma}_{\text{tek sayı}}\right) = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

(2.2) ifadesinde, tek sayıda gamma matrisinin izinin sıfır olduğu görülmektedir.

$$\begin{aligned} Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} \\ Tr(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$Tr(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \quad (2.4)$$

EK 3 $Tr\{\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\kappa\gamma^\sigma\}$

İzi alabilmek için $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha$ çarpımını baz matrisler cinsinden yazmalıyız.

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha = a_{\mu'}\gamma^{\mu'} + b\gamma^5 + c_{\mu'}\gamma^{\mu'}\gamma^5 + d_{\mu'\nu'}\sigma^{\mu'\nu'} + eI \quad (3.1)$$

$a_{\mu'}$ katsayısını bulmak için denklem (3.1)'te eşitliğin her iki yanını γ^β ile çarpılıp izi alınır. Burada β 'nın herhangi özel bir anlamı olmakla birlikte denklem (3.1)'te kullanılmayan bir indis seçilmelidir.

$$\begin{aligned} Tr\{\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\} &= a_{\mu'} \underbrace{Tr\{\gamma^{\mu'}\gamma^\beta\}}_{4g^{\mu\beta}} + b \underbrace{Tr\{\gamma^5\gamma^\beta\}}_0 \\ &\quad + c_{\mu'} \underbrace{Tr\{\gamma^{\mu'}\gamma^5\gamma^\beta\}}_0 + d_{\mu'\nu'} \underbrace{Tr\{\sigma^{\mu'\nu'}\gamma^\beta\}}_0 \\ &\quad + e \underbrace{Tr\{\gamma^\beta\}}_0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Yukarıdaki eşitlikte birçok terim sıfır olmasına rağmen ilk terim sıfırdan farklıdır. Eşitlik sadeleştirilirse,

$$4(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}) = 4a_{\mu'}g^{\mu'\beta} \quad (3.3)$$

elde edilir. $a_{\mu'}$ 'nu çekebilmek için denklem (3.3)'nin her bir yanını $g_{\mu'\beta}$ ile çarpılıp β üzerinden toplam alınır.

$$\sum_{\beta} a_{\mu'} \underbrace{g^{\mu'\beta}g_{\mu'\beta}}_{\delta_{\mu'}^{\mu'}} = \sum_{\beta} g_{\mu'\beta} (g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}) \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
a_{\mu'} \delta_{\mu''}^{\mu'} &= g^{\mu\nu} \delta_{\mu''}^{\alpha} - g^{\mu\alpha} \delta_{\mu''}^{\nu} + g^{\nu\alpha} \delta_{\mu''}^{\mu} \\
a_{\mu'} &= g^{\mu\nu} \delta_{\mu'}^{\alpha} - g^{\mu\alpha} \delta_{\mu'}^{\nu} + g^{\nu\alpha} \delta_{\mu'}^{\mu}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$b_{\mu'}$ katsayısını bulabilmek için denklem (3.1)'in her terimi γ^5 ile çarpılıp eşitliğin izi alınır.

$$\begin{aligned}
\underbrace{Tr\{\gamma^5 \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\alpha}\}}_0 &= a_{\mu'} \underbrace{Tr\{\gamma^5 \gamma^{\mu'}\}}_0 + b \underbrace{Tr\{\gamma^5 \gamma^5\}}_4 \\
&+ c_{\mu'} \underbrace{Tr\{\gamma^{\mu'} \gamma^5 \gamma^5\}}_0 + d_{\mu' \nu'} \underbrace{Tr\{\gamma^5 \sigma^{\mu' \nu'}\}}_0 \\
&+ e \underbrace{Tr\{\gamma^5\}}_0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$b = 0 \tag{3.7}$$

$c_{\mu'}$ katsayısını bulabilmek için denklem (3.1)'in her terimi $\gamma^{\beta} \gamma^5$ ile çarpılıp eşitliğin izi alınır.

$$\begin{aligned}
Tr\{\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\alpha} \gamma^{\beta} \gamma^5\} &= a_{\mu'} \underbrace{Tr\{\gamma^{\mu'} \gamma^{\beta} \gamma^5\}}_0 + b \underbrace{Tr\{\gamma^5 \gamma^{\beta} \gamma^5\}}_0 \\
&+ c_{\mu'} Tr\{\gamma^{\mu'} \gamma^5 \gamma^{\beta} \gamma^5\} + d_{\mu' \nu'} \underbrace{Tr\{\sigma^{\mu' \nu'} \gamma^{\beta} \gamma^5\}}_0 \\
&+ e \underbrace{Tr\{\gamma^{\beta} \gamma^5\}}_0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Sıfırdan farklı olan terimler sadeleştirilirse $c_{\mu'}$ katsayısına ulaşılır.

$$4i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = -c_{\mu'} 4g^{\mu'\beta} \tag{3.9}$$

$c_{\mu'}$ 'nü açığa almak için eşitliğin her iki yanı $g_{\mu'\beta}$ ile çarpılıp, β üzerinden toplam alınır.

$$\begin{aligned}
-c_{\mu'} \underbrace{\sum_{\beta} g^{\mu'\beta} g_{\mu''\beta}}_{\delta_{\mu'}^{\mu''}} &= i \sum_{\beta} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} g_{\mu''\beta} \\
c_{\mu'} &= -i\epsilon^{\mu\nu\alpha}{}_{\mu'}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$d_{\mu'\nu'}$ katsayısını bulabilmek için denklem (3.1)'in her terimi $\sigma^{\beta\lambda}$ ile çarpılıp eşitliğin izi alınır.

$$\begin{aligned}
\underbrace{Tr\{\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\alpha}\sigma^{\beta\lambda}\}}_0 &= a_{\mu'} \underbrace{Tr\{\gamma^{\mu'}\sigma^{\beta\lambda}\}}_0 + b \underbrace{Tr\{\gamma^5\sigma^{\beta\lambda}\}}_0 \\
&+ c_{\mu'} \underbrace{Tr\{\gamma^{\mu'}\gamma^5\sigma^{\beta\lambda}\}}_0 + d_{\mu'\nu'} \underbrace{Tr\{\sigma^{\mu'\nu'}\sigma^{\beta\lambda}\}}_0 \\
&+ e \underbrace{Tr\{\sigma^{\beta\lambda}\}}_0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$d_{\mu'\nu'} = 0 \tag{3.12}$$

e katsayısını bulabilmek için denklem (3.1)'in her terimin izi alınır.

$$\begin{aligned}
\underbrace{Tr(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\alpha})}_0 &= a_{\mu'} \underbrace{Tr(\gamma^{\mu'})}_0 + b \underbrace{Tr(\gamma^5)}_0 + c_{\mu'} \underbrace{Tr(\gamma^{\mu'}\gamma^5)}_0 \\
&+ d_{\mu'\nu'} \underbrace{Tr(\sigma^{\mu'\nu'})}_0 + e \underbrace{Tr(I)}_4
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$e = 0 \tag{3.14}$$

Denklem (3.1)'in tüm katsayıları bulunduğuundan sonuca ulaşılır.

$$\begin{aligned}
\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\alpha} &= a_{\mu'}\gamma^{\mu'} + c_{\mu'}\gamma^{\mu'}\gamma^5 \\
&= (g^{\mu\nu}\delta_{\mu'}^{\alpha} - g^{\mu\alpha}\delta_{\mu'}^{\nu} + g^{\nu\alpha}\delta_{\mu'}^{\mu})\gamma^{\mu'} - i\epsilon^{\mu\nu\alpha}{}_{\mu'}\gamma^{\mu'}\gamma^5 \\
&= g^{\mu\nu}\gamma^{\alpha} - g^{\mu\alpha}\gamma^{\nu} + g^{\nu\alpha}\gamma^{\mu} - i\epsilon^{\mu\nu\alpha}{}_{\mu'}\gamma^{\mu'}\gamma^5
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Yukarıda bulunan bu sonucu $Tr\{\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\kappa\gamma^\sigma\}$ izini hesaplamak için kullanabiliriz.

$$\begin{aligned}
Tr\{\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\kappa\gamma^\sigma\} &= g^{\mu\nu}Tr\{\gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\kappa\gamma^\sigma\} \\
&\quad -g^{\mu\alpha}Tr\{\gamma^5\gamma^\nu\gamma^\beta\gamma^\kappa\gamma^\sigma\} \\
&\quad +g^{\nu\alpha}Tr\{\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\kappa\gamma^\sigma\} \\
&\quad -i\epsilon^{\mu\nu\alpha}{}_\mu Tr\{\gamma^5\gamma^{\mu'}\gamma^5\gamma^\beta\gamma^\kappa\gamma^\sigma\} \\
&= 4ig^{\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\kappa\sigma} - 4ig^{\mu\alpha}\epsilon^{\nu\beta\kappa\sigma} + 4ig^{\nu\alpha}\epsilon^{\mu\beta\kappa\sigma} \\
&\quad + 4i\epsilon^{\mu\nu\alpha}{}_{\mu'}(g^{\mu'\beta}g^{\kappa\sigma} - g^{\mu'\kappa}g^{\beta\sigma} + g^{\mu'\sigma}g^{\beta\kappa}) \\
&= 4i\{g^{\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\kappa\sigma} - g^{\mu\alpha}\epsilon^{\nu\beta\kappa\sigma} + g^{\nu\alpha}\epsilon^{\mu\beta\kappa\sigma} \\
&\quad + g^{\kappa\sigma}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} - g^{\beta\sigma}\epsilon^{\mu\nu\alpha\kappa} + g^{\beta\kappa}\epsilon^{\mu\nu\alpha\sigma}\}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

EK 4 Mandelstam Değişkenleri

Bölüm 3.1’de spin toplamları yöntemiyle yapılan hesap sonuçları momentumların bir fonksiyonudur. Momentum cinsinden yazılan hesap sonuçları Lorenz invariant değildir. Lorenz invariant sonuç yazabilmek için sonucu Mandelstam değişkenleri cinsinden yazmak gereklidir. Bu bölümde sırasıyla tüm olası p_i çarpımları Mandelstam değişkenlerine dönüştürülecektir. Enerji momentum korunumundan dolayı aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= p_3 + p_4 \\ p_1 - p_3 &= p_4 - p_2 \\ p_1 - p_4 &= p_3 - p_2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Yukarıdaki denklem kümesindeki tüm satırlar birbirine eşittir. Mandelstam değişkenlerinin tanımları denklem (4.1) baz alınarak aşağıda yapılmıştır.

$$\begin{aligned} s &\equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\ t &\equiv (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2 \\ u &\equiv (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Yukarıdaki eşitlerde s, t ve u Mandelstam değişkenleri tanımlanmıştır. Yukarıdaki eşitlikler kullanılarak $s + t + u = m_W^2$ olduğu gösterilebilir. $p_i \cdot p_j$ şeklinde çıkan çarpımları nasıl Mandelstam değişkenlerine dönüştürülebildiğini görmek için denklem (4.2) çarpanlarına ayrılır.

$$\begin{aligned} 2(p_1 \cdot p_2) &= (p_1 + p_2)^2 - p_1^2 - p_2^2 \\ &= s - m_e^2 - m_e^2 \\ &\simeq s \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
2(p_3 \cdot p_2) &= -(p_3 - p_2)^2 + p_3^2 + p_2^2 \\
&= -u + m_W^2 + m_e^2 \\
&\simeq m_W^2 - u
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$p_3 \cdot p_2 = p_1 \cdot p_4$$

$$\begin{aligned}
2(p_3 \cdot p_1) &= -(p_1 - p_3)^2 + p_3^2 + p_1^2 \\
&= -t + m_W^2 + m_e^2 \\
&\simeq m_W^2 - t
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$p_3 \cdot p_1 = p_2 \cdot p_4$$

EK 5 Elektrozayıf Akımın Yük Eşleneği

Majorana nötrinolarını içeren süreçlerde standart Feynman kurallarıyla genlik ifadesi yazıldığında büyük bir sorunla karşılaşilmektedir. Bu sorunu aşmak için nötrinoların Majorana karakterinden faydalanılır ($\nu_i^c = \nu_i$) (Rizzo 1982). Bir Majorana nötrinosunun antisi kendisine eşit olduğundan elektrozayıf akım tersten yazılabilir (Rodejohann 2001). $e^- \nu W^-$ (elektron, nötrino, W) elektrozayıf akımını denklem (5.1)'te yazılmıştır. Bu akımı tersten yazabilmek için tüm alanların yük eşleneği alınır.

$$\overline{\nu_i} \gamma_\mu \gamma_- U_{ei}^* e \quad (5.1)$$

Bir alanın yük eşleneği C sembolüyle gösterilir.

$$\begin{aligned} \psi^c &= C \overline{\psi}^T \\ \overline{\psi^c} &= -\psi^T C^\dagger \end{aligned} \quad (5.2)$$

Her alanın ikinci yük eşleneği kendisine eşit olduğu ($(\psi^c)^c = \psi$) prensibinden yola çıkarak denklem (5.1)'teki akım aşağıdaki biçimde yeniden yazılabilir.

$$\begin{aligned} \overline{\nu_i} \gamma_\mu \gamma_- U_{ei}^* e &= \overline{(\nu_i^c)^c} \gamma_\mu \gamma_- U_{ei}^* (e^c)^c \\ &= -(\nu_i^c)^T C^\dagger \gamma_\mu \gamma_- U_{ei}^* C (\overline{e^c})^T \\ &= -(\nu_i^c)^T \underbrace{C^\dagger \gamma_\mu C}_{-\gamma_\mu^T} \underbrace{C^\dagger \gamma_- C}_{\gamma_-^T} U_{ei}^* (\overline{e^c})^T \\ &= (\nu_i^c)^T \gamma_\mu^T \gamma_-^T U_{ei}^* (\overline{e^c})^T \\ &= -\overline{e^c} \underbrace{\gamma_- \gamma_\mu}_{\gamma_\mu \gamma_+} U_{ei}^* \underbrace{\nu_i^c}_{\nu_i} \\ &= -\overline{e^c} \gamma_\mu \gamma_+ U_{ei}^* \nu_i \end{aligned} \quad (5.3)$$

Yukarıdaki sonuca dikkat edilirse ekstradan bir eksi işaretinin oluştuğu görülmektedir.

EK 6 Feynman Köşe Faktörleri

Feynman kuralları bir sürecin genliğini (M) hesaplamamıza olanak tanır. Bir sürecin ağaç-seviyesinde genliğini hesaplayabilmek için aşağıdaki Feynman kuralları sırasıyla izlenir.

1. Dış çizgiler ve köşe terimleri kullanılarak tüm ağaç-seviyesi diagramları çizilir.
2. Her dış çizgi için karşılık gelen polarizasyon vektörü ya da Dirac spinörü yazılır.
3. Her iç çizgi için karşı gelen propagator terimi yazılır.
4. Her köşede enerji-momentum korunumu şartı aranır.
5. İki dış çizginin değişimi altında aynı diagram elde ediliyorsa diagramlardan birine -1 katsayısı verilir. Eksi işaretini hangisinin aldığı önemsizdir.

Gelen fermiyon	$f(p, r)$	$u_f^{(r)}(p)$
Giden fermiyon	$\bar{f}(p, r)$	$\bar{u}_f^{(r)}(p)$
Gelen antifermiyon	$\bar{f}(p, r)$	$v_f^{(r)}(p)$
Giden antifermiyon	$f(p, r)$	$\bar{v}_f^{(r)}(p)$
Gelen W^+	$W^+(p, \alpha)$	$\epsilon^{(\alpha)}(p)$
Giden W^+	$W^+(p, \alpha)$	$\epsilon^{(\alpha)*}(p)$
Gelen W^-	$W^-(p, \alpha)$	$\epsilon^{(\alpha)*}(p)$
Giden W^-	$W^-(p, \alpha)$	$\epsilon^{(\alpha)}(p)$
Fermiyon propagator	$f(p)$	$G^{(f)}(p) = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m_f^2 + i\epsilon}$
Higgs propagator	$H(p)$	$G_{\mu\nu}^{(H)}(p) = \frac{i}{p^2 - m_H^2 + i\epsilon}$
Yüklü akım köşesi	$\ell_\alpha^- \gamma_\alpha W_\mu$	$-i \frac{g}{2\sqrt{2}} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) V_{\alpha\beta}$

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Şeyhmus AKASLAN

Doğum Yeri : Nusaybin, Mardin

Doğum Tarihi : 1977

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : TCDD Meslek Lisesi (1996)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü (2001)

Yüksek Lisans: Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Mühendisliği (2004)

Çalıştığı Kurum : TCDD Genel Müdürlüğü, (1996 – 2011)

Yayınları : Effects of CP violating phases on the inverse neutrinoless
double beta scattering $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$. Modern Physics
Letters. Editör incelemesinde.