T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RASYONEL FARK SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIĞI

Daime SOLMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2011

KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Daime Solmaz tarafından hazırlanan "Rasyonel Fark Sistemlerinin Çözümlerinin Kararlılığı" adlı tez çalışması 08/09/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Durmuş BOZKURT	
Danışman Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA	
Üye Doç. Dr. Coşkun KUŞ	Coşkun

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Bayram SADE
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Daime SOLMAZ
08. 09. 2011

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

RASYONEL FARK SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIĞI

Daime SOLMAZ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA

2011, 61 Sayfa

Jüri
Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Doç. Dr. Coşkun KUŞ

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.
Birinci Bölümde, çalışma ile ilgili genel bilgi verildi.
İkinci Bölümde, fark denklemleri ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verildi.
Üçüncü Bölümde, çalışmamız için gerekli temel kavramlar hakkında bilgi verildi.
Dördüncü Bölümde, Nasri ve ark.(2005) de HIV virüsü ile ilgili oluşturdukları fark denklem sistemi üzerine yaptıkları çalışma incelenmiştir.

Beşinci Bölümde, $x_{n+1} = x_n . e^{r(1-x_n)+sy_n}$, $y_{n+1} = y_n . e^{r(1-y_n)+sx_n}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$ *r, s,* x_0 ve y_0 negatif olmayan sayılar olmak üzere, fark denklem sisteminin denge noktaları bulunarak, lokal ve global asimtotik kararlılığı incelenmiştir. Ayrıca, bu bölümdeki teoremler nümerik örneklerle somutlaştırılmıştır.

Altıncı Bölümde, $x_{n+1} = \frac{1}{y_n}$, $y_{n+1} = \frac{1}{z_n}$, $z_{n+1} = \frac{1}{t_{n-1}}$, $t_{n+1} = \frac{x_n\, y_{n-1}}{x_{n-1}}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$ rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerinin periyodikliği araştırıldı. Daha sonra, $x_{n+1} = \frac{1}{y_{n-k}}$, $y_{n+1} = \frac{1}{z_{n-k}}$, $z_{n+1} = \frac{1}{t_{n-(k+1)}}$, $t_{n+1} = \frac{x_n\, y_{n-(k+1)}}{x_{n-1}}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$ genel rasyonel fark denklem sisteminin de çözümlerinin periyodik olduğu gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Global Asimtotik Kararlılık, Lokal Asimtotik Kararlılık, Periyodiklik, Rasyonel Fark Denklem Sistemi.

ABSTRACT

MS THESIS

STABILITY OF SOLUTIONS OF RATİONAL DIFFERENCE EQUATIONS SYSTEMS

Daime SOLMAZ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE OF PHILOSOPHY IN MECHANICAL ENGINEERING

Advisor: Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA

2011, 61 Pages

Jury
Asst. Prof .Dr. Necati TAŞKARA
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Assoc. Prof. Dr. Coşkun KUŞ

This study consists of six sections:
In the first section, we have given general information about study.
In the second section, we have given some information about some difference equations studied before.
In the third section, we have given information about necessary concepts for our study.
In the fourth section,we have investigated a system of difference equation of Nasri and his friends a(2005) study about HIV infection,

In the fifth section, we have investigated the global behaviour of the difference equation,
$x_{n+1} = x_n . e^{r(1-x_n)+sy_n}$, $y_{n+1} = y_n . e^{r(1-y_n)+sx_n}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$
The parameters r and s and the initial conditions x_0 , y_0 are positive . The numerical examples for this difference equation were given.

In the sixth section, we have investigated the periodical solutions of a system of difference equation, $x_{n+1} = \frac{1}{y_n}$, $y_{n+1} = \frac{1}{z_n}$, $z_{n+1} = \frac{1}{t_{n-1}}$, $t_{n+1} = \frac{x_n\, y_{n-1}}{x_{n-1}}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$ Than we have investigated the periodical solutions of a system of general rational difference equation, $x_{n+1} = \frac{1}{y_{n-k}}$, $y_{n+1} = \frac{1}{z_{n-k}}$, $z_{n+1} = \frac{1}{t_{n-(k+1)}}$, $t_{n+1} = \frac{x_n\, y_{n-(k+1)}}{x_{n-1}}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$

Keywords: Global Asymptotic Stability, Local Asymptotic Stability, Periodicity, System Of The Rational Difference Equation

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Ana Bilim Dalı Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Tezimi büyük bir sabır ve titizlikle yöneten ve çalışmalarımda hiçbir desteği esirgemeyen saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA, yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Kemal USLU' ya ve arkadaşım Gülnihal KILIKLI' ya sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Daime SOLMAZ
KONYA-2011

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar
$\mathbb{Z}^+$	:	Pozitif tam sayılar
$\mathbb{Z}^-$	:	Negatif tam sayılar
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^2$	:	İki boyutlu reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^3$	:	Üç boyutlu reel sayılar kümesi
$\forall$	:	Her
$\exists$	:	Vardır (En az bir)
$\ni$	:	Öyle ki
$<$	:	Küçük
$>$	:	Büyük
$\leq$	:	Küçük eşit
$\geq$	:	Büyük eşit
$\neq$	:	Eşit değil
$\in$	:	Elemandır
$\Rightarrow$	:	Gerek şart
$\Leftarrow$	:	Yeter şart
$\Leftrightarrow$	:	Gerek ve yeter şart

1. GİRİŞ

Bu tezde;

$$x_{n+1} = x_n . e^{r(1-x_n)+sy_n}$$
$$y_{n+1} = y_n . e^{r(1-y_n)+sx_n}$$

tipindeki biyolojik fark denklem sisteminin negatif olmayan r ve s parametreleri reel sayı ve başlangıç koşulları x_0, y_0 pozitif sayılar olmak üzere; çözümlerinin davranışları, denge noktalarının lokal kararlılığı ve global asimtotik kararlığı incelendi. Burada gençler x_n ve yetişkinler y_n seçilmek üzere, bu iki popülasyon arasındaki etkileşim modeli *Simth* (2002) tarafından yukarıdaki denklem sistemi olarak belirlenmişti. Burada gençler ve yetişkinler arasında bağlı yoğunluk olasılığından bahsedilmiştir. Buna göre yetişkinler bu bağlı yoğunluk oranında genç çocuklarını özgür bırakmaktadırlar. Bu fark denklemine ait teoremlerin ispatı ile ilgili nümerik örnekler verilmiştir.
Daha sonra ise,

$$x_{n+1} = \frac{1}{y_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{1}{z_n}, \qquad z_{n+1} = \frac{1}{t_{n-1}}, \qquad t_{n+1} = \frac{x_n\, y_{n-1}}{x_{n-1}} \;,$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{y_{n-1}}, \qquad y_{n+1} = \frac{1}{z_{n-1}}, \qquad z_{n+1} = \frac{1}{t_{n-2}}, \qquad t_{n+1} = \frac{x_n\, y_{n-2}}{x_{n-1}} \;.$$

Fark denklem sistemlerinin çözümlerinin periyodikliği araştırılmıştır. Bu çözümlerin, genelleştirmesi olan,

$$x_{n+1} = \frac{1}{y_{n-k}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{z_{n-k}}, \quad z_{n+1} = \frac{1}{t_{n-(k+1)}}, \quad t_{n+1} = \frac{x_n\, y_{n-(k+1)}}{x_{n-1}}$$

genel rasyonel fark denklem sisteminin de çözümlerinin periyodik olduğu gösterilmiştir. Bu genellemelere varılırken bugüne kadar çalışılmış olan fark denklemleri ve fark denklem sistemleri incelenmiştir.

1.1. Tezin Yapısı

Bu tez; 1. Bölüm Giriş, 2. Bölüm Kaynak Araştırması, 3. Bölüm Fark Denklemleri ile İlgili Temel Tanım ve Teoremler, 4. Bölüm Lineer Olmayan Fark Denklem Sisteminin Çözümü ve Global Asimtotik Kararlılığı, 5. Bölüm $x_{n+1} = x_n.\, e^{r(1-x_n)+sy_n}$ $y_{n+1} = y_n.\, e^{r(1-y_n)+sx_n}$ Denklem Sistemi, 6. Bölüm $x_{n+1} = \frac{1}{y_{n-k}},\quad y_{n+1} = \frac{1}{z_{n-k}},\ z_{n+1} = \frac{1}{t_{n-(k+1)}},\quad t_{n+1} = \frac{x_n\, y_{n-(k+1)}}{x_{n-1}}$ Rasyonel Fark Denklem Sistemlerinin Pozitif Çözümleri, 7. Bölüm Sonuçlar ve Öneriler olmak üzere toplam yedi bölümden oluşmaktadır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Fark denklemlerinin yeni çalışma alanlarından olan global asimptotik kararlılık ile ilgili literatürde son yıllarda yapılmış oldukça fazla sayıda çalışma vardır. Bunları ayrı ayrı başlıklar altında ve tarih sırası ile özetleyelim:

Schinas (1997) Bu çalışmada $x_{n+1} = \frac{x_n+1}{x_{n-1}}$ Lyness fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğinden ve denklem sabitinden hareketle,

$$x_{n+1} = \frac{ay_n + A}{x_{n-1}}, \qquad y_{n+1} = \frac{bx_n + A}{y_{n-1}}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$x_{n+1} = \frac{a_n y_n + A}{x_{n-1}}, \qquad y_{n+1} = \frac{b_n x_n + A}{y_{n-1}}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$x_{n+1} = \frac{max\{a_n y_n, A\}}{x_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{max\{b_n x_n, A\}}{y_{n-1}}, n = 0, 1, 2, \dots$$

denklem sistemleri ve rasyonel formdaki benzer bazı fark denklemlerinin, fark denklem sistemlerinin ve maksimumlu fark denklem sistemlerinin denklem sabitlerini ve çözümlerinin periyodikliği incelenmiştir. Çalışma sonucunda; çeşitli fark denklemlerinin ve fark denklem sistemlerinin denge noktaları, denklemlerin katsayılarının sabit olması veya periyodik birer dizi olması gibi durumlarda katsayılara ve denklemin genel terimlere bağlı olduğu elde edilmiştir.

Papaschinopoulos ve Schinas (1998) Bu çalışmada p ve q pozitif tamsayıları için lineer olmayan iki fark denkleminden oluşan, $x_{n+1} = \frac{A+y_n}{x_{n-p}}, y_{n+1} = \frac{A+x_n}{y_{n-q}}$ fark denklem sisteminin çözümlerinin salınımlı davranışı ve sınırlılığı incelenmiştir. Ayrıca bu fark denklem sisteminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığı çalışılmıştır. Fark denklem sisteminin denge noktasının $(c, c) = (1+A, 1+A)$ olduğunu elde edilmiş ve sisteminin çözümlerinin $A \in (0, \infty)$ için bu noktada salınımlı olduğunu görülmüştür. Aynı şartlarda sistemin çözümlerinin alt ve üst sınırları elde edilmiştir. $A > 1$ için de pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğu görülmüştür.

Amleh ve ark. (1999) Bu çalışmada aşağıdaki üç fark denklemi incelenmiştir:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}x_{n-2}}{x_n x_{n-1} + x_{n-2}}, x_{n+1} = \frac{x_{n-1} + x_n x_{n-2}}{x_n x_{n-1} + x_{n-2}}, x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}x_{n-2}}{x_n x_{n-2} + x_{n-1}}$$

bu denklemlerin pozitif başlangıç şartları altında, pozitif denge noktaları olan x = 1'de global asimptotik kararlı oldukları gösterilmiştir. Ayrıca denklemlerin sıra değişikliği olmak üzere, pozitif yarı dönmelerinin bir veya iki terimli, negatif yarı dönmelerinin ise bir veya üç terimli olduğunu göstermişlerdir.

Grove ve ark. (2001) Bu çalışmada $x_{n+1} = \frac{a}{x_n} + \frac{b}{y_n}$, $y_{n+1} = \frac{c}{x_n} + \frac{d}{y_n}$ rasyonel sisteminin çözümlerinin varlığı ve davranışı üzerinde durulmuştur.

Grove ve ark. (2001) Çalışmalarında *a*, *b*, *c* ve *d* reel sayılar ve başlangıç şartları x_0 ve y_0 keyfi reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \frac{a}{x_n} + \frac{b}{y_n}$, $y_{n+1} = \frac{c}{x_n} + \frac{d}{y_n}$, $n = 1, 2, ...$ fark denklem sisteminin, her $n \geq 0$ için iyi tanımlı olduğu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ değerlerinin kümesini ve çözümlerinin davranışlarını araştırmışlardır. Bu fark denklem sisteminde, $z_n = \frac{x_n}{y_n}$ dönüşümü yaparak *Riccati* Fark denklemine ulaşmış ve bu denklemin karakteristik denkleminin çözümlerinden hareketle *a*, *b*, *c* ve *d* reel sayıları için şartlar elde etmişler, yani denklemin good küme ve forbidden kümesine ulaşmışlardır. Denklemin çözümleri hakkında bazı şartlar altında genellemeler verilmiştir.

Clark ve Kulenovic (2002) Bu çalışmalarında *a, b, c* ve *d* keyfi pozitif sayılar ve x_0, $y_0$başlangıç şartları negatif olmayan sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \frac{x_n}{a+cy_n}$, $y_{n+1} = \frac{y_n}{b+dx}$, $n = 0, 1, 2, ...$ fark denklem sisteminin çözümlerinin global asimtotik kararlılığını ve asimtotik davranışını incelemişlerdir.

Çınar (2004) Bu çalışmada $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{-1+x_n x_{n-1}}$ $n = 0, 1, 2, ...$ fark denkleminin çözümlerini, bu çözümlerin başlangıç şartlarına göre durumları ve bu çözümlerin lokal asimptotik kararlılığını incelendi.

Li ve Zhu (2003) Yaptıkları iki ayrı çalışmadan birincisinde $a \in [0, \infty)$ ve başlangıç şartları $x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ olmak üzere $x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1} + a}{x_n + x_{n-1}}$ fark denklem-inin çözümlerinin global asimptotik kararlı olduğunu ve ikincisinde ise, $a \in [0, \infty)$ ve $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ olmak üzere, aşağıdaki iki fark denklemini incelemişlerdir.

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1} + x_{n-2} + a}{x_n + x_{n-1} x_{n-2} + a} \quad ve \quad x_{n+1} = \frac{x_{n-1} + x_n x_{n-2} + a}{x_n x_{n-1} + x_{n-2} + a}$$

bu rasyonel fark denklemlerinin çözümlerinin $\bar{x} = 1$ pozitif denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir. Ancak, Yang (2005) yaptığı çalışmada; Li ve Zhu' nun çalışmasında bulunan ve algılanması güç olan bazı hataları saptamış ve bu hataları düzelterek $x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1} + x_{n-2} + a}{x_n + x_{n-1} x_{n-2} + a}$ fark denkleminin global asimptotik kararlılığını tekrar incelemiştir.

Kulenovic ve Nurkanovic (2003) Bu çalışmalarında A ve B katsayıları $(0, \infty)$ aralığında seçilen reel sayılar ve x_0, y_0 başlangıç şartları negatif olmayan keyfi sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = A x_n \frac{y_n}{1+y_n}$, $y_{n+1} = B\, y_n \frac{x_n}{1+x_n}$ fark denklem sisteminin çözümlerinin global kararlılığını araştırmışlardır.

Yang, Lai, Evans, Mebson (2004) Bu çalışmalarında $x_n = \frac{a + b x_{n-1} + c x_{n-1}^2}{d - x_{n-2}}$, n= 1, 2, … $(a, b \geq 0;\ c, d > 0)$ fark denkleminin global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Camouzis ve Papaschinopoulos (2004) Bu çalışmalarında; pozitif başlangıç şartlar altında $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{y_{n-m}}$, $x_{n+1} = 1 + \frac{y_n}{x_{n-m}}$ fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir.

Çınar ve Yalçınkaya (2004) Literatürde üç değişkenli fark denklem sistemleri üzerine yapılan ilk çalışmalardan olan makalelerinde, $x_{n+1} = \frac{1}{z_n}$, $y_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1} y_{n-1}}$, $z_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1}}$ fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin periyodiklik özelliğini incelemişlerdir. $\{x_n\}$ ve $\{z_n\}$ çözümlerinin üç periyotlu, $\{y_n\}$ çözümlerinin ise on iki periyotlu olduğunu ispat etmişlerdir.

Çınar (2004) Çalışmasında $x_{n+1} = \frac{1}{y_n}$, $y_{n+1} = \frac{y_n}{x_{n-1}\, y_{n-1}}$ fark denklem sisteminin çözümlerinin dört periyotlu olduğunu incelemiştir.

Kulenovic ve Nurkanoviç (2005) Bu çalışmalarında *a, b, c, d, e* ve *f* keyfi değerleri $(0, \infty)$ aralığında seçilen reel sayılar ve x_0, y_0, z_0 başlangıç şartları negatif olmayan keyfi sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \frac{a+x_n}{b+y_n}$, $y_{n+1} = \frac{c+y_n}{d+z_n}$, $z_{n+1} = \frac{e+z_n}{f+x_n}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$ fark denklem sisteminin çözümlerinin global asimtotik kararlığını incelemişlerdir.

Saleh, Aloqeili (2005) Bu çalışmalarında,

$$y_{n+1} = A + \frac{y_{n-k}}{y_n}, y_{-k}, y_{-k+1}, \ldots, y_0, \quad A \in (0, \infty);\ k \in \{2, 3, 4, \ldots\}$$

pozitif denge noktası $\bar{y} = 1 + A$ 'nın global asimptotik kararlılığını elde etmişlerdir.

Sun ve Xi (2005) Yaptıkları çalışmada $x_{n+1} = f(x_{n-s}, x_{n-t}), n \in N_0\ ve\ s < t,\ t \in N$ olmak üzere lineer olmayan fark denkleminin tüm pozitif çözümlerinin tek denge noktasına yakınsaması için yeterli şartları ortaya koymuşlardır.

Özban (2006) Çalışmasında, tüm başlangıç şartları ve parametreler pozitif olmak üzere $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{y_{n-k}},\ y_{n+1} = 1 + \frac{y_n}{x_{n-m}\, y_{n-m-k}}$ fark denklem sistemini çözümlerinin periyodikliğini araştırmış ve ispat etmiştir.

Douraki ve ark. (2006) Bu çalışmalarında $x_{n+1} = \frac{A}{x_{n-k}} + \frac{B}{x_{n-3k}}\ ; A, B \in (0, \infty)$; $x_{-3k+1}, x_{-3k+2}, \dots, x_0 \in (0, \infty)$ çözümlerinin k periyotlu olduğunu incelemişlerdir.

Iricanin ve Stevic (2006) Aşağıdaki iki fark denklem sisteminin pozitif çözümlerini çalışmışlardır:

$$x_{n+1}^{(1)} = \frac{1 + x_n^{(2)}}{x_{n-1}^{(3)}}, x_{n+1}^{(2)} = \frac{1 + x_n^{(3)}}{x_{n-1}^{(4)}}, \dots, x_{n+1}^{(k)} = \frac{1 + x_n^{(1)}}{x_{n-1}^{(2)}}$$

$$x_{n+1}^{(1)} = \frac{1 + x_n^{(2)} + x_{n-1}^{(3)}}{x_{n-2}^{(4)}}, x_{n+1}^{(2)} = \frac{1 + x_n^{(3)} + x_{n-1}^{(4)}}{x_{n-2}^{(5)}}, \dots, x_{n+1}^{(k)} = \frac{1 + x_n^{(1)} + x_{n-1}^{(2)}}{x_{n-2}^{(3)}} \qquad k \epsilon N.$$

Papaschinopoulos ve ark. (2007) Yaptıkları çalışmada $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, k$ pozitif sabitler, $k \geq 3$ tamsayı ve bütün başlangıç şartları pozitif olmak üzere,

$$x_1(n+1) = \frac{a_k x_k(n) + b_k}{x_{k-1}(n-1)},$$

$$x_2(n+1) = \frac{a_1 x_1(n) + b_1}{x_k(n-1)}, \qquad i = 3, 4, \dots, k$$

$$x_i(n+1) = \frac{a_{i-1} x_{i-1}(n) + b_{i-1}}{x_{i-2}(n-1)},$$

denklem sistemini çözümlerini incelemişlerdir.

Yalçınkaya ve ark. (2008) Bu çalışmalarında, $z_{n+1} = \frac{t_n z_{n-1} + a}{t_n + z_{n-1}}$, $t_{n+1} = \frac{z_n t_{n-1} + a}{z_n + t_{n-1}}$ $n = 0, 1, 2, \dots$ fark denklem sisteminin global asimptotik kararlılığı için bir yeterli koşulun olduğunu göstermişlerdir.

Şimşek ve ark. (2009) Yaptıkları çalışmada, pozitif başlangıç değerleri için $x_{n+1} = max\left\{\frac{A}{x_n}, \frac{y_n}{x_n}\right\}$, $y_{n+1} = max\left\{\frac{A}{y_n}, \frac{x_n}{y_n}\right\}$ fark denklem sisteminin çözümlerini incelemişlerdir.

Taşkara N., Uslu K. and Tollu D.T. (2011) Bu çalışmalarında, $x_{n+1} = \frac{p_n\, x_n + x_{n-(k+1)}}{q_n + x_{n-(k+1)}}$ $k \in \mathbb{N}, x_{-k-1}, x_{-k}, \ldots \in \mathbb{R}$ şartları olmak üzere fark denkleminin periyodikliği ve genelleştirilmiş çözümü için gerek ve yeter şartları incelemişlerdir. Ayrıca, genel çözümün $(k+1)$ periyotlu olduğunu göstermişlerdir.

3. FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL TANIM VE TEOREMLER

Fark denklem; bir veya daha çok değişkenli bir fonksiyonun sonlu farklar ile bağımsız değişkenleri arasındaki cebirsel bir bağıntıdır. Diferansiyel denklemlere benzerlik gösteren ve inceleme süreci yönünden daha yeni olan fark denklemlere fonksiyonel denklemler de denir.

Diferansiyel denklemler, eski hipotezlere göre, fiziksel olayların matematiksel modeli, sürekli değişim oranları arasındaki denklemler olarak ifade ediliyordu. Fakat 20. yüzyılın başlarında radyasyondaki *quanta* ile biyolojide görülen genetik olaylardaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının süreklilik terimleri ile ifade edilmeyeceğini göstermiştir. Böylece fark denklemler kullanılarak diferansiyel denklemlerde görülen süreksizlik halleri kaldırılmak istenmiştir. Günümüzde birçok alanda uygulanan fark denklemleri, daha çok hareket analizinde devreleri matematiksel olarak ifade etmede, ekonomide talep ve arz denklemlerini oluşturmada, ekonomik dalgalanmalar veya devresel hareketleri açıklamada, işsizlik oranı hesabında, spektrum analizinde filtre dizaynı gibi alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır.

Bu bölümde fark denklemleri ile ilgili literatürde var olan genel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 3.1. Denklemdeki bağımlı değişkenin en büyük ve en küçük indisleri arasındaki farka *Mertebe* denir *(Elaydi, 1995).*

Tanım 3.2. $F(n, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}) = 0$ şeklinde k. mertebeden bir fark denkleminin genel ifadesinde eşitliğin sağ tarafı "0" ise bu fark denklemine *Homojen (otonom) Fark Denklemi* denir. "0"dan farklı ise homojen olmayan fark denklemi denir *(Elaydi, 1995).*

Tanım 3.3. Eğer bir fark denklemi y_n veya herhangi bir fark ifadesinin 2. ya da daha yüksek dereceden kuvvetini içeriyorsa ya da y_n ile y_{n+m}'nin $(0 < m \leq k)$ çarpımını içeriyorsa bu fark denklemine *Lineer Olmayan Fark Denklemi* denir. Aksi durumda *Lineer Fark Denklemi* denir *(Elaydi, 1995).*

Örnek 3.1. Aşağıdaki denklemleri mertebe, homojenlik ve lineerlik bakımından inceleyiniz.

1. $y_{n+2} + 3\sin\alpha\, y_{n+1} - y_n = 0$ (2. mertebeden, homojen, lineer)
2. $y_{n+3} + 4y_{n+1} - n = 0$ (2. mertebeden, homojen değil, lineer)
3. $y_{n+3}.{y_n}^2 = e^n.{y_{n+1}}^4$ (3. mertebeden, homojen değil, lineer değil)
4. $y_{n+2} = \tan n$ (Herhangi bir yorum yapılamaz)

x bağımsız değişkeninin sürekli olduğu durumda, $y(x)$ bağımlı değişkeninin değişimi $y'(x), y''(x), \ldots, y^n(x), \ldots$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x 'in kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz.

Bu bölümde x 'in tamsayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu denklemler üzerinde duracağız.

Tanım 3.4. n bağımsız değişken ve buna bağlı değişkende y olmak üzere, bağımlı ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin $E(y), E^2(y), \ldots, E^n(y), \ldots$ gibi farklarını içine alan bağıntılara *Fark Denklemi* denir *(Elaydi, 1995).* Dikkat edilir ise n' nin sürekli olduğu halde Diferansiyel Denklemler ile arasında büyük benzerlikler vardır.

$$a_0 y_n + a_1 y_{n+1} = f_n$$

birinci mertebeden fark denklemidir.

$$a_0 y_{n-1} + a_1 y_n + a_2 y_{n+1} = g_n$$

ikinci mertebeden fark denklemidir. Denklemin mertebesinin belirlenmesinde, *y'* nin hesaplanabilmesi için gerekli olan başlangıç şartı sayısı göz önüne alınmaktadır.

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + y_n = n \qquad \text{(2.mertebeden fark denklemidir.)}$$

3.1. Lineer Fark Denklemleri

Tanım 3.1.1 Bir fark denkleminde bağımlı değişken birinci derecedense bu denkleme *Lineer Fark Denklemi* denir. Genel olarak lineer fark denklemleri (bakınız Tanım 3.3.):

$$y_{n+k} + a_{k-1}\, y_{n+k-1} + \cdots + a_0\, y_n = f_n$$

şeklinde gösterilir.

Lineer fark denklemleri katsayılarının durumuna göre isimlendirilirler:

a. Eğer $f_n = 0$ ise denkleme *Lineer Homojen Fark Denklemi* denir.

b. $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ katsayıları sabit iseler, denkleme *Sabit Katsayılı Lineer Fark Denklemi* denir.

c. $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ katsayıları bağımsız değişkenin fonksiyonları iseler denkleme *Değişken Katsayılı Lineer Fark Denklemi* denir. Örneğin;

$(n+1)\Delta^2 y_n - 6\Delta y_n + 10y_n = 0, n \in Z$

Euler Fark Denklemi; değişken katsayılı lineer homojen bir fark denklemidir (M. Saleh, 2005).

Örnek 3.1.1. $y_{n+2} - ay_n = 0$; $a, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ fark denkleminin genel çözümünü elde ediniz.

Çözüm 3.1.1. Bu denklem ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer homojen bir fark denklemdir. Şimdi, y_0, y_1 başlangıç şartları için sırayla y_n değerleri elde edilsin. Bunun için y_0, y_1 başlangıç şartlarını denklemde yerine yazarak çözümü başlatmak gereklidir, şöyle ki:

$$y_2 = ay_0$$
$$y_3 = ay_1$$
$$y_4 = ay_2 = a(ay_0) = a^2 y_0$$
$$y_5 = ay_3 = a(ay_1) = a^2 y_1$$
$$y_6 = ay_4 = a(a^2 y_0) = a^3 y_0$$
$$y_7 = ay_5 = a(a^2 y_1) = a^3 y_1$$

sonuçları bulunur. Bu şekilde iterasyona devam edilirse görülür ki;

$$y_n = \begin{cases} a^k y_0, & n = 2k \\ a^k y_1, & n = 2k+1 \end{cases}, \quad \mathrm{k} = 0,1, \ldots$$

şeklinde bir y_n çözümü elde edilir.

3.2. Fark Denklemler İçin Genel Tanım ve Teoremler

Teorem 3.2.1. I reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere, $f : I \times I \rightarrow I$ sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Her $x_{-1}, x_0 \in I$ başlangıç şartları için,

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.2.1}$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne sahiptir *(Elaydi, 1995).*

Tanım 3.2.1. Eğer $\bar{x}$ noktası için $f(\bar{x},\bar{x}) = \bar{x}$ ise $\bar{x}$' e, f ' nin *Denge Noktası* denir. Eğer $\forall n \geq 0$ için $\bar{x} = x_n$ ise o zaman $\bar{x}$' e, f' nin sabit noktası denir *(Dehghan, 2005).*

Örnek 3.2.1. $x_{n+1} = \frac{1}{x_n}$ fark denkleminin denge noktasının ± 1 olduğunu gösteriniz.

Çözüm 3.2.1 $f(\bar{x},\bar{x}) = \bar{x} = \frac{1}{\bar{x}}$ ise $\bar{x} = \pm 1$ dir.

Tanım 3.2.2. Eğer $\forall$ n > 0 için $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $x_n \in J$ olacak şekilde bir $J \subset$ I alt aralığı varsa, bu aralığa (3.2.1) denkleminin *Değişmez Aralığı* denir *(Dehghan, 2005).*

Tanım 3.2.3. $\bar{x}$, (3.2.1) denkleminin denge noktası olmak üzere:

a. Eğer $x_{-1}, x_0 \in J$ olmak üzere her ε > 0 için, $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \delta$ iken her n ≥ 0 için, $|x_n - \bar{x}| <$ ε olacak şekilde bir δ > 0 sayısı varsa, *x* *Denge Noktası Kararlıdır* denir.

b. Eğer x denge noktası kararlı ve $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde, $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \gamma$ şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktası *Lokal Asimptotik Kararlıdır* denir.

c. Eğer her $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ise, $\bar{x}$ denge noktasına *Çekim Noktası* denir.

d. Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve çekim noktası ise, $\bar{x}$ denge noktası *Global Asimptotik Kararlıdır* denir.

e. Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı değil ise, *Kararsızdır* denir.

f. Eğer $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < r$ ve bazı $N \geq -1$ sayıları için $|x_N - \bar{x}| \geq$ r olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktasına *Repeller* denir.

Tanım 3.2.4. Eğer $\{x_n\}$ dizisi için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisi *p periyotludur* denir ve *p* bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır *(Elaydi, 1995).*

Tanım 3.2.5. (3.2.1) denkleminde, $f(x_n, x_{n-1})$ fonksiyonunu f (*u*,*v*) şeklinde düşünelim:

$$\mathrm{r} = \frac{\partial f(\bar{x},\ \bar{x})}{\partial \mathrm{u}} \text{ ve } s = \frac{\partial f(\bar{x},\ \bar{x})}{\partial \mathrm{v}}$$

olmak üzere;

$$y_{n+1} = r y_n + s y_{n-1} \tag{3.2.2}$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme $\bar{x}$ denge noktası civarında lineer denklem denir.
(3.2.2) denkleminin karakteristik denklemi:

$$\lambda^2 - r\,\lambda - s = 0 \qquad (3.2.3)$$

dır *(Elaydi, 1995).*

Teorem 3.2.2. (Lineer Kararlılık Teoremi):

Eğer (3.2.3) denkleminin her iki kökü de mutlak değerce 1'den küçük ise, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

a. Eğer (3.2.3) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

b. (3.2.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1' den küçük olması için gerek ve yeter şart $|r| < 1 - s < 2$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

c. (3.2.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1'den büyük olması için gerek ve yeter şartlar $|s| > 1\ ve\ |r| < |1 - s|$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası *repeller*dir.

d. Her $x_{-1}, x_0 \in I$ için eğer $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ise; o zaman $\bar{x}$ denge noktası global çekimlidir denir.

e. Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve global çekimli ise $\bar{x}$' e global asimptotik kararlıdır denir.

f. (3.2.3) denkleminin, bir kökünün mutlak değerce 1'den büyük, diğer kökünün mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şartlar $r^2 + 4s > 0$ ve $|r| > |1 - s|$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır (Chatterjee ve ark., 2003).

Benzer şekilde, mertebesi 3 olan fark denklemleri için Teorem 3.2.2. aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir.

$$x_n = f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}), \quad n = 0,1,2,\ldots \qquad (3.2.4)$$

fark denklemini ele alalım.

(3.2.4) denkleminde, $f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})$ fonksiyonunu $f(u,v,w)$ şeklinde düşünelim:

$$r = \frac{\partial f(\bar{x},\bar{x},\bar{x})}{\partial u},\ s = \frac{\partial f(\bar{x},\bar{x},\bar{x})}{\partial v} \text{ ve } t = \frac{\partial f(\bar{x},\bar{x},\bar{x})}{\partial w}$$

olmak üzere,

$$y_{n+1} = ry_n + sy_{n-1} + ty_{n-2} \tag{3.2.5}$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme $\bar{x}$ denge noktası civarında lineer denklem denir. (3.2.5) denkleminin karakteristik denklemi:

$$\lambda^3 - r\lambda^2 - s\,\lambda - t = 0 \tag{3.2.6}$$

dır.

Teorem 3.2.3.

a. Eğer (3.2.6) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

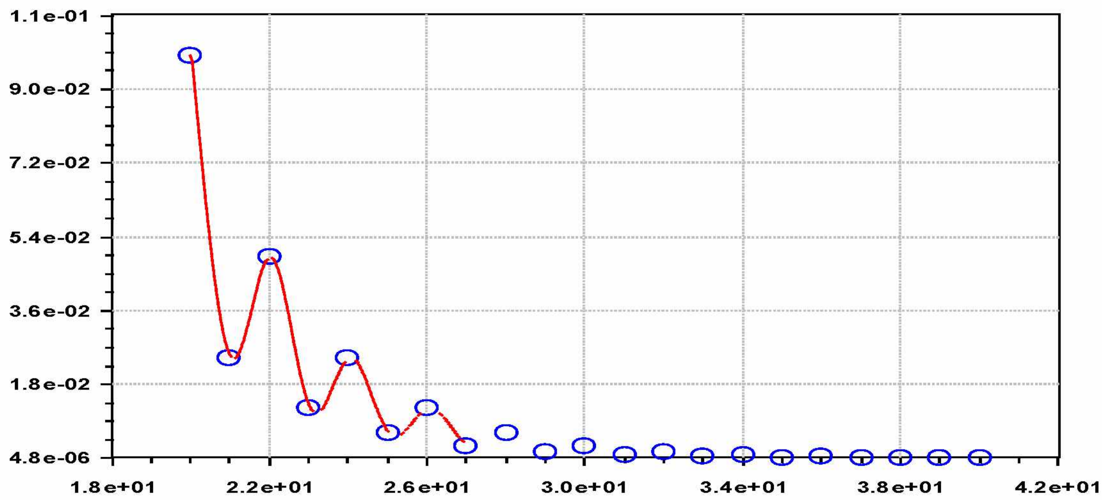
b. Eğer (3.2.6) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

c. (3.2.6) denkleminin bütün köklerinin mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şartlar $|r + t| < 1 - s$, $|r - 3t| < s + 3$ ve $t^2 - s - rt < 1$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır (*Chatterjee* ve arkadaşları, 2003).

Örnek 3.2.2. $x_{n+1} - ax_{n-1} = 0;\ |a| < 1, x_{-1}, x_0 \in I$ ikinci mertebeden lineer fark denkleminin $\bar{x} = 0$ denge noktası hem lokal asimptotik kararlı hem de global çekimli olduğundan $\bar{x} = 0$ denge noktası global asimptotik kararlıdır. Aşağıda söz konusu denklemin $a = 0{,}5;\ x_{-1} = 50;\ x_0 = 100$ şartları altındaki uygulaması verilmiştir.

Çizelge 3.2.2.

n	x_n	n	x_n	n	x_n
20	0,097656	27	0,003052	34	0.000763
21	0,024414	28	0.006104	35	0,000191
22	0,048828	29	0,001526	36	0,000381
23	0,012207	30	0,003052	37	0,000095
24	0,024414	31	0.000763	38	0,000191
25	0,006104	32	0,001526	39	0,000048
26	0,01220	33	0,000381	40	0,000095



Şekil 3.2.2.

Görüldüğü gibi $x_{n+1} - ax_{n-1} = 0$; denklemi $|a| < 1$, $x_{-1}, x_0 \in I$ şartları altında global asimptotik kararlıdır.

Tanım 3.2.6. Eğer $\{x_n\}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisine *er geç p periyotludur* denir ve bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır *(Elaydi, 1995).*

Teorem 3.2.4. (*Clark Teoremi*): *p*, $q \in$ R ve k, n∈ {1,2,...} olmak üzere;

$$x_{n+1} + px_n + qx_{n-k} = 0$$

fark denkleminin lokal asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şart $|p| + |q| < 1$ olmasıdır *(Elaydi, 1995).*

Örnek 3.2.3. $x_{n+1} - ax_{n-1} = 0$; $|a| < 1,\ x_{-1}, x_0 \in I$ ikinci mertebeden lineer fark denkleminin $\bar{x} = 0$ denge noktası hem lokal asimptotik kararlı hem de global çekimli olduğundan $\bar{x} = 0$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.

Denge noktası tanımından, $\bar{x} - a\bar{x} = 0$ olup, $\bar{x} = 0$ dır. Bu denklem,

$$x_{n+1} = 0x_n + ax_{n-1}$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 3.2.4 bu denkleme uygulanırsa aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$|0| + |a| < 1$$

olup, $|a| < 1$ elde edilir. Böylece, Teorem 3.2.4 (*Clark Teoremi*)'e göre $x_{n+1} - ax_{n-1} = 0$ denklemi, $|a| < 1,\ x_{-1}, x_0 \in I$ şartları altında lokal asimptotik kararlıdır. Dahası,

$$x_n = \begin{cases} a^k x_0\,, & n = 2k \\ a^k x_{-1}\,, & n = 2k+1 \end{cases}, k = 0,1, \ldots$$

olduğundan,

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} a^k x_{-1} = 0$$

ve

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} a^k x_0 = 0$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 = \bar{x}$$

limiti elde edilir. Bu ise söz konusu denklemin $\bar{x} = 0$ denge noktasının global çekimli olduğunu gösterir. Böylece denklem global asimptotik kararlıdır.

Teorem 3.2.5.

$$f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}) = 0\,,\ n = 0,1,2,\dots \tag{3.2.7}$$

denkleminin bir $\bar{x}$ denge noktası civarındaki lineer denklemi,

$$x_{n+1} = p_0 x_n + p_1 x_{n-1} + \dots + p_k x_{n-k}\,, n = 0,1,\dots \tag{3.2.8}$$

denklemidir. (3.2.8) lineer denkleminin karakteristik denklemi ise,

$$\lambda^{k+1} - p_0\lambda^k - \dots - p_{k-1}\lambda - p_k = 0 \tag{3.2.9}$$

denklemidir. Burada $p_0, p_1, \dots, p_k$ katsayıları reel sayılar olmak üzere;

$$|p_0| + |p_1| + \dots + |p_k| < 1$$

ise, bu durumda, (3.2.9)'un bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçüktür (*Ladas*, 1995).

Teorem 3.2.7. $[a, b]$ reel sayıların bir aralığı ve

$$f: [a, b] \times [a, b] \to [a, b]$$

şeklinde tanımlı f fonksiyonu sürekli ve aşağıdaki özellikleri sağlasın.

a. $f(x, y)$, her bir $y \in [a, b]$ için $x \in [a, b]$'e göre azalmayan ve $f(x, y)$, her bir $x \in [a, b]$ için $y \in [a, b]$'ye göre artmayandır.

b. Eğer $(m, M) \in [a, b] \times [a, b]$ ikilisi,

$$f(m, M) = m$$

ve

$$f(M, m) = M$$

sisteminin bir çözümü ise,

$$m = M$$

dir. O zaman söz konusu denklem bir denge noktasına sahiptir ve bütün çözümleri bu denge noktasına yakınsar (*Ladas*, 1995).

İspat 3.2.7. $m_0 = a$ ve $M_0 = b$ olsun. $i = 1, 2, \dots$ için

$$M_i = f(M_{i-1}, m_{i-1})$$

ve

$$m_i = f(m_{i-1}, M_{i-1})$$

olur. Şimdi görülebilir ki; her bir $i \geq 0$ için,

$$m_0 \leq m_1 \leq \cdots \leq m_i \leq \cdots \leq M_i \leq \cdots \leq M_1 \leq M_0$$

ve

$$m_i \leq x_k \leq M_i\,, \;\; k \geq 2i + 1$$

olur. Böylece;

$$m = \lim_{i \to \infty} m_i$$

ve

$$M = \lim_{i \to \infty} M_i$$

yazılabilir. O zaman,

$$M \geq \lim_{i\to\infty} \sup x_i \geq \lim_{i\to\infty} inf x_i \geq m$$

ve f sürekli olduğundan

$$m = f(m, M)$$

ve

$$M = f(M, m)$$

olur. Böylece,

$$m = M$$

olur. Bu ise istenen sonuçtur.

Teorem 3.2.8. $[a, b]$ reel sayıların bir aralığı ve *f*,

$$f: [a, b] \times [a, b] \to [a, b]$$

şeklinde tanımlı, sürekli ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyon olsun.

- **a)** $f(x, y)$, her bir $y \in [a, b]$ için $x \in [a, b]$'e göre artmayan ve $f(x, y)$, her bir $x \in [a, b]$ için $y \in [a, b]$'ye göre azalmayandır.
- **b)** (3.1.1) fark denklemi $[a, b]$ kapalı aralığında asal iki periyotlu çözüme sahip değildir.

O zaman (3.1.1) denkleminin $[a, b]$ kapalı aralığında bir denge noktası vardır ve (3.1.1) denkleminin bütün çözümleri bu denge noktasına yakınsar (*Ladas*, 1995).

4. LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ VE GLOBAL ASİMPTOTİK KARARLILIĞI

Bu bölümde Nasri ve ark. (2005), tarafından HIV virüsü ile ilgili yapılan çalışmaya yer verilmiştir. Bu çalışmaya göre T_I, T_4 ve V_I değişkenlerine göre aşağıda oluşturulan diferansiyel denklem sistemi, fark denklemine çevrilmiş ve bu fark denklem sisteminin çözümü, global asimtotik kararlığı incelenmiştir. Burada,

T_I: HIV virüsü taşıyan $\mathrm{CD4}^{+}T$ toplam hücre sayısı,

T_4: HIV virüsü bulaşmamış $\mathrm{CD4}^{+}T$ toplam hücre sayısı

V_I: HIV virüsü bulaşmış hücre sayısıdır. Diferansiyel denklem şu şekilde verilmiştir:

$$\frac{dT_4}{dt} = s + e_1 T_4(t) V_I(t) - \gamma_1 T_4(t), \qquad t > t_0, \qquad T_4(t_0) = T_4^0, \tag{4.1}$$

$$\frac{dT_I}{dt} = e_2 T_4(t) V_I(t) - e_3 T_I(t), \qquad t > t_0, \qquad T_I(t_0) = T_I^0, \tag{4.2}$$

$$\frac{dV_1}{dt} = e_4 T_I(t) - \sigma V_I(t), \qquad t > t_0, \qquad V_I(t_0) = V_I^0, \tag{4.3}$$

ve

$$e_1 = r - k_v(1 - E_{RT})(r + \alpha),$$

$$e_2 = k_v(1 - E_{RT})(r + \alpha), \tag{4.4}$$

$$e_3 = \gamma_2 + k_c,$$

$$e_4 = \gamma_2(1 - E_{PI})N(1 - L).$$

(4.1)-(4.3) denklem sisteminin sol tarafındaki her bir eşitlik için, türetilmiş zaman yaklaşımı ile bunun birinci derece ileri fark yaklaşımlarından nümerik metodlar bulunabilir. Bu eşitliklerin sağ tarafında, zaman aralığı $l > 0$ olacak şekilde uygun yaklaşımlar aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{1}{l}(T_4^{n+1} - T_4^n) = s + e_1 T_4^{n+1} V_I^n - \gamma_1 T_4^{n+1}, \tag{4.5}$$

$$\frac{1}{l}(T_I^{n+1} - T_I^n) = e_2 T_4^{n+1} V_I^n - e_3 T_I^{n+1}, \tag{4.6}$$

$$\frac{1}{l}(V_I^{n+1} - V_I^n) = e_4 T_I^{n+1} - \sigma V_I^n. \tag{4.7}$$

$T_4(nl), T_I(nl)\ ve\ V_I(nl)$ değerlerinden her birinin yaklaşık değeri $T_4^n, T_I^n\ ve\ V_I^n$ olarak nitelendirilir.

(4.5)-(4.7) eşitlikleri yeniden düzenlenirse aşağıdakiler elde edilir,

$$T_4^{n+1} = \frac{T_4^n + ls}{1 + l(\gamma_1 - e_1 V_I^n)}, \tag{4.8}$$

$$T_I^{n+1} = \frac{T_I^n + le_2 T_4^{n+1} V_I^n}{1 + le_3}, \tag{4.9}$$

$$V_I^{n+1} = \frac{V_I^n + le_2 T_I^{n+1}}{1 + l\sigma}, \tag{4.10}$$

fark denklem sisteminin çözümü (4.8)-(4.10) denklem sistemine göre yapılmıştır. Bu denklemlere göre lokal asimtotik kararlığı ve global asimtotik kararlığı incelenmiştir. (4.8)-(4.10) denklem sistemi düzenlenecek olursa;

$$T_4^{n+1} = \frac{T_4^n + \hat{a}}{\hat{b} + \hat{c} V_I^n}, \tag{4.10}$$

$$T_I^{n+1} = \hat{d} T_I^n + \hat{e} T_4^{n+1} V_I^n, \tag{4.11}$$

$$V_I^{n+1} = \hat{f} V_I^n + \hat{g} T_I^{n+1}, \tag{4.12}$$

elde edilir. Bu eşitliklerin $\hat{c}$ den başka diğer bütün parametreleri negatif değildir.

$T_4^n = \hat{a}\mathrm{x_n}$, $T_I^n = \frac{1}{\hat{g}}\mathrm{y_n}$ ve $V_I^n = \mathrm{z_n}$ değişkenlerini değiştirerek (4.10)-(4.12) sistemlerini $b = \widehat{b}, d = \widehat{d},\ \ \hat{e} = \hat{a}\hat{e}\hat{g}\ ve\ f = \hat{f}$ olmak üzere yeniden düzenlenirse;

$$x_{n+1} = \frac{1+x_n}{b+c\mathrm{z}_n}, \tag{4.13}$$

$$\mathrm{y}_{n+1} = d\mathrm{y_n} + \mathrm{ex_{n+1}z_n}, \tag{4.14}$$

$$\mathrm{z_{n+1}} = f\mathrm{z_n} + \mathrm{y_{n+1}}, \tag{4.15}$$

elde edilir. $\mathrm{c} \neq 0$ ve $\mathrm{e} \neq (b-1)(1-d)(1-f)$ kabul edilecek olursa (4.13)-(4.15) sistemlerinin şu iki denge noktası bulunur.

$$\left(\frac{1}{b-1}, 0{,}0\right) \tag{4.16}$$

ve

$$\left(\frac{(1-d)(1-f)}{\mathrm{e}}, \frac{\mathrm{e}+(1-b)(1-d)(1-f)}{c(1-d)}, \frac{e+(1-b)(1-d)(1-f)}{c(1-d)(1-f)}\right) \tag{4.17}$$

$c\ = 0$ ve $\mathrm{e} = (b-1)(1-d)(1-f)$ olduğu zaman (4.13)-(4.15) sisteminin denge noktası sadece (4.16) dir. ψ değişkenine bağlı ve başlangıç değeri $(\mathrm{x_0}, \mathrm{y_0}, \mathrm{z_0})$ olan (4.13)-(4.15) sisteminin $\mathrm{c} \neq 0$ ve $\mathrm{e} \neq (b-1)(1-d)(1-f)$ şartlarına bağlı denge noktası incelenecek olursa,

$$\left(\frac{1}{b-1}, (1-f)\psi, \psi\right) \tag{4.18}$$

elde edilmiştir.

$b > 1, 0 <\ d < 1$ ve $0 < f\ < 1$ olduğunu kabul edilerek denge noktası olan $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ nin jakobiyen matrisi bulunacak olursa;

$$J(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{b+c\bar{z}} & 0 & -\dfrac{c(1+\bar{x})}{(b+c\bar{z})^2} \\ \dfrac{e\bar{z}}{b+c\bar{z}} & d & \dfrac{be(1+\bar{x})}{(b+c\bar{z})^2} \\ \dfrac{e\bar{z}}{b+c\bar{z}} & d & f+\dfrac{be(1+\bar{x})}{(b+c\bar{z})^2} \end{bmatrix}$$

ve $J(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ nin $u = \frac{1}{b+c\bar{z}}$ ve $v = 1+\bar{x}$ için karakteristik polinomu,

$$P(\lambda) = \lambda^3 - (d+f+u+beu^2v)\lambda^2 + (du+fu+df+eu^2v)\lambda - dfu, \tag{4.19}$$

olur ve (4.16) nin denge noktasının karakteristik denklemi,

$$\left(\lambda - \frac{1}{b}\right)\left[\lambda^2 - \left(\frac{e^{-}}{b-1} + d + f\right)\lambda + df\right] \tag{4.20}$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.1. (Nasri ve ark. 2005) (4.13)-(4.15) denklem sistemi $b > 1,\ 0 < d < 1,$ $e > 0\ ve\ \ 0 < f < 1$ olmak üzere aşağıdaki şartları sağlar.

- **i.** Eğer $e < (b-1)(1-d)(1-f)$ şartı sağlanacak olursa (4.16) denklemi asimtotik kararlıdır.
- **ii.** Eğer $e > (b-1)(1-d)(1-f)$ şartı sağlanacak olursa (4.16) denklemi kararsızdır.
- **iii.** Eğer $e = (b-1)(1-d)(1-f)$ olursa $\left(\frac{1}{b-1}, 0{,}0\right)$ ve $\left(\frac{1}{b-1}, (1-f)\psi, \psi\right)$ denge noktalarında karakteristik polinomun kökleri $1, \frac{1}{b}\ ve\ df$' dir.

Teorem 4.2. (Nasri ve ark. 2005) (4.13)-(4.15) denklemi $b > 1,\ 0 < d < 1,\ e >$ $0\ ve\ \ 0 < f < 1$ olmak üzere aşağıdaki şartları sağlar.

- **i.** Eğer $e > (b-1)(1-d)(1-f)$ şartı sağlanacak olursa (4.17) denklemi asimtotik kararlıdır. Böylece $c < 0$ olduğu zaman sistemin $\mathbb{R}^3{}_{>0}$ da denge noktası yoktur.
- **ii.** Eğer $e < (b-1)(1-d)(1-f)$ şartı sağlanacak olursa (4.17) denklemi kararsızdır
- **iii.** Böylece $c \geq 0$ olduğu zaman $\mathbb{R}^3{}_{>0}$ da denge noktası yoktur.

iv. (4.17) denge noktası repeller değildir.

Teorem 4.3. (Nasri ve ark. 2005) (4.13)-(4.15) denklem sistemi $b > 1, c > 0,\ 0 < d < 1,\ e > 0\, ve\ 0 < f < 1$ olmak üzere, eğer $e < (b-1)(1-d)(1-f)$ şartı sağlanırsa $\left(\frac{1}{b-1}, 0,0\right)$ denge noktası global asimtotik kararlıdır.

5. $x_{n+1} = x_n . e^{r(1-x_n)+sy_n}$, $y_{n+1} = y_n . e^{r(1-y_n)+sx_n}$ FARK DENKLEM SİSTEMİ

Bu bölümde,

$$x_{n+1} = x_n . e^{r(1-x_n)+sy_n} \tag{5.1}$$
$$y_{n+1} = y_n . e^{r(1-y_n)+sx_n} \tag{5.2}$$

denklem sisteminin negatif olmayan r ve s parametreleri reel sayı ve başlangıç koşulları x_0, y_0 pozitif sayılar olmak üzere; denklem sisteminin karakterini inceleyeceğiz. Bu denklem sistemlerinin değişkenleri olan x_n gençleri, y_n yetişkinleri ifade etmektedir. Bu iki popülasyon arasındaki etkileşim modeli *Smith* (2002) tarafından (5.1) ve (5.2) denklemleri olarak belirlenmiştir. Burada gençler ve yetişkinler arasında bağlı yoğunluk olasılığından bahsedilmiştir. Buna göre yetişkinler bu bağlı yoğunluk oranında genç çocuklarını özgür bırakmaktadırlar. Burada (5.1)-(5.2) tipindeki biyolojik fark denklem sisteminin çözümlerinin davranışları, denge noktalarının lokal kararlılığı ve global asimtotik kararlığı incelenecektir.

Bundan sonraki çalışmamızda gerekli olan ve literatürde iyi bilinen fark denklem sistemi tanımları 3. Bölümde yer alan çalışmadan yararlanılarak düzenlenmiştir.

Tanım 5.1. Eğer $\bar{x}, \bar{y}$ aşağıdaki şartları sağlarsa, $(\bar{x}, \bar{y}) \in I_1 \times I_2$ noktası (5.1)-(5.2) denklem sisteminin denge noktası olarak isimlendirilir.

$$\bar{x} = F_1(\bar{x}, \bar{y}), \tag{5.3}$$
$$\bar{y} = F_2(\bar{x}, \bar{y}), \tag{5.4}$$

Tanım 5.2. $\forall$ ε > 0 için $\|(x_0, y_0) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \delta$ iken $(\forall (x_0, y_0) \in I_1 \times I_2)$

$\forall n \geq 0$ için $\|(x_n, y_n) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \varepsilon$

olacak şekilde $\delta > 0$ mevcut ise (5.1) ve (5.2) sisteminin denge noktası olan $(\bar{x}, \bar{y})$ *kararlıdır* denir. Aksi halde ise *kararsızdır*.

Tanım 5.3. Eğer sistemin denge noktası kararlı ve $\forall(x_0, y_0) \in I_1 \times I_2$ için

$$\|(x_0, y_0) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \gamma$$

olacak şekilde $\gamma > 0$ varsa ve

$$\lim_{n\to\infty} \|(x_n, y_n) - (\bar{x}, \bar{y})\| = 0$$

ise (5.1) ve (5.2) sisteminin denge noktası *Asimtotik Kararlıdır* denir.

Tanım 5.4. Eğer (5.1)-(5.2) sisteminin denge noktası kararlı ve $\forall\ (x_0, y_0) \in I_1 \times I_2$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|(x_n, y_n) - (\bar{x}, \bar{y})\| = 0$$

İse (5.1)-(5.2) sisteminin denge noktası olan $(\bar{x}, \bar{y})$ *Global Asimtotik Kararlıdır* denir.

Tanım 5.5. Her $(x_0, y_0) \in I_1 \times I_2$ için,

$$0 < \|(x_0, y_0) - (\bar{x}, \bar{y})\| < r$$

olacak şekilde $r > 0$ sayısı varsa ve

$$\|(x_N, y_N) - (\bar{x}, \bar{y})\| \geq \gamma$$

olacak şekilde $N \geq 1$ mevcutsa o takdirde (5.1)-(5.2) fark denklem sisteminin$(\bar{x}, \bar{y})$ denge noktası *repellerdir*.

Tanım 5.6. (5.1)-(5.2) denklem sisteminin iki tane denge noktası olsun. Bu durumda her iki denge noktası da eşzamanlı olarak asimtotik kararlı ise buna *bistability* denir.

Tanım 5.7. (5.1)-(5.2) denklem sistemi μ parametresine bağlı olsun. μ nün μ_0 değeri için sistemin doğal niteliği değişirse μ_0 da *bifurcation* oluşur denir.

Tanım 5.8. $\mathbb{R}^2$ de $\mathbb{R}^2_{\geq 0} = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0\}$ kümesi negatif olmayan bölgedir, $\mathbb{R}^2_{>0} = \{(x, y): x > 0\ , y > 0\}$ kümesi ise pozitif bölgedir.

(5.1)-(5.2) denklem sisteminin kararlılığı incelenebilmesi için öncelikle denge noktasının bulunması gerekir.

Teorem 5.1. (5.1)-(5.2) denklem sisteminin denge noktaları ,

$(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$ ve $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{r}{r-s}, \frac{r}{r-s})$

dir.

İspat 5.1. (5.1)-(5.2) denklemlerinin denge noktaları bulunacak olursa;

$$\bar{x} = \bar{x}. e^{r(1-\bar{x})+s\bar{y}} \tag{5.5}$$

$$\bar{y} = \bar{y}. e^{r(1-\bar{y})+s\bar{x}} \tag{5.6}$$

(5.5) denklemi düzenlenirse;

$$\bar{x}\left(1 - e^{r(1-\bar{x})+s\bar{y}}\right) = 0$$

$$\bar{x} = 0 \qquad veya \qquad 1 - e^{r(1-\bar{x})+s\bar{y}} = 0 \tag{5.7}$$

$$e^{r(1-\bar{x})+s\bar{y}} = 1$$

$$r(1-\bar{x}) + s\bar{y} = 0 \tag{5.8}$$

(5.6) denklemi düzenlenirse;

$$\bar{y}\left(1 - e^{r(1-\bar{y})+s\bar{x}}\right) = 0$$

$$\bar{y} = 0 \qquad veya \qquad 1 - e^{r(1-\bar{y})+s\bar{x}} = 0 \tag{5.9}$$

$$e^{r(1-\bar{y})+s\bar{x}} = 1$$

$$r(1-\bar{y}) + s\bar{x} = 0 \tag{5.10}$$

(5.7) ve (5.9) denklemlerinden birinci denge noktası $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$ olur. (5.8) ve (5.10) denklemlerinde ortak çözüm uygulanırsa, $\bar{x} = \bar{y}$ olur. (5.7) denkleminde yerine yazılırsa,

$r(1-\bar{x}) + s\bar{x} = 0$

$\bar{x} = \dfrac{r}{r-s}$

bulunur ki ikinci denge noktası $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{r}{r-s}, \frac{r}{r-s})$ olur. O halde denge noktaları, $(0,0)$ ve $(\frac{r}{r-s}, \frac{r}{r-s})$ olur ve ispat tamamlanmış olur.

Şimdi de bulduğumuz denge noktalarının kararlılığını inceleyelim.

Teorem 5.2. (5.3)-(5.4) denklem sisteminin $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ denge noktasında *jakobiyen* matrisi $j(\bar{x}, \bar{y}) = j(0, 0)$ ve bu *jakobiyen* matrisin karakteristik polinomu $P(\lambda)$ ile gösterilsin.

Bu durumda aşağıdaki eşitlikler doğrudur;

i. $0 \leq r$ ise, $P(\lambda)$ nın köklerinden en az biri 1 den büyük olacağından denge noktası olan $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ kararsızdır.

ii. $0 < r$ ise, $P(\lambda)$ nın bütün kökleri 1 den büyük olacağından, denge noktası olan $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ repellerdir.

İspat 5.2. Öncelikle $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$ denge noktasının *jakobiyen* matrisini bulacak olusak,

$$j(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{bmatrix} e^{r(1-\bar{x})+s\bar{y}} - r\bar{x}e^{r(1-\bar{x})+s\bar{y}} & s\bar{x}e^{r(1-\bar{x})+s\bar{y}} \\ \bar{y}e^{r(1-\bar{y})+s\bar{x}} & e^{r(1-\bar{y})+s\bar{x}} - r\bar{y}e^{r(1-\bar{y})+s\bar{x}} \end{bmatrix}$$

$$j(0,0) = \begin{bmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^r \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} e^r - \lambda & 0 \\ 0 & e^r - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$ denge noktasının karakteristik denklemi ve kökü,

$(e^r - \lambda)^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = e^r$

olur.

$(\bar{x},\bar{y}) = (0,0)$ için, P(λ) kökleri $\lambda_{1,2} = e^r$ ve r parametresi negatif olmayan reel sayılar olduğuna göre;

- $0 \leq r$ için, $|\lambda_{1,2}| \geq 1$ olduğundan $(\bar{x},\bar{y}) = (0,0)$ kararsızdır ve aynı zamanda $(\bar{x},\bar{y})$ repellerdir. Böylece (i) ve (ii) ispatlanmış olur.

Teorem 5.3. (5.3) ve (5.4) denklem sisteminin $(\bar{x},\bar{y}) = (\frac{r}{r-s},\frac{r}{r-s})$ denge noktasında *jakobiyen* matrisi $j(\bar{x},\bar{y}) = j(\frac{r}{r-s},\frac{r}{r-s})$ ve bu *jakobiyen* matrisin karakteristik polinomu P(λ) ile gösterilsin.

Bu durumda aşağıdaki eşitlikler doğrudur;

i. Eğer P(λ) nun bütün kökleri $|\lambda| < 1$ olduğu zaman birim diskin içindedir, bu durumda denge noktası olan $(\bar{x},\bar{y}) = (\frac{r}{r-s},\frac{r}{r-s})$ asimtotik kararlıdır.

ii. P(λ) nın köklerinden en az biri 1 den büyük ise denge noktası olan $(\bar{x},\bar{y}) = (\frac{r}{r-s},\frac{r}{r-s})$ kararsızdır.

iii. P(λ) nın bütün kökleri 1 den büyük ise, denge noktası olan $(\bar{x},\bar{y}) = (\frac{r}{r-s},\frac{r}{r-s})$ repellerdir.

İspat 5.3. $(\bar{x},\bar{y}) = (\frac{r}{r-s},\frac{r}{r-s})$ denge noktasının *jakobiyen* matrisini bulacak olursak,

$$j(\bar{x},\bar{y}) = \begin{bmatrix} e^{r(1-\bar{x})+s\bar{y}} - r\bar{x}e^{r(1-\bar{x})+s\bar{y}} & s\bar{x}e^{r(1-\bar{x})+s\bar{y}} \\ \bar{y}e^{r(1-\bar{y})+s\bar{x}} & e^{r(1-\bar{y})+s\bar{x}} - r\bar{y}e^{r(1-\bar{y})+s\bar{x}} \end{bmatrix}$$

$$j\left(\frac{r}{r-s},\frac{r}{r-s}\right) = \begin{bmatrix} 1-\dfrac{r^2}{r-s} & \dfrac{sr}{r-s} \\ \dfrac{sr}{r-s} & 1--\dfrac{r^2}{r-s} \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{r-s-r^2}{r-s}-\lambda & \dfrac{sr}{r-s} \\ \dfrac{sr}{r-s} & \dfrac{r-s-r^2}{r-s}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(\bar{x},\bar{y}) = (\frac{r}{r-s},\frac{r}{r-s})$ denge noktasının karakteristik denklemi ve kökleri,

$$(\frac{r-s-r^2}{r-s}-\lambda)^2-(\frac{sr}{r-s})^2 = 0$$

$$\left(\frac{r-s-r^2+sr}{r-s}-\lambda\right)\left(\frac{r-s-r^2-sr}{r-s}-\lambda\right)=0$$

$$\lambda_3=\frac{r-s-r^2+sr}{r-s}\ ve\ \lambda_4=\frac{r-s-r^2-sr}{r-s}$$

Buradan kökler,

$\lambda_3 = 1-r, r \neq s$ olmak üzere $ve\ \lambda_4 = 1-\dfrac{r(r+s)}{r-s}$

bulunur.

$(\bar{x},\bar{y}) = (\frac{r}{r-s}, \frac{r}{r-s})$ için P(λ) kökleri $\lambda_3 = 1-r\ \ ve\ \ \lambda_4 = 1-\frac{r(r+s)}{r-s}$ için;

a) $0 < r \leq 1$ için $|\lambda_3| < 1$ olur.

- $0 < s < r < 1$ şartları için $|\lambda_4| < 1$ olacağından $(\bar{x},\bar{y})$ denge noktası asimtotik kararlıdır. Böylece (i) ispatlanmış olur.
- $s > 1$ alındığında $|\lambda_4| > 1$ olacağından $(\bar{x},\bar{y})$ denge noktası kararsızdır. Böylece (ii) ispatlanmış olur.

b) $1 < r < 2$ için $|\lambda_3| < 1$ olur.

- $s < r$ şartları için $|\lambda_4| > 1$ olacağından $(\bar{x},\bar{y})$ denge noktası kararsızdır.
- $r < s$ alındığında $|\lambda_4| > 1$ olacağından $(\bar{x},\bar{y})$ denge noktası kararsızdır. Böylece (ii) ispatlanmış olur.

c) $r > 2$ için $|\lambda_3| > 1$ olur.

- $r > s$ alındığında $|\lambda_4| > 1$ olacağından $(\bar{x},\bar{y})$ denge noktası *repellerdir*.
- $r < s$ alındığında $|\lambda_4| > 1$ olacağından $(\bar{x},\bar{y})$ denge noktası *repellerdir*. Böylece (iii) ispatlanmış olur.

5.1. Nümerik Örnekler

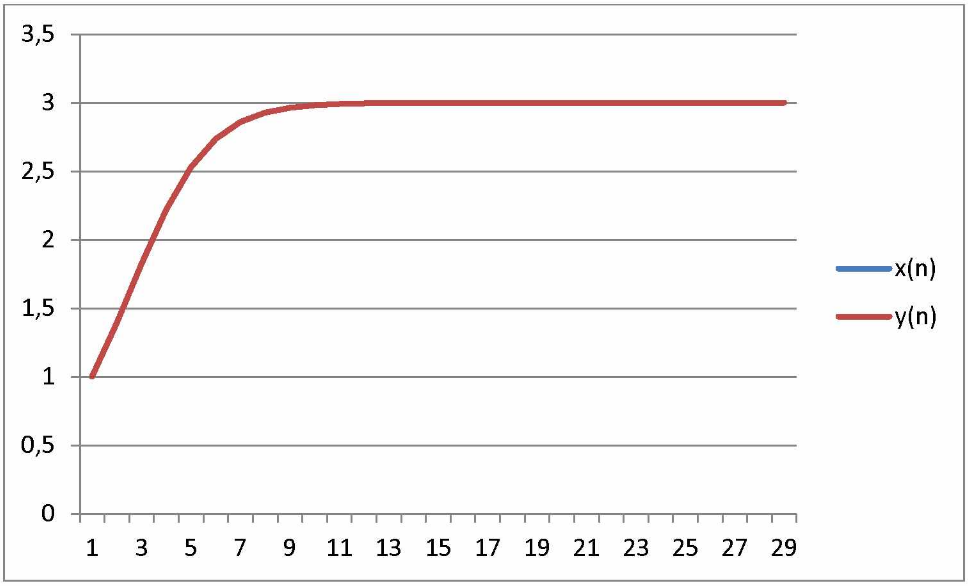
Bu kısımda, Teorem 5.2. ve Teorem 5.3.'ün iddialarına dair nümerik örnekler verilmiştir.

Örnek 5.1.1. $0 < r \leq 1$ ve $0 < s < r < 1$ şartlarında (5.1)-(5.2) denklem sisteminin çözümleri aşağıda verilmiştir:

a. $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $r = 0,5$ ve $s = 0,33$ olma durumlarında başlangıç şartları $x_0 = 1$ ve $y_0 = 1$ verildiğinde (5.1)-(5.2) denklem sisteminin çözümleri çizelge 5.1.1.a. ve Şekil 5.1.1.a. da verilmiştir.

Çizelge 5.1.1.a.

n	x_n	y_n
0	1	1
1	1,3956124251	1,3956124251
2	1,8234517348	1,8234517348
3	2,2184808060	2,2184808060
4	2,5271086901	2,5271086901
5	2,7343426437	2,7343426437
6	2,8581291956	2,8581291956
7	2,926515357	2,926515357
.	.	.
.	.	.
.	.	.
38	3	3
39	3	3
40	3	3

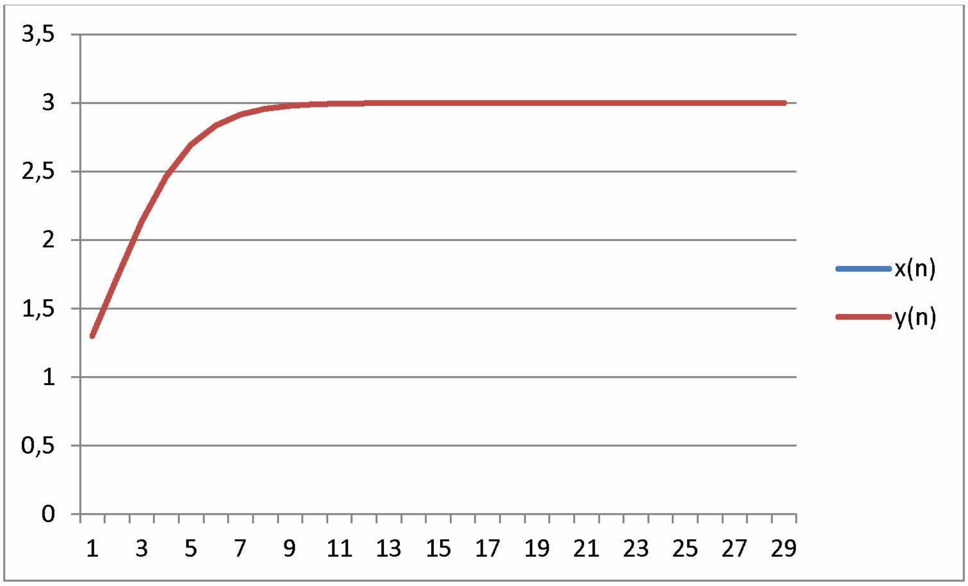


Şekil 5.1.1.a.

b. $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $r = 0,5$ ve $s = 0,33$ olma durumlarında başlangıç şartları $x_0 = 1,3$ ve $y_0 = 1,3$ verildiğinde (5.1) - (5.2) denklem sisteminin çözümleri şöyledir:

Çizelge 5.1.1.b.

n	x_n	y_n
0	1,3	1,3
1	1,7258118851	1,7258118851
2	2,1341368594	2,1341368594
3	2,4654462043	2,4654462043
4	2,6951803069	2,6951803069
5	2,8356420623	2,8356420623
6	2,9143924559	2,9143924559
7	2,9562728487	2,9562728487
.	.	.
.	.	.
.	.	.
38	3	3
39	3	3
40	3	3

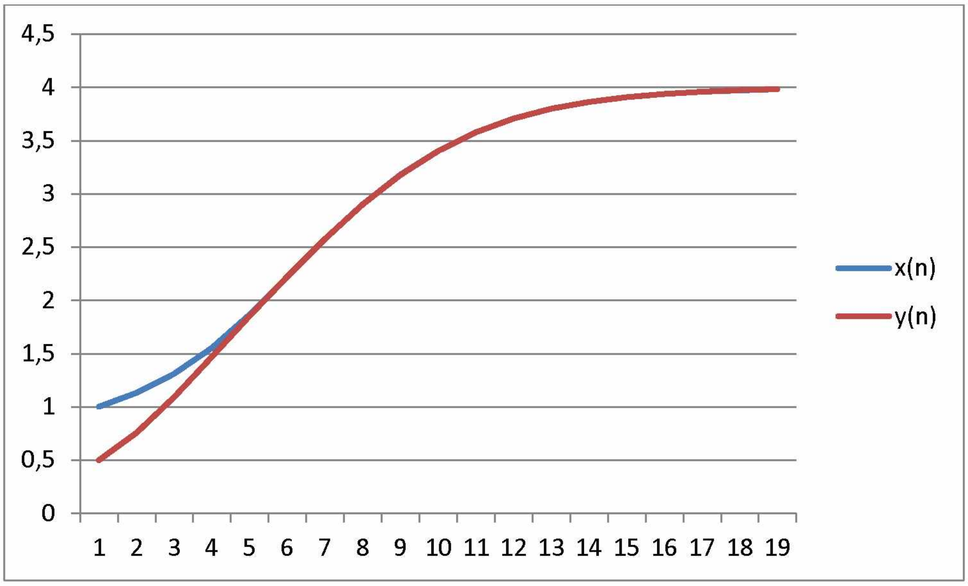


Şekil 5.1.1.b.

c. $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $r = 0,33$ ve $s = 0,25$ olma durumlarında başlangıç şartları $x_0 = 1$ ve $y_0 = 0,5$ verildiğinde (5.1) - (5.2) denklem sistemlerinin çözümleri şöyledir:

Çizelge 5.1.1.c.

n	x_n	y_n
0	1	0,5
1	1,1331484531	0,758448398
2	1,3102648363	1,091249969
3	1,5521175534	1,468840557
4	1,8641237747	1,85191929
5	2,2204939721	2,221717182
6	2,5762314495	2,575812027
7	2,900462411	2,900699809
.	.	.
.	.	.
.	.	.
22	3,997882395	3,9946377628
23	3,99534578	3,9996662240
24	4,001215105	3,9954596038



Şekil 5.1.1.c.

Sonuç 5.1.1. Örnek 5.1.1. de verilen çizelge ve şekillerde görüldüğü gibi, $0 < r \leq 1$ ve $0 < s < r < 1$ başlangıç şartlarında (5.1)-(5.2) denklem sisteminin çözümleri $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{r}{r-s}, \frac{r}{r-s})$ denge noktasına yakınsamaktadır. Buna göre Teorem 5.3. den (5.1) - (5.2) denklem sisteminin lokal asimtotik kararlı olduğu görülür.

Teorem 5.1.1. $0 < r \leq 1$ ve $0 < s < r < 1$ başlangıç şartlarında (5.1)-(5.2) denklem sisteminin çözümleri, $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{r}{r-s}, \frac{r}{r-s})$ denge noktası global asimtotik kararlıdır.

İspat 5.1.1 (5.1)-(5.2) denklem sisteminin $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{r}{r-s}, \frac{r}{r-s})$ denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu ispatlamak için hem lokal asimptotik kararlı hem de çekim noktası olduğunu göstermeliyiz.

Teorem 5.3'den $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{r}{r-s}, \frac{r}{r-s})$ denge noktasının lokal asimptotik kararlı olduğu açıktır. Bu durumda, ispatı tamamlamak için (5.1)-(5.2) denklem sisteminin $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif çözümünün $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ve $\lim_{n\to\infty} y_n = \bar{y}$, $n \to \infty$ iken $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{r}{r-s}, \frac{r}{r-s})$ denge noktasına yakınsadığını yani:

$$(x_n, y_n) \to (\frac{r}{r-s}, \frac{r}{r-s})$$

olduğunu göstermeliyiz.

Örnek 5.1.1. de verilen çizelge ve şekillerde görüldüğü gibi, $0 < r \leq 1$ ve $0 < s < r < 1$ başlangıç şartlarında (5.1)-(5.2) denklem sisteminin çözümleri $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{r}{r-s}, \frac{r}{r-s})$ denge noktasına yakınsadığı açıktır. Tablodaki verilerden,

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < \cdots < \bar{x}$$

ve

$$y_0 < y_1 < y_2 < y_3 < \cdots < y_n < \cdots < \bar{y}$$

elde edilir ki buradan,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$$

ve

$\lim_{n\to\infty} y_n = \bar{y}$

olduğu görülür. Yani,

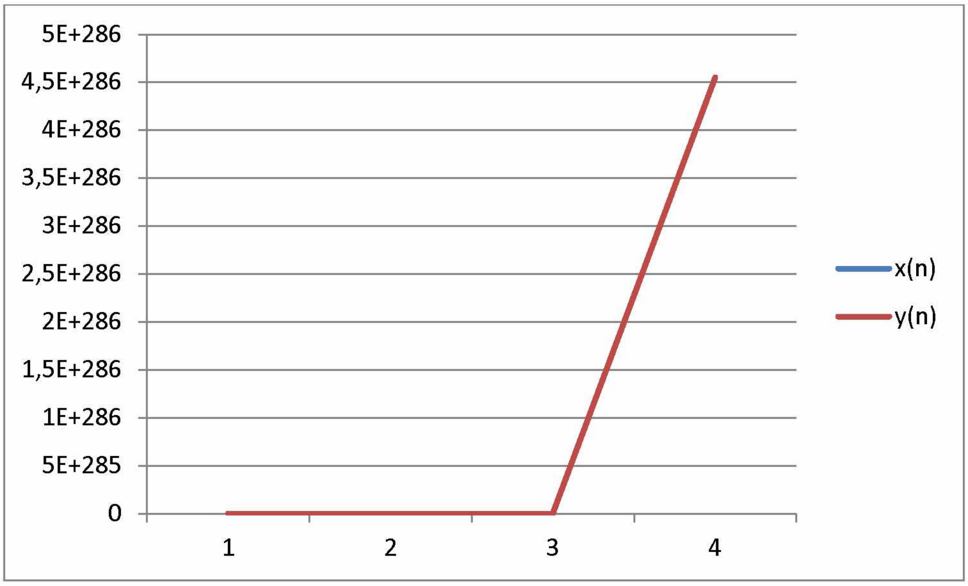
$(x_n, y_n) \to (\frac{r}{r-s}, \frac{r}{r-s})$

dır. Dolayısıyla, $0 < r \leq 1$ ve $0 < s < r < 1$ başlangıç şartlarında (5.1)-(5.2) denklem sistemi $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{r}{r-s}, \frac{r}{r-s})$ denge noktası global asimtotik kararlıdır.

Örnek 5.1.2. $0 < r \leq 1$ ve $s > 1$ şartlarında, $r = 0,5$ ve $s = 1,5$ olmak üzere, $x_0 = 1$ ve $y_0 = 1$ alınarak, (5.1)-(5.2) denklem sisteminin çözümleri aşağıda verilmiştir:

Çizelge 5.1.2.

n	x_n	y_n
0	1	1
1	4,48168907	4,48168907
2	653,0731016	653,0731016
3	4,5515E+286	4,5515E+286
.	.	.
.	.	.
.	.	.



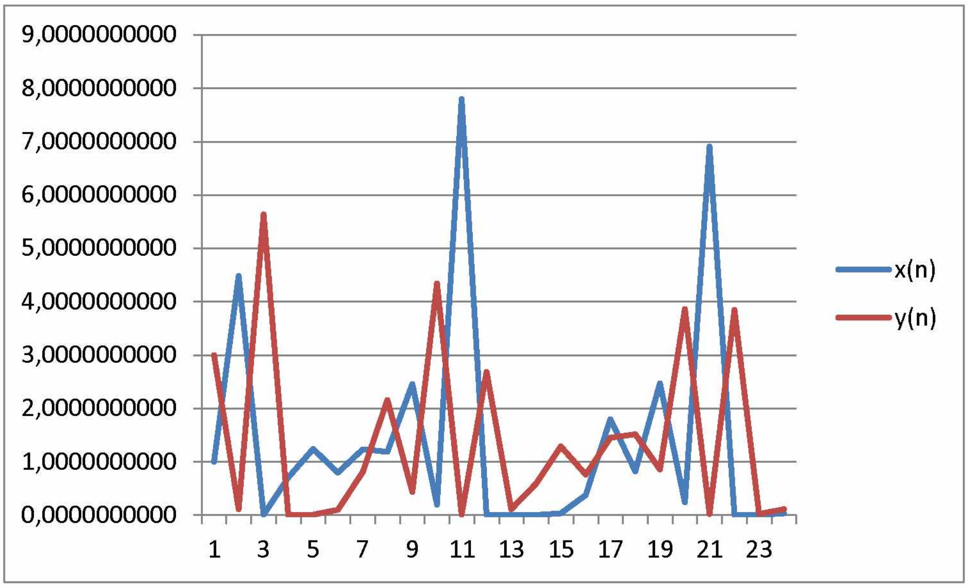
Şekil 5.1.2.

Sonuç 5.1.2. Örnek 5.1.2. de verilen çizelge ve şekillerde görüldüğü gibi, $0 < r \leq 1$ ve $s > 1$ başlangıç şartlarında (5.1)-(5.2) denklem sisteminin çözümleri Teorem 5.3.e göre $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{r}{r-s}, \frac{r}{r-s})$ denge noktasında, kararsızdır.

Örnek 5.1.3. $1 < r < 2$ ve $s < r$ şartlarında $r = 1,9$ ve $s = 0,5$ olmak üzere, $x_0 = 1$ ve $y_0 = 3$ alınarak, (5.1)-(5.2) denklem sisteminin çözümleri aşağıda verilmiştir:

Çizelge 5.1.3.

n	x_n	y_n
0	1,0000000000	3,0000000000
1	4,4816890703	0,1106495022
2	0,0063462926	5,6362715243
3	0,7020106695	0,0008447076
4	1,2371315149	0,0080095589
5	0,7915599237	0,0979035964
6	1,2352066076	0,8073412273
7	1,1829559032	2,1590020611
8	2,4593599259	0,4312877155
9	0,1906647025	4,3459894107
10	7,7950809908	0,0082892641
11	0,0000193462	2,6885360062
.	.	.
.	.	.
.	.	.
19	0,2332297768	3,8621298284
20	6,9046644708	0,0188694138
21	0,0000935298	3,8430540035

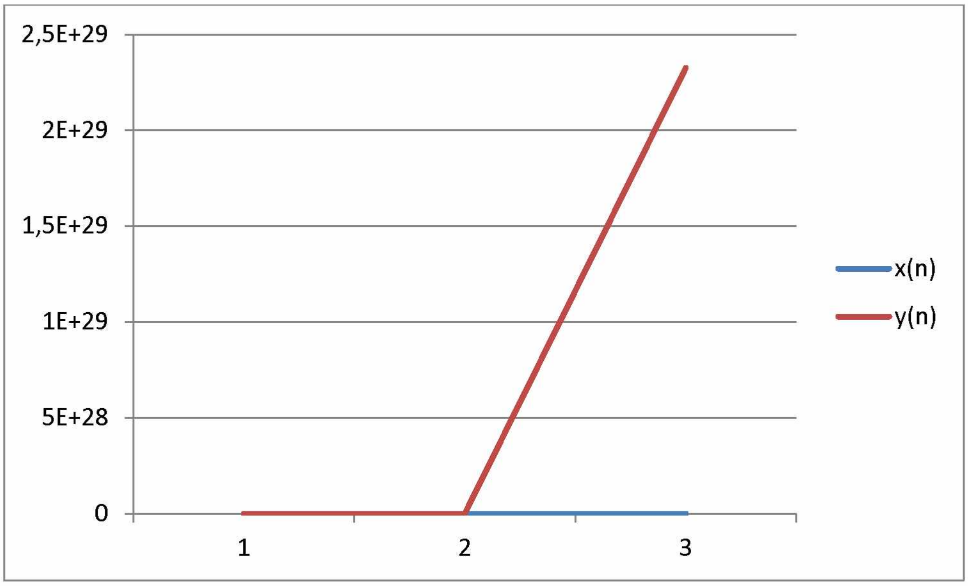


Şekil 5.1.3.

Örnek 5.1.4. $1 < r < 2$ ve $r < s$ şartlarında $r = 1,5$ ve $s = 2$ olmak üzere, $x_0 = 1,5$ ve $y_0 = 2$ alınarak, (5.1)-(5.2) denklem sisteminin çözümleri aşağıda verilmiştir:

Çizelge 5.1.4.

n	x_n	y_n
0	1,5	2
1	38,68551	8,963378
2	6,65E-16	2,33E+29
.	.	.
.	.	.
.	.	.



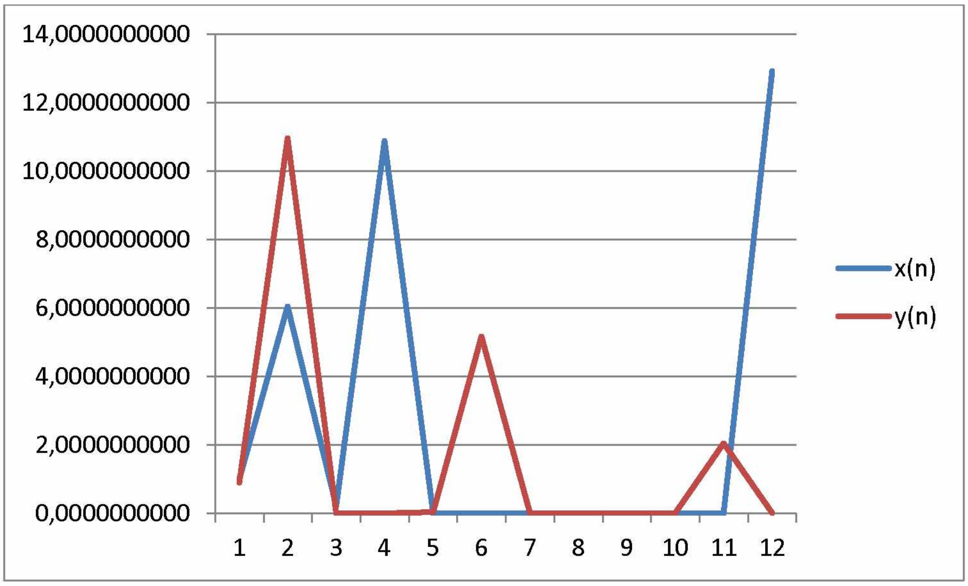
Şekil 5.1.4.

Sonuç 5.1.4. Örnek 5.1.3. ve Örnek 5.1.4. de verilen çizelge ve şekillerde görüldüğü gibi, (5.1)-(5.2) denklem sisteminin çözümleri $1 < r < 2$, $r < s$ ve $s < r$ (yani; $r \neq s$) şartlarında Teorem 5.3.e göre $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{r}{r-s}, \frac{r}{r-s})$ denge noktasında, kararsızdır.

Örnek 5.1.5. $r > 2$ ve $r > s$ şartlarında $r = 5$ ve $s = 2$ olmak üzere, $x_0 = 1$ ve $y_0 = 0,9$ alınarak, (5.1)-(5.2) denklem sisteminin çözümleri aşağıda verilmiştir:

Çizelge 5.1.5.

n	x_n	y_n
0	1	0,9
1	6,0496474644	10,9642445646
2	0,2187669671	0,0000000000
3	10,8744605552	0,0000000000
4	0,0000000000	0,0432467425
5	0,0000000000	5,1703114162
6	0,0000000000	0,0000000045
7	0,0000000004	0,0000006750
8	0,0000000644	0,0001001714
9	0,0000095538	0,0148593158
10	0,0014606157	2,0474482147
11	12,9189613530	0,0109138179
12	0,0000000000	255280306322,635
.	.	.
.	.	.
.	.	.

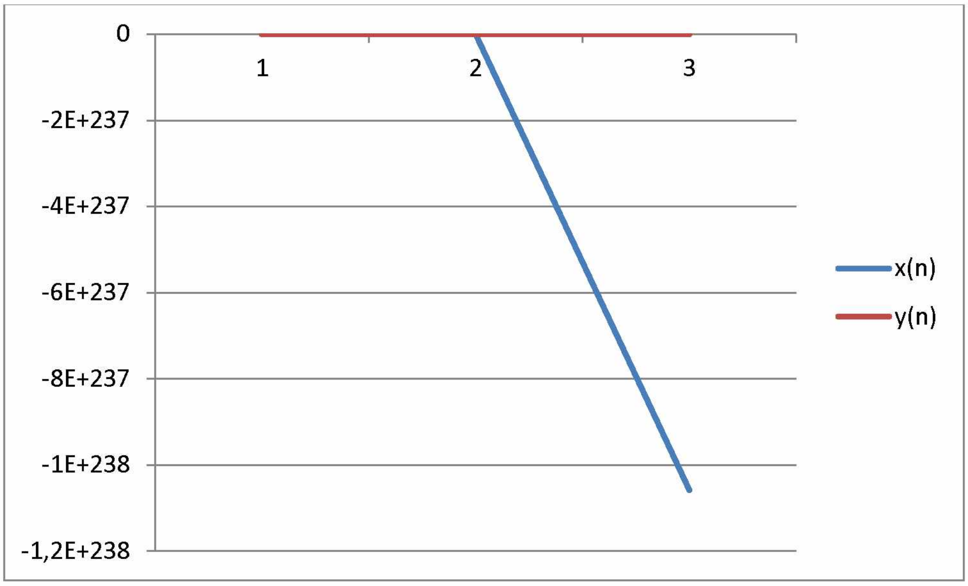


Şekil 5.1.5.

Örnek 5.1.6. $r > 2$ ve $r < s$ şartlarında $r = 3$ ve $s = 4,5$ olmak üzere, $x_0 = -2$ ve $y_0 = -1$ alınarak, (5.1)-(5.2) denklem sisteminin çözümleri aşağıda verilmiştir:

Çizelge 5.1.6.

n	x_n	y_n
0	-2	-1
1	-180,034	-0,04979
2	-1E+238	0
.	.	.
.	.	.
.	.	.



Şekil 5.1.6.

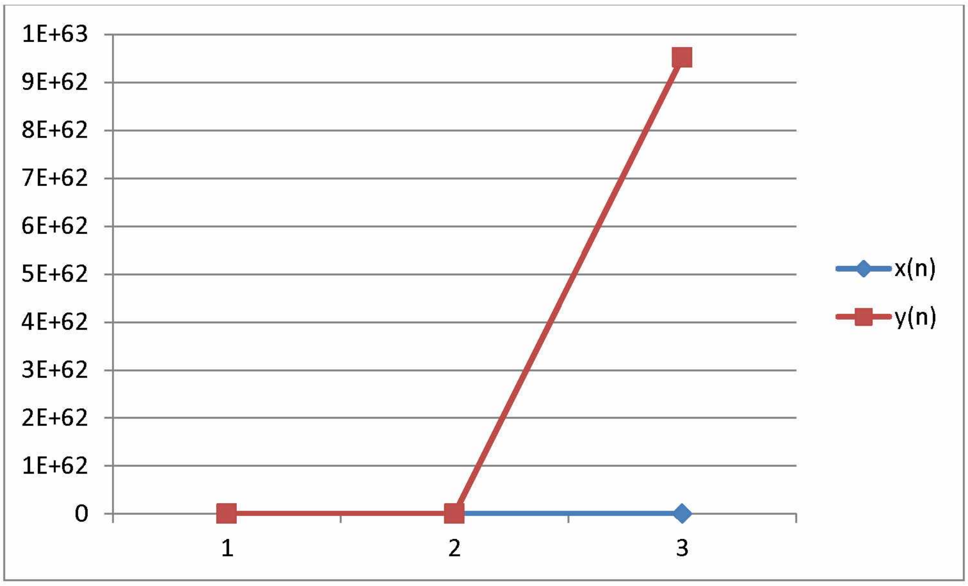
Sonuç 5.1.5. Örnek 5.1.5. ve Örnek 5.1.6. da verilen çizelge ve şekillerde görüldüğü gibi, (5.1)-(5.2) denklem sisteminin çözümleri $r > 2$, $r > s$ ve $r < s$ (yani; $r \neq s$) şartlarında Teorem 5.3' e göre $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{r}{r-s}, \frac{r}{r-s})$ denge noktasında kararsızdır ve aynı zamanda Teorem 5.3.iii. den dolayı repellerdir.

Örnek 5.1.7. $0 \leq r$ olmak üzere, (5.1)-(5.2) denklem sisteminin $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ denge noktasına göre çözümleri aşağıda verilmiştir:

a. $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $r = 2$ ve $s = 1$ olma durumlarında başlangıç şartları $\mathrm{x}_0 = 1$ ve $\mathrm{y}_0 = 5$ verildiğinde (5.1)-(5.2) denklem sisteminin çözümleri şöyledir:

Çizelge 5.1.7.a.

n	x_n	y_n
0	1	5
1	148,4132	0,004559
2	1,4E-126	9,52E+62
.	.	.
.	.	.
.	.	.

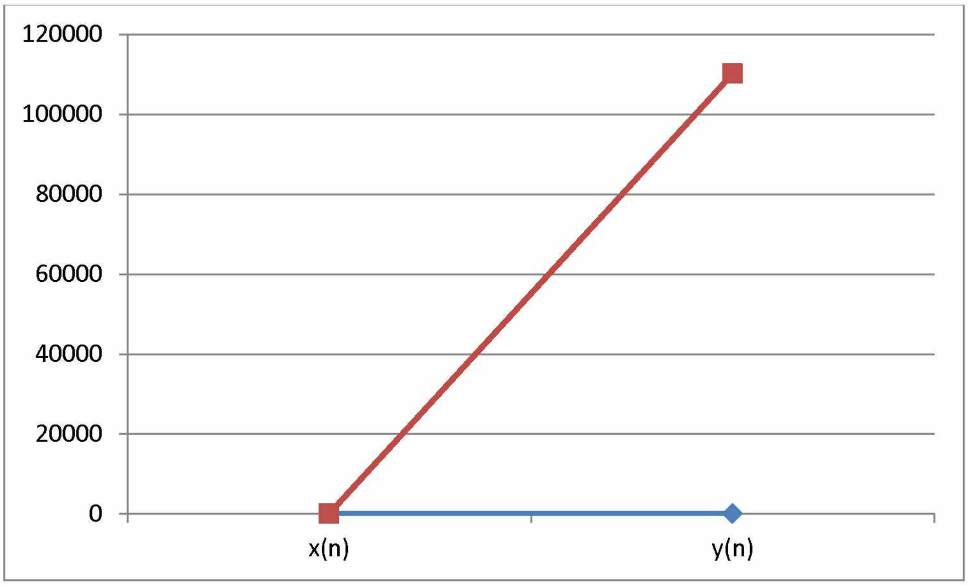


Şekil 5.1.7.a.

b. $n = 10, 20, 30, \ldots$ için $r = 5$ ve $s = 2$ olma durumlarında başlangıç şartları $\mathrm{x}_0 = 15$ ve $\mathrm{y}_0 = 5$ verildiğinde (5.1)-(5.2) denklem sisteminin çözümleri şöyledir:

Çizelge 5.1.7.b.

n	x_n	y_n
10	15	5
20	1,31348E-25	110132,3290
.	.	.
.	.	.
.	.	.



Şekil 5.1.7.b.

Sonuç 5.1.6. Örnek 5.1.7. de verilen çizelge ve şekillerde görüldüğü gibi, (5.1)-(5.2) denklem sistemi $0 \leq r$ ve keyfi s sabitleri için, Teorem 5.2' ye göre $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ denge noktası kararsızdır ve aynı zamanda Teorem 5.2.ii. den dolayı repellerdir.

6. RASYONEL FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİ

6.1. $x_{n+1}=\frac{1}{y_n},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_n},\ z_{n+1}=\frac{1}{t_{n-1}},\ t_{n+1}=\frac{x_n\, y_{n-1}}{x_{n-1}}$ FARK DENKLEM SİSTEMİNİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde;

$$x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0, z_0, t_{-1}, t_0 \epsilon\ (0,\infty) \tag{6.1.1}$$

olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_n}, y_{n+1}=\frac{1}{z_n}, z_{n+1}=\frac{1}{t_{n-1}}, t_{n+1}=\frac{x_n\, y_{n-1}}{x_{n-1}}, \quad n=0,1,2,... \tag{6.1.2}$$

fark denklem sisteminin çözümleri araştırılmıştır.

Teorem 6.1.1. $x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0, z_0, t_{-1}, t_0 \in (0,\infty)$ olmak üzere, (6.1.2) denklem sisteminin çözümünün $\{x_n, y_n, z_n, t_n\}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (6.1.2) denklem sisteminin bütün çözümleri altı periyotlu ve periyodiktir.

İspat 6.1.1. (6.1.1) hipotezi altında (6.1.2) denklem sisteminin bütün çözümleri pozitiftir.

Böylece (6.1.2) denklem sistemi yardımıyla aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_n}, \qquad y_{n+1}=\frac{1}{z_n}, \qquad z_{n+1}=\frac{1}{t_{n-1}}, \qquad t_{n+1}=\frac{x_n\, y_{n-1}}{x_{n-1}},$$

$$x_{n+2}=z_n, \qquad y_{n+2}=t_{n-1}, \qquad z_{n+2}=\frac{1}{t_n}, \qquad t_{n+2}=\frac{x_{n+1}\, y_n}{x_n},$$

$$x_{n+3}=\frac{1}{t_{n-1}}, \qquad y_{n+3}=t_n, \qquad z_{n+3}=\frac{x_{n-1}}{x_n\, y_{n-1}}, \qquad t_{n+3}=y_n,$$

$$x_{n+4}=\frac{1}{t_n}, \qquad y_{n+4}=\frac{x_n\, y_{n-1}}{x_{n-1}}, \qquad z_{n+4}=x_n, \qquad t_{n+4}=\frac{1}{z_n},$$

$$x_{n+5}=\frac{1}{t_n}, \qquad y_{n+5}=\frac{x_n\, y_{n-1}}{x_{n-1}}, \qquad z_{n+5}=x_n, \qquad t_{n+5}=\frac{1}{z_n},$$

$$x_{n+6} = x_n, \qquad y_{n+6} = y_n, \qquad z_{n+6} = z_n, \qquad t_{n+6} = t_n .$$

olup, Tanım 3.2.4' den denklem sisteminin çözümlerinin altı periyotlu olduğu görülür.

Teorem 6.1.2. $x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0, z_0, t_{-1}, t_0 \in (0, \infty)$, $x_{-1} = r, x_0 = s, y_{-1} = u, y_0 = q, z_0 = h, t_{-1} = m, t_0 = n$ başlangıç şartları ile (6.1.2) denklem sisteminin çözümlerinin$\{x_n, y_n, z_n, t_n\}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $n = 0, 1, 2, \ldots$ için (6.1.2) denklem sisteminin bütün çözümleri;

$$x_{6n+1} = \frac{1}{q}, \qquad y_{6n+1} = \frac{1}{h}, \qquad z_{6n+1} = \frac{1}{m}, \qquad t_{6n+1} = \frac{s\,u}{r},$$

$$x_{6n+2} = h, \qquad y_{6n+2} = m, \qquad z_{6n+2} = \frac{1}{n}, \qquad t_{6n+2} = \frac{1}{s},$$

$$x_{6n+3} = \frac{1}{m}, \qquad y_{6n+3} = n, \qquad z_{6n+3} = \frac{r}{s\,u}, \qquad t_{6n+3} = q,$$

$$x_{6n+4} = \frac{1}{n}, \qquad y_{6n+4} = \frac{s\,u}{r}, \qquad z_{6n+4} = s, \qquad t_{6n+4} = \frac{1}{h},$$

$$x_{6n+5} = \frac{r}{s\,u}, \qquad y_{6n+5} = \frac{1}{s}, \qquad z_{6n+5} = \frac{1}{q}, \qquad t_{6n+5} = m,$$

$$x_{6n+6} = s, \qquad y_{6n+6} = q, \qquad z_{6n+6} = h, \qquad t_{6n+6} = n.$$

İspat 6.1.2. (6.1.1) hipotezine göre (6.1.2) denklem sisteminin bütün çözümleri pozitiftir.

Böylece $n = 0$ için bu çözümün sağlandığı açıktır. Şimdi $(n-1)$ için teoremin doğru olduğunu varsayalım:

$$x_{6n-5} = \frac{1}{q}, \qquad y_{6n-5} = \frac{1}{h}, \qquad z_{6n-5} = \frac{1}{m}, \qquad t_{6n-5} = \frac{s\,u}{r},$$

$$x_{6n-4} = h, \qquad y_{6n-4} = m, \qquad z_{6n-4} = \frac{1}{n}, \qquad t_{6n-4} = \frac{1}{s},$$

$$x_{6n-3} = \frac{1}{m}, \qquad y_{6n-3} = n, \qquad z_{6n-3} = \frac{r}{s\,u}, \qquad t_{6n-3} = q,$$

$$x_{6n-2} = \frac{1}{n}, \qquad y_{6n-2} = \frac{s\,u}{r}, \qquad z_{6n-2} = s, \qquad t_{6n-2} = \frac{1}{h},$$

$$x_{6n-1} = \frac{r}{s\,u}, \qquad y_{6n-1} = \frac{1}{s}, \qquad z_{6n-1} = \frac{1}{q}, \qquad t_{6n-1} = m,$$

$$x_{6n} = s, \qquad y_{6n} = q, \qquad z_{6n} = h, \qquad t_{6n} = n.$$

Yukarıda (n-1) için kabul ettiğimiz eşitliklerden faydalanılarak n için aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$x_{6n+1} = \frac{1}{y_{6n}} = \frac{1}{q}, \qquad y_{6n+1} = \frac{1}{z_{6n}} = \frac{1}{h},$$

$$z_{6n+1} = \frac{1}{t_{6n-1}} = \frac{1}{m}, \qquad t_{6n+1} = \frac{x_{6n}\,y_{6n-1}}{x_{6n-1}} = \frac{s\,u}{r}.$$

$$x_{6n+2} = \frac{1}{y_{6n+1}} = h, \qquad y_{6n+2} = \frac{1}{z_{6n+1}} = m\,,$$

$$z_{6n+2} = \frac{1}{t_{6n}} = \frac{1}{n}, \qquad t_{6n+2} = \frac{x_{6n+1}\,y_{6n}}{x_{6n}} = \frac{1}{x_{6n}} = \frac{1}{s}\,.$$

$$x_{6n+3} = \frac{1}{y_{6n+2}} = \frac{1}{m}, \qquad y_{6n+3} = \frac{1}{z_{6n+2}} = n,$$

$$z_{6n+3} = \frac{1}{t_{6n+1}} = \frac{1}{\frac{s\,u}{r}} = \frac{r}{s\,u}, \qquad t_{6n+3} = \frac{x_{6n+2}\,y_{6n+1}}{x_{6n+1}} = \frac{1}{x_{6n+1}} = q.$$

$$x_{6n+4} = \frac{1}{y_{6n+3}} = \frac{1}{n}, \qquad y_{6n+4} = \frac{1}{z_{6n+3}} = \frac{1}{\frac{r}{s\,u}} = \frac{s\,u}{r},$$

$$z_{6n+4} = \frac{1}{t_{6n+2}} = s, \qquad t_{6n+4} = \frac{x_{6n+3}\,y_{6n+2}}{x_{6n+2}} = \frac{1}{x_{6n+2}} = \frac{1}{h}\,.$$

$$x_{6n+5} = \frac{1}{y_{6n+4}} = \frac{r}{s\,u}, \qquad y_{6n+5} = \frac{1}{z_{6n+4}} = \frac{1}{s},$$

$$z_{6n+5} = \frac{1}{t_{6n+3}} = \frac{1}{y_{6n}} = \frac{1}{q}, \qquad t_{6n+5} = \frac{x_{6n+4}\,y_{6n+3}}{x_{6n+3}} = \frac{1}{x_{6n+3}} = m.$$

$$x_{6n+6} = \frac{1}{y_{6n+5}} = z_{6n+4} = s, \qquad y_{6n+6} = \frac{1}{z_{6n+5}} = t_{6n+3} = q,$$

$$z_{6n+6} = \frac{1}{t_{6n+4}} = \frac{1}{y_{6n+1}} = h, \qquad t_{6n+6} = \frac{x_{6n+5}\, y_{6n+4}}{x_{6n+4}} = \frac{1}{x_{6n+4}} = n.$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

6.2. $x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-1}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-1}},\ z_{n+1}=\frac{1}{t_{n-2}},\ t_{n+1}=\frac{x_n\, y_{n-2}}{x_{n-1}}$ FARK DENKLEM SİSTEMİNİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde;

$$x_{-1},\ x_0,\ y_{-2},\ y_{-1},\ y_0,\ z_{-1},\ z_0,\ t_{-2}, t_{-1}, t_0 \epsilon\ (0,\infty) \tag{6.2.1}$$

olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-1}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-1}},\ z_{n+1}=\frac{1}{t_{n-2}},\ t_{n+1}=\frac{x_n\, y_{n-2}}{x_{n-1}}\ n=0,1,2,\dots \tag{6.2.2}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümleri araştırılmıştır.

Teorem 6.2.1. $x_{-1},\ x_0,\ y_{-2},\ y_{-1},\ y_0,\ z_{-1},\ z_0,\ t_{-2}, t_{-1}, t_0 \epsilon\ (0,\infty)$ olmak üzere, (6.2.2) denklem sisteminin çözümünün $\{x_n,\ y_n, z_n, t_n\}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (6.2.2) denklem sisteminin bütün çözümleri dokuz periyotlu ve periyodiktir.

İspat 6.2.1. (6.2.1) hipotezi altında (6.2.2) denklem sisteminin bütün çözümleri pozitiftir.

Böylece (6.2.2) denklem sistemi yardımıyla aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-1}},\qquad y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-1}},\qquad z_{n+1}=\frac{1}{t_{n-2}},\qquad t_{n+1}=\frac{x_n\, y_{n-2}}{x_{n-1}},$$

$$x_{n+2}=\frac{1}{y_n},\qquad y_{n+2}=\frac{1}{z_n},\qquad z_{n+2}=\frac{1}{t_{n-1}},\qquad t_{n+2}=\frac{1}{x_n},$$

$$x_{n+3}=z_{n-1},\qquad y_{n+3}=t_{n-2},\qquad z_{n+3}=\frac{1}{t_n},\qquad t_{n+3}=y_{n-1},$$

$$x_{n+4}=z_n,\qquad y_{n+4}=t_{n-1},\qquad z_{n+4}=\frac{x_{n-1}}{x_n\, y_{n-2}},\qquad t_{n+4}=y_n,$$

$$x_{n+5}=\frac{1}{t_{n-2}},\qquad y_{n+5}=t_n,\qquad z_{n+5}=x_n,\qquad t_{n+5}=\frac{1}{z_{n-1}},$$

$$x_{n+6}=\frac{1}{t_{n-1}},\qquad y_{n+6}=\frac{x_n\, y_{n-2}}{x_{n-1}},\qquad z_{n+6}=x_{n+1},\qquad t_{n+6}=\frac{1}{z_n},$$

$$x_{n+7}=\frac{1}{t_n},\qquad y_{n+7}=\frac{1}{x_n},\qquad z_{n+7}=\frac{1}{y_n},\qquad t_{n+7}=t_{n-2},$$

$$x_{n+8}=\frac{x_{n-1}}{x_n\,y_{n-2}},\qquad y_{n+8}=y_{n-1},\qquad z_{n+8}=z_{n-1},\qquad t_{n+8}=t_{n-1},$$

$$x_{n+9}=x_n,\qquad y_{n+9}=y_n,\qquad z_{n+9}=z_n,\qquad t_{n+9}=t_n.$$

olup denklem sisteminin çözümlerinin dokuz periyotlu olduğu görülür.

Teorem 6.2.2. $x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1}, y_0, z_{-1}, z_0, t_{-2}, t_{-1}, t_0 \epsilon (0,\infty)$, $x_{-1}=r$, $x_0=s$, $y_{-2}=j$, $y_{-1}=u$, $y_0=q$, $z_{-1}=p$, $z_0=h$, $t_{-2}=l$, $t_{-1}=m$, $t_0=n$ başlangıç şartları ile (6.2.2) denklem sisteminin çözümlerinin$\{x_n, y_n, z_n, t_n\}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $n=0, 1, 2, \ldots$ için (6.2.2) denklem sisteminin bütün çözümleri;

$$x_{9n+1}=\frac{1}{u},\qquad y_{9n+1}=\frac{1}{p},\qquad z_{9n+1}=\frac{1}{l},\qquad t_{9n+1}=\frac{s\,j}{r},$$

$$x_{9n+2}=\frac{1}{q},\qquad y_{9n+2}=\frac{1}{h},\qquad z_{9n+2}=\frac{1}{m},\qquad t_{9n+2}=\frac{1}{s},$$

$$x_{9n+3}=p,\qquad y_{9n+3}=l,\qquad z_{9n+3}=\frac{1}{n},\qquad t_{9n+3}=u,$$

$$x_{9n+4}=h,\qquad y_{9n+4}=m,\qquad z_{9n+4}=\frac{r}{s\,j},\qquad t_{9n+4}=q,$$

$$x_{9n+5}=\frac{1}{l},\qquad y_{9n+5}=n,\qquad z_{9n+5}=s,\qquad t_{9n+5}=\frac{1}{p},$$

$$x_{9n+6}=\frac{1}{m},\qquad y_{9n+6}=\frac{s\,j}{r},\qquad z_{9n+6}=\frac{1}{u},\qquad t_{9n+6}=\frac{1}{h},$$

$$x_{9n+7}=\frac{1}{n},\qquad y_{9n+7}=\frac{1}{s},\qquad z_{9n+7}=\frac{1}{q},\qquad t_{9n+7}=l,$$

$$x_{9n+8}=\frac{r}{s\,j},\qquad y_{9n+8}=u,\qquad z_{9n+8}=p,\qquad t_{9n+8}=m,$$

$x_{9n+9} = s, \quad y_{9n+9} = q, \quad z_{9n+9} = h, \quad t_{9n+9} = n.$

İspat 6.2.2. (6.2.1) başlangıç değerleriyle, (6.2.2) denklem sisteminin bütün çözümleri pozitiftir.

Böylece $n = 0$ için bu çözümün sağlandığı açıktır. Şimdi $(n-1)$ için teoremin doğru olduğunu varsayalım. Yani,

$$x_{9n-8} = \frac{1}{u}, \quad y_{9n-8} = \frac{1}{p}, \quad z_{9n-8} = \frac{1}{l}, \quad t_{9n-8} = \frac{s\,j}{r},$$

$$x_{9n-7} = \frac{1}{q}, \quad y_{9n-7} = \frac{1}{h}, \quad z_{9n-7} = \frac{1}{m}, \quad t_{9n-7} = \frac{1}{s},$$

$$x_{9n-6} = p, \quad y_{9n-6} = l, \quad z_{9n-6} = \frac{1}{n}, \quad t_{9n-6} = n,$$

$$x_{9n-5} = h, \quad y_{9n-5} = m, \quad z_{9n-5} = \frac{r}{s\,j}, \quad t_{9n-5} = q,$$

$$x_{9n-4} = \frac{1}{l}, \quad y_{9n-4} = n, \quad z_{9n-4} = s, \quad t_{9n-4} = \frac{1}{p},$$

$$x_{9n-3} = \frac{1}{m}, \quad y_{9n-3} = \frac{s\,j}{r}, \quad z_{9n-3} = \frac{1}{u}, \quad t_{9n-3} = \frac{1}{h},$$

$$x_{9n-2} = \frac{1}{n}, \quad y_{9n-2} = \frac{1}{s}, \quad z_{9n-2} = \frac{1}{q}, \quad t_{9n-2} = l,$$

$$x_{9n-1} = \frac{r}{s\,j}, \quad y_{9n-1} = u, \quad z_{9n-1} = p, \quad t_{9n-1} = m,$$

$$x_{9n} = s, \quad y_{9n} = q, \quad z_{9n} = h, \quad t_{9n} = n$$

olsun.

Yukarıda (n-1) için kabul ettiğimiz eşitliklerden faydalanılarak n için aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$x_{9n+1}=\frac{1}{y_{9n-1}}=\frac{1}{u},\qquad y_{9n+1}=\frac{1}{z_{9n-1}}=\frac{1}{p},$$

$$z_{9n+1}=\frac{1}{t_{9n-2}}=\frac{1}{l},\qquad t_{9n+1}=\frac{x_{9n}\,y_{9n-2}}{x_{9n-1}}=\frac{s\,j}{r}.$$

$$x_{9n+2}=\frac{1}{y_{9n}}=\frac{1}{q},\qquad y_{9n+2}=\frac{1}{z_{9n}}=\frac{1}{h},$$

$$z_{9n+2}=\frac{1}{t_{9n-1}}=\frac{1}{m},\qquad t_{9n+2}=\frac{x_{9n+1}\,y_{9n-1}}{x_{9n}}=\frac{1}{s}.$$

$$x_{9n+3}=\frac{1}{y_{9n+1}}=p,\qquad y_{9n+3}=\frac{1}{z_{9n+1}}=l,$$

$$z_{9n+3}=\frac{1}{t_{9n}}=\frac{1}{n},\qquad t_{9n+3}=\frac{x_{9n+2}\,y_{9n}}{x_{9n+1}}=u.$$

$$x_{9n+4}=\frac{1}{y_{9n+2}}=h,\qquad y_{9n+4}=\frac{1}{z_{9n+2}}=m,$$

$$z_{9n+4}=\frac{1}{t_{9n+1}}=\frac{x_{9n-1}}{x_{9n}\,y_{9n-2}}=\frac{r}{s\,j},\qquad t_{9n+4}=\frac{x_{9n+3}\,y_{9n+1}}{x_{9n+2}}=\frac{\frac{1}{y_{9n+1}}\;y_{9n+1}}{x_{9n+2}}=q.$$

$$x_{9n+5}=\frac{1}{y_{9n+3}}=\frac{1}{l},\qquad y_{9n+5}=\frac{1}{z_{9n+3}}=n,$$

$$z_{9n+5}=\frac{1}{t_{9n+2}}=s,\qquad t_{9n+5}=\frac{x_{9n+4}\,y_{9n+2}}{x_{9n+3}}=\frac{1}{p}.$$

$$x_{9n+6}=\frac{1}{y_{9n+4}}=\frac{1}{m},\qquad y_{9n+6}=\frac{1}{z_{9n+4}}=\frac{s\,j}{r},$$

$$z_{9n+6}=\frac{1}{t_{9n+3}}=\frac{1}{u},\qquad t_{9n+6}=\frac{x_{9n+5}\,y_{9n+3}}{x_{9n+4}}=\frac{1}{h}.$$

$$x_{9n+7}=\frac{1}{y_{9n+5}}=\frac{1}{n},\qquad y_{9n+7}=\frac{1}{z_{9n+5}}=\frac{1}{s},$$

$$z_{9n+7}=\frac{1}{t_{9n+4}}=\frac{1}{q},\qquad t_{9n+7}=\frac{x_{9n+6}\,y_{9n+4}}{x_{9n+5}}=l.$$

$$x_{9n+8} = \frac{1}{y_{9n+6}} = \frac{r}{s\,j}, \qquad y_{9n+8} = \frac{1}{z_{9n+6}} = u,$$

$$z_{9n+8} = \frac{1}{t_{9n+5}} = p, \qquad t_{9n+8} = \frac{x_{9n+7}\, y_{9n+5}}{x_{9n+6}} = m.$$

$$x_{9n+9} = \frac{1}{y_{9n+7}} = x_{9n} = s, \qquad y_{9n+9} = \frac{1}{z_{9n+7}} = y_{9n} = q,$$

$$z_{9n+9} = \frac{1}{t_{9n+6}} = z_{9n} = h, \qquad t_{9n+9} = \frac{x_{9n+8}\, y_{9n+6}}{x_{9n+7}} = t_{9n} = n.$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

6.3. $x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-k}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-k}},\ z_{n+1}=\frac{1}{t_{n-(k+1)}},\ t_{n+1}=\frac{x_n\, y_{n-(k+1)}}{x_{n-1}}$ FARK DENKLEM SİSTEMİNİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde;

$$x_{-1}, x_0, y_{-k-1}, y_{-k}, y_{-k+1}, \dots, y_{-1}, y_0, z_{-k}, z_{-k+1}, z_{-k+2}, z_{-k+3}, \dots, z_0,$$
$$t_{-k}, t_{-k+1}, t_{-k+2}, t_{-k+3}, \dots, t_0 \in (0,\infty) \tag{6.3.1}$$

olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-k}}, \qquad y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-k}},$$
$$z_{n+1}=\frac{1}{t_{n-(k+1)}}, \qquad t_{n+1}=\frac{x_n\, y_{n-(k+1)}}{x_{n-1}}, \qquad n=0,1,2,\dots \tag{6.3.2}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümleri araştırılmıştır.

Teorem 6.3.1 $k\epsilon\ N$ ve

$$x_{-1}, x_0, y_{-k-1}, y_{-k}, y_{-k+1}, \dots, y_{-1}, y_0, z_{-k}, z_{-k+1}, z_{-k+2}, z_{-k+3}, \dots, z_0,$$
$$t_{-k}, t_{-k+1}, t_{-k+2}, t_{-k+3}, \dots, t_0 \in (0,\infty) \tag{6.3.1}$$

olmak üzere, (6.3.2) denklem sisteminin çözümünün $\{x_n, y_n, z_n, t_n\}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (6.3.2) denklem sisteminin bütün çözümleri $(3k+6)$ periyotlu ve periyodiktir.

İspat 6.3.1. (6.3.1) başlangıç şartlarıyla, (6.3.2) denklem sisteminin bütün çözümleri pozitiftir.

Böylece (6.3.2) denklem sistemi yardımıyla aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-k}}, \qquad y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-k}}, \qquad z_{n+1}=\frac{1}{t_{n-(k+1)}}, \qquad t_{n+1}=\frac{x_n\, y_{n-(k+1)}}{x_{n-1}},$$

$$x_{n+2}=\frac{1}{y_{n-k+1}}, \qquad y_{n+2}=\frac{1}{z_{n-k+1}}, \qquad z_{n+2}=\frac{1}{t_{n-k}}, \qquad t_{n+2}=\frac{1}{x_n},$$

$$x_{n+3}=\frac{1}{y_{n-k+2}},\quad y_{n+3}=\frac{1}{z_{n-k+2}},\quad z_{n+3}=\frac{1}{t_{n-k+1}},\quad t_{n+3}=y_{n-k}\ ,$$

$$x_{n+k+3}=z_{n-k+1},\quad y_{n+k+3}=t_{n-k},\quad z_{n+4}=\frac{1}{t_{n-k+2}},\quad t_{n+4}=y_{n-k+1}\ ,$$

$$x_{n+k+4}=z_{n-k+2},\quad y_{n+k+4}=t_{n-k+1},\quad z_{n+k+4}=x_n,\quad t_{n+5}=y_{n-k+2}\,,$$

$$x_{n+2k+4}=\frac{1}{t_{n-k}},\quad y_{n+k+5}=t_{n-k+2},\quad z_{n+k+5}=\frac{1}{y_{n-k}},\quad t_{n+k+5}=\frac{1}{z_{n-k+1}},$$

$$x_{n+2k+5}=\frac{1}{t_{n-k+1}},\quad y_{n+2k+5}=\frac{1}{x_n},\quad z_{n+k+6}=\frac{1}{y_{n-k+1}},\quad t_{n+k+6}=\frac{1}{z_{n-k+2}},$$

$$x_{n+2k+6}=\frac{1}{t_{n-k+2}},\quad y_{n+2k+6}=\ y_{n-k},\quad z_{n+2k+6}=\ z_{n-k},\quad t_{n+2k+6}=\ t_{n-k}\,,$$

$$x_{n+3k+6}=x_n,\quad y_{n+3k+6}=y_n,\quad z_{n+3k+6}=z_n,\quad t_{n+3k+6}=t_n.$$

Teorem 6.3.2. $k\epsilon\ \mathbb{N}$ ve

$$x_{-1},x_0,y_{-k-1},y_{-k},y_{-k+1},\dots,y_{-1},y_0,z_{-k},z_{-k+1},z_{-k+2},z_{-k+3},\dots,z_0,$$
$$t_{-k},t_{-k+1},t_{-k+2},t_{-k+3},\dots,t_0\,\epsilon(0,\infty) \qquad (6.3.1)$$

olmak üzere, $x_{-1}=r,x_0=s,y_{-k-1}=d,y_{-k}=a,y_{-k+1}=e,y_{-k+2}=v,y_0=q,y_{-1}=u,\ z_{-k}=b,z_{-k+1}=f,\ z_{-k+2}=i,\ z_0=h,z_{-1}=p,\ t_{-k-1}=c,\ t_{-k}=g,t_{-k+1}=\beta,t_{-k+2}=\alpha,t_0=n$ başlangıç şartları ile (6.3.2) denklem sisteminin çözümlerinin$\{x_n,\ y_n,z_n\}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda n = 0, 1, 2, … için (6.3.2) denklem sisteminin bütün çözümleri;

$$x_{n(3k+6)+1}=\frac{1}{a},\quad y_{n(3k+6)+1}=\frac{1}{b},\quad z_{n(3k+6)+1}=\frac{1}{c},\quad t_{n(3k+6)+1}=\frac{s\,d}{r}\,,$$

$$x_{n(3k+6)+2}=\frac{1}{e},\quad y_{n(3k+6)+2}=\frac{1}{f},\quad z_{n(3k+6)+2}=\frac{1}{g},\quad t_{n(3k+6)+2}=\frac{1}{s}\,,$$

$$x_{n(3k+6)+3}=\frac{1}{v},\quad y_{n(3k+6)+3}=\frac{1}{i},\quad z_{n(3k+6)+3}=\frac{1}{\beta},\quad t_{n(3k+6)+3}=a\ ,$$

$$x_{n(3k+6)+k+3}=f,\quad y_{n(3k+6)+k+3}=g,\quad z_{n(3k+6)+4}=\frac{1}{\alpha},\quad t_{n(3k+6)+4}=e\ ,$$

$$x_{n(3k+6)+k+4}=i,\quad y_{n(3k+6)+k+4}=\beta,\quad z_{n(3k+6)+k+4}=s,\quad t_{n(3k+6)+5}=v\ ,$$

$$x_{n(3k+6)+2k+4}=\frac{1}{g},\quad y_{n(3k+6)+k+5}=\alpha,\quad z_{n(3k+6)+k+5}=\frac{1}{a},\quad t_{n(3k+6)+k+5}=\frac{1}{f},$$

$$x_{n(3k+6)+2k+5}=\frac{1}{\beta},\quad y_{n(3k+6)+2k+5}=\frac{1}{s},\quad z_{n(3k+6)+k+6}=\frac{1}{e},\quad t_{n(3k+6)+k+6}=\frac{1}{i},$$

$$x_{n(3k+6)+2k+6}=\frac{1}{\alpha},\quad y_{n(3k+6)+2k+6}=a,\quad z_{n(3k+6)+2k+6}=b,\quad t_{n(3k+6)+2k+6}=g\ ,$$

$$x_{n(3k+6)+3k+6}=s,\quad y_{n(3k+6)+3k+6}=q,\quad z_{n(3k+6)+3k+6}=h,\quad t_{n(3k+6)+3k+6}=n.$$

İspat 6.3.2. (6.3.1) hipotezine göre (6.3.2) denklem sisteminin bütün çözümleri pozitiftir. Böylece n=0 için bu çözümün sağlandığı açıktır. Şimdi (n-1) için teoremin doğru olduğunu varsayalım:

$$x_{n(3k+6)-3k-5}=\frac{1}{a},\qquad y_{n(3k+6)-3k-5}=\frac{1}{b},$$
$$z_{n(3k+6)-3k-5}=\frac{1}{c},\qquad t_{n(3k+6)-3k-5}=\frac{s\,d}{r}.$$

$$x_{n(3k+6)-3k-4}=\frac{1}{e},\qquad y_{n(3k+6)-3k-4}=\frac{1}{f},$$
$$z_{n(3k+6)-3k-4}=\frac{1}{g},\qquad t_{n(3k+6)-3k-4}=\frac{1}{s}.$$

$$x_{n(3k+6)-3k-3}=\frac{1}{v},\qquad y_{n(3k+6)-3k-3}=\frac{1}{i},$$
$$z_{n(3k+6)-3k-3}=\frac{1}{\beta},\qquad t_{n(3k+6)-3k-3}=a\ .$$

$$x_{n(3k+6)-2k-3}=f,\qquad y_{n(3k+6)-2k-3}=g,$$
$$z_{n(3k+6)-3k-2}=\frac{1}{\alpha},\qquad t_{n(3k+6)-3k-2}=e\ .$$

$x_{n(3k+6)-2k-2} = i, \qquad y_{n(3k+6)-2k-2} = \beta,$

$z_{n(3k+6)-2k-2} = s, \qquad t_{n(3k+6)-3k-1} = v\,.$

$x_{n(3k+6)-k-2} = \frac{1}{g}, \qquad y_{n(3k+6)-2k-1} = \alpha,$

$$z_{n(3k+6)-2k-1} = \frac{1}{a}, \qquad t_{n(3k+6)-2k-1} = \frac{1}{f}\,.$$

$x_{n(3k+6)-k-1} = \frac{1}{\beta}, \qquad y_{n(3k+6)-k-1} = \frac{1}{s},$

$z_{n(3k+6)-2k} = \frac{1}{e}, \qquad t_{n(3k+6)-2k} = \frac{1}{i}\,.$

$x_{n(3k+6)-k} = \frac{1}{\alpha}, \qquad y_{n(3k+6)-k} = a,$

$z_{n(3k+6)-k} = b, \qquad t_{n(3k+6)-k} = g.$

$x_{n(3k+6)} = s, \qquad y_{n(3k+6)} = q,$

$z_{n(3k+6)} = h, \qquad t_{n(3k+6)} = n.$

Yukarıda (n-1) için kabul ettiğimiz eşitliklerden faydalanılarak n için aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$x_{n(3k+6)+1} = \frac{1}{y_{n(3k+6)-k}} = \frac{1}{a}, \qquad y_{n(3k+6)+1} = \frac{1}{z_{n(3k+6)-k}} = \frac{1}{b},$$

$$z_{n(3k+6)+1} = \frac{1}{t_{n(3k+6)-(k+1)}} = \frac{1}{c}, \qquad t_{n(3k+6)+1} = \frac{x_{n(3k+6)}\, y_{n(3k+6)-k-1}}{x_{n(3k+6)-1}} = \frac{s\,d}{r}\,.$$

$$x_{n(3k+6)+2} = \frac{1}{y_{n(3k+6)-k+1}} = \frac{1}{e}, \qquad y_{n(3k+6)+2} = \frac{1}{z_{n(3k+6)-k+1}} = \frac{1}{f},$$

$$z_{n(3k+6)+2} = \frac{1}{t_{n(3k+6)-k}} = \frac{1}{g}, \qquad t_{n(3k+6)+2} = \frac{x_{n(3k+6)+1}\, y_{n(3k+6)-k}}{x_{n(3k+6)}} = \frac{1}{s}\,.$$

$$x_{n(3k+6)+3} = \frac{1}{y_{n(3k+6)-k+2}} = \frac{1}{v}, \qquad y_{n(3k+6)+3} = \frac{1}{z_{n(3k+6)-k+2}} = \frac{1}{i},$$

$$z_{n(3k+6)+3} = \frac{1}{t_{n(3k+6)-k+1}} = \frac{1}{\beta}, \qquad t_{n(3k+6)+3} = \frac{x_{n(3k+6)+2}\, y_{n(3k+6)-k+1}}{x_{n(3k+6)+1}}$$

$$= \frac{1}{x_{n(3k+6)+1}} = a\ .$$

$$x_{n(3k+6)+k+3} = \frac{1}{y_{n(3k+6)+2}} = f, \qquad y_{n(3k+6)+k+3} = \frac{1}{z_{n(3k+6)+2}} = g,$$

$$z_{n(3k+6)+4} = \frac{1}{t_{n(3k+6)-k+2}} = \frac{1}{\alpha}, \qquad t_{n(3k+6)+4} = \frac{x_{n(3k+6)+3}\, y_{n(3k+6)-k+2}}{x_{n(3k+6)+2}} = e.$$

$$x_{n(3k+6)+k+4} = \frac{1}{y_{n(3k+6)+3}} = i, \qquad y_{n(3k+6)+k+4} = \frac{1}{z_{n(3k+6)+3}} = \beta,$$

$$z_{n(3k+6)+k+4} = \frac{1}{t_{n(3k+6)+2}} = s, \qquad t_{n(3k+6)+5} = \frac{x_{n(3k+6)+4}\, y_{n(3k+6)-k+3}}{x_{n(3k+6)+3}} = v\ .$$

$$x_{n(3k+6)+2k+4} = \frac{1}{y_{n(3k+6)+k+3}} = \frac{1}{g}, \qquad y_{n(3k+6)+k+5} = \frac{1}{z_{n(3k+6)+4}} = \alpha,$$

$$z_{n(3k+6)+k+5} = \frac{1}{t_{n(3k+6)+3}} = \frac{1}{a}, \qquad t_{n(3k+6)+k+5} = \frac{x_{n(3k+6)+k+4}\, y_{n(3k+6)+3}}{x_{n(3k+6)+k+3}} = \frac{1}{f}.$$

$$x_{n(3k+6)+2k+5} = \frac{1}{y_{n(3k+6)+k+4}} = \frac{1}{\beta}, \qquad y_{n(3k+6)+2k+5} = \frac{1}{z_{n(3k+6)+k+4}} = \frac{1}{s},$$

$$z_{n(3k+6)+k+6} = \frac{1}{t_{n(3k+6)+4}} = \frac{1}{e}, \qquad t_{n(3k+6)+k+6} = \frac{x_{n(3k+6)+k+5}\, y_{n(3k+6)+4}}{x_{n(3k+6)+k+4}} = \frac{1}{i}$$

$$x_{n(3k+6)+2k+6} = \frac{1}{y_{n(3k+6)+k+5}} = \frac{1}{\alpha}, \qquad y_{n(3k+6)+2k+6} = \frac{1}{z_{n(3k+6)+k+5}} = a,$$

$$z_{n(3k+6)+2k+6} = \frac{1}{t_{n(3k+6)+k+4}} = b, \qquad t_{n(3k+6)+2k+6} = \frac{x_{n(3k+6)+2k+5}\, y_{n(3k+6)+k+4}}{x_{n(3k+6)+2k+4}} = g$$

$$x_{n(3k+6)+3k+6} = \frac{1}{y_{n(3k+6)+2k+5}} \qquad y_{n(3k+6)+3k+6} = \frac{1}{z_{n(3k+6)+2k+5}}$$

$$= x_{n(3k+6)} = s, \qquad = y_{n(3k+6)} = q,$$

$$z_{n(3k+6)+3k+6} = \frac{1}{t_{n(3k+6)+2k+4}} \qquad t_{n(3k+6)+3k+6} = \frac{x_{n(3k+6)+3k+5}\, y_{n(3k+6)+2k+4}}{x_{n(3k+6)+3k+4}}$$

$$= z_{n(3k+6)} = h, \qquad = t_{n(3k+6)} = n\ .$$

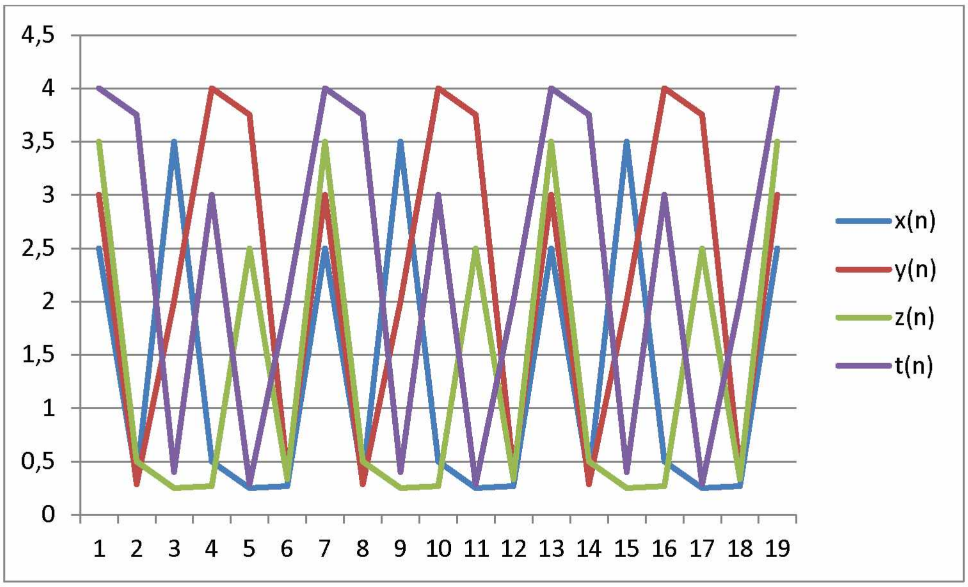
Böylece ispat tamamlanmış olur.

6.4. Nümerik Örnekler

Örnek 6.4.1. 6.3.2 Fark denklem sisteminde $k = 1$ ve başlangıç şartları $x_{-1} = 1; x_0 = 2,5;$ $y_{-1} = 1,5;$ $y_0 = 3;$ $z_0 = 3,5; t_{-1} = 2;$ $t_0 = 4$ seçildiğinde aşağıdaki sonuçlar elde edilerek sistemin altı periyotlu olduğu gösterilmiş olur.

Çizelge 6.4.1.

N	x_n	y_n	y_n	z_n
0	2,5	3	3,5	4
1	0,333333	0,285714	0,5	3,75
2	3,5	2	0,25	0,4
3	0,5	4	0,266667	3
4	0,25	3,75	2,5	0,285714
5	0,266667	0,4	0,333333	2
6	2,5	3	3,5	4
7	0,333333	0,285714	0,5	3,75
8	3,5	2	0,25	0,4
9	0,5	4	0,266667	3
10	0,25	3,75	2,5	0,285714
11	0,266667	0,4	0,333333	2
12	2,5	3	3,5	4
13	0,333333	0,285714	0,5	3,75
14	3,5	2	0,25	0,4
15	0,5	4	0,266667	3
16	0,25	3,75	2,5	0,285714
17	0,266667	0,4	0,333333	2
18	2,5	3	3,5	4

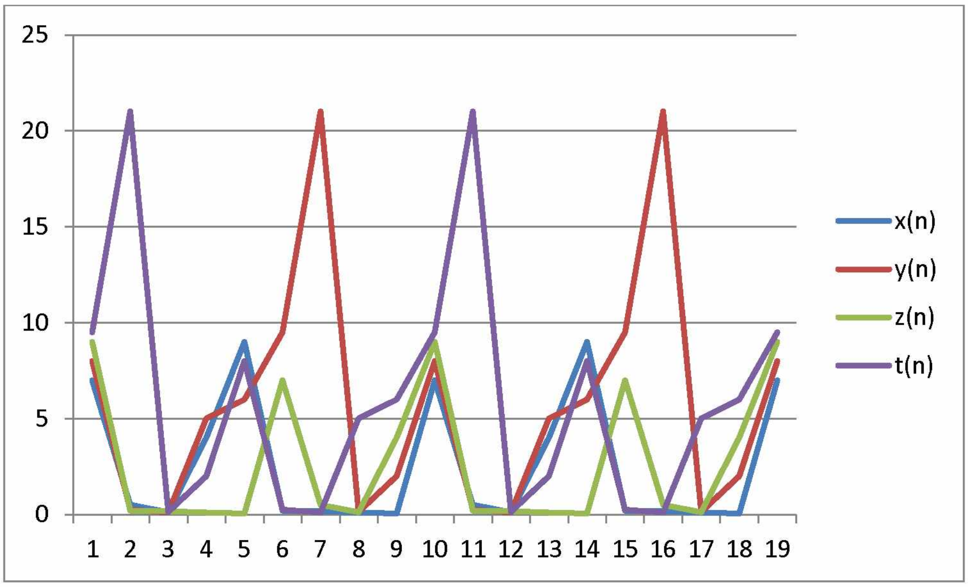


Şekil 6.4.1.

Örnek 6.4.2. 6.3.2 Fark denklem sisteminde $k = 1$ ve başlangıç şartları $x_{-1} = 1$; $x_0 = 7$; $y_{-2} = 3$; $y_{-1} = 2$; $y_0 = 8$; $z_{-1} = 4$; $z_0 = 9$; $t_{-2} = 5$; $t_{-1} = 6$; $t_0 = 9{,}5$ seçildiğinde aşağıdaki sonuçlar elde edilerek sistemin dokuz periyotlu olduğu gösterilmiş olur.

Çizelge 6.4.2.

N	x_n	y_n	z_n	t_n
0	7	8	9	9,5
1	0,5	0,25	0,2	21
2	0,125	0,111111	0,166667	0,142857
3	4	5	0,105263	2
4	9	6	0,047619	8
5	0,2	9,5	7	0,25
6	0,166667	21	0,5	0,111111
7	0,105263	0,142857	0,125	5
8	0,047619	2	4	6
9	7	8	9	9,5
10	0,5	0,25	0,2	21
11	0,125	0,111111	0,166667	0,142857
12	4	5	0,105263	2
13	9	6	0,047619	8
14	0,2	9,5	7	0,25
15	0,166667	21	0,5	0,111111
16	0,105263	0,142857	0,125	5
17	0,047619	2	4	6
18	7	8	9	9,5



Şekil 6.4.2.

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

7.1. SONUÇLAR

Bu çalışmada,

$$x_{n+1} = x_n . e^{r(1-x_n)+sy_n}$$
$$y_{n+1} = y_n . e^{r(1-y_n)+sx_n}$$

tipindeki biyolojik fark denklem sisteminin negatif olmayan r ve s parametreleri reel sayı ve başlangıç koşulları x_0, y_0 pozitif sayılar olmak üzere; çözümlerinin davranışları, denge noktalarının lokal kararlı ve global asimtotik kararlı olup olmadığı incelenmiştir. Daha sonra ise,

$$x_{n+1} = \frac{1}{y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{z_n}, \quad z_{n+1} = \frac{1}{t_{n-1}}, \quad t_{n+1} = \frac{x_n\, y_{n-1}}{x_{n-1}}$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{y_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{z_{n-1}}, \quad z_{n+1} = \frac{1}{t_{n-2}}, \quad t_{n+1} = \frac{x_n\, y_{n-2}}{x_{n-1}} \; .$$

fark denklem sistemlerinin çözümlerinin periyodikliği araştırılmıştır. Buradan da,

$$x_{n+1} = \frac{1}{y_{n-k}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{z_{n-k}}, \quad z_{n+1} = \frac{1}{t_{n-(k+1)}}, \quad t_{n+1} = \frac{x_n\, y_{n-(k+1)}}{x_{n-1}}$$

genel rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerinin periyodik olduğu sonucuna varılmıştır.

7.2. ÖNERİLER

$$x_{n+1} = \frac{1}{y_{n-k}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{z_{n-k}}, \quad z_{n+1} = \frac{1}{t_{n-(k+1)}}, \quad t_{n+1} = \frac{x_n\, y_{n-(k+1)}}{x_{n-1}}$$

denklem sisteminin, lokal asimtotik kararlılığı ve global asimtotik kararlılığı incelenebilir.

KAYNAKLAR

Camouzis, E. and Papaschinopoulos, G. 2004. Global asymptotic behavior of positive solutions on the system of rational difference equations, $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{y_{n-m}}$, $x_{n+1} = 1 + \frac{y_n}{x_{n-m}}$. *Applied Mathematics Letters, vol. 17 (no. 6), 733–737.*

Chatterjee, E., Grove, E.A., Kostrov, Y. and Ladas,G. 2003. On the trichotomy character of $x_{n+1} = \frac{\alpha+\gamma x_{n-1}}{A+Bx_n+x_{n-2}}$, *Journal of Difference Equations and Applications, 9(12), 1113-1128.*

Çınar C. 2004. On the difference equation $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{-1+x_n x_{n-1}}$. *Applied Mathematics and Computation, vol.158(3), 811-816.*

Çınar, C. and Yalcınkaya, İ. 2004. On the positive solutions of difference equation system $x_{n+1} = \frac{1}{z_n}$, $y_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1}y_{n-1}}$, $z_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1}}$. *International Mathematical Journal, (vol.5), no. 5*

Clark, D. and Kulenovic, M. R. S. 2002. A coupled system of rational difference equations. *Computers and Mathematics with Applications 43, 849-867.*

Dehghan, M., Douraki, M. J. and Razzaghi, M. 2006. Global behavior of the difference equation $x_{n+1} = \frac{x_{n-l+1}}{1+a_0x_n+a_1x_{n-1}+\cdots+a_lx_{n-l}+x_{n-l+1}}$. *Chaos,Solitons and Fractals 35(2008) 543-549.*

Elaydi, S.N.1995., An ıntroduction to Difference Equations springer.

Grove, E. A., Ladas, G., McGrath L. C. and Teixeira, C. T. 2001. Existence and behavior of solutions of a rational system. *Commun. Appl. Nonlinear Anal. 3 (1), 1-25.*

Iricanin B. and Stevic, S. 2006. Some systems of nonlinear difference equations of higher order with periodic solutions. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A Mathematical Analysis, vol. 13, 499–507.*

Kulenovic, M. R. S. and Ladas, G. 2002. *Dynamics of second Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjecture, Bocaraton, London.*

Kulenovic, M. R. S. and Nurkanovic, M. 2003. Global asymptotic behavior of a two-dimensional system of difference equations modeling cooperation. *Journal of Difference Equations and Applications, vol.9 (1), 149 – 159.*

Ladas, G.1995. *Intervals for Generalized Lyness Equations Appl. 209-214.*

Nasri, M., Dehghan. M., Douraki. M.,2005. Syudy of a system of non-linear difference equations arising in a deterministic model for HIV infection, *Applied Mathematics and Computation 171, 1306-1330.*

Özban, A. Y. 2006. On the positive solutions of the system of rational difference equations $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{y_{n-k}}$, $y_{n+1} = 1 + \frac{y_n}{x_{n-m}\, y_{n-m-k}}$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 323, 126–32.*

Papaschinopoulos, G. and Schinas, C. J. 1998. On a system of two nonlinear difference equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 219, 415 – 426.*

Saleh, M., Aloqeili M., 2005. On the rational difference equation $y_{n+1} = A + \frac{y_{n-k}}{y_n}$. *Applied Mathematics and Computation, 171, 862-869.*

Schinas, C. J. 1997. Invariants for difference equations and systems of difference equations of rational form. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 216, 164-179.*

Smith, H. L. Planar competitive and cooperative difference equotions, *J. Dıffer Equations Appl.3(1998) 335-357.*

Sun, T.,Xi, H. 2005. Global behavior of the nonlinear difference equation $x_{n+1} = f(x_{n-s}, x_{n-t})$. *J. Math. Anal. Appl., 311, 760-765.*

Şimşek, D., Demir, B. and Çınar, C. 2009. On the solutions of the system of the difference equation$x_{n+1} = max\left\{\frac{A}{x_n}, \frac{y_n}{x_n}\right\}$, $y_{n+1} = max\left\{\frac{A}{y_n}, \frac{x_n}{y_n}\right\}$. *Discrete Dynamics in Nature and Society, Vol. 2009, Article ID 325296, 11 pages.*

Taşkara, N., Uslu, K. and Tollu, D.T. 2010. The periodicity and solutions of the rational difference equation with periodic coefficiets. *Computers 8 Mathematics with Applications, vol. 62(4) 1807-1813.*

Yalcınkaya, İ., Cinar, C. and Simsek, D. 2008. Global asymptotic stability of a system of difference equations. *Applicable Analysis, vol. 87(no. 6), 677–687.*

Yang X. ,Lai H, Evans D. J., Mebson G. M.**,** 2004. Global asymptotic stability in a rational recursive sequence, *Applied Mathematics and Computation 158, 703-716.*

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı SOYADI	**:**	Daime SOLMAZ
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Cihanbeyli-22.05.1986
Telefon	**:**	05063875337
e-mail	**:**	daime86@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Erbil Koru Lisesi	2002
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2007
Tezsiz Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2008
Tezli Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	-
Doktora	:	-	-

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2007-2008	Konya Sınav Dersaneleri	Öğretmen
2009-2011	MEB	Öğretmen

YABANCI DİLLER

İngilizce.