

29993

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

JEODEZİ VE FOTOGRAMETRİ MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

JEODEZİ VE FOTOGRAMETRİ MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI

ELİPSOİDİN DÜZLEME KONFORM KONİK TASVİRİ

Hrt. Müh. Kemal ÇELİK

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde

"Harita Yüksek Mühendisi"

Ünvanı Verilmesi için Kabul Edilen Tezdir

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 15.01.1993

Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 05.02.1993

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Ahmet KAYA

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Muzaffer ŞERBETÇİ

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Celalettin KARAALI

Enstitü Müdürü : Doç. Dr. Temel SAVAŞKAN

Ocak - 1993

TRABZON

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Jeodezi ve Fotogrametri Programı Jeodezi Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır.

Çalışmada, Gauss-Krüger konform tasviri esas alınarak oluşturulan memleket koordinat sisteminin konform konik tasvir prensiplerine göre değerlendirilmesi için gerekli matematik bağıntılar incelenmiştir. Bu amaçla; temel tasvir denklemleri ve karşılıklı koordinat hesapları gösterilmiş olup önerilen formüllerin sayısal incelemeleri yapılmıştır.

Bu çalışma fikrini ortaya koyan ve yönlendiren hocam Yrd.Doç.Dr. Ahmet KAYA'ya; tezin yazılmasında ve araştırmalarım katkıda bulunan diğer kişilere teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Ocak, 1993

Hrt. Müh. Kemal ÇELİK

İÇİNDEKİLER

ÖZET

SUMMARY

1. GİRİŞ	1
2. KONFORM KONİK TASVİRİN TEMEL DENKLEMLERİ	2
2.1. Tasvir Sabitleri	2
2.2. Meridyen Konvergenesi ve Diferansiyel Ölçek	6
2.3. (B,L) Coğrafi Koordinatlarından (x,y) Düzlem Dik Koordinatlarının Hesabı.	9
2.4. (x,y) Düzlem Dik Koordinatlarından (B,L) Coğrafi Koordinatlarının Hesabı.	10
2.5. Sayısal Örnekler	11
3. KUVVET SERİLERİ İLE (B,L) COĞRAFİ KOORDİNATLARINDAN (x,y) DÜZLEM DİK KOORDİNATLARININ HESABI	13
3.1. Kuvvet Serileri ile $(\Delta B, \Delta L)$ 'den (x,y) Hesabı	13
3.2. Diğer Seri Çözüm Yöntemleri	18
3.3. Seri Çözüm Yöntemlerinin Karşılaştırılması	23
3.4. Sayısal Örnekler	25
4. KUVVET SERİLERİ İLE (x,y) DÜZLEM DİK KOORDİNATLARINDAN (B,L) COĞRAFİ KOORDİNATLARININ HESABI	29
4.1. Kuvvet Serileri ile (x,y) 'den $(\Delta B, \Delta L)$ Hesabı	29
4.2. Diğer Seri Çözüm Yöntemleri	35
4.3. Seri Çözüm Yöntemlerinin Karşılaştırılması	36
4.4. Sayısal Örnekler	38
5. DOĞRULTU VE UZUNLUK İNDİRGEMELERİ	42
5.1. Doğrultu İndirgemesi	42
5.2. Uzunluk İndirgemesi	49
5.3. Sayısal Örnekler	52
6. KONFORM KONİK DÜZLEM TASVİR KOORDİNATLARI İLE ELİPSOİDE EŞDEĞER JEODEZİK TEMEL PROBLEM ÇÖZÜMÜ	53
6.1. Birinci Jeodezik Temel Problem Çözümü	53
6.2. İkinci Jeodezik Temel Problem Çözümü	54
6.3. Sayısal Örnekler	54
7. DOĞRULTU VE UZUNLUK İNDİRGEMELERİNİN GAUSS- KRÜGER TASVİRİ İLE KARŞILAŞTIRILMASI	57
8. SONUÇ	60
9. KAYNAKLAR	61
10. EKLER	62
ÖZGEÇMİŞ	70

ÖZET

Bu çalışmada, elipsoidin konform konik tasviri incelenmiştir. Tasvirin temel matematik yapısı tanımlandıktan sonra; (B,L) elipsoid coğrafi koordinatları ile (x,y) düzlem dik koordinatları arasındaki dönüşüm formülleri geliştirilmiştir. Çalışmada elde edilen formüller, literatürde bilinen çözüm yöntemleri ile karşılaştırılmıştır.

Elipsoid ve harita düzlemi arasındaki ilişki için gerekli olan (S-s) ve (T-t) indirgeme formülleri incelenmiştir. Bu formüller için sayısal örnekler verilmiş, sonuçlar tablo veya grafik şeklinde sunulmuştur.

Son bölümde, konform konik tasvir ile Gauss-Krüger tasviri; değişik konumlarda seçilen farklı kenarlarda indirgemeler yönünden test edilmiştir.



SUMMARY

In this study, the ellipsoidal conform conic projection is investigated. First, the basic mathematical structure of the conic projection is defined. The transformation formulae between the geographical coordinates (B,L) and the plane rectangular coordinates (x,y) are developed. These transformation formulae are compared with the present methods in the literature.

Secondly, for the relationship between ellipsoid and mapping plane, (S-s) and (T-t) reduction formulae are evaluated. Numerical examples for these formulae are presented and the results are given with tables or graphical forms.

Finally, conform conic projection and Gauss-Kruger projection are tested with respect to the reductions for the different lengths in various positions.

1. GİRİŞ

Jeodezi; yeryüzünün ölçülmesini, hesaplanmasını ve çizilmesini yani şekil ve büyüklüğünün belirlenmesini inceleyen bir bilim koludur. Fiziksel yeryüzünde yapılan jeodezik ölçülerin değerlendirilmesinde bir referans yüzeyine ihtiyaç duyulur. Bu yüzey çalışma alanı büyüklüğüne göre ya bir yatay düzlem ya küre yada elipsoid olarak seçilir. Küre ve elipsoid üzerinde yapılacak jeodezik hesapların düzlem hesaba göre daha zor yapıya sahip olacağı aşikardır.

Bu bakımdan, uygulamalar için sade bir yüzeyden yararlanabilmek amacı ile elipsoid üzerindeki bilgilerin herhangi bir şekilde düzleme geçirilmesi yoluna gidilir. Düzleme geçiş işlemi paralel, dik veya merkezi izdüşüm gibi geometrik yollarla yapılabileceği gibi; geometrik yorumu mümkün olmayan matematik bağıntılarla da gerçekleştirilebilir. Geometrik yolla yapılan geçişe izdüşüm veya projeksiyon, matematik yolla sağlanan geçişe de tasvir adı verilir. Tasvir bir orijinal sistemden bir başka sisteme geçişi veya bunun tersini ifade eder [1].

Geniş anlamda projeksiyon da bir tasvir türüdür. Ancak tasvir kavramını projeksiyon deyimi ile tam olarak ifade etmek mümkün değildir. Almanca kaynaklarda "*Abbildung*" (tasvir), "*Projektion*" (projeksiyon) ayrı ayrı kavramlardır; fakat İngilizce kaynaklarda "*mapping* , *projection* " her iki kavram yerine de kullanılabilir.

Jeodezi uygulamalarında esas olan elipsoidin veya kürenin düzleme tasviridir. Ancak elipsoid ve küre gibi düzleme birebir açılımı doğrudan mümkün olmayan yüzeylerdeki jeodezik bilgilerin düzleme geçirilmesinde orijinale tam benzerlik söz konusu değildir. Yani deformasyonlar ortaya çıkar. Bunlar uzunluk, açı ve alan deformasyonlarıdır. Bunların hepsinin giderildiği bir tasvir türü mevcut değildir. İsteğe göre açıların yada uzunlukların veya alanların korunması prensibinden hareket edilebilir.

Korunması istenen elemana göre;

- Açı koruyan (konform)
- Uzunluk koruyan
- Alan koruyan

tasvirler söz konusu olabilir. Jeodezik çalışmalar için daha çok konform tasvirler kullanılır. Uzunluk veya alan koruyan tasvir türleri kartografik amaçlı ve daha çok yerin şeklinin küre olarak kullanıldığı yöntemlerde tercih edilir. Ayrıca tasviri yapılacak bölgelerin büyüklüğü de deformasyonları etkileyecek bir faktördür.

Bu çalışmada konform konik tasvir incelenecektir. Elipsoidin düzleme konform konik tasvirinde bir yardımcı yüzeyden yararlanılarak matematik ifadelerle orijinal(elipsoid) yüzeydeki bilgiler yardımcı yüzeye(düzlem) taşınacaktır. Yardımcı yüzey olarak koni; matematik bağıntılarda yer almayıp sadece tasviri canlandırmada kullanılacaktır.

2. KONFORM KONİK TASVİRİN TEMEL DENKLEMLERİ

Konform konik tasvir J, H. Lambert tarafından diğer tasvirlerin yanında 1772 yılında yayımlanan "Yer ve Gök Haritaları Yapılması Hakkında" (Über das Entwerfen von Erd- und Himmelscharten) adlı çalışmasında ortaya atılmıştır [2]. Bu tasvirde elipsoidal coğrafi koordinatlar ağı düzlem bir kutupsal koordinat sistemine taşınır. Kutupsal koordinat sisteminde paralel daireler iç içe daireler ve meridyenler de bunların yarıçapları olarak gösterilirler. Temel denklemler; tasvirin açı koruması ve ana paralel dairenin düzleme uzunluk koruyan biçimde tasvir edilmesi prensiplerine göre geliştirilmiştir.

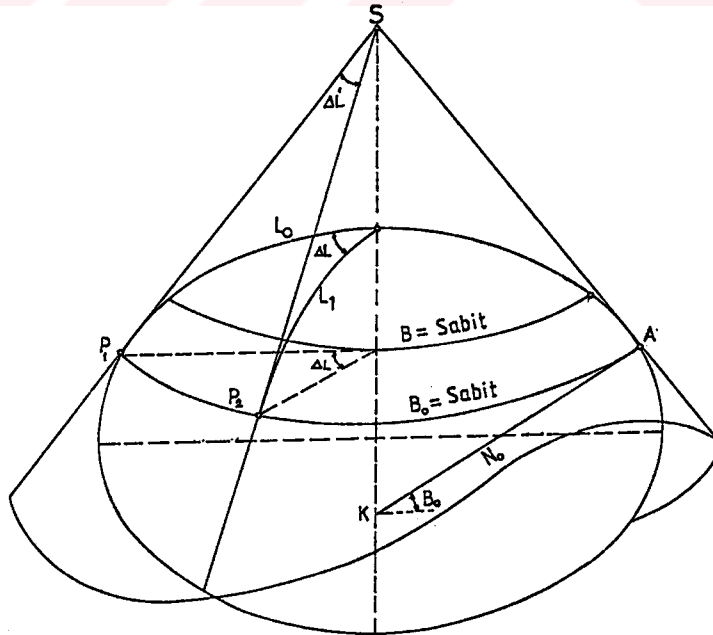
2.1. Tasvir Sabitleri

Elipsoid üzerinde (B,L) coğrafi koordinatlar sistemini (x,y) düzlem dik koordinat sistemine tasvir etmek için ; konformluk yanında iki ilave şartın gerçekleşmesi istenir:

- 1- Tasviri yapılacak bölgenin ortasından geçen bir L_0 ana meridyeni tasvirde düzlem sistemin apsis ekseni olan bir doğru ile gösterilmelidir.
- 2- Ana paralel dairenin tasviri uzunluk korumalıdır.

Birinci şarta göre başlangıç meridyeni ve ana paralel dairenin kesişim noktası düzlem sistemin başlangıç noktası; yani sıfır (0) noktasıdır.

Bir koni yüzeyini ara yüzey olarak düşünmek suretiyle elipsoidin düzleme tasvirini gerçekleştirmek mümkündür. Bu amaçla ekseni yer ekseni ile çakışan ve bir B_0 enlemli paralel daire boyunca elipsoide teğet olan koni düşünülür (Şekil 2.1.1).



Şekil 2.1.1: Paralel daire boyunca elipsoide teğet olan koni

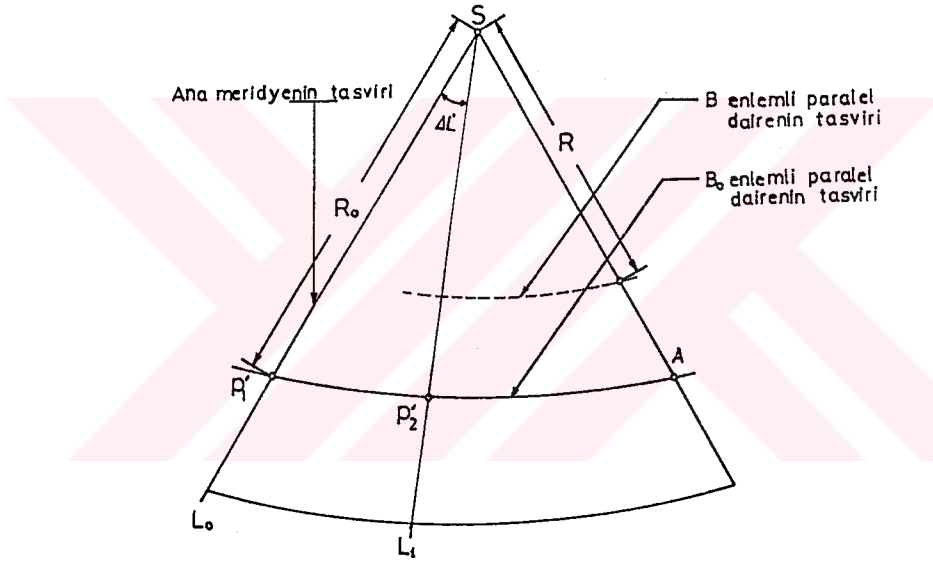
Şekilde KAS dik üçgeninden yararlanarak;

$$R_0 = N_0 \cot B_0 \quad (2.1.1)$$

temel bağıntısına ulaşılır.

Elipsoid üzerinde bu paralel daire civarındaki noktalar seçilen tasvir kanununa göre koni yüzeyine taşınır. Koninin düzleme açılımı yapılarak elipsoidin düzleme konform konik tasviri elde edilir.

Koni yardımı ile yapılan böyle bir tasvirde meridyen düzlemi ile söz konusu koni yüzeyinin ara kesitleri olan doğrular meridyenlerin tasviri olarak alınır. Bu durumda meridyenler tasvirde, koninin S tepe noktasından geçen doğruları teşkil ederler. Paralel daireler de düzlemde S merkezli daireler olarak ortaya çıkarlar (Şekil 2.1.2).



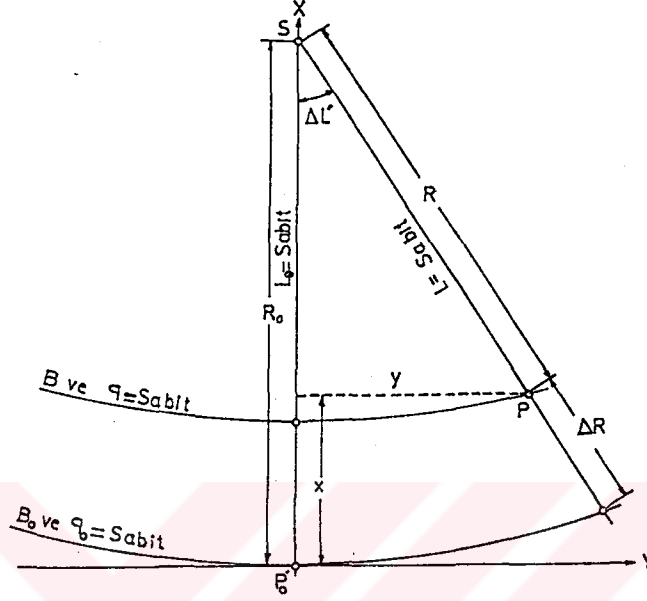
Şekil 2.1.2 : Elipsoid üzerindeki noktaların tasvir düzleminde gösterilmesi

Konform bir tasvir elde edebilmek için orijinal ve tasvir sisteminde izoterm ağlar teşkil edilir [2]. Düzlemde bu şart (x,y) dik koordinat sistemiyle sağlanmış olmaktadır. Bu amaçla elipsoid üzerinde q ve ΔL izometrik parametreleri seçilir. Buna göre Δq amaca uygun olarak tasvir edilecek bölgenin ortasından geçen bir B₀ 'a karşılık gelen q₀=sabit " ana paralel dairelerinden " itibaren sayılır. Eğer Δq=q-q₀ ve ΔL=L-L₀ konulursa elipsoid üzerinde (B₀,L₀) noktası ile (B₀+ΔB,L₀+ΔL) noktası arasındaki dS diferansiyel yay uzunluğu, izometrik parametreler cinsinden

$$dS^2 = N^2 \cos^2 B (d\Delta q^2 + d\Delta L^2) \quad (2.1.2)$$

olarak ifade edilir [2],[3].

Tasvir düzleminde yay uzunluğunu hesaplamak için düzlem kutupsal koordinat sistemi seçilir (Şekil 2.1.3).



Şekil 2.1.3: Düzlem kutupsal koordinat sistemi

Yukarıdaki şekilden de görüldüğü gibi düzlem kutupsal koordinatlar ΔL 've R ' dir. Burada teşkil edilen ağ ortogonal fakat izometrik değildir. Bu sistemde yay elemanı,

$$dS^2 = dR^2 + R^2 d\Delta L'^2$$

olarak ifade edilir.

$$R^2 \text{ yardımı ile } dS^2 = R^2 \left(\frac{dR^2}{R^2} + d\Delta L'^2 \right) \quad (2.1.3)$$

şekline getirilir. Burada R , $R_0 = \text{sabit}$ ana paralel dairenin tasvirinden itibaren sayılırsa $\frac{dR}{R}$ ifadesi , integral alınarak

$$- \int_{-R_0}^R \frac{1}{R} dR = -(\ln R - \ln R_0) = -\ln \frac{R}{R_0} \quad (2.1.4)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $(\Delta L', \frac{dR}{R})$ ile düzlem izometrik parametreler elde edilir. Düzlem izometrik parametre (dR/R) de "-" işareti ilave edilmiştir. Bunun nedeni q izometrik enleminin kuzeye doğru, düzlem kutupsal R mesafesinin coğrafi enlemin küçülmesine göre güneye doğru artmasıdır.

Konform konik tasvirde boylam farkının düzlem karşılığı $\Delta L'$ ve elipsoidal boylam farkı ΔL bir α çarpım faktörü ile birbirine bağlıdır [2] [4].

Böylece;

$$\Delta L' = \alpha \Delta L \quad (2.1.5)$$

olarak ifade edilir.

B_0 = sabit ana paralel dairesi uzunluk koruyan biçimde tasvir edilceği için, elipsoiddeki paralel daire yayı uzunluğu ile buna karşılık gelen R_0 = sabit tasvir yay uzunluğu eşit olmalıdır. Yapılan bu tanımlamanın formül olarak ifadesi yazılırsa;

$$N_0 \cos B_0 \Delta L = R_0 \Delta L' = R_0 \alpha \Delta L \quad (2.1.6)$$

olur ve buradan R_0 değeri

$$R_0 = \frac{N_0 \cos B_0}{\alpha} \quad (2.1.7)$$

elde edilir. Bu formülde R_0 yerine (2.1.1) ' de elde edilen temel bağıntı yazılarak;

$$\alpha = \sin B_0 \quad (2.1.8)$$

şeklinde tasvir sabiti olan α değeri elde edilir.

Bu şekilde heriki sistemde izometrik parametreler oluşturulmuştur. İzometrik parametre çiftlerinin kompleks değişkenler şeklinde birleştirilerek orijinal ve tasvirde birbirine eşitlenmesi sonucu elipsoidin düzleme konform konik tasviri için;

$$\left(-\ln \frac{R}{R_0} + i \Delta L'\right) = \alpha (\Delta q + i \Delta L) \quad (2.1.9)$$

denkleminde ulaşılır [2]. Elde edilen bu ifade de reel ve imajiner kısımların ayrılması ile,

$$-\ln \frac{R}{R_0} = \alpha \Delta q \quad \text{veya} \quad R = R_0 e^{-\alpha \Delta q} \quad (2.1.10)$$

elde edilir. Burada e tabii logaritma tabanıdır.

Buradan düzlem dik koordinatlara geçebilmek için, ana paralel dairenin ve ana meridyenin tasvirinin kesim noktaları $P_0(B_0, L_0)$ düzlem dik koordinat sisteminin başlangıcı olarak alınır. Tanımlanan koordinat sisteminde x eksen kuzeye ve y eksen de doğuya doğru artar.

Şekil 2.1.3 'e göre;

$$x = R_0 - R \cos \Delta L' = R_0[1 - e^{-\alpha \Delta q} \cos(\alpha \Delta L)] \quad (2.1.11)$$

$$y = R \sin \Delta L' = R_0[e^{-\alpha \Delta q} \sin(\alpha \Delta L)]$$

şeklinde düzlem dik koordinatların hesabı için kapalı hesap formülleri bulunur. Formüllerde x ve y 'nin R_0 , Δq , ΔL ve α 'ya bağlı olduğu görülmektedir.

Burada R_0 ve α , elipsoid enlemi B_0 'a bağlı tasvir sabitleridir. (2.1.11) ifadelerinde Euler denkleminin dikkate alınmasıyla elipsoidin bir düzlem dik koordinat sistemine tasviri için başka bir gösterim şekli;

$$(x + iy) = R_0[1 - e^{-\alpha(\Delta q + i\Delta L)}] \quad (2.1.12)$$

olarak elde edilir[2] . Bu denklemde tasvir sabitleri yerine yazılarak ,

$$(x + iy) = N_0 \cot B_0[1 - e^{-\sin B_0(\Delta q + i\Delta L)}] \quad (2.1.13)$$

ve $(x + iy) = z$ ve $(\Delta q + i\Delta L) = \Delta w$ ile gösterilirse;

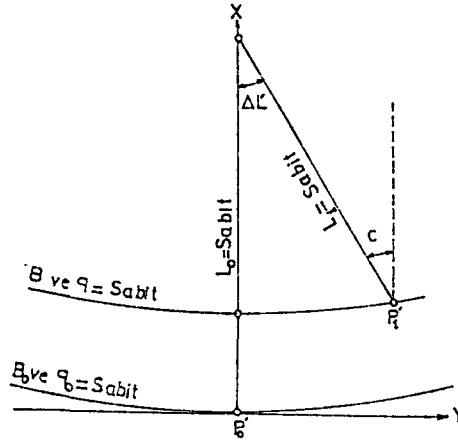
$$z = N_0 \cot B_0[1 - e^{-\sin B_0(\Delta w)}] \quad (2.1.14)$$

formülüne ulaşılır. (x, y) düzlem dik koordinatlarının hesap formülleri bu bağıntının seriye açılması ile veya (2.1.11) kapalı formülleri ile elde edilir.

2.2. Meridyen Konvergenesi ve Diferansiyel Ölçek

Orijinal yüzey üzerindeki uzunluk elemanı dS , bunun tasvir yüzeyindeki karşılığı ds sembolü ile gösterilmek üzere; $m = ds/dS$ oranına diferansiyel ölçek (büyüme oranı) denir. Bir tasvir için en önemli kriter hiç şüphesiz büyüme oranıdır. Büyüme oranı konform konik tasvirde seçilen ana paralel daireden kuzey ve güney yönündeki uzaklığa bağlı olup, doğrultuya bağlı değildir. Bu özellik tasvirin konform olmasının bir sonucudur.

Bir P noktasındaki meridyen konvergenesi ise sözkonusu noktadan başlangıç meridyeninin tasvirine çizilen paralelin bu noktadaki meridyenin tasviri olan doğru ile yaptığı (c) açısına denir (Şekil 2.2.1).



Şekil 2.2.1: Meridyen konvergensi tasvir düzleminde gösterilmesi.

Tanıma göre konform konik tasvirde meridyen konvergensi düzlem $\Delta L'$ açısı ile idantiktir. O halde konvergens

$$c = \alpha \Delta L' \text{ ve } c = \sin B_0 \Delta L' \quad (2.2.1)$$

olarak elde edilir. Meridyen konvergensi coğrafi boylam L' 'ye ve α sabitine bağlıdır. Coğrafi boylam büyüdükçe konvergens te büyümektedir .

Elipsoid coğrafi koordinat sisteminde yüzey parametre elemanı;

$$E = N^2 \cos^2 B$$

olarak tanımlıdır. Düzlem dik koordinat sisteminde yüzey parametre elemanı $\ddot{E}=1$ olduğuna göre; herhangi bir konform tasvirde diferansiyel ölçek ;

$$m^2 = \frac{\ddot{E}}{E} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q} \right)^2 \right] \quad (2.2.2)$$

şeklinde elde edilir [5][6].

Büyüme oranı için (2.1.11)' den diferansiyel alınmak suretiyle;

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial q} &= \alpha R_0 [e^{-\alpha \Delta q} \cos (\alpha \Delta L)] \\ \frac{\partial y}{\partial q} &= -\alpha R_0 [e^{-\alpha \Delta q} \sin (\alpha \Delta L)] \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

oluşturulur ve diferansiyel ölçek için genel formülde diferansiyellerin yerine yazılması sonucu büyüme oranı için

$$m = \frac{\alpha R_0 e^{-\alpha \Delta q}}{N \cos B} = \frac{\alpha R}{N \cos B} \quad (2.2.4)$$

formülü elde edilir.

Ana paralel dairenin uzunluk koruması; bu paralel dairenin koninin yüzeyine temas etmesindendir. Yani koniye teğettir. Ana paralel daireden uzaklaştıkça kuzey ve güney yönünde şekil bozukluğu ortaya çıkar. (2.2.4) ' denkleminde tasvir sabitlerin yerine yazılması sonucu büyüme oranı için daha açık olarak

$$m = \frac{N_0 \cos B_0}{N \cos B} e^{-\sin B_0 (q-q_0)} \quad (2.2.5)$$

ifadesi elde edilir.

Meridyen kovergensi ve diferansiyel ölçek için (2.2.1) ve (2.2.5) kapalı formülleri verilmiştir ve değerlendirilmeleri oldukça kısıdır. Fakat uzunluk ve doğrultu indirgemelerinin türetilmesinde diferansiyel ölçeğin seri açılımlarına ihtiyaç vardır. Bu amaçla diferansiyel ölçeğin seri açılımları için literatürde verilen ifadeler kullanılacaktır.

Diferansiyel ölçeğin coğrafi koordinatlardan serilerle hesabı için;

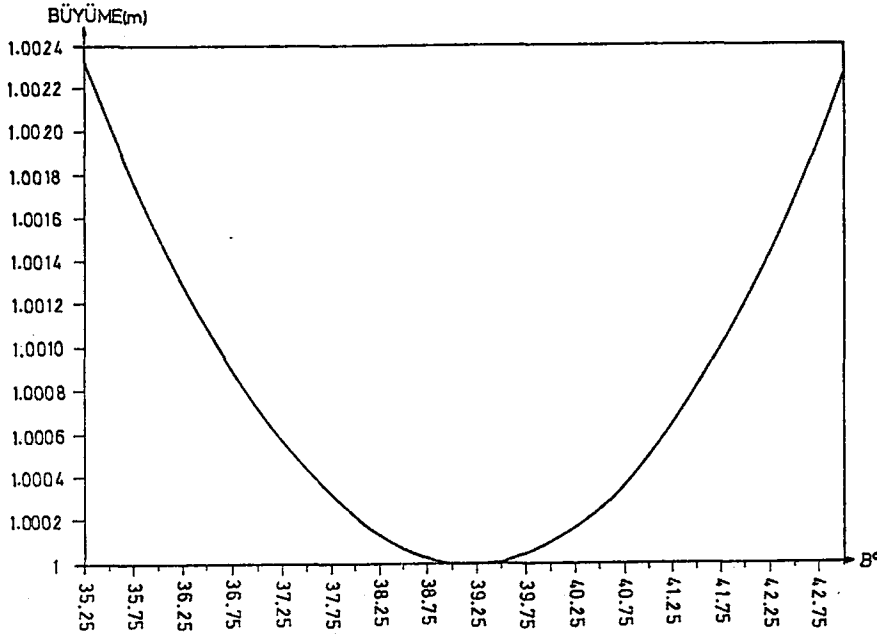
$$m = 1 + \frac{1}{2} (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4) \Delta B^2 + \frac{1}{6} t_0 (1 + 3\eta_0^2 - 7\eta_0^4) \Delta B^3 + \frac{1}{24} (5 + 3t_0^2 - 2\eta_0^2 - 3t_0^2\eta_0^2) \Delta B^4 + \frac{1}{40} t_0 (7 + 4t_0^2) \Delta B^5, \quad (2.2.6)$$

ve düzlem dik koordinatlarından serilerle hesabı için;

$$m = 1 + \frac{1}{2r_0^2} x^2 + \frac{1}{48r_0^3} t_0 (8 - 36\eta_0^2 + 19\eta_0^4) x^3 + \frac{1}{16r_0^3} t_0 (-8 + 4\eta_0^2 - 11\eta_0^4) xy^2 + \frac{1}{24r_0^4} (1 + 3t_0^2 - 4\eta_0^2 - 3t_0^2\eta_0^2) x^4 + \frac{1}{4r_0^4} (-3t_0^2 + 7t_0^2\eta_0^2) x^2 y^2 + \frac{1}{8r_0^4} (t_0^2 - t_0^2\eta_0^2) y^4 + \frac{1}{20r_0^5} t_0 (1 + 2t_0^2) x^5 + \frac{1}{12r_0^5} t_0 (-1 - 12t_0^2) x^3 y^2 + \frac{1}{12r_0^5} t_0^3 xy^4 \quad (2.2.7)$$

formülleri kullanılır [7] .

Konform konik tasvirde ana paralel dairenin dışında büyüme oranı daima 1 ' den büyüktür. Ana paralel daireden kuzeye doğru güney yönünden daha çabuk büyür [8]. Ana paralel dairenin kuzeyinde ve güneyinde büyüme oranı hesaplanarak sonuçlar grafik halinde verilmiştir [Grafik 2.2.1]. Konform konik tasvirde büyüme oranı B_i enlemli paralel daireler boyunca aynı değere karşılık gelmektedir.



Grafik 2.2.1 : Büyüme oranının ana paralel daireden uzak bölgelerdeki durumu

2.3. (B,L) Coğrafi Koordinatlarından (x,y) Düzlem Dik Koordinatlarının Hesabı

Coğrafi koordinatları bilinen bir noktanın konform konik tasvirde düzlem dik koordinatlarını elde edebilmek için, seçilen B_0 başlangıç enleminde önce α ve R_0 tasvir sabitleri

$$\begin{aligned}\alpha &= \sin B_0 \\ R_0 &= N_0 \cot B_0\end{aligned}\quad (2.3.1)$$

formülleri ile hesaplanır.

Bu değerlerin kullanılmasıyla (2.1.11) formülünden; $\Delta L = L - L_0$, $\Delta L' = \alpha \Delta L$ olmak üzere kapalı hesap formülü olarak

$$x = R_0 - R \cos \Delta L' = R_0 (1 - e^{-\alpha \Delta q} \cos (\alpha \Delta L))\quad (2.3.2)$$

$$y = R \sin \Delta L' = R_0 e^{-\alpha \Delta q} \sin (\alpha \Delta L)$$

bağıntıları kullanılır.

Hesaplama aşamalarında sağ taraftaki ilk ifadelerde Δq katsayısı q_0' a bağlıdır. Buna göre q' yu coğrafi enlemin fonksiyonu olarak ifade etmek gerekir.

İzometrik enlem hesabı için; e elipsoidin 1. eksantrisitesi olmak üzere;

$$q_0 = \arctan h (\sin B_0) - e \arctan h (e \sin B_0)$$

$$q = \arctan h (\sin B) - e \arctan h (e \sin B) \quad (2.3.3)$$

$$\Delta q = q - q_0$$

kapalı hesap formülleri kullanılır [9]. Sonuçta (B, L) coğrafi koordinatlarından (x, y) dik koordinatlarının hesap formülleri (2.3.1), (2.3.3) ve (2.3.2) olur.

2.4. (x, y) Düzlem Dik Koordinatlarından (B, L) Coğrafi Koordinatlarının Hesabı

Düzlem dik koordinatların bulunması için ; (2.3.2) formülünde R_0 eşitliğin sol tarafına alınarak;

$$\begin{aligned} -x + R_0 &= R \cos \Delta L' \\ y &= R \sin \Delta L' \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

şeklinde yazılır. $\Delta L'$ değeri yani coğrafi boylam farkının tasvir düzlemindeki karşılığı ve L coğrafi boylamı (2.4.1) 'de eşitliğin taraf tarafa bölünmesi ile;

$$\Delta L' = \arctan \left(\frac{y}{R_0 - x} \right), \quad \Delta L = \frac{\Delta L'}{\alpha}, \quad L = L_0 + \Delta L \quad (2.4.2)$$

şeklinde elde edilir.

B coğrafi enlemini bulabilmek için, önce izometrik enlem farkı Δq hesaplanır. (2.4.1) formülünden her iki tarafın kareleri alınması ve taraf tarafa toplanması ile R bulunur.

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 - 2R_0x + R_0^2} \quad (2.4.3)$$

B coğrafi enlemli paralel dairenin tasvir yarıçapı (2.1.10) formülünde Δq eşitliğin sol tarafına alınır ve

$$e^{-\alpha \Delta q} = \frac{R}{R_0}$$

yazılabilir. Her iki tarafın logaritması alınırsa

$$\ln \left(\frac{R}{R_0} \right) = -\alpha \Delta q \quad \text{ve işaret değiştirilirse;} \quad \ln \left(\frac{R_0}{R} \right) = \alpha \Delta q$$

olur.

Buradan Δq ;

$$\Delta q = \frac{\ln\left(\frac{R_0}{R}\right)}{\alpha} \quad (2.4.4)$$

olarak elde edilir. İzometrik enlem; coğrafi enlemi hesaplanacak paralel daire ile ana paralel daire arasındaki izometrik enlem farkının q_0 ile toplanması ile elde edilir.

$$q = q_0 + \Delta q \quad (2.4.5)$$

Noktanın B coğrafi enlemini elde etmek için aşağıdaki seri formül kullanılır [9].

$$\chi = \arcsin(\tan h q)$$

$$B - \chi = c_2 \sin 2\chi + c_4 \sin 4\chi + c_6 \sin 6\chi + c_8 \sin 8\chi \quad (2.4.6)$$

$$B = (B - \chi) + \chi$$

Formülde geçmekte olan c_i katsayılarının sayısal değerleri [Ek -1] 'de verilmiştir. Böylece düzlem dik (x,y) koordinatları bilinen bir noktanın (B,L) coğrafi koordinatlarının hesabı için formül sırası (2.4.2), (2.4.3), (2.4.5) ve (2.4.6) şeklinde elde edilir.

2.5. Sayısal Örnekler

a) Coğrafi koordinatlardan düzlem dik koordinatların hesabı:

<u>Verilenler</u>	<u>İstenenler</u>
$P_0(B_0 = 39^\circ, L_0 = 35^\circ)$ $P(B = 40^\circ, L = 45^\circ)$	$P(x,y)$
$\eta_0^2 = 0.004\ 087\ 6759$	$\Delta L = 10^\circ$
$V_0^2 = 1.004\ 087\ 6759$	$\Delta L = 0.1745329252$ radyan
$t_0 = 0.809\ 784\ 0332$	$\alpha = 0.6293203911$ radyan
$N_0 = 6\ 386\ 896.1399$ m	$\Delta L' = 6.293203911$
$q_0 = 0.736\ 055\ 6095$ radyan	$\Delta L' = 6^\circ\ 17'\ 35.5341''$
$R_0 = 7\ 887\ 159.8823$ m	
$R = 7\ 776\ 126.0834$ m	

$$x = R_0 - R \cos \Delta L' = 157\ 893.0107$$
 m

$$y = R \sin \Delta L' = 852\ 391.0444$$
 m

b) Dik koordinatlardan coğrafi koordinatların hesaplanması :

Verilenler

İstenenler

$P_0(B_0= 39^\circ, L_0= 35^\circ)$
 $P(x, y)$

$P(B, L)$

$x = 157\,893.0107\text{ m}$
 $y = 852\,391.0444\text{ m}$

$N_0= 6\,386\,896.1399\text{ m}$
 $q_0 = 0.736\,055\,6095\text{ radyan}$

$V = 1.0020417536$
 $R_0= N_0 \cot B_0 = 7\,887\,159.8823\text{ m}$

$$\Delta L' = \arctan\left(\frac{y}{R_0 - x}\right) = 0.1098371287\text{ radyan}$$

$$\Delta L = \frac{\Delta L'}{\sin B_0} = 0.7453292520\text{ radyan}$$

$$\Delta L = 10^\circ 00' 00.0000''$$

$$L = L_0 + \Delta L = 45^\circ 00' 00.0000''$$

$$\chi = 39^\circ 48' 35.6251''$$

$$\frac{(B - \chi) = 0^\circ 11' 24.3749''}{B = 40^\circ 00' 00.0000''}$$

olarak elde edilir.

3. KUVVET SERİLERİ İLE (B,L) COĞRAFİ KOORDİNATLARINDAN (x,y) DÜZLEM DİK KOORDİNATLARININ HESABI

3.1. Kuvvet Serileri İle (ΔB,ΔL)'den (x,y) Hesabı

Coğrafi koordinatlardan düzlem dik koordinatların kuvvet serileri ile hesabı (2.3.2) kapalı formüllerinin seriye açılması ile mümkündür. Kuvvet serileri ile hesaplamalarda prensip olarak B_0 başlangıcına bağlı katsayılar oluşturulur ve bu katsayılar seçilen sistem için bir defa hesaplanırlar. Böylece kuvvet serileri kullanılarak bir noktanın düzlem dik koordinatları; başlangıçtan olan coğrafi enlem ve boylam farklarının seri katsayıları ile çarpılmasından elde edilir. Konform konik tasvirin

$$(x+iy) = R_0[1-e^{-\alpha(\Delta q+i\Delta L)}] \quad (3.1.1)$$

genel ifadesi $(x+iy) = F(\Delta q+i\Delta L)$ şeklinde düşünülerek fonksiyon B_0 noktasında taylor serisine açılırsa;

$$(x+iy) = F'(q)_0 (\Delta q+i\Delta L) + F''(q)_0 (\Delta q+i\Delta L)^2 + F'''(q)_0 (\Delta q+i\Delta L)^3 + \dots$$

seri ifadesi elde edilir. Burada B_0 bağlı türevler a_i ile gösterilerek bu ifade;

$$(x+iy) = a_1 (\Delta q+i\Delta L) + a_2 (\Delta q+i\Delta L)^2 + a_3 (\Delta q+i\Delta L)^3 + a_4 (\Delta q+i\Delta L)^4 + a_5 (\Delta q+i\Delta L)^5 + a_6 (\Delta q+i\Delta L)^6 + a_7 (\Delta q+i\Delta L)^7 \quad (3.1.2)$$

şekline getirilir. Formüldeki a_i katsayıları;

$$a_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n x}{d\Delta q^n} \right)_0 \quad (3.1.3)$$

şeklinde fonksiyonun reel kısmına göre türevleri alınarak oluşturulur [2]. B_0 için katsayıların elde edilmesi ekte verilmiştir [Ek -2].

$$\begin{aligned} a_1 &= N_0 \cos B_0, & a_2 &= -\frac{1}{2} N_0 \cos^2 B_0 t_0 \\ a_3 &= \frac{1}{6} N_0 \cos^3 B_0 t_0^2, & a_4 &= -\frac{1}{24} N_0 \cos^4 B_0 t_0^3 \\ a_5 &= \frac{1}{120} N_0 \cos^5 B_0 t_0^4, & a_6 &= -\frac{1}{720} N_0 \cos^6 B_0 t_0^5 \\ a_7 &= \frac{1}{5040} N_0 \cos^7 B_0 t_0^6, & a_8 &= -\frac{1}{40320} N_0 \cos^8 B_0 t_0^7 \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Buradaki a_i katsayılarının ilk 6 tanesi [5] ve [7] 'de verilmiş olup; a_7 ve a_8 katsayıları çalışmada türetilmiştir.

(3.1.2) ifadesinde $(\Delta q + i\Delta L)$ 'nin kuvvetlerine göre açılımı yapılarak [Ek -3]; reel ve imajiner kısımların ayrı ayrı eşitlenmesi sonucu düzlem dik koordinatlar;

$$\begin{aligned} x = & a_1 \Delta q + a_2 (\Delta q^2 - \Delta L^2) + a_3 (\Delta q^3 - 3\Delta q \Delta L^2) + a_4 (\Delta q^4 - 6\Delta q^2 \Delta L^2 + \Delta L^4) + \\ & a_5 (\Delta q^5 - 10\Delta q^3 \Delta L^2 + 5\Delta q \Delta L^4) + a_6 (\Delta q^6 - 15\Delta q^4 \Delta L^2 + 15\Delta q^2 \Delta L^4 - \Delta L^6) + \\ & a_7 (\Delta q^7 - 21\Delta q^5 \Delta L^2 + 35\Delta q^3 \Delta L^4 - 7\Delta q \Delta L^6) \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

$$\begin{aligned} y = & a_1 \Delta L + 2a_2 \Delta q \Delta L + a_3 (3\Delta q^2 \Delta L - \Delta L^3) + a_4 (4\Delta q^3 \Delta L - 4\Delta q \Delta L^3) + \\ & a_5 (5\Delta q^4 \Delta L - 10\Delta q^2 \Delta L^3 + \Delta L^5) + a_6 (6\Delta q^5 \Delta L - 20\Delta q^3 \Delta L^3 + 6\Delta q \Delta L^5) + \\ & a_7 (7\Delta q^6 \Delta L - 35\Delta q^4 \Delta L^3 + 21\Delta q^2 \Delta L^5 - \Delta L^7) \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

serileri ile elde edilir.

Koordinat dönüşüm formüllerinin (x,y) ile (q,L) arasında değil (x,y) ile (B,L) arasında düzenlenmesi istendiğinden; Δq izometrik enlem farkından ΔB coğrafi enlem farkına geçiş yapılmalıdır. Bunun için; $\Delta B = B - B_0$ ve $\Delta q = q - q_0$ tanımları ile

$$\Delta q = c_1 \Delta B + c_2 \Delta B^2 + c_3 \Delta B^3 + c_4 \Delta B^4 + c_5 \Delta B^5 + c_6 \Delta B^6 + c_7 \Delta B^7 \quad (3.1.7)$$

serisi kullanılır. Formüldeki c_i katsayılarının c_6 'ya kadar olanları [5],[7] ve [10] 'da verilmiştir. Yüksek dereceden terimler;

$$c_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n q}{d B^n} \right)_0 \quad \text{genel formülünden hareketle;}$$

türev alınarak hesaplanmıştır [Ek -4].

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{\cos B_0} (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4 - \eta_0^6 +), & c_2 &= \frac{1}{2 \cos B_0} t_0 (1 + \eta_0^2 - 3\eta_0^4 +) \\ c_3 &= \frac{1}{6 \cos B_0} (1 + 2t_0^2 + \eta_0^2 - 3\eta_0^4 + 6\eta_0^4 t_0^2 +), & c_4 &= \frac{1}{24 \cos B_0} t_0 (5 + 6t_0^2 - \eta_0^2 +) \\ c_5 &= \frac{1}{120 \cos B_0} (5 + 28t_0^2 + 24t_0^4 +), & c_6 &= \frac{1}{720 \cos B_0} t_0 (61 + 180t_0^2 + 120t_0^4 +) \\ c_7 &= \frac{1}{5040 \cos B_0} (61 + 662t_0^2 + 1320t_0^4 + 720t_0^6 +). \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

İzometrik enlem farkı Δq için gerekli olan kuvvetleri teşkil edilerek [Ek -5]; sözkonusu Δq^n değerleri (3.1.5) ve (3.1.6) formüllerinde yazılırsa, sabitler ΔB ve ΔL değişkenlerinin çarpanı durumuna getirilir.

Buradan düzlem dik koordinatların hesaplanması için seriler aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} x = & a_{10} \Delta B + a_{20} \Delta B^2 + a_{02} \Delta L^2 + a_{30} \Delta B^3 + a_{12} \Delta B \Delta L^2 + a_{40} \Delta B^4 + \\ & a_{22} \Delta B^2 \Delta L^2 + a_{04} \Delta L^4 + a_{50} \Delta B^5 + a_{32} \Delta B^3 \Delta L^2 + a_{14} \Delta B \Delta L^4 + \\ & a_{06} \Delta L^6 + a_{60} \Delta B^6 + a_{24} \Delta B^2 \Delta L^4 + a_{42} \Delta B^4 \Delta L^2 + \\ & a_{16} \Delta B \Delta L^6 + a_{70} \Delta B^7 + a_{34} \Delta B^3 \Delta L^4 + a_{52} \Delta B^5 \Delta L^2 \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

$$\begin{aligned} y = & a_{01} \Delta L + a_{11} \Delta B \Delta L + a_{21} \Delta B^2 \Delta L + a_{03} \Delta L^3 + a_{31} \Delta B^3 \Delta L + \\ & a_{13} \Delta B \Delta L^3 + a_{41} \Delta B^4 \Delta L + a_{23} \Delta B^2 \Delta L^3 + a_{05} \Delta L^5 + \\ & a_{15} \Delta B \Delta L^5 + a_{51} \Delta B^5 \Delta L + a_{33} \Delta B^3 \Delta L^3 + a_{61} \Delta B^6 \Delta L + \\ & a_{43} \Delta B^4 \Delta L^3 + a_{25} \Delta B^2 \Delta L^5 + a_{07} \Delta L^7 \end{aligned}$$

Bu şekilde coğrafi koordinatı bilinen bir noktanın düzlem dik koordinatının hesabı; a_{ij} katsayıları ile ΔB^i ve ΔL^j 'nin çarpılması ve toplama işlemleri şeklinde basite indirgenmiştir.

$$a_{10} = a_1 c_1, \quad a_{20} = a_1 c_2 + a_2 c_1^2, \quad a_{02} = -a_2, \quad a_{30} = a_1 c_3 + 2a_2 c_1 c_2 + a_3 c_1^3$$

$$a_{12} = -3a_3 c_1, \quad a_{40} = a_1 c_4 + 2a_2 c_1 c_3 + a_2 c_2^2 + 3a_3 c_1^2 c_2 + a_4 c_1^4, \quad a_{22} = -3a_3 c_2 - 6a_4 c_1^2$$

$$a_{04} = a_4, \quad a_{14} = 5a_5 c_1$$

$$a_{50} = a_1 c_5 + 2a_2 c_1 c_4 + 2a_2 c_2 c_3 + 3c_1^2 c_3 + 3a_3 c_1 c_2^2 + 4a_4 c_1^3 c_2 + a_5 c_1^5$$

$$a_{32} = -3a_3 c_3 - 12a_4 c_1 c_2 - 10a_5 c_1^3, \quad a_{06} = -a_6$$

$$\begin{aligned} a_{60} = & a_1 c_6 + a_2(2c_1 c_5 + 2c_2 c_4 + c_3^2) + a_3(3c_1^2 c_4 + 6c_1 c_2 c_3 + c_2^3) + a_4(4c_1^3 c_3 + 6c_1^2 c_2^2) + \\ & 5a_5 c_1^4 c_2 + a_6 c_1^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{70} = & a_1 c_7 + a_2(2c_1 c_6 + 2c_2 c_5 + 2c_3 c_4) + a_3(3c_1^2 c_5 + 6c_1 c_2 c_4 + 3c_1 c_3^2 + 3c_2^2 c_3) + \\ & a_4(4c_1^3 c_4 + 12c_1^2 c_2 c_3 + 4c_1 c_2^3) + a_5(5c_1^4 c_3 + 10c_1^3 c_2^2) + 6a_6 c_1^5 c_2 + a_7 c_1^7 \end{aligned}$$

$$a_{24} = 5a_5 c_2 + 15a_6 c_1^2, \quad a_{42} = -6a_4(2c_1 c_3 + c_2^2) - 30a_5 c_1^2 c_2 - 15a_6 c_1^4 - 3a_3 c_4$$

$$\begin{aligned} a_{16} &= -7a_7c_1, & a_{34} &= 5a_5c_3+30a_6c_1c_2 \\ a_{52} &= -10a_5(3c_1^2c_3+3c_1c_2^2) - 60a_6c_1^3c_2 - 21a_7c_1^5-3a_3c_5 - 6a_4(2c_1c_4+2c_2c_3) \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

$$\begin{aligned} a_{01} &= a_1, & a_{11} &= 2a_2c_1, & a_{21} &= 2a_2c_2 + 3a_3c_1^2, & a_{03} &= -a_3 \\ a_{31} &= 2a_2c_3 + 6a_3c_1c_2 + 4a_4c_1^3, & a_{13} &= -4a_4c_1 \\ a_{41} &= 2a_2c_4 + 6a_3c_1c_3 + 3a_3c_2^2 + 12a_4c_1^2c_2 + 5a_5c_1^4, & a_{23} &= -4a_4c_2 - 10a_5c_1^2 \\ a_{05} &= a_5, & a_{15} &= 6a_6c_1, & a_{33} &= -4a_4c_3 - 20a_5c_1c_2 - 20a_6c_1^3 \\ a_{51} &= 2a_2c_5 + 3a_3(2c_1c_4+2c_2c_3) + 4a_4(3c_1^2c_3+3c_1c_2^2) + 20a_5c_1^3c_2 + 6a_6c_1^5 \\ a_{61} &= 2a_2c_6 + 3a_3(2c_1c_5+2c_2c_4+c_3^2) + 4a_4(3c_1^2c_4+6c_1c_2c_3+c_2^3) + 5a_5(4c_1^3c_3+6c_1^2c_2^2) + \\ & 30a_6c_1^4c_2 + 7a_7c_1^6, & a_{07} &= -a_7 \\ a_{43} &= -4a_4c_4 - 10a_5(2c_1c_3+c_2^2) - 60a_6c_1^2c_2-35a_7c_1^4, & a_{25} &= 6a_6c_2 + 21a_7c_1^2 \end{aligned}$$

Katsayıların a_i ve c_i terimleri ile çarpılması ve gerekli sadeleştirmeler sonucunda sabit katsayılar;

$$\begin{aligned} a_{10} &= N_0 (1-\eta_0^2+\eta_0^4-\eta_0^6), & a_{01} &= N_0 \cos B_0 \\ a_{20} &= \frac{1}{2} N_0 t_0 (3\eta_0^2-6\eta_0^4+9\eta_0^6), & a_{11} &= N_0 \cos B_0 t_0 (-1+\eta_0^2-\eta_0^4+\eta_0^6) \\ a_{02} &= \frac{1}{2} N_0 \cos^2 B_0 t_0, & a_{30} &= \frac{1}{6} N_0 (1+\eta_0^2-3\eta_0^4-3t_0^2\eta_0^2+21t_0^2\eta_0^4-19t_0^2\eta_0^6) \\ a_{03} &= -\frac{1}{6} N_0 \cos^3 B_0 t_0^2, & a_{21} &= \frac{1}{2} N_0 \cos B_0 t_0^2(-3\eta_0^2+6\eta_0^4-4\eta_0^6) \\ a_{12} &= -\frac{1}{2} N_0 \cos^2 B_0 t_0^2(1-\eta_0^2+\eta_0^4-\eta_0^6) \\ a_{40} &= \frac{1}{24} N_0 t_0 (1-\eta_0^2+12\eta_0^4-16t_0^2\eta_0^2+t_0^2\eta_0^4+32\eta_0^6+82t_0^2\eta_0^6) \\ a_{13} &= \frac{1}{6} N_0 \cos^3 B_0 t_0^3 (1-\eta_0^2+\eta_0^4-\eta_0^6) \\ a_{50} &= \frac{1}{120} N_0 (5+3t_0^2-10t_0^4-60t_0^2\eta_0^4+50t_0^4\eta_0^2+170t_0^2\eta_0^6) \\ a_{41} &= \frac{1}{24} N_0 \cos B_0 t_0^2 (-1+\eta_0^2-12\eta_0^4+39t_0^2\eta_0^4+12\eta_0^6+16t_0^2\eta_0^6) \\ a_{32} &= \frac{1}{12} N_0 \cos^2 B_0 t_0^2(-1-\eta_0^2+3\eta_0^4+3t_0^2\eta_0^2-21t_0^2\eta_0^4+19t_0^2\eta_0^6) \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

$$\begin{aligned}a_{23} &= \frac{1}{12} N_0 \cos^3 B_0 t_0^4 (3\eta_0^2 - 6\eta_0^4 + 4\eta_0^6), & a_{14} &= \frac{1}{24} N_0 \cos^4 B_0 t_0^4 (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4 - \eta_0^6) \\a_{05} &= \frac{1}{120} N_0 \cos^5 B_0 t_0^4, & a_{04} &= -\frac{1}{24} N_0 \cos^4 B_0 t_0^3 \\a_{31} &= \frac{1}{6} N_0 \cos B_0 t_0 (-1 - \eta_0^2 + 3\eta_0^4 + 3t_0^2\eta_0^2 - 21t_0^2\eta_0^6 + 19t_0^2\eta_0^6) \\a_{22} &= \frac{1}{4} N_0 \cos^2 B_0 t_0^3 (-3\eta_0^2 + 6\eta_0^4 - 4\eta_0^6), & a_{06} &= \frac{1}{720} N_0 \cos^6 B_0 t_0^5 \\a_{42} &= \frac{1}{48} N_0 \cos^2 B_0 t_0^3 (-1 - t_0^2 - \eta_0^2 - 12\eta_0^4 + 4t_0^2\eta_0^2 + 29t_0^2\eta_0^4 + 4\eta_0^6 + 24t_0^2\eta_0^6) \\a_{24} &= \frac{1}{48} N_0 \cos^4 B_0 t_0^5 (3\eta_0^2 - 6\eta_0^4 + 4\eta_0^6) & (3.1.11) \\a_{34} &= \frac{1}{144} N_0 \cos^4 B_0 t_0^4 (1 - t_0^2 + \eta_0^2 - 3\eta_0^4 + 15t_0^2\eta_0^4 - 9t_0^2\eta_0^6) \\a_{16} &= -\frac{1}{720} N_0 \cos^6 B_0 t_0^6 (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4 - \eta_0^6) \\a_{60} &= \frac{1}{720} N_0 t_0 (21 + 12t_0^2 + 38\eta_0^2 + 15t_0^2\eta_0^2 - 278\eta_0^4 + 228t_0^2\eta_0^4 + 1422\eta_0^6 + 3675t_0^2\eta_0^6) \\a_{51} &= \frac{1}{120} N_0 \cos B_0 t_0 (-5 + 3t_0^2 - 10t_0^4 - 20t_0^2\eta_0^4 + 30t_0^4\eta_0^2 - 35t_0^2\eta_0^6) \\a_{15} &= -\frac{1}{120} N_0 \cos^5 B_0 t_0^5 (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4 - \eta_0^6) \\a_{33} &= \frac{1}{36} N_0 \cos^3 B_0 t_0^3 (1 + \eta_0^2 - 3\eta_0^4 + 12t_0^2\eta_0^4 - 19t_0^2\eta_0^6)\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

3.2. Diğer Seri Çözüm Yöntemleri

Literatürde bu konuda yayınlanmış çalışma olarak (3.1.4) ve (3.1.8) 'de verilen a_i ve c_i katsayılarının , 5.dereceye kadar benzer açılımı JORDAN /EGGERT /KNEISSL 'da verilmektedir [5]. Çalışmada karşılaştırma amacı ile bu formüller de dikkate alınmıştır. Söz konusu formüllere göre coğrafi koordinatlardan düzlem dik koordinatların hesabı için seriler aşağıda verilmiştir:

$$x = a_{10} \Delta B + a_{20} \Delta B^2 + a_{02} \Delta L^2 + a_{30} \Delta B^3 + a_{12} \Delta B \Delta L^2 + a_{40} \Delta B^4 + a_{22} \Delta B^2 \Delta L^2 + a_{04} \Delta L^4 + a_{50} \Delta B^5 + a_{32} \Delta B^3 \Delta L^2 + a_{14} \Delta B \Delta L^4 \quad (3.2.1)$$

$$y = a_{01} \Delta L + a_{11} \Delta B \Delta L + a_{21} \Delta B^2 \Delta L + a_{03} \Delta L^3 + a_{31} \Delta B^3 \Delta L + a_{13} \Delta B \Delta L^3 + a_{41} \Delta B^4 \Delta L + a_{23} \Delta B^2 \Delta L^3 + a_{05} \Delta L^5$$

B_0 bağlı sabit katsayılar;

$$\begin{aligned} a_{10} &= N_0 (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4 - \eta_0^6), & a_{01} &= N_0 \cos B_0 \\ a_{20} &= \frac{3}{2} N_0 t_0 (\eta_0^2 - 2\eta_0^4), & a_{11} &= N_0 \cos B_0 t_0 (-1 + \eta_0^2 - \eta_0^4) \\ a_{02} &= \frac{1}{2} N_0 \cos^2 B_0 t_0, & a_{30} &= \frac{1}{6} N_0 (1 + \eta_0^2 - 3\eta_0^4 - 3t_0^2 \eta_0^2 + 21t_0^2 \eta_0^4) \\ a_{03} &= -\frac{1}{6} N_0 \cos^3 B_0 t_0^2, & a_{21} &= \frac{3}{2} N_0 \cos B_0 t_0^2 (-\eta_0^2 + 2\eta_0^4) \\ a_{12} &= -\frac{1}{2} N_0 \cos^2 B_0 t_0^2 (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4), & a_{40} &= \frac{1}{24} N_0 t_0 (1 - \eta_0^2) \\ a_{31} &= \frac{1}{6} N_0 \cos B_0 t_0 (-1 - \eta_0^2 + 3t_0^2 \eta_0^2), & a_{22} &= -\frac{3}{4} N_0 \cos^2 B_0 t_0^3 \eta_0^2 \\ a_{13} &= \frac{1}{6} N_0 \cos^3 B_0 t_0^3 (1 - \eta_0^2), & a_{50} &= \frac{1}{120} N_0 (5 + 3t_0^2) \\ a_{41} &= -\frac{1}{24} N_0 \cos B_0 t_0^2, & a_{32} &= -\frac{1}{12} N_0 \cos^2 B_0 t_0^2 \\ a_{23} &= 0, & a_{14} &= \frac{1}{24} N_0 \cos^4 B_0 t_0^4 \\ a_{05} &= \frac{1}{120} N_0 \cos^5 B_0 t_0^4, & a_{04} &= -\frac{1}{24} N_0 \cos^4 B_0 t_0^3 \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

şeklinde verilmiştir.

Literatürde bu konudaki bir başka dikkate değer çalışma da KNORR ' un DGK ' da yayınlanan çalışmasıdır [11]. Bu çalışmada dik koordinatların hesabı için formül verilmemiş, ancak R tasvir yarıçapının elde edilmesi için seriler verilmiştir . (R/R₀) için verilen seri açılımı kullanılarak; düzlem dik koordinatların hesaplamasında elde edilen;

$$\begin{aligned} x &= R_0 - R \cos \Delta L' \\ y &= R \sin \Delta L' \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

bağıntıları sin $\Delta L'$ ve cos $\Delta L'$ fonksiyonlarının seriyeye açılımı yapılarak formüller aşağıdaki;

$$\begin{aligned} \frac{x}{R_0} &= 1 - \frac{R}{R_0} \left(1 - \frac{\Delta L'^2}{2} + \frac{\Delta L'^4}{24} - \frac{\Delta L'^6}{720} \right) \\ \frac{y}{R_0} &= \frac{R}{R_0} \left(\Delta L' - \frac{\Delta L'^3}{6} + \frac{\Delta L'^5}{120} - \frac{\Delta L'^7}{5040} \right) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

şekline getirilir. Söz konusu $\frac{R}{R_0}$ seriyeye açılımı ilgili yayında;

$$\frac{R}{R_0} = 1 - a_1 \Delta B - a_2 \Delta B^2 - a_3 \Delta B^3 - a_4 \Delta B^4 - a_5 \Delta B^5 - a_6 \Delta B^6 \quad (3.2.5)$$

şeklinde verilmiştir. Seride kullanılan a_i katsayıları;

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{t_0}{2v_0}, & a_2 &= \frac{3\eta_0^2 t_0^2}{2v_0^4}, & a_3 &= \frac{t_0 cs_3}{6v_0^6}, \\ a_4 &= \frac{t_0^2 cs_4}{24v_0^8}, & a_5 &= \frac{t_0 cs_5}{120v_0^{10}}, & a_6 &= \frac{t_0^2 cs_6}{720v_0^{12}}, \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

olup cs_3, cs_4, cs_5 ve cs_6 katsayılarının hesaplanmasında aşağıdaki formüller kullanılır:

$$\begin{aligned} cs_3 &= 1 + 4\eta_0^2 - 3\eta_0^2 t_0^2 + 3\eta_0^4 + 12\eta_0^4 t_0^2 \\ cs_4 &= 1 + 3\eta_0^2 + 35\eta_0^4 - 45\eta_0^4 t_0^2 + 33\eta_0^6 + 60\eta_0^6 t_0^2 \\ cs_5 &= 5 + 3t_0^2 + 24\eta_0^2 + 15\eta_0^2 t_0^2 + 66\eta_0^4 - 135\eta_0^4 t_0^2 + 45\eta_0^4 t_0^4 + 80\eta_0^6 + \\ &\quad 165\eta_0^6 t_0^2 - 540\eta_0^6 t_0^4 + 33\eta_0^8 + 312\eta_0^8 t_0^2 + 360\eta_0^8 t_0^4 \\ cs_6 &= 21 + 12t_0^2 + 143\eta_0^2 + 75\eta_0^2 t_0^2 + 122\eta_0^4 + 585\eta_0^4 t_0^2 + 622\eta_0^6 - 3255\eta_0^6 t_0^2 + \\ &\quad 1575\eta_0^6 t_0^4 + 1345\eta_0^8 - 777\eta_0^8 t_0^2 + 723\eta_0^{10} - 6300\eta_0^8 t_0^4 + 3000\eta_0^{10} t_0^2 + 2520\eta_0^{10} t_0^4. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

(3.2.4) ifadesinde (R/R_0) seri açılımı yerine yazılır ve formülün her iki tarafı R_0 yani $N_0 \cot B_0$ ile çarpılırsa; coğrafi koordinatları bilinen bir noktanın düzlem dik koordinatlarının hesabı için seri açılım elde edilir. Bu seriler sonuç olarak

$$\begin{aligned} x = & a_1 R_0 \Delta B + a_2 R_0 \Delta B^2 + a_3 R_0 \Delta B^3 + a_4 R_0 \Delta B^4 + a_5 R_0 \Delta B^5 + a_6 R_0 \Delta B^6 + \\ & N_0 \Delta L'^2 (2t_0) - a_1 R_0 \Delta B \Delta L'^2 / 2 - a_2 R_0 \Delta B^2 \Delta L'^2 / 2 - a_3 R_0 \Delta B^3 \Delta L'^2 / 2 - \\ & a_4 R_0 \Delta B^4 \Delta L'^2 / 2 - a_5 R_0 \Delta B^5 \Delta L'^2 / 2 - a_6 R_0 \Delta B^6 \Delta L'^2 / 2 - N_0 \Delta L'^4 (24 t_0) + \\ & a_1 R_0 \Delta B \Delta L'^4 / 24 + a_2 R_0 \Delta B^2 \Delta L'^4 / 24 + a_3 R_0 \Delta B^3 \Delta L'^4 / 24 + \\ & N_0 \Delta L'^6 (720 t_0) - a_1 R_0 \Delta B \Delta L'^6 / 720 \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

$$\begin{aligned} y = & N_0 \Delta L' / t_0 - a_1 R_0 \Delta B \Delta L' - a_2 R_0 \Delta B^2 - a_3 R_0 \Delta B^3 - a_4 R_0 \Delta B^4 - a_5 R_0 \Delta B^5 - a_6 R_0 \Delta B^6 - \\ & N_0 \Delta L'^3 (6 t_0) + a_1 R_0 \Delta B \Delta L'^3 / 6 + a_2 R_0 \Delta B^2 \Delta L'^3 / 6 + a_3 R_0 \Delta B^3 \Delta L'^3 / 6 + \\ & a_4 R_0 \Delta B^4 \Delta L'^3 / 6 + N_0 \Delta L'^5 / (120 t_0) - a_2 R_0 \Delta B^2 \Delta L'^5 / 120 - N_0 \Delta L'^7 (5040 t_0) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Diğer yöntemlerde olduğu gibi burada da B_0 enlemine bağlı olan sabit terimler vardır. Bu yöntemde de sabit terimler katsayı haline getirilebilir:

$$\begin{aligned} x = & a_{10} \Delta B + a_{20} \Delta B^2 + a_{02} \Delta L'^2 + a_{30} \Delta B^3 + a_{12} \Delta B \Delta L'^2 + a_{40} \Delta B^4 + \\ & a_{22} \Delta B^2 \Delta L'^2 + a_{04} \Delta L'^4 + a_{50} \Delta B^5 + a_{32} \Delta B^3 \Delta L'^2 + a_{14} \Delta B \Delta L'^4 + \\ & a_{06} \Delta L'^6 + a_{60} \Delta B^6 + a_{24} \Delta B^2 \Delta L'^4 + a_{42} \Delta B^4 \Delta L'^2 + a_{16} \Delta B \Delta L'^6 + \\ & a_{70} \Delta B^7 + a_{34} \Delta B^3 \Delta L'^4 + a_{52} \Delta B^5 \Delta L'^2 \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

$$\begin{aligned} y = & a_{01} \Delta L' + a_{11} \Delta B \Delta L' + a_{21} \Delta B^2 \Delta L' + a_{03} \Delta L'^3 + a_{31} \Delta B^3 \Delta L' + \\ & a_{13} \Delta B \Delta L'^3 + a_{41} \Delta B^4 \Delta L' + a_{23} \Delta B^2 \Delta L'^3 + a_{05} \Delta L'^5 + \\ & a_{15} \Delta B \Delta L'^5 + a_{51} \Delta B^5 \Delta L' + a_{33} \Delta B^3 \Delta L'^3 + a_{61} \Delta B^6 \Delta L' + \\ & a_{43} \Delta B^4 \Delta L'^3 + a_{25} \Delta B^2 \Delta L'^5 + a_{07} \Delta L'^7. \end{aligned}$$

Başlangıç B_0 enlemine bağlı sabit katsayılar;

$$a_{10} = N_0(1-\eta_0^2+\eta_0^4-\eta_0^6), \quad a_{20} = \frac{1}{2} N_0 t_0 (3\eta_0^2-6\eta_0^4+\eta_0^6-12\eta_0^8+9\eta_0^{10}-6\eta_0^{12})$$

$$a_{30} = \frac{1}{6} N_0 (1+\eta_0^2-3\eta_0^4-3\eta_0^2 t_0^2+21\eta_0^4 t_0^2-54\eta_0^6 t_0^2-10\eta_0^8)$$

$$a_{40} = \frac{1}{24 V_0^8} N_0 t_0 (1+3\eta_0^2+35\eta_0^4-45\eta_0^4 t_0^2+33\eta_0^6+60\eta_0^6 t_0^2)$$

$$a_{50} = \frac{1}{120 V_0^{10}} N_0 (5+3t_0^2+24\eta_0^2+15\eta_0^2 t_0^2+66\eta_0^4-135\eta_0^4 t_0^2+45\eta_0^4 t_0^4+80\eta_0^6+165\eta_0^6 t_0^2-540\eta_0^6 t_0^4+33\eta_0^8+312\eta_0^8 t_0^2+360\eta_0^8 t_0^4)$$

$$a_{60} = \frac{1}{720 V_0^{12}} N_0 t_0 (21+12t_0^2+143\eta_0^2+75\eta_0^2 t_0^2+122\eta_0^4+585\eta_0^4 t_0^2+622\eta_0^6-3255\eta_0^6 t_0^2+1575\eta_0^6 t_0^4+1345\eta_0^8-777\eta_0^8 t_0^2+723\eta_0^{10}-6300\eta_0^8 t_0^4+3000\eta_0^{10} t_0^2+2520\eta_0^{10} t_0^4)$$

$$a_{02} = \frac{1}{2t_0} N_0, \quad a_{12} = \frac{1}{2 V_0^2} N_0, \quad a_{22} = -\frac{3}{4 V_0^4} N_0 \eta_0^2 t_0$$

$$a_{32} = -\frac{1}{12 V_0^6} N_0 (1+4\eta_0^2-3\eta_0^2 t_0^2+3\eta_0^4+12\eta_0^4 t_0^2), \quad a_{06} = \frac{1}{720 t_0} N_0$$

$$a_{42} = -\frac{1}{48 V_0^8} N_0 t_0 (1+3\eta_0^2+35\eta_0^4-45\eta_0^4 t_0^2+33\eta_0^6+60\eta_0^6 t_0^2)$$

$$a_{04} = -\frac{1}{24 t_0} N_0, \quad a_{14} = \frac{1}{24 V_0^2} N_0, \quad a_{24} = \frac{1}{16 V_0^4} N_0 \eta_0^2 t_0$$

$$a_{34} = \frac{1}{120 V_0^6} N_0 (1+4\eta_0^2-3\eta_0^2 t_0^2+3\eta_0^4+12\eta_0^4 t_0^2) \quad (3.2.10)$$

$$a_{52} = -\frac{1}{240 V_0^{10}} N_0 (5+3t_0^2+24\eta_0^2+15\eta_0^2 t_0^2+66\eta_0^4-135\eta_0^4 t_0^2+45\eta_0^4 t_0^4+80\eta_0^6+165\eta_0^6 t_0^2-540\eta_0^6 t_0^4+33\eta_0^8+312\eta_0^8 t_0^2+360\eta_0^8 t_0^4)$$

$$a_{16} = \frac{1}{720 V_0^2} N_0, \quad a_{01} = \frac{1}{t_0} N_0, \quad a_{11} = -\frac{1}{V_0^2} N_0$$

$$a_{21} = -\frac{3}{2} \frac{\eta_0^2 t_0}{V_0^4} N_0, \quad a_{03} = -\frac{1}{6 t_0} N_0, \quad a_{05} = \frac{1}{120 t_0} N_0$$

$$a_{31} = -\frac{1}{6} \frac{N_0}{V_0^6} (1 + 4\eta_0^2 - 3\eta_0^2 t_0^2 + 3\eta_0^4 + 12\eta_0^4 t_0^2), \quad a_{13} = \frac{1}{V_0^2} N_0$$

$$a_{41} = -\frac{1}{24} \frac{t_0}{V_0^8} N_0 (5 + 3t_0^2 + 24\eta_0^2 + 15\eta_0^2 t_0^2 + 66\eta_0^4 - 135\eta_0^4 t_0^2 + 45\eta_0^4 t_0^4 + 80\eta_0^6 + 165\eta_0^6 t_0^2 - 540\eta_0^6 t_0^4 + 33\eta_0^8 + 312\eta_0^8 t_0^2 + 360\eta_0^8 t_0^4), \quad a_{23} = \frac{3}{12} \frac{N_0}{V_0^4} \eta_0^2 t_0$$

$$a_{51} = -\frac{1}{120} \frac{N_0}{V_0^{10}} (5 + 3t_0^2 + 24\eta_0^2 + 15\eta_0^2 t_0^2 + 66\eta_0^4 - 135\eta_0^4 t_0^2 + 45\eta_0^4 t_0^4 + 80\eta_0^6 + 165\eta_0^6 t_0^2 - 540\eta_0^6 t_0^4 + 33\eta_0^8 + 312\eta_0^8 t_0^2 + 360\eta_0^8 t_0^4)$$

$$a_{07} = \frac{1}{5040 t_0} N_0, \quad a_{33} = \frac{1}{6} \frac{N_0}{V_0^2}$$

$$a_{61} = -\frac{1}{720} \frac{t_0}{V_0^{12}} N_0 (21 + 12t_0^2 + 143\eta_0^2 + 75\eta_0^2 t_0^2 + 122\eta_0^4 + 585\eta_0^4 t_0^2 + 622\eta_0^6 - 3255\eta_0^6 t_0^2 + 1575\eta_0^6 t_0^4 + 1345\eta_0^8 - 777\eta_0^8 t_0^2 + 723\eta_0^{10} - 6300\eta_0^8 t_0^4 + 3000\eta_0^{10} t_0^2 + 2520\eta_0^{10} t_0^4)$$

$$a_{43} = \frac{1}{120} \frac{t_0}{V_0^8} N_0 (1 + 3\eta_0^2 + 35\eta_0^4 - 45\eta_0^4 t_0^2 + 33\eta_0^6 + 60\eta_0^6 t_0^2)$$

$$a_{15} = -\frac{1}{120} \frac{N_0}{V_0^2}, \quad a_{25} = -\frac{3}{240} \frac{N_0}{V_0^4} \eta_0^2 t_0$$

olarak elde edilir.

3.3. Seri Çözüm Yöntemlerinin Karşılaştırılması

(B,L) coğrafi koordinatlarından (x,y) düzlem dik koordinatlarının hesabı için verilen kapalı formüllerle hesaplanan koordinatlar kesin koordinatlar olarak kabul edilerek, diğer yöntemlerle hesaplanan koordinatlar kesin koordinatlarla karşılaştırılmıştır.

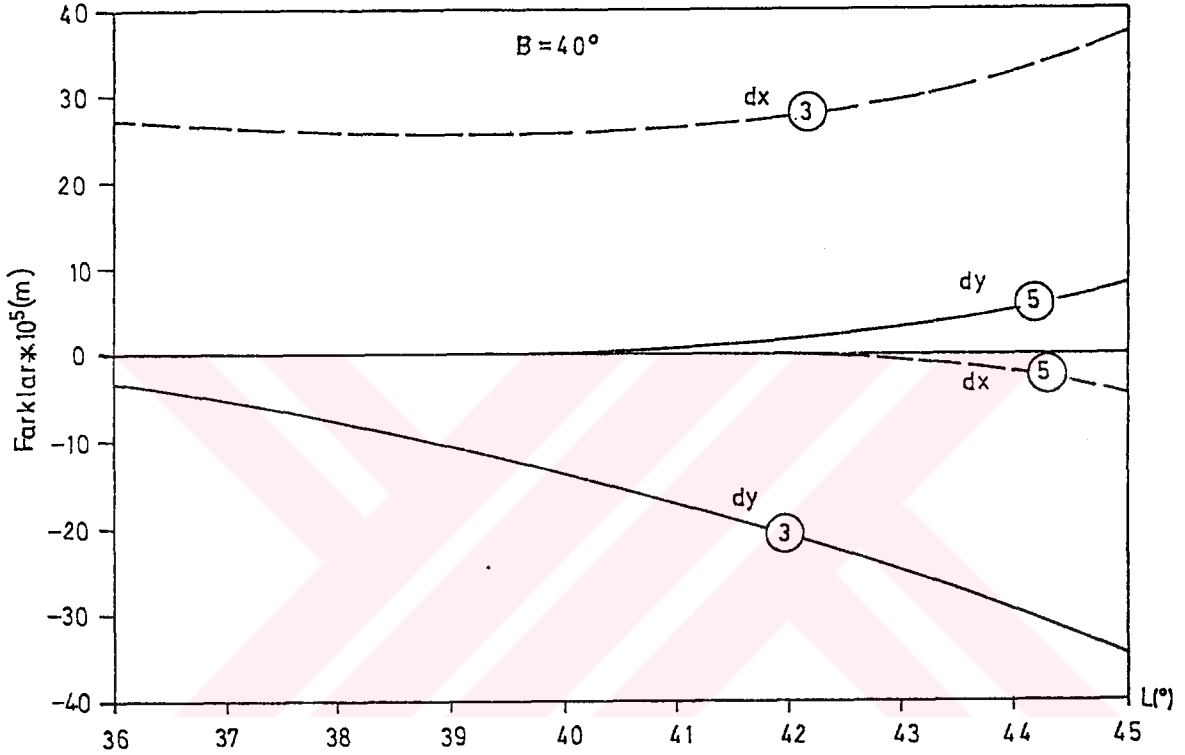
Bunun için $B_0=39^\circ$ ve $L_0=35^\circ$ koordinat başlangıçlı bir sistemde B coğrafi enlemi için sırasıyla 40° , 41° ve 42° değerleri seçilmiş ve L coğrafi boylamı için de 35° 'den 45° 'ye kadar 1° 'lik aralıklarla oluşturulan noktaların düzlem koordinatları hesaplanmıştır. Bu koordinatlar BASIC programlama dilinde yazılımı yapılan bir program yardımı ile her yöntem için kütüklere kaydedilmiştir. Bu kütüklerden koordinat okunmaları yapılarak koordinatlar bir kütük altında toplanmış ve koordinatların farkları alınarak tabloda gösterilmiştir [Tablo 3.3.1]. Tablodan 40° enlemindeki değerlerin boylam ve koordinat farklarına göre grafiği çizilmiştir [Grafik 3.3.1].

Tablo 3.3.1 : Kuvvet serileri kullanılarak hesaplanan (x,y) düzlem dik koordinatlarının kapalı formüller ile hesaba yaklaşımları

1		2		3		4		5	
B°	L°	y(m)	x(m)	dy(m)	dx(m)	dy(m)	dx(m)	dy(m)	dx(m)
40	36	85409.018828	111502.857679	-0.000003	0.000027	0.000065	0.000513	0.000000	0.000000
40	37	170807.733848	112909.977448	-0.000006	0.000027	0.000147	0.000526	0.000000	0.000000
40	38	256185.842498	115254.988444	-0.000010	0.000026	0.000249	0.000547	0.000000	0.000000
40	39	341533.044700	118537.607764	-0.000013	0.000026	0.000334	0.000601	0.000000	0.000000
40	40	426839.044104	122757.439390	-0.000016	0.000026	0.000313	0.000769	0.000001	0.000001
40	41	512093.549332	127913.974239	-0.000019	0.000027	0.000024	0.001237	0.000001	0.000000
40	42	597286.275217	134006.590221	-0.000023	0.000028	-0.000787	0.002357	0.000002	0.000000
40	43	682406.944046	141034.552320	-0.000027	0.000030	-0.002487	0.004724	0.000003	-0.000001
40	44	767445.286800	148997.012678	-0.000030	0.000034	-0.005574	0.009264	0.000005	-0.000001
40	45	852391.044390	157893.010696	-0.000033	0.000037	-0.010702	0.017332	0.000008	-0.000004
41	36	84188.894688	222583.244384	-0.000007	0.000083	-0.000125	0.002300	0.000000	0.000014
41	37	168367.632765	223970.262520	-0.000015	0.000080	-0.000143	0.002323	0.000000	0.000014
41	38	252526.058848	226281.773488	-0.000022	0.000073	0.000018	0.002352	0.000002	0.000014
41	39	336654.020001	229517.498427	-0.000030	0.000066	0.000357	0.002396	0.000005	0.000014
41	40	420741.366965	233677.046976	-0.000038	0.000059	0.000767	0.002515	0.000009	0.000013
41	41	504777.955381	238759.917325	-0.000047	0.000054	0.000999	0.002867	0.000015	0.000014
41	42	588753.647014	244765.496272	-0.000055	0.000055	0.000621	0.003769	0.000025	0.000014
41	43	672658.310973	251693.059299	-0.000064	0.000062	-0.001019	0.005769	0.000037	0.000013
41	44	756481.824939	259541.770661	-0.000073	0.000080	-0.004826	0.009736	0.000054	0.000012
41	45	840214.076381	268310.683483	-0.000082	0.000111	-0.012005	0.016960	0.000076	0.000010
42	36	82967.804800	333751.552997	-0.000007	0.000447	-0.001622	0.008607	-0.000002	0.000246
42	37	165925.600303	335118.453588	-0.000013	0.000416	-0.002932	0.008515	-0.000002	0.000245
42	38	248863.378419	337396.438012	-0.000018	0.000368	-0.003671	0.008345	0.000002	0.000243
42	39	331771.133475	340585.231452	-0.000020	0.000305	-0.003686	0.008095	0.000014	0.000241
42	40	414638.863417	344684.449210	-0.000020	0.000235	-0.002985	0.007808	0.000035	0.000240
42	41	497456.571021	349693.596752	-0.000018	0.000161	-0.001793	0.007620	0.000067	0.000237
42	42	580214.265099	355612.069772	-0.000011	0.000094	-0.000601	0.007818	0.000113	0.000235
42	43	662901.961701	362439.154260	-0.000001	0.000041	-0.000227	0.008913	0.000174	0.000232
42	44	745509.685322	370174.026592	0.000013	0.000014	-0.001871	0.011727	0.000253	0.000229
42	45	828027.470107	378815.753628	0.000032	0.000024	-0.007170	0.017495	0.000355	0.000225

Yukarıdaki tabloda;

- 1 : (B,L) coğrafi koordinatları,
- 2 : Kapalı formüller ile hesaplanan (x,y) düzlem dik koordinatlarını,
- 3 : Kuvvet serileri ile hesaplanan (x,y) düzlem koordinat farklarını,
- 4 : (3.2.1) kuvvet serileri ile hesaplanan (x, y) düzlem koordinat farklarını ,
- 5 : (3.2.8) kuvvet serileri ile hesaplanan (x,y) düzlem koordinat farklarını göstermektedir.



Grafik 3.3.1 : Kuvvet serileri ile (B,L) coğrafi koordinatlarından hesaplanan (x,y) düzlem dik koordinatlarının kapalı formüller ile hesaba yaklaşımları

Grafik üzerinde x koordinat farklarına dx , y koordinat farklarına dy gösterimi kullanılmıştır. Bu grafik üzerinde (3.2.1) Jordan/Eggert/ Kneissl kuvvet serileri ile hesap edilen farklar diğer yöntemlerin yanında oldukça büyük değerlere ulaştığından gösterilmemiştir. (3.2.8) serileri ile yani, Knorr kuvvet serilerinden elde edilen formüllerle hesaplanan koordinatların; kapalı formüller kullanılarak hesap edilen koordinatlara daha iyi yaklaştığı görülmüştür.

3.4. Sayısal Örnekler

(B,L) coğrafi koordinatlarından (x,y) düzlem dik koordinatlarının kuvvet serileri kullanılarak hesabı için aynı problem verileri, üç değişik yöntemle hesaplanmıştır.

<u>Verilenler</u>	<u>İstenenler</u>
$P_0(B_0= 39^\circ, L_0= 35^\circ) P (B=40^\circ, L=45^\circ)$	$P(x,y)$
$\Delta B = B_0 - B = 1^\circ \quad \Delta L = L_0 - L = 10^\circ$	

a) (3.1.9) formülleri ile;

$a_{01} \Delta L = 866\,302.995365$	$a_{10} \Delta B = 111\,018.558701$
$a_{11} \Delta B \Delta L = -12\,193.959724$	$a_{20} \Delta B^2 = 9.581607$
$a_{21} \Delta B^2 \Delta L = -1.052387$	$a_{02} \Delta L^2 = 47\,576.116816$
$a_{03} \Delta L^3 = -1\,741.874689$	$a_{30} \Delta B^3 = 5.638042$
$a_{31} \Delta B^3 \Delta L = -0.619266$	$a_{12} \Delta B \Delta L^2 = -669.674762$
$a_{13} \Delta B \Delta L^3 = 24.518384$	$a_{40} \Delta B^4 = 0.019910$
$a_{41} \Delta B^4 \Delta L = -0.002187$	$a_{22} \Delta B^2 \Delta L^2 = -0.057794$
$a_{23} \Delta B^2 \Delta L^3 = 0.002116$	$a_{04} \Delta L^4 = -47.830629$
$a_{05} \Delta L^5 = 1.050716$	$a_{50} \Delta B^5 = 0.000601$
$a_{15} \Delta B \Delta L^5 = -0.014790$	$a_{32} \Delta B^3 \Delta L^2 = -0.034009$
$a_{33} \Delta B^3 \Delta L^3 = 0.001255$	$a_{14} \Delta B \Delta L^4 = 0.673257$
$a_{51} \Delta B^5 \Delta L = -0.000069$	$a_{24} \Delta B^2 \Delta L^4 = 0.000058$
$a_{07} \Delta L^7 = -0.000302$	$a_{42} \Delta B^4 \Delta L^2 = -0.000119$
$y = 852\,391.0444 \text{ m}$	$a_{16} \Delta B \Delta L^6 = -0.000271$
	$a_{34} \Delta B^3 \Delta L^4 = 0.000012$
	$a_{06} \Delta L^6 = 0.019235$
	$a_{60} \Delta B^6 = 0.000006$
	$x = 157\,893.0107 \text{ m}$

Sayısal örnekteki başlangıç enlemine bağlı hesaplanan (3.1.11) sabit katsayıları aşağıda verilmiştir:

$a_{01} = 4\,963\,550.541397,$	$a_{10} = 6\,360\,894.861189$
$a_{11} = -4\,003\,040.841470,$	$a_{20} = 31\,454.560970$
$a_{21} = -19\,794.440856,$	$a_{02} = 1\,561\,831.783854$
$a_{03} = -32\,630.862990,$	$a_{30} = 1\,060\,464.599722$
$a_{31} = -667\,371.996592,$	$a_{12} = -1\,259\,597.613871$
$a_{13} = 264\,230.154309,$	$a_{40} = 214\,570.514245$
$a_{41} = -135\,033.381262,$	$a_{22} = -6\,228.382725$
$a_{23} = 1\,306.578766,$	$a_{04} = -51\,546.195704$
$a_{05} = 6\,487.814408,$	$a_{50} = 370\,866.630733$
$a_{15} = -5\,232.340404,$	$a_{32} = -209\,995.402935$
$a_{33} = 44\,402.683816,$	$a_{14} = 41\,571.356009$
$a_{51} = -243\,854.597153,$	$a_{24} = -42\,036.834554$
$a_{07} = -61.177642,$	$a_{06} = 680.485650$
$a_{60} = 208\,767.008993,$	$a_{16} = -548.803085$
$a_{34} = 2424.134382$	

b) (3.2.1) formülleri kullanılarak ;

$a_{01} \Delta L = 866\,302.995365$	$a_{10} \Delta B = 111\,018.558701$
$a_{11} \Delta B \Delta L = -12\,193.960561$	$a_{20} \Delta B^2 = 9.581123$
$a_{21} \Delta B^2 \Delta L = -1.052363$	$a_{02} \Delta L^2 = 47\,576.116814$
$a_{03} \Delta L^3 = -1\,741.874689$	$a_{30} \Delta B^3 = 5.638046$
$a_{31} \Delta B^3 \Delta L = -0.619155$	$a_{12} \Delta B \Delta L^2 = -669.674808$
$a_{13} \Delta B \Delta L^3 = 24.517975$	$a_{40} \Delta B^4 = 0.019915$
$a_{41} \Delta B^4 \Delta L = -0.002196$	$a_{22} \Delta B^2 \Delta L^2 = -0.058271$
$a_{23} \Delta B^2 \Delta L^3 = 0.000000$	$a_{04} \Delta L^4 = -47.830629$
$a_{05} \Delta L^5 = 1.050716$	$a_{50} \Delta B^5 = 0.000601$
$y = 852\,391.0551 \text{ m}$	$a_{32} \Delta B^3 \Delta L^2 = -0.034138$
	$a_{14} \Delta B \Delta L^4 = 0.676009$
	$x = 157\,892.9934 \text{ m}$

Sayısal örnekteki başlangıç enlemine bağlı hesaplanan (3.2.2) sabit katsayıları aşağıda verilmiştir:

$a_{01} = 4\,963\,550.541398,$	$a_{10} = 6\,360\,894.861189$
$a_{11} = -4\,003\,041.116001,$	$a_{20} = 31\,452.971358$
$a_{21} = -19\,793.996235,$	$a_{02} = 1\,561\,831.783854$
$a_{03} = -32\,630.862990,$	$a_{30} = 1\,060\,465.505579$
$a_{31} = -667\,252.004949,$	$a_{12} = -1\,259\,597.700255$
$a_{13} = 264\,225.739336,$	$a_{40} = 214\,619.376214$
$a_{41} = -135\,618.715126,$	$a_{22} = -6\,279.721660$
$a_{23} = 0.000000,$	$a_{04} = -51\,546.195704$
$a_{05} = 6\,487.815749,$	$a_{50} = 370\,825.879899$
$a_{15} = -5\,232.340404,$	$a_{32} = -210\,791.073517$
$a_{14} = 41\,571.286253$	

c) (3.2.9) formülleri ile ;

$cs_3 = 1.008490832227,$	$cs_4 = 1.012359722804$
$cs_5 = 7.105506215267,$	$cs_6 = 29.66296768008$
$a_1 = 6\,360\,894.862964,$	$a_2 = 31\,454.5522386$
$a_3 = 1\,060\,463.312243,$	$a_4 = 214\,632.820810$
$a_5 = 370\,548.831779,$	$a_6 = 207\,927.219336$
$a_{10} = 6\,360\,894.862965,$	$a_{01} = 7\,887\,159.882294$
$a_{11} = -6\,360\,894.862964,$	$a_{21} = -31\,454.552385$
$a_{03} = -1\,314\,526.647049,$	$a_{31} = -1\,060\,463.312243$
$a_{31} = 1\,060\,149.144101,$	$a_{41} = -370\,548.831779$
$a_{15} = -53\,007.457191,$	$a_{07} = -1\,564.912675$
$a_{23} = 5\,242.425398,$	$a_{05} = 65\,726.332352$
$a_{61} = -207\,927.219336,$	$a_{43} = 35\,772.136802$
$a_{25} = -262.121270,$	$a_{20} = 31\,454.552386$
$a_{02} = 3\,943\,579.941146,$	$a_{30} = 1\,060\,463.312243$
$a_{12} = -3\,180\,447.431482,$	$a_{14} = 265\,037.285957$
$a_{40} = 214\,632.820810,$	$a_{60} = 207\,927.219336$
$a_{42} = -107\,316.410405,$	$a_{24} = 1\,310.606349$
$a_{06} = 10\,954.388725,$	$a_{22} = -15\,727.276193$
$a_{04} = -328\,631.661762,$	$a_{50} = 370\,548.831779$
$a_{32} = -530\,231.656122,$	$a_{52} = -185\,274.418897$
$a_{16} = -8\,834.576199,$	$a_{34} = 44\,185.971343,$

$$\Delta B = B_0 - B = 1^\circ \quad \Delta L = L_0 - L = 10^\circ \quad \Delta L' = \Delta L \sin B_0$$

$a_{01} \Delta L'$	= 866 302.995366	$a_{10} \Delta B$	= 111 018.558732
$a_{11} \Delta B \Delta L'$	= -12 193.959728	$a_{20} \Delta B^2$	= 9.581605
$a_{21} \Delta B^2 \Delta L'$	= -1.052416	$a_{02} \Delta L'^2$	= 47 576.116814
$a_{03} \Delta L'^3$	= -1 741.874689	$a_{30} \Delta B^3$	= 5.638035
$a_{31} \Delta B_3 \Delta L'$	= -0.619266	$a_{12} \Delta B \Delta L'^2$	= -669.674762
$a_{13} \Delta B \Delta L'^3$	= 24.518384	$a_{40} \Delta B^4$	= 0.019916
$a_{41} \Delta B^4 \Delta L'$	= -0.002188	$a_{22} \Delta B^2 \Delta L'^2$	= -0.057797
$a_{23} \Delta B^2 \Delta L'^3$	= 0.002116	$a_{04} \Delta L'^4$	= -47.830629
$a_{05} \Delta L'^5$	= 1.050716	$a_{50} \Delta B^5$	= 0.000600
$a_{51} \Delta B^5 \Delta L'$	= -0.000066	$a_{32} \Delta B^3 \Delta L'^2$	= -0.034009
$a_{15} \Delta B \Delta L'^5$	= -0.014790	$a_{14} \Delta B \Delta L'^4$	= 0.673257
$a_{33} \Delta B^3 \Delta L'^3$	= 0.001245	$a_{42} \Delta B^4 \Delta L'^2$	= -0.000120
$a_{61} \Delta B^6 \Delta L'$	= -0.000001	$a_{24} \Delta B^2 \Delta L'^4$	= 0.000058
$a_{25} \Delta B^2 \Delta L'^5$	= -0.000001	$a_{06} \Delta L'^6$	= 0.019235
$a_{07} \Delta L'^7$	= -0.000302	$a_{60} \Delta B^6$	= 0.000006
		$a_{52} \Delta B^5 \Delta L'^2$	= -0.000004
$y = 852\,391.0444 \text{ m}$		$a_{34} \Delta B^3 \Delta L'^4$	= 0.000034
		$a_{16} \Delta B \Delta L'^6$	= -0.000271
		$x = 157\,893.0107 \text{ m}$	

4. KUVVET SERİLERİ İLE (x,y) DÜZLEM DİK KOORDİNATLARINDAN (B,L) COĞRAFİ KOORDİNATLARININ HESABI

4.1. Kuvvet Serileri İle (x,y)'den (ΔB,ΔL) Hesabı

Düzlem dik koordinatlardan coğrafi koordinatları elde edebilmek için; coğrafi koordinatların hesabında olduğu gibi $(\Delta q + i\Delta L) = g(x+iy)$ şeklinde izometrik parametreler oluşturulur. Böylece reel ve imajiner kısımların ayrılması ve karşılıklı olarak birbirine eşitlenmesi ile coğrafi koordinat farkları elde edilir.

Fonksiyonun taylor serisi açılımı B_0 başlangıcında yazılırsa; $y=0$ ve $\Delta L=0$ için $\Delta q=g(x)$ yazılabileceğinden

$$(\Delta q + i\Delta L) = \left(\frac{dq}{dx}\right)_0 (x+iy) + \left(\frac{d^2q}{dx^2}\right)_0 (x+iy)^2 + \left(\frac{d^3q}{dx^3}\right)_0 (x+iy)^3 + \left(\frac{d^4q}{dx^4}\right)_0 (x+iy)^4 + \dots$$

ifadesi geçerlidir. Bu ifadede ilgili katsayılar b_i sembolleri ile gösterilerek tasvir denklemleri

$$(\Delta q + i\Delta L) = b_1(x+iy) + b_2(x+iy)^2 + b_3(x+iy)^3 + b_4(x+iy)^4 + b_5(x+iy)^5 + b_6(x+iy)^6 + b_7(x+iy)^7 + b_8(x+iy)^8 \quad (4.1.1)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki b_i katsayılarının ilgili 1.inci terimi B_0 'daki değerinin ilk türevi olan $\frac{dq}{dx}$; daha önce elde edilen $\frac{dx}{dq}$ 'nun tersi alınarak bulunur. Yüksek dereceden terimler türev alınarak elde edilir.

$$b_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n q}{dx^n}\right)_0$$

genel bağıntısına göre;

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{N_0 \cos B_0}, & b_2 &= \frac{1}{2 N_0^2 \cos B_0} t_0, & b_3 &= \frac{1}{3 N_0^3 \cos B_0} t_0^2 \\ b_4 &= \frac{1}{4 N_0^4 \cos B_0} t_0^3, & b_5 &= \frac{1}{5 N_0^5 \cos B_0} t_0^4, & b_6 &= \frac{1}{6 N_0^6 \cos B_0} t_0^5 \\ b_7 &= \frac{1}{7 N_0^7 \cos B_0} t_0^6, & b_8 &= \frac{1}{8 N_0^8 \cos B_0} t_0^7 \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

olarak B_0 'a bağlı b_i sabit katsayıları elde edilir.

Böylece izometrik enlem farkı Δq ve coğrafi boylam farkı ΔL (4.1.1) formülünde $(x+iy)$ kuvvetlerinin teşkil edilerek [Ek -6] yerlerine konmasından sonra reel ve imajiner kısımların ayrılması ile düzlem dik koordinatlar cinsinden ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}\Delta q = & b_1x + b_2(x^2 - y^2) + b_3(x^3 - 3xy^2) + b_4(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + b_5(x^5 - 10x^3y^2 + 5x^4y) + \\ & b_6(x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6) + b_7(x^7 - 21x^5y^2 + 35x^3y^4 - 7x^4y^5) + \\ & b_8(x^8 - 28x^6y^2 + 70x^4y^4 - 28x^2y^6 - y^8)\end{aligned}\quad (4.1.3)$$

$$\begin{aligned}\Delta L = & b_1y + 2b_2xy + b_3(3x^2y - y^3) + b_4(4x^3y - 4xy^3) + b_5(5x^4y - 10x^2y^3 + y^5) + \\ & b_6(6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5) + b_7(7x^6y - 35x^4y^3 + 21x^2y^5 - y^7) + \\ & b_8(8x^7y - 56x^5y^3 + 56x^3y^5 - 8xy^7)\end{aligned}$$

Koordinat dönüşümünün (x,y) ile (q,L) arasında değil (x,y) arasında düzenlenmesi istendiğinden; Δq izometrik enlem farkından ΔB coğrafi enlem farkına geçiş yapılmalıdır.

İzometrik enlem farkından coğrafi enlem farkına dönüşüm için;

$$\Delta B = d_1\Delta q + d_2\Delta q^2 + d_3\Delta q^3 + d_4\Delta q^4 + d_5\Delta q^5 + d_6\Delta q^6 + d_7\Delta q^7 + \quad (4.1.4)$$

serisi kullanılır [2]. Buradan;

$$d_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n B}{dq^n} \right)_0$$

genel formülüne göre türevleri oluşturulur [Ek -7].

$$\begin{aligned}d_1 &= \cos B_0 (1 + \eta_0^2), & d_2 &= \frac{1}{2} \cos^2 B_0 t_0 (-1 - 4\eta_0^2 - 3\eta_0^4) \\ d_3 &= \frac{1}{6} \cos^3 B_0 (-1 + t_0^2 - 5\eta_0^2 + 13t_0^2\eta_0^2 - 7\eta_0^4 + 27t_0^2\eta_0^4) \\ d_4 &= \frac{1}{24} \cos^4 B_0 t_0 (5 - t_0^2 + 56\eta_0^2 - 40t_0^2\eta_0^2), & d_5 &= \frac{1}{120} \cos^5 B_0 (5 - 18t_0^2 + t_0^4) \\ d_6 &= \frac{1}{720} \cos^6 B_0 t_0 (-61 + 58t_0^2 - 61\eta_0^2 - t_0^4 + 58t_0^2\eta_0^2 - t_0^4\eta_0^2) \\ d_7 &= \frac{1}{5040} \cos^7 B_0 (-61 + 479t_0^2 - 179t_0^4 - 122\eta_0^2 + 1080t_0^2\eta_0^2 - 474t_0^4\eta_0^2 - 61\eta_0^4 + 601t_0^2\eta_0^4 + t_0^6)\end{aligned}\quad (4.1.5)$$

Burada d_i ($i=1, \dots, 5$) 'e kadar olan katsayıları [2], [5], [7] ve [10] 'da verilmiştir. Daha yüksek dereceden terimler türev alınarak bulunmuştur.

(4.1.3) formülünden Δq 'nun kuvvetleri teşkil edilerek (4.1.4) ' de yerine yazılırsa x ve y kuvvetlerine göre aşağıdaki hesap formülleri elde edilir:

$$\begin{aligned}\Delta B = & b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{12}xy^2 + b_{40}x^4 + b_{22}x^2y^2 + \\ & b_{04}y^4 + b_{14}xy^4 + b_{32}x^3y^2 + b_{50}x^5 + b_{60}x^6 + b_{42}x^4y^2 + \\ & b_{24}x^2y^4 + b_{06}y^6 + b_{70}x^7 + b_{52}x^5y^2 + b_{16}xy^6 + b_{34}x^3y^4\end{aligned}$$

$$B = B_0 + \Delta B \quad (4.1.6)$$

$$\begin{aligned}\Delta L = & b_{01}y + b_{11}xy + b_{21}x^2y + b_{03}y^3 + b_{31}x^3y + b_{13}xy^3 + b_{23}x^2y^3 + \\ & b_{05}y^5 + b_{41}x^4y + b_{51}x^5y + b_{33}x^3y^3 + b_{15}xy^5 + b_{61}x^6y + b_{43}x^4y^3 + \\ & b_{25}x^2y^5 + b_{07}y^7 + b_{71}x^7y + b_{53}x^5y^3 + b_{35}x^3y^5 + b_{17}xy^7\end{aligned}$$

$$L = L_0 + \Delta L$$

şeklinde ifade edilir.

(x,y) düzlem dik koordinatlarından $(\Delta B, \Delta L)$ hesabı için kuvvet seri katsayılarının oluşturulması aşağıda açıklanmıştır:

$$\begin{aligned}b_{10} &= b_1d_1, & b_{20} &= b_2d_1 + b_1^2d_2, & b_{02} &= -b_2d_1 \\ b_{30} &= b_3d_1 + 2b_1b_2d_2 + b_1^3d_3, & b_{12} &= -3b_3d_1 - 2b_1b_2d_2 \\ b_{22} &= -b_4d_1 + (-6b_1b_3 - 2b_2^2)d_2 - 3b_1^2b_2d_3, & b_{04} &= b_4d_1 + b_2^2d_2 \\ b_{40} &= b_4d_1 + (2b_1b_3 + b_2^2)d_2 + 3b_1^2b_2d_3 + b_1^4d_4 \\ b_{50} &= b_5d_1 + (2b_1b_4 + 2b_2b_3)d_2 + (3b_1^2b_3 + 3b_1b_2^2)d_3 + 4b_1^3b_2d_4 + b_1^5d_5 \\ b_{32} &= -10b_5d_1 + (-12b_1b_4 - 8b_2b_3)d_2 + (-9b_1^2b_3 - 6b_1b_2^2)d_3 - 4b_1^3b_2d_4 \\ b_{14} &= 5b_5d_1 + (2b_1b_4 + 6b_2b_3)d_2 + 3b_1b_2^2d_3 \\ b_{60} &= b_6d_1 + (2b_1b_5 + 2b_2b_4 + b_3^2)d_2 + (3b_1^2b_4 + 6b_1b_2b_3 + b_2^3)d_3 + \\ & (4b_1^3b_3 + 6b_1^2b_2^2)d_4 + 5b_1^4b_2d_5 + b_1^6d_6\end{aligned} \quad (4.1.7)$$

$$b_{42} = -15b_6d_1 + (-20b_1b_5 - 14b_2b_4 - 6b_3^2)d_2 + (-18b_1^2b_4 - 24b_1b_2b_3 - 3b_2^3)d_3 + (-12b_1^3b_3 - 12b_1^2b_2^2)d_4 - 5b_1^4b_2d_5$$

$$b_{24} = 15b_6d_1 + (10b_1b_5 + 14b_2b_4 + 9b_3^2)d_2 + (3b_1^2b_4 + 18b_1b_2b_3 + 3b_2^3)d_3 + 6b_1^2b_2^2d_4$$

$$b_{06} = -b_6d_1 - 2b_2b_4d_2 - b_3^2d_3$$

$$b_{70} = b_7d_1 + (2b_1b_6 + 2b_2b_5 + 2b_3b_4)d_2 + (3b_1^2b_5 + 6b_1b_2b_4 + 3b_1b_3^2 + 3b_2^2b_3)d_3 + (4b_1^3b_4 + 12b_1^2b_2b_3 + 4b_1b_2^3)d_4 + (10b_1^3b_2^2 + 5b_1^4b_3)d_5 + 6b_1^5b_2d_6 + b_1^7d_7$$

$$b_{52} = -21b_7d_1 + (-30b_1b_6 - 22b_2b_5 - 18b_3b_4)d_2 + (-30b_1^2b_5 - 42b_1b_2b_4 - 18b_1b_3^2 - 15b_2^2b_3)d_3 + (-24b_1^3b_4 - 48b_1^2b_2b_3 - 12b_1b_2^3)d_4 + (-20b_1^3b_2^2 - 15b_1^4b_3)d_5 - 6b_1^5b_2d_6$$

$$b_{34} = 35b_7d_1 + (30b_1b_6 + 30b_2b_5 + 38b_3b_4)d_2 + (15b_1^2b_5 + 42b_1b_2b_4 + 27b_1b_3^2 + 21b_2^2b_3)d_3 + (4b_1^3b_4 + 36b_1^2b_2b_3 + 12b_1b_2^3)d_4 + 10b_1^3b_2^2d_5 + b_1^7d_7$$

$$b_{16} = -7b_7d_1 + (-2b_1b_6 - 10b_2b_5 - 6b_3b_4)d_2 + (-6b_1b_2b_4 - 9b_2^2b_3)d_3 - 4b_1b_2^3d_4$$

$$b_{01} = b_1, \quad b_{11} = 2b_2, \quad b_{21} = 3b_3, \quad b_{03} = -b_3, \quad b_{31} = 4b_4$$

$$b_{13} = -4b_4, \quad b_{41} = 5b_5, \quad b_{23} = -10b_5, \quad b_{05} = b_5, \quad b_{51} = 6b_6$$

$$b_{33} = -20b_6, \quad b_{15} = 6b_6, \quad b_{61} = 7b_7, \quad b_{43} = -35b_7, \quad b_{25} = 21b_7$$

$$b_{07} = -b_7, \quad b_{71} = 8b_8, \quad b_{53} = -56b_8, \quad b_{35} = 56b_8, \quad b_{17} = -8b_8$$

Seri katsayılarında gerekli olan işlemler ve yardımcı fonksiyon dönüşümü yapılarak katsayılar kısaltılmıştır. Bu b_{ij} katsayıları;

$$b_{10} = \frac{1}{N_0} (1 + \eta_0^2), \quad b_{20} = \frac{3t_0\eta_0^2}{2N_0^2} (-1 - \eta_0^2)$$

$$b_{02} = \frac{1}{2N_0^2} t_0 (-1 - \eta_0^2), \quad b_{30} = \frac{1}{6N_0^3} (-1 - 5\eta_0^2 + 3t_0^2\eta_0^2 - 7\eta_0^4 + 18t_0^2\eta_0^4)$$

$$b_{12} = \frac{1}{2N_0^3} (t_0^2 + 2t_0^2\eta_0^2 + 3\eta_0^4), \quad b_{40} = \frac{1}{24N_0^4} (-1 + 26\eta_0^2 - 42\eta_0^4 + 19t_0^2\eta_0^4)$$

$$\begin{aligned}b_{22} &= \frac{1}{4 N_0^4} t_0 (1 - 2t_0^2 + 5\eta_0^2 + t_0^2\eta_0^2 + 7\eta_0^4 - 12t_0^2\eta_0^4) \\b_{04} &= \frac{1}{8 N_0^4} t_0^3 (1 - 2\eta_0^2 - \eta_0^4) \\b_{14} &= \frac{1}{8 N_0^5} t_0^2 (-1 + 3t_0^2 - 5\eta_0^2 + 3t_0^2\eta_0^2 - 7\eta_0^4 + 9t_0^2\eta_0^4) \\b_{32} &= \frac{1}{12 N_0^5} t_0^2 (4 - 6t_0^2 - 11\eta_0^2 + 3t_0^2\eta_0^2 + 63\eta_0^4 - 165t_0^2\eta_0^4) \quad (4.1.8) \\b_{50} &= \frac{1}{120 N_0^5} (5 - 3t_0^2 + 385t_0^2\eta_0^2 - 121t_0^4\eta_0^2 - 245t_0^2\eta_0^4 + 795t_0^4\eta_0^4) \\b_{60} &= \frac{1}{720 N_0^6} t_0 (14 - 12t_0^2 + 3693t_0^2\eta_0^2 - 1575\eta_0^4 - 165t_0^2\eta_0^4 - 1452t_0^4\eta_0^2) \\b_{42} &= \frac{1}{48 N_0^6} t_0^3 (-5 + 20t_0^2 - 429t_0^2\eta_0^2 - 24t_0^4 + 497t_0^2\eta_0^4 + 133t_0^4\eta_0^2) \\b_{24} &= \frac{1}{48 N_0^6} (-18t_0^2 + 3t_0^2\eta_0^2 + 36t_0^4 - 231t_0^2\eta_0^4 - 27t_0^4\eta_0^2) \\b_{06} &= \frac{1}{48 N_0^6} t_0^3 (1 + 5\eta_0^2 - 3t_0^2 + 3t_0^2\eta_0^2 + 7\eta_0^4 - 9t_0^2\eta_0^4) \\b_{70} &= \frac{1}{5040 N_0^7} (-61 - 122\eta_0^2 + 73 t_0^2 + 1080t_0^2\eta_0^2 + 1564t_0^4 - 61\eta_0^4 - 335\eta_0^6 - 1586t_0^4\eta_0^2 + 601t_0^2\eta_0^4) \\b_{52} &= \frac{1}{240 N_0^7} t_0^2 (-39 - 107t_0^2 - 120 t_0^4 - 5830t_0^2\eta_0^2 + 2117t_0^4\eta_0^2 + 4060t_0^2\eta_0^4) \\b_{16} &= \frac{1}{48 N_0^7} t_0^4 (7 - 15t_0^2 + 4\eta_0^2 + 12t_0^2\eta_0^2 - 84\eta_0^4 - 192t_0^2\eta_0^4) \\b_{34} &= \frac{1}{240 N_0^7} t_0^2 (25 - 185t_0^2 - 180 t_0^4 + 2160t_0^2\eta_0^2 - 1280t_0^4\eta_0^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{01} &= \frac{1}{N_0 \cos B_0}, & b_{11} &= \frac{1}{N_0^2 \cos B_0} t_0, & b_{21} &= \frac{1}{N_0^3 \cos B_0} t_0^2 \\ b_{03} &= -\frac{1}{3 N_0^3 \cos B_0} t_0^2, & b_{31} &= \frac{1}{N_0^4 \cos B_0} t_0^3, & b_{13} &= -\frac{1}{N_0^4 \cos B_0} t_0^3 \\ b_{23} &= -\frac{2}{N_0^5 \cos B_0} t_0^4, & b_{05} &= \frac{1}{5 N_0^5 \cos B_0} t_0^4, & b_{41} &= \frac{1}{N_0^5 \cos B_0} t_0^4 \\ b_{51} &= \frac{1}{N_0^6 \cos B_0} t_0^5, & b_{33} &= -\frac{10}{3 N_0^6 \cos B_0} t_0^5, & b_{15} &= \frac{1}{N_0^6 \cos B_0} t_0^5 \\ b_{61} &= \frac{1}{N_0^7 \cos B_0} t_0^6, & b_{43} &= -\frac{5}{N_0^7 \cos B_0} t_0^6, & b_{25} &= \frac{3}{N_0^7 \cos B_0} t_0^6 \\ b_{07} &= -\frac{1}{7 N_0^7 \cos B_0} t_0^6, & b_{71} &= \frac{1}{N_0^8 \cos B_0} t_0^7, & b_{53} &= -\frac{7}{N_0^8 \cos B_0} t_0^7 \\ b_{35} &= \frac{7}{N_0^8 \cos B_0} t_0^7, & b_{17} &= -\frac{1}{7 N_0^8 \cos B_0} t_0^7 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Bir çözüm yolu da aşağıdaki şekilde verilmiştir. Bu çözüm yönteminde (4.1.3) formülünde izometrik enlemden coğrafi enleme dönüşüm için kuvvetler oluşturmadan;

$$\begin{aligned} \Delta q &= b_1 x + b_2 (x^2 - y^2) + b_3 (x^3 - 3xy^2) + b_4 (x^4 - 6x^2 y^2 + y^4) + b_5 (x^5 - 10x^3 y^2 + 5x y^4) + \\ & b_6 (x^6 - 15x^4 y^2 + 15x^2 y^4 - y^6) + b_7 (x^7 - 21x^5 y^2 + 35x^3 y^4 - 7x y^6) + \\ & b_8 (x^8 - 28x^6 y^2 + 70x^4 y^4 - 28x^2 y^6 - y^8) \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

seri formülleri ile Δq izometrik enlem farkı bulunur. Coğrafi enlem için

$$q = q_0 + \Delta q$$

$$\chi = \arcsin (\tan h q)$$

$$B - \chi = c_2 \sin 2\chi + c_4 \sin 4\chi + c_6 \sin 6\chi + c_8 \sin 8\chi \quad (4.1.10)$$

$$B = (B - \chi) + \chi$$

dönüşüm serileri kullanılır [9]. Buradaki sabit katsayılar [Ek -1] 'de verilmiştir. Coğrafi boylam ise (2.4.2) bağıntısından bulunur.

4.2. Diğer Seri Çözüm Yöntemleri

Bölüm 3.2'de kullanılmış olan JORDAN / EGGERT / KNEISSL serileri (4.1.2) ve (4.1.5) de verilen b_i ve d_i katsayılarının, 5. dereceye kadar açılımını vermektedir [5]. Bu serilere göre (x,y) düzlem dik koordinatlarından (B,L) coğrafi koordinatlarının hesabı için seriler aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}\Delta B &= b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{12}xy^2 + b_{40}x^4 + \\ &\quad b_{22}x^2y^2 + b_{04}y^4 + b_{50}x^5 + b_{14}xy^4 + b_{32}x^3y^2 + \\ B &= B_0 + \Delta B\end{aligned}\quad (4.2.1)$$

$$\begin{aligned}\Delta L &= b_{01}y + b_{11}xy + b_{21}x^2y + b_{03}y^3 + b_{31}x^3y + b_{13}xy^3 + \\ &\quad b_{23}x^2y^3 + b_{05}y^5 + b_{41}x^4y + \\ L &= L_0 + \Delta L\end{aligned}$$

Formüldeki B_0 bağılı sabit katsayılar;

$$\begin{aligned}b_{10} &= \frac{1}{N_0} (1 + \eta_0^2), & b_{01} &= \frac{1}{N_0 \cos B_0}, & b_{20} &= \frac{3}{2 N_0^2} t_0 \eta_0^2 (-1 - \eta_0^2) \\ b_{11} &= \frac{1}{N_0^2 \cos B_0} t_0, & b_{02} &= \frac{1}{2 N_0^2} t_0 (-1 - \eta_0^2), & b_{21} &= \frac{1}{N_0^3 \cos B_0} t_0^2 \\ b_{12} &= \frac{1}{2 N_0^3} (-t_0^2 + 2\eta_0^2 t_0^2 + 3\eta_0^4 t_0^2), & b_{03} &= -\frac{1}{3 N_0^3 \cos B_0} t_0^2, & b_{40} &= \frac{1}{24 N_0^4} t_0 (-1 + 26\eta_0^2) \\ b_{30} &= \frac{1}{6 N_0^3} (-1 - 5\eta_0^2 + 3\eta_0^2 t_0^2 - 7\eta_0^4 + 18\eta_0^4 t_0^2), & b_{13} &= -\frac{1}{N_0^4 \cos B_0} t_0^3 & (4.2.2) \\ b_{31} &= \frac{1}{N_0^4 \cos B_0} t_0^3, & b_{22} &= \frac{1}{4 N_0^4} t_0 (1 - 2t_0^2 + 5\eta_0^2 + \eta_0^2 t_0^2), & b_{04} &= \frac{1}{8 N_0^4} t_0^3 (1 - 2\eta_0^2) \\ b_{50} &= \frac{1}{120 N_0^5} (5 - 3t_0^2), & b_{41} &= \frac{1}{N_0^5 \cos B_0} t_0^4, & b_{32} &= \frac{1}{6 N_0^5} t_0^2 (2 - 3t_0^2) \\ b_{23} &= -\frac{2}{N_0^5 \cos B_0} t_0^4, & b_{14} &= \frac{1}{8 N_0^5} t_0^2 (-1 + 3t_0^2), & b_{23} &= \frac{1}{5 N_0^5 \cos B_0} t_0^4\end{aligned}$$

şeklinde verilmiştir.

4.3. Seri Çözüm Yöntemlerinin Karşılaştırılması

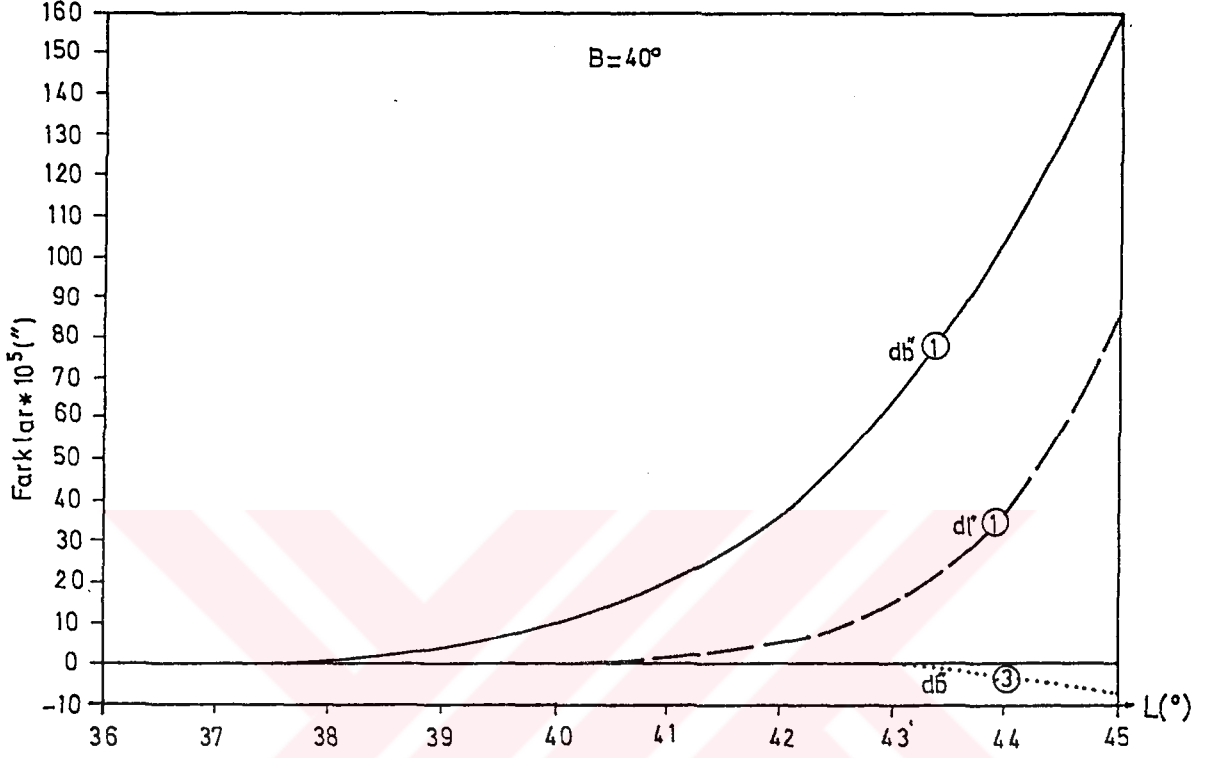
(x,y) düzlem dik koordinatlarından (B,L) coğrafi koordinatların hesabı için verilen kapalı formüllerle hesaplanan koordinatlar kesin koordinatlar olarak kabul edilerek, diğer yöntemlerle hesaplanan koordinatlar kesin koordinatlarla karşılaştırılmıştır. Bunun için $B_0 = 39^\circ$ ve $L_0 = 35^\circ$ koordinat başlangıçlı bir sistemde B coğrafi enlemi için sırasıyla $40^\circ, 41^\circ$ ve 42° değerlerinde seçilmiş ve L coğrafi boylamı içinde 35° den 45° 'ye kadar 1° 'lik aralıklar ile oluşturulan düzlem dik koordinatları [Tablo 3.3.1] 'de verilmiştir. Bu koordinatlardan kapalı formüller kullanılarak (B,L) coğrafi koordinatları hesaplanmış ve her yöntemde hesaplanan koordinatların buna göre farkları oluşturulmuştur [Tablo 4.3.1]. Tablodan 40° enlemindeki değerlerin boylam ve koordinat farklarına göre grafiği çizilmiştir (Grafik 4.3.1).

Tablo 4.3.1: Kuvvet serileri ile hesaplanan (B,L) coğrafi koordinatlarının kapalı formüller ile hesaba yaklaşımları

Düzlem Dik Koordinatlar				1		2		3	
y(m)	x(m)	B°	L°	db"	dl"	db"	dl"	db"	dl"
85409.018828	111502.857679	40	36	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
170807.733848	112909.977448	40	37	0.00000	0.00000	0.00000	-0.00001	0.00000	0.00000
256185.842498	115254.988444	40	38	0.00001	0.00000	0.00003	-0.00007	0.00000	0.00000
341533.044700	118537.607764	40	39	0.00004	0.00000	0.00010	-0.00047	0.00000	0.00000
426839.044104	122757.439390	40	40	0.00009	0.00000	0.00032	-0.00176	0.00000	0.00000
512093.549332	127913.974239	40	41	0.00019	0.00002	0.00084	-0.00491	0.00000	0.00000
597286.275217	134006.590221	40	42	0.00036	0.00005	0.00194	-0.01150	0.00000	0.00000
682406.944046	141034.552320	40	43	0.00063	0.00015	0.00408	-0.02399	0.00000	0.00000
767445.286800	148997.012678	40	44	0.00104	0.00038	0.00793	-0.04592	-0.00003	0.00000
852391.044390	157893.010696	40	45	0.00160	0.00087	0.01444	-0.08234	-0.00007	0.00000
84188.894688	222583.244384	41	36	0.00005	0.00000	-0.00002	-0.00003	0.00000	0.00000
168367.632765	223970.262520	41	37	0.00006	0.00000	0.00000	0.00008	0.00000	0.00000
252526.058848	226281.773488	41	38	0.00007	0.00000	0.00004	0.00033	0.00000	0.00000
336654.020001	229517.498427	41	39	0.00010	0.00000	0.00013	0.00043	0.00000	0.00000
420741.366965	233677.046976	41	40	0.00016	0.00000	0.00034	-0.00042	0.00000	0.00000
504777.955381	238759.917325	41	41	0.00025	0.00000	0.00081	-0.00367	0.00000	0.00000
588753.647014	244765.496272	41	42	0.00041	0.00000	0.00178	-0.01167	0.00000	0.00000
672658.310973	251693.059299	41	43	0.00062	0.00007	0.00366	-0.02798	0.00000	0.00000
756481.824939	259541.770661	41	44	0.00089	0.00026	0.00692	-0.05764	0.00000	0.00000
840214.076381	268310.683483	41	45	0.00121	0.00071	0.01252	-0.10758	0.00000	0.00000
82967.804800	333751.552997	42	36	0.00042	0.00000	-0.00017	-0.00039	0.00000	0.00000
165925.600303	335118.453588	42	37	0.00043	0.00000	-0.00010	-0.00023	0.00000	0.00000
248863.378419	337396.438012	42	38	0.00044	0.00000	-0.00001	0.00082	0.00000	0.00000
331771.133475	340585.231452	42	39	0.00045	0.00000	0.00017	0.00272	0.00000	0.00000
414638.863417	344684.449210	42	40	0.00045	-0.00001	0.00042	0.00478	0.00000	0.00000
497456.571021	349693.596752	42	41	0.00042	-0.00005	0.00084	0.00548	0.00000	0.00000
580214.265099	355612.069772	42	42	0.00034	-0.00012	0.00162	0.00215	0.00001	0.00000
662901.961701	362439.154260	42	43	-0.00014	-0.00021	0.00303	-0.00932	0.00002	0.00000
745509.685322	370174.026592	42	44	-0.00024	-0.00026	0.00555	-0.03482	0.00004	0.00000
828027.470107	378815.753628	42	45	-0.00093	-0.00029	0.00984	-0.08243	0.00006	0.00000

Yukarıdaki tabloda ;

- 1 : (4.1.6) kuvvet serileri ile hesaplanan (B,L) coğrafi koordinat farklarını,
- 2 : (4.2.1) kuvvet serileri ile hesaplanan (B,L) coğrafi koordinat farklarını,
- 3 : (4.1.9) izometrik serileri ve kapalı formüller ile hesaplanan (B,L) coğrafi koordinat farklarını göstermektedir.



Grafik 4.3.1 : Kuvvet serileri ile hesaplanan (B,L) coğrafi koordinatlarının kapalı formüller ile hesaplanan koordinatlara yaklaşımı

Grafikte B coğrafi koordinat farklarına db ve L coğrafi koordinat farklarına dl gösterimi kullanılmıştır.

4.4. Sayısal Örnekler

(x,y) düzlem dik koordinatlardan (B,L) coğrafi koordinatların hesabı için bir örnek sayısal veri grubu üç değişik yöntemle çözülmüştür.

<u>Verilenler</u>	<u>İstenenler</u>
$P_0(B_0= 39^\circ, L_0= 35^\circ)$	$P(B, L)$
$x = 157\,893.0107\text{m}$ $y = 852\,391.0444\text{m}$	

a) (4.1.6) formülleri kullanılarak (4.1.7) formüllerinden hesaplanan katsayılar;

$$\begin{aligned} b_{10} &= 1.572\,105\,8460\,10^{-7}, & b_{20} &= -1.222\,162\,2280\,10^{-16}, & b_{02} &= -9.966\,235\,4350\,10^{-15} \\ b_{30} &= -6.475\,831\,8159\,10^{-22}, & b_{12} &= -1.248\,106\,9689\,10^{-21}, & b_{40} &= -1.810\,732\,3831\,10^{-29} \\ b_{22} &= -3.508\,641\,8995\,10^{-29}, & b_{04} &= 3.956\,135\,6284\,10^{-29}, & b_{50} &= 3.022\,755\,7017\,10^{-36} \\ b_{60} &= 1.513\,910\,9547\,10^{-2}/N_0^6, & & & b_{42} &= -5.256\,684\,8380\,10^{-2}/N_0^6 \\ b_{70} &= -0.154\,863\,4558/N_0^7, & b_{16} &= -0.024\,980\,2235/N_0^7, & b_{52} &= -8.824\,593\,7147\,10^{-2}/N_0^7 \\ b_{06} &= -0.010\,473\,1317/N_0^6, & b_{34} &= -0.419\,012\,5564/N_0^7, & b_{24} &= 0.061\,050\,3629/N_0^6 \\ b_{32} &= 1.428\,209\,0255\,10^{-37}, & b_{14} &= 7.364\,234\,7715\,10^{-39} \\ b_{01} &= 2.014\,686\,8489\,10^{-7}, & b_{11} &= 2.554\,388\,2450\,10^{-14}, & b_{03} &= -1.079\,555\,5828\,10^{-21} \\ b_{21} &= 3.238\,666\,7484\,10^{-21}, & b_{31} &= 4.106\,252\,1829\,10^{-28}, & b_{13} &= -4.106\,2521\,829\,10^{-28} \\ b_{41} &= 5.206\,249\,4538\,10^{-35}, & b_{23} &= -1.041\,249\,8908\,10^{-34}, & b_{05} &= 1.041\,249\,8908\,10^{-35} \\ b_{51} &= 0.448\,067\,5086/N_0^6, & b_{33} &= -1.493\,558\,3620/N_0^6, & b_{61} &= 0.362\,837\,9143/N_0^7 \\ b_{43} &= -1.814\,189\,5713/N_0^7, & b_{25} &= 1.088\,513\,7427/N_0^7, & b_{07} &= -0.051\,833\,9878/N_0^7 \end{aligned}$$

Bilgisayar ortamında BASIC programlama dilinde $10^{\pm 38}$ 'den büyük sayılar ile işlem yapılamadığından formüldeki $1/N_0$ 'lı terimler x ve y ifadesi ile çarpılacağından katsayılarda dışa alınmıştır. Hesaplama sırasında $(x/N_0)^7$ şeklinde işlem yapılır.

$b_{01}y$	= 9.839 410 1019
$b_{11}xy$	= 0.196 975 0972
$b_{21}x^2y$	= 0.003 943 2434
$b_{03}y^3$	=-0.038 307 5409
$b_{13}xy^3$	=-0.002 300 6354
$b_{31}x^3y$	= 0.000 078 9397
$b_{41}x^4y$	= 0.000 001 5803
$b_{23}x^2y^3$	=-0.000 092 1128
$b_{05}y^5$	= 0.000 268 4553
$b_{51}x^5y$	= 0.000 000 0316
$b_{33}x^3y^3$	=-0.000 003 0733
$b_{15}xy^5$	= 0.000 026 8713
$b_{61}x^6y$	= 0.000 000 0006
$b_{43}x^4y^3$	=-0.000 000 0923
$b_{25}x^2y^5$	= 0.000 001 6138
$b_{07}y^7$	=-0.000 002 2396

$b_{10}x$	= 1.422 221 7663
$b_{20}x^2$	=-0.000 174 5731
$b_{02}y^2$	=-0.414 888 6280
$b_{30}x^3$	=-0.000 146 0518
$b_{12}xy^2$	=-0.008 203 8007
$b_{40}x^4$	=-0.000 000 6448
$b_{22}x^2y^2$	=-0.000 036 4137
$b_{04}y^4$	= 0.001 196 6009
$b_{50}x^5$	= 0.000 000 0170
$b_{32}x^3y^2$	= 0.000 000 0234
$b_{14}xy^4$	= 0.000 035 1697
$b_{60}x^6$	= 0.000 000 0002
$b_{42}x^4y^2$	=-0.000 000 0200
$b_{24}x^2y^4$	= 0.000 000 6782
$b_{70}x^7$	=-0.000 000 0001
$b_{06}y^6$	=-0.000 003 3623
$b_{52}x^5y^2$	=-0.000 000 0008
$b_{16}xy^6$	=-0.000 000 1999
$b_{34}x^3y^4$	=-0.000 000 1151

$$\Delta L = 10.000000242^\circ$$

$$\Delta L = 10^\circ 00' 00.0009''$$

$$L = L_0 + \Delta L = 45^\circ 00' 00.0009''$$

$$\Delta B = 1.000000444^\circ$$

$$\Delta B = 1^\circ 00' 00.0016''$$

$$B = B_0 + \Delta B = 40^\circ 00' 00.0016''$$

- b) (4.2.1) formülleri kullanılarak düzlem dik koordinatlardan coğrafi koordinatların hesabı
Bu maksatla önce (4.2.2) formüllerinden sabit katsayılar hesaplanır:

$$\begin{aligned} b_{10} &= 1.572\,105\,8460\,10^{-7}, & b_{20} &= -1.222\,162\,2280\,10^{-16} \\ b_{02} &= -9.966\,235\,4351\,10^{-15}, & b_{30} &= -6.475\,831\,8159\,10^{-22} \\ b_{12} &= -1.2481\,069\,687\,10^{-21}, & b_{40} &= -1.812\,175\,4194\,10^{-29} \\ b_{22} &= -3.508\,465\,2454\,10^{-29}, & b_{04} &= 3.956\,335\,5835\,10^{-29} \\ b_{50} &= 2.377\,968\,0653\,10^{-36}, & b_{32} &= 3.367\,766\,9088\,10^{-37} \\ b_{14} &= 7.459\,988\,2485\,10^{-36} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{01} &= 2.014\,686\,8490\,10^{-7}, & b_{11} &= 2.554\,388\,2450\,10^{-14} \\ b_{03} &= -1.079\,555\,5828\,10^{-21}, & b_{21} &= 3.238\,666\,7484\,10^{-21} \\ b_{31} &= 4.106\,252\,1829\,10^{-28}, & b_{13} &= -4.106\,252\,1829\,10^{-28} \\ b_{41} &= 5.206\,249\,4538\,10^{-35}, & b_{23} &= -1.041\,249\,8908\,10^{-34} \\ b_{05} &= 1.041\,2498\,908\,10^{-35} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{01}y &= 9.839\,410\,1019 & b_{10}x &= 1.422\,221\,7670 \\ b_{11}xy &= 0.196\,975\,0972 & b_{20}x^2 &= -0.000\,174\,5731 \\ b_{21}x^2y &= 0.003\,943\,2434 & b_{02}y^2 &= -0.414\,888\,6281 \\ b_{03}y^3 &= -0.038\,307\,5409 & b_{30}x^3 &= -0.000\,146\,0518 \\ b_{13}xy^3 &= -0.002\,300\,6354 & b_{12}xy^2 &= -0.008\,203\,8007 \\ b_{31}x^3y &= 0.000\,078\,9387 & b_{40}x^4 &= -0.000\,000\,6453 \\ b_{41}x^4y &= 0.000\,001\,5803 & b_{22}x^2y^2 &= -0.000\,036\,4119 \\ b_{23}x^2y^3 &= -0.000\,092\,1128 & b_{04}y^4 &= 0.001\,196\,6613 \\ b_{05}y^5 &= 0.000\,268\,4553 & b_{50}x^5 &= 0.000\,000\,0133 \\ & & b_{32}x^3y^2 &= 0.000\,000\,0552 \\ & & b_{14}xy^4 &= 0.000\,035\,6270 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta L &= 9.999977128'' \\ \Delta L &= 9^{\circ}59'59.9177'' \end{aligned}$$

$$L = L_0 + \Delta L = 44^{\circ}59'59.9177''$$

$$\begin{aligned} \Delta B &= 1.000004011'' \\ \Delta B &= 1^{\circ}00'00.0144'' \end{aligned}$$

$$B = B_0 + \Delta B = 40^{\circ}00'00.0144''$$

c) (4.1.6) formülündeki Δq izometrik serileri ve coğrafi boylam için kapalı formüller kullanılarak (B,L) hesabı:

$$\begin{aligned} N_0 &= 6\,386\,896.1399 \text{ m} \\ q_0 &= 0.736\,055\,609\,485 \text{ radyan} \\ V &= 1.0020417536 \\ R_0 &= N_0 \cot B_0 = 7\,887\,159.8823 \text{ m} \end{aligned}$$

(4.1.2) sabit katsayıları

$$\begin{aligned} b_1 &= 2.014\,686\,848\,979 \cdot 10^{-7}, & b_2 &= 1.277\,194\,122\,502 \cdot 10^{-14} \\ b_3 &= 1.079\,555\,582\,797 \cdot 10^{-21}, & b_4 &= 1.026\,630\,457\,369 \cdot 10^{-28} \\ b_5 &= 1.041\,249\,890\,766 \cdot 10^{-35}, & b_6 &= 7.467\,791\,809\,963 \cdot 10^{-2} / N_0^6 \\ b_7 &= 0.051\,833\,987\,751 / N_0^7, & b_8 &= 0.036\,727\,543\,700 / N_0^8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta q &= 0.031\,810\,497\,219 \\ &- 0.008\,961\,308\,541 \\ &- 0.000\,367\,291\,693 \\ &+ 0.000\,043\,099\,725 \\ &+ 0.000\,004\,042\,761 \\ &- 0.000\,000\,212\,226 \\ &- 0.000\,000\,042\,168 \\ &+ 0.000\,000\,000\,446 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta q &= 0.022\,528\,785\,522 \text{ radyan} \\ q_0 &= 0.736\,055\,609\,485 \text{ radyan} \end{aligned}$$

$$q = 0.758\,843\,950\,067 \text{ radyan}$$

$$B = 39^\circ 59'59.99993''$$

$$L = 45^\circ 00'00.00000''$$

5. DOĞRULTU VE UZUNLUK İNDİRGEMELERİ

5.1. Doğrultu İndirgemesi

Konform konik tasvirde konformluktan dolayı T semti aynı zamanda elipsoid üzerindeki doğrultusunda semtidir. Buna göre doğrultu indirgemesi;

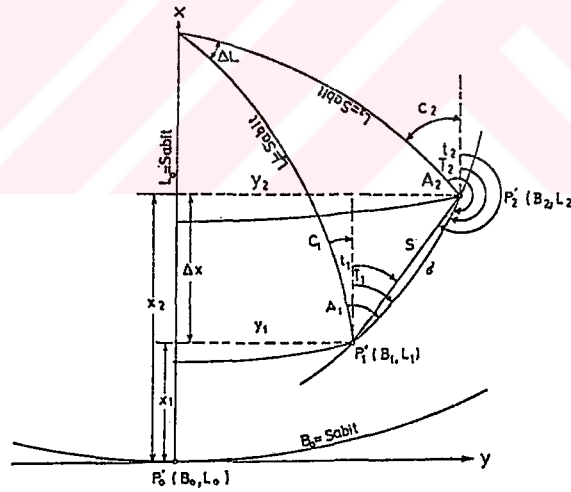
$$\delta = T - t \quad \text{veya} \quad t = T - \delta \quad (5.1.1)$$

olarak genel şekliyle ifade edilir. Belli bir doğrultu için düzlem t sabit olduğundan $d\delta$ sadece dT 'ye bağlı olup $d\delta = dT$ yazılabilir. Azimut, semt ve konvergens arasındaki ilişki dikkate alınarak;

$$c = \sin B_0 \Delta L$$

$$T = A - c \quad dT = dA - dc \quad (5.1.2)$$

yazılabilir. Bessel denkleminde hareket edilerek [2] ;



Şekil 5.1.1: Tasvir düzleminde doğrultu indirgemesi

$$\frac{dA}{d\Delta L} = \sin B, \quad dA = d\Delta L \sin B \quad (5.1.3)$$

olarak yazılır. O halde diferansiyel alınarak

$$d\delta = dT = d\Delta L \sin B - d\Delta L \sin B_0, \quad d\delta = d\Delta L (\sin B - \sin B_0) \quad (5.1.4)$$

ifedeleri teşkil edilebilir.

Yukarıdaki formülde B enlemi için $B = B_0 + \Delta B$ şeklinde düşünerek B_0 noktasında taylor serisine açılırsa;

$$d\delta = d\Delta L(\Delta B \cos B_0 - \frac{1}{2}(\Delta B^2)\sin B_0), \quad d\delta = d\Delta L \cos B_0 (\Delta B - \frac{1}{2} t_0 (\Delta B^2)) \quad (5.1.5)$$

yazılabilir. Buradan (4.1.6) formüllerinde 3. dereceye kadar olan terimler alınarak elde edilen

$$\begin{aligned} \Delta L \cos B_0 &= \frac{1}{N_0} y + \frac{1}{N_0} t_0^2 xy \\ \Delta B &= \frac{1}{N_0}(1+\eta_0^2)x + \frac{3}{2 N_0^2} t_0(-\eta_0^2-\eta_0^4)x^2 + \frac{1}{2 N_0^2} t_0(-1-\eta_0^2) y^2 \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

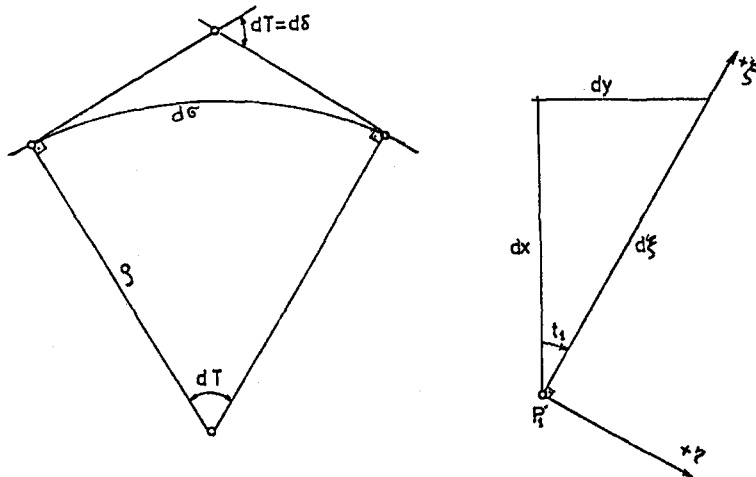
ifadelerinin x ve y'ye göre diferansiyeli alınarak;

$$d\Delta L \cos B_0 = \frac{1}{N_0} dy + \frac{1}{N_0^2} t_0 (xdy+ydx), \quad (\Delta B)^2 = \frac{1}{N_0^2} (1+\eta_0^2)^2 x^2 \quad (5.1.7)$$

bağıntıları bulunur. Bu değerler (5.1.5) 'de yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned} d\delta &= \frac{1}{N_0^2} (1+\eta_0^2) x dy + \frac{1}{2N_0^3} t_0 (1-3\eta_0^2-4\eta_0^4)x^2 dy + \\ &\quad \frac{1}{N_0^3} t_0 (1+\eta_0^2)xy dx + \frac{1}{2N_0^3} t_0 (-1-\eta_0^2)y^2 dy \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

şeklinde doğrultu indirgemesinin diferansiyelini veren denklem elde edilir. Doğrultu indirgemesinin formülünü çıkarabilmek için lokal koordinat sistemi oluşturulur [5].



Şekil 5.1.2: Doğrultu indirgemesinin lokal koordinat sistemi üzerinde gösterimi

P_1P_2 yayının σ tasvirinin eğrilik yarıçapı ρ ; yay elemanı $d\sigma$ ve bu yay elemanı $P_1'P_2'$ doğrusu üzerindeki izdüşümü $d\xi$ ise ρ nun pozitif olması halinde;

$$\rho dT = \rho d\delta = d\sigma \equiv d\xi \quad (5.1.9)$$

olarak ifade edilebilir [5]. Öyleyse; $\frac{1}{\rho} = \frac{d\delta}{d\xi}$ olur.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} = \frac{d\delta}{d\xi} &= \frac{1}{N_0^2} (1+\eta_0^2) x \frac{dy}{d\xi} + \frac{1}{2N_0^3} t_0 (1-3\eta_0^2-4\eta_0^4) x^2 \frac{dy}{d\xi} + \\ &\frac{1}{N_0^3} t_0 (1+\eta_0^2) xy \frac{dx}{d\xi} + \frac{1}{2N_0^3} t_0 (-1-\eta_0^2) y^2 \frac{dy}{d\xi} \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

Şekil (5.1.2) deki P_1' başlangıçlı (ξ, η) lokal koordinat sisteminde (x, y) koordinatlı herhangi bir noktanın koordinatları için

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \xi \cos t_1 & y &= y_1 + \xi \sin t_1 \\ \text{ve} \quad \frac{dx}{d\xi} &= \cos t_1 & \frac{dy}{d\xi} &= \sin t_1 \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

dönüşümü uygulanarak yukarıda yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{d\xi} &= \frac{1}{N_0^2} (1+\eta_0^2) (x_1 + \xi \cos t_1) \sin t_1 + \frac{1}{2N_0^3} t_0 (1-3\eta_0^2-4\eta_0^4) (x_1 + \xi \cos t_1)^2 \sin t_1 + \\ &\frac{1}{N_0^3} t_0 (1+\eta_0^2) (x_1 + \xi \cos t_1) (y_1 + \xi \sin t_1) \cos t_1 + \frac{1}{2N_0^3} t_0 (-1-\eta_0^2) (y_1 + \xi \sin t_1)^2 \sin t_1 \end{aligned}$$

bağıntısı bulunur. Bu ifade, ilgili parantezler açılarak terimler gruplandırılırsa;

$$\frac{d\delta}{d\xi} = A + B\xi + C\xi^2 \quad (5.1.12)$$

şeklinde ifade edilebilir. (ξ, η) koordinat sisteminde σ eğrisi doğruya yakın yatık bir eğri olduğundan σ eğrisinin eğrilik yarıçapı, için eğer eğri denlemi $\eta = \eta(\xi)$ şeklinde ifade edilmişse; birinci türev ihmal edilerek

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\delta}{d\xi} = \frac{\delta^2 \eta}{d\xi^2} = A + B\xi + C\xi^2 \quad (5.1.13)$$

yazılabilir. Buradan iki kere integral alınarak;

$$\frac{d\eta}{d\xi} = A\xi + \frac{1}{2} B\xi^2 + \frac{1}{3} C\xi^3 + D$$

(5.1.14)

$$\eta = \frac{1}{2} A\xi^2 + \frac{1}{6} B\xi^3 + \frac{1}{12} C\xi^4 + D\xi + E$$

elde edilir.

Seçilen sistemde $\xi=0$ için $\eta=0$ olduğundan $E=0$ olur, diğer integral sabiti D ise $(d\eta/d\xi)$ 'nın $\xi=0$ için yani P_1' noktasındaki değerini gösterir. Bu ise teğetin eğimidir. Bu değer P_1' noktasındaki δ_1 doğrultu indirgemesini verir. $\xi=s$ için yani P_2' noktasında $\eta=0$ dır. Buradan ;

$$0 = \delta_1 s + \frac{1}{2} A s^2 + \frac{1}{6} B s^3 + \frac{1}{12} C s^4$$

olur. P_2' noktasındaki teğetin eğimide δ_2 dir.

$$\delta_2 = \frac{d\eta}{d\xi} = \delta_1 + A s + \frac{1}{2} B s^2 + \frac{1}{3} C s^3$$

olmaktadır. Her iki denklemden

$$\delta_1 = -\frac{1}{2} A s - \frac{1}{6} B s^2 - \frac{1}{12} C s^3 \quad \text{ve} \quad \delta_2 = \frac{1}{2} A s + \frac{1}{3} B s^2 + \frac{1}{4} C s^3 \quad (5.1.15)$$

bulunur. A , B ve C ifadelerinin yerine yazılması ile;

$$\begin{aligned} -\delta_1 = & \left[\frac{1}{2N_0^2} (1+\eta_0^2) x_1 + \frac{1}{4N_0^3} t_0 (1-3\eta_0^2-4\eta_0^4) x_1^2 - \frac{1}{4N_0^3} t_0 (1+\eta_0^2) y_1^2 \right] \Delta y + \\ & \frac{1}{2N_0^3} t_0 (1+\eta_0^2) x_1 y_1 \Delta x + \frac{1}{6N_0^3} t_0 (1+\eta_0^2) y_1 \Delta x^2 + \\ & \left[\frac{1}{6N_0^3} t_0 (2-2\eta_0^2-4\eta_0^4) x_1 + \frac{1}{12N_0^2} (1+\eta_0^2) \right] \Delta x \Delta y - \frac{1}{36N_0^3} t_0 (1+\eta_0^2) y_1 \Delta y^2 + \\ & \frac{1}{24N_0^3} t_0 (3-\eta_0^2-4\eta_0^4) \Delta x^2 \Delta y - \frac{1}{24N_0^3} t_0 (1+\eta_0^2) \Delta y^3 \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

$$\begin{aligned}
 \delta_2 = & \frac{1}{2N_0^3} t_0 (1+\eta_0^2) x_1 y_1 \Delta x + \left[\frac{1}{2N_0^2} (1+\eta_0^2) x_1 + \frac{1}{4N_0^3} t_0 (1-3\eta_0^2-4\eta_0^4) x_1^2 + \right. \\
 & \left. \frac{1}{4N_0^3} t_0 (-1-\eta_0^2) y_1^2 \right] \Delta y + \frac{1}{3N_0^3} t_0 (1+\eta_0^2) y_1 \Delta x^2 + \frac{1}{6N_0^3} t_0 (-1-\eta_0^2) y_1 \Delta y^2 + \\
 & \left[\frac{1}{3N_0^2} (1+\eta_0^2) + \frac{1}{3N_0^3} t_0 (1-3\eta_0^2-4\eta_0^4) x_1 + \frac{1}{3N_0^3} t_0 (1+\eta_0^2) x_1 \right] \Delta x \Delta y + \\
 & \left[\frac{1}{8N_0^3} t_0 (1-3\eta_0^2-4\eta_0^4) + \frac{1}{4N_0^3} t_0 (1+\eta_0^2) \right] \Delta x^2 \Delta y + \frac{1}{8N_0^3} t_0 (-1-\eta_0^2) \Delta y^3
 \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

olarak doğrultu indirgemeleri elde edilir.

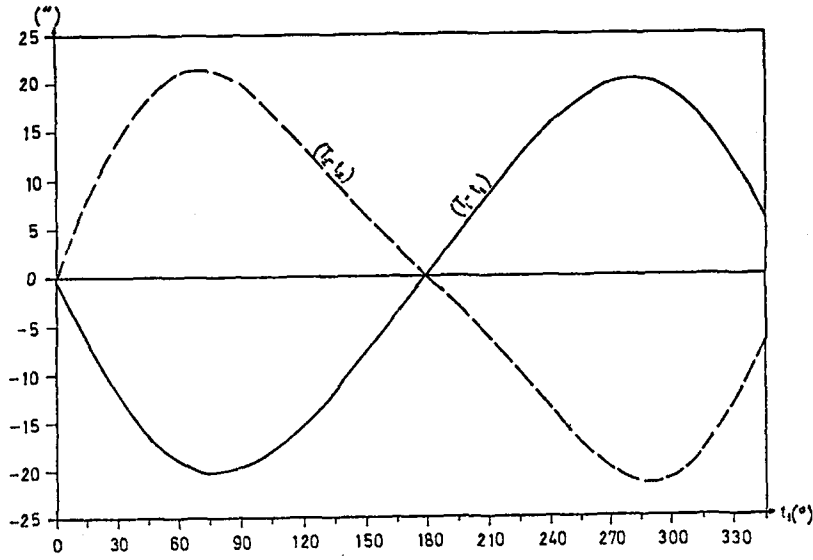
Bütün konform tasvirler için doğrultu indirgemelerini veren formüller Draheim tarafından yayınlanmıştır [12]. Bu çalışmada; büyüme oranına göre kısmi diferansiyellerle her konform tasvir için doğrultu indirgemesi ortak bir yapıda verilmektedir [Ek -8]. Burada (5.1.16-17) olarak verilen formül sistemi ana meridyenden uzak olmayan noktalar için yeterlidir. Ana meridyene daha uzak noktalardaki doğrultu indirgemesi ise diferansiyel formüllerle elde edilen genel formül sistemi kullanılarak bulunur. Draheim'e göre doğrultu indirgemesi;

$$\begin{aligned}
 \delta_1 = & -\frac{1}{2r_0^2} x_1 \Delta y - \frac{1}{6r_0^2} \Delta x \Delta y + \frac{1}{16r_0^3} t_0 (-8+4\eta_0^2-11\eta_0^4) x_1 y_1 \Delta x \\
 & - \frac{1}{32r_0^3} t_0 (8-36\eta_0^2+19\eta_0^4) x_1^2 \Delta y - \frac{1}{32r_0^3} t_0 (-8+4\eta_0^2-11\eta_0^4) y_1^2 \Delta y + \\
 & \frac{1}{48r_0^3} t_0 (-8+4\eta_0^2-11\eta_0^4) y_1 \Delta x^2 + \frac{1}{24r_0^3} (-8t_0+28t_0\eta_0^2-15t_0\eta_0^4) x_1 \Delta x \Delta y - \\
 & \frac{1}{48r_0^3} t_0 (-8+4\eta_0^2-11\eta_0^4) y_1 \Delta y^2 + \frac{1}{192r_0^3} t_0 (-24+44\eta_0^2-31\eta_0^4) \Delta x^2 \Delta y - \\
 & \frac{1}{192r_0^3} t_0 (-8+4\eta_0^2-11\eta_0^4) \Delta y^3 + \frac{1}{4r_0^4} (-3t_0^2+7t_0^2\eta_0^2) x_1^2 y_1 \Delta x + \frac{1}{4r_0^4} (t_0^2-t_0^2\eta_0^2) y_1^3 \Delta x + \\
 & \frac{1}{12r_0^4} (2+3t_0^2-4\eta_0^2-3t_0^2\eta_0^2) x_1^3 \Delta y - \frac{1}{4r_0^4} (-3t_0^2+7t_0^2\eta_0^2) x_1 y_1^2 \Delta y - \\
 & \frac{1}{6r_0^4} (-3t_0^2+7t_0^2\eta_0^2) x_1 y_1 \Delta x^2 + \frac{1}{12r_0^4} (3-6t_0^2+4\eta_0^2+10t_0^2\eta_0^2) x_1^2 \Delta x \Delta y + \\
 & \frac{1}{6r_0^4} t_0 (3-4\eta_0^2) y_1^2 \Delta x \Delta y - \frac{1}{6r_0^4} (-3t_0^2+7t_0^2\eta_0^2) x_1 y_1 \Delta y^2 + \frac{1}{24r_0^4} (-3t_0^2+7t_0^2\eta_0^2) y_1 \Delta x^3 + \\
 & \frac{1}{24r_0^4} (3-9t_0^2+\eta_0^2+17t_0^2\eta_0^2) x_1 \Delta x^2 \Delta y - \frac{1}{40r_0^4} (-3t_0^2+7t_0^2\eta_0^2) y_1 \Delta x \Delta y^2 + \\
 & \frac{1}{24r_0^4} (-1+3t_0^2-7t_0^2\eta_0^2) x_1 \Delta y^3 - \frac{1}{360r_0^4} (-7+9t_0^2+12\eta_0^2-9t_0^2\eta_0^2) \Delta x^3 \Delta y + \\
 & \frac{1}{360r_0^4} (7-9t_0^2+12\eta_0^2+9t_0^2\eta_0^2) \Delta x \Delta y^3
 \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

$$\begin{aligned}
 \delta_2 = & \frac{1}{2r_0^2} x_1 \Delta y + \frac{1}{3r_0^2} \Delta x \Delta y - \frac{1}{16r_0^3} t_0 (-8+4\eta_0^2 - 11\eta_0^4) x_1 y_1 \Delta x + \\
 & \frac{1}{32r_0^3} t_0 (8-36\eta_0^2 + 19\eta_0^4) x_1^2 \Delta y + \frac{1}{32r_0^3} t_0 (-8+4\eta_0^2 - 11\eta_0^4) y_1^2 \Delta y - \\
 & \frac{1}{24r_0^3} t_0 (-8+4\eta_0^2 - 11\eta_0^4) y_1 \Delta x^2 + \frac{1}{12r_0^3} (8t_0 - 28t_0\eta_0^2 + 15t_0\eta_0^4) x_1 \Delta x \Delta y + \\
 & \frac{1}{24r_0^3} t_0 (-8+4\eta_0^2 - 11\eta_0^4) y_1 \Delta y^2 + \frac{1}{64r_0^3} t_0 (24+24\eta_0^2 - 41\eta_0^4) \Delta x^2 \Delta y + \\
 & \frac{1}{64r_0^3} t_0 (-8+4\eta_0^2 - 11\eta_0^4) \Delta y^3 - \frac{1}{4r_0^4} (-3t_0^2 + 7t_0^2\eta_0^2) x_1^2 y_1 \Delta x - \\
 & \frac{1}{4r_0^4} (t_0^2 - t_0^2\eta_0^2) y_1^3 \Delta x + \frac{1}{12r_0^4} (-2+3t_0^2 - 4\eta_0^2 - 3t_0^2\eta_0^2) x_1^3 \Delta y + \\
 & \frac{1}{4r_0^4} (-3t_0^2 + 7t_0^2\eta_0^2) x_1 y_1^2 \Delta y - \frac{1}{3r_0^4} (-3t_0^2 + 7t_0^2\eta_0^2) x_1 y_1 \Delta x^2 - \\
 & \left(\frac{1}{12r_0^4} (-1-12t_0^2 - 8\eta_0^2 - 20t_0^2\eta_0^2) x_1^2 - \frac{1}{2r_0^4} t_0^2 (1-\eta_0^2) y_1^2 \right) \Delta x \Delta y + \\
 & \frac{1}{3r_0^4} (-3t_0^2 + 7t_0^2\eta_0^2) x_1 y_1 \Delta y^2 - \frac{1}{8r_0^4} (-3t_0^2 + 7t_0^2\eta_0^2) y_1 \Delta x^3 + \\
 & \frac{1}{4r_0^4} (-1+3t_0^2 - 7t_0^2\eta_0^2) x_1 \Delta x^2 \Delta y + \frac{1}{8r_0^4} (-9t_0^2 + 17t_0^2\eta_0^2) y_1 \Delta x \Delta y^2 + \\
 & \frac{1}{24r_0^4} (1-9t_0^2 + 21t_0^2\eta_0^2) x_1 \Delta y^3 + \frac{1}{90r_0^4} (-2+36t_0^2 - 12\eta_0^2 - 71t_0^2\eta_0^2) \Delta x^3 \Delta y + \\
 & \frac{1}{90r_0^4} (2-36t_0^2 + 12\eta_0^2 + 71t_0^2\eta_0^2) \Delta x \Delta y^3
 \end{aligned} \tag{5.1.19}$$

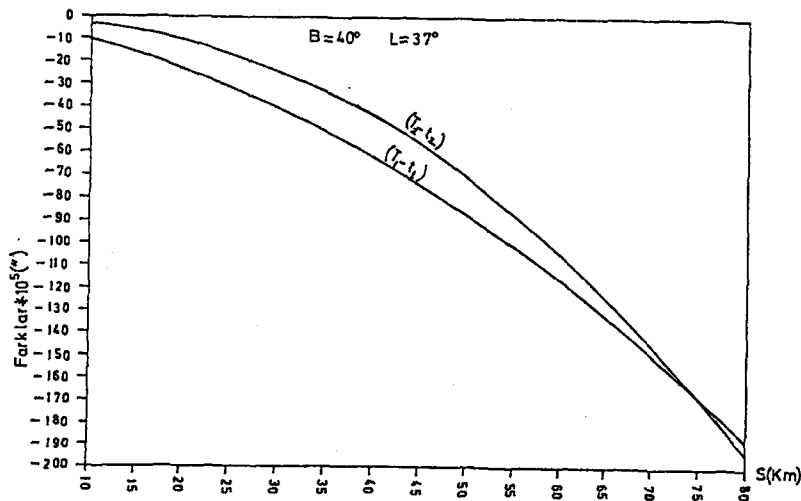
olarak elde edilir.

Doğrultu indirgemesinin büyüklüğünün ne kadar olduğunu görebilmek için ana paralelden 1° ve ana meridyenden 2°'lik uzakta olan B₁=40° ve L₁=37° başlangıç noktası alınarak doğrultu 0°'den 360°ye kadar 15° aralıklar alınarak 90 km uzunluğunda bir kenarın çizmiş olduğu daire üzerinde koordinatların ve bu koordinatlardan doğrultu indirgemeleri hesaplanmıştır. Doğrultu indirgemelerinin maksimum olduğu noktalar 75° ve 285° doğrultusunda ortaya çıkmıştır [Grafik 5.1.1].



Grafik 5.1.1 : Doğrultu indirgemesi değerleri

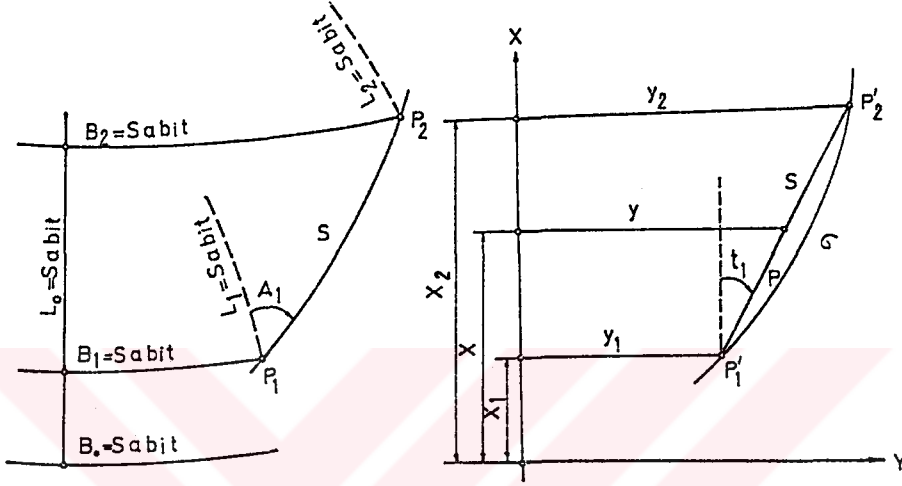
Doğrultu indirgemesinin maksimum olduğu 75° doğrultusunda 10 km 'den başlayarak 5 er km 'lik artan s kenar uzunluklarıyla oluşturulan noktalarda düzlem dik koordinatlar hesaplanmıştır. Söz konusu bir kenar için uç noktalarının coğrafi koordinatları elipsoid üzerinde de hesaplanarak; elipsoid üzerindeki kenarın uzunluğu ve her iki ucundaki azimutlar ikinci jeodezik temel problemle elde edilmiştir. Yine bu noktalarda meridyen konvergenslerinin hesaplanmasıyla, düzlemdeki jeodezik eğrinin tasvirinin T semti bulunmuştur. T-t ilişkisinden, ilgili kenarın karşılaştırmada kullanılacak doğrultu indirgemesi miktarı hesaplanmıştır. Bu indirgeme büyüklüğü; teorik indirgeme formülleri ile bulunacak değerin karşılaştırılacağı kesin değer kabul edilmiştir. (5.1.18-19) doğrultu indirgeme formüllerinin uzunluğa bağlı olarak, olması gereken değere ne kadar yaklaştığı tablolar halinde hesaplanmış ve sonuç grafikte gösterilmiştir [Grafik 5.1.2].



Grafik 5.1.2 : Doğrultu indirgemelerinin kesin değerden farkları

5.2. Uzunluk İndirgemesi

Elipsoid üzerinde P_1 ve P_2 noktalarını birleştiren S jeodezik eğrisi ile her iki noktanın P'_1 ve P'_2 düzlem tasvirlerini birleştiren s doğru parçası dikkate alındığında s doğrusu söz konusu jeodezik eğrinin tasviri değildir. Jeodezik eğrinin tasviri P'_1 ve P'_2 'yi birleştiren σ doğru parçasından farklı bir σ eğrisidir.



Şekil 5.2.1 : Elipsoid ve tasvir düzleminde uzunluk ilişkisi

Tasvir düzleminde σ eğrisinin uzunluğu $P'_1P'_2$ doğrultusunun s uzunluğundan farklı olacaktır. Ancak bu uzunluk farkı $1/r_0^4$ mertebesinde ve ihmal edilebilir [13]. $\sigma = s$ kabul edilerek büyüme oranı için;

$$m = \frac{d\sigma}{ds} \text{ yerine } m = \frac{ds}{dS} \text{ yazılırsa}$$

$$S = \int \frac{1}{m} ds \quad (5.2.1)$$

bağıntısı elde edilir. Büyüme oranı için (2.2.7) 'de verilen bağıntıya göre;

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} = & 1 - \frac{1}{2r_0^2} x^2 - \frac{1}{48r_0^3} t_0 (8-36\eta_0^2 + 19\eta_0^4) x^3 - \frac{1}{16r_0^3} t_0 (-8+4\eta_0^2-11\eta_0^4) xy^2 - \\ & \frac{1}{24r_0^4} (1+3t_0^2-4\eta_0^2-3t_0^2\eta_0^2) x^4 - \frac{1}{4r_0^4} (-3t_0^2+7t_0^2\eta_0^2) x^2y^2 - \frac{1}{8r_0^4} (t_0^2-t_0^2\eta_0^2) y^4 + \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

olur.

(5.2.1) integralinin değerlendirilmesi için (1/m) formülündeki x ve y'lerin s uzunluğu cinsinden ifade edilmesi gerekir. $P_1'P_2'$ doğrusu üzerinde herhangi bir noktanın y ve x koordinatı ; P_1 den olan uzaklık p, $P_1'P_2'$ nün semti t olmak üzere;

$y = y_1 + p \sin t_1$ $x = x_1 + p \cos t_1$ dir. Bu değerler (5.2.2) de yerine yazılır.

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} = & 1 - \frac{1}{2r_0^2} (x_1^2 + 2x_1p \cos t_1 + p^2 \cos^2 t_1) - \frac{1}{48r_0^3} t_0 (8 - 36\eta_0^2 + 19\eta_0^4) \\ & (x_1^3 + 3x_1^2p \cos t_1 + 3x_1p^2 \cos^2 t_1 + p^3 \cos^3 t_1) - \frac{1}{16r_0^3} t_0 (-8 + 4\eta_0^2 - 11\eta_0^4) \\ & (x_1y_1^2 + 2x_1y_1p \sin t_1 + x_1 \sin^2 t_1 + y_1^2p \cos t_1 + 2y_1p^2 \cos t_1 \sin t_1 + p^3 \cos t_1 \sin^2 t_1) - \\ & \frac{1}{24r_0^4} (1 + 3t_0^2 - 4\eta_0^2 - 3t_0^2\eta_0^2) (x_1^4 + 4x_1^3p \cos t_1 + 6x_1^2p^2 \cos^2 t_1 + 4x_1p^3 \cos^3 t_1 + p^4 \cos^4 t_1) - \\ & \frac{1}{4r_0^4} (-3t_0^2 + 7t_0^2\eta_0^2) (x_1^2y_1^2 + 2x_1y_1^2p \cos t_1 + y_1^2p^2 \cos^2 t_1 + 2x_1^2y_1p \sin t_1 + \\ & 4x_1y_1p^2 \sin t_1 \cos t_1 + 2y_1p^3 \cos^2 t_1 \sin t_1 + x_1^2p^2 \sin^2 t_1 + 2x_1p^3 \cos t_1 \sin^2 t_1 + \\ & p^4 \cos^2 t_1 \sin^2 t_1) - \frac{1}{8r_0^4} (t_0^2 - t_0^2\eta_0^2) (y_1^4 + 4y_1^3p \sin t_1 + 6y_1^2p^2 \sin^2 t_1 + 4y_1p^3 \sin^3 t_1 + p^4 \sin^4 t_1) \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Bu formülde gerekli işlemler yapılarak ifade sabit katsayılar ve p kuvvetlerine göre ;

$$\frac{1}{m} = A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + Ep^4 \quad (5.2.4)$$

şeklinde yazılabilir. p' nin katsayıları sabit değerler olduğundan;

$$S = \int \frac{1}{m} ds \text{ integrali dikkate alınarak;}$$

$$S = \int_{p=0}^{p=s} (A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + Ep^4) dp = A s + \frac{1}{2} B s^2 + \frac{1}{3} C s^3 + \frac{1}{4} D s^4 \quad (5.2.5)$$

haline dönüştürülür. Buradan her iki tarafın s'e bölünmesiyle

$$\frac{S}{s} = A + \frac{1}{2} B s + \frac{1}{3} C s^2 + \frac{1}{4} D s^3 + \frac{1}{5} E s^4 \quad (5.2.6)$$

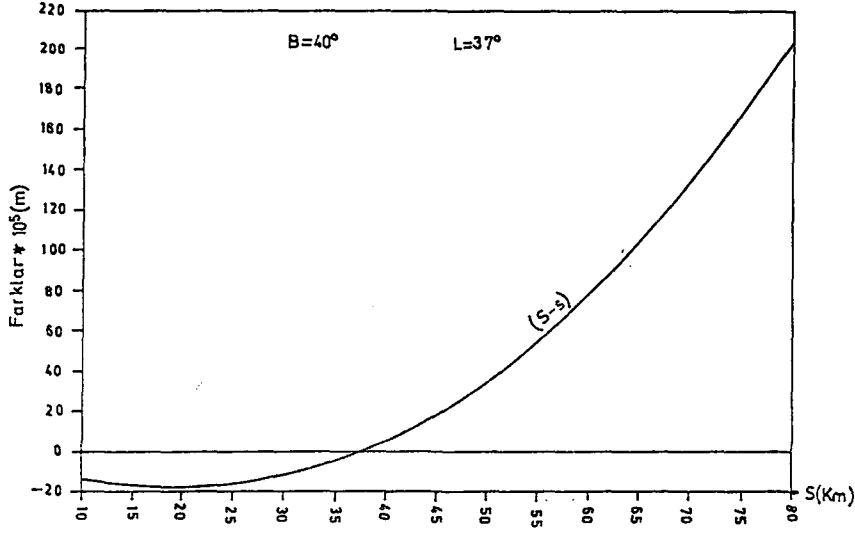
olur.

Buradan $s \sin t_1 = y_2 - y_1$ ve $s \cos t_1 = x_2 - x_1$ dönüşümü yapılarak uzunluk indirgemesi yani S-s için formül elde edilir. Buradan bulunan indirgeme formülü ile Draheim tarafından bütün konform tasvirler için verilen genel formül kullanılarak bulunan indirgeme formülü ile idantik olduğu görülmüştür [12].

$$\begin{aligned}
 S - s = & s \left[-\frac{1}{2r_0^2} x_1^2 - \frac{1}{48r_0^3} t_0 (8-36\eta_0^2 + 19\eta_0^4) x_1^3 - \frac{1}{16r_0^3} t_0 (-8+4\eta_0^2 - 11\eta_0^4) x_1 y_1^2 - \right. \\
 & \frac{1}{24r_0^4} (-5+3t_0^2-4\eta_0^2-3t_0^2\eta_0^2) x_1^4 - \frac{1}{4r_0^4} (-3t_0^2+7t_0^2\eta_0^2) x_1^2 y_1^2 - \frac{1}{8r_0^4} (t_0^2-t_0^2\eta_0^2) y_1^4 + \\
 & \left[-\frac{1}{2r_0^2} x_1 - \frac{1}{32r_0^3} t_0 (8-36\eta_0^2 + 19\eta_0^4) x_1^2 - \frac{1}{32r_0^3} t_0 (-8+4\eta_0^2 - 11\eta_0^4) y_1^2 - \right. \\
 & \frac{1}{12r_0^4} (-5+3t_0^2-4\eta_0^2-3t_0^2\eta_0^2) x_1^3 - \frac{1}{4r_0^4} (-3t_0^2+7t_0^2\eta_0^2) x_1 y_1^2 \left. \right] \Delta x + \\
 & \left[-\frac{1}{16r_0^3} t_0 (-8+4\eta_0^2 - 11\eta_0^4) x_1 y_1 - \frac{1}{4r_0^4} (-3t_0^2+7t_0^2\eta_0^2) x_1^2 y_1 - \frac{1}{4r_0^4} (t_0^2-t_0^2\eta_0^2) y_1^3 \right] \Delta y + \\
 & \left[-\frac{1}{6r_0^2} - \frac{1}{12r_0^4} (-5+3t_0^2-4\eta_0^2-3t_0^2\eta_0^2) x_1^2 - \frac{1}{48r_0^3} t_0 (8-36\eta_0^2 + 19\eta_0^4) x_1 - \right. \\
 & \frac{1}{12r_0^4} (-3t_0^2+7t_0^2\eta_0^2) y_1^2 \left. \right] \Delta x^2 + \left[-\frac{1}{24r_0^3} t_0 (-8+4\eta_0^2 - 11\eta_0^4) y_1 - \right. \\
 & \frac{1}{3r_0^4} (-3t_0^2+7t_0^2\eta_0^2) x_1 y_1 \left. \right] \Delta x \Delta y + \left[-\frac{1}{48r_0^3} t_0 (-8+4\eta_0^2 - 11\eta_0^4) x_1 + \right. \\
 & \frac{1}{24r_0^4} (-1+6t_0^2-14t_0^2\eta_0^2) x_1^2 - \frac{1}{12r_0^4} (t_0^2-t_0^2\eta_0^2) y_1^2 \left. \right] \Delta y^2 + \frac{1}{4r_0^4} x_1 \Delta x^3 + \\
 & \left[-\frac{1}{8r_0^4} (-3t_0^2+7t_0^2\eta_0^2) y_1 \right] \Delta x^2 \Delta y + \left[-\frac{1}{64r_0^3} t_0 (-8+4\eta_0^2 - 11\eta_0^4) - \right. \\
 & \frac{1}{24r_0^4} (-1+9t_0^2-21t_0^2\eta_0^2) x_1 \left. \right] \Delta x \Delta y^2 + \left[-\frac{1}{8r_0^4} (t_0^2-t_0^2\eta_0^2) y_1 \right] \Delta y^3 + \\
 & \left[-\frac{1}{120r_0^4} (-5+3t_0^2-4\eta_0^2-3t_0^2\eta_0^2) \right] \Delta x^4 + \frac{1}{360r_0^4} (-4+9t_0^2-21t_0^2\eta_0^2) \Delta x^2 \Delta y^2 \\
 & - \frac{1}{40r_0^4} (t_0^2-t_0^2\eta_0^2) \Delta y^4
 \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

Formülde sabit olan terimler hesap edilerek katsayı haline getirilebilir. Burada bulunan katsayılar başlangıç sistemine göre bir defa hesaplanırlar.

Uzunluk indirgemesi formüllerinin test edilmesi için; sayfa 48'de açıklandığı gibi oluşturulan noktalar kullanılmıştır. Burada uzunluklar ; 10 km 'den başlayarak 5 km artışlar ile 80 km 'ye kadar alınmış ve her kenar için bir kere elipsoiddeki S ile düzlem kenar s farkı, bir kere de teorik formülden uzunluk indirgemesi değerleri hesaplanmıştır. Hesaplanan indirgeme değerlerinin olması gereken değere ne kadar yaklaştığı araştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar bir fark grafiğinde gösterilmiştir [Grafik 5.2.1].



Grafik 5.2.1 : Uzunluk indirgemesinin kesin değerden farkları

5.3. Sayısal Örnekler

Doğrultu indirgemeleri (5.1.18-19) ve uzunluk indirgemesi için (5.2.7) formülleri kullanılarak değişik uzunluklarda hesaplanan indirgeme değerleri tablo (5.3.1) 'de gösterilmiştir.

Tablo 5.3.1 : Uzunluğa bağlı olarak indirgeme değerleri

$y_1=170\ 807.73381\ m$ $x_1=111\ 909.97740\ m$							
$y_2(m)$	$x_2(m)$	$s(m)$	t_1°	t_2°	$(T_1-t_1)''$	$(T_2-t_2)''$	$(S-s)(m)$
180466.99206	115498.16785	10000.0000	75	255	- 2.776985	2.797025	- 1.557047
185296.62119	116792.26308	15000.0000	75	255	- 4.180494	4.225535	- 2.360414
190126.25033	118086.35830	20000.0000	75	255	- 5.593992	5.673982	- 3.180517
194955.87946	119380.45353	25000.0000	75	255	- 7.017465	7.142317	- 4.017488
199785.50859	120674.54875	30000.0000	75	255	- 8.450897	8.630492	- 4.871454
204615.13772	121968.64398	35000.0000	75	255	- 9.894272	10.894272	- 5.742542
209444.76685	123262.73920	40000.0000	75	255	- 11.347575	11.666176	- 6.630879
214274.39598	124556.83443	45000.0000	75	255	- 12.810790	13.213588	- 7.536589
219104.02511	125850.92966	50000.0000	75	255	- 14.283902	14.780650	- 8.459794
223933.65425	127145.02488	55000.0000	75	255	- 15.766894	16.367314	- 9.400618
228763.28338	128439.12011	60000.0000	75	255	- 17.259752	17.973533	- 10.359180
233592.91251	129733.21533	65000.0000	75	255	- 18.762460	19.599256	- 11.335599
238422.54164	131027.31056	70000.0000	75	255	- 20.275001	21.244438	- 12.329994
243252.17077	132321.40578	75000.0000	75	255	- 21.797361	22.909028	- 13.342481
248081.79990	133615.50101	80000.0000	75	255	- 23.329523	24.592979	- 14.373176

6. KONFORM KONİK DÜZLEM TASVİR KOORDİNATLARI İLE ELİPSOİDE EŞDEĞER JEODEZİK TEMEL PROBLEM ÇÖZÜMÜ

Elipsoid üzerinde P_1P_2 jeodezik eğrisinin uzunluğu, her iki ucundaki, sisteme göre tarif edilen, doğrultu açıları ve her iki noktanın koordinatları veya koordinat farkı jeodezik temel problemin altı elemanını oluştururlar. Bir noktanın koordinatları, ikinci bir noktaya kenar uzunluğu ve bu noktadaki doğrultu açısı biliniyorken sözkonusu kenarın diğer ucundaki noktanın koordinatlarının ve ikinci noktadaki doğrultu açısının hesaplanması işlemine " *Birinci Jeodezik Temel Problem* " denir. İki noktanın koordinatları biliniyorken, bu noktaları birleştiren jeodezik eğri uzunluğunun ve her iki ucundaki doğrultu açılarının bulunması işlemine de " *İkinci Jeodezik Temel Problem* " denir.

Bu bölümde, temel problem çözümlerinin yardımcı yüzey olan düzlemde çözülerek ilgili indirgeme bağıntıları ile elipsoiddeki orijinal değerlere nasıl ulaşılacağı ele alınacaktır. Yapılan işlemlerde yaklaşıklık sözkonusu olmayıp, belirtilen doğruluk derecelerinde yapılan hesaplamalar tamamen elipsoidde yapılacak hesaplara denktir.

6.1. Birinci Jeodezik Temel Problem Çözümü

Birinci jeodezik temel problem için; bir noktanın koordinatları, hesaplanması istenilen noktayı birleştiren jeodezik eğri ve bu doğrultunun birinci noktadaki azimutu bilinmektedir. İkinci noktanın koordinatları ile, bu noktadaki azimutun hesaplanması istenmektedir.

Birinci noktanın bilinen koordinatları elipsoidal coğrafi koordinatlar olabileceği gibi; konform konik tasvire göre hesaplanmış düzlem dik koordinatlar da olabilir. Bu işlemlerde kullanılacak formüller bundan önceki bölümlerde detaylıca ele alınmıştır. Bu bölümde sadece konunun algoritması ve hangi işlemlerin hangi sırada yapılacağı açıklanacaktır.

Verilenler : $P_1(B_1, L_1)$, S , A_1

İstenenler : $P_1(B_2, L_2), A_2$

Birinci jeodezik temel problemin çözüm adımları aşağıdaki gibidir:

- 1 - P_1 noktasının (B_1, L_1) , coğrafi koordinatlarından (x_1, y_1) düzlem dik koordinatlarının hesabı. Eğer başlangıçta düzlem dik koordinatlar biliniyorsa bu adım atlanılır.
- 2 - P_1 noktasında c_1 meridyen konvergansinin ve $T_1 = A_1 - c_1$ semti 'nin hesabı
- 3 - İndirgeme formüllerinde kullanılmak üzere P_2 noktasının yaklaşık düzlem koordinatlarının S ve T değerleri ile hesabı .
- 4 - S -s uzunluk indirgemesi ile s düzlem kenarın hesabı
- 5 - $(T_1 - t_1)$ doğrultu indirgemesi ile t_1 düzlem semtinin hesabı
- 6 - Düzlem (x_1, y_1) koordinatlar, s ve t_1 kullanılarak P_2 noktasının (x_2, y_2) düzlem koordinatlarının hesabı
- 7 - Düzlem (x_2, y_2) dik koordinatlardan P_2 noktasının (B_2, L_2) coğrafi koordinatların hesabı. Eğer coğrafi koordinatlar istenmiyorsa bu adımdan vazgeçilebilir.
- 8 - P_2 noktasında c_2 konvergans hesabı
- 9 - $(T_2 - t_2)$ indirgemesiyle T_2 hesabı
- 10 - P_2 noktasında $A_2 = T_2 + c_2$ hesabı

6.2. İkinci Jeodezik Temel Problem Çözümü

İkinci jeodezik temel problem için; iki noktanın koordinatları verilmiştir. Bu iki nokta arasındaki kenarın uzunluğu ve bu kenarın iki ucundaki azimutlar istenmektedir.

Verilenler : $P_1(B_1, L_1)$, $P_2(B_2, L_2)$

İstenenler : S, A_1, A_2

İkinci jeodezik temel problemin çözüm adımları şöyledir.

- 1- P_1 ve P_2 noktalarının (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) düzlem dik koordinatlarının hesabı
- 2- Düzlem semtlerin t_1 ve t_2 hesabı
- 3- Düzlem uzunluk s ve uzunluk indirgemesi ($S-s$) hesabı ile S elipsoid değerinin hesabı
- 4- Doğrultu indirgemeleri ($T_1 - t_1$) ve ($T_2 - t_2$) meridyen konvergensleri (c_1, c_2) hesabı
- 5- A_1 ve A_2 azimutlarının hesabı

6.3. Sayısal Örnekler

a) Birinci Jeodezik Temel Problem

Verilenler		İstenenler
$P_0(B_0= 39^\circ, L_0= 35^\circ)$	$S = 109\,973.8176$	$P_2(B_2, L_2), A_2$
$P_1(B_1= 40^\circ, L_1= 36^\circ)$	$A_1 = 60^\circ 37'13.8488''$	

(2.3.2) formüllerinden düzlem dik koordinatlar

$$x_1 = 111\,502.8577$$

$$y_1 = 85\,409.0188$$

olarak bulunur. (2.2.1) formüllerinden

$$c_1 = 0^\circ 37'45.5534'' \quad T_1 = A_1 - c_1 = 59^\circ 59'28.2954''$$

$$x_2 \equiv x_1 + S \cos T_1 = 166\,517.4997$$

$$y_2 \equiv y_1 + S \sin T_1 = 180\,663.3581$$

(5.1.18) ve (5.1.19) formüllerinden doğrultu indirgemeleri

$$(T_1 - t_1) = -31.7048'' \quad \text{ve} \quad (T_2 - t_2) = 36.2028''$$

$$t_1 = T_1 - (T_1 - t_1) = 60^\circ 00'00.0000'' \quad t_2 = t_1 + 180^\circ = 240^\circ 00'00.0000''$$

$$S-s = -26.1824 \text{ m} \quad s = S - (S-s) = 110\,000.0000 \text{ m}$$

$$x_2 = x_1 + s \cos t_1 = 166\ 502.8577$$
$$y_2 = y_1 + s \sin t_1 = 180\ 671.8132$$

(2.4.2) ve (2.4.8) formüllerinden;

$$B_2 = 40^\circ\ 28'49.3727'' \quad L_2 = 37^\circ\ 07'48.4964''$$

$$(T_2 - t_2) = 36.2028'' \quad T_2 = t_1 + (T_2 - t_2) = 240^\circ 00' 36.2028''$$

$$c_2 = 1^\circ 20' 25.9412'' \quad A_2 = T_2 + c_2 = 241^\circ 21' 02.1432''$$

b) İkinci Jeodezik Temel Problem

Verilenler

$$P_1(B_1=40^\circ, L_1=36^\circ) \quad P_0(B_0=39^\circ, L_0=35^\circ)$$
$$P_2(B_2=40^\circ\ 28'49.3727'', L_2=37^\circ\ 07'48.4964'')$$

İstenenler

$$A_1, A_1 \text{ ve } S$$

(2.3.2) formüllerinden düzlem dik koordinatların hesabı

$$x_1 = 111\ 502.8577 \text{ m}$$
$$y_1 = 85\ 409.0188 \text{ m}$$

$$x_2 = 166\ 502.8577 \text{ m}$$
$$y_2 = 180\ 671.8132 \text{ m}$$

$$\Delta y = 95\ 262.7944 \text{ m}$$

$$\Delta x = 55\ 000.0000 \text{ m}$$

$$t_1 = \arctan(\Delta y / \Delta x)$$
$$t_1 = 60^\circ\ 00'\ 00.0000''$$

$$t_2 = t_1 + 180^\circ$$
$$t_2 = 240^\circ\ 00'\ 00.0000''$$

$$s = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2} = 110\ 000.0000 \text{ m}$$

(5.2.7) formülünden

$$S - s = -26.1823 \text{ m} \quad S = s + (S - s) = 109\ 973.8177 \text{ m}$$

(5.1.18) ve (5.1.19) formüllerinden doğrultu indirgemeleri

$$(T_1 - t_1) = -31.7048'' \text{ ve } (T_2 - t_2) = 36.2028'' \quad , \quad \Delta L = L - L_0$$

$$\Delta L_1 = 1^\circ\ 07'\ 48.4964'' \quad \Delta L_2 = 2^\circ\ 07'\ 48.4964''$$

(2.2.1) formülünden $c_1 = 0^\circ\ 37'\ 45.5534''$ $c_2 = 1^\circ\ 20'\ 25.9412''$

$$t_1 = 60^{\circ} 00' 00.0000''$$

$$t_2 = 240^{\circ} 00' 00.0000''$$

$$(T_1 - t_1) = -31.7048''$$

$$(T_2 - t_2) = 36.2028''$$

$$T_1 = 59^{\circ} 59' 28.2952''$$

$$T_2 = 240^{\circ} 00' 36.2028''$$

$$c_1 = 0^{\circ} 37' 45.5534''$$

$$c_2 = 1^{\circ} 20' 25.9412''$$

$$A_1 = 60^{\circ} 37' 13.8486''$$

$$A_2 = 241^{\circ} 21' 02.1440''$$



7. DOĞRULTU VE UZUNLUK İNDİRGEMELERİNİN GAUSS- KRÜGER TASVİRİ İLE KARŞILAŞTIRILMASI

Konform konik tasvirde doğrultu ve uzunluk indirgemeleri bölüm (5.1) ve (5.2) ' de incelenmiştir. Gauss-Krüger konform tasvir için doğrultu ve uzunluk indirgemelerinin, tanımlamaları ve konuyla ilgili geniş açıklamalar ilgili literatürde verilmiştir [1], [2], [5], [14] ve [15].

Gauss-Krüger konform tasvir düzleminde; aşağıdaki doğrultu ve uzunluk indirgeme formülleri kullanılarak indirgemeler hesaplanmıştır:

$$\delta_1 = T_1 - t_1 = \frac{1}{6 r_m^2} \Delta x (2y_1 + y_2) \quad \delta_2 = T_2 - t_2 = - \frac{1}{6 r_m^2} \Delta x (y_1 + 2y_2)$$

$$S - s = - \frac{s}{6 r_m^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$$

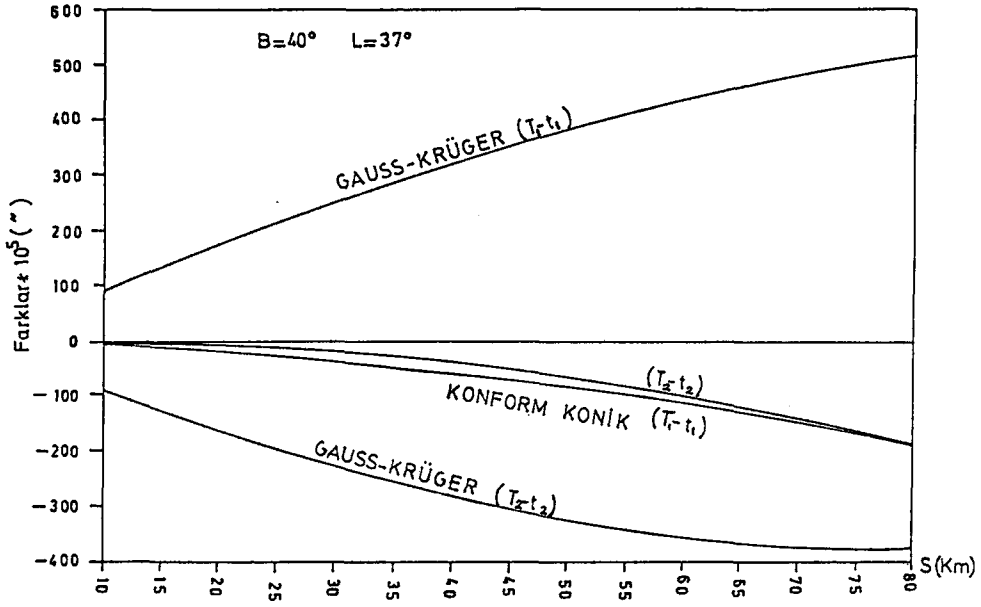
Örnek olarak alınan değişik uzunluktaki P_1 - P_2 kenarlarının konform konik ve Gauss-Krüger tasvirlerindeki doğrultu ve uzunluk indirgemeleriyle karşılaştırmalar yapılmıştır.

Bu amaçla elipsoid üzerinde P_1 ve P_2 noktaları seçilerek ayrı ayrı hem konform konik hemde Gauss-Krüger tasviri için her iki noktanın düzlem koordinatları ve gerekli meridyen konvergensleri hesaplanmıştır. Bunun için Gauss-Krüger tek değişkenli kuvvet serileri, konform konik için kapalı (2.3.2) formülleri kullanılmıştır [1], [2],[5].

Gauss-Krüger konform tasvir için dilim orta meridyeni 39° alınmış ve böylece ayrı ayrı düzlem sistemlerin koordinatları ile düzlemde 2. jeodezik temel problem çözümü yapılarak ayrı ayrı sistemlerin s ve t_1 değerleri elde edilmiştir. Yani her iki konform tasvir için ayrı ayrı doğrultu ve uzunluk indirgemeleri ile bu düzlem değerlerden S , A_1 ve A_2 elipsoid değerleri ayrı ayrı elde edilmiştir. Aynı problemin elipsoid üzerinde Gauss ortalama enlem formülleri ile çözümünden olması gereken A_1 , A_2 ve S değerlerine ne kadar yaklaştığı, yani farklar olarak elde edilmiş [Tablo 7.2.1] ve grafikleri çizilmiştir [Grafik 7.1], [Grafik 7.2].

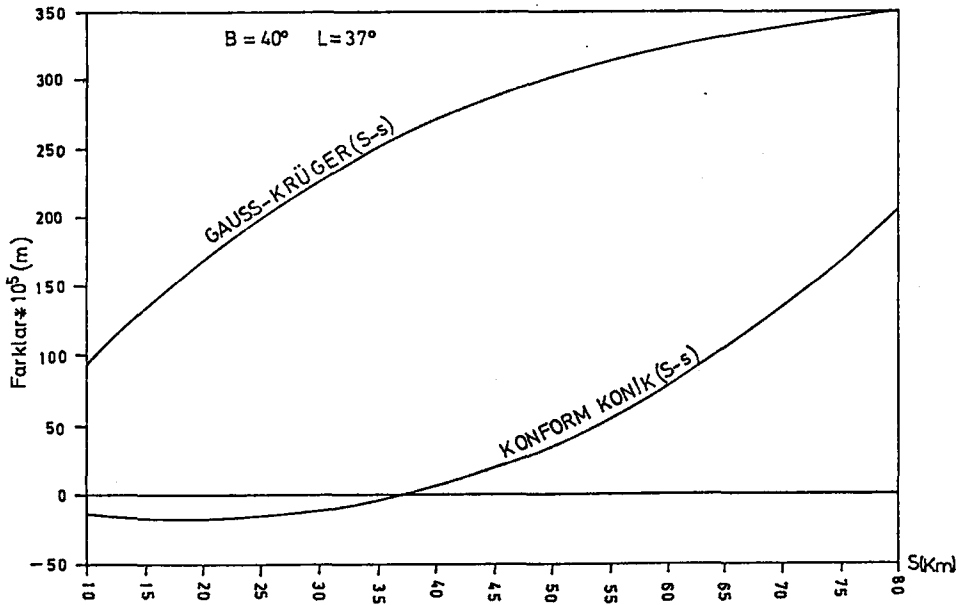
Tablo 7.2.1 : Konform konik ve Gauss-Krüger tasvirleri indirgeme değerlerinin yaklaşımı

No	Konform Konik İndirgeme Farkları			Gauss-Krüger İndirgeme Farkları		
	Ft1	Ft2	Fs	Ft1	Ft2	Fs
1	-0.000028	-0.000101	-0.000139	0.000925	-0.000907	0.000954
2	-0.000061	-0.000165	-0.000173	0.001355	-0.001304	0.001351
3	-0.000107	-0.000237	-0.000182	0.001763	-0.001667	0.001701
4	-0.000168	-0.000319	-0.000164	0.002149	-0.001998	0.002008
5	-0.000243	-0.000410	-0.000118	0.002515	-0.002297	0.002276
6	-0.000333	-0.000511	-0.000044	0.002861	-0.002566	0.002509
7	-0.000440	-0.000622	0.000060	0.003187	-0.002805	0.002709
8	-0.000564	-0.000742	0.000194	0.003494	-0.003017	0.002881
9	-0.000704	-0.000873	0.000360	0.003783	-0.003203	0.003026
10	-0.000863	-0.001014	0.000558	0.004054	-0.003363	0.003149
11	-0.001040	-0.001165	0.000788	0.004309	-0.003499	0.003251
12	-0.001236	-0.001328	0.001052	0.004547	-0.003612	0.003334
13	-0.001451	-0.001501	0.001350	0.004770	-0.003703	0.003401
14	-0.001687	-0.001685	0.001682	0.004978	-0.003774	0.003454
15	-0.001943	-0.001881	0.002049	0.005171	-0.003825	0.003494



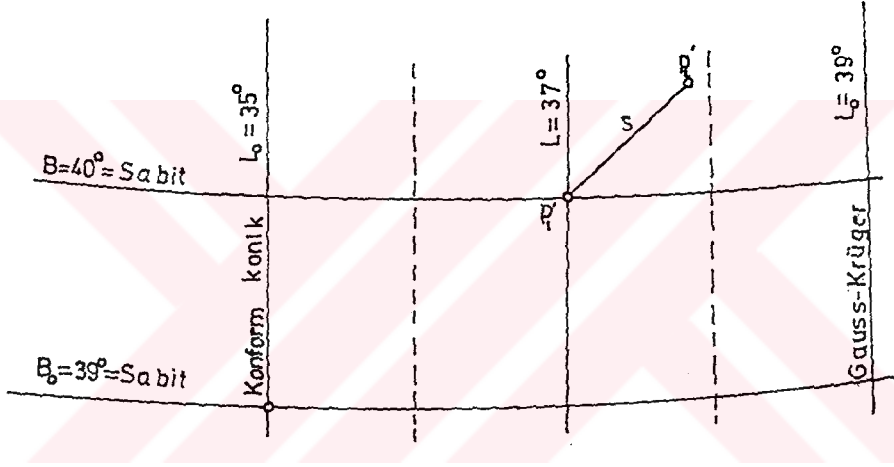
Grafik 7.1 : Konform konik ve Gauss-Krüger doğrultu indirgeme formüllerinin kesin değerden farkları

Sonuçlardan konform konik tasvirin doğrultu ve uzunluk indirgemelerinin olması gereken değere daha küçük fark ile yaklaştığı görülmüştür. Bunun gerekçesi olarak konform konik tasvirde kullanılan formüllerde yüksek dereceden terimlerin olması gösterilebilir.



Grafik 7.2 : Konform konik ve Gauss-Krüger uzunluk indirgemesi formüllerinin kesin değerden farkları

Konform konik tasvirde koordinatlar başlangıç seçilen noktaya, Gauss-Krüger tasvirde ekvator ve dilim orta meridyeni ne bağlıdır. Ancak konform konik tasvirde başlangıçtan itibaren uzaklığa bağlı olarak koordinatlar büyümesine rağmen, Gauss-Krüger tasvirinde x koordinatı ekvator dan uzaklaştıkça büyümekte y koordinatı seçilen başlangıç dilim orta meridyenin de sıfır olmaktadır (Şekil 7.1).



Şekil 7.1: Konform konik ve Gauss- Krüger tasvirinde örnek problem değerlerinin konumları

8. SONUÇ

Konform konik tasvir yardımı ile oluşturulan koordinat sistemi Türkiye için tek bir koordinat sistemi kullanılmasına imkan vermektedir. Gauss-Krüger konform tasvirinde farklı meridyenleri esas alan çok dilimli koordinat sistemleri mevcuttur. Bu koordinat sistemleri arasındaki transformasyon ve dilim sınırlarında aynı noktaların her iki sistemde hesaplama mecburiyeti küçümsenmeyecek külfet getirmektedir. Konform konik tasvirde böyle bir durum söz konusu değildir. Konform konik tasvir esas alınarak Türkiye ve bunun gibi bir paralel daire boyunca uzanan ülkeler için tek koordinat sisteminin kullanılması mümkün olur.

Gauss-Krüger tasviri ile karşılaştırmada ortaya çıkan bir husus ta koordinat başlangıcının ekvator alınmasıyla koordinatların ulaştığı büyük sayı değerlerine karşılık, konform konik tasvir sisteminde ülke boyutları ile sınırlı sayı değerlerinin altında kalılabilmektedir. Konform konik tasvir kullanılarak hesap edilen noktaların uluslararası bir sistem olan UTM koordinatlarına dönüşümü mümkün olmaktadır. 1954 yılında ABD'de dengelenen Türkiye genel nirengi ağı, konform konik tasvir düzleminde dengelenmiştir. Bu dengeleme için bütün nirengi noktalarının coğrafi koordinatlarından, konform konik tasvir düzlem koordinatları hesaplanmıştır. Karşılaştırma amacı ile bu hesapta kullanılan seri formüllerinin Harita Genel Komutanlığından elde edilmesi mümkün olmamıştır. Buradan dengeleme sonucunda coğrafi koordinat hesaplanmış ve coğrafi koordinatlardan UTM koordinatlarına dönüştürülmüştür.

Konform konik tasvirde hesaplamalarda kullanılan bütün sabitler başlangıç paraleli üzerinde hesaplanmaktadır. Bu sabitler bir sistem için bir defa hesaplandıklarında tekrar hesaplanmazlar. Karşılaştırma bölümünde de belirtildiği gibi Gauss-Krüger tasvirinde doğrultu ve uzunluk indirgemelerinin dilim orta meridyenine uzak kenarlarda olması gereken değere yaklaşmadıkları, konform konik tasvirde aynı noktada indirgeme değerlerinin olması gereken değere daha olumlu yaklaştığı görülmüştür. Konform konik tasvir için önerilen doğrultu ve uzunluk indirgemeleri formüllerinin Gauss-Krüger konform tasvirinde kullanılan formüllerden daha uzun olduğu görülmüştür. Ancak hesaplamalarda bilgisayar kullanıldığında bu mahsur ortadan kalkmaktadır.

Geleceğe dönük çalışmalar için veri tabanı oluşturmada tek bir koordinat sisteminden yararlanılması daha kullanışlı olacaktır. Gauss-Krüger tasvirinde büyüme oranı doğu-batı yönünde ΔL 'ye bağlı olarak, konform konik tasvirin de ise büyüme oranının kuzey-güney yönünde ΔB 'ye bağlı büyüdüğü görülmüştür.

Bu çalışmada elipsoidin düzleme konform konik tasviri için gerekli matematik bağıntılar incelenmiştir. Burada sunulan formül sistemi, türkçe ve yabancı dildeki kaynakta bu kapsamda ele alınmamıştır. Düzlem dik koordinatların hesaplanması için kapalı formüller ve kuvvet serileri , aynı şekilde düzlem dik koordinatlardan elipsoid coğrafi koordinatlarının hesaplanması için formüller verilmiştir. Kuvvet serileri kullanılarak hesaplamalarda boylam farkının maksimum olduğu bölgelerde seri terimlerin artırılarak hesaplamaların yapılabileceği görülmüştür. Çalışmada verilen uzunluk ve doğrultu indir-gemesi formülleri halen çok yaygın bir kullanıma sahip olan Gauss-Krüger sisteminin formülleri ile birlikte test edilmiştir. Yapılan karşılaştırmalarla, modelin bütünlük içinde ülkemizin tamamında $s=70$ km.lik kenarlarda kullanılabileceği ve elipsoide eşdeğer hesap yapılabileceği görülmüştür.

9. KAYNAKLAR

1. KAYA, A., Matematik Jeodezi I - II Ders Notları, K.T.Ü, Mühendislik Mimarlık Fakültesi Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği Bölümü, Trabzon, 1992, Basılmamıştır.
2. GROSSMANN, W., Geodätische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung, Stuttgart, 1976
3. ÖZBENLİ, E., Jeodezi, K.T.Ü, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Trabzon, 1991
4. THOMAS, D., Conformal Projections in Geodesy and Cartography, Washington, 1952
5. JORDAN, W., / EGGERT, O., / KNEISSL, M., Handbuch der Vermessungskunde, Band IV, Stuttgart, 1959
6. RICHARDUS, P., / ADLER, R. K., Map Projections for Geodesists and Cartographers, Second Edition, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1974
7. HRİSTOW, K., Die Mecklenburgischen Koordinaten (Normale konforme Kegel Projektion), ZfV, Heft 11, 1943, S. 232-238
8. FIALA, F., Matematiksel Kartoğrafya, (Çevirenler: Özgen, G., Aksoy, A. ve Demirağ, Ö.), İ.T.Ü. yayınları, sayı 1072, İstanbul, 1976
9. KAYA, A., Elipsoidin Küreye Konform Tasviri Yoluyla Jeodezik Temel Problemlerin Çözümü Üzerine Bir İnceleme, Doktora Tezi, Trabzon, 1984.
10. HRİSTOW, K., Die Gauss-Krüger'schen Koordinaten auf dem Ellipsoid, Leipzig und Berlin, 1943
11. KNORR, H., Die Verwendung der konformen Kegelprojektion für den Ellipsoidübergang bei grossflächigen Dreiecksnetzen, DGK, A- 9, 1955, S. 41-51
12. DRAHEİM, H., Allgemeine Formeln zur Berechnung der Richtungsreduktion und der Längenreduktion Konformer Abbildungen, DGK, C-7, München, 1953
13. ÖZBENLİ, E., Jeodeziye Giriş (Elipsoid Geometrisi), Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul, 1972
14. AKSOY, A., GÜNEŞ, İ. H., Jeodezi II, İ.T.Ü. yayınları, Sayı 1422, İstanbul, 1990
15. ULISOY, E., Matematiksel Geodezi, İstanbul Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademisi Yayınları, Sayı 144, İstanbul, 1977

Kaynak kısaltmaları:

DGK : Deutsche Geodätische Kommission
ZfV : Zeitschrift für Vermessungswesen

10. EKLER

[Ek -1]

İzometrik enlemden coğrafi enleme dönüşüm serisi katsayıları:

$$c_2 = 0.1931312717^\circ = 0.003\ 370\ 775\ 881\ 332 \text{ radyan}$$

$$c_4 = 0.0003797387^\circ = 6.627\ 690\ 421\ 917\ 10^{-6} \text{ radyan}$$

$$c_6 = 0.0000010239^\circ = 1.787\ 091\ 988\ 092\ 10^{-8} \text{ radyan}$$

$$c_8 = 0.0000000031^\circ = 5.419\ 122\ 278\ 250\ 10^{-11} \text{ radyan}$$

[Ek -2]

Coğrafi koordinatlardan düzlem dik koordinatların hesabı için a_i sabit katsayılarının elde edilmesi:

$$x=R_0-R, \quad \frac{dx}{dR} = -1,$$

$$\frac{dR}{dq} = \frac{dR}{d\ln R} \frac{d\ln R}{dq}$$

$$\frac{(d\ln R + i\Delta L')}{d(q-i\Delta L)} = \frac{\partial(i\Delta L')}{\partial(-i\Delta L')},$$

$$\frac{\partial \ln R}{dq} = \frac{\partial(i\Delta L')}{\partial(-i\Delta L')} = -\sin B_0 = -\alpha$$

$$\text{buradan} \quad \frac{dR}{dq} = -R_0 \sin B_0,$$

$$\left(\frac{dx}{dq}\right)_0 = \left(\frac{dx}{dR} \frac{dR}{dq}\right)_0 = R_0 \sin B_0$$

$$\frac{d^n x}{dq^n} = \frac{d}{dR} \frac{d^{n-1} x}{dq^{n-1}} \frac{dR}{dq} \quad \text{genel formülü kullanılarak;}$$

$$\frac{d^2 x}{dq^2} = -R_0 \sin^2 B_0,$$

$$\frac{d^3 x}{dq^3} = R_0 \sin^3 B_0$$

ifadeleri elde edilir. Burada $R_0 = N_0 \cot B_0$ ve $t_0 = \tan B_0$ dönüşümü yapılarak;

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n x}{dq^n} \quad \text{genel formülüne göre sabit katsayılar}$$

$$a_1 = N_0 \cos B_0,$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} N_0 \cos^2 B_0 t_0$$

$$a_3 = \frac{1}{6} N_0 \cos^3 B_0 t_0^2,$$

$$a_4 = -\frac{1}{24} N_0 \cos^4 B_0 t_0^3$$

$$a_5 = \frac{1}{120} N_0 \cos^5 B_0 t_0^4,$$

$$a_6 = -\frac{1}{720} N_0 \cos^6 B_0 t_0^5$$

$$a_7 = \frac{1}{5040} N_0 \cos^7 B_0 t_0^6,$$

$$a_8 = -\frac{1}{40320} N_0 \cos^8 B_0 t_0^7$$

bulunur.

[Ek - 3]

Kuvvet serileri ile $(\Delta B, \Delta L)$ 'den (x, y) düzlem dik koordinatlarının hesabında $(\Delta q + i\Delta L)$ kompleks ifadesinin yüksek dereceden açılımı

$$(\Delta q + i\Delta L)^2 = (\Delta q^2 - \Delta L^2) + i(2\Delta q\Delta L)$$

$$(\Delta q + i\Delta L)^3 = (\Delta q^3 - 3\Delta q\Delta L^2) + i(3\Delta q^2\Delta L - \Delta L^3)$$

$$(\Delta q + i\Delta L)^4 = (\Delta q^4 - 6\Delta q^2\Delta L^2 + \Delta L^4) + i(4\Delta q^3\Delta L - 4\Delta q\Delta L^3)$$

$$(\Delta q + i\Delta L)^5 = (\Delta q^5 - 10\Delta q^3\Delta L^2 + 5\Delta q\Delta L^4) + i(5\Delta q^4\Delta L - 10\Delta q^2\Delta L^3 + \Delta L^5)$$

$$(\Delta q + i\Delta L)^6 = (\Delta q^6 - 15\Delta q^4\Delta L^2 + 15\Delta q^2\Delta L^4 - \Delta L^6) + i(6\Delta q^5\Delta L - 20\Delta q^3\Delta L^3 + 6\Delta q\Delta L^5)$$

$$(\Delta q + i\Delta L)^7 = (\Delta q^7 - 21\Delta q^5\Delta L^2 + 35\Delta q^3\Delta L^4 - 7\Delta q\Delta L^6) + \\ i(7\Delta q^6\Delta L - 35\Delta q^4\Delta L^3 + 21\Delta q^2\Delta L^5 - \Delta L^7)$$

[Ek - 4]

(B, L) coğrafi koordinatlarından (x, y) düzlem dik koordinatlarının hesabında coğrafi enlemden izometrik enleme dönüşüm için c_i sabit katsayılarının elde edilmesi

$$c_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n q}{dB^n} \right)_0 \quad \text{genel denklemden;}$$

$$\left(\frac{dt}{dB} \right)_0 = 1 + t_0^2, \quad \left(\frac{dq}{dB} \right)_0 = \frac{M_0}{N_0 \cos B_0} = \frac{1}{V_0^2 \cos B_0} \quad \text{şeklinde}$$

başlangıca bağlı türevler oluşturularak;

$$c_1 = \frac{1}{\cos B_0} (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4 - \eta_0^6 +), \quad c_5 = \frac{1}{120 \cos B_0} (5 + 28t_0^2 + 24t_0^4 +)$$

$$c_6 = \frac{1}{720} \left(\frac{d^6 q}{dB_0^6} \right)' = \frac{1}{720} \left(\frac{5}{\cos B_0} \right)' + \left(\frac{28 t_0^2}{\cos B_0} \right)' + \left(\frac{24 t_0^4}{\cos B_0} \right)'$$

$$c_6 = \frac{1}{720 \cos B_0} t_0 (61 + 180t_0^2 + 120t_0^4 +)$$

$$c_7 = \frac{1}{5040} \left(\frac{d^7 q}{dB_0^7} \right)' = \frac{1}{5040} \left(\frac{61 t_0}{\cos B_0} \right)' + \left(\frac{180 t_0^3}{\cos B_0} \right)' + \left(\frac{120 t_0^5}{\cos B_0} \right)'$$

$$c_7 = \frac{1}{5040 \cos B_0} (61 + 662 t_0^2 + 1320 t_0^4 + 720 t_0^6 +)$$

elde edilir.

[Ek - 5]

Kuvvet serileri ile $(\Delta B, \Delta L)$ 'den (x, y) hesabında izometrik seri kuvvetlerinin açılımı

$$\Delta q = c_1 \Delta B + c_2 \Delta B^2 + c_3 \Delta B^3 + c_4 \Delta B^4 + c_5 \Delta B^5 + c_6 \Delta B^6 + c_7 \Delta B^7 + \dots$$

$$\Delta q^2 = c_1^2 \Delta B^2 + 2c_1 c_2 \Delta B^3 + (2c_1 c_3 + c_2^2) \Delta B^4 + (2c_1 c_4 + 2c_2 c_3) \Delta B^5 +$$

$$(c_3^2 + 2c_1 c_5 + 2c_2 c_4) \Delta B^6 + (2c_1 c_6 + 2c_2 c_5 + 2c_3 c_4) \Delta B^7 + \dots$$

$$\Delta q^3 = c_1^3 \Delta B^3 + (3c_1^2 c_2 + 3c_1 c_2^2) \Delta B^5 + (c_1^2 c_4 + 6c_1 c_2 c_3 + c_2^3) \Delta B^6 +$$

$$(3c_1^2 c_5 + 6c_1 c_2 c_4 + 3c_1 c_3^2 + 3c_2^2 c_3) \Delta B^7 + \dots$$

$$\Delta q^4 = c_1^4 \Delta B^4 + 4c_1^3 c_2 \Delta B^5 + (4c_1^3 c_3 + 6c_1^2 c_2^2) \Delta B^6 + (4c_1^3 c_4 + 12c_1^2 c_3 c_2 + 4c_1 c_2^3) \Delta B^7 + \dots$$

$$\Delta q^5 = c_1^5 \Delta B^5 + 5c_1^4 c_2 \Delta B^6 + (5c_1^4 c_3 + 10c_1^3 c_2^2) \Delta B^7 + \dots$$

$$\Delta q^6 = c_1^6 \Delta B^6 + 6c_1^5 c_2 \Delta B^7 + \dots$$

$$\Delta q^7 = c_1^7 \Delta B^7 + \dots$$

[Ek - 6]

Kuvvet serileri ile (x, y) düzlem dik koordinatlarından $(\Delta B, \Delta L)$ hesabında $(x+iy)$ kompleks ifadesinin yüksek dereceden açılımı şöyledir:

$$(x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$$

$$(x+iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$$

$$(x+iy)^4 = (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + i(4x^3y - 4xy^3)$$

$$(x+iy)^5 = (x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4) + i(5x^4y - 10x^2y^3 + y^5)$$

$$(x+iy)^6 = (x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6) + i(6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5)$$

$$(x+iy)^7 = (x^7 - 21x^5y^2 + 35x^3y^4 - 7xy^6) + i(7x^6y - 35x^4y^3 + 21x^2y^5 - y^7)$$

$$(x+iy)^8 = (x^8 - 28x^6y^2 + 70x^4y^4 - 28x^2y^6 - y^8) + i(8x^7y - 56x^5y^3 + 56x^3y^5 - 8xy^7)$$

[Ek - 7]

İzometrik enlemden coğrafi enleme dönüşüm seri katsayılarında yüksek dereceden terimler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\left(\frac{dB}{dq}\right)_0 = \cos B_0 (1+\eta_0^2), \quad \left(\frac{dt}{dq}\right)_0 = \cos B_0 (1+t_0^2+\eta_0^2+t_0^2\eta_0^2)$$

$$d_1 = \cos B_0 (1+\eta_0^2), \quad d_5 = \frac{1}{120} \cos^5 B_0 (5-18t_0^2+t_0^4)$$

$$d_6 = \frac{1}{720} \left(\frac{d^6 B_0}{dq_0^6}\right)' = \frac{1}{720} ((5 \cos^5 B_0)' - (18 t_0^2 \cos^5 B_0)' + (t_0^4 \cos^5 B_0)')$$

$$d_6 = \frac{1}{720} \cos^6 B_0 t_0 (-61+58t_0^2-61\eta_0^2-t_0^4+58t_0^2\eta_0^2-t_0^4\eta_0^2)$$

$$d_7 = \frac{1}{5040} \left(\frac{d^7 B_0}{dq_0^7}\right)' = \frac{1}{5040} ((\cos^6 B_0 t_0)' (-61+58t_0^2-61\eta_0^2-t_0^4+58t_0^2\eta_0^2-t_0^4\eta_0^2)')$$

$$d_7 = \frac{1}{5040} \cos^7 B_0 (-61+479t_0^2-179t_0^4-122\eta_0^2+1080t_0^2\eta_0^2-474t_0^4\eta_0^2-61\eta_0^4+601t_0^2\eta_0^4+t_0^6)$$

[Ek - 8]

Doğrultu ve uzunluk indirgemeleri için bütün konform tasvirler için geçerli olan Draheim tarafından verilen diferansiyel formüller aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \delta_1 = & \frac{1}{2m} m_y \Delta x - \frac{1}{2m} m_x \Delta y + \left[-\frac{1}{4m^2} m_x m_y + \frac{1}{6m} m_{xy} \right] \Delta x^2 + \\ & \left[-\frac{1}{4m^2} m_x m_y - \frac{1}{6m} m_{xy} \right] \Delta y^2 + \left[\frac{1}{4m^2} (m_x)^2 - \frac{1}{4m^2} (m_y)^2 - \frac{1}{6m} m_{xx} + \frac{1}{6m} m_{yy} \right] \Delta x \Delta y + \\ & \left[-\frac{1}{24m^2} m_y m_{xx} + \frac{1}{24m^2} m_y m_{yy} + \frac{1}{24m} m_{xxy} \right] \Delta x^3 + \\ & \left[-\frac{1}{6m^2} m_x m_{xx} - \frac{1}{6m^2} m_x m_{yy} - \frac{1}{24m} m_{xxx} + \frac{1}{12m} m_{xyy} \right] \Delta x^2 \Delta y + \\ & \left[-\frac{1}{6m^2} m_y m_{xx} - \frac{1}{6m^2} m_y m_{yy} - \frac{1}{12m} m_{xxy} + \frac{1}{24m} m_{yyy} \right] \Delta x \Delta y^2 + \\ & \left[-\frac{1}{24m^2} m_x m_{xx} + \frac{1}{24m^2} m_x m_{yy} - \frac{1}{24m} m_{xyy} \right] \Delta y^3 + \\ & \left[-\frac{1}{36m^2} (m_{xx})^2 - \frac{17}{360m^2} m_{xx} m_{yy} + \frac{7}{360m^2} (m_{yy})^2 + \frac{1}{40m} m_{xxyy} - \frac{1}{120m} m_{xxxx} \right] \Delta x^3 \Delta y + \\ & \left[-\frac{7}{360m^2} (m_{xx})^2 + \frac{17}{360m^2} m_{xx} m_{yy} - \frac{1}{36m^2} (m_{yy})^2 - \frac{1}{40m} m_{xxyy} + \frac{1}{120m} m_{yyyy} \right] \Delta x \Delta y^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_2 = & -\frac{1}{2m} m_y \Delta x + \frac{1}{2m} m_x \Delta y + \left[\frac{1}{4m^2} m_x m_y - \frac{1}{3m} m_{xy} \right] \Delta x^2 + \\ & \left[-\frac{1}{4m^2} m_x m_y + \frac{1}{3m} m_{xy} \right] \Delta y^2 + \left[-\frac{1}{4m^2} (m_x)^2 + \frac{1}{4m^2} (m_y)^2 + \frac{1}{3m} m_{xx} - \frac{1}{3m} m_{yy} \right] \Delta x \Delta y + \\ & \left[\frac{1}{24m^2} m_y m_{xx} - \frac{1}{24m^2} m_y m_{yy} - \frac{1}{8m} m_{xxy} \right] \Delta x^3 + \\ & \left[-\frac{1}{4m^2} m_x m_{xx} + \frac{1}{4m^2} m_x m_{yy} + \frac{1}{8m} m_{xxx} - \frac{1}{4m} m_{xyy} \right] \Delta x^2 \Delta y + \\ & \left[-\frac{1}{4m^2} m_y m_{xx} + \frac{1}{4m^2} m_y m_{yy} + \frac{1}{4m} m_{xxy} - \frac{1}{8m} m_{yyy} \right] \Delta x \Delta y^2 + \\ & \left[\frac{1}{24m^2} m_x m_{xx} - \frac{1}{24m^2} m_x m_{yy} + \frac{1}{8m} m_{xyy} \right] \Delta y^3 + \\ & \left[-\frac{1}{18m^2} (m_{xx})^2 + \frac{7}{90m^2} m_{xx} m_{yy} - \frac{1}{45m^2} (m_{yy})^2 + \frac{1}{30m} m_{xxyy} - \frac{1}{10m} m_{xxxx} \right] \Delta x^3 \Delta y + \\ & \left[\frac{1}{45m^2} (m_{xx})^2 - \frac{7}{90m^2} m_{xx} m_{yy} + \frac{1}{18m^2} (m_{yy})^2 + \frac{1}{10m} m_{xxyy} - \frac{1}{30m} m_{yyyy} \right] \Delta x \Delta y^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S-s = s[& \frac{1}{m} - \frac{1}{2m^2} m_x \Delta x - \frac{1}{2m^2} m_y \Delta y + [\frac{1}{3m^3} (m_x)^2 - \frac{1}{24m^3} (m_y)^2 - \frac{1}{6m^2} m_{xx}] \Delta x^2 + \\
 & [\frac{3}{4m^3} m_x m_y - \frac{1}{3m^2} m_{xy}] \Delta x \Delta y + [-\frac{1}{24m^3} (m_x)^2 + \frac{1}{3m^3} (m_y)^2 - \frac{1}{6m^2} m_{yy}] \Delta y^2 + \\
 & [\frac{1}{4m^3} m_x m_{xx} - \frac{1}{24m^2} m_{xxx}] \Delta x^3 + [\frac{7}{24m^3} m_y m_{xx} - \frac{1}{24m^3} m_y m_{yy} - \frac{1}{8m^2} m_{xxy}] \Delta x^2 \Delta y + \\
 & [-\frac{1}{24m^3} m_x m_{xx} + \frac{7}{24m^3} m_x m_{yy} - \frac{1}{8m^2} m_{xyy}] \Delta x \Delta y^2 + [\frac{1}{4m^3} m_y m_{yy} - \frac{1}{24m^2} m_{yyy}] \Delta y^3 + \\
 & [\frac{1}{20m^3} (m_{xx})^2 - \frac{1}{120m^2} m_{xxx}] \Delta x^4 + [\frac{1}{20m^3} (m_{yy})^2 - \frac{1}{120m^2} m_{yyy}] \Delta y^4 + \\
 & [-\frac{1}{90m^3} (m_{xx})^2 + \frac{11}{90m^3} m_{xx} m_{yy} - \frac{1}{90m^3} (m_{yy})^2 - \frac{1}{20m^2} m_{xxyy}] \Delta x^2 \Delta y^2]
 \end{aligned}$$

Doğrultu ve uzunluk indirgemeleri hesabında kullanılan kısmi diferansiyeller; büyüme oranı formülünden hareket edilerek aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$\begin{aligned}
 m = 1 + \frac{1}{2r_0^2} x^2 + \frac{1}{48r_0^3} t_0 (8-36\eta_0^2 + 19\eta_0^4) x^3 + \frac{1}{16r_0^3} t_0 (-8+4\eta_0^2 - 11\eta_0^4) xy^2 + \\
 \frac{1}{24r_0^4} (1+3t_0^2 - 4\eta_0^2 - 3t_0^2\eta_0^2) x^4 + \frac{1}{4r_0^4} (-3t_0^2 + 7t_0^2\eta_0^2) x^2 y^2 + \frac{1}{8r_0^4} (t_0^2 - t_0^2\eta_0^2) y^4 + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial m}{\partial x} = \frac{1}{r_0^2} x + \frac{1}{16r_0^3} t_0 (8-36\eta_0^2 + 19\eta_0^4) x^2 + \frac{1}{16r_0^3} t_0 (-8+4\eta_0^2 - 11\eta_0^4) y^2 + \\
 \frac{1}{6r_0^4} (1+3t_0^2 - 4\eta_0^2 - 3t_0^2\eta_0^2) x^3 + \frac{1}{2r_0^4} (-3t_0^2 + 7t_0^2\eta_0^2) xy^2 + \dots
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{1}{8r_0^3} t_0 (-8+4\eta_0^2 - 11\eta_0^4) xy + \frac{1}{2r_0^4} (-3t_0^2 + 7t_0^2\eta_0^2) x^2 y + \frac{1}{2r_0^4} (t_0^2 - t_0^2\eta_0^2) y^3 + \dots$$

$$\left(\frac{\partial m}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{r_0^4} x^2, \quad \left(\frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial m}{\partial y} \right) = 0, \quad \left(\frac{\partial m}{\partial y} \right)^2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial y^2} = \frac{1}{8r_0^3} t_0 (-8+4\eta_0^2 -11\eta_0^4) x + \frac{1}{2r_0^4} (-3t_0^2 + 7t_0^2 \eta_0^2) x^2 + \frac{3}{2r_0^4} (t_0^2 - t_0^2 \eta_0^2) y^2 + \dots$$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} = \frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{8r_0^3} t_0 (8-36\eta_0^2 +19\eta_0^4) x + \frac{1}{2r_0^4} (1+3t_0^2 -4\eta_0^2 -3t_0^2 \eta_0^2) x^2 + \frac{1}{2r_0^4} (t_0^2 - t_0^2 \eta_0^2) y^2$$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y} = \frac{1}{8r_0^3} t_0 (-8+4\eta_0^2 -11\eta_0^4) y + \frac{1}{r_0^4} (-3t_0^2 + 7t_0^2 \eta_0^2) xy + \dots$$

$$\frac{1}{m^2} = 1 - \frac{1}{r_0^2} x^2 - \frac{1}{24r_0^3} t_0 (8-36\eta_0^2 +19\eta_0^4) x^3 + \dots$$

$$\frac{\partial^3 m}{\partial x^2 \partial y} = \frac{1}{r_0^4} (-3t_0^2 + 7t_0^2 \eta_0^2) y + \dots$$

$$\frac{\partial^3 m}{\partial y^3} = \frac{3}{r_0^4} (t_0^2 - t_0^2 \eta_0^2) y + \dots$$

$$\frac{\partial^3 m}{\partial x^3} = \frac{1}{8r_0^3} t_0 (8-36\eta_0^2 +19\eta_0^4) + \frac{1}{r_0^4} (1+3t_0^2 -4\eta_0^2 -3t_0^2 \eta_0^2) x + \dots$$

$$\frac{\partial^3 m}{\partial x \partial y^2} = \frac{1}{8r_0^3} t_0 (-8+4\eta_0^2 -11\eta_0^4) + \frac{1}{r_0^4} (-3t_0^2 + 7t_0^2 \eta_0^2) x + \dots$$

[Ek - 9]

Çalışmada kullanılan sembol, kısaltma ve seri ifadeler

a	: Elipsoidin büyük yarı eksen	= 6 378 388
b	: Elipsoidin küçük yarı eksen	= 6 356 911.94613
c	: Elipsoidin kutup eğrilik yarıçapı	= 6 399 936. 60811
$e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$	: Birinci eksentrisitenin karesi	= 0.006 722 670 022 333
$e'^2 = (a^2 - b^2)/b^2$	: İkinci eksentrisitenin karesi	= 0.006 768 170 197 224
$\eta^2 = e'^2 \cos^2 B$	: Yardımcı fonksiyon	
$V^2 = 1 + \eta^2$	: Yardımcı fonksiyon	
$t = \tan B$	: Yardımcı fonksiyon	
$M = c/V^3$	: Meridyen eğrilik yarıçapı	
$N = c/V$	: Enine eğrilik yarıçapı	
$r = \sqrt{MN} = c/V^2$	: Gauss eğrilik yarıçapı	
B	: Elipsoidde coğrafi enlem,	
L	: Elipsoidde coğrafi boylam,	
q	: Elipsoidde izometrik enlem,	
S	: Elipsoidde jeodezik eğri parçası uzunluğu,	
s	: Düzlemde doğru parçası uzunluğu,	
R	: B enlemli paralel dairenin düzlem tasvir yarıçapı	
R_0	: B_0 enlemli ana paralel dairenin düzlem tasvir yarıçapı,	
ΔL	: Boylam farkı,	
$\Delta L'$	: ΔL boylam farkının düzlem karşılığı ve	

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2!} f''(x)h^2 + \frac{1}{3!} f'''(x)h^3 + \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\tan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \dots, \quad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{arc} \tanh(x) = \ln((1+x)/(1-x)) / 2$$

dır.

ÖZGEÇMİŞ

1967 yılında Giresun ili Tirebolu ilçesi Aşağı Boynuyoğun köyünde doğan Kemal ÇELİK, köyde İlkokul öğreniminden sonra, orta öğrenimini sırasıyla Boynuyoğun Orta Okulu ve Tirebolu Lisesinde yapmıştır. 1985 yılında kaydolduğu KTÜ Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği Bölümünden 1989 yılında mezun olduktan sonra ; aynı yıl KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans öğrenimine başlamıştır. 1990 yılında KTÜ Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği Bölümünde araştırma görevlisi olarak atanmış olup; halen bu görevine devam etmektedir.