DEĞİŞKEN ÇEKİRDEKLİ SİNGÜLER İNTEGRAL

OPERATÖRLER ÜZERİNE

Duygu AKÇA

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Eylül - 2010

DEĞİŞKEN ÇEKİRDEKLİ SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLER ÜZERİNE

Duygu AKÇA

Dumlupınar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Sınav Yönetmenliği Uyarınca
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

Eylül - 2010

KABUL ve ONAY SAYFASI

Duygu Akça'nın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Değişken Çekirdekli Singüler İntegral Operatörler Üzerine" başlıklı bu çalışma, jürimizce Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

........./......../.........

Üye : Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM

Üye : Doç. Dr. Elçin YUSUFOĞLU

Üye : Doç. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu'nun ....../...../..... gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

. Prof. Dr. Atalay KÜÇÜKBURSA

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DEĞİŞKEN ÇEKİRDEKLİ SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLER ÜZERİNE

Duygu AKÇA
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, 2010
Tez Danışman: Doç. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

ÖZET

Bu tezin amacı değişken çekirdekli singüler integral operatörlerin ağırlıklı sınırlıklarını araştırmaktır. Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. İlk önce konu ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde ağırlıklı Hardy uzayları ve A_p ağırlıkların Tanımları ile birlikte özellikleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde her iki değişkene göre düzgün olan çekirdeklerin sınıfı ele alınmış ve daha sonra bu tip çekirdekli singüler integral operatörlerin L_p sınırlılığını elde etmek için Kurtz-Wheeden metodu incelenmiştir. Buna ek olarak bu operatörlerin H_p -L_p sınırlılığı incelenmiştir. Son bölümde, değişken çekirdekli singüler integrallerin L_p, H_p-L_p sınırlılıkları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: A_p Ağırlıklar, Değişken Çekirdekli Singüler İntegral Operatörler, H_p-L_p Sınırlılıklar, Singüler İntegraller.

ON THE SINGULAR INTEGRAL OPERATORS WITH VARIABLE KERNEL

Duygu AKÇA
Department of Mathematics, MSc. Thesis, 2010
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters. The first chapter devoted to the fundamental concepts. In the second chapter, the definitions of A_p of weights and the weighted Hardy spaces togerher with their properties is given. In Chapter 3, the class of kernels with smoothness in both variables are discussed and Kurtz-Wheeden's method to get the L_p boundedness of singular integral operators with kernel in this category are investigated. In additional, the H_p-L_p boundedness of the operator are studied. In the final chapter, the weighted boundedness of the singular integral operator with variable kernels are investigated.

Keywords: A_p Weights, H_p-L_p Boundedness, Singular Integral, Singular Integral Operator With Variable Kernel.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU'na ve desteğini hep yanımda hissettiğim canım aileme teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. GİRİŞ

Calderon–Zygmund Singüler integral operatöler teorisi 1950 yıllarda incelenmeye başlanmıştır. Bu teori kısmi diferensiyel denklemler alanında çok önemli rol oynar. Singüler integral operatörler, ilk olarak konvolüsyon tipli operatör olarak ele alınmıştır. S^{n-1}, $\mathbb{R}^n$'de $(n \geq 2)$ birim küre ve $d\sigma$ lebesque ölçümü olmak üzere bu operatörlerin sınıfı

$$Tf(x) = p.v.\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)\,f(y)dy$$

şeklinde Tanımlanır. Burada K çekirdeği

$$\begin{cases} \widetilde{K}(rx) = r^{-n}\widetilde{K}(x)\,, & \forall r > 0 \text{ ve } x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \text{ için} \\ \displaystyle\int_{S^{n-1}} \widetilde{K}(x)\,d\sigma(x) = 0 & \end{cases}$$

şartlarını sağlar. Bu tip singüler integraller birçok çalışma bilim adamları tarafından kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır [1-7].

Günümüzde çoğu matematikçi, Calderon-Zygmund operatörlerinin ikinci tipi üzerinde yoğunlaşmışlardır. Bu tip değişken çekirdekli singüler integral operatörler sınıf şu şekilde Tanımlanır. $K(x, y)$ çekirdeği $\mathbb{R}^n x(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ üzerinde Tanımlı bir kompleks fonksiyon olsun ve aşağıdaki şartları sağlasın.

(i) Her $x \in \mathbb{R}^n$ için $K\,(x, .)$, $-n$. dereceden homojendir yani $\lambda > 0$ ve $y \neq 0$ için

$$K(x, \lambda y) = \lambda^{-n}\; K(x, y)$$

dir.

(ii) Her $x \in \mathbb{R}^n$ için $K\,(x, .)$, S^{n-1} üzerinde integrallenebilirdir ve

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{S^{n-1}} |K(x-y)|\,d\sigma(y) < \infty$$

(iii). Her $x \in \mathbb{R}^n$ için $\int_{S^{n-1}} K(x-y)d\sigma(y) = 0$ dir. Şimdi $K(x, y)$ çekirdeği yardımıyla

$$K_{\varepsilon(x,y)} = \begin{cases} K(x,y), & |y| \geq \varepsilon| \\ 0, & |y| < \varepsilon \end{cases}$$

şeklindeki yeni çekirdeği Tanımlayalım. Bu durumda $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ için konvolisyon tipli T_ε operatörünü

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x, x-y)\,f(y)dy$$

şeklinde Tanımlayalım. Bu durumda T_ε her yerde iyi Tanımlıdır. Eğer

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon f(x)$$

limiti varsa T operatörüne K değişken çekirdekli singüler integral operatör denir. Bizim amacımız bu tür operatörler sınıfını çalışmaktadır.

1955 ve 1956 yıllarında Calderon Zygmund [8, 2] değişken çekirdekli singüler integral operatörlerinin L_p sınırlılığını araştırmıştır. Bu çalışmalar sonucunda bu operatörlerin, değişken katsayılı ikinci mertebeden lineer eliptik denklemler ile çok yakın ilişkisi olduğunu bulmuştur[9]. Çalışmasında ([2], Teorem 2 ve [8], Teorem 2) sonuçlarını aşağıdaki şekilde genelleştirmiştir. $p > 1$ için $p' = p/(p-1)$ olsun.

Teorem 1.1: $1 < p, q < \infty$ için;

(i) $1 < p \leq 2$ ise $\frac{1}{q} < \frac{1}{p'} + \frac{1}{p'(n-1)}$ ve

(ii) $2 \leq p < \infty$ ise $\frac{1}{q} < \frac{1}{p'} + \frac{1}{p\ (n-1)}$

sağlasın. Kabul edelim ki, $\sup_{x \in R^n} \int_{S^{n-1}} |K(x-y)|^q \, d\sigma(y) < \infty$ dir. Bu durumda her $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ için Tf operatörü hemen her yerde mevcut ve $\|Tf\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}$ olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır. Özellikle $p \geq q'$ için $\|Tf\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}$ dir.

Bu tezin amacı bu sonuçları ağırlıklı uzaylara genişletmektir. Bölüm 2'de A_p ağırlıklarının Tanımları ve H_w^p uzaylarının Tanım ve özellikleri verilmiştir. Değişken çekirdeklerin düzgünlüğü iki kategoride ele alınmıştır. Birincisi her iki değişkende de düzgünlüğe sahip çekirdekler sınıfıdır. Bu kategorideki çekirdekli T operatörünün L_w^p sınırlılığını elde etmek için dört eşitsizlik ele alınarak Kurtz-Wheeden metodu [10] kullanılmıştır. Buna ek olarak operatörlerin H_w^p- L_w^p sınırlılığı göz ününe alınmıştır. Bu sonuçlarda 3. Bölümde verilmiştir. 2. Kategori sadece y değişkenine göre düzgünlüğe sahip çekirdeklerin sınıfı olup bunlarda 4. Bölümde incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 (Konvolüsyon): $f$ve K, $\mathbb{R}^n$de Tanımlı ve ölçülebilir iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$h(x) = (f * K)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)K(x-y)dy$$

biçimindeki $h(x)$ fonksiyonuna f ve K 'nın konvolüsyonu denir.

Tanım 2.2 (Singüler İntegral): f ve K 'de Tanımlı ve ölçülebilir iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$h(x) = (f * K)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)K(x-y)dy$$

biçimindeki $h(x)$ fonksiyonuna f ve K 'nın konvolüsyonu denir. Eğer, $\alpha = n$ ise $h(x)$ integraline singüler integral denir. Burada α, K 'nın homojenlik mertebesi ve n uzayın boyutudur.

Tanım 2.3 (Lokal İntegrallenebilir Fonksiyon): $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. $a<b$ için her sonlu $[a,b]$ aralığında f fonksiyonu integrallenebilir ise bu durumda f fonksiyonu $\mathbb{R}$ uzayında lokal integrallenebilirdir denir

Tanım 2.4 (Calderon-Zygmund Teorisi): K ,$\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$üzerinde lokal integrallenebilen ve $\mathbb{R}^n$'de bir parçalı dağılımlı ve

$$\left|\tilde{K}(\xi)\right| \le A$$

olacak şekilde $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ için

$$\int_{|x|>2|y|} \left|K(x-y)-K(x)\right| dx \le B$$

olsun. Bu durumda, $1<p<\infty$ için

$$\|K * f\|_p \le C_P \|f\|_p$$

ve

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |K * f(x)| > \lambda\}| \le \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L_1}$$

dir.

Tanım 2.5 (Hörmander şartı): K, $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$üzerinde lokal integrallenebilen ve $\mathbb{R}^n$'de parçalı dağılımlı bir fonksiyon olsun. $y \in \mathbb{R}^n$için

$$\int_{|x|>2|y|} |K(x-y)-K(x)| dx \le B$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu eşitsizliğe " Hörmander Koşulu" denir.

Tanım 2.6 (Homojen Fonksiyon): Her $\lambda > 0$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\Omega(\lambda x) = \lambda^{\alpha}\Omega(x)$$

ise $\Omega(x)$ çekirdeğine α. dereceden homojendir denir.

Tanım 2.7 (Düzgün eğri): r, I aralığında Tanımlı vektör değerli bir fonksiyon olsun. Eğer r, I üzerinde sürekli türevlere sahip ve I 'nın her bir t iç noktasında $r'(t) \neq 0$ ise r fonksiyonu düzgündür denir. Eğer bir c eğrisinin düzgün bir $r(t)$ parametrik gösterimi varsa c eğrisine düzgün eğri adı verilir.

Tanım 2.8 (L_p Uzayı): f integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$L^p = L^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f: \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty, \quad 1 \le p < \infty \right\}$$

kümesine L_p uzayı denir. Bu uzay üzerinde norm

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde Tanımlanır.

Tanım 2.9 (Karakteristik fonksiyon): $(-h,h)$ aralığında,

$$\chi_h(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-h,h); \\ 0, & x \notin (-h,h). \end{cases}$$

ise $\chi_h(x)$ fonksiyonuna karakteristik fonksiyon denir.

Tanım 2.10 (Ölçülebilir Fonksiyon): Her α reel değeri için $\{x: f(x) > \alpha\}$ cümlesi ölçülebilir ise f fonksiyonuna $\mathbb{R}$'de ölçülebilir fonksiyon denir.

Tanım 2.11 (Shwartz Uzayı): Eğer f fonksiyonu $\mathbb{R}^n$'de her mertebeden türevlenebilen ve tüm türevleri sonsuzda azalan ise yani, her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ için

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^{\alpha}D^{\beta}f\left(x\right)\right|<\infty$$

ise f fonksiyonuna Shwartz Uzayına aittir denir ve $f\in S(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. Burada

$$x^{\alpha}=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n}$$

ve

$$D^{\beta}=\frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}}\frac{\partial^{\beta_2}}{\partial x_2^{\beta_2}}\cdots\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}=\frac{\partial^{\beta_1+\beta_2+...+\beta_n}}{\partial x_1^{\beta_1}.\partial x_2^{\beta_2}...\partial x_n^{\beta_n}}$$

dir.

Tanım 2.12 (Sınırlı Operatör): $T:X\to Y$ bir lineer dönüşüm olsun. Her $x\in X$ için

$$\|Tx\|_Y\leq K\|x\|_X$$

olacak şekilde bir K sabit varsa T operatörüne sınırlı operatör denir.

Tanım 2.13 (Alt Lineer Operatör): X,Y F cismi üzerinde iki vektör uzayı $T:X\to Y$ lineer dönüşüm olsun. Her $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^{+}$ve her $x,y\in X$ için

(i) $x,y\in X$

(ii) $T\left(x+y\right)\leq T\left(x\right)+T\left(y\right)$

sağlanıyorsa T 'ye "alt lineer operatör" denir.

Tanım 2.14 (Destek-Support): G, $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$'nin boş olmayan bir alt kümesi ve $\overline{G}$, G 'nin $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$'de kapanışı olsun. Eğer $\overline{G}$, $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$'nin kompakt alt kümesi (kapalı ve sınırlı) ve $\overline{G}\subset\Omega$ ise $G\subseteq\Omega$ dir. u, G kümesi üzerinde Tanımlı bir fonksiyon ise

$$Supp\left(u\right)=\overline{\left\{x\in G:u\left(x\right)\neq 0\right\}}$$

kümesine u 'nun desteği denir. Eğer $Supp\left(u\right)\subseteq\Omega$ ise u fonksiyonuna Ω 'da kompakt desteğe sahiptir denir.

Tanım 2.15 (Küresel Harmonik): Bir K mertebeli homojen harmonik polinomu birim küre yüzeyine kısıtlanmasına K mertebeli küresel harmonik denir.

Tanım 2.16 (Ortonormal Baz): Herhangi bir X iç çarpım uzayında $\left\{e_1,e_2,...,e_k\right\}$ birim dikey (ortonormal) kümesi lineer bağımsızdır. Özellikle eğer X iç çarpım uzayı $k-$ boyutlu ise o zaman $\left\{e_1,e_2,...,e_k\right\}$ kümesi X için bir tabandır ve her $x\in X$ vektörü

$$x = \sum_{n=1}^{k} (x, e_n) e_n$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ ye bir ortonormal taban (birim dikey taban) denir ve (x, e_n) sayılarına bu tabana göre x'in bileşeni denir.

Tanım 2.17: X ve Y iki lineer uzay ve $T : D_T \subset X \to Y$ bir fonksiyon olsun. T fonksiyonuna operatör denir. Burada D_T, T'nin tanım kümesi ve $T(D_T) \subset Y$ de T'nin görüntü kümesidir. Eğer D_T, X'nin bir lineer alt uzayı ve T bir lineer dönüşüm ise her $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}$ $(\boldsymbol{veya}\mathbb{C})$ ve $x, y \in X$ için $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ dir.

Tanım 2.18 (Ağırlık Fonksiyonu): w$\in \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ şeklinde Tanımlı hemen hemen her yerde lokal integrallenebilen pozitif w fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir.

Tanım 2.19 (Fatou Lemma): $(x, A\,,\ \mu)$ ölçü uzayı ve (f_n), $f\colon X \to [0, \infty)$ fonksiyonların bir dizisi olsun.

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

dir.

Tanım 2.20 (Hölder Eşitsizliği): $f \in L^p, g \in L^{p'}$ ve $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p'}} = \mathbf{1}$ olmak üzere,

$$\left| f(x) g(x) dx \right| \leq \| f \|_p \, \| g \|_{p'}$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir.

Tanım 2.21 (Zayıf Tip): (X, μ) ve(Y, v) iki ölçü uzayı ve T,$L^p(X, \mu)$ uzayında Y'den $\mathbb{C}$'ye ölçülebilir fonksiyonlar uzayına bir operatör olsun. Eğer,

$$v(\{y \in Y \colon |Tf(y)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C \|f\|_p}{\lambda} \right)^q$$

ise $q > \infty$ için T operatörüne (p, q) zayıf tipli denir. Eğer $T\colon L^p(X, \mu) \to L^\infty(Y, v)$ sınırlı bir operatör ise bu durumda T'ye(p, ∞) zayıf tipli operatör denir. Eğer $T\colon L^p(X, \mu) \to L^\infty(Y, v)$ sınırlı bir operatör ise bu durumda T, (p, q) kuvvetli tipli denir.

Tanım 2.22 (Doubling Şartı): $p > 1$ve $w \in A_p$ için w fonksiyonu doubling şartını sağlar. Yani $c > 0$ sayısı için $w(2I) \leq cw(I)$ dir.

3. SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN AĞIRLIKLI SINIRLILIĞI

Bu bölümde singüler integral operatörlerinin ağırlıklı sınırlılığı üzerinde durulacaktır. dolayısıyla Muckenhoupt Ap ağırlıklı sınıfının ve ağırlıklı Hardy uzayının bazı özellikleri verilecektir.

3.1. Ap Ağırlıkları

Ap notasyonu ilk defa Rosenblum [11] tarafından kullanılmıştır. Reel sayılar üzerinde Ap'nin korektrasyonu ise Muckenhoupt [12] tarafından verilmiştir. Coifman ve Fefferman [13] bu sonuçları yüksek boyuta genişletmiştir. Ap şartı Hardy-Littewood maksimal fonksiyonları için gerek ve yeterli şarttır ve Hilbert dönüşümlerinin L_w^p (bk.[12, 13, 14]) uzayı üzerinde sınırlı olması için gerek ve yeter şarttır. Şimdi Ap ağırlıklarının özelliklerini ve Tanımını verelim.

Tanım 3.1.1: $1 < p < \infty$ için eğer her $B \subset \mathbb{R}^n$ yuvarı için

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)^{-1/(p-1)}dx\right)^{p-1} \leq C$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $c > 0$ sayısı varsa $\mathbb{R}^n$ negatif olmayan ve lokal integrallenebilir w fonksiyonuna A_p sınıfına aittir denir. Burada $|B|$, B yuvarının Lebesque ölçüsüdür. $p = 1$ ve her $B \subset \mathbb{R}^n$ yuvarı için

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x) \quad dx\right) \leq \mathrm{C}\, essinf_{x\in B} w(x)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde her bir c>0 sayısı varsa $w \in A_1$ 'dir.

Eğer A_p şartı $p > 1$ için sağlanırsa $w \in A_\infty$ ise bu durumda her $2 < \varepsilon \leq \infty$ için $w \in A_{p'}$ dir. Bazı n>1 için $w \in A_p$ 'dir. $1 < p < \infty$ için $w \in A_{p'}$ ise aynı zamanda her $r > p$ için $w \in A_{p'}$ dir. Göstermek için $q_w = \inf\{q > 1 : w \in A_q\}$ kullanacağız. A_p şartı ile ters Hölder şartı arasında yakın bir ilişki vardır.

Tanım 3.1.2: Eğer her $B \subset \mathbb{R}^n$ için

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)^r dx\right)^{1/r} \leq C\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)dx\right)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $r>1$ ve $C>0$ sabiti varsa, w fonksiyonuna r. mertebeden ters Hölder şartını sağlar denir ve $w \in RH_r$ şeklinde gösterilir.

Lemma 3.1.3: Farz edelim ki $w \in A_p$ dir. Bu durumda $\varepsilon > 0$ için $w \in A_{P-\varepsilon}$ dir [12].

Teorem 3.1.1: $r>1$ olsun. Bu durumda $w \in A_\infty$ olması için gerek ve yeter $w \in RH_r$ olmasıdır.

$w(E)$ ile $\int_B w(x)dx$ ağırlık ölçüsünü gösterelim. $B(x,r)$ ile x merkezli r yarıçaplı yuvarı gösterelim. Biliyoruz ki $p \geq 1$ için ve $w \in A_p$ için doubling şartı sağlanır. Yani $w(B(s,2r)) \leq Cw(B(x,r))$ olacak şekilde $C>0$ sayısı vardır [15].

İspat: $(\Rightarrow)$ $w^r \in A_\infty$ olsun. Bu durumda

$$w^r(x) \geq C\frac{1}{|B|}\int_B w^r(x)dy$$

dir. Böylece eşitsizliğin her iki tarafının $\frac{1}{r}$ kuvvetini alıp x'e göre integralini alırsak

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^r(x)\,dy\right)^{1/r} \leq C\frac{1}{|B|}\int_B w(x)\,dx$$

elde edilir. Bu ise $0<\frac{1}{r}<1$ için $w \in RH_r$ dir.

$(\Leftarrow)$ Tersine, bazı $0<\frac{1}{r}<1$ için $w \in RH_r$ olsun. Bu durumda bazı $\varepsilon>0$ için $w \in RH_{r(1+\varepsilon)}$ dir. Böylece

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{r(1+\varepsilon)}dy\right)^{\frac{1}{r(1+\varepsilon)}} \leq C\frac{1}{|B|}\int_B wdy$$

elde edilir.

Hölder eşitsizliğinden sağ taraftaki eşitsizlik $C\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^r dy\right)^{\frac{1}{r}}$ den küçüktür. Buradan $w^r \in A_\infty$ dir.

Şimdi aşağıdaki Teoremi verelim.

Teorem 3.1.2: $p \geq 1$, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için $w \in A_p$ olsun. Bu durumda $\lambda > 1$ ve herhangi bir $B(x,r)$ yuvarı için $w(B(x,\lambda r)) \leq C\lambda^{np} w(B(x,r))$ dir. Burada C, $B(x,r)$ ve λ'dan bağımsızdır [7].

İspat: $f \geq 0$ ve $B(x,r)$ yuvarı için

$$(f_B)^p w(B(x,r)) \leq C\int_B f(x)^p w(x)dx$$

eşitsizliğinde $f = \chi_E$ alalım. Burada, $E \subseteq B(x,r)$ dir. Bu durumda

$$(f_B)^p w(B(x,r)) \leq C\int_B \chi_E w(x)dx \leq Cw(B(x,r))$$

dir. $f_B = \frac{1}{|B|}\int_B f(x)dx \geq 0$ olsun. Her $x \in B(x,r)$ için $f_B \leq M(f\chi_B)(x)$ olsun. Bu durumda, $0 < t < f_B$ için

$$B(x,r) \subseteq S_t = \{x \in \mathbb{R}^n : M(f\chi_B)(x) > t\}$$

dir. Böylece

$$w(B(x,r)) \leq Ct^{-p}\int_B f(x)^p w(x)dx$$

elde edilir. Buradan $E \subseteq B(x,r)$ ölçülebilir bir alt kümesi ve eşitsizlikte f 'i f_{χ_E} ile yer değiştirelim. Böylece

$$\left(\frac{|E|}{|B(x,r)|}\right)^p w(B(x,r)) \leq w(E)$$

elde edilir. Eşitsizlikte ***E***'nin yerine $B(x,r)$ ve $B(x,r)$ ' nin yerine $\lambda B(x,r)$ aldığımızda

$$w(\lambda B(x,r)) \leq C\lambda^{np} w(B(x,r))$$

elde edilir.

Bir E kümesinin Lebesque ölçüsü ile onun ağırlıklı $w(E)$ Lebesque ölçüsü arasındaki bağlantıdan dolayı aşağıdaki Teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1.3: $p \leq 1$ için $w \in A_p$ ve $r > 1$ için $w \in RH_r$ olsun. Bu durumda bir B yuvarının herhangi bir ölçülebilir E alt kümesi için

$$C_1\left(\frac{|E|}{|B|}\right)^p \leq \frac{w(E)}{w(B)} \leq C_2\left(\frac{|E|}{|B|}\right)^{(r-1)/r}$$

olacak şekilde bir $C_1, C_2 > 0$ sabitleri vardır [16, 17].

İspat: $|E| = \int_E w(x)^{-\frac{1}{p}} w(x)^{\frac{1}{p}}\, dx$ olsun. Hölder eşitsizliğinden

$$\int_E w(x)^{-\frac{1}{p}} w(x)^{\frac{1}{p}}\, dx \le \left(\int_E w(x)^{-\frac{q}{p}} dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_E w(x) dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

dir. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir. Böylece

$$\left(\int_E w(x)^{-\frac{q}{p}} dx\right) \le C \int_B w(x)^{-\frac{q}{p}} dx$$

$$\le \left(\int_B w(x)^{-\frac{q}{p}p}\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_B 1^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\int_B w(x)^{-q} dx\right)^{\frac{1}{p}} |B|^{\frac{1}{p}} \le |B|^{1+\frac{q}{p}} \left(\int_B w(x)\, dx\right)^{-\frac{q}{p}}$$

olup

$$\left(\int_E w(x)^{-\frac{q}{p}} dx\right)^{\frac{1}{q}} \le |B|^{q\frac{1}{q}} \left(\int_B w(x) dx\right)^{-\frac{q}{p}\frac{1}{q}} \le |B| \left(\int_B w(x) dx\right)^{-\frac{1}{p}}$$

dir. Buradan

$$|E| \le C |B| \left(\int_B w(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E w(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{|E|}{|B|} \le C \frac{\left(\int_E w(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int_B w(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}}} \Rightarrow C_1 \left(\frac{|E|}{|B|}\right)^p \le \frac{\int_E w(x)\, dx}{\int_B w(x)\, dx} \Rightarrow C_1 \left(\frac{|E|}{|B|}\right)^p \le \frac{w(E)}{w(B)}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\frac{1}{|B|} \int_E w(x)\, dx \le \left(\frac{|E|}{|B|}\right)^{\frac{r-1}{r}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w(x)^r\, dx\right)^{\frac{1}{r}} \le C \left(\frac{|E|}{|B|}\right)^{\frac{r-1}{r}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w(x)\, dx\right)$$

dir. Buradan

$$\frac{\frac{1}{|E|}\int_E w(x)dx}{\frac{1}{|E|}\int_B w(x)dx} \leq C\left(\frac{|E|}{|B|}\right)^{\frac{r-1}{r}}$$

olup

$$\frac{w(E)}{w(B)} \leq C_2\left(\frac{|E|}{|B|}\right)^{\frac{r-1}{r}}$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

Ağırlıklı Hardy uzayları üzerinde operatörlerin sınırlılığını elde etmek için aşağıdaki lemmaya ihtiyaç vardır.

Lemma 3.1.4: $p \geq 1$ için $w \in A_p$ olsun. Bu durumda her $r > 0$ için $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için

$$\int_{|x-x_0|\geq r} \frac{w(x)}{|x-x_0|^{np}} dx \leq Cr^{-np} w(B(x_0,r))$$

olacak şekilde r ’den bağımsız bir $C > 0$ sabiti vardır.

İspat: $p > 1$ için $w \in A_p$ olduğunu biliyoruz. Buradan $\varepsilon > 0$ ve $p - \varepsilon > 1$ ve $w \in A_{p-\varepsilon}$ olur. Teorem 2.1.1’in $w \in A_{p-\varepsilon}$ için yazarsak

$$\int_{2^k r \leq |x-x_0| \leq 2^{k+1} r} \frac{w(x)}{|x-x_0|^{np}} dx$$

$$\leq \left(2^k r\right)^{-np} \int_{|x-x_0|\leq 2^{k+1}r} w(x)dx \leq \left(2^k r\right)^{-np} \quad w\left(B\left(x_0, 2^{k+1} r\right)\right)$$

$$\leq C_{w,n} 2^{-kn\in} r^{-np} w(B(x_0,r))$$

elde edilir. Böylece

$$\int_{|x-x_0|\geq r} \frac{w(x)}{|x-x_0|^{np}} dx$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k r \leq |x-x_0| \leq 2^{k+1} r} \frac{w(x)}{|x-x_0|^{np}} dx \leq C_{w,n} r^{-npw} w(B(x_0,r)) \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kn\varepsilon}$$

$$\leq C_{w,n} r^{-np} w(B(x_0,r))$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

3.2 Ağırlıklı Hardy Uzayları

φ, $S(\mathbb{R}^n)$ ‘de bir fonksiyon olsun. Burada $S(\mathbb{R}^n)$ Schwatz uzayı olup bu uzay $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$ eşitliğini sağlayan hızlı bir şekilde azalan düzgün fonksiyonlar uzayıdır. $r > 0, x \in \mathbb{R}^n$ için $\varphi(x) = r^{-n}\varphi(x/r)$ alalım ve f^* maksimal fonksiyonu $f^*(x) = \sup\limits_{r>0} | f * \varphi_r(x)|$ şeklinde Tanımlayalım. Bu durumda $H_w^p(\mathbb{R}^n)$ ağırlıklı Hardy uzayı $f^* \in L_w^p(\mathbb{R}^n)$ olacak şekilde $f^* \in S'(\mathbb{R}^n)$ dağılımlı fonksiyonlardan oluşur ve $\| f \|_{H_w^p} = \| f^* \|_{L_w^p}$ olarak alınır.

T operatörünün H_w^p - L_w^p sınırlılığını göstermek için Garcia-Cuerva’nın ağırlıklı Hardy uzayları için atomik ayrışım teorisini kullanacağız [18, 19]. Aşağıdaki yol ile atomik parçalanışına göre ağırlıklı Hardy uzaylarını karakterize edelim.

Tanım 3.2.1: q_w kritik indeks olmak üzere $w \in A_p$ olacak şekilde $q \neq p$ ve $0 < p \leq 1 \leq q \leq \infty$ olsun. [.], büyük tam fonksiyon, $N = \left[n\left(q_m/p - 1\right)\right]$ ve $s \in \mathbb{Z}$ için $s \geq N$ olsun. Bu durumda a fonksiyonuna eğer aşağıdaki şartlar sağlarsa x_0 merkezli $w - (p, q, s)$ atomu denir.

(i) $a \in L_w^q(\mathbb{R}^n)$ ve x_0 merkezli B yuvarında desteklidir.

(ii) $\| a \|_{L_w^p} \leq w(B)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}$ di.

(iii) $|a| \leq S$ olacak şekilde her α multi indeksi için $\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x)x^\alpha dx = 0$’dır.

$q = \infty$ olduğundan, L_w^p, L^∞ anlamında olacak ve $\| f \|_{L_w^\infty} = \| f \|_\infty$ şeklinde alacağız.

Teorem 3.2.1: $0 < p \leq 1 \leq q \leq \infty$ ve $p \neq q$ için $w \in A_p$ olsun. Bu f dağılım fonksiyonunun $H_w^p(\mathbb{R}^n)$ uzayında olması için gerek ve yeter şart dağılım anlamında $f = \sum \lambda_i \alpha_i$ olacak şekilde $\sum | \lambda_i |^p < \infty$ özelliğini sağlayan herhangi bir $\{\lambda_i\}$ dizisinin ve $w - (p, q, N)$ atomlarının $\{a_i\}$ dizisinin var olmasıdır. Ayrıca,

$$\|f \quad \|^p H_w^p \sim inf \left\{ \sum |\lambda_i|^p \alpha_i ; \sum \lambda_i \alpha_i \quad a, f' \text{nin bir ayrışımıdır } w - (p, q, N) \right\}$$

olmasıdır.

Atomik ayrışım Hardy uzaylarında operatörlerin sınırlılığını elde etmek için kullanışlıdırlar. Fakat genelde bir operatörün Hardy uzayları üzerinde sınırlı bir operatör olduğuna sonucuna operatörlerin normunun atomlara karşılık gelen bölgeler üzerinde düzgün sınırlı olduğuna bakılarak varılamaz [20]. Bundan dolayı eğer T operatörüne ekstradan bir sürelik eklersek, bu durumda T operatörünün H_w^1 uzayı üzerindeki sınırlılığını elde edelim[9,10].

Lemma 3.2.1: $0 < q \leq \infty$ olsun. Kabul edelim ki $\boldsymbol{S}$, herhangi bir $w-(1,q,N)$, $\boldsymbol{a}$ atomu için $\|S\alpha\|_{L_w^1} \leq C$ olacak şekilde $L_w^1(\mathbb{R}^n)$'den $L_w^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$'e sınırlı bir alt lineer operatör olsun. Bu durumda S, $H_w^1(\mathbb{R}^n)$'den $L_w^1(\mathbb{R}^n)$ 'e sınırlıdır.

İspat: Kabul edelim ki, $f \in H_w^1(\mathbb{R}^n)$'dir Teorem 2.1.1'den

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j \quad ile \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \leq C \, \|f\|_{H_w^1}$$

yazabiliriz. Burada a_j, $w-(1,q,N)$ atomudur. $f_n = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$ alalım. Bu durumda f_n dizileri $H_w^1(\mathbb{R}^n)$'den f 'e yakınsar. Bu f_n dizileri $L_w^1(\mathbb{R}^n)$ 'de f 'e yakınsar. Bu hipotezler yardımıyla $|Sf_n|$, $L_w^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ uzayında $|Sf|$'e yakınsar. Her $x \in \mathbb{R}^n$için $\lim_{k\to\infty} |Sf_{nk}(x)| = |Sf(x)|$ olacak şekilde $\{|Sf_{nk}|\}$ alt dizisi vardır.

$$\|Sf_{nk}\|_{L_w^1} \leq C \sum_{j=1}^{n_k} |\lambda_j| \, \|Saj\|_{L_w^1} \leq C \|f\|_{H_w^1}$$

olduğundan Fatou Lemmasından,

$$\| Sf \|_{L_w^1} \leq C \| f \|_{H_w^1}$$

elde edilir. Bu da lemma'yı ispat eder. Fatou lemmasından bir operatörün H_w^p - L_w^p sınırlılığını elde etmek için aşağıdaki Teoreme L_w^2 sınırlılık olarak verilen T operatörünün sürekliliğini açıklayalım.

Teorem 3.2.2: $0 < p \leq 1$ ve $w \in A_2$ olsun. $L_w^2(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı bir lineer S operatörü için S operatörünün $H_w^p(\mathbb{R}^n)$ den $L_w^p(\mathbb{R}^n)$ e sınırlı bir operatör olarak genişletilebilmesi için gerek ve yeter şart

$\|S\alpha\|_{L_w^p} \leq C$ herhangi bir $w-(p,2,[n(2/(p-1)]-a$ atom

olacak şekilde bir C sabitin mevcut olmasıdır [21].

4. İKİ DEĞİŞKENLİ DÜZGÜN OLAN SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN SINIRLILIĞI

4.1 İki Değişkenli Düzgün Çekirdekler

Bu bölümde iki değişkenli düzgün olan singüler integral operatörlerinin sınırlılığı ele alınacaktır. Uygunluk için aşağıdakileri ele alalım. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$'de Tanımlı bir $\Omega(x,z)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa, $q \geq 1$ için L^∞ $(\mathbb{R}^n) \times L^q$ (S^{n-1}) uzayındadır denir.

(i) Her $\lambda > 0$ ve her $x, z \in \mathbb{R}^n$için

$$\Omega(x,\lambda z) = \Omega(x,z) \tag{4.1}$$

(ii) Her $x \in \mathbb{R}^n$için

$$\int_{S^{n-1}} \Omega\,(x,y)\, d\sigma(z') = 0 \tag{4.2}$$

(iii). $$sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{S^{n-1}} \Omega\,(x,y) x^\alpha\, d\sigma(z') = 0 \tag{4.3}$$

Burada $z \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$için $z' = z/|z|$ dir.

$$K(x,z) = \frac{\Omega(x,z')}{|z|^n}$$

alalım. Bu durumda K değişken çekirdekli T singüler integrali

$$Tf(x) = p.v. \int_{R^n} \frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^n} f(y)dy \tag{4.4}$$

şeklinde Tanımlayalım.

4.2 Kurtz-Wheeden Metodu

1990'da Watson [7] konvolüsyon tipli singüler integral operatörü

$$\tilde{T}f(x) = p.v. \int_{R^n} \frac{\tilde{\Omega}(x-y)}{|x-y|^n} f(y)dy$$

şeklinde göz önüne alınmıştır. Burada $\Omega \in L^q(S^{n-1}), 1 \leq q \leq \infty$ 0. mertebeden homojen ve $\int_{S^{n-1}} \tilde{\Omega}(x')\, d\sigma(x') = 0$'dır. $\tilde{K}(x) = \frac{\tilde{\Omega}(x')}{|x|^n}$ şeklinde alalım. Bu durumda aşağıdaki Teoremi verebiliriz.

Teorem 4.2.1: $1 < q < \infty$ olsun. Kabul edelim ki $\widetilde{K}$

$$sup_{(0<|y|<R)} \sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^{n/q} \left(\int_{2^m R \le |x| \le 2^{m+1} R} \left[\widetilde{K}(x-y) - \widetilde{K}(x) \right]^q dx \right)^{1/q} = \mathrm{H_q} < \infty$$

L_q Hörmander şartını sağlar. Eğer $w \in A_{p/q'}$, $q' \le p < \infty$ ise bu durumda

$$\|\tilde{T}f\|_{L_w^p} \le B_{p,w} \|f\|_{L_w^p}$$

Ayrıca $B_{p,w}$ $C_{p,w}$ $(\|\tilde{\Omega}f\|_{L^1_{S^{n-1}}} + Hq)$'den daha küçüktür. Burada C_w^p, p, w'ye bağlı sabitler olup $(\|\tilde{\Omega}\|_{L^1(S^{n-1})}$ veya H_q'den bağımsızdır.

Teorem 4.2.1'i ispat etmek için Watson, Kurtz-Weeden metodunun [22] ağırlıklı kestirimlerdeki metoduna yoğunlaşmıştır. İlk önce $1 < p < \infty$ için $\tilde{T}$ ağırlıksız L^psınırlılığını ispat etmiştir. Daha sonra ağırlıksız L^psınırlılığını kullanıp

$$M^{\#}(\tilde{T}f)(x) \le Cf^*_{q'}(x) \tag{4.5}$$

eşitsizliğini göstermek için $\widetilde{K}$ çekirdeğinin bazı düzgün tipi kullanılmıştır. Burada $t > 0$ için $f_t^* = (M(|f|^t))^{1/t}$ ve M Hardy-Littwood maximal operatörünü göstermektedir ve

$$M^{\#}f(x) = sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B \lceil f(y) - f_B \rceil \; dy$$

şeklindedir. Burada $f_B = \frac{1}{|B|} \int_B f(y)dy$ ve B, $\mathbb{R}^n$'de bir birim yuvarı göstermektedir.

$$M^{\#}f(x) \le 2^{n+1} \bar{M} f(x)$$

eşitsizliği açıktır. Burada

$$\bar{M}f(x) = sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \lceil f(y) - f_{B(x,r)} \rceil \; dy$$

(4.5)'i kullanarak bilinen $w \in A^{\infty}$ için

$$\|Mf\|_{L_w^p} \le C \|M^{\#}f\|_{L_w^p} \tag{4.6}$$

[23] ve $w \in A_p$ için

$$\|Mf\|_{L_w^p} \le C \|f\|_{L_w^p} \tag{4.7}$$

kestirimlerle birlikte $\boldsymbol{\widetilde{T}}$ operatörünün $\boldsymbol{L_w^p}$ sınırlılığını elde etmek kolaydır.

4.3 L_P Sınırlığı

Bu kısım 4.2'de verilen Kurtz-Wheeden argümetleri ele alacağız. Kısım 4.1'de Tanımlanan T singüler operatörünün L^p ağırlıklı sınırlığını sağlatmak için K çekirdeği üzerindeki bazı düzgünlükleri bulacağız.

Teorem 4.3.1: 1<q<∞ ve her R>0 için

$$sup_{(x,y\in R^n)} \sum_{m=1}^{\infty}(2^m R)^{n/q'}\left(\int_{2^m R\le|x|<2^{m+1}R}[K(x,z-y)- K(x,z)]^q dz\right)^{\frac{1}{q}} < \infty \qquad (4.8)$$

$$sup_{(x,y\in R^n)(0<|x-y|<R} \sum_{m=1}^{\infty}(2^m R)^{n/q'}\left(\int_{2^m R\le|z|\le 2^{m+1}R}[K(x,z)- K(y,z)]^q dz\right)^{\frac{1}{q}} < \infty \qquad (4.9)$$

olacak şekilde $\Omega(x,z)\ \in L^{\infty}$ $(\mathbb{R}^n)\times L^q$ (S^{n-1})'dir. Eğer $w\in A_{p/q'}$, $q'\le p<\infty$ ise bu durumda T, L_w^p üzerinde sınırlıdır.

Yukarıdaki (4.8) ve (4.9) q= ∞ için $\|.\|_{\infty} 2^m R\le|z|\le 2^{m+1}R$ olduğundan anlaşılamaz.
$1<q_1<q_2\le\infty$ için kolayca kontrol edilebilir.
q_2 için (4.8) sağlanır →q_1 için (4.8) sağlanır.
q_2 için (4.9) sağlanır →q_1 için (4.9) sağlanır.

Şimdi Teorem 4.3.1'in ispatını verelim:

İspat: $w\in A_{p/q'}$ ve $q'\le p<\infty$ olsun. Teorem 1.1'i kullanarak (4.8) ve (4.9) kabulleri ile birlikte

$$M^{\#}(Tf)(x)\le Cf^{*}{}_{q'}(x) \qquad f\in L_w^p \text{ için} \qquad (4.10)$$

olduğunu iddia edelim. Bir an için bu iddianın doğruluğunu kabul edelim. (4.6), (4.7) ve bu iddiadan dolayı

$$\|Tf\|_{L_w^p}\le\|M(Tf)\|_{L_w^p}\le C\|M^{\#}(Tf)\|_{L_w^p}\le C\left\|f_{q'}^{*}\right\|_{L_w^p}\le C\|f\|_{L_w^p}$$

elde edebiliriz. Burada $w\in A_{p/q'}\,p>q'$

$p=q'$ için $w\in A_{p/q'}=A_1$ olduğundan $w^{1+\epsilon}\in A_{s/q'}$ olacak şekilde bir $\mathcal{E}>0$ vardır. verildiğinde herhangi bir $s>q'$ için $w^{1+\varepsilon}\in A_{s/q'}$'dir. $w_0(x)=\ 1$ ve $w_1(x)=\ w^{1+\varepsilon}(x)$ alalım. $\delta=\frac{1}{2(n-1)}min\left\{\frac{1}{p},\frac{1}{p'}\right\}$ olsun. Teorem 1.0.1'den T operatörü L_{w0}^r üzerinde sınırlıdır. Burada $r=\frac{q'}{1+\delta q'}$'dir. $s>p=q'$ $(1+\varepsilon)(p-r)=s-r$ olacak şekilde seçelim. Bu durumda bir önceki durumdan T operatörünün L_w^s üzerinde sınırlılığı gösterilir. Ölçüm değişkenli Stein-Weiss interpolasyon Teoremi uygulanırsa [24, Teorem 2.1.1] T operatörünün sınırlılığı elde edilir. $f\in L_p$ olmak üzere iddiayı ispat etmek için $x_0\in R^n$ ve R>0 olduğunda $B=\{x:|x-x_0|<R/2\}$ ve $B_k=B(x_0,2^{k+1}R), k\ge 0$ olsun. Bu durumda,

$$f=\sum_{m=0}^{\infty} f_m$$

olur. Burada $m \in N$ için $f_0 = f_{\chi B_0}$ ve $f_m = f_{\chi(B_{m,} - B_{m-1})}$

$$\frac{1}{|B|}\int_B |Tf(x) - (Tf)_B| \quad dx \leq \frac{1}{|B|}\int_B \sum_{m=0}^{\infty} |Tf_m(x) - (Tf_m)_B|\, dx$$

yazabiliriz. $m = 0$ durumunda kestirimi elde etmek için

$$(|Tf_0| \quad)_B \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B |Tf_0(x)|^{q'} dx\right)^{\frac{1}{q'}} \leq C\frac{\|f_0\|_{L^{q'}}}{|B|^{1/q'}}\, Cf_{q'}^*(x_0)$$

eşitsizliğini elde etmek için Hölder eşitsizliğini ve Teorem 1.1'i kullanalım, buradan:

$$\frac{1}{|B|}\int_B |Tf_0(x) - (Tf_0)_B| dx \leq 2(|Tf_0|)_B \leq Cf_{q'}^*(x_0)$$

elde edilir. $m \geq 1\ ve\ x \in B$ için

$$\sum_{m=1}^{\infty} |Tf_m(x) - (Tf_m)_B| = \sum_{m=1}^{\infty} \left|\frac{1}{|B|}\int_B \{Tf_m(x) - (Tf_m)(y) \quad \}dy\right|$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left|\frac{1}{|B|}\int_B \left(\int_{R^n} \{K(x, x-z) - K(y, y-z)\} f_m\,(z) dz\right) dy\right|$$

$$\leq \frac{1}{|B|}\int_B \left(\sum_{m=1}^{\infty} \int_{R^n} |K(x, x-z) - K(y, y-z)||f_m(z)|\, dz\right) dy$$

elde edilir. $y \in B$ için $f_m\,\{z \in R^n\colon\ 2^{m+1}R \leq |z - x_0| < 2^{m+2}R\}$ kümesinde destekli olduğundan yukarıdaki kabuller altında

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|f_m\|_{L^{q'}} \left(\int_{2^{m+1}R \leq |z-x_0| < 2^{m+2}R} |K(x, x-z) - K(y, y-z)|^q dz\right)^{1/q}$$

$$\leq\ Cf_{q'}^*(x_0) \sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^{n/q'} \quad \times \left(\int_{2^m R \leq |y-z| < 2^{m+3}R} |K(x, x-z) - K(y, y-z)|^q dz\right)^{1/q}$$

$$\leq Cf_{q'}^*(x_0) \sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^{n/q'} \times \left(\int_{2^m R \leq |y-z| < 2^{m+3}R} |K(x, x-z) - K(y, y-z)|^q dz\right)^{1/q}$$

$$+ Cf^*{}_{q'}(x_0) \sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^{n/q'} \times \left(\int_{2^m R \leq |y-z| < 2^{m+3}R} |K(x, x-z) - K(y, y-z)|^q dz\right)^{1/q}$$

$$= I_1 + I_2$$

I_1 ve I_2 integrallerinde $\bar{z} = y - z$ alalım. (4.8) kabulü ve (4.9) kabullerinden $I_1 + I_2$

$$= Cf^*_{q'}(x_0) \sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^{n/q'} \times \left(\int_{2^m R \le |\bar{z}| < 2^{m+3} R} |K(x, \bar{z} - (y - x)) - K(x, \bar{z})|^q d\bar{z} \right)^{1/q}$$

$$+ Cf^*_{q'}(x_0) \sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^{n/q'} \left(\int_{2^m R \le |\bar{z}| < 2^{m+3} R} |K(x, \bar{z}) - K(y, \bar{z})|^q d\bar{z} \right)^{1/q} \le Cf^*_{q'}(x_0)$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{1}{|B|} \int_B |Tf(x) - (Tf)_B| dx \le Cf^*_{q'}(x_0)$$

her $R > 0$ için elde edilir. Buradan,

$$M^{\#}(Tf)(x_0) \le 2^{n+1} \overline{M}(Tf)(x_0) \le Cf^*_{q'}(x_0)$$

elde edilir. $x_0 \in R^n$ keyfi olduğundan (4.10) ispatlanmış olur.

4.4. $H^p_w - L^p_w$ Sınırlılık

T operatörünün $H^1_w - L^1_w$ sınırlılığını elde etmek için Lemma 3.2.1'den aşağıdaki zayıf kestirimi vermek gerekir.

Lemma 4.4.1: $w \in A_1$ olsun. Kabul edelim ki K (4.8) ve (4.9) q>1 şartlarını ve $x_0 \in \mathbb{R}^n$, her $y \neq 0$ için

$$\int_{|x|>2|y|} |K(x + x_0, x - y) - K(x + x_0, x)| w(x + x_0) dx \le Cw(y + x_0) \qquad (4.11)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T operatörü $L^1_w(\mathbb{R}^n)$'den $L^{1,\infty}_w(\mathbb{R}^n)$'e sınırlıdır. Yani,

$$w(\{x \in R^n : |Tf(x)| > \lambda\}) \le \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| w(x) dx$$

olur. Eğer $w \in A_1$ ise (4.11) şartı aşağıdaki Lipschitz şartından daha zayıftır. Lipschitz şartı [19, Bölüm 3]

$$|K(z, x - y) - K(z, x)| \le C \frac{|y|^\delta}{|x|^{n+\delta}} \qquad (\forall |x| \ge 2|y|, \forall z)$$

olacak şekilde x, y, z'den bağımsız bir C sabiti ve $0 < \delta \le 1$ vardır.

İspat: $w \in A_1$ ve $f \in L^1_w(\mathbb{R}^n)$ olsun. Calderon-Zygmond ayrışımında verilen her λ>0 için aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde ayrık küplerin $\{Q_j\}_{j \in N}$ bir ailesi mevcuttur. Şimdi bu koşulları yazalım:

a) $\mathbb{R}^n = E \cup F, E = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ dir.

b) $\lambda < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x)| dx \le 2^n \lambda$ dir.

c) Hemen hemen her yerde $x \in \mathbb{F}$ için $|f(x)| \le \lambda$ dir.

d) $|E| \leq \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|dx$ dir.

Şimdi

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in F \quad \text{ise} \\ \dfrac{1}{|Q_j|}\displaystyle\int_{Q_j} |f(x)|dx, & x \in Q_j \quad \text{ise} \end{cases}$$

ve

$$b(x) = f(x) - g(x) = \sum_j \left(f(x) - \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f(y)|dy \right) \chi_{Q_j}(x) := \sum_j b_j(x)$$

fonksiyonları Tanımlayalım. Burada $\chi_{Q_j(x)}$'nin karakteristik fonksiyonunu gösterir.

e) Hemen her $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $|g(x)| \leq 2^n\lambda$'dır.

f) Her b_j bir Q_j küpünde desteklidir. $\int_{Q_j} b_j(x)dx = 0$

$$\{x \in \mathbb{R}^n: |Tf(x)| >\sim \lambda\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n: |Tg(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}^n: |Tb(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}$$

olduğundan Lemma 4.4.1

$$w\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : |Tg(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \leq \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|w(x)dx \tag{4.12}$$

ve

$$w\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n: |Tb(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \leq \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|w(x)dx \tag{4.13}$$

eşitsizliğinden görülür. (4.12) eşitsizliğini elde etmek için Teorem 4.3.1'den

$$w\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n: |Tg(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \leq \frac{C}{\lambda^{q'}}\int_{\mathbb{R}^n} |Tg(x)|^{q'} w(x)dx$$

$$\leq \frac{C}{\lambda^{q'}}\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^{q'} w(x)dx \leq \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| \; w(x)dx$$

elde edilir. Bu eşitsizliği tamamlamak için

$$\int |g(x)| \; w(x)dx \leq C\int |f(x)|w(x)dx$$

olduğunu görmeliyiz. F kümesinde $g = f$ alalım. Her bir Q_j küpünde $w \in A_1$ olduğundan

$$\int_{Q_j} |g(x)| \; w(x)dx \leq \int_{Q_j} \left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f(y)|dy\right) w(x)dx$$

$$= \int_{Q_j} |f(y)| \frac{w(Q_j)}{|Q_j|} dy \leq C\int_{Q_j} |f(y)|w(y)dy$$

elde edilir. (4.13) eşitsizliğini ispat etmek için kenar uzunluğu $2\sqrt{n}$ olan aynı merkezli küpleri Q* gösterelim. Teorem 3.1.2'den

$$w\left(\bigcup_j {Q_j}^*\right) \le \sum_j w({Q_j}^*) \le C\sum_j w(Q_j)$$

$$\le C\sum_j \frac{1}{\lambda}\int_{Q_j} |f(y)|\frac{w(Q_j)}{|Q_j|}dy \ \le \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|w(y)dy$$

elde edilir. $Q_j$küpünün merkezi $y_j$olsun. $\int_{Q_j} bj = 0$, olduğundan

$$w\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_j Q_j : |Tb(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \le \frac{C}{\lambda}\sum_j \int_{\mathbb{R}^n \ \backslash {Q_j}^*} |Tb_j(x)|w(x)dx$$

$$= \frac{C}{\lambda}\sum_j \int_{\mathbb{R}^n \ \backslash Q_j^*} \left|\int_{Q_j} |K(x, x-y) - K(x, x-y_j)| \ \ b_j(y)dy\right| w(x)dx$$

$$\le \frac{C}{\lambda}\sum_j \int_{Q_j} b_j(y)\left|\int_{|x-y_j|\ge 2|y-y_j|} |K(x, x-y) - K(x, x-y_j)| \ \ dy\right| w(x)dxdy$$

$$= \frac{C}{\lambda}\sum_j \int_{Q_j - y_j} |b_j(y+y_j)| \times \int_{|x|\ge 2|y|} |K(x+y_j, x-y) - K(x+y_j, x)|\, w(x + y_j)dxdy$$

elde edilir. Burada $Q_j - y_j = \{x - y_j : x \in Q_j\}$'dir. Böylece (4.11) şartından

$$w\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_j {Q_j}^* : |Tb(x)| > \lambda/2\right\}\right) \le \frac{C}{\lambda}\sum_j \int_{Q_j - y_j} |b_j(y+y_j)|\, w(y+y_j)dy$$

$$= \frac{C}{\lambda}\sum_j \int_{Q_j} |b_j(y)|\, w(y)dy$$

$$\le \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |b(y)|\, w(y)dy \ \ \le \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} (|f(y)| + |g(y)|)\, w(y)dy$$

$$\le \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, w(y)dy$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.1: Farz edelim ki q>1 için (4.8), (4.9), (4.11), şartları sağlanacak şekilde $\Omega \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \times L^q(S^{n-1})$ olsun. Bu durumda T operatörü eğer $w \in A_1$ ise H^1_w ve L^1_w'e sınırlıdır.

İspat: Lemma 3.2.1 ve (4.11)'den herhangi bir w içerisinde $(1,\infty,0)-a$ atomu için $\|Ta\|_{L_w^1}\leq C$ olacak şekilde a'da bağımsız bir $C>0$ sabitinin var olduğunu göstermek yeterlidir.

a, x_0 merkezli bir $w-(1,\infty,0)$ atomu ve $supp(a)\ \subset\ B(x_0,r)$ olsun.
Teorem 4.3.1 ve 3.1.2'den

$$\int_{B(x_0,2r)}|Ta(x)|\quad w(x)dx\leq w\big(B(x_0,2r)\big)^{1/q}\left(\int_{B(x_0,2r)}|Ta(x)|^{q'}w(x)dx\right)^{1/q'}$$

$$\leq C_w\big(B(x_0,r)\big)^{1/q}\left(\int_{B(x_0,r)}|a(x)|^{q'}w(x)dx\right)^{1/q'}$$

$$\leq C\|a\|_\infty w\big(B(x_0,r)\big)\quad\leq C$$

elde edilir. (4.11)'in kabulü be a'nın 0 alma şartı kullanılarak

$$\int_{B(x_0,2r)^c}|Ta(x)|w(x)dx$$

$$=\int_{B(x_0,2r)^c}\left|\int_{B(x_0,r)}\big(K(x,x-y)-K(x,x-x_0)\big)a(y)dy\right|w(x)dx$$

$$\leq\int_{B(0,r)}|a(y+x_0)|\times\left(\int_{B(x_0,2r)^c}|K(x+x_0,x-y)-K(x+x_0,x)|\quad w(x+x_0)dx\right)dy$$

$$\leq C\int_{B(0,r)}|a(y+x_0)|\,w(y+x_0)dy$$

$$\leq C\|a\|_\infty w\big(B(x_0,r)\big)\quad\leq C$$

elde edilir. Böylece Teorem 4.4.1'in ispatı tamamlanmış olur.

Daha sonraki Teoremi vermeden önce değişken Ω(x,y) çekirdekleri altında aşağıdaki Tanımlara ihtiyaç vardır. (4.3) şartı yerine

$$\sup_{(x\in\mathbb{R}^n,r\geq0)}\left(\int_{S^{n-1}}\left|\Omega\big(x+rz',z'\big)\right|^q d\sigma\big(z'\big)\right)^{1/q}<\infty \tag{4.3'}$$

şartını alalım $q\geq1$ için Ω'a eğer (3.0.1) (3.0.2) ve(3.0.3′)

$$\int_0^1\frac{wq(\delta)}{\delta}d\delta<\infty \tag{4.14}$$

şartını sağlarsa L^q-Dini şartlarını sağlar demektir. Buradan

$$\omega q(\delta)\coloneqq\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ r\geq0}}\left(\int_{S^{n-1}}\sup_{\substack{y'\in S^{n-1}\\ |y'-z'|\leq\delta}}\left|\Omega\big(x+rz',y'\big)-\Omega\big(x+rz',z'\big)\right|^q d\sigma\big(z'\big)\right)^{1/q}$$

bulunur. Aşağıdaki lemma K çekirdeğinin bir kestirimi elde etmek için bu şartları kullanması gerektiğini ifade eder.

Lemma 4.4.2: q≥ 1olsun. Farzedelim ki $\Omega(x,z) \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \times L^q(S^{n-1})$ $(3.0.3')$ şartını sağlar. Eğer $|y| < \beta R$ olacak şekilde bir $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$ sabiti varsa herhangi bir $x_0 \in R^n$ için:

$$\left(\int_{R<|x|<2R} |K(x+x_0, x-y) - K(x+x_0, x)|^q dx\right)^{1/q} \leq CR^{-n/q'}\left(\frac{|y|}{R} + \int_{2|y|/R}^{4|y|/R} \frac{wq(\delta)}{\delta} d\delta\right)$$

olur. Burada C>0, R ve y'den bağımsızdır.

İspat: $0 < \beta < \frac{1}{2}$ ve $R < |x| < 2R$ olduğundan $|x-y| \sim |x|$ olduğunu göstermek kolaydır. Buradan

$$\left|\frac{\Omega(x_0+x, x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{\Omega(x_0+x, x)}{|x|^{n-\alpha}}\right|$$

$$= \left|\Omega(x_0+x, x)\left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}\right) + \frac{\Omega(x_0+x, x-y) - \Omega(x_0+x, x)}{|x-y|^{n-\alpha}}\right|$$

$$\leq C\left(|\Omega(x_0+x, x)| \frac{|y|}{|x|^{n-\alpha+1}} + \frac{|\Omega(x_0+x, x-y) - \Omega(x_0+x, x)|}{|x|^{n-\alpha}}\right)$$

ve buna dayanarak

$$\left(\int_{R<|x|<2R} \left|\frac{\Omega(x+x_0, x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{\Omega(x_0+x, x)}{|x|^{n-\alpha}}\right|^q dx\right)^{1/q}$$

$$\leq C\left(\int_{R<|x|<2R} |\Omega(x+x_0, x)|^q \frac{|y|^q}{|x|^{(n-\alpha+1)q}} \quad dx\right)^{1/q}$$

$$+ C\left(\int_{R<|x|<2R} \frac{|\Omega(x+x_0, x-y) - \Omega(x_0+x, x)|^q}{|x|^{(n-\alpha)q}} \quad dx\right)^{1/q} := J_1 + J_2$$

elde edilir.

$$J_1 \leq C\|\Omega\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)\times L^q(S^{n-1})} |y| R^{-(n-\alpha+1)} R^{n/q} = CR^{n/q-(n-\alpha)}\left(\frac{|y|}{R}\right)$$

olduğu aşikardır. Diğer taraftan Ω'nın homojenliğinde

$$J_2 = C\left(\int_R^{2R} t^{-(n-\alpha)q+n-1}\left(\int_{S^{n-1}} \left|\Omega\left(x_0+tx', tx'+y\right) - \Omega(x_0+tx', tx')\right|^q d\sigma(x')\right)dt\right)^{1/q}$$

$$\leq CR^{n/q-(n-\alpha)}\left(\int_{\mathrm{R}}^{2\mathrm{R}}\left(\int_{S^{n-1}}\left|\Omega\left(x_0+tx', \frac{x'-\xi}{|x'-\xi|}\right) - \Omega\left(x+tx', tx'\right)\right|^q d\sigma\left(x'\right)\right)\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{t}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{q}}} \quad (4.15)$$

Burada $\xi = y/t$'dir. $R \leq t \leq 2R$ ve $|y| < \beta R$ için $|\xi| < \frac{1}{2}$ elde edilir. Her $x' \in S^{n-1}$ için

$\left|\frac{x'-\xi}{|x'-\xi|}-x'\right| \leq 2|\xi|$ olduğu görülür. Böylece (4.15)'deki iç taraftaki integral

$$\int_{S^{n-1}} \sup_{\substack{y' \in S^{n-1} \\ |x'-y'| \leq 2|\xi|}} \left|\Omega(x_0+tx',y')-\Omega(x+tx',x')\right|^q d\sigma(x') \leq \omega_q^q(2|\xi|)=\omega_q^q \frac{2|y|}{t}$$

olduğundan

$$J_2 \leq CR^{n/q-(n-\alpha)}\left(\int_R^{2R} \omega_q^q\left(\frac{2|y|}{t}\right)\frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

$$= CR^{n/q-(n-\alpha)}\left(\int_{\frac{|y|}{R}}^{2\frac{|y|}{R}} \omega_q^q(\delta)\frac{d\delta}{\delta}\right)^{1/q} = CR^{n/q-(n-\alpha)}\omega_q^q\left(\frac{2|y|}{R}\right)$$

$$\leq CR^{n/q-(n-\alpha)}\left(\int_{2\frac{|y|}{R}}^{4\frac{|y|}{R}} w_q^q(\delta)\frac{d\delta}{\delta}\right)$$

elde edilir. Şimdi (4.14) yerine

$$\int_0^1 \frac{\omega_q^q(\delta)}{\delta^{1+\alpha}}d\delta < \infty, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{4.16}$$

değiştirerek L^q -Dini şartını genelleştirelim. Eğer Ω (3.3.6) $q \geq 1$ ve $0 \leq \alpha \leq 1$ için sağlarsa bu durumda $L^{q,\alpha}-$ Dini şartını sağlar denir. $0<\beta<\alpha\leq 1$ için, eğer Ω $L^{q,\alpha}-$ Dini şartını sağlarsa bu durumda Ω $L^{q,\beta}$ $-$Dini şartını sağlar. Böylece $\tilde{\alpha}<a$ için $L^{q,\tilde{\alpha}}$ $-$Dini şartını sağlayan tüm fonksiyonlar sınıfını Din_α^q ile gösterilir.

Lemma 4.4.3: $0<\alpha\leq 1$ ve $\frac{n}{n+\propto}<p<1$ olsun. Farzedelim ki $\Omega \in Din_\alpha^q$, $q \geq \left(\frac{3+\sqrt{9-8\left(2-p-\frac{p\alpha}{n}\right)}}{2\left(2-p-\frac{p\alpha}{n}\right)}\right)$ için (4.8) ve (4.9) şartlarını sağlayacak şekilde olsun. Eğer $w^{q'} \in A_{\left(p+\frac{p\alpha}{n}-\frac{1}{q}\right)q'}$ ise bu durumda T'e H_w^p 'den L_w^p'e sınırlıdır.

İspat: $q \geq \left(\frac{3+\sqrt{9-8\left(2-p-p\frac{p\alpha}{n}\right)}}{2\left(2-p-\frac{p\alpha}{n}\right)}\right)$ olduğundan $w^{q'} \in A_{\left(p+\frac{p\alpha}{n}-\frac{1}{q}\right)q'}, A_{2/q'}$ elde edilir. Teorem 4.3.1'den de herhangi bir $w-(p,2,N)-a$ atomu için $\|Ta\|_{L_w^p} \leq$C olacak şekilde bir a'dan bağımsız $C>0$ sabitinin mevcut olduğunu göstermek yeterlidir. a, x_0 merkezli $supp(a) \subset B(x_0,r)$ özelliğini sağlayan bir $w-(p,2,N)$-atomu olsun. Teorem 4.3.1 ve 3.1.2'den $q \geq 2$ için

$$\int_{B(x_0,8r)} |Ta(x)|^p w(x)dx \leq w(B(x_0,8r)^{1-p/2}\left(\int_{B(x_0,8r)} |Ta(x)|^2 w(x)dx\right)^{p/2}$$

$$\le Cw(B(x_0,r)^{1-p/2}\left(\int_{B(x_0,r)} |a(x)|^2 w(x)dx\right)^{p/2}$$
$$\le C$$

elde edilir. Şimdi $I:=\int_{B(x_{0,8r})^c}|Ta(x)|^p w(x)dx$ integralinin sınırlılığını gösterelim j≥ 3için

$$E_j=\left(\{x\in\mathbb{R}^n: 2^j r\le |x-x_0|\le 2^{j+1}r\}\right)$$

kümesini alalım, Hölder Eşitsizliğinden

$$I=\sum_{j=3}^{\infty}\int_{Ej}|Ta(x)|^p w(x)dx\le\sum_{j=3}^{\infty}\left(\int_{Ej}w(x)dx\right)\int_{Ej}|Ta(x)|\ \ w^p(x)dx \tag{4.17}$$

elde edilir. $w^{q'}\in A_{\left(p+\frac{p\alpha}{n}-\frac{1}{q}\right)q'}$ olduğundan $w^{q'}\in A_s$olacak şekilde bir $1\le s<\left(p+\frac{p\alpha}{n}-\frac{1}{q}\right)q'$ vardır. Teorem 3.1.2'den ve Hölder eşitsizliğinden

$$\int_{Ej}w(x)dx\le\left(\int_{Ej}dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{Ej}w(x)^{q'}dx\right)^{\frac{1}{q'}}$$
$$\le C\left(2^j r\right)^{\frac{n}{q}}\left\{w^{q'}\left(B\left(x_{0,}2^{j+1}r\right)\right)\right\}^{1-q\prime} \tag{4.18}$$

elde edilir. a'nın 0 olma şartı kullanılarak

$$\int_{Ej}|Ta(x)|w(x)dx=\int_{Ej}\left|\int_{B(x_0,r)}|K(x,x-y)-K(x,x-x_0)|\ \ a(y)dy\right|\ \ w(x)dx$$
$$\le\int_{B(x_0,r)}|a(y)|\left\{\int_{E_j}|K(x,x-y)-K(x,x-x_0)|\ \ w(x)dx\right\}\ \ dy \tag{4.19}$$

elde edilir. Hölder eşitsizliğinden;

$$\int_{Ej}|K(x,x-y)-K(x,x-x_0)|\ \ w(x)dx$$
$$\le\left(\int_{E_j}w(x)^{q\prime}dx\right)^{1/q\prime}\left(\int_{E_j}|K(x,x-y)-K(x,x-x_0)|^q dx\right)^{1/q}$$
$$\le\left\{w^{q'\left(B\left(x_0,2^{j+1}r\right)\right)}\right\}^{1/q\prime}\int_{Ej}\left||K(x,x-y)-K(x,x-x_0)|\ \ dy\ \ \right| \tag{4.20}$$

bulunur. $s<\left(p+\frac{p\alpha}{n}-\frac{1}{q}\right)q'$ olduğundan $s<\left(p+\frac{p\tilde{\alpha}}{n}-\frac{1}{q}\right)q'$ olacak şekilde $\tilde{\alpha}<\alpha$ vardır. $\Omega\in Din_\alpha^q$ kabulünden dolayı $L^{q,\tilde{\alpha}}$ şartı sağlanır.

Böylece $|y-x_0|<r$ için Lemma 4.4.3'den.

$$\left(\int_{Ej}|K(x,x-y)-K(x,x-x_0)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\int_{2^j r \le |x| \le 2^{j+1}} \left| K\big(x+x_0, x-(y-x_0)\big) - K(x+x_0,x) \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$C\left(2^j r\right)^{\frac{n}{q'}} \left(\frac{1}{2^j} + \left(\frac{1}{2^j}\right)^{\tilde{\alpha}} \int_0^1 \frac{w_q^q(\delta)}{\delta^{1+\tilde{\alpha}}} d\delta \right) C 2^{-j\tilde{\alpha}} \left(2^j r\right)^{\frac{n}{q'}} \tag{4.21}$$

elde edilir. (4.17)'den (4.21)'e eşitsizlikler göz önüne alındığında:

$$I \le C \left(\int_{B(x_0,r)} |a(y)| dy \right)^p \sum_{j=3}^{\infty} 2^{-j\tilde{\alpha}p} \left(2^j r\right)^{\frac{n}{q-np}} - \left\{ w^{q'}\left(B(x_0, 2^{j+1} r)\right) \right\}^{1/q'} \tag{4.22}$$

elde edilir. $\left(p + \frac{p\alpha}{n} - \frac{1}{q}\right) q' \le 2$ olduğu açıktır. Böylece $w^{q'} \in A'_{\left(p+\frac{p\alpha}{n}-\frac{1}{q}\right)q'} \subset A_2$olur.

Buradan,

$$\int_{B(x_0,r)} |a(y)| dy \le \left(\int_{B(x_0,r)} |a(y)|^2 w(y) dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B(x_0,r)} w(y)^{-1} dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C r^n w\big(B(x_0,r)\big)^{-\frac{1}{p}} \tag{4.23}$$

elde edilir. $w^{q'} \in A_s$olduğundan Teorem 3.1.1 ve Lemma 3.1.4'den

$$\left\{ w^{q'}\left(B\left(x_0, 2^{j+1}\right)\right) \right\}^{1/q'} \le C 2^{\frac{jns}{q'}} \left\{ w^{q'}\big(B(x_0,r)\big) \right\}^{1/q'}$$

$$\le C 2^{\frac{jns}{q'}} r^{-\frac{n}{q}} w\big(B(x_0,r)\big) \tag{4.24}$$

elde edilir. (4.22)'den (4.24)'e

$$I \le C \sum_{j=3}^{\infty} 2^{j\left(\frac{n}{q} - np + \frac{ns}{q'} - \tilde{\alpha}p\right)} \le C$$

sonucu elde edilir. Buradan son eşitsizlik $s \le \left(p + \frac{p\tilde{\alpha}}{n} - \frac{1}{q}\right) q'$'e göre elde edilmiştir ve böylece Teorem ispatlanmış olur.

Lemma 4.4.3'te eğer w ağırlığı A_1 sınıfına kısıtlanırsa bu durumda $w^{q'} \in A_{\frac{2}{q'}}$'dir. q≥ 2 için Teorem 4.3.1'den T operatörünün L_w^2 üzerinde sınırlı olduğu görülür. Bu durumda Lemma 4.4.3 ispatındaki aynı argümentler kullanıldığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.4.2: $0 < \alpha \le 1$ ve $\frac{n}{n+\alpha} < p < 1$ olsun. Farz edelim ki q≥ 2 için, (4.8) ve (4.9) olacak şekilde Ω∈ Din_α^q'dir. Eğer $w^{q'} \in A_1$ bu durumda $T,\ H_w^p\ ve\ L_w^p$'e sınırlıdır.

4.5. Lipschitz Sürekli Çekirdekler

Bu kısımda T operatörünün $H_w^p\ ve\ L_w^p$ sınırlılığını elde etmek için K değişken çekirdeği üzerine konulan diğer şartları bulacağız.

Sonuç 4.5.1: $1 < p < \infty$ ve $w \in A_p$ olsun. $0 < \varepsilon \leq 1$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \quad |K(x, z - y) - K(x, z)| \leq \frac{C|y|^{\varepsilon}}{|z|^{n+\varepsilon}} \qquad |z| \geq 2|y| \qquad \text{için} \tag{4.25}$$

ve

$$|K(x, z) - K(y, z)| \leq \frac{C|x-y|^{\varepsilon}}{|z|^{n+\varepsilon}} \qquad |z| \geq 2|x - y| \qquad \text{için} \tag{4.26}$$

olacak şekilde x, y, z'den bağımsız bir C sabiti varsa T operatörü L_w^p üzerinde sınırlıdır.

İspat: $1 < p < \infty$ ve $w \in A_p$ verildiğinde $w \in A_{\frac{p}{q'}}$ sağlayacak şekilde bir q≥ p' vardır. İddia ediyoruz ki (4.25) ve (4.26) şartları ve (4.8) ve (4.9) şartlarını sağlar.

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^{n/q'} \left(\int_{2^m R \leq |z| \leq 2^{m+1} R} |K(x, z - y)) - K(x, z)|^q dz \right)^{1/q}$$

$$\leq C \sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^{\frac{n}{q'}} \left(\int_{2^m R \leq |z| \leq 2^{m+1} R} \left(\frac{|y|^{\varepsilon}}{|z|^{n+\varepsilon}} \right)^q dz \right)^{1/q}$$

$$\leq C \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m\varepsilon} = C$$

elde edilir. Burada da C, x ve y'den bağımsızdır. $0 < |x - y| < R$ için

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^{n/q'} \left(\int_{2^m R \leq |z| < 2^{m+1} R} |K(x, z)) - K(y, z)|^q dz \right)^{1/q}$$

$$\leq C \sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^{n/q'} \left(\int_{2^m R \leq |z| < 2^{m+1} R} \left(\frac{|x - y|^{\varepsilon}}{|z|^{n+\varepsilon}} \right)^q dz \right)^{1/q}$$

$$\leq C \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m\varepsilon} \quad = C$$

Teorem 4.3.1'den T operatörünün L_w^p sınırlılığı elde edilir.

Teorem 4.5.1: Kabul edelim ki K, (4.25) Lipschitz şartını ve $0 < \varepsilon \leq 1$ için (4.26) şartını sağlar. $\frac{1}{n+\varepsilon} < p \leq 1$ ve $w \in A_p + \frac{p\varepsilon}{n}$. Bu durumda T, H_w^p den L_w^p'ye sınırlıdır.

İspat: Teorem 3.2.2 ve Sonuç 4.5.1'den herhangi bir $w - (p, 2, N)-$ α atomu için $\|Ta\|_{L_w^p} \leq$C olacak şekilde a'dan bağımsız bir $C > 0$ sayısının mevcut olduğunu göstermek yeterlidir,

a, x_0 merkezli ve $supp(a) \subset B(x_0, r)$ özelliğini sağlayan bir $w - (p, 2, N)$- atomu olsun. T'nin L_w^2 sınırlılığı ve Lemma D

$$\int_{B(x_{0,2r})} |Ta(x)|^p w(x)dx \quad \le w\left(B(x_{0,2r})\right)^{1-\frac{p}{2}} \left(\int_{B(x_0,r)} |Ta(x)|^2 w(x)dx \quad \right)^{\frac{p}{2}}$$

$$\le Cw\left(B(x_{0,2r})\right)^{1-\frac{p}{2}} \left(\int_{B(x_0,r)} |a(x)|^2 w(x)dx \quad \right)^{\frac{p}{2}}$$

ifadesini verir. (4.25) ve Minkowski eşitsizliği kullanılırsa

$$\left(\int_{B(x_0,2r)^c} |Ta(x)|^p w(x)dx \quad \right)^{1/p}$$

$$\le C\left(\int_{B(x_0,2r)^c} \left\{\int_{B(x_0,r)} |K(x,x-y)) - K(x,x-x_0)| \quad |a(y)|dy \quad \right\}^p w(x)dx\right)^{1/p}$$

$$\le C\left(\int_{B(x_0,2r)^c} \left\{\int_{B(x_0,r)} \frac{|y-x_0|^\varepsilon}{|x-x_0|^{n+\varepsilon}} |a(y)|dy \quad \right\}^p \quad w(x)dx\right)^{1/p}$$

$$\le Cr^\varepsilon \left(\int_{B(x_0,r)} \ |a(y)|dy \quad \right)\left(\int_{B(x_0,2r)^c} \frac{W(x)}{|x-x_0|^{p(n+\varepsilon)}} dx \quad \right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.27}$$

elde edilir. p≤ 1 ve $\varepsilon \le 1$ olduğundan $p + \frac{p\varepsilon}{n} < 2$ elde edilir. Buradan $w \in A_{p+\frac{p\varepsilon}{n}} \subset A_2$olur. Hölder eştisizliğinden

$$\int_{B(x_0,r)} |a(y)|dy \quad \le \|a\|_{L_w^2} \left(\int_{B(x_0,r)} w(y)^{-1} dy \quad \right)^{\frac{1}{2}} \le Cr^n \|a\|_{L_w^2} w\big(B(x_0,r)\big)^{-\frac{1}{2}} \tag{4.28}$$

elde edilir. $w \in A_{p+\frac{p\varepsilon}{n}}$ olduğundan Teorem 3.1.1 ve Lemma 3.1.4'den

$$\int_{B(x_{0,2r})^c} \frac{w(x)}{|x-x_0|^{p(n+\varepsilon)}} dx \quad = Cr^{-p(n+\varepsilon)} w\big(B(x_0,r)\big) \tag{4.29}$$

elde edilir. (4.27) ve (4.29) eşitsizliklerinden

$$\left(\int_{B(x_{0,2r})^c} |Ta(x)|^p w(x)dx \quad \right)^{\frac{1}{p}} \le C$$

elde edilir. Böylece Teorem ispat edilmiş olur.

5. TEK DEĞİŞKENLİ DÜZGÜN ÇEKİRDEKLER

1966 Yılında Fobes ve Riviere [25]

$$Tf(x) = p.v.\int_{\mathbb{R}^n} K(x, x-y)f(y)dy$$

şeklinde Tanımlanan $K(x,y)$ değişken çekirdekli T singüler integral operatörü L^p sınırlığını göz önüne almışlardır. Burada $K\,(x,y)$, $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\}\,)$ üzerinde Tanımlı fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) Her $x \in R^n$ için $K(x,.)$, n. dereceden homojendir. Yani λ>0 ve $y \neq 0$ için

$$K(x, \lambda y) = \lambda^n K(x,y)$$

dir.

(ii) Her $x \in \mathbb{R}^n$ için $K(x,.)$, S^{n-1} küre üzerinde integrallenebilir ve

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{S^{n-1}} K(x,y)d\sigma(y) < \infty$$

(iii) Her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\int_{S^{n-1}} K(x,y)d\sigma(y) = 0$$

dir.

Fobes ve Riviere ikinci değişken üzerinde daha sınırlılığa yoğunlaşmışlardır. Ama birinci değişkende sınırlılık gerekmez. Onlar kabul etmişlerdir ki $K(x,*)\epsilon C^{\infty}\,(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}\,)$ ve her n katlı $\beta = (\beta_1, \dots\dots.\beta_n), \beta_j \epsilon \overline{N} = N \cup \{0\}$, $1 \leq j \leq n$ için

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ y\in S^{n-1}}} \left| \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\beta} K(x,y) \right| \leq C_\beta \tag{5.1}$$

olur. Bu şartlar altında Fobes ve Riviere $11 < p < \infty$ için T operatörünün L_p uzayı üzerinde sınırlılığını elde etmişlerdir. Diğer taraftan Watson [7]

$$\tilde{T}f(x) = p.v.\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{K}(\,x-y)f(y)dy$$

şeklinde Tanımlanan konvolüsyon tipli singüler operatörü göz önüne almıştır. Burada $\widetilde{K}$ aşağıdaki şartları sağlar. Her $r > 0$ ve $x \in (\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ için

$$\begin{cases} \widetilde{K}(rx) = r^{-n} \\ \int_{S^{n-1}} \widetilde{K}(x)d\sigma(y) = 0 \end{cases} \tag{5.2.}$$

ve $\widetilde{K}$'nın homojenliğinden

$$\sup_{0<|y|<R} \sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^{n/q'} \left(\int_{2^m R \leq |x| < 2^{m+1}R} \left|\widetilde{K}(x-y)) - \widetilde{K}(x)\right|^q dx \right)^{1/q} \quad (1 \leq q < \infty)$$

ve

$$\sup_{0<|y|<R} \sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n \ \sup_{2^m R \le |x| < 2^{m+1} R} \left|\widetilde{K}(x-y)) - \widetilde{K}(x)\right| \qquad (q=\infty)$$

bulunur R'den bağımsızdır. Böylece $1 \le q \le \infty$ için $\widetilde{K} \in L^q(S^{n-1})$ (5.2) şartını ve $1 \le q \le \infty$ için

$$\mathrm{H_q} \coloneqq \sup_{0<|y|<R} \sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^{n/q'} \left(\int_{2^m R \le |x| < 2^{m+1} R} \left|\widetilde{K}(x-y) - \widetilde{K}(x)\right|^q dx \right)^{1/q} < \infty$$

veya $q=\infty$ için,

$$\mathrm{H}_\infty \coloneqq \quad \sup_{0<|y|<R} \sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n \ \sup_{2^m R \le |x| < 2^{m+1} R} \left|\widetilde{K}(x-y) - \widetilde{K}(x)\right| < \infty$$

şartlarını sağlarsa L_q Hörmander şartını da sağlar denir. Watson [13 bunu ispat etmiştir]

Teorem 5.1: Kabul edelim ki $1 < q \le \infty$ için $\widetilde{K}, L^q$ Hörmander şartını şartını sağlar. Eğer $p \ne 1$ için $w \in A_{\frac{p}{q'}}$, $q' \le p < \infty$ ise bu durumda $\left\|\tilde{T} f\right\|_{L^p_w} \le B_p, w\|f\|_{L^p_w}$'dir. Ayrıca $B_{p,w}$ sınırı $C_{p,w}\left(\left\|\widetilde{K}\right\|_{L^1\, S^{n-1}} + H_q\right)$'den daha küçüktür. Burada $C_{p,w}$ yalnız p ve w'e bağlı bir sabit olup $\left\|\widetilde{K}\right\|_{L^1\,(S^{n-1})}$ veya H_q'dan bağımsızdır.

5.1. L^p_w Sınırlılığı

Bu kısımda T operatörünün L^p ağırlıklı sınırlılığını elde etmek için Fabes-Riviere'nin [25] iddiasını takip edeceğiz.

Teorem 5.1.1: $K(x,*) \in C^\infty\ (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ (5.1) şartını sağlasın ve $w \in A_p, 1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|T_\varepsilon f\|_{L^p_w} \le C\|f\|_{L^p_w} \tag{5.3}$$

olur. Burada C, ε ve f'.den bağımsızdır. Aynı zamanda her bir $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ için L^p_w normuna göre $\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon f = Tf$. Böylece T operatörü Tanımlıdır ve (5.3) eşitsizliğini sağlar. Süreklilikten T, L^p_w uzayı üzerine sınırlı olması genişletilebilir.

Teoremi ispat etmeden önce ispata gerekli olacak n-boyutlu küresel harmoniklerin bazı özelliklerini ifade edelim. $Y_m(x)$ bir m. Dereceden m-boyutlu küresel harmonik olsun. Bu durumda

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha Y_m(x)\right| \le C_m^{\left(\frac{n-2}{2}+|\alpha|\right)}, \forall x \in S^{n-1}, \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \bar{N}^n$$

olur,

$$\{Y_{m,j}(x)\}_{j}, \qquad 1 \le j \le \binom{m+n-1}{n-1} - \binom{m+n-3}{n-1} \sim m^{n-2} \tag{5.4}$$

m. dereceden tüm küresel harmonik uzayında elde edilen bir ortonormal baz olsun [26]. Bu durumda $\{Y_{m,j}(x)\}_{m,j}$ S^{n-1} küresi üzerinde bir tam ortonormal fonksiyonlar sistemi oluşur.

Eğer $f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ ve $f(x) \sim \sum_{m,j} a_{m,j}, Y_{m,j}(x)$ $(x \in S^{n-1})$ ise $f(x)$'in S^{n-1} ise $f(x)$'in $\{Y_{m,j}\}'$e göre fourier serisi ise her s≥ 1 için

$$a_{m,j} = (-1)^s m^{-s}(m+n-2)^{-s} \int_{S^{n-1}} \Delta^s{}_{S^{n-1}} f(x) Y_{m,j}(x) d\sigma(x) \tag{5.5}$$

Burada

$$a_{m,j} = \int_{S^{n-1}} f(x) Y_{m,j}(x) d\sigma(x)$$

dir ve $\Delta_{S^{n-1}}$, S^{n-1} küresi üzerinde Laplace-Beltrami operatörüdür. Bu sonucun ispatı [27]'dır. üstelik küresel harmonikler için aşağıdaki eşitsizliklerin de sağlanamayacağını göstermemiz de gerekecektir.

Lemma 5.1.1: Kabul edelim ki $\widetilde{K} \in C^1(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ (5.4)'i sağlar ve

$$B^* := \sup_{\substack{x \in S^{n-1} \\ 1 \le i \le n}} \left| \frac{\partial}{\partial xi} \widetilde{K}(x) \right| + \sup_{x \in S^{n-1}} \left| \widetilde{K}(x) \right| < \infty \tag{5.6}$$

olsun. Bu durumda K, L_∞ -Hörmander şartını sağlar. Üstelik H_∞ sabiti $C_n B^*$'da daha küçüktür. Burada C_n yalnız n'e bağlı bir sabittir.

İspat: $\widetilde{K}$'nın homojenliğinden

$$\widetilde{K}(x,y) - \widetilde{K}(x) = \widetilde{K}\left(\frac{x'-\xi}{|x'-\xi|}\right)\left(\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right) + |x|^{-n}\left\{\widetilde{K}\left(\frac{x'-\xi}{|x'-\xi|}\right) - \widetilde{K}(x')\right\}$$

elde ederiz. Buradan $x' = \frac{x}{|x|} \in S^{n-1}$ ve $\xi = \frac{y}{|x|}$'dır.

$$\left|\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right| \le \frac{C_n|y|}{x^{n+1}}$$

ve

$$\left|\frac{x'-\xi}{|x'-\xi|} - x'\right| \le C_n|\xi|$$

olduğundan,

$$\widetilde{K}(x,y) - \widetilde{K}(x) \le \frac{C_n B^* |y|}{|x|^{n+1}}$$

olur. Böylece 0< $|y| < R$ için

$$\sum_{m=1}^{\infty}(2^m R)^n \ \sup_{2^m R\leq|x|<2^{m+1}R}\left|\widetilde{K}(x-y))-\widetilde{K}(x)\right| < C_n B^*$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.1.1.'in İspatı: $y\in S^{n-1}$ için küresel harmonikleri uygularsak.

$$\sum_{m,j} a_{m,j}(x)Y_{m,j}(y)$$

serisi için $K(x,y)$ çekirdeğini ifade edebiliriz. $y\in(\mathbb{R}^n)$ verildiğinde

$$y'=\frac{y}{|y|}\in S^{n-1}$$

olsun. χ_E ile $E\subset\mathbb{R}^n$ kümesinin karakteristik fonksiyonunu göstersin. Bu durumda $\alpha=0$ için (5.4)'yi ve yeterince büyük S için (5.5)'ü uyguladığımızda L^q $(\mathbb{R}^n)$'de $1<q<\infty$ olmak üzere

$$\sum_{m,j} a_{m,j}(x)\int_{|y|>\varepsilon}\frac{Y_{m,j}(y')}{|y|^n}f(x-y)$$

serisi y değişkenli $K_{\varepsilon(x,y)}$ çekirdeğine yakınsar. Bu nedenle $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ için hemen hemen her yerde

$$T_\varepsilon f(x)=\sum_{m,j} a_{m,j}(x)\int_{|y|\geq\varepsilon}\frac{Y_{m,j}(y')}{|y|^n}f(x-y)dy$$

elde edilir.

(5.6) şartını sağlayan

$$g(x)=\sup_{y\in B(x,1)}\sum_{|x|=1}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha} f(y)$$

elde edilir. Lemma 5.1.1 ve Teorem 5.1'den.

$$\|T_\varepsilon f\|_{L_w^p}\leq C_{p,w}\|f\|_{L_w^p}\sum_m m^{n-2}$$

$$\times\, max_j=\left\{\left\|a_{m,j}\right\|_\infty\left(\left\|y_{m,j}\right\|_{L^1S^{n-1}}+\sup_{\substack{|\alpha|<1\\ y'\in S^{n-1}}}\left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha}Y_{mj}(y')\right|\right)\right\}$$

(5.5) kestirimi

$$\left|a_{m,j}\right|\leq C_m^{-2s}\sup_{\substack{y'\in S^{n-1}\\ |x|<2s}}\left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha}Y_{mj}(y')\right|$$

eşitsizliği verir. Bu eşitsizlik $|\alpha|<1$ için (5.4)'i eşitsizliği ile göz önüne alındığında yeterince büyük s'ler için

$$\|\tilde{T}_{\varepsilon} f\|_{L_w^p} \leq C_{p,w}\|f\|_{L_w^p} \sum_m m^{-2s+\frac{3n}{2}-2} \leq C_{pw}\|f\|_{L_w^p}$$

eşitsizliği bulunur.

$$g(x) = sup_{\;y \in B(x,1)} \sum_{|x|=1} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha} f(y)$$

olsun.$g \in C_0\ (\mathbb{R}^n)$ ve $g \in L_w^p$ olduğu açıktır. $\varepsilon < \delta \leq 1$ için

$$\|T_{\varepsilon} f - T_{\delta} f\| L_w^p = \left\|\int_{\varepsilon \leq |y| \leq \delta} K(.,y) f(.,-y) dy\right\|_{L_w^p}$$

$$= \left\|\int_{\varepsilon \leq |y| \leq \delta} K(.,y)[f(.,-y) - f(.)]\, dy\right\|_{L_w^p}$$

$$\leq \left\|\int_{\varepsilon \leq |y| \leq \delta} |K(.,y)||g(.)||y| dy\right\|_{L_w^p} \leq C(\delta - \varepsilon)\|g\| L_w^p$$

olur. Burada $|T_{\varepsilon} f|$, $L_p(\mathbb{R}^n)$'de bir Cauchy dizisidir. Aynı zamanda

$$\|Tf\|_{L_w^p} = \lim_{\varepsilon \to 0} \|T_{\varepsilon} f\|_{L_w^p} \leq C_{p,w}\|f\|_{L_w^p}$$

elde edilir.

5.2 $H_w^p - L_w^p$ Sınırlılığı

Bölüm 4 kısım 2'de H_w^p'nin özellikler ve Tanımlarını vermiştik. Şimdi aşağıdaki Teoremi verebiliriz.

Teorem 5.2.1: $0 < p \leq 1$ ve $w \in A_2$ olsun. Kabul edelim ki, $K(x,.) \in C^{\infty}$ $(\mathbb{R} \backslash \{0\})$ ve $\beta \in \overline{N}^n$ için,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\beta} K(x,y)\right| \leq \frac{C_{\beta}}{|y|^{n+|\beta|}}\ , \qquad y \neq 0 \tag{5.7}$$

dir. Bu durumda

$$\|Tf\|_{L_w^p} \leq C\|f\|_{H_w^p}$$

olacak şekilde f'den bağımsız bir C sabiti vardır.

İspat: (5.7), (5.3)'den daha güçlü olduğu açıktır. Teorem 5.1.1'de T operatörünün sınırlı olduğunu söyleyebiliriz. $0 < p \leq 1$ verildiğinde herhangi bir $w - (p,2,N) - a$ atomu için $\|Ta\|_{L_w^p} \leq C$ olacak şekilde bir $C > 0$ sabitinin var olduğunu ispat edeceğiz. Burada $N = [n(2/p - 1)\,]$ dir. Bu durumda Teorem 5.2.1,Teorem 3.2.2'den görülür. $w - (p,2,N)a$ atomu x_0 merkezli ve $supp(a) \subset B(x_0, r)$ Teorem 5.1.1 ve Teorem 3.1.1'den

$$\int_{B(x_{0,2r})} |Ta(x)|^p w(x)dx \quad \leq w\big(B(x_0,2r)\big)^{1-\frac{p}{2}} \left(\int_{B(x_{0,2r})} |Ta(x)|^2 w(x)dx \right)^{\frac{p}{2}}$$

$$\leq Cw\big(B(x_0,r)\big)^{1-\frac{p}{2}} \left(\int_{B(x_0,r)} |a(x)|^2 w(x)dx \right)^{\frac{p}{2}}$$

$$\leq Cw\big(B(x_0,r)\big)^{1-\frac{p}{2}} w\big(B(x_0,r)\big)^{\frac{p}{2}-1} \quad = C.$$

elde edilir.x_0 yakınlarında $K(x, x + .)$ fonksiyonunaTaylor Teoremini uygularsak

$$K(x, x-y) = \sum_{|\alpha|\leq N} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha} K(x,.)(x-x_0)\frac{(-y+x_0)^{\alpha}}{|\alpha|!} + R_{x_0}(x,y)$$

elde ederiz. Buradan;

$$R_{x_0}(x,y) = \sum_{|\alpha|=N+1} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha} K(x,.)(x-\xi)\frac{(-y+x_0)^{\alpha}}{|\alpha|!}$$

ve $\xi \in \mathbb{R}^n$ x_0'dan y'ye doğru parçası üzerinde bulunan bir noktadır. (5.7) kabulünden

$$\left|R_{x_0}(x,y)\right| \leq C\frac{|y-x_0|^{N+1}}{|x-x_0|^{n+N+1}} \qquad |x-x_0| \geq 2|y-x_0| \quad için$$

elde edilir. Yukarıdaki kestirimlerden a atomunun 0'a giden moment şartında

$$\int_{B(x_0,2r)^c} |Ta(x)|^p w(x)dx$$

$$\leq \int_{B(x_0,2r)^c} \left\{\int_{B(x_0,r)} \left|K(x,x-y) - P_{N,x_0}(x,y)\right| \; |a(y)|dy \right\}^p w(x)dx$$

$$\leq C\int_{B(x_0,2r)^c} \left\{\int_{B(x_0,r)^c} \frac{|y-x_0|^{N+1}}{|x-x_0|^{n+N+1}} |a(y)|dy\right\}^p w(x)dx$$

$$\leq Cr^{p(N+1)} \left(\int_{B(\quad)^c} \frac{w(x)dx}{|x-x_0|^{p(n+N+1)}}\right) \left(\int_{B(x_0,r)^c} |a(y)|dy\right)^p \tag{5.8}$$

elde edilir. Burada

$$P_{N,x_0}(x,y) = \sum_{|\alpha|\leq N} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha} K(x,.)(x-x_0)\frac{(-y+x_0)^{\alpha}}{\alpha!}$$

dır. Teorem 3.1.1 ve Lemma 3.1.4'den

$$\int_{B(x_0,2r)^c} \frac{w(x)dx}{|x-x_0|^{p(n+N+1)}} \leq Cr^{-p(n+N+1)}\, w\Big(B\big(x_{0,}r\big)\Big) \tag{5.9}$$

elde edilir. $w \in A_2$ olduğundan Hölder Eşitsizliği

$$\int_{B(x_0,r)} |a(y)|dy \quad \leq \left(\int_{B(x_0,r)} |a(y)|^2 w(y)dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B(x_0,r)} w(y)^{-1}dy \right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.10}$$

$$\leq Cr^n w\big(B(x_0,r)\big)^{\frac{1}{p}}$$

(5.8) ve (5.10) eşitsizlikleri göz önüne alındığında

$$\int_{B(x_0,2r)^c} |Ta(x)|^p w(x)dx \quad \leq C$$

elde edilir, ki bu Teorem 5.2.1'in ispatını tamamlar.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] A.P.Calderon and A.Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. 88 (1952), 85-139.

[2] A.P.Calderon and A.Zygmund, *On singular integrals*, Amer.J.Math.78 (1956), 289-309.

[3] R.Fefferman, *A note on the singular integral,* Proc. Amer. Math.Soc. 74 (1979), 266-270.

[4] K.Jichang, *On weighted H^p boundedness of C-Z type singular integral operators*, J. Math. Anal. Appl. 197 (1996), 864-874.

[5] J.C.Kuang, On H^p *boundedness of singular integral operators*, Acta Sci. Natl. Univ. Norm.Hunan 15 (1992), 106-109.

[6] J.Namani, L^∞*-BMO boundedness for a singular integral operator*, Proc. Amer. Math.Soc. 108 (1990),465-470.

[7] D.K.Watson, *Weighted estimates for singular integrals via Fourier transform estimates,* Duke Math. J. 60 (1990), 389-399.

[8] A.P.Calderon and A.Zygmund,*On a problem of Mihlin*, Trans.Amer.Math.Soc. 78 (1955), 209-224.

[9] A.P.Calderon and A.Zygmund, On singular integral with variable kernels, Appl. Anal. 7, (1978), 221-228.

[10] D.Kurtz and R. Wheeden, *Results on weighted norm inequalities for multipliers,* Trans. Amer. Math.Soc. 255 (1979), 343-362.

[11] M.Rosenblum, *Summability of Fourier series in $L^p(\mu)$,* Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962), 32-42.

[12] B.Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function,* Trans. Amer. Math. Soc. 165 (1972), 207-226.

[13] R.Coifman and C.Fefferman, *Weighted norm inequalities form maximal functions and singular integrals,* Studia Math. 51 (1974), 241-250.

[14] R. Hunt, B.Muckenhoupt, and R. Wheeden, *Weighted norm inequalities for the conjugate function and the Hilbert transform,* Trans. Amer. Math. Soc. 176 (1973), 227-251.

[15] J.-O. Strömberg and R.L. Wheeden, *Fractional integrals on weighted H^p and L^p spaces,* Trans. Amer. Math. Soc. 287 (1985), 293-321.

[16] J. Garcia-Cuerva and J.Rubio de Francia, *Weighted Norm inequalities and Related Topics,* North Holland, 1985.

[17] R.F. Gundy and R.L. Wheeden, *Weighted integral inequalities for nontangential maximal function, Lusin area integral, and Walsh-Paley series,* Studia Math. 49 (1974), 107-124.

[18] J. Garcia-Cuerva, *Weighted H^p spaces,* Dissertations Math. 162 (1979), 1-63.

[19] M.Y. Lee and C.C. Lin, *The molecular characterization of weighted Hardy spaces,* J.Funct. Anal. 188 (2002), 442-460.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devamı)

[20] Bownik, *boundedness of operators on Hardy spaces via atomic decomposition* Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), 3535-3542.

[21] Y. Han, M.-Y. Lee, and C.-C. Lin, *Atomic decomposition and boundedness of operators on weighted Hardy spaces, preprint.*

[22] D.Kurtz and R.Wheeden, *Results on weighted norm inequalities for multipliers,* Trans. Amer. Math. Soc. 255 (1979), 343-362.

[23] Cordoba and C.Fefferman, *A weighted norm inequality for singular integrals,* Studia Math. 57 (1976), 97-101.

[24] E.M.Stein and G.Weiss, *Intarpolation of operators with change of measures,* Trans. Amer. Math. Soc. 87 (1958), 159-172.

[25] E.B.Fabes and N.M.Rivieve, *Singular integrals with mixed homogeneity,* Studia Math. 27 (1966), 19-38.

[26] E.M.Stein and G.Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces,* Princeton Univ. Press,Princeton, N.J., 1971.

[27] A.P.Calderon and A. Zygmund, *Singular integral operators and differential equations,ibid.* 79 (1957), 901-921.