

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TAMİR EDİLEBİLEN BİR SİSTEM İÇİN NOKTASAL KULLANILABİLİRLİK

Nihan ODABAŞI

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

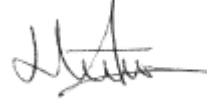
**ANKARA
2010**

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Nihan ODABAŞI tarafından hazırlanan “**Tamir Edilebilen Bir Sistem İçin Noktasal Kullanılabilirlik**” adlı tez çalışması 09/08/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliğı ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Halil AYDOĞDU



Jüri Üyeleri:

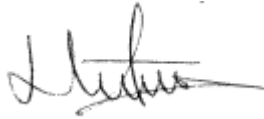
Başkan: Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU, Gazi Üniversitesi



Üye : Doç. Dr. Birdal ŐENOĞLU, Ankara Üniversitesi



Üye : Doç. Dr. Halil AYDOĞDU, Ankara Üniversitesi



Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof.Dr.Orhan ATAKOL

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TAMİR EDİLEBİLEN BİR SİSTEM İÇİN NOKTASAL KULLANILABİLİRLİK

Nihan ODABAŞI

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Halil AYDOĞDU

Bir sistemin etkinliğini değerlendirmek için işe yararlık, tamir edilebilirlik, kullanılabilirlik gibi pek çok kavram vardır. Bu kavramlardan kullanılabilirlik büyük önem arz eder. Çünkü kullanılabilirlik, tamir edilebilen bir sistemin belirli bir zamandaki çalışma olasılığını ifade eder. Tamir edilebilen bir sistem için sistemin t zamanındaki çalışma olasılığı, sistemin t zamanındaki noktasal kullanılabilirliğini verir.

Bu çalışmada, daha iyi sonuçlar veren, diğer tüm kullanılabilirlik ölçümlerinin temelini oluşturan ve literatürde çok fazla üzerinde durulmamış olan noktasal kullanılabilirlik incelenmektedir. Çalışma ve tamir sürelerinden oluşan bir sistemin noktasal kullanılabilirliği için iki denk ifade elde edilmektedir. Bu ifadeler, noktasal kullanılabilirlik yaklaşımı için alt ve üst sınır geliştirilmesinde kullanılmaktadır. Çalışma ve tamir sürelerinin üstel dağılım, gama dağılımı ve normal dağılım gösterdiği durumlar için yenileme süreci ve geometrik süreç varsayımları altında noktasal kullanılabilirlik yaklaşımı elde edilmektedir. Ayrıca noktasal kullanılabilirliğin süreç oranlarına ve dağılım parametrelerine duyarlılığı üzerinde durulmaktadır.

Ağustos 2010, 98 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kullanılabilirlik, yenileme süreci, geometrik süreç, integral denklem

ABSTRACT

POINTWISE AVAILABILITY FOR A REPAIRABLE SYSTEM

Nihan ODABAŞI

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Halil AYDOĞDU

Several concepts as serviceability, maintainability, repairability and availability have been introduced to evaluate the effectiveness of a system. Among these concepts availability has a distinguished importance, because availability gives the probability that the system is operational. For a repairable system, the probability that the system is operational at time t denotes the pointwise availability of a system at that time t .

Analyses that consider the pointwise availability are quite rare. For this reason, this dissertation focuses on pointwise availability which is the basic measure of other availability measures. Two equivalent expressions are constructed for the pointwise availability of a system that goes through succeeding cycles with each cycle consisting of an operation time followed by a repair time. These expressions are used to develop bounds on the true availability of the pointwise availability. Pointwise availability approximations are provided under renewal or geometric processes of operation and repair times with exponential, gamma and normal distribution assumptions. In addition, some general statements are made about the sensitivity of pointwise availability functions to the ratio of the geometric processes and distribution parameters.

August 2010, 98 pages

Key Words: Availability, renewal process, geometric process, integral equation

TEŞEKKÜR

“Noktasal Kullanılabilirlik” ile ilgili çalışmamda araştırma olanağı sağlayan ve çalışmamın her safhasında benden yardımlarını esirgemeyen, önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam Sayın Doç. Dr. Halil AYDOĞDU ’ya (Ankara Üniversitesi, İstatistik Bölümü) en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmamda yardımlarını esirgemeyen Sayın Araş. Gör. Mahmut KARA’ya (Ankara Üniversitesi, İstatistik Bölümü) en içten teşekkürlerimi sunarım. İstatistik bilimini bana sevdiren ve öğrenmemde büyük katkıları olan Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümü’ndeki hocalarıma teşekkür ederim.

Yüksek lisansım boyunca maddi desteği ile rahatça çalışmamı, araştırma yapmamı sağlayan ve Bilim İnsanı Destekleme Programı kapsamında verdiği bursla kendimi potansiyel bir bilim insanı olarak görmemi sağlayan TÜBİTAK’a en derin saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca eğitim hayatım boyunca her daim yanımda olan, maddi ve manevi hiçbir desteğini esirgemeyen aileme, bana karşı duydukları sarsılmaz inançlarından dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Nihan ODABAŞI

Ankara, Ağustos 2010

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	4
2.1 Konvolüsyon ve Bağımsız Rasgele Değişkenlerin Toplamlarının Dağılımı.....	4
2.2 Laplace Dönüşümü.....	5
2.3 Laplace-Stieltjes Dönüşümü.....	7
2.4 Aritmetik Dağılım Fonksiyonu.....	7
2.5 Rasgele Değişkenlerin Stokastik Olarak Karşılaştırılması.....	8
2.6 İntegral Denklemler.....	8
2.7 Yenileme Denklemi ve Çözümü.....	10
3. YENİLEME SÜREÇLERİ.....	11
3.1 Yenileme Sürecinin Tanımı.....	11
3.2 Yenileme Fonksiyonu.....	12
4. GEOMETRİK SÜREÇLER.....	19
4.1 Geometrik Sürecin Tanımı.....	19
4.2 Geometrik Sürecin Stokastik Monotonluğu.....	20
4.3 Geometrik Süreçte Olaylar Arası Geçen Zamanın ve Bekleme Zamanının Dağılımı.....	21
4.4 Geometrik Yenileme Fonksiyonu.....	22
5. KULLANILABİLİRLİK TEORİSİ.....	26
5.1 Kullanılabilirlik Tanımı.....	26
5.2 Kullanılabilirlik ile İlgili Bazı Özellikler.....	27
5.3 Noktasal Kullanılabilirlik.....	27
5.3.1 Noktasal kullanılabilirliğin hesaplanması.....	28
5.3.2 Noktasal kullanılabilirlik için alt ve üst sınır.....	35

5.3.3 Çalışma ve tamir sürelerinin birer yenileme süreci oluşturduğu varsayımı altında noktasal kullanılabilirlik.....	37
5.3.4 Çalışma sürelerinin bir yenileme süreci ve tamir sürelerinin bir geometrik süreç oluşturduğu varsayımı altında noktasal kullanılabilirlik.....	40
5.3.5 Çalışma sürelerinin bir geometrik süreç ve tamir sürelerinin bir yenileme süreci oluşturduğu varsayımı altında noktasal kullanılabilirlik.....	41
5.3.6 Çalışma ve tamir sürelerinin birer geometrik süreç oluşturduğu varsayımı altında noktasal kullanılabilirlik.....	43
6. ANALİZ VE TARTIŞMA.....	44
6.1 Çalışma ve Tamir Sürelerinin Üstel Dağılım Gösterdiği Durum.....	46
6.2 Çalışma ve Tamir Sürelerinin Gama Dağılımı Gösterdiği Durum.....	57
6.3 Çalışma Sürelerinin Üstel Dağılım ve Tamir Sürelerinin Gama Dağılımı Gösterdiği Durum.....	73
6.4 Çalışma Sürelerinin Gama Dağılımı ve Tamir Sürelerinin Üstel Dağılım Gösterdiği Durum	80
6.5 Çalışma ve Tamir Sürelerinin Normal Dağılım Gösterdiği Durum.....	85
6.6 Noktasal Kullanılabilirlik Hata Fonksiyonu ve Kesinlik Derecesi.....	91
7. SONUÇ.....	95
KAYNAKLAR.....	96
ÖZGEÇMİŞ.....	98

SİMGELER DİZİNİ

*	Konvolüsyon İşlemi
$F_L(t)$	F Dağılım Fonksiyonunun Laplace Dönüşümü
$f_L(t)$	f Olasılık Yoğunluk Fonksiyonunun Laplace Dönüşümü
$F_{LS}(t)$	F Dağılım Fonksiyonunun Laplace Stieltjes Dönüşümü
$f_{LS}(t)$	f Olasılık Yoğunluk Fonksiyonunun Laplace Stieltjes Dönüşümü
$N(t)$	$(0,t]$ Zaman Aralığındaki Yenilemelerin Sayısı
$N_2(t)$	$(0,t]$ Zaman Aralığındaki Geometrik Yenilemelerin Sayısı
S_n	n. Yenilemenin Gerçekleşme Zamanı
T_n	n. Geometrik Yenilemenin Gerçekleşme Zamanı
$M(t)$	Yenileme Fonksiyonu
$M_2(t)$	Geometrik Yenileme Fonksiyonu
$X(t)$	Sistemin t Zamanındaki Çalışma Durumunu Gösteren Rasgele Değişken
$A(t)$	t Zamanındaki Noktasal Kullanılabilirlik
A	Uzun Dönem Kullanılabilirliği
A_{ave}	$[0,T]$ Aralığındaki Ortalama Kullanılabilirlik
A_∞	Uzun Dönem Ortalama Kullanılabilirliği
$A_1(t)$	Noktasal Kullanılabilirliğin Alt Sınırı
$A_2(t)$	Noktasal Kullanılabilirliğin Üst Sınırı
$e(t)$	Hata Fonksiyonu
c	Sonsuz Toplamdan Alınan Kesme Değeri
X_n	n. Çalışma Süresi Rasgele Değişkeni
Y_n	n. Tamir Süresi Rasgele Değişkeni
Z_n	n. Çalışma ve Tamir Süresinden oluşan n. Dönem
F_n	n. Çalışma Süresinin Dağılım Fonksiyonu
G_n	n. Tamir Süresinin Dağılım Fonksiyonu
H_n	n. Dönemin Dağılım Fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1 Sistem Davranışı Gösterimi.....	28
Şekil 6.1 Üstel $A(t)$ $c=7,11,13$, $\lambda = 0.01$, $\mu = 0.1$ (Yenileme – Yenileme).....	48
Şekil 6.2 Üstel $A(t)$ $c=7,11,13$, $\lambda = 0.01$, $\mu = 0.1$, $b=0.90$ (Yenileme–Geometrik)....	50
Şekil 6.3 Üstel $A(t)$ $c=13$, $\lambda = 0.01$, $\mu = 0.1$, $b=0.85, 0.90, 0.95$ (Yenileme-Geometrik).....	51
Şekil 6.4 Üstel $A(t)$ $c=7,11,13$, $\lambda = 0.01$, $\mu = 0.1$, $a=1.1$ (Geometrik-Yenileme).....	52
Şekil 6.5 Üstel $A(t)$ $c=13$, $\lambda = 0.01$, $\mu = 0.1$, $a=1.1, 1.2, 1.3$ (Geometrik-Yenileme)...	53
Şekil 6.6 Üstel $A(t)$ $c=13$, $\lambda = 0.01$, $\mu = 0.1$, $a=1.1, 1.2, 1.3$, $b=0.90$ (Geometrik-Geometrik).....	54
Şekil 6.7 Üstel $A(t)$ $c=13$, $\lambda = 0.01$, $\mu = 0.1$, $a=1.1$, $b=0.85,0.9,0.95$ (Geometrik-Geometrik).....	55
Şekil 6.8 Üstel $A(t)$ $c=13$, $\lambda = 0.01$, $\mu = 1/15,1/10,1/5$, $a=1.1$, $b=0.90$ (Geometrik-Geometrik).....	56
Şekil 6.9 Üstel $A(t)$ $c=13$, $\lambda = 0.01$, $\mu = 0.1$, $a=1.1, b=0.9$	57
Şekil 6.10 $A(t)$ $X \sim Gamma(\alpha_1 = 2, \beta_1 = 1)$ ve $Y \sim Gamma(\alpha_2 = 1, \beta_2 = 1)$	59
Şekil 6.11 $A(t)$ $X \sim Gamma(\alpha_1 = 7.6, \beta_1 = 0.5)$ ve $Y \sim Gamma(\alpha_2 = 2.4, \beta_2 = 0.85)$..	62
Şekil 6.12 Gama $A(t)$ $c=20$, $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 1$ (Yenileme –Yenileme)....	64
Şekil 6.13 Gama $A(t)$ $c=20,30,40$, $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 50$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_2 = 5$ (Yenileme-Yenileme).....	65
Şekil 6.14 Gama $A(t)$ $c=12,14,16$, $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 50$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_2 = 5$, $b=0.9$ (Yenileme-Geometrik).....	66
Şekil 6.15 Gama $A(t)$ $c=12$, $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 50$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_2 = 5$, $b=0.85,0.9,0.95$ (Yenileme-Geometrik).....	67
Şekil 6.16 Gama $A(t)$ $c=8$, $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 50$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_2 = 5$, $a=1.1,1.2,1.3$ (Geometrik-Yenileme).....	69
Şekil 6.17 Gama $A(t)$ $c=6,7,8$, $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 50$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_2 = 5$, $a=1.1$, $b=0.9$ (Geometrik-Geometrik).....	70

Şekil 6.18 Gama $A(t)$ $c=7, \alpha_1 = 2, \beta_1 = 50, \alpha_2 = 2, \beta_2 = 5, a=1.1, 1.2, 1.3, b=0.90$ (Geometrik - Geometrik).....	71
Şekil 6.19 Gama $A(t)$ $c=7, \alpha_1 = 2, \beta_1 = 50, \alpha_2 = 2, \beta_2 = 5, a=1.1, b=0.85, 0.90, 0.95$ (Geometrik - Geometrik).....	71
Şekil 6.20 Gama $A(t)$ $c=7, \alpha_1 = 2, \beta_1 = 40, 50, 60, \alpha_2 = 2, \beta_2 = 5, a=1.1, b=0.9$ (Geometrik - Geometrik).....	72
Şekil 6.21 Gama $A(t)$ $c=7, \alpha_1 = 2, \beta_1 = 50, \alpha_2 = 2, \beta_2 = 2.5, 5, 7.5, a=1.1, b=0.9$ (Geometrik - Geometrik).....	73
Şekil 6.22 Üstel-Gama $A(t)$ $c=11, 13, 15, \lambda = 0.01, \alpha = 2, \beta = 5, a=1.1, b=0.9$ (Geometrik – Geometrik).....	76
Şekil 6.23 Üstel-Gama $A(t)$ $c=10, \lambda = 0.01, \alpha = 2, \beta = 5, a=1.1, 1.2, 1.3, b=0.9$ (Geometrik – Geometrik).....	77
Şekil 6.24 Üstel-Gama $A(t)$ $c=10, \lambda = 0.01, \alpha = 2, \beta = 5, a=1.1, b=0.85, 0.90, 0.95$ (Geometrik – Geometrik).....	78
Şekil 6.25 Üstel-Gama $A(t)$ $c=10, \lambda = 0.01, \alpha = 2, \beta = 2.5, 5, 7.5, a=1.1, b=0.9$ (Geometrik – Geometrik).....	79
Şekil 6.26 Üstel-Gama $A(t)$ $c=10, \lambda = 0.01, \alpha = 1, 2, 3, \beta = 5, a=1.1, b=0.9$ (Geometrik-Geometrik).....	79
Şekil 6.27 Gama-Üstel $A(t)$ $c=7, \alpha = 2, \beta = 50, \mu = 0.1, a=1.1, 1.2, 1.3, b=0.9$ (Geometrik – Geometrik).....	83
Şekil 6.28 Gama-Üstel $A(t)$ $c=7, \alpha = 2, \beta = 50, \mu = 0.1, a=1.1, b=0.85, 0.90, 0.95$ (Geometrik – Geometrik).....	84
Şekil 6.29 Gama-Üstel $A(t)$ $c=7, \alpha = 2, \beta = 40, 50, 60, \mu = 0.1, a=1.1, b=0.9$ (Geometrik-Geometrik).....	84
Şekil 6.30 Normal $A(t)$ $c=30, 40, 50, \mu = 100, \sigma = 25, \lambda = 10, \rho = 2.5$ (Yenileme – Yenileme).....	86
Şekil 6.31 Normal $A(t)$ $c=50, \mu = 100, \sigma = 25, \lambda = 10, \rho = 2.5, b=0.85, 0.90, 0.95$ (Yenileme-Geometrik).....	88
Şekil 6.32 Normal $A(t)$ $c=40, \mu = 100, \sigma = 15, 20, 25, a=1.1, \lambda = 10, \rho = 2.5, b=0.90$ (Geometrik-Geometrik).....	90

Şekil 6.33 Normal $A(t)$ $c=40, \mu = 100, \sigma = 25, a=1.1, \lambda = 10, 15, 20, \rho = 2.5, b=0.90$	
(Geometrik-Geometrik).....	91
Şekil 6.34 Üstel $A(t)$ Üst Sınır $c=13, \lambda = 0.01, \mu = 0.1, a=1.3, b=0.90$	
(Geometrik- Geometrik).....	92
Şekil 6.35 Üstel $A(t)$ $c=13, \lambda = 0.01, \mu = 0.1, a=1.3, b=0.90$	
(Geometrik-Geometrik).....	93
Şekil 6.36 Üstel $A(t)$ $c=1, \dots, 13, \lambda = 0.01, \mu = 0.1, a=1.3, b=0.90$	
(Geometrik-Geometrik).....	94

1. GİRİŞ

Günümüzde özellikle sanayi sistemlerine, askeri sistemlere ve bilgisayar ağları gibi bilgi iletişim teknolojilerine olan bağımlılık gittikçe artmaktadır. Sıkça kullanılan bu sistemler genellikle tamir edilebilen sistemler olmaktadır. Çünkü bozulmaları durumunda sistemi baştan oluşturmak oldukça maliyetlidir. Bunun yanında, bozulduğunda tamir edilemeyen sistemler vardır. Örneğin, programlanmış testlere tabi tutulan ve depoda bulunan bir füze tamir edilebilirken, fırlatıldıktan sonra tamiri mümkün değildir. Bu çalışmada bahsedilen sistemlerin, tamir edilebilir olduğu varsayılmaktadır. Sistemler karmaşıklaştıkça ve otomasyon arttıkça, bu sistemlerin çalışma ve tamir sürelerine olan ilgi de artmaktadır. Örneğin ABD’de ordu tarafından kullanılan sistemlerde ortaya çıkan herhangi bir aksaklık ve plansız oluşan bu aksaklığın tamir süresi, askerler için ölüm kalım mücadelesine neden olacağından, ordu çok aşamalı yapısal bir program uygulamaktadır.

Bahsi geçen sistemlerin etkinliğini değerlendirmek için işe yararlılık, tamir edilebilirlik, kullanılabilirlik gibi pek çok kavram vardır. Bunlar içerisinde kullanılabilirlik (availability) büyük önem arz eder. Çünkü kullanılabilirlik, tamir edilebilen bir sistemin belirli bir zamandaki çalışma olasılığını ifade eder. Tamir edilebilen bir sistem için sistemin t zamanındaki çalışma olasılığı, sistemin t zamanındaki noktasal kullanılabilirliğini verir. Eğer sistemin tamiri mümkün değilse, kullanılabilirlik, sistem güvenilirliğine indirgenir. Ayrıca tamir süreleri ihmal edilebilir olmamalıdır. Aksi halde kullanılabilirlik her zaman 1 olacak ve hesaplanmasına gerek kalmayacaktır.

Noktasal kullanılabilirlik fonksiyonuna bağlı olarak hesaplanan diğer fonksiyonlar uzun dönem kullanılabilirliği, ortalama kullanılabilirlik ve uzun dönem ortalama kullanılabilirliğidir. Bu ölçütler arasından literatürde genellikle uzun dönem kullanılabilirliğinden bahsedilir; fakat kullanımı oldukça sınırlıdır. Ayrıca yaşamdaki birçok sistemde uzun döneme çok fazla sayıda periyottan sonra ulaşılır ve genellikle ekonomik ve teknolojik sebeplere bağlı olarak bu duruma ulaşılmadan önce sistem önemli ölçüde değişir. Bu gerçek, uzun dönem kullanılabilirliğinin bir kullanılabilirlik ölçümü olarak geçerliliği hakkında sorunlara neden olur. Bu nedenle bu çalışmada, daha

iyi sonuçlar veren ve diğer tüm ölçümlerin temelini oluşturan noktasal kullanılabilirlik üzerinde durulmuştur.

Bu hususta Kumar ve Knezevic (1998) yenileme sürecini kullanarak kullanılabilirliğe dayalı yedek optimizasyonuna ilişkin bir çalışma yapmış ve çalışmada üstel, gama, normal, Weibull dağılımlı çalışma zamanlarına sahip yedek bileşenleri için matematiksel modeller geliştirmiştir. Pham-Gia ve Turkkan (1999) çalışma ve tamir zamanları bağımsız gama dağıldığında oluşan gama alterne yenileme süreci için kullanılabilirliğin elde edilmesi üzerinde durmuştur. Rehmert (2000) çalışma ve tamir zamanları geometrik süreçlere veya yenileme süreçlerine göre dağıldığında kullanılabilirlik analizi yapmıştır. Gamiz ve Roman (2008) çalışma ve tamir zamanları bilinmeyen dağılımlı olduğunda kullanılabilirliğin parametrik olmayan tahminini vermiştir. Zhang (2007) ise çalışma ve tamir zamanlarına gecikme zamanını da ekleyerek, üstel dağılım için geometrik süreç durumunda tamir modeli oluşturmuştur.

Bu çalışmada öncelikle temel kavramlar olan konvolüsyon, Laplace, Laplace-Stieltjes dönüşümleri, aritmetik dağılım fonksiyonu, rasgele değişkenlerin stokastik olarak karşılaştırılması, integral denklemler ile yenileme denklemi ve çözümünden bahsedilmiştir. Sırasıyla üçüncü ve dördüncü bölümlerde yenileme süreçleri ve geometrik süreçler tanımlanmış, bu süreçlere dair önemli özellikler verilmiştir.

Beşinci bölümde kullanılabilirlik kavramı üzerinde durulmuş ve kullanılabilirliğe ilişkin bazı önemli özellikler verilmiştir. Daha sonra çalışmanın esas konusunu oluşturan noktasal kullanılabilirlik kavramı açıklanmış ve hesaplanması üzerinde durulmuştur. Noktasal kullanılabilirlik için iki ayrı yoldan eşitlikler elde edilmiştir. Bu eşitliklerdeki sonsuz toplamlardan alınan terim sayıları sınırlandırılarak noktasal kullanılabilirlik için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir. Çalışma ve tamir sürelerinin yenileme süreci veya geometrik süreç oluşturmaları varsayımları altında, noktasal kullanılabilirlik için alt ve üst sınır formülleri verilmiştir. Altıncı bölümde ise,

- çalışma ve tamir sürelerinin üstel dağılımı,
- çalışma ve tamir sürelerinin gama dağılımı,
- çalışma sürelerinin üstel dağılım ve tamir sürelerinin gama dağılımı,

- çalışma sürelerinin gama dağılımı ve tamir sürelerinin üstel dağılım,
- çalışma ve tamir sürelerinin normal dağılım

gösterdiği durumlar için yenileme süreci ve geometrik süreç varsayımları altında örnekler üzerinde durulmuş ve parametrelerin bazı karşılaştırmaları yapılmıştır.

Çalışma ve tamir sürelerinin birer yenileme süreci oluşturduğu durum için noktasal kullanılabilirlik fonksiyonunun analitik ifadesi elde edilmiştir. Diğer durumlarda ise analitik ifadelere ulaşamadığı için, alt ve üst sınırların Laplace dönüşümleri alındıktan sonra, Matlab programı yardımıyla bu dönüşümlerin ters Laplace dönüşümleri alınarak, noktasal kullanılabilirlik için yaklaşımda bulunulmuştur. Ayrıca çalışma ve tamir sürelerinin normal dağıldığı varsayımı altında, bütün süreç durumları için kullanılabilirlik fonksiyonunun kapalı formdaki ifadelerine ulaşılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, çalışmada gerekli olan bazı temel bilgiler verilmektedir. Konvolüsyon ve bağımsız rasgele değişkenlerin toplamlarının dağılımı, Laplace ve Laplace-Stieltjes dönüşümleri, aritmetik dağılım fonksiyonu, rasgele değişkenlerin stokastik olarak karşılaştırılması, integral denklemler ve yenileme denklemi ile bu denklemin çözümü tanıtılmaktadır.

2.1 Konvolüsyon ve Bağımsız Rasgele Değişkenlerin Toplamlarının Dağılımı

F ve G , \mathfrak{R} üzerinde tanımlı iki fonksiyon olmak üzere;

$$F * G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y) dF(y), \quad x \in \mathfrak{R}$$

ile ifade edilen integral mevcut olduğunda, $F * G$ fonksiyonuna F ile G nin konvolüsyonu denir. F ve G , $(-\infty, \infty)$ aralığı üzerinde dağılım fonksiyonu özelliklerine sahip iki fonksiyon olduğunda, konvolüsyon değişme ve birleşme özelliklerine sahiptir.

Teorem 2.1.1 X ve Y sırasıyla F ve G dağılım fonksiyonlarına sahip ve birbirinden bağımsız iki rasgele değişken olsun. Bu iki bağımsız rasgele değişkenin toplamını ifade eden $X+Y$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F_{X+Y}(t) = F * G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-x) dF(x)$$

biçiminde ifade edilir. Ayrıca F ve G dağılım fonksiyonlarına sırasıyla f ve g yoğunluk fonksiyonları karşılık geldiğinde, $F * G$ dağılım fonksiyonuna da $f * g$ yoğunluk fonksiyonu karşılık gelir. Burada

$$f_{X+Y}(t) = f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x) f(x) dx$$

biçiminde yazılabilir.

Teorem 2.1.1 herhangi sonlu sayıdaki bağımsız rasgele değişken için de geçerlidir. X_1, X_2, \dots, X_n aynı F dağılımına sahip ve birbirlerinden bağımsız n tane rasgele değişken olsun. $F^{n*} = F * \dots * F$ (n tane) olmak üzere $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F^{n*}(t) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq t)$ dir. F dağılım fonksiyonu f yoğunluk fonksiyonuna sahip ise F^{n*} dağılım fonksiyonu da f^{n*} yoğunluk fonksiyonuna sahiptir ($f^{n*} = f * \dots * f$). n doğal sayı olmak üzere $F^{n+1*}(t) = F^{n*}(t) * F$, $n=1$ için $F^{1*}(t) = F$ ve $n=0$ için F^{0*} dağılım fonksiyonu

$$F^{0*}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

2.2 Laplace Dönüşümü

Bağımsız rasgele değişkenlerin toplamını içeren ifadelerle çalışırken, bu ifadelere denk olan Laplace dönüşümlerini kullanmak hesaplamalarda kolaylık sağlar.

Tanım 2.2.1 X negatif olmayan bir rasgele değişken ve $f(x)$ bu rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere Laplace dönüşümü,

$$f_L(t) = E(e^{-tX}) = \int_0^{\infty} e^{-tx} f(x) dx \quad (2.1)$$

biçiminde ifade edilir. Bazı durumlarda $L\{f(x); t\}$ ve $f^*(t)$ gösterimleri de kullanılabilir.

$$L\{f(x); t\} \equiv f^*(t) \equiv f_L(t)$$

$f(x)$ bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğundan (2.1) ifadesinden $f_L(0)=1$ olduğu görülür ve $\forall t \geq 0$ için $0 < f_L(t) \leq 1$ dir (Cox 1962).

Örnek 2.2.1 Üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0$$

Bu fonksiyona denk olan Laplace dönüşümü

$$L\{\lambda e^{-\lambda x}; t\} \equiv f^*(t) \equiv f_L(t) = \lambda / (\lambda + t)$$

dir.

Laplace dönüşümlerinde eşitlikleri daha öz ve daha kolay işlenebilir hale getirmek için kullanılan bazı önemli dönüşüm eşitlikleri vardır.

$$(i) \quad L\{F(t)\} = F_L(t) = \frac{1}{t} f_L(t) \quad (2.2)$$

$$(ii) \quad L\left\{\frac{1}{a} f\left(\frac{1}{a}t\right)\right\} = f_L(at), \quad a > 0 \text{ sabiti için} \quad (2.3)$$

X ve Y sırasıyla F ve G dağılım fonksiyonları ile f ve g yoğunluk fonksiyonlarına sahip, birbirinden bağımsız iki rasgele değişken olmak üzere, sıkça kullanılan iki eşitliği ispatlarıyla verelim.

$$\begin{aligned} (f * g)_L(t) &= \int_0^{\infty} e^{-tx} f * g(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-tx} f_{X+Y}(x) dx \\ &= E(e^{-t(X+Y)}) = E(e^{-tX-tY}) = E(e^{-tX})E(e^{-tY}) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-tx} f(x) dx \int_0^{\infty} e^{-ty} g(y) dy = f_L(t)g_L(t) \\ (F_{X+Y})_L(t) &= \frac{1}{t} (f_{X+Y})_L(t) = \frac{1}{t} (f * g)_L(t) = \frac{1}{t} f_L(t)g_L(t) \end{aligned}$$

2.3 Laplace-Stieltjes Dönüşümü

Tanım 2.3.1 $(-\infty, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlı, sınırlı ve azalmayan bir F fonksiyonunun Laplace-Stieltjes dönüşümü

$$F_{LS}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx} dF(x) \quad -\infty < t < \infty \quad (2.4)$$

ile ifade edilir. F ve G , $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı iki dağılım fonksiyonu olsun.

$$F_{LS}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx} dF(x)$$
$$G_{LS}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx} dG(x)$$

olmak üzere

$$(F * G)_{LS}(t) = F_{LS}(t)G_{LS}(t)$$

dir (Kawata 1972). Ayrıca

$$(F * G)_{LS}(t) = (f * g)_L(t) = f_L(t)g_L(t) = F_{LS}(t)G_{LS}(t)$$

dir.

2.4 Aritmetik Dağılım Fonksiyonu

Tanım 2.4.1 Bir X rasgele değişkeni $\lambda > 0$ bir sabit olmak üzere bir olasılıkla $\{m\lambda : m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ kümesinden değerler alırsa X rasgele değişkenine ve onun dağılım fonksiyonuna aritmetik denir. Bu özelliğe sahip en büyük λ sayısına da dağılımın gereni denir (Grimmett ve Stirzaker 1992).

2.5 Rasgele Değişkenlerin Stokastik Olarak Karşılaştırılması

Tanım 2.5.1 X ve Y iki rasgele değişken olsun. Her a reel sayısı için

$$P(X > a) \geq P(Y > a)$$

ise “ X stokastik olarak Y ’den büyüktür” ya da “ Y stokastik olarak X ’den küçüktür” denir ve $X \geq_{st} Y$ ya da $Y \leq_{st} X$ ile gösterilir (Ross 1983). Ayrıca bir $\{X_n, n=1,2,\dots\}$ stokastik sürecine $n=1,2,\dots$ için $X_n \geq_{st} (\leq_{st}) X_{n+1}$ ise stokastik azalandır (artandır) denir ve $X_n \downarrow_{st} (\uparrow_{st})$ ile gösterilir.

2.6 İntegral Denklemler

Bilinmeyen bir fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemlere integral denklemler denir.

Tek değişkenli fonksiyonlarda genel olarak bir integral denklem

$$u(x)v(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)v(t)dt = h(x)$$

şeklinde verilir. Burada a ve b birer sabit, λ bir parametre ve tanım bölgesi $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$ olmak üzere $u(x)$, $h(x)$, $K(x,t)$ bilinen fonksiyonlar, $v(x)$ ise bilinmeyen fonksiyondur. $K(x,t)$ fonksiyonuna integral denklemin çekirdeği denir. Bilinmeyen v fonksiyonunun denklemdeki konumuna göre;

$$\int_a^b K(x,t)v(t)dt = h(x) \quad \text{I. çeşit integral denklem}$$

$$v(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)v(t)dt = h(x) \quad \text{II. çeşit integral denklem}$$

$$u(x)v(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)v(t)dt = h(x) \quad \text{III. çeşit integral denklem}$$

adı verilir.

Bir integral denklemde bilinmeyen v fonksiyonu birinci dereceden ise o denkleme lineer integral denklem adı verilir.

Bir integral denklemin integral sınırlarından en az biri sonsuz ya da çekirdek fonksiyonu tanım bölgesinin en az bir noktasında sonsuz ise bu integral denkleme tekil (singüler) integral denklem denir.

$$\int_a^x K(x,t)v(t)dt = h(x) \quad (2.5)$$

$$\int_a^b K(x,t)v(t)dt = h(x) \quad (2.6)$$

(2.5) integral denkleminde integral sınırlarından biri x gibi bir değişkendir. Bu şekildeki integral denklemlere Volterra integral denklemi adı verilir. (2.6) integral denkleminde ise integral sınırlarının her ikisi de sabittir. Burada, integral sınırlarının biri sabit iken diğeri sonsuz olabileceği gibi her iki sınır da sonsuz olabilir. Bu şekilde tanımlanan integral denklemlere Fredholm integral denklemi adı verilir.

$K(x,t)$, $(x-t)$ yi değişken kabul eden tek değişkenli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$v(x) - \lambda \int_a^b K(x-t)v(t)dt = h(x)$$

tipindeki bir integral denkleme konvolüsyon integral denklemi denir.

2.7 Yenileme Denklemi ve Çözümü

A bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere bir F dağılım fonksiyonu ve a fonksiyonu bilinsin. Bu durumda

$$A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x)dF(x), \quad t \geq 0 \quad (2.7)$$

ile verilen integral denkleme yenileme denklemi adı verilir (Karlin ve Taylor 1975).

Teorem 2.7.1 a sınırlı bir fonksiyon olmak üzere (2.7) integral denkleminin sonlu aralıklar üzerinde sınırlı bir tek çözümü vardır ve bu çözüm olan A fonksiyonu

$$A(t) = a(t) + \int_0^t a(t-x)d\left(\sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(t)\right), \quad t \geq 0 \quad (2.8)$$

dir (Karlin ve Taylor 1975).

3. YENİLEME SÜREÇLERİ

Günlük yaşamda karşılaşılan birçok durum yenileme süreçleri olarak modellenebilir. Örneğin bir sigorta şirketine gelen hasar taleplerini ve bir tren istasyonuna gelen yolcuları göz önüne alırsak, ardışık olarak gelen hasar talepleri ve ardışık olarak gelen yolcular arasında geçen süreler bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenler ise bu sigorta hasar talepleri ve yolcuların gelişleri birer yenileme süreci oluşturur.

3.1 Yenileme Sürecinin Tanımı

Yenileme süreci zamanın bir fonksiyonu olarak gerçekleşen olayların (yenilemelerin) sayısını sayan bir stokastik süreçtir. Yenilemeler arası geçen zaman süreleri bağımsız ve aynı dağılımlı kabul edilir.

$N(t)$, $(0, t]$ aralığında gerçekleşen olayların sayısı olmak üzere $\{N(t), t \geq 0\}$ stokastik sürecine sayma süreci denir. $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (i) $N(t) \geq 0$.
- (ii) $N(t)$ tamsayı değerli bir rasgele değişkendir.
- (iii) $s < t$ ise $N(s) \leq N(t)$.
- (iv) $s < t$ ise $N(t) - N(s)$, $(s, t]$ aralığında gerçekleşen olay sayısıdır.

X_1, X_2, \dots, X_n birbirinden bağımsız, aynı F dağılımlı negatif olmayan rasgele değişkenler olsun.

$$S_0 = 0, S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, n = 1, 2, \dots$$

olmak üzere

$$N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$$

ile verilen $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine bir yenileme süreci denir. Her sabit $t \geq 0$ için $N(t)$, yenileme rasgele değişkeni olarak adlandırılır. Ayrıca

$$P(N(t) \geq n) = P(S_n \leq t)$$

dir (Ross 1983).

X_1 birinci yenileme yapıncaya kadar geçen zaman süresi olmak üzere $n=1,2,\dots$ için X_n , $(n-1)$. yenileme gerçekleştikten sonra n . yenileme yapıncaya kadar geçen zaman süresi olarak ifade edilir. Böylelikle S_n n . yenilemenin gerçekleşme zamanı olurken, $N(t)$, t zamanına kadar, yani $(0, t]$ zaman aralığında yapılan yenilemelerin sayısıdır. Her $t \geq 0$ için $N(t)$ sonludur.

Her sabit $t \geq 0$ için $N(t)$ rasgele değişkeninin olasılık dağılımı

$$\begin{aligned} P(N(t) = n) &= P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n + 1) \\ &= P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t) \\ &= F^{n*}(t) - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.2 Yenileme Fonksiyonu

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreci olmak üzere;

$$M(t) = E(N(t)), \quad t \geq 0$$

ile tanımlanan M beklenen değer fonksiyonuna yenileme fonksiyonu veya yenileme sürecinin ortalama değer fonksiyonu denir (Karlin ve Taylor 1975). Burada $E(N(t))$ $[0, t]$ zaman aralığında yapılan yenilemelerin ortalama sayısıdır.

$$I_k = \begin{cases} 1, & S_k \leq t \\ 0, & S_k > t \end{cases}$$

olmak üzere

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I_k$$

olup,

$$\begin{aligned} E(N(t)) &= E\left(\sum_{k=1}^{\infty} I_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} E(I_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(S_k \leq t) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(t) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(t), \quad t \geq 0 \tag{3.1}$$

dir.

(3.1) in kullanılmasıyla M yenileme fonksiyonu için bir integral denklem elde edilebilir.

$F^{(k+1)*}(t)$ yerine matematiksel olarak denk olan $\int_0^t F^{k*}(t-x)dF(x)$ integralinin

alınmasıyla,

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x)dF(x), \quad t \geq 0$$

$$M(t) = F(t) + F * M(t), \quad t \geq 0 \quad (3.2)$$

bulunur. Böylece M yenileme fonksiyonu $a(t) = F(t)$ olmak üzere (2.7) yenileme denklemini sağlar. Teorem 2.7.1 den a sınırlı bir fonksiyon olmak üzere, (2.7) yenileme denkleminin sonlu aralıklar üzerinde sınırlı bir tek çözümü vardır ve bu çözüm olan A fonksiyonu

$$A(t) = a(t) + \int_0^t a(t-x)dM(x), \quad t \geq 0$$

$$A(t) = a(t) + M * a(t), \quad t \geq 0$$

dir.

Konvolüsyon değişme özelliğine sahip olduğundan ($M * F = F * M$), (3.2) denklemi

$$M(t) = F(t) + \int_0^t F(t-x)dM(x), \quad t \geq 0$$

olarak yazılabilir. t 'nin negatif değerleri için $N(t) = 0$ olduğundan $t < 0$ için $M(t) = 0$ dir. $t=0$ için (3.2) integral denkleminden $M(0) = F(0)/(1-F(0))$ olduğu kolaylıkla elde edilir. $F(0) = 0$; yani X_n rasgele değişkeni pozitif olduğunda $t \leq 0$ için $M(t) = 0$ 'dır.

F dağılım fonksiyonu f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip ise (3.2) denklemi

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x)f(x)dx, \quad t \geq 0$$

biçiminde yazılabilir.

F ve M fonksiyonlarının sırasıyla Laplace-Stieltjes dönüşümleri

$$F_{LS}(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} dF(x)$$

ve

$$M_{LS}(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} dM(x)$$

olmak üzere,

$$M_{LS}(t) = F_{LS}(t) + F_{LS}(t)M_{LS}(t)$$

elde edilir. O halde

$$M_{LS}(t) = \frac{F_{LS}(t)}{1 - F_{LS}(t)}$$

ve

$$F_{LS}(t) = \frac{M_{LS}(t)}{1 - M_{LS}(t)}$$

dır. Ayrıca F dağılım fonksiyonu f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip iken f ve M fonksiyonlarının sırasıyla Laplace dönüşümleri

$$f_L(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} f(x) dx$$

ve

$$M_L(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} M(x) dx$$

olmak üzere

$$M_L(t) = \frac{f_L(t)}{t(1 - f_L(t))} \quad (3.3)$$

olduğu kolaylıkla elde edilebilir.

Şimdi $M(t)$ yenileme fonksiyonu ile ilgili bazı önemli limit teoremlerini verelim. İlk olarak uzun süre çalışmakta olan bir yenileme sürecinde birim zamanda yapılan yenilemelerin beklenen sayısının yaklaşık $1/\mu$ olduğunu iddia eden elemanter yenileme yöntemini verelim. Bu teorem aynı zamanda $M(t)$ 'nin t 'ye göre yaklaşık olarak lineer olduğunu ifade eder. Burada μ , $[0, t]$ 'deki her bir yenileme aralığının beklenen değeridir (Aydoğdu 1997).

Teorem 3.2.1 (Elemanter Yenileme Teoremi) $\{N(t), t \geq 0\}$ her i için $E(X_i) = \mu < \infty$ olacak biçimde bir yenileme süreç olsun. Bu durumda

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

dır (Karlin ve Taylor 1975).

Teorem 3.2.2 (Anahtar Yenileme Teoremi) a , $(0, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlı ve

(i) Her $t > 0$ için $a(t) \geq 0$

(ii) $\int_0^{\infty} a(t) dt < \infty$

(iii) a artmayan

özelliklerine sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda, F aritmetik olmayan bir dağılım fonksiyonu ise

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t a(t-x) dM(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} a(x) dx$$

dır (Smith 1958).

Sonuç 3.2.2 Bir yenileme sürecinde ardışık yenilemeler arası geçen zaman süreleri aritmetik olmayan bir F dağılım fonksiyonuna ve sonlu μ ortalamasına sahip olsun. Bu durumda a fonksiyonu yukarıda bahsi geçen (i), (ii), (iii) özelliklerini sağlarsa, (2.7) yenileme denkleminin çözüm fonksiyonu olan A için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} a(x) dx$$

dır.

İspat (2.7) yenileme denkleminin çözüm fonksiyonu Teorem 2.7.1'den

$$A(t) = a(t) + \int_0^t a(t-x) dM(x)$$

ile verilir. Bu durumda $t \rightarrow \infty$ ile limit alınarak Teorem 3.2.2 kullanılırsa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) + \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} a(x) dx$$

elde edilir. Ayrıca a 'nın sahip olduğu özelliklerden dolayı $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$ olacağından

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} a(x) dx$$

olarak bulunacaktır.

Şimdi yenileme teoremi olarak bilinen Blackwell'in teoremini verelim.

Teorem 3.2.3 Herhangi bir $\{N(t), t \geq 0\}$ yenileme sürecinde ardışık yenilemeler arası geçen zaman süreleri aritmetik olmayan F dağılım fonksiyonuna ve sonlu μ ortalamasına sahip ise herhangi bir $h > 0$ için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [M(t) - M(t-h)] = \frac{h}{\mu}$$

dir (Smith 1958).

İspat $h > 0$ olmak üzere

$$a(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & 0 < t \leq h \\ 0, & t > h \end{cases}$$

alınmasıyla Teorem 3.2.2'den ispat açıktır.

Bu teorem süreç uzun bir süre çalışmada ise h uzunluğundaki bir aralıkta yapılan yenilemelerin beklenen sayısının yaklaşık $\frac{h}{\mu}$ olduğunu söyler (Aydoğdu 1997).

4. GEOMETRİK SÜREÇLER

Bu bölümde monoton bir sayma süreci olan geometrik süreç üzerinde durulmaktadır. Geometrik süreçte olaylar arası geçen zaman sürelerinin ve bekleme zamanının dağılımı verilmekte, geometrik sürecin stokastik monotonluğu ve geometrik yenileme fonksiyonu tanıtılmaktadır.

4.1 Geometrik Sürecin Tanımı

(X_n) negatif olmayan rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun.

$$S_0 = 0, S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, n = 1, 2, \dots$$

olmak üzere, (X_n) dizisinin

$$N_1(t) = \text{maks}\{n : S_n \leq t\}$$

ile bir $\{N_1(t), t \geq 0\}$ sayma süreci oluşturduğunu Kısım 3.1'den biliyoruz.

(Y_n) negatif olmayan bağımsız rasgele değişkenlerin herhangi bir dizisi olsun. $(a^{n-1}Y_n)$ bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin bir dizisi olacak şekilde bir $a > 0$ sayısı var ise (Y_n) dizisinin oluşturduğu sayma sürecine a oranlı bir geometrik süreç denir (Lam 1988).

$$T_0 = 0, T_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, n = 1, 2, \dots$$

olmak üzere

$$N_2(t) = \text{maks}\{n : T_n \leq t\}, t \geq 0$$

ile tanımlanan $\{N_2(t), t \geq 0\}$ sayma süreci a oranlı bir geometrik süreçtir. (Y_n) rasgele değişkeni $(n-1)$. ve n . olaylar arasında geçen zaman süresini gösterirken, T_n rasgele değişkeni n . olayın gerçekleşme zamanını ve $N_2(t)$ rasgele değişkeni t zamanına kadar gerçekleşen olayların sayısını ifade eder.

$\{N_2(t), t \geq 0\}$ a oranlı bir geometrik süreç olsun. Bu sürecin tanımından, sürece göre gerçekleşen olaylar arası geçen zaman süreleri olan (Y_n) rasgele değişkenleri bağımsızdır; fakat aynı dağılımlı değildir. Yalnızca $a=1$ iken bu rasgele değişkenler aynı dağılımlıdır ve karşımıza çıkan geometrik süreç bir yenileme süreci olur.

$$X_n = a^{n-1}Y_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

diyelim. Bu durumda (X_n) dizisi yenilemeler arası geçen zaman süreleri dağılım fonksiyonu F ve ortalaması μ olan

$$N_1(t) = \text{maks}\{n : S_n \leq t\}, \quad t \geq 0$$

ile tanımlı $\{N_1(t), t \geq 0\}$ yenileme sürecini oluşturur.

4.2 Geometrik Sürecin Stokastik Monotonluğu

$\{N_2(t), t \geq 0\}$ $a > 0$ oranlı bir geometrik süreç olsun. $a > 1$ olduğunu kabul edelim. $X_n = a^{n-1}Y_n$, $n = 1, 2, \dots$ olmak üzere X_1, X_2, \dots rasgele değişkenlerinin bağımsız ve aynı dağılımlı olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} P(Y_n > x) &= P(a^{1-n} X_n > x) \\ &= P(X_n > a^{n-1}x) \\ &= P(X_{n+1} > a^{n-1}x) \end{aligned}$$

yazılabilir. $a > 1$ iken $X_{n+1} > a^n$ olması $X_n > a^{n-1}$ olmasını gerektirdiğinden

$$\begin{aligned} P(Y_n > x) &\geq P(X_{n+1} > a^n x) \\ &= P(a^{-n} X_{n+1} > x) \\ &= P(Y_{n+1} > x) \end{aligned}$$

dır. O halde $\{Y_n, n = 1, 2, \dots\}$ süreci $a > 1$ iken n 'ye göre stokastik olarak azalandır ($Y_n \downarrow_{st}$). $0 < a < 1$ iken $\{Y_n, n = 1, 2, \dots\}$ sürecinin n 'ye göre stokastik olarak artan ($Y_n \uparrow_{st}$) olduğu da benzer olarak elde edilir.

4.3 Geometrik Süreçte Olaylar Arası Geçen Zamanın ve Bekleme Zamanının Dağılımı

$\{N_2(t), t \geq 0\}$ a oranlı bir geometrik süreç ve $\{N_1(t), t \geq 0\}$ bu geometrik süreçle ilgili yenilemeler arası geçen zaman süreleri dağılım fonksiyonu F ve ortalaması μ olan bir yenileme süreci olsun. Bu durumda a oranlı geometrik süreçte $(n-1)$. olay gerçekleştikten sonra n . olay gerçekleşinceye kadar geçen zaman süresi olan Y_n rasgele değişenin dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) &= P(Y_n \leq x) \\ &= P(a^{-n+1} X_n \leq x) \\ &= P(X_n \leq a^{n-1} x) \\ &= F(a^{n-1} x), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$E(Y_n) = a^{1-n} \mu, \quad n = 1, 2, \dots$$

olduğu açıktır. Şimdi de T_n rasgele değişkeninin dağılımını elde edelim. T_n bağımsız Y_1, Y_2, \dots, Y_n rasgele değişkenlerinin toplamı olduğundan

$$F_{T_n}(x) = F_{Y_1 + \dots + Y_n}(x) = F_{Y_1} * F_{Y_2} * \dots * F_{Y_n}(x) \quad (4.1)$$

olur.

(4.1) denkleminin göz önüne alınmasıyla her sabit $t \geq 0$ için $N_2(t)$ rasgele değişkeninin olasılık dağılımı

$$\begin{aligned} P(N_2(t) = n) &= P(N_2(t) \geq n) - P(N_2(t) \geq n+1) \quad n = 1, 2, \dots \\ &= P(T_n \leq t) - P(T_{n+1} \leq t) \\ &= F_{T_n}(t) - F_{T_{n+1}}(t) \\ &= F_{Y_1} * F_{Y_2} * \dots * F_{Y_n}(x) - F_{Y_1} * F_{Y_2} * \dots * F_{Y_{n+1}}(x) \\ &= F_{Y_1} * F_{Y_2} * \dots * F_{Y_n} * (1 - F_{Y_{n+1}})(t), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

4.4 Geometrik Yenileme Fonksiyonu

$\{N_2(t), t \geq 0\}$ bir geometrik süreç olmak üzere

$$M_2(t) = E[N_2(t)], \quad t \geq 0$$

ile verilen M_2 fonksiyonuna geometrik yenileme fonksiyonu ya da geometrik sürecin ortalama değer fonksiyonu denir. Burada $M_2(t)$, $(0, t]$ zaman aralığında gerçekleşen olayların ortalama sayısıdır.

$$M_2(t) = E[N_2(t)]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(N_2(t) \geq n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(T_n \leq t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_n}(t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} F_{Y_1} * F_{Y_2} * \dots * F_{Y_n}, \quad t \geq 0
\end{aligned} \tag{4.2}$$

dır ve $M_2(t)$ 'nin azalmayan olduğu açıktır. Birinci yenileme yapılmaya kadar geçen zaman süresi olan Y_1 rasgele değişkeni üzerinden koşullandırma ile $M_2(t)$ geometrik yenileme fonksiyonu için aşağıdaki integral denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}
M_2(t) &= E[N_2(t)] \\
&= E[E(N_2(t) | Y_1)] \\
&= \int_0^{\infty} E(N_2(t) | Y_1 = x) dF(x). \\
E(N_2(t) | Y_1 = x) &= \begin{cases} E[1 + N_2(a(t-x))], & x \leq t \\ 0, & x > t \end{cases}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
M_2(t) &= \int_0^{\infty} E[1 + N_2(a(t-x))] dF(x) \\
&= \int_0^t \{1 + E[N_2(a(t-x))]\} dF(x) \\
&= \int_0^t dF(x) + \int_0^t E[N_2(a(t-x))] dF(x) \\
&= F(t) + \int_0^t M_2(a(t-x)) dF(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$M_2(t) = F(t) + \int_0^t M_2(a(t-x))dF(x)$$

olur. Şimdi M_2 fonksiyonunun Laplace – Stieltjes dönüşümünü bulalım.

$$\begin{aligned} (F_{Y_1} * F_{Y_2} * \dots * F_{Y_n})_{LS}(t) &= \int e^{-ty} d(F_{Y_1} * F_{Y_2} * \dots * F_{Y_n})(y) \\ (F_{Y_1} * F_{Y_2} * \dots * F_{Y_n})_{LS}(t) &= \int e^{-ty} dF_{T_n}(y) \\ &= E(e^{-tT_n}) \\ &= E(e^{-t(Y_1+Y_2+\dots+Y_n)}) \\ &= E(e^{-tY_1} e^{-tY_2} \dots e^{-tY_n}) \\ &= E(e^{-tY_1})E(e^{-tY_2})\dots E(e^{-tY_n}) \\ &= \left(\int e^{-ty_1} dF_{Y_1}(y)\right)\left(\int e^{-ty_2} dF_{Y_2}(y)\right)\dots\left(\int e^{-ty_n} dF_{Y_n}(y)\right) \\ &= (F_{Y_1})_{LS}(t)(F_{Y_2})_{LS}(t)\dots(F_{Y_n})_{LS}(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

dır. (4.2) ve (4.3) ifadeleri birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned} (M_2)_{LS}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (F_{Y_1} * F_{Y_2} * \dots * F_{Y_n})_{LS}(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (F_{Y_1})_{LS}(t)(F_{Y_2})_{LS}(t)\dots(F_{Y_n})_{LS}(t) \\ &= F_{LS}(t) + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{Y_1})_{LS}(t)(F_{Y_2})_{LS}(t)\dots(F_{Y_n})_{LS}(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

olur.

$$F_{Y_n}(t) = F(a^{n-1}t) = F(a^{n-2}at) = F_{Y_{n-1}}(at), \quad n = 2, 3, \dots$$

olduğunun göz önüne alınmasıyla

$$(F_{Y_n})_{LS}(t) = (F_{Y_{n-1}})_{LS}(t/a), \quad n = 2, 3, \dots$$

elde edilir. Bu ifadenin (4.4)'de kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
(M_2)_{LS}(t) &= F_{LS}(t) + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{Y_1})_{LS}(t)(F_{Y_2})_{LS}(t)\dots(F_{Y_n})_{LS}(t) \\
(M_2)_{LS}(t) &= F_{LS}(t) + F_{LS}(t) \sum_{n=2}^{\infty} (F_{Y_1})_{LS}(t/a)(F_{Y_2})_{LS}(t/a)\dots(F_{Y_n})_{LS}(t/a) \\
&= F_{LS}(t) + F_{LS}(t) \sum_{n=1}^{\infty} (F_{Y_1})_{LS}(t/a)(F_{Y_2})_{LS}(t/a)\dots(F_{Y_n})_{LS}(t/a) \\
&= F_{LS}(t) + F_{LS}(t) \sum_{n=1}^{\infty} (F_{Y_1} * F_{Y_2} * \dots * F_{Y_n})_{LS}(t/a) \\
&= F_{LS}(t) + F_{LS}(t)(M_2)_{LS}(t/a)
\end{aligned}$$

olur. O halde

$$(M_2)_{LS}(t) = F_{LS}(t) + F_{LS}(t)(M_2)_{LS}(t/a)$$

dir. Böylece

$$F_{LS}(t) = \frac{(M_2)_{LS}(t)}{1 + (M_2)_{LS}(t/a)} \quad (4.5)$$

yazılabilir.

Bir fonksiyonun Laplace-Stieltjes dönüşümü o fonksiyonu karakterize ettiği için, yukarıdaki ifadenin göz önüne alınmasıyla, geometrik yenileme fonksiyonu F dağılım fonksiyonunu tek olarak belirler. Ayrıca F , Laplace-Stieltjes dönüşümünün analitik ifadesine sahip olduğunda yukarıdaki denklemden prensip olarak M_2 'nin Laplace-Stieltjes dönüşümü hesaplanabilir. Bu durumda ters Laplace-Stieltjes dönüşümü kullanılarak M_2 fonksiyonuna ulaşılabilir.

5. KULLANILABİLİRLİK TEORİSİ

Tamir aşamasından geçen bir sistem için sistemin belirli bir t zamanında çalışması olasılığı önemlidir. $X(t)$, sistemin t zamanında çalışıp çalışmadığını gösteren bir rasgele değişken olmak üzere, sistem t zamanında çalışıyorsa $X(t)=1$, aksi halde $X(t)=0$ olsun.

$$X(t) = \begin{cases} 1, & \text{sistem } t \text{ zamanında çalışıyor} \\ 0, & \text{sistem } t \text{ zamanında çalışmıyor} \end{cases}$$

5.1 Kullanılabilirlik Tanımı

(i) t zamanındaki noktasal kullanılabilirlik

$$A(t) = P(X(t) = 1) = E(X(t)) \quad , \quad (5.1)$$

(ii) Uzun dönem kullanılabilirliği

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) \quad , \quad (5.2)$$

(iii) $[0, T]$ aralığındaki ortalama kullanılabilirlik

$$A_{ave} = \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt \quad , \quad (5.3)$$

(iv) Uzun dönem ortalama kullanılabilirliği

$$A_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} A_{ave} \quad (5.4)$$

ile verilir (Barlow ve Proschan 1981).

5.2 Kullanılabilirlik ile İlgili Bazı Özellikler

(a) Eğer sistemin tamiri mümkün değilse, kullanılabilirlik sistem güvenilirliğine, yani sistemin $[0, T]$ aralığında bozulmadan çalışması olasılığına indirgenir.

(b) Tamir zamanları ihmal edilebilir olmamalıdır. Aksi halde kullanılabilirlik her zaman 1 olacaktır ve hesaplanmasına gerek olmayacaktır.

(c) $[0, T]$ aralığındaki ortalama kullanılabilirlik aynı zamanda $[0, T]$ aralığında sistemin çalışma oranının beklenen değeridir. Bu durumda $U(t)$, $[0, T]$ aralığındaki toplam çalışma zamanı olmak üzere;

$$E\left[\frac{1}{T}U(t)\right] = \frac{1}{T} \int_0^T A(t)dt$$

olur.

(d) A limiti mevcut ise uzun dönem ortalama kullanılabilirliği, uzun dönem kullanılabilirliği ile aynıdır. Bu durumda

$$A_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E[X(t)]dt = A$$

dır (Barlow ve Proschan 1981).

5.3 Noktasal Kullanılabilirlik

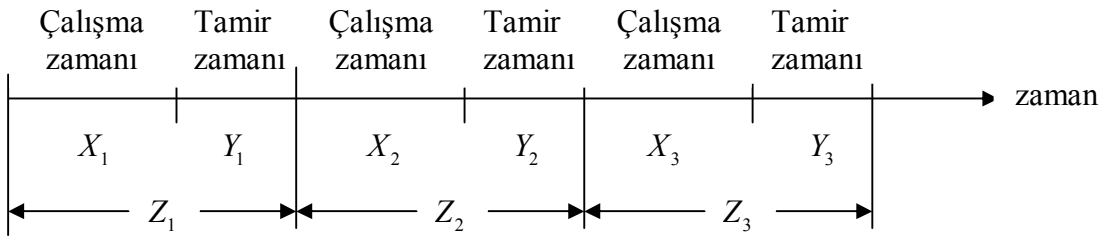
Literatürde genellikle uzun dönem kullanılabilirliğinden bahsedilir; fakat kullanımı oldukça sınırlıdır. Ayrıca yaşamdaki birçok sistemde uzun döneme çok fazla sayıda periyottan sonra ulaşılır ve genellikle ekonomik ve teknolojik sebeplere bağlı olarak bu duruma ulaşılmadan önce sistem önemli ölçüde değişir. Bu gerçek, A 'nın bir kullanılabilirlik ölçümü olarak geçerliliği hakkında sorulara neden olduğundan, daha iyi

sonuçlar veren ve diğer tüm ölçümlerin temelini oluşturan noktasal kullanılabilirlik üzerinde durmak daha anlamlı olacaktır. Bu nedenle, bundan sonra kullanılacak olan kullanılabilirlik kavramı noktasal kullanılabilirliği ifade edecektir.

Kullanılabilirlik tanımının (i) şıkında tanımlandığı gibi, tamir edilebilen bir sistem için sistemin t zamanındaki çalışması olasılığı olarak tanımlanan $A(t)=P[X(t)=I]=E[X(t)]$ fonksiyonuna sistemin t zamanındaki kullanılabilirliği denir.

5.3.1 Noktasal kullanılabilirliğin hesaplanması

Tamir edilebilen bir sistem için bağımsız rasgele değişkenlerin (X_n) ve (Y_n) pozitif terimli dizileri sırasıyla ardışık çalışma ve tamir sürelerini gösterebilir. $i=1,2,\dots$ olmak üzere X_i ler ve Y_i ler birbirlerinden bağımsız ve sırasıyla F_i ve G_i dağılım fonksiyonlarına sahip olsun. $Z_i = X_i + Y_i$ olmak üzere Z_i ler birbirlerinden bağımsız ve H_i dağılım fonksiyonuna sahip olsun. Bu durumda, $H_i = F_i * G_i$ biçiminde ifade edilebilir.



Şekil 3.1 Sistem davranışı gösterimi

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad F_{S_n} = F_1 * F_2 * \dots * F_n$$

$$T_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, \quad F_{T_n} = G_1 * G_2 * \dots * G_n$$

$$K_n = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n, \quad F_{K_n} = H_1 * H_2 * \dots * H_n = F_1 * G_1 * \dots * F_n * G_n$$

biçiminde tanımlansın.

Her periyodun bir çalışma ve tamir zamanına sahip olduğu, ardışık periyotlar veya yenilemeler geçiren bir sistemin kullanılabilirliği,

$$A(t) = P(\text{sistemin } t \text{ zamanında çalışması})$$

veya

$$A(t) = 1 - P(\text{sistemin } t \text{ zamanında çalışmaması})$$

biçiminde olmak üzere iki yoldan hesaplanabilir.

I. YOL

Kullanılabilirliği ilk olarak sistemin t zamanında çalışması olasılığını kullanarak hesaplayalım.

$$A(t) = P(X(t) = 1) = P(\text{sistem } t \text{ zamanında çalışır})$$

Sistemin i . ($i=1,2,\dots$) çalışma ve tamir zamanından oluşan Z_i uzunluğundaki aralığa i . dönem adını verelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} A(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{i. dönem } t\text{'yi içerir ve sistem } t \text{ zamanında çalışır}) \\ &= P(Z_1 > t, X_1 > t) + \sum_{i=2}^{\infty} P(Z_1 + \dots + Z_i > t, Z_1 + \dots + Z_{i-1} \leq t, Z_1 + \dots + Z_{i-1} + X_i > t) \\ &= P(X_1 > t) + \sum_{i=2}^{\infty} \int_0^{\infty} P(Z_1 + \dots + Z_i > t, Z_1 + \dots + Z_{i-1} \leq t, Z_1 + \dots + Z_{i-1} + X_i > t | Z_1 + \dots + Z_{i-1} = z) dF_{K_{i-1}}(z) \\ &= \bar{F}_1(t) + \sum_{i=2}^{\infty} \int_0^{\infty} P(Z_i > t - z, z \leq t, X_i > t - z) dF_{K_{i-1}}(z) \\ &= \bar{F}_1(t) + \sum_{i=2}^{\infty} \int_0^t P(Z_i > t - z, X_i > t - z) dF_{K_{i-1}}(z) \\ &= \bar{F}_1(t) + \sum_{i=2}^{\infty} \int_0^t \bar{F}_i(t - z) dF_{K_{i-1}}(z) \end{aligned}$$

ve böylece

$$A(t) = \bar{F}_1(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \bar{F}_{i+1}(t-z) dF_{K_i}(z) \quad (5.5)$$

dir. ♦

II. YOL

Kullanılabilirliği ikinci bir yol olarak sistemin t zamanında çalışmaması olasılığını kullanarak hesaplayalım.

$$A(t) = P(X(t) = 1) = 1 - P(X(t) = 0)$$

dır.

$$P(X(t) = 0) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{i. dönem } t\text{'yi içerir ve sistem } t \text{ zamanında çalışmaz})$$

olduğundan

$$\begin{aligned} P(\text{1. dönem } t\text{'yi içerir ve sistem } t \text{ zamanında çalışmaz}) &= P(Z_1 > t, X_1 \leq t) \\ &= P(X_1 + Y_1 > t, X_1 \leq t) \\ &= \int_0^{\infty} P(X_1 + Y_1 > t, X_1 \leq t | X_1 = x) dF_1(x) \\ &= \int_0^{\infty} P(Y_1 > t - x, x \leq t) dF_1(x) \\ &= \int_0^t P(Y_1 > t - x) dF_1(x) \\ &= \int_0^t \bar{G}_1(t - x) dF_1(x) = F_1 * \bar{G}_1(t) \quad , \end{aligned}$$

$$P(\text{2. dönem } t\text{'yi içerir ve sistem } t \text{ zamanında çalışmaz})$$

$$= P(Z_1 + Z_2 > t, Z_1 < t, Z_1 + X_2 < t)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(Z_1 + Z_2 > t, Z_1 < t, Z_1 + X_2 < t \mid Z_1 = z) dF_{K_1}(z) \\
&= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(Z_2 > t - z, z < t, X_2 < t - z) dF_{K_1}(z) \\
&= \int_0^t \mathbb{P}(Z_2 > t - z, X_2 < t - z) dF_{K_1}(z) \\
&= \int_{z=0}^t \int_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_2 + Y_2 > t - z, X_2 < t - z \mid X_2 = x) dF_2(x) dF_{K_1}(z) \\
&= \int_{z=0}^t \int_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y_2 > t - z - x, x < t - z) dF_2(x) dF_{K_1}(z) \\
&= \int_{z=0}^t \left(\int_{x=0}^{t-z} \bar{G}_2(t - z - x) dF_2(x) \right) dF_{K_1}(z) ,
\end{aligned}$$

.
.
.

$P(n. \text{ dönem } t\text{yi içerir ve sistem } t \text{ zamanında çalışmaz})$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(Z_1 + \dots + Z_n > t, Z_1 + \dots + Z_{n-1} \leq t, Z_1 + \dots + Z_{n-1} + X_n < t) \\
&= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(Z_1 + \dots + Z_n > t, Z_1 + \dots + Z_{n-1} \leq t, Z_1 + \dots + Z_{n-1} + X_n < t \mid Z_1 + \dots + Z_{n-1} = z) dF_{K_{n-1}}(z) \\
&= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(Z_n > t - z, z \leq t, X_n < t - z) dF_{K_{n-1}}(z) \\
&= \int_0^t \mathbb{P}(X_n + Y_n > t - z, X_n < t - z) dF_{K_{n-1}}(z) \\
&= \int_{z=0}^t \int_{x=0}^{t-z} \mathbb{P}(Y_n > t - z - x) dF_n(x) dF_{K_{n-1}}(z) \\
&= \int_{z=0}^t \int_{x=0}^{t-z} \bar{G}_n(t - z - x) dF_n(x) dF_{K_{n-1}}(z) \\
&= \int_{z=0}^t F_n * \bar{G}_n(t - z) dF_{K_{n-1}}(z) \\
&= F_{K_{n-1}} * F_n * \bar{G}_n(t).
\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
A(t) &= 1 - [F_1 * \bar{G}_1(t) + \sum_{\substack{i=2 \\ i \rightarrow i+1}}^{\infty} F_{K_{i-1}} * F_i * \bar{G}_i(t)] \\
&= 1 - [F_1 * \bar{G}_1(t) + \sum_{i=1}^{\infty} F_{K_i} * F_{i+1} * \bar{G}_{i+1}(t)] \\
&= 1 - [F_1 * \bar{G}_1(t) + \sum_{i=1}^{\infty} F_{Z_1+\dots+Z_i+X_{i+1}} * \bar{G}_{i+1}(t)] \\
&= 1 - [F_1 * \bar{G}_1(t) + F_{Z_1+X_2} * \bar{G}_2(t) + F_{Z_1+Z_2+X_3} * \bar{G}_3(t) + \dots] \\
&= 1 - [F_1 * \bar{G}_1(t) + \sum_{i=1}^{\infty} F_{X_1+\dots+X_{i+1}+Y_1+\dots+Y_i} * \bar{G}_{i+1}(t)] \\
A(t) &= 1 - [F_1 * \bar{G}_1(t) + \sum_{i=1}^{\infty} F_{K_i} * F_{i+1} * \bar{G}_{i+1}(t)] \tag{5.6}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.♦

I. ve II. yolla bulunan kullanılabilirlik fonksiyonları birbirine eşittir ve aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\bar{F}_1(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \bar{F}_{i+1}(t-z) dF_{K_i}(z) = A(t) = 1 - [F_1 * \bar{G}_1(t) + \sum_{i=1}^{\infty} F_{K_i} * F_{i+1} * \bar{G}_{i+1}(t)]$$

Kullanılabilirliğin hesabı için $A(t)$ 'yi her iki ifadeden de doğrudan hesaplamak genelde mümkün değildir. Laplace dönüşümü kullanılarak $A(t)$ 'nin hesaplanması daha uygun olacaktır. Şimdi sırasıyla iki ayrı yoldan elde edilen kullanılabilirlik fonksiyonlarının Laplace dönüşümlerini alalım. İlk yoldan bulunan

$$\begin{aligned}
A(t) &= \bar{F}_1(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \bar{F}_{i+1}(t-z) dF_{K_i}(z) \\
&= (1 - F_1(t)) + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t dF_{K_i}(z) - \int_0^t F_{i+1}(t-z) dF_{K_i}(z)
\end{aligned}$$

$$= (1 - F_1(t)) + \sum_{i=1}^{\infty} [F_{K_i}(t) - F_{K_i} * F_{i+1}(t)]$$

kullanılabilirliğinin Laplace dönüşümü

$$\begin{aligned} A_L(t) &= (1 - F_1)_L(t) + \sum_{i=1}^{\infty} [(F_{K_i})_L(t) - (F_{K_i} * F_{i+1})_L(t)] \\ &= \frac{1}{t} - \frac{1}{t} (f_1)_L(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{t} (f_{K_i})_L(t) - \frac{1}{t} (f_{X_1+Y_1+\dots+X_i+Y_i})_L(t) \right] \\ &= \frac{1}{t} \left[1 - (f_1)_L(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \left((f_{K_i})_L(t) - (f_{K_i} * f_{i+1})_L(t) \right) \right] \\ &= \frac{1}{t} \left[1 - (f_1)_L(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \left((f_{K_i})_L(t) - (f_{K_i})_L(t) (f_{i+1})_L(t) \right) \right] \\ &= \frac{1}{t} \left[1 - (f_1)_L(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{K_i})_L(t) (1 - (f_{i+1})_L(t)) \right] \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Elde edilen

$$A_L(t) = \frac{1}{t} \left[1 - (f_1)_L(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{K_i})_L(t) (1 - (f_{i+1})_L(t)) \right]$$

ifadesi, tamir süreleri birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı olduğunda,

$$\begin{aligned} A_L(t) &= \frac{1}{t} \left[1 - (f_1)_L(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{K_i})_L(t) (1 - (f_{i+1})_L(t)) \right] \\ A_L(t) &= \frac{1}{t} \left[1 - (f_1)_L(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (1 - (f_{i+1})_L(t)) (f_{X_1+Y_1+\dots+X_i+Y_i})_L(t) \right] \\ A_L(t) &= \frac{1}{t} \left[1 - (f_1)_L(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (1 - (f_{i+1})_L(t)) (f_{S_i} * g_{T_i})_L(t) \right], \quad (f_{S_i} * g_{T_i})_L(t) = (f_{S_i})_L(t) (g_{T_i})_L(t) \\ A_L(t) &= \frac{1}{t} \left[1 - (f_1)_L(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (1 - (f_{i+1})_L(t)) (f_i)_L(t) \dots (f_i)_L(t) (g_1)_L(t) \dots (g_i)_L(t) \right] \quad (5.7) \end{aligned}$$

$$A_L(t) = \frac{1}{t} \left[1 - (f_1)_L(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (1 - (f_{i+1})_L(t)) ((g_1)_L(t))^i \prod_{j=1}^i (f_j)_L(t) \right]$$

ifadesine dönüşür.

İkinci yoldan bulunan

$$A(t) = 1 - [F_1 * \bar{G}_1(t) + \sum_{i=1}^{\infty} F_{K_i} * F_{i+1} * \bar{G}_{i+1}(t)]$$

kullanılabilirliğinin Laplace dönüşümü ise

$$\begin{aligned} A_L(t) &= L \left\{ 1 - [F_1 * \bar{G}_1(t) + \sum_{i=1}^{\infty} F_{X_1 + \dots + X_{i+1} + Y_1 + \dots + Y_i} * \bar{G}_{i+1}(t)] \right\} \\ &= \frac{1}{t} - L \{ F_1 * \bar{G}_1(t) \} - L \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} F_{X_1 + \dots + X_{i+1} + Y_1 + \dots + Y_i} * \bar{G}_{i+1}(t) \right\} \end{aligned}$$

olacak şekilde

$$\begin{aligned} L \{ F_1 * \bar{G}_1(t) \} &= L \left\{ \int_0^t \bar{G}_1(t-x) dF_1(x) \right\} = L \left\{ \int_0^t dF_1(x) - \int_0^t G_1(t-x) dF_1(x) \right\} \\ &= L \left\{ \int_0^t f_1(x) dx - \int_0^t G_1(t-x) f_1(x) dx \right\} = L \{ F_1(t) - F_1 * G_1(t) \} \\ &= \frac{1}{t} (f_1)_L(t) - \frac{1}{t} (f_1 * g_1)_L(t) = \frac{1}{t} (f_1)_L(t) - \frac{1}{t} (f_1)_L(t) (g_1)_L(t) \\ &= \frac{1}{t} (f_1)_L(t) (1 - (g_1)_L(t)) \end{aligned}$$

eşitliği yerine konularak

$$A_L(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t} (f_1)_L(t) (1 - (g_1)_L(t)) - \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{\infty} (f_1)_L(t) \dots (f_{i+1})_L(t) (g_1)_L(t) \dots (g_i)_L(t) (1 - (g_{i+1})_L(t))$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{t} \left[1 - (f_1)_L(t)(1 - (g_1)_L(t)) - \sum_{i=2}^{\infty} (f_1)_L(t) \dots (f_i)_L(t)(g_1)_L(t) \dots (g_{i-1})_L(t)(1 - (g_i)_L(t)) \right] \\
&= \frac{1}{t} \left[1 - \sum_{i=1}^{\infty} (f_1)_L(t) \dots (f_i)_L(t)(g_1)_L(t) \dots (g_{i-1})_L(t)(1 - (g_i)_L(t)) \right] \\
&= \frac{1}{t} \left[1 - \sum_{i=1}^{\infty} (1 - (g_i)_L(t))(f_1)_L(t) \dots (f_i)_L(t)(g_1)_L(t) \dots (g_{i-1})_L(t) \right] \\
&= \frac{1}{t} \left[1 - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(g_i)_L(t)} - 1 \right) (f_1)_L(t) \dots (f_i)_L(t)(g_1)_L(t) \dots (g_i)_L(t) \right] \quad (5.8) \\
&= \frac{1}{t} \left[1 - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(g_i)_L(t)} - 1 \right) (f_{K_i})_L(t) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Tamir süreleri birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı olduğunda,

$$A_L(t) = \frac{1}{t} \left[1 - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(g_i)_L(t)} - 1 \right) (f_{K_i})_L(t) \right]$$

eşitliğinin (5.8) yardımıyla

$$A_L(t) = \frac{1}{t} \left[1 - \left(\frac{1}{(g_1)_L(t)} - 1 \right) \sum_{i=1}^{\infty} (g_1)_L(t)^i \prod_{j=1}^i (f_j)_L(t) \right]$$

ifadesine dönüştüğü görülür.

5.3.2 Noktasal kullanılabilirlik için alt ve üst sınır

c negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere (5.5) ve (5.6) ifadelerindeki serileri c ile keserek, $t \geq 0$ için

$$U_C(t) = \bar{F}_1(t) + \sum_{i=1}^c \int_0^t \bar{F}_{i+1}(t-z) dF_{K_i}(z), \quad c = 1, 2, \dots$$

ve

$$V_c(t) = 1 - [F_1 * \bar{G}_1(t) + \sum_{i=1}^c F_{K_i} * F_{i+1} * \bar{G}_{i+1}(t)], \quad c = 1, 2, \dots$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu durumda $c \rightarrow \infty$ iken $U_c(t) \rightarrow A(t)$ ve $V_c(t) \rightarrow A(t)$ olup,

$$U_1(t) \leq U_2(t) \leq U_3(t) \leq \dots \leq A(t) \leq \dots \leq V_3(t) \leq V_2(t) \leq V_1(t)$$

olduğu açıktır.

$$(U_c)_L(t) = \frac{1}{t} \left[1 - (f_1)_L(t) + \sum_{i=1}^c (f_{K_i})_L(t) (1 - (f_{i+1})_L(t)) \right]$$

ve

$$(V_c)_L(t) = \frac{1}{t} \left[1 - \sum_{i=1}^{c+1} \left(\frac{1}{(g_i)_L(t)} - 1 \right) (f_{K_i})_L(t) \right]$$

dir.

c negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere, $A_1(t) = U_c(t)$ ve $A_2(t) = V_{c-1}(t)$ seçelim.

Böylece

$$A_1(t) = \bar{F}_1(t) + \sum_{i=1}^c \int_0^t \bar{F}_{i+1}(t-z) dF_{K_i}(z) \quad (5.9)$$

ve

$$A_2(t) = 1 - [F_1 * \bar{G}_1(t) + \sum_{i=1}^{c-1} F_{K_i} * F_{i+1} * \bar{G}_{i+1}(t)] .$$

(5.10)

Herhangi bir t zamanı için $A_1(t) \leq A(t) \leq A_2(t)$ olup, $A(t)$ 'yi $A_1(t)$ ile alttan ve $A_2(t)$ ile üstten yaklaşık olarak belirleyebiliriz. Bu sınırlar aynı zamanda $A(t)$ 'nin hesaplanmasındaki maksimum hatayı bulmamızı sağlar. Bu hatayı $e(t)$ ile gösterirsek,

$$e(t) = A_2(t) - A_1(t)$$

olduğu açıktır. $e(t)$ hata fonksiyonu, beklenildiği gibi, c 'ye göre azalmandır.

$$\begin{aligned} e(t) &= L^{-1}((A_2)_L(t) - (A_1)_L(t)) \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{t} \left[1 - \sum_{i=1}^c \left(\frac{1}{(g_i)_L(t)} - 1 \right) (f_{K_i})_L(t) \right] - \frac{1}{t} \left[1 - (f_1)_L(t) + \sum_{i=1}^c \left(1 - (f_{i+1})_L(t) \right) (f_{K_i})_L(t) \right] \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{t} \left[(f_1)_L(t) + \sum_{i=1}^c \left(-1 + (f_{i+1})_L(t) - \frac{1}{(g_i)_L(t)} + 1 \right) (f_{K_i})_L(t) \right] \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{t} (f_1)_L(t) - \sum_{i=1}^c \left(\frac{1}{(g_i)_L(t)} - (f_{i+1})_L(t) \right) (f_{K_i})_L(t) \right\} \end{aligned}$$

dir. Maksimum hata için bu ifade, noktasal kullanılabilirliğin hesaplanmasında herhangi belirlenmiş bir doğruluk derecesini başarmak için gerekli olan c 'nin minimum değerini belirlemek için kullanılabilir. Kısım 6.6'da bu konunun detaylı olarak üzerinde durulmaktadır.

Tamir edilebilen bir sistem için bağımsız rasgele değişkenlerin (X_n) ve (Y_n) pozitif terimli dizileri sırasıyla ardışık çalışma ve tamir sürelerini gösterebilir. $Z_i = X_i + Y_i$ ($i=1,2,\dots$) rasgele değişkeni Z_i ler H_i dağılım fonksiyonlarına sahip olmak üzere, $H_i = F_i * G_i$ biçiminde ifade edilebilir.

5.3.3 Çalışma ve tamir sürelerinin birer yenileme süreci oluşturduğu varsayımı altında noktasal kullanılabilirlik

$i=1,2,\dots$ olmak üzere X_i ler ve Y_i ler sırasıyla F_i ve G_i dağılım fonksiyonları ile birbirlerinden bağımsız ve aynı dağılıma sahip olsun. Bu durumda $Z_i = X_i + Y_i$ rasgele değişkenleri bir alterne yenileme süreci oluşturur.

Kullanılabilirliğin yaklaşık hesabını vermeden önce, (5.5) ifadesinden doğrudan hesabını verelim.

$$\begin{aligned}
A(t) &= \bar{F}_1(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \bar{F}_1(t-x) dF_{K_i}(x) \\
&= \bar{F}_1(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \bar{F}_1(t-x) d(F_1 * G_1 * \dots * F_1 * G_1)(x) \\
&= \bar{F}_1(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \bar{F}_1(t-x) dH^{i*}(x) \\
&= \bar{F}_1(t) + \int_0^t \bar{F}_1(t-x) d\left(\sum_{i=1}^{\infty} H^{i*}(x)\right),
\end{aligned}$$

(3.1) ifadesi yardımıyla

$$A(t) = \bar{F}_1(t) + \int_0^t \bar{F}_1(t-x) dM_Z(x), \quad t \geq 0 \quad (5.11)$$

olduğu görülür.

H aritmetik olmayan bir dağılım fonksiyonu olmak üzere

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \frac{E(X)}{E(X) + E(Y)} \quad (5.12)$$

dir. Yani sistemin uzun dönemdeki çalışma olasılığı olarak ifade edilen A , aynı zamanda sistemin uzun dönemdeki çalışma oranıdır.

(i) Her $t > 0$ için $\bar{F}_1(t) \geq 0$

(ii) $\int_0^{\infty} \bar{F}_1(t) dt = E(X) < \infty$

(iii) F_1 dağılım fonksiyonu azalmayan olduğundan, \bar{F}_1 artmayandır.

şartları sağlandığından, Teorem 3.2.2 yardımıyla

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{F}_1(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \bar{F}_1(t-x) dM_Z(x) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \bar{F}_1(t-x) dM_Z(x) \\
&= \frac{1}{E(X) + E(Y)} \int_0^{\infty} \bar{F}_1(x) dx \\
&= \frac{E(X)}{E(X) + E(Y)}
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Şimdi hem çalışma sürelerinin hem de tamir sürelerinin birer yenileme sürecine sahip olduğu varsayımı altında, kullanılabilirliğin Laplace dönüşümü yöntemiyle hesabını verelim. (5.7) ifadesi yardımıyla, (5.5) eşitliğinin Laplace dönüşümü

$$A_L(t) = \frac{1}{t} \left[(1 - (f_1)_L(t)) \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} (f_1)_L^i(t) (g_1)_L^i(t) \right) \right] \quad (5.13)$$

biçiminde elde edilir. (5.9) eşitliği kullanılabilirlik için bir alt sınır oluşturur. Bu alt sınırın hem çalışma sürelerinin hem de tamir sürelerinin birer yenileme sürecine sahip olduğu varsayımı altında Laplace dönüşümü alındığında

$$(A_1)_L(t) = \frac{1}{t} \left[(1 - (f_1)_L(t)) \left(1 + \sum_{i=1}^c (f_1)_L^i(t) (g_1)_L^i(t) \right) \right] \quad (5.14)$$

elde edilir.

Kullanılabilirlik sistemin t zamanında çalışmaması olasılığı kullanılarak (5.6) ifadesinden hesaplanır. Hem çalışma sürelerinin hem de tamir sürelerinin birer yenileme sürecine sahip olduğu varsayımı altında, (5.8) ifadesi yardımıyla, (5.6) ifadesinin Laplace dönüşümü

$$A_L(t) = \frac{1}{t} \left[1 - \left(\frac{1}{(g_1)_L(t)} - 1 \right) \sum_{i=1}^{\infty} (f_1)_L^i(t) (g_1)_L^i(t) \right] \quad (5.15)$$

biçiminde elde edilir. (5.10) eşitliği kullanılabilirlik için bir üst sınır oluşturur. Bu üst sınırın hem çalışma sürelerinin hem de tamir sürelerinin birer yenileme sürecine sahip olduğu varsayımı altında Laplace dönüşümü alındığında

$$(A_2)_L(t) = \frac{1}{t} \left[1 - \left(\frac{1}{(g_1)_L(t)} - 1 \right) \sum_{i=1}^c (f_1)_L^i(t) (g_1)_L^i(t) \right] \quad (5.16)$$

elde edilir.

5.3.4 Çalışma sürelerinin bir yenileme süreci ve tamir sürelerinin bir geometrik süreç oluşturduğu varsayımı altında noktasal kullanılabilirlik

$i=1,2,\dots$ olmak üzere X_i ler F_i dağılım fonksiyonları ile birbirlerinden bağımsız ve aynı dağılımlı olmak üzere bir yenileme süreci, Y_i ler ise birbirlerinden bağımsız, G_i dağılım fonksiyonları ile b oranlı bir geometrik süreç oluştursun. Burada geometrik sürecin tanımından dolayı $b^{i-1}Y_i$ ler birbirlerinden bağımsız ve aynı dağılımlıdır.

Kullanılabilirlik, sistemin t zamanında çalışması olasılığı kullanılarak (5.5) eşitliğinden hesaplanır. Çalışma sürelerinin bir yenileme süreci, tamir sürelerinin ise bir geometrik süreç oluşturduğu varsayımı altında, (5.7) ifadesi yardımıyla, (5.5) eşitliğinin Laplace dönüşümü

$$A_L(t) = \frac{1}{t} (1 - (f_1)_L(t)) \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} (f_1)_L^i(t) \prod_{j=1}^i (g_j)_L(t) \right] \quad (5.17)$$

biçiminde elde edilir. (5.9) eşitliği kullanılabilirlik için bir alt sınır oluşturur. Çalışma sürelerinin bir yenileme süreci, tamir sürelerinin ise bir geometrik süreç oluşturduğu varsayımı altında bu alt sınırın Laplace dönüşümü alındığında

$$(A_1)_L(t) = \frac{1}{t} (1 - (f_1)_L(t)) \left[1 + \sum_{i=1}^c (f_1)_L^i(t) \prod_{j=1}^i (g_j)_L(t) \right] \quad (5.18)$$

elde edilir.

Kullanılabilirlik, sistemin t zamanında çalışmaması olasılığı kullanılarak (5.6) eşitliğinden hesaplanır. Çalışma sürelerinin bir yenileme süreci, tamir sürelerinin ise bir geometrik süreç oluşturduğu varsayımı altında, (5.8) ifadesi yardımıyla, (5.6) eşitliğinin Laplace dönüşümü

$$A_L(t) = \frac{1}{t} \left[1 - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(g_i)_L(t)} - 1 \right) (f_1)_L^i(t) \prod_{j=1}^i (g_j)_L(t) \right] \quad (5.19)$$

biçiminde elde edilir. (5.10) eşitliği kullanılabilirlik için bir üst sınır oluşturur. Çalışma sürelerinin bir yenileme süreci, tamir sürelerinin ise bir geometrik süreç oluşturduğu varsayımı altında, bu üst sınırın Laplace dönüşümü alındığında

$$(A_2)_L(t) = \frac{1}{t} \left[1 - \sum_{i=1}^c \left(\frac{1}{(g_i)_L(t)} - 1 \right) (f_1)_L^i(t) \prod_{j=1}^i (g_j)_L(t) \right] \quad (5.20)$$

bulunur.

5.3.5 Çalışma sürelerinin bir geometrik süreç ve tamir sürelerinin bir yenileme süreci oluşturduğu varsayımı altında noktasal kullanılabilirlik

$i=1,2,\dots$ olmak üzere X_i ler birbirlerinden bağımsız, F_i dağılım fonksiyonları ile a oranlı bir geometrik süreç ve Y_i ler G_i dağılım fonksiyonları ile birbirlerinden bağımsız ve aynı dağılımlı olmak üzere bir yenileme süreci oluşturursun. Burada geometrik sürecin tanımından dolayı $a^{i-1}X_i$ ler birbirlerinden bağımsız ve aynı dağılımlıdır.

Kullanılabilirlik, sistemin t zamanında çalışması olasılığı kullanılarak (5.5) eşitliğinden hesaplanır. Çalışma sürelerinin bir geometrik süreç, tamir sürelerinin ise bir yenileme

süreci oluşturduğu varsayımı altında, (5.7) ifadesi yardımıyla, (5.5) eşitliğinin Laplace dönüşümü

$$A_L(t) = \frac{1}{t} \left[1 - (f_1)_L(t) + \left(\sum_{i=1}^{\infty} (1 - (f_{i+1})_L(t)) (g_1)_L^i(t) \prod_{j=1}^i (f_j)_L(t) \right) \right] \quad (5.21)$$

biçiminde elde edilir. (5.9) eşitliği kullanılabilirlik için bir alt sınır oluşturur. Çalışma sürelerinin bir geometrik süreç, tamir sürelerinin ise bir yenileme süreci oluşturduğu varsayımı altında bu alt sınırın Laplace dönüşümü alındığında

$$(A_1)_L(t) = \frac{1}{t} \left[1 - (f_1)_L(t) + \left(\sum_{i=1}^c (1 - (f_{i+1})_L(t)) (g_1)_L^i(t) \prod_{j=1}^i (f_j)_L(t) \right) \right] \quad (5.22)$$

elde edilir.

Kullanılabilirlik, sistemin t zamanında çalışmaması olasılığı kullanılarak (5.6) eşitliğinden hesaplanır. Çalışma sürelerinin bir geometrik süreç, tamir sürelerinin ise bir yenileme süreci oluşturduğu varsayımı altında, (5.8) ifadesi yardımıyla, (5.6) eşitliğinin Laplace dönüşümü

$$A_L(t) = \frac{1}{t} \left[1 - \left(\frac{1}{(g_1)_L(t)} - 1 \right) \sum_{i=1}^{\infty} (g_1)_L^i(t) \prod_{j=1}^i (f_j)_L(t) \right] \quad (5.23)$$

biçiminde çıkartılır. (5.10) eşitliği kullanılabilirlik için bir üst sınır oluşturur. Çalışma sürelerinin bir geometrik süreç, tamir sürelerinin ise bir yenileme süreci oluşturduğu varsayımı altında, bu üst sınırın Laplace dönüşümü alındığında

$$(A_2)_L(t) = \frac{1}{t} \left[1 - \left(\frac{1}{(g_1)_L(t)} - 1 \right) \sum_{i=1}^c (g_1)_L^i(t) \prod_{j=1}^i (f_j)_L(t) \right] \quad (5.24)$$

elde edilir.

5.3.6 Çalışma ve tamir sürelerinin birer geometrik süreç oluşturduğu varsayımı altında noktasal kullanılabilirlik

$i=1,2,\dots$ olmak üzere X_i ler birbirlerinden bağımsız, F_i dağılım fonksiyonları ile a oranlı bir geometrik süreç ve Y_i ler birbirlerinden bağımsız, G_i dağılım fonksiyonları ile b oranlı bir geometrik süreç oluştursun. Burada geometrik sürecin tanımından dolayı $a^{i-1}X_i$ ler ve $b^{i-1}Y_i$ ler birbirlerinden bağımsız ve kendi aralarında aynı dağılımlıdır.

Kullanılabilirlik, sistemin t zamanında çalışması olasılığı kullanılarak (5.5) eşitliğinden hesaplanır. Çalışma ve tamir sürelerinin birer geometrik süreç oluşturduğu varsayımı altında, (5.7) ifadesi yardımıyla, (5.5) eşitliğinin Laplace dönüşümü

$$A_L(t) = \frac{1}{t} \left[1 - (f_1)_L(t) + \left(\sum_{i=1}^{\infty} (1 - (f_{i+1})_L(t)) \prod_{j=1}^i (f_j)_L(t) (g_j)_L(t) \right) \right] \quad (5.25)$$

biçiminde elde edilir. (5.9) eşitliği kullanılabilirlik için bir alt sınır oluşturur Çalışma ve tamir sürelerinin birer geometrik süreç oluşturduğu varsayımı altında bu alt sınırın Laplace dönüşümü alındığında

$$(A_1)_L(t) = \frac{1}{t} \left[1 - (f_1)_L(t) + \left(\sum_{i=1}^c (1 - (f_{i+1})_L(t)) \prod_{j=1}^i (f_j)_L(t) (g_j)_L(t) \right) \right] \quad (5.26)$$

bulunur.

Kullanılabilirlik, sistemin t zamanında çalışmaması olasılığı kullanılarak (5.6) eşitliğinden hesaplanır. Çalışma ve tamir sürelerinin birer geometrik süreç oluşturduğu varsayımı altında, (5.8) ifadesi yardımıyla, (5.6) eşitliğinin Laplace dönüşümü

$$A_L(t) = \frac{1}{t} \left[1 - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(g_i)_L(t)} - 1 \right) \prod_{j=1}^i (f_j)_L(t) (g_j)_L(t) \right] \quad (5.27)$$

biçiminde elde edilir. (5.10) eşitliği kullanılabilirlik için bir üst sınır oluşturur. Çalışma ve tamir sürelerinin birer geometrik süreç oluşturduğu varsayımı altında, bu üst sınırın Laplace dönüşümü alındığında

$$(A_2)_L(t) = \frac{1}{t} \left[1 - \sum_{i=1}^c \left(\frac{1}{(g_i)_L(t)} - 1 \right) \prod_{j=1}^i (f_j)_L(t) (g_j)_L(t) \right] \quad (5.28)$$

elde edilir.

6. ANALİZ VE TARTIŞMA

Bir önceki bölümde çalışma ve/veya tamir sürelerinin yenileme süreci ve/veya geometrik süreç oluşturması varsayımlarına göre kullanılabilirliğin hesaplanması üzerinde durulmuştur. Kullanılabilirlik fonksiyonundaki sonsuz toplamlar c (kesme değeri) gibi bir değer ile kısıtlanarak, kullanılabilirlik için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir. Bu sınırlar, kullanılabilirlik için yaklaşımda bulunmayı sağlar.

Bu bölümde çalışma ve tamir sürelerinin üstel ve gama dağılımı ile normal dağılım varsayımları altında uygulama çalışması yapılmıştır. Bunun için, öncelikle alt ve üst sınırların Laplace dönüşümleri bulunacak ve Matlab programı yardımıyla bu dönüşümlerin ters Laplace dönüşümleri alınacaktır. Sadece çalışma ve tamir sürelerinin normal dağıldığı varsayımı altında kullanılabilirlik fonksiyonunun kapalı formdaki ifadelerine ulaşılabilmektedir. Bu durumda da diğerlerinde olduğu gibi sayısal sonuçlar elde edebilmek için, kullanılabilirlik fonksiyonundaki sonsuz toplamın kısıtlanması gerekmektedir. Kullanılabilirlik yaklaşımı için elde edilen sınırların zamana göre davranışları grafikler üzerinde gösterilmiştir. Bunun yanında, her bir modelde çalışma ve tamir sürelerinin oluşturduğu geometrik sürecin oranı, çalışma ve tamir aralıklarının oluşturdukları teorik dağılımın parametreleri gibi nicel değerler bulunmaktadır. Bu değerlerin kullanılabilirlik fonksiyonu üzerindeki etkisi incelenmiştir. Özel olarak, kullanılabilirlik fonksiyonunun bu değerlere duyarlılığı üzerinde durulmuştur.

Kullanılabilirliğin Laplace dönüşümleri kesin ifadeler olmasına rağmen, bu ifadeler, ters Laplace dönüşümlerinin alınabilmesi için c kesme değeriyle sınırlandırılarak birer yaklaşıma dönüşürler. Ters Laplace dönüşümü alınan terim sayısı (c) ve hesaplamaların yapıldığı program aritmetiğinin doğruluk derecesi, yaklaşımın doğruluk derecesini belirler. Ters Laplace dönüşümünün alınabilmesi ve sayısal sonuçlar elde edilebilmesi için gerekli olan kısıtlama belirli bir derecede hatayı da beraberinde getirir.

Bilgisayar aritmetiğindeki ve sayıların makine gösterimindeki kısıtlamalar, bazı durumlarda, sayısal sonuçlar elde edilmesinde beklenmeyen zorluklar

çıkarmaktadır. Bu durum nitel gözlemleri etkilemezken, grafiklerdeki sayısal sonuçlar üzerindeki etkisi ihmal edilebilir.

Çalışma ve/veya tamir sürelerinin geometrik süreç oluşturduğu durumlarda, zaman içerisinde çalışma sürelerinin azalma eğiliminde olduğu varsayılarak, çalışma sürelerinin oluşturduğu geometrik sürecin oranı $a > 1$ olacak şekilde; tamir sürelerinin ise artma eğiliminde olduğu varsayılarak, tamir sürelerinin oluşturduğu geometrik sürecin oranı $0 < b < 1$ olacak şekilde seçilmiştir.

6.1 Çalışma ve Tamir Sürelerinin Üstel Dağılım Gösterdiği Durum

Üstel dağılımlı çalışma ve tamir süreleri için Laplace dönüşüm uzayında, sonsuz toplamın ilk 13 terimi ile kullanılabilirlik yaklaşımında bulunabilmektedir. Bazı durumlarda daha fazla terim ile yaklaşımda bulunabilmesine karşın, sonuçların karşılaştırılabilir olması açısından bütün durumlar için ortak bir kesme değeri belirlenmiştir. Gözlenen bütün durumlarda ilk çalışma aralığının ortalaması 100 kabul edilmiştir. Sonsuz toplamdan alınan terim sayısının, çalışma ve tamir sürelerinin oluşturduğu geometrik süreç oranlarının ve tamir süreleri ortalamasının kullanılabilirlik üzerindeki etkileri incelenmiştir. Burada karşımıza 4 farklı durum çıkmaktadır.

- Kullanılabilirliğin yaklaşık hesabını vermeden önce, (5.11) denklemi yardımıyla analitik ifadesinin elde edilmesi üzerinde duralım.

X ve Y sırasıyla $1/\lambda$ ve $1/\mu$ ortalamalarıyla birbirlerinden bağımsız iki rasgele değişken olsun.

$$X \sim \text{Üstel}(\lambda) \text{ ve } f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x > 0$$

$$Y \sim \text{Üstel}(\mu) \text{ ve } f(y) = \mu e^{-\mu y} \quad , \quad y > 0$$

olmak üzere $Z = X + Y$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(z) = \frac{\lambda\mu}{\lambda - \mu} (e^{-\mu z} - e^{-\lambda z}) , \quad z > 0.$$

biçiminde bulunur. (5.11) denkleminde kullanılabilirlik fonksiyonunu elde edebilmek için öncelikle Z rasgele değişkeninin yenileme fonksiyonuna ihtiyaç vardır. Laplace dönüşüm metodu yardımıyla

$$f_L(z) = \frac{\lambda\mu}{(z + \lambda)(z + \mu)}$$

biçiminde ve (3.3) eşitliğinden

$$M_L(z) = \frac{\lambda\mu}{z^2(z + \lambda + \mu)}$$

biçiminde bulunur. Ters Laplace dönüşümü alınarak

$$M(z) = \frac{\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2} [-1 + (\lambda + \mu)z + e^{-(\lambda + \mu)z}] , \quad z \geq 0$$

yenileme fonksiyonu elde edilir. $A(t)$ ise (5.11) denkleminde

$$A(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$$

biçiminde bulunur.

Şimdi kullanılabilirliğin yaklaşık hesabını verelim.

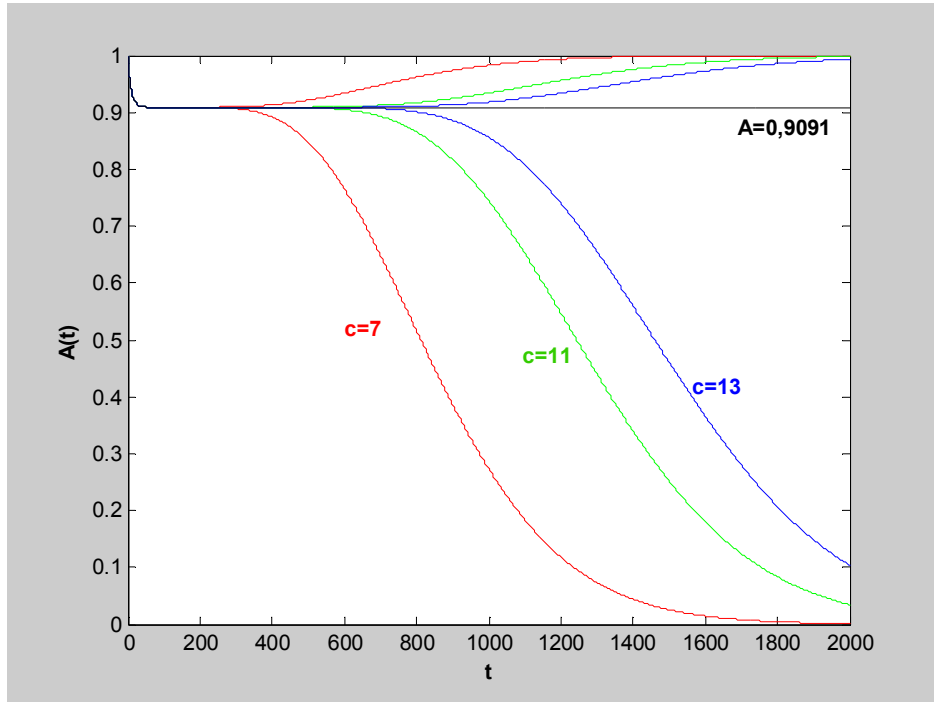
Çalışma süreleri X_i ler ($i=1,2,\dots$) $1/\lambda$ ortalamalı üstel dağılım ve tamir süreleri Y_i ler ($i=1,2,\dots$) $1/\mu$ ortalamalı üstel dağılım ile birer yenileme süreci gösterebiliriz. X_i ve Y_i ler sırasıyla f_i ve g_i olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip olsun. $f_i(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$

ve $g_i(y) = \mu e^{-\mu y}$, $y > 0$ dır. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonlarının (2.1) ifadesi kullanılarak Laplace dönüşümleri alındığında $(f_i)_L(t) = \frac{\lambda}{\lambda+t}$ ve $(g_i)_L(t) = \frac{\mu}{\mu+t}$ elde edilir.

Çalışma ve tamir sürelerinin birer yenileme süreci oluşturduğu varsayımı altında kullanılabilirlik, alt sınır için (5.14) ve üst sınır için (5.16) ifadeleri kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$(A_1)_L(t) = \frac{1}{\lambda+t} \left(1 + \sum_{i=1}^c \frac{(\lambda\mu)^i}{(\lambda+t)^i (\mu+t)^i} \right)$$

$$(A_2)_L(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^c \frac{(\lambda\mu)^i}{(\lambda+t)^i (\mu+t)^i}$$



Şekil 6.1 Üstel $A(t)$ $c=7,11,13$, $\lambda = 0.01$, $\mu = 0.1$ (Yenileme – Yenileme)

(5.13) ve (5.15) sonsuz toplamları, c gibi bir kesme değeri ile (5.14) ve (5.16) ifadelerine dönüşerek alt ve üst sınır oluşturur. Şekil 6.1’de kullanılabilirliğin yaklaşık hesabı için, c değerinin üç farklı seçimine göre kullanılabilirliğin alt ve üst sınırları görülmektedir. Buna göre c değeri arttıkça, uzun dönemde, kullanılabilirlik için daha iyi yaklaşımda bulunulmakta ve alt-üst sınırlar birbirlerinden daha geç ayrılmaktadır.

Bunun yanında grafikte analitik hesap sonucunda elde edilen kullanılabilirlik de gösterilmektedir. $E(X) = 1/\lambda = 100$ ve $E(Y) = 1/\mu = 10$ olduğundan, (5.12) yardımıyla uzun dönem kullanılabilirliği

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \frac{E(X)}{E(X) + E(Y)} = \frac{100}{110} = 0,9091$$

biçiminde elde edilir. Buna göre kullanılabilirlik fonksiyonu kısa bir süre sonra 0,9091 değerine düşmekte ve sabit kalmaktadır. Yani sistemin uzun dönem kullanılabilirliği %90,91’dir.

• Çalışma süreleri X_i ler ($i=1,2,\dots$) $1/\lambda$ ortalamalı üstel dağılımlı bir yenileme süreci ve tamir süreleri Y_i ler ($i=1,2,\dots$) b oranlı $1/\mu b^{i-1}$ ortalamalı üstel dağılımlı bir geometrik süreç gösterebilir. X_i ve Y_i ler sırasıyla f_i ve g_i olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip olmak üzere $f_i(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$ ve $g_i(y) = \mu b^{i-1} e^{-\mu b^{i-1} y}$, $y > 0$ dir. Bu olasılık

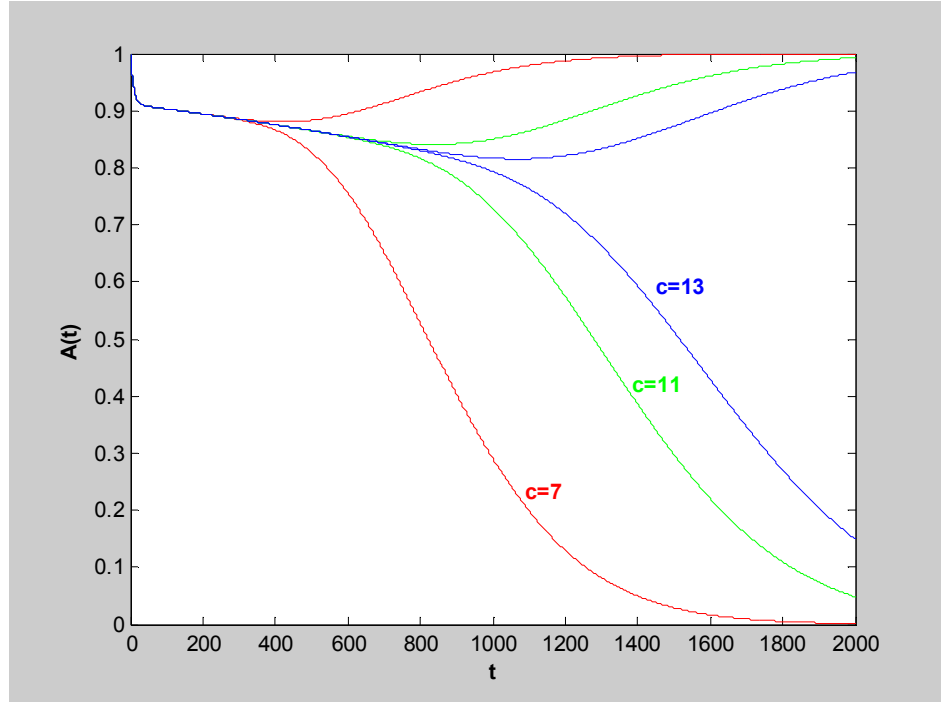
yoğunluk fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri $(f_i)_L(t) = \frac{\lambda}{\lambda + t}$ ve

$$(g_i)_L(t) = \frac{\mu}{\mu + b^{1-i} t}$$
 olarak bulunur.

Çalışma sürelerinin bir yenileme süreci ve tamir sürelerinin b oranlı bir geometrik süreç oluşturduğu varsayımı altında kullanılabilirlik, alt sınır için (5.18) ve üst sınır için (5.20) ifadeleri kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

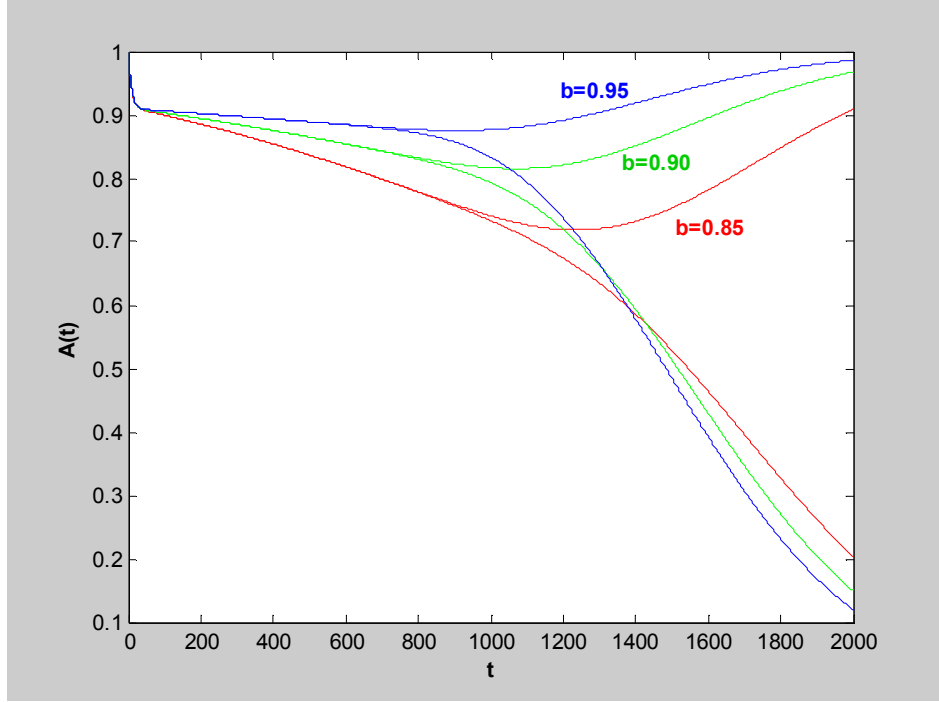
$$(A_1)_L(t) = \frac{1}{\lambda + t} \left(1 + \sum_{i=1}^c \left(\frac{\lambda \mu}{\lambda + t} \right)^i \prod_{j=1}^i \frac{1}{\mu + b^{1-j} t} \right)$$

$$(A_2)_L(t) = \frac{1}{t} - \sum_{i=1}^c \left(\frac{\mu}{b} \right)^{i-1} \left(\frac{\lambda}{\lambda + t} \right)^i \prod_{j=1}^i \frac{1}{\mu + b^{1-j} t}$$



Şekil 6.2 Üstel $A(t)$ $c=7,11,13$, $\lambda = 0.01$, $\mu = 0.1$, $b=0.90$ (Yenileme – Geometrik)

Sonsuz toplamdan alınan terim sayısının (c) kullanılabilirliğe etkisi gözlenmektedir (Şekil 6.2). c değeri arttıkça, uzun dönemde, kullanılabilirlik için daha iyi yaklaşımda bulunmaktadır.



Şekil 6.3 Üstel $A(t)$ $c=13$, $\lambda = 0.01$, $\mu = 0.1$, $b=0.85, 0.90, 0.95$ (Yenileme-Geometrik)

Tamir sürelerini ifade eden geometrik sürecin oranı (b) arttıkça, ortalama tamir süresi düşmektedir. Dolayısıyla b arttıkça kullanılabilirlik artmakta ve kullanılabilirlik yaklaşımı daha kısa sürede kesinliğini kaybetmektedir. Yani b oranı arttıkça, kullanılabilirliğin alt ve üst sınırları daha kısa sürede birbirinden ayrılmaktadır (Şekil 6.3).

• Çalışma süreleri X_i ler ($i=1,2,\dots$) a oranlı $1/\lambda a^{i-1}$ ortalamalı üstel dağılımlı bir geometrik süreç ve tamir süreleri Y_i ler ($i=1,2,\dots$) $1/\mu$ ortalamalı üstel dağılımlı bir yenileme süreci gösterebilir. X_i ve Y_i ler sırasıyla f_i ve g_i olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip olmak üzere $f_i(x) = \lambda a^{i-1} e^{-\lambda a^{i-1} x}$, $x > 0$ ve $g_i(y) = \mu e^{-\mu y}$, $y > 0$ dir. Bu

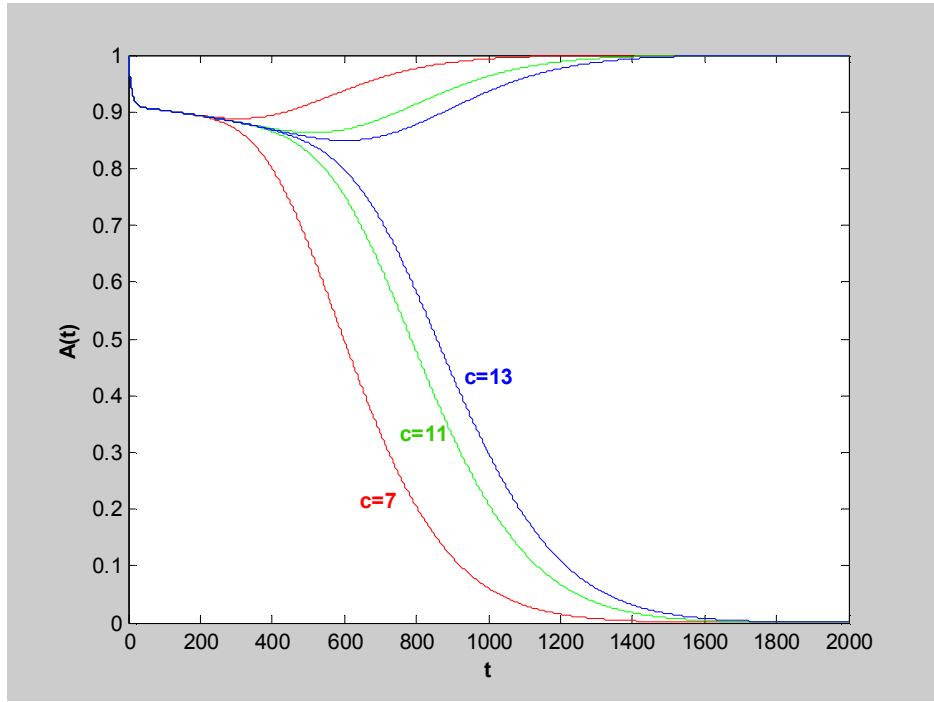
olasılık yoğunluk fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri $(f_i)_L(t) = \frac{\lambda}{\lambda + a^{i-1}t}$ ve

$(g_i)_L(t) = \frac{\mu}{\mu + t}$ olarak bulunur.

Çalışma sürelerinin a oranlı bir geometrik süreç ve tamir sürelerinin bir yenileme süreci oluşturduğu varsayımı altında kullanılabilirlik, alt sınır için (5.22) ve üst sınır için (5.24) ifadeleri kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

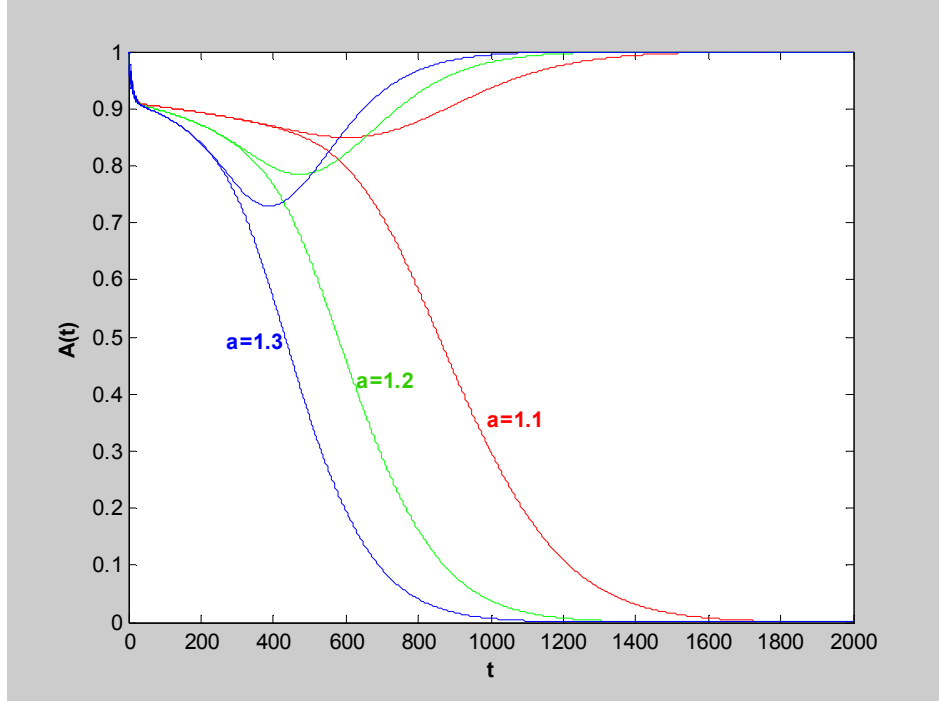
$$(A_1)_L(t) = \frac{1}{\lambda + t} + \sum_{i=1}^c \left(\frac{\lambda \mu}{a(\mu + t)} \right)^i \frac{1}{\lambda + a^{-i}t} \prod_{j=1}^i \frac{1}{\lambda + a^{1-j}t}$$

$$(A_2)_L(t) = \frac{1}{t} - \sum_{i=1}^c \mu^{i-1} \left(\frac{\lambda}{\mu + t} \right)^i \prod_{j=1}^i \frac{1}{\lambda + a^{1-j}t}$$



Şekil 6.4 Üstel $A(t)$ $c=7,11,13$, $\lambda = 0.01$, $\mu = 0.1$, $a=1.1$ (Geometrik - Yenileme)

Sonsuz toplamdaki terim sayısı arttıkça, kullanılabilirlik yaklaşımı daha uzun süre kesinlik göstermektedir. Yani c değeri arttıkça, uzun dönemde, kullanılabilirlik için daha iyi yaklaşımda bulunmaktadır (Şekil 6.4).



Şekil 6.5 Üstel $A(t)$ $c=13$, $\lambda = 0.01$, $\mu = 0.1$, $a=1.1, 1.2, 1.3$ (Geometrik - Yenileme)

Çalışma sürelerinin oluşturduğu geometrik sürecin oranı (a) arttıkça, kullanılabilirlik azalmaktadır. a oranındaki değişim, beklendiği üzere, sistemin çalışma zamanı kullanılarak hesaplanan kullanılabilirlik yaklaşımı olan alt sınırdaki daha belirgin değişime neden olmaktadır (Şekil 6.5).

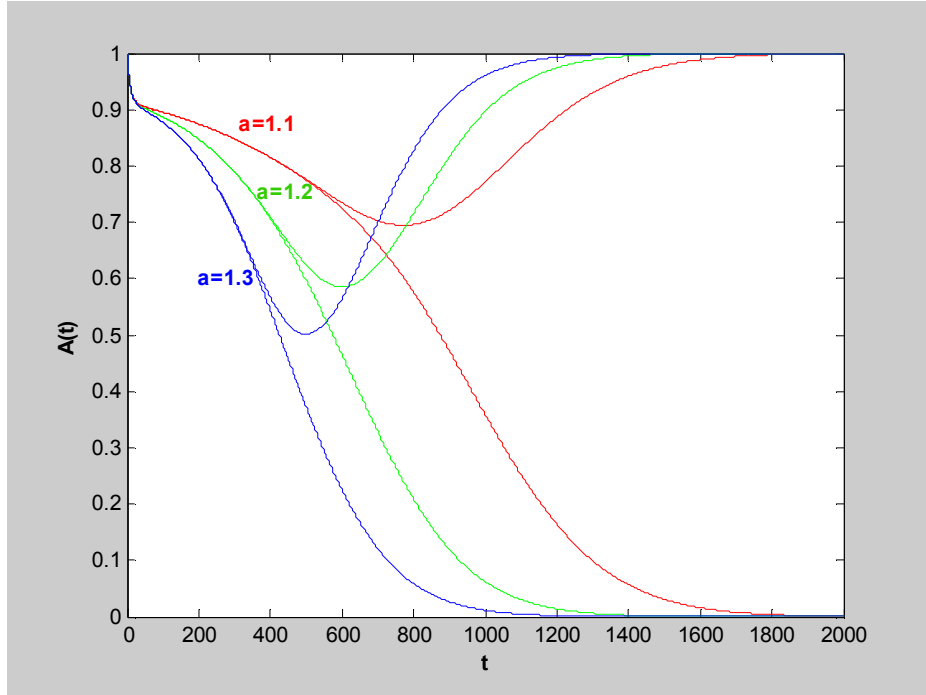
• Çalışma süreleri X_i ler ($i=1,2,\dots$) a oranlı $1/\lambda a^{i-1}$ ortalama üstel dağılımlı bir geometrik süreç ve tamir süreleri Y_i ler ($i=1,2,\dots$) b oranlı $1/\mu b^{i-1}$ ortalama üstel dağılımlı bir geometrik süreç gösterebilir. X_i ve Y_i ler sırasıyla f_i ve g_i olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip olmak üzere $f_i(x) = \lambda a^{i-1} e^{-\lambda a^{i-1} x}$, $x > 0$ ve $g_i(y) = \mu b^{i-1} e^{-\mu b^{i-1} y}$, $y > 0$ dir. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonlarının Laplace

dönüşümleri $(f_i)_L(t) = \frac{\lambda}{\lambda + a^{1-i}t}$ ve $(g_i)_L(t) = \frac{\mu}{\mu + b^{1-i}t}$ olarak elde edilir.

Çalışma sürelerinin a oranlı bir geometrik süreç ve tamir sürelerinin b oranlı bir geometrik süreç oluşturduğu varsayımı altında kullanılabilirlik, alt sınır için (5.26) ve üst sınır için (5.28) ifadeleri kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

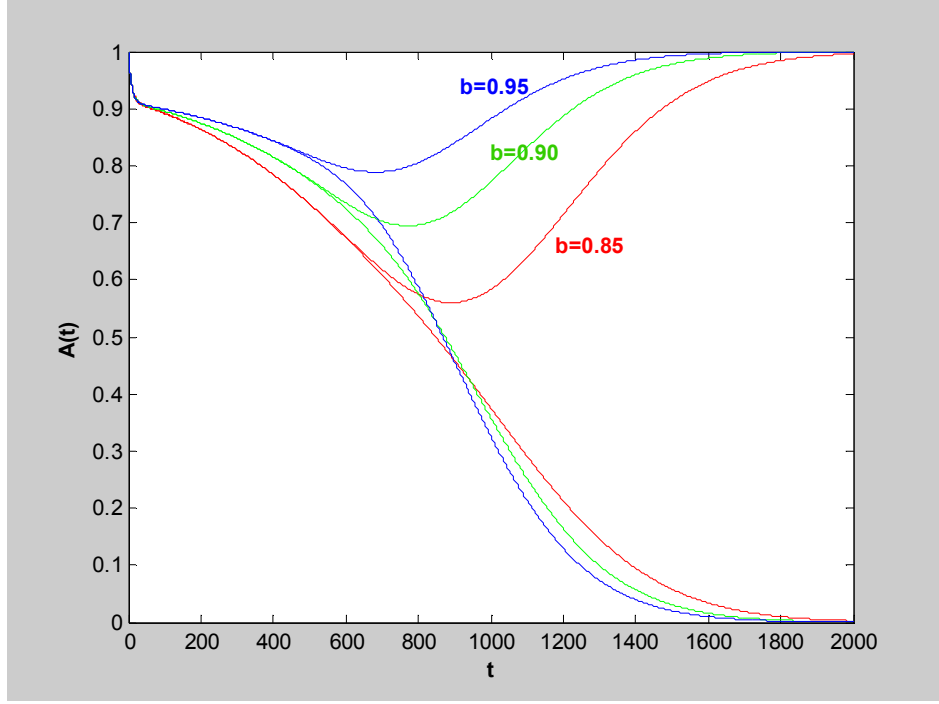
$$(A_1)_L(t) = \frac{1}{\lambda + t} + \sum_{i=1}^c \left(\frac{\lambda \mu}{a} \right)^i \frac{1}{\lambda + a^{-i} t} \prod_{j=1}^i \frac{1}{(\lambda + a^{1-j} t)(\mu + b^{1-j} t)}$$

$$(A_2)_L(t) = \frac{1}{t} - \sum_{i=1}^c \lambda^i \left(\frac{\mu}{b} \right)^{i-1} \prod_{j=1}^i \frac{1}{(\lambda + a^{1-j} t)(\mu + b^{1-j} t)}$$



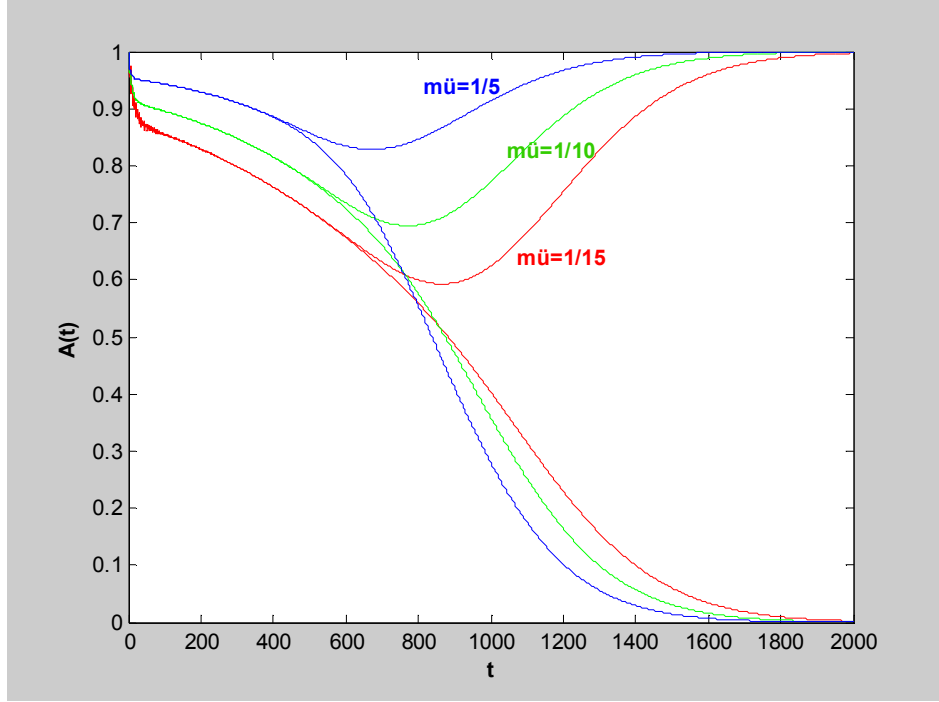
Şekil 6.6 Üstel $A(t)$ $c=13$, $\lambda = 0.01$, $\mu = 0.1$, $a=1.1, 1.2, 1.3$, $b=0.90$
(Geometrik-Geometrik)

Çalışma ve tamir sürelerinin üstel dağılımlı birer geometrik süreç gösterdiği modelde, çalışma sürelerinin oluşturduğu geometrik sürecin oranı arttıkça, ortalama çalışma süresi azalmaktadır. Bununla birlikte kullanılabilirlik düşmekte ve Şekil 6.6'da görüldüğü üzere nisbi olarak daha kısa dönemde iyi bir yaklaşım elde edilebilmektedir.



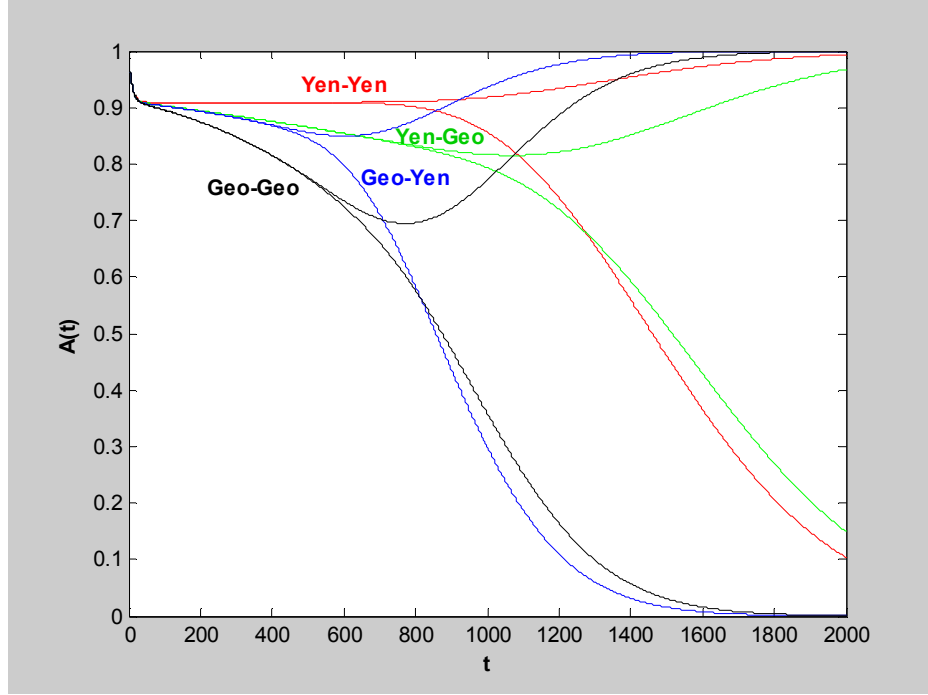
Şekil 6.7 Üstel $A(t)$ $c=13$, $\lambda = 0.01$, $\mu = 0.1$, $a=1.1$, $b=0.85,0.9,0.95$
(Geometrik-Geometrik)

Tamir sürelerinin oluşturduğu geometrik sürecin oranı (b) arttıkça kullanılabilirlik artmakta ve diğer b değerlerine göre daha kısa süre zarfında iyi bir kullanılabilirlik yaklaşımında bulunulabilmektedir (Şekil 6.7).



Şekil 6.8 Üstel $A(t)$ $c=13$, $\lambda = 0.01$, $\mu = 1/15, 1/10, 1/5$, $a=1.1$, $b=0.90$
(Geometrik-Geometrik)

Şekil 6.8’de ilk tamir aralığı ortalamasının ($1/\mu$) kullanılabilirlik üzerindeki etkisi görülmektedir. Beklendiği üzere, ilk tamir aralığı ortalamasının artması kullanılabilirlik fonksiyonunda düşüğe neden olur. İlk tamir aralığı ortalaması daha büyük olduğunda, daha uzun süre kullanılabilirlik yaklaşımı elde edilebilir.



Şekil 6.9 Üstel $A(t)$ $c=13$, $\lambda = 0.01$, $\mu = 0.1$, $a=1.1$, $b=0.9$

Çalışma ve/veya tamir sürelerinin üstel dağılımlı yenileme ve/veya geometrik süreç oluşturması durumlarına göre kullanılabilirlik fonksiyonları karşılaştırılmaktadır (Şekil 6.9). Buna göre en yüksek kullanılabilirlik çalışma ve tamir sürelerinin birer yenileme süreci oluşturduğu durumda elde edilirken, en düşük kullanılabilirlik çalışma ve tamir sürelerinin birer geometrik süreç oluşturduğu durumda elde edilmektedir. Çalışma sürelerinin bir yenileme süreci ve tamir sürelerinin bir geometrik süreç oluşturduğu durumda ise nisbi olarak daha uzun dönemde iyi bir kullanılabilirlik yaklaşımı elde edilebilmektedir.

6.2 Çalışma ve Tamir Sürelerinin Gama Dağılımı Gösterdiği Durum

Birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı üstel rasgele değişkenlerin toplamı bir gama dağılımı oluşturduğundan ve üstel dağılım, gama dağılımının özel bir durumu olduğundan, gama dağılımlı süreçlerin kullanılabilirliği üstel dağılımlı süreçlerin kullanılabilirliğiyle oldukça benzerlik gösterir. Gama dağılımlı çalışma ve tamir sürelerinin ortalaması $\alpha_1\beta_1$ ($\alpha_2\beta_2$) ve varyansı $\alpha_1\beta_1^2$ ($\alpha_2\beta_2^2$) dir. Buradaki durumlar

için ilk çalışma aralığı ortalaması 100 alınmıştır. Sonuçların karşılaştırılabilir olması açısından bütün durumlarda hesaplamaların yapılabildiği ortak bir kesme değeri belirlenmiştir. $c=8$ olduğunda, bütün durumlar için kullanılabilirlik yaklaşımında bulunulabilmektedir. Burada karşımıza 4 farklı durum çıkmaktadır.

- Kullanılabilirliğin yaklaşık hesabını vermeden önce, (5.11) denklemi kullanılarak analitik ifadesinin elde edilmesi üzerinde duralım.

$X \sim Gamma(\alpha_1, \beta_1)$ ve $Y \sim Gamma(\alpha_2, \beta_2)$ olmak üzere α_1, α_2 doğal sayı ve $\beta_1 = \beta_2$ ise $A(t)$ kullanılabilirlik fonksiyonu analitik olarak hesaplanabilir. $\alpha_1 = 2, \beta_1 = 1$ ve $\alpha_2 = 1, \beta_2 = 1$ durumu için $A(t)$ analitik olarak aşağıdaki gibi hesaplanır. $X \sim Gamma(\alpha_1 = 2, \beta_1 = 1)$ ve $Y \sim Gamma(\alpha_2 = 1, \beta_2 = 1)$ olsun.

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\beta_1^{\alpha_1}} x^{\alpha_1-1} e^{-x/\beta_1} = x e^{-x}, \quad x > 0$$

$$f(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)\beta_2^{\alpha_2}} x^{\alpha_2-1} e^{-y/\beta_2} = e^{-y}, \quad y > 0$$

olmak üzere $Z=X+Y$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$f(z) = \frac{1}{2} z^2 e^{-z}, \quad z \geq 0.$$

Laplace dönüşümünün alınmasıyla

$$f_L(z) = \frac{1}{(z+1)^3}$$

ve (3.3) eşitliğinden

$$M_L(z) = \frac{1}{z[(z+1)^3 - 1]}$$

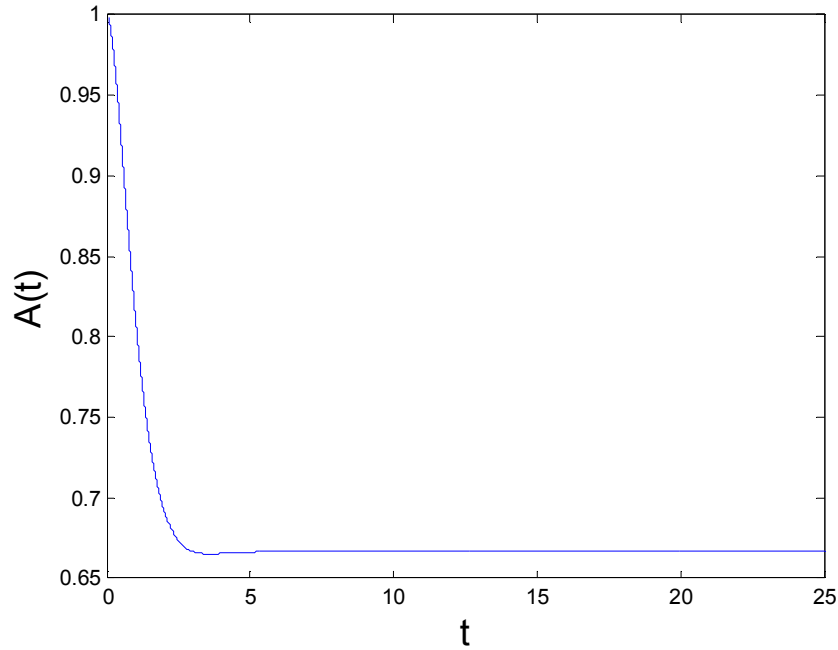
biçiminde bulunur. Ters Laplace dönüşümü alınarak

$$M(z) = \frac{z-1}{3} + \frac{1}{3} e^{-3z/2} \cos(\sqrt{3}/2 z) + \frac{\sqrt{3}}{9} e^{-3z/2} \sin(\sqrt{3}/2 z) \quad , \quad z \geq 0$$

yenileme fonksiyonu elde edilir. $A(t)$ ise (5.11) denkleminde

$$A(t) = (t+1)e^{-t} - \frac{e^{-t}}{3} \left[-2e^t + 3t + 3 - e^{-t/2} \left(\cos(\sqrt{3}/2 t) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3}/2 t) \right) \right]$$

biçiminde bulunur. $[0, 25]$ aralığı için $A(t)$ nin değerleri Şekil 6.10'daki grafikte verilmiştir.



Şekil 6.10 $A(t)$ $X \sim Gamma(\alpha_1 = 2, \beta_1 = 1)$ ve $Y \sim Gamma(\alpha_2 = 1, \beta_2 = 1)$

$\beta_1 \neq \beta_2$ olduğunda $A(t)$ kullanılabilirlik fonksiyonu analitik olarak hesaplanamaz. Çünkü f_z ve dolayısıyla F_z bir analitik ifadeye sahip değildir. Bu durumda f_z için

kapalı bir formda ifade elde edilip, $A(t)$ aşağıdaki integral denklemden sayısal olarak çözdürülebilir.

$$A(t) = \bar{F}_X(t) + \int_0^t A(t-x) dF_Z(x), \quad t \geq 0$$

Verilen bir t için $[0, t]$ aralığının bir $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = t$ parçalanmasını alarak, $A(t)$ yi ardışık olarak

$$A(t_i) = \bar{F}_X(t_i) + \sum_{j=1}^i A(t_i - t_j) [F_Z(t_j) - F_Z(t_{j-1})] \quad (6.1)$$

formülünden yaklaşık olarak hesaplayabiliriz.

Şimdi $\beta_1 \neq \beta_2$ durumunda Z 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunu elde etmeye çalışalım.

$U = X + Y, V = X$ dönüşümünü uygulayalım.

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= f_X(v) f_Y(u-v), \quad u, v > 0 \quad u > v \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \beta_1^{\alpha_1}} v^{\alpha_1-1} e^{-v/\beta_1} \frac{1}{\Gamma(\alpha_2) \beta_2^{\alpha_2}} (u-v)^{\alpha_2-1} e^{-(u-v)/\beta_2} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2) \beta_1^{\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2}} v^{\alpha_1-1} (u-v)^{\alpha_2-1} e^{-v/\beta_1} e^{-(u-v)/\beta_2}, \quad u > v > 0 \end{aligned}$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_0^u \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2) \beta_1^{\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2}} v^{\alpha_1-1} (u-v)^{\alpha_2-1} e^{-v/\beta_1} e^{-(u-v)/\beta_2} dv \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2) \beta_1^{\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2}} e^{-u/\beta_2} \int_0^u v^{\alpha_1-1} (u-v)^{\alpha_2-1} e^{-v(\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2})} dv \\ &= \frac{e^{-u/\beta_2}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2) \beta_1^{\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2}} \int_0^u v^{\alpha_1-1} \left(u - \frac{v}{u}\right)^{\alpha_2-1} e^{-v(\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2})} dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{u^{\alpha_2-1} e^{-u/\beta_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\beta_1^{\alpha_1}\beta_2^{\alpha_2}} \int_0^u v^{\alpha_1-1} \left(1 - \frac{v}{u}\right)^{\alpha_2-1} e^{-v\left(\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2}\right)} dv \\
&\quad \left(\frac{v}{u} = x \text{ de\u0131\u015fen de\u0131\u015ftirmesi ile}\right) \\
&= \frac{u^{\alpha_2-1} e^{-u/\beta_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\beta_1^{\alpha_1}\beta_2^{\alpha_2}} \int_0^1 u^{\alpha_1-1} x^{\alpha_1-1} (1-x)^{\alpha_2-1} e^{-ux\left(\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2}\right)} u dx \\
&= \frac{u^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-u/\beta_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\beta_1^{\alpha_1}\beta_2^{\alpha_2}} \int_0^1 x^{\alpha_1-1} (1-x)^{\alpha_2-1} e^{-ux\left(\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2}\right)} dx \\
&= \frac{u^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-u/\beta_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)\beta_1^{\alpha_1}\beta_2^{\alpha_2}} F\left(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2; \left(\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2}\right)u\right)
\end{aligned}$$

olur.

Burada F , $a \in R$ ve $n \in N$ i\u00e7in $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$ olmak \u00fczere;

$$F(a, b; x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-a-1} e^{ux} du \quad , \quad b > a > 0$$

ifadesi iyi bilinen bir sonu\u00e7tur. F Matlabda bulunan hazır bir programla kolaylıkla hesaplatılabilir. B\u00f6ylelikle f_Z olasılık yo\u011funluk fonksiyonuna sayısal olarak ula\u015fılmı\u015f olur.

F_Z da\u011fılım fonksiyonu da, f_Z kullanılarak

$$F_Z(t_i) = F_Z(t_{i-1}) + f_Z\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) \frac{t}{n}, \quad i = 1, \dots, n \quad (6.2)$$

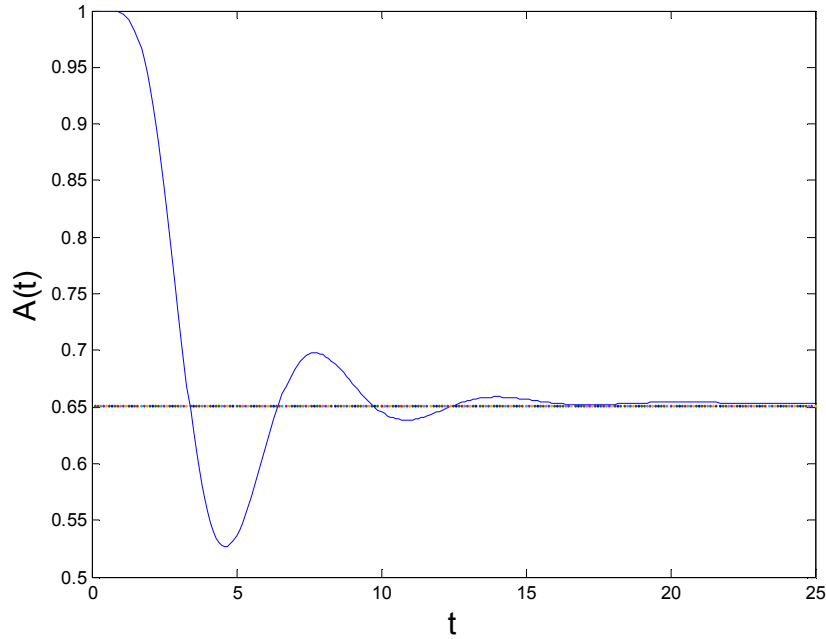
form\u00fcl\u00fcnden kolaylıkla hesaplanabilir. Sonu\u00e7ta (6.1) form\u00fcl\u00fcnden $A(t)$ ardışık olarak hesaplatılabilir.

$X \sim \text{Gamma}(\alpha_1 = 7.6, \beta_1 = 0.5)$ ve $Y \sim \text{Gamma}(\alpha_2 = 2.4, \beta_2 = 0.85)$ olsun. Verilen t değeri için $[0, t]$ aralığı $h=0.01$ eşit uzunluklu alt aralıklara bölünerek ilk olarak (6.2) formülünden $F_z(t_i)$ değerleri hesaplatılarak, (6.1) formülünden $A(t_i)$ değerleri yaklaşık olarak Matlab’da yazılan bir bilgisayar programı ile hesaplatılmış ve $[0, 25]$ aralığı için $A(t)$ nin değerleri Şekil 6.11’de verilmiştir.

Bu örnek için $E(X) = \alpha_1\beta_1 = 3.80$ ve $E(Y) = \alpha_2\beta_2 = 2.04$ olduğundan (5.12) den

$$A = \frac{E(X)}{E(X) + E(Y)} = 0.6507$$

dir.



Şekil 6.11 $A(t)$ $X \sim \text{Gamma}(\alpha_1 = 7.6, \beta_1 = 0.5)$ ve $Y \sim \text{Gamma}(\alpha_2 = 2.4, \beta_2 = 0.85)$

Şekil 6.11’den de görüldüğü gibi, zaman ilerledikçe $A(t)$ kullanılabilirlik fonksiyonu A uzun dönem kullanılabilirlik fonksiyonuna, dolayısıyla sistemin uzun dönemdeki

çalışma oranı olan %65.07 ye yaklaşır. Fakat küçük t değerleri için $A(t)$ fonksiyonu büyük değişimler gösterir.

Çalışma süreleri X_i ler ($i=1,2,\dots$) α_1 ve β_1 parametrelili gama dağılımına dayalı ve tamir süreleri Y_i ler ($i=1,2,\dots$) α_2 ve β_2 parametrelili gama dağılımına dayalı birer yenileme süreci gösterebilir. X_i ve Y_i ler sırasıyla f_i ve g_i olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip

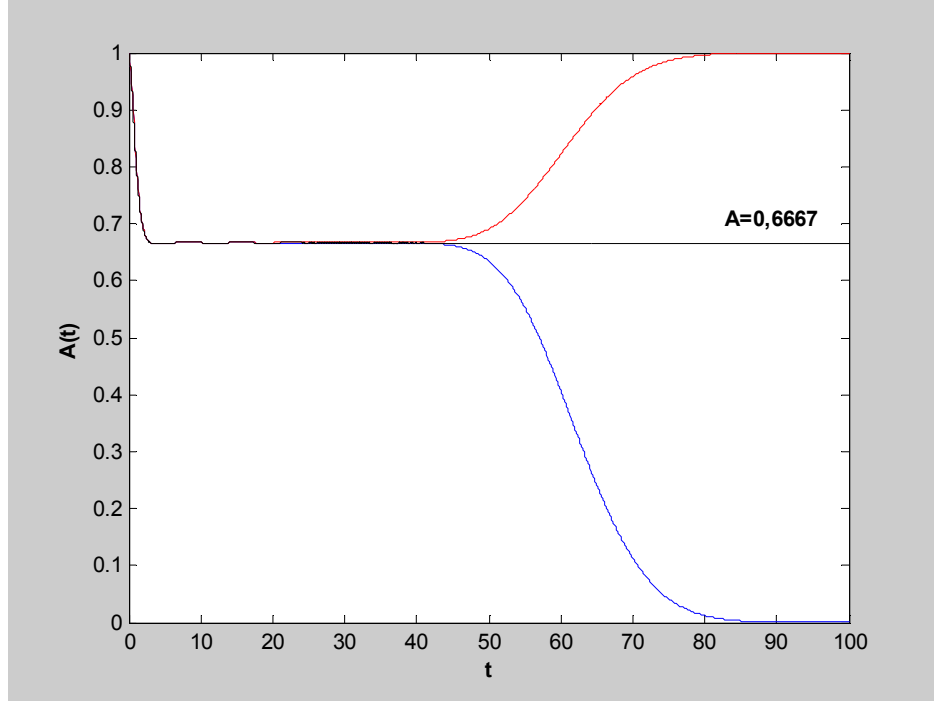
$$\text{olsun. } f_i(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\beta_1^{\alpha_1}} x^{\alpha_1-1} e^{-x/\beta_1}, x > 0 \quad \text{ve} \quad g_i(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)\beta_2^{\alpha_2}} y^{\alpha_2-1} e^{-y/\beta_2}, y > 0$$

dir. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri $(f_i)_L(t) = (1 + \beta_1 t)^{-\alpha_1}$ ve $(g_i)_L(t) = (1 + \beta_2 t)^{-\alpha_2}$ olarak elde edilir.

Çalışma ve tamir sürelerinin birer yenileme süreci oluşturduğu varsayımı altında kullanılabilirlik, alt sınır için (5.14) ve üst sınır için (5.16) ifadeleri kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$(A_1)_L(t) = \frac{1}{t} \left(1 - (1 + \beta_1 t)^{-\alpha_1} \right) \left(1 + \sum_{i=1}^c (1 + \beta_1 t)^{-\alpha_1 i} (1 + \beta_2 t)^{-\alpha_2 i} \right)$$

$$(A_2)_L(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \left((1 + \beta_2 t)^{\alpha_2} - 1 \right) \left(\sum_{i=1}^c (1 + \beta_1 t)^{-\alpha_1 i} (1 + \beta_2 t)^{-\alpha_2 i} \right)$$

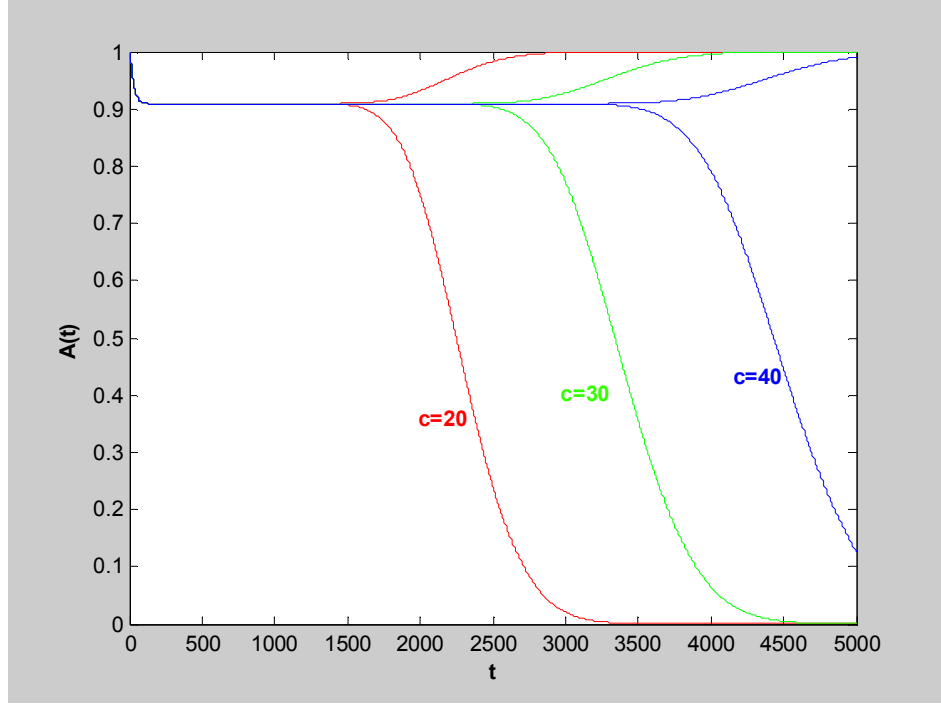


Şekil 6.12 Gama $A(t)$ $c=20$, $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 1$
(Yenileme-Yenileme)

Kullanılabilirlik fonksiyonunun hem analitik hem yaklaşık olarak hesaplanması sonucunda elde edilen grafikler Şekil 6.12’de gösterilmektedir. $t=50$ zamanına kadar iki ayrı yoldan elde edilen kullanılabilirlik fonksiyonları çakışmaktadır. Bu zamandan sonra sonsuz toplamdan alınan terim sayısına bağlı olarak yaklaşık hesaplama yöntemindeki alt ve üst sınırlar birbirlerinden ayrılmaya başlar. $E(X) = \alpha_1\beta_1 = 2$ ve $E(Y) = \alpha_2\beta_2 = 1$ olduğundan, (5.12) yardımıyla uzun dönem kullanılabilirliği

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \frac{E(X)}{E(X) + E(Y)} = \frac{2}{3} = 0,6667$$

biçiminde elde edilir. Zaman ilerledikçe, kullanılabilirlik fonksiyonu sistemin uzun dönemdeki çalışma oranı olan %66,67’ye yaklaşır.



Şekil 6.13 Gama $A(t)$ $c=20,30,40$, $\alpha_1 = 2, \beta_1 = 50, \alpha_2 = 2, \beta_2 = 5$
(Yenileme-Yenileme)

c değeri arttıkça, yani sonsuz toplamdan alınan terim sayısı arttıkça, kullanılabilirlik yaklaşımı daha kesin bir hal almaktadır. Yani c değeri arttıkça, uzun dönemde, kullanılabilirlik için daha iyi yaklaşımda bulunmaktadır.

- Çalışma süreleri X_i ler ($i=1,2,\dots$) α_1 ve β_1 parametrelili gama dağılımına dayalı bir yenileme süreci ve tamir süreleri Y_i ler ($i=1,2,\dots$) b oranlı α_2 ve β_2 parametrelili gama dağılımına dayalı bir geometrik süreç gösterebilir. X_i ve Y_i ler sırasıyla f_i ve g_i olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip olmak üzere

$$f_i(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\beta_1^{\alpha_1}} x^{\alpha_1-1} e^{-x/\beta_1}, \quad x > 0$$

ve

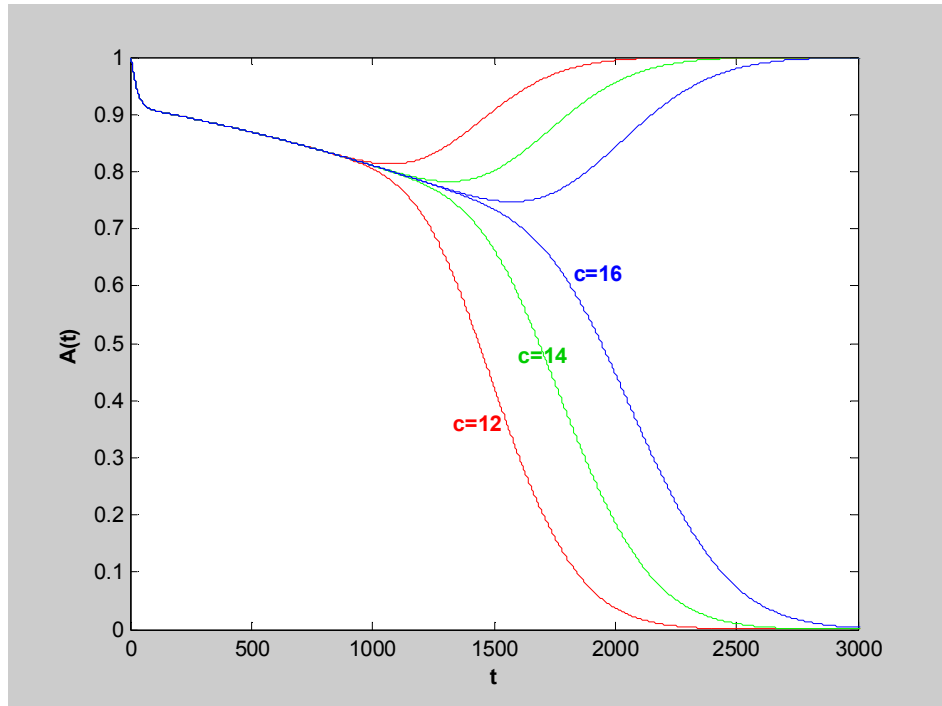
$$g_i(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)(b^{1-i}\beta_2)^{\alpha_2}} y^{\alpha_2-1} e^{-(y/b^{1-i}\beta_2)}, \quad y > 0$$

dir. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri $(f_i)_L(t) = (1 + \beta_1 t)^{-\alpha_1}$ ve $(g_i)_L(t) = (1 + b^{1-i} \beta_2 t)^{-\alpha_2}$ olarak elde edilir.

Çalışma sürelerinin bir yenileme süreci ve tamir sürelerinin b oranlı bir geometrik süreç oluşturduğu varsayımı altında kullanılabilirlik, alt sınır için (5.18) ve üst sınır için (5.20) ifadeleri kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

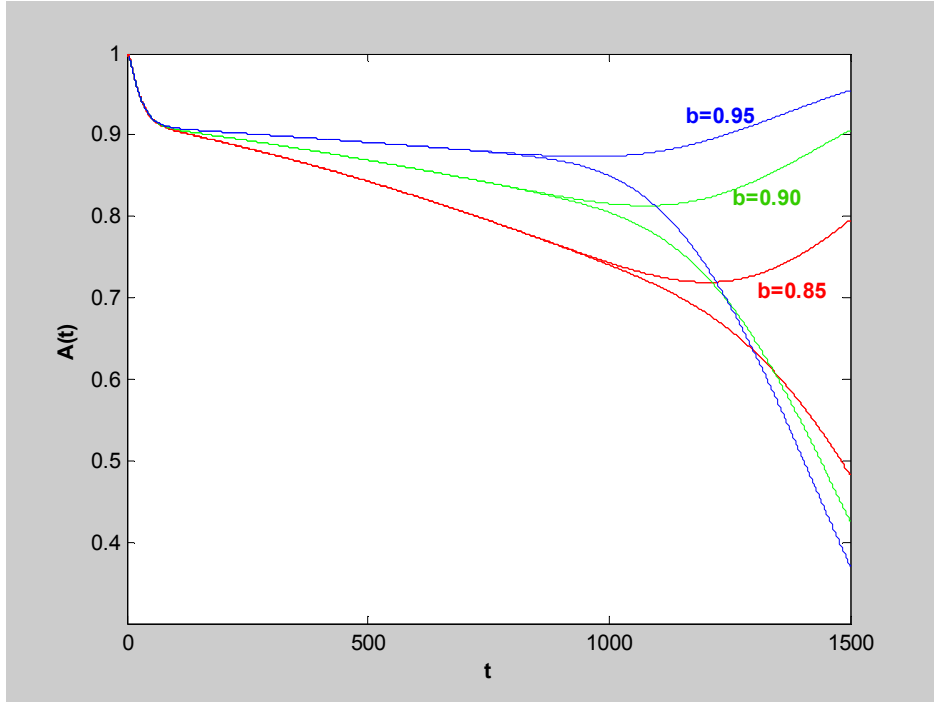
$$(A_1)_L(t) = \frac{1}{t} \left(1 - (1 + \beta_1 t)^{-\alpha_1} \right) \left(1 + \sum_{i=1}^c (1 + \beta_1 t)^{-\alpha_1 i} \prod_{j=1}^i (1 + b^{1-j} \beta_2 t)^{-\alpha_2} \right)$$

$$(A_2)_L(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \sum_{i=1}^c \frac{(1 + b^{1-i} \beta_2 t)^{\alpha_2} - 1}{(1 + \beta_1 t)^{\alpha_1 i}} \prod_{j=1}^i (1 + b^{1-j} \beta_2 t)^{-\alpha_2}$$



Şekil 6.14 Gama $A(t)$ $c=12,14,16, \alpha_1 = 2, \beta_1 = 50, \alpha_2 = 2, \beta_2 = 5, b=0.9$
(Yenileme-Geometrik)

Şekil 6.14’de c değerinin üç farklı seçimine göre kullanılabilirlik fonksiyonunun değişimi görülmektedir. Buna göre sonsuz toplamdan alınan terim sayısı arttıkça, kullanılabilirlik yaklaşımının kesinlik derecesi artmaktadır.



Şekil 6.15 Gama $A(t) c=12, \alpha_1 = 2, \beta_1 = 50, \alpha_2 = 2, \beta_2 = 5, b=0.85, 0.9, 0.95$
(Yenileme-Geometrik)

Şekil 6.15’de tamir süreleri parametresindeki değişimin kullanılabilirlik üzerindeki etkisi gözlenmektedir. Tamir sürelerini ifade eden geometrik sürecin oranı olan b arttıkça, kullanılabilirlik artmaktadır. Öte yandan b oranı arttıkça kullanılabilirliğin alt ve üst sınırları daha kısa sürede birbirinden ayrılmaktadır.

- Çalışma süreleri X_i ler ($i=1,2,\dots$) a oranlı α_1 ve β_1 parametrelili gama dağılımına dayalı bir geometrik süreç ve tamir süreleri Y_i ler ($i=1,2,\dots$) α_2 ve β_2 parametrelili gama dağılımına dayalı bir yenileme süreci gösterebilir. X_i ve Y_i ler sırasıyla f_i ve g_i olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip olmak üzere

$$f_i(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)(a^{1-i}\beta_1)^{\alpha_1}} x^{\alpha_1-1} e^{-(x/a^{1-i}\beta_1)}, x > 0$$

ve

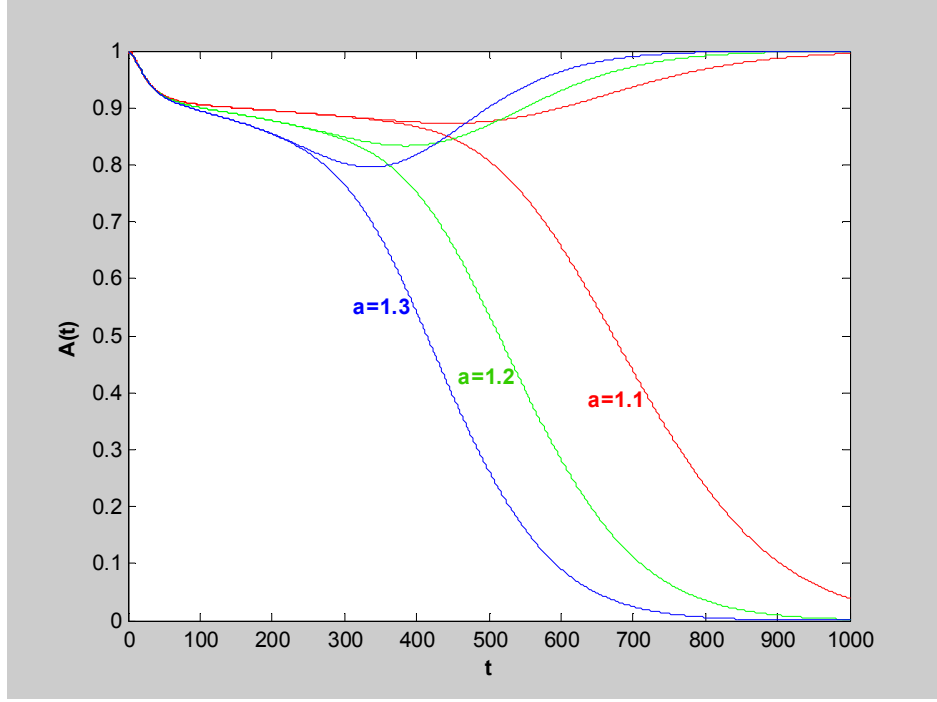
$$g_i(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)\beta_2^{\alpha_2}} y^{\alpha_2-1} e^{-y/\beta_2}, y > 0$$

dir. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri $(f_i)_L(t) = (1 + a^{1-i}\beta_1 t)^{-\alpha_1}$ ve $(g_i)_L(t) = (1 + \beta_2 t)^{-\alpha_2}$ olarak bulunmaktadır.

Çalışma sürelerinin a oranlı bir geometrik süreç ve tamir sürelerinin bir yenileme süreci oluşturduğu varsayımı altında kullanılabilirlik, alt sınır için (5.22) ve üst sınır için (5.24) ifadeleri kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$(A_1)_L(t) = \frac{1}{t} \left(1 - (1 + \beta_1 t)^{-\alpha_1} \right) + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^c \frac{1 - (1 + a^{-i}\beta_1 t)^{-\alpha_1}}{(1 + \beta_2 t)^{\alpha_2 i}} \prod_{j=1}^i (1 + a^{1-j}\beta_1 t)^{-\alpha_1}$$

$$(A_2)_L(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \left((1 + \beta_2 t)^{\alpha_2} - 1 \right) \sum_{i=1}^c (1 + \beta_2 t)^{-\alpha_2 i} \prod_{j=1}^i (1 + a^{1-j}\beta_1 t)^{-\alpha_1}$$



Şekil 6.16 Gama $A(t)$ $c=8, \alpha_1 = 2, \beta_1 = 50, \alpha_2 = 2, \beta_2 = 5, a=1.1, 1.2, 1.3$
(Geometrik-Yenileme)

Şekil 6.16'da çalışma süreleri parametresindeki bir değişim, sistemin çalışma zamanı kullanılarak hesaplanan kullanılabilirlik yaklaşımı olan alt sınırdaki belirgin değişime neden olur. a oranı arttıkça kullanılabilirlik düşmektedir.

- Çalışma süreleri X_i ler ($i=1,2,\dots$) a oranlı α_1 ve β_1 parametrelili gama dağılımına dayalı bir geometrik süreç ve tamir süreleri Y_i ler ($i=1,2,\dots$) b oranlı α_2 ve β_2 parametrelili gama dağılımına dayalı bir geometrik süreç gösterebilir. X_i ve Y_i ler sırasıyla f_i ve g_i olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip olmak üzere

$$f_i(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)(a^{1-i}\beta_1)^{\alpha_1}} x^{\alpha_1-1} e^{-(x/a^{1-i}\beta_1)}, x > 0$$

ve

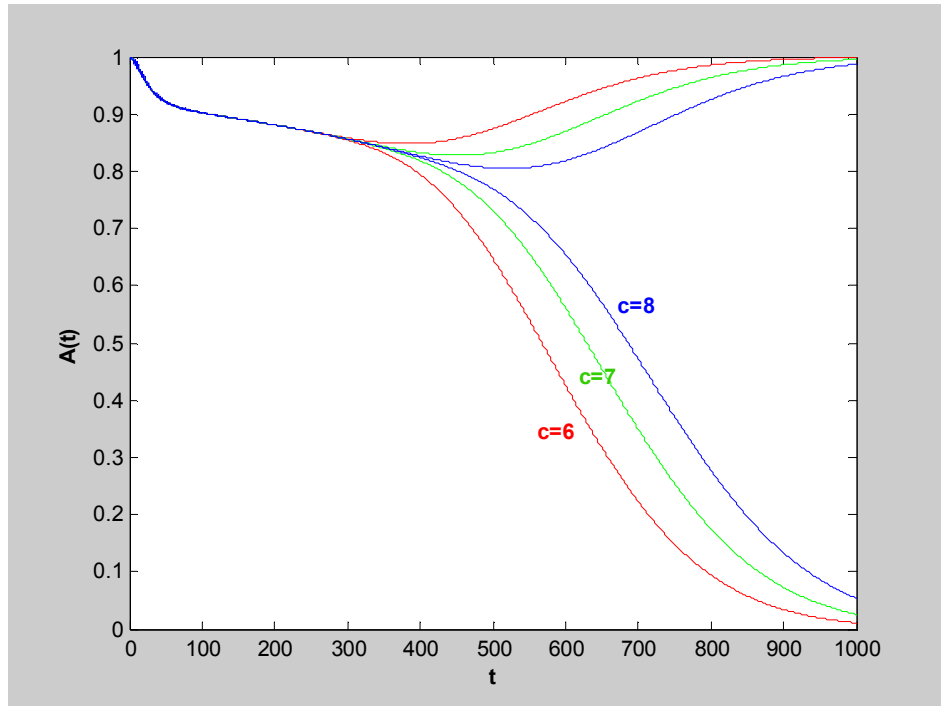
$$g_i(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)(b^{1-i}\beta_2)^{\alpha_2}} y^{\alpha_2-1} e^{-(y/b^{1-i}\beta_2)}, y > 0$$

dir. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri $(f_i)_L(t) = (1 + a^{1-i} \beta_1 t)^{-\alpha_1}$ ve $(g_i)_L(t) = (1 + b^{1-i} \beta_2 t)^{-\alpha_2}$ olarak bulunur.

Çalışma sürelerinin a oranlı bir geometrik süreç ve tamir sürelerinin b oranlı bir geometrik süreç oluşturduğu varsayımı altında kullanılabilirlik, alt sınır için (5.26) ve üst sınır için (5.28) ifadeleri kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

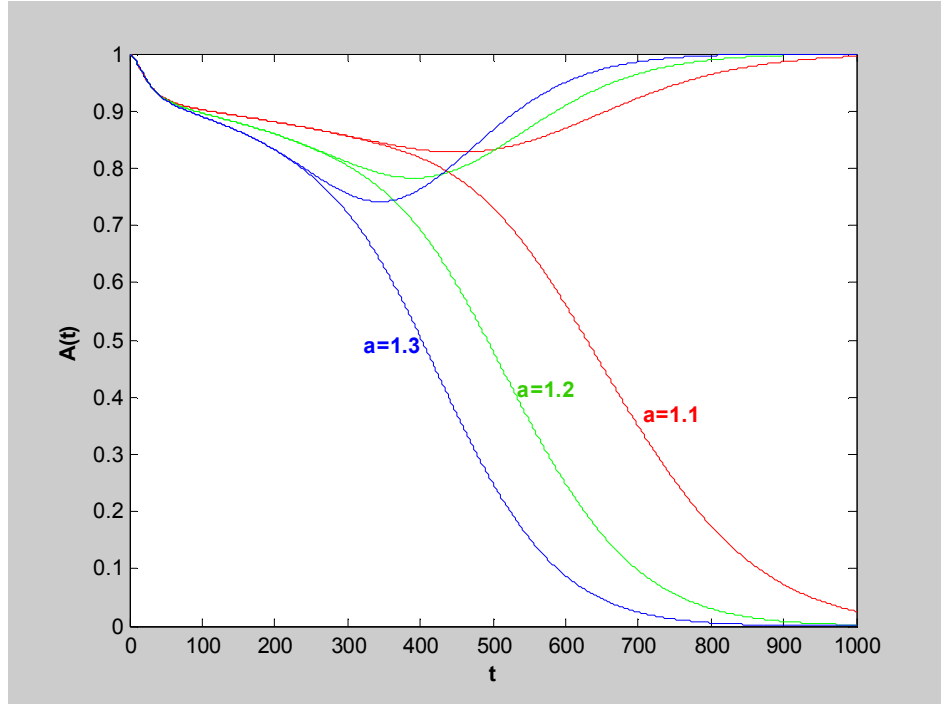
$$(A_1)_L(t) = \frac{1}{t} \left(1 - (1 + \beta_1 t)^{-\alpha_1} \right) + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^c \left(1 - (1 + a^{-i} \beta_1 t)^{-\alpha_1} \right) \prod_{j=1}^i (1 + a^{1-j} \beta_1 t)^{-\alpha_1} (1 + b^{1-j} \beta_2 t)^{-\alpha_2}$$

$$(A_2)_L(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \sum_{i=1}^c \left((1 + b^{1-i} \beta_2 t)^{\alpha_2} - 1 \right) \prod_{j=1}^i (1 + a^{1-j} \beta_1 t)^{-\alpha_1} (1 + b^{1-j} \beta_2 t)^{-\alpha_2}$$

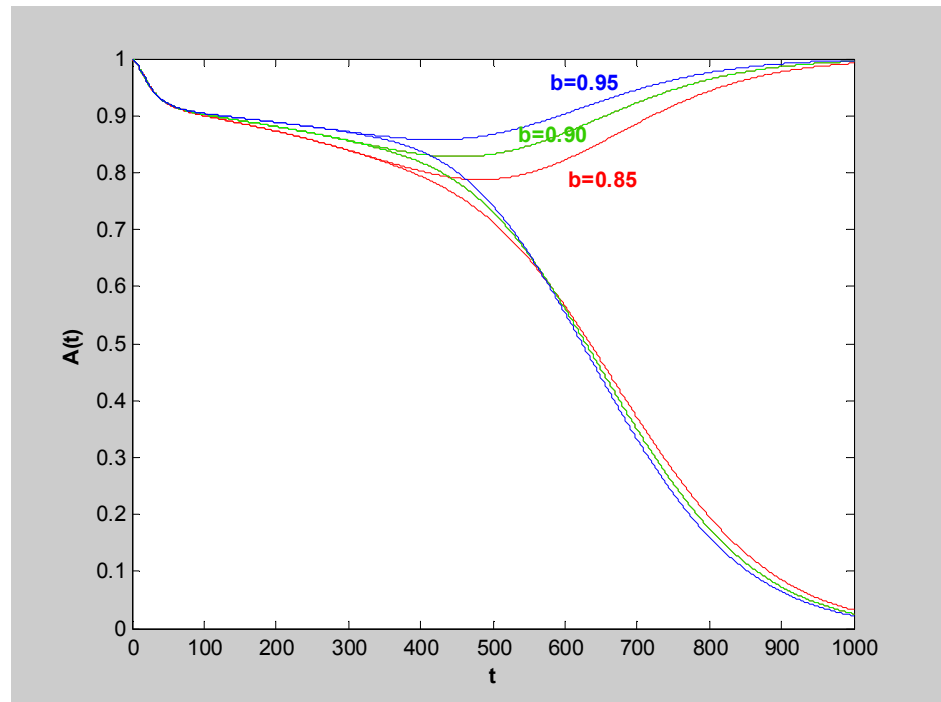


Şekil 6.17 Gama $A(t)$ $c=6,7,8$, $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 50$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_2 = 5$, $a=1.1$, $b=0.9$
(Geometrik-Geometrik)

Kullanılabilirlik fonksiyonunun sonsuz toplamından alınan terim sayısı, yani kesme değeri arttıkça daha uzun dönem için sağlıklı bir kullanılabilirlik yaklaşımında bulunmaktadır (Şekil 6.17).



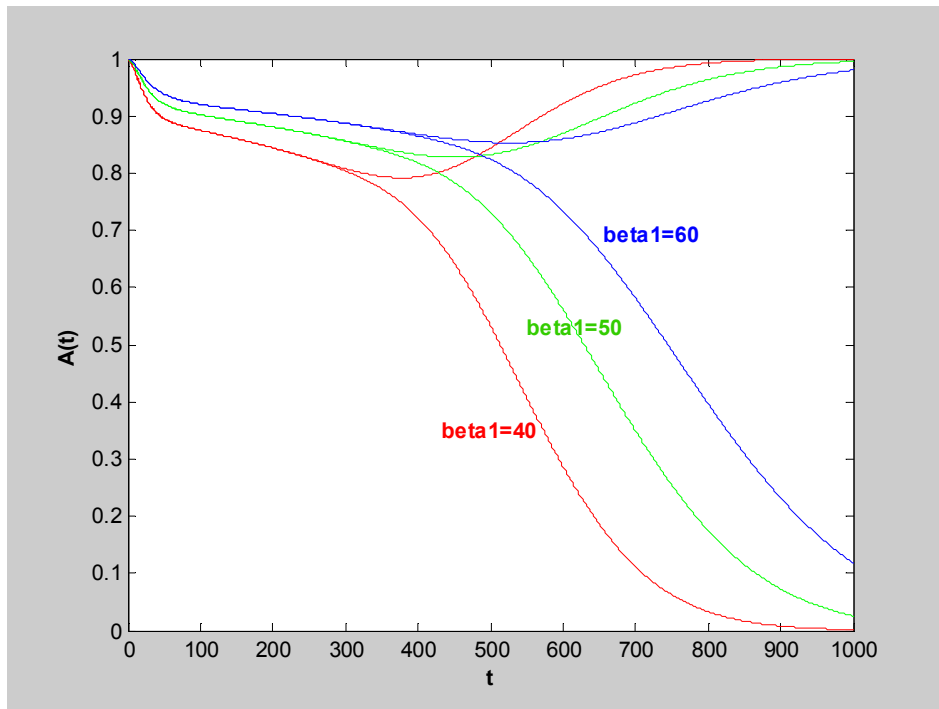
Şekil 6.18 Gama $A(t)$ $c=7$, $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 50$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_2 = 5$, $a=1.1, 1.2, 1.3$, $b=0.90$
(Geometrik - Geometrik)



Şekil 6.19 Gama $A(t)$ $c=7$, $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 50$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_2 = 5$, $a=1.1$, $b=0.85, 0.90, 0.95$
(Geometrik - Geometrik)

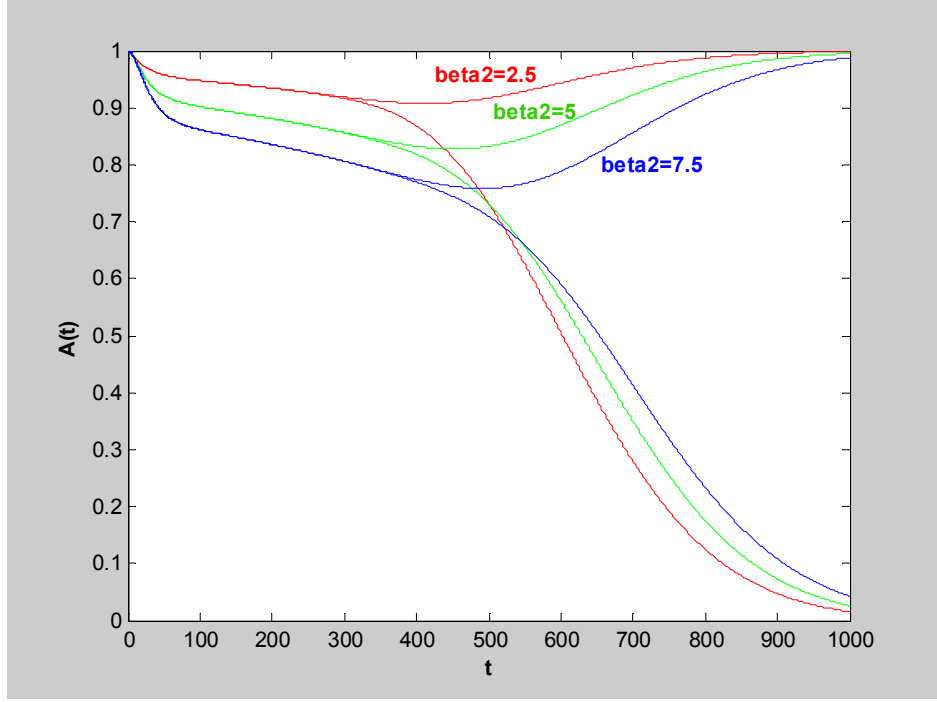
Şekil 6.18’de çalışma süreleri parametresindeki değişimin kullanılabilirlik üzerindeki etkisi gözlenmektedir. a oranındaki değişim, alt sınırdan üst sınıra göre daha belirgin bir değişime neden olur. a oranı arttıkça ortalama çalışma süresi düşmekte ve buna paralel olarak kullanılabilirlik azalmaktadır.

Şekil 6.19’da tamir süreleri parametresindeki değişimin kullanılabilirlik üzerindeki etkisi gözlenmektedir. b oranı arttıkça ortalama tamir süresi düşerken, kullanılabilirlik fonksiyonu artış göstermektedir.



Şekil 6.20 Gama $A(t)$ $c=7$, $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 40, 50, 60$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_2 = 5$, $a=1.1$, $b=0.9$
(Geometrik - Geometrik)

Gama dağılımlı çalışma sürelerinin ölçek parametresindeki bir değişim kullanılabilirlik yaklaşımının alt sınırında belirgin değişikliğe neden olur (Şekil 6.20). Ölçek parametresindeki bu değişim, ilk çalışma aralığının ortalaması olarak düşünüldüğünde, ortalama çalışma süresi arttıkça kullanılabilirliğin arttığı görülmektedir.



Şekil 6.21 Gama $A(t)$ $c=7, \alpha_1 = 2, \beta_1 = 50, \alpha_2 = 2, \beta_2 = 2.5, 5, 7.5, a=1.1, b=0.9$
(Geometrik - Geometrik)

Şekil 6.21’de gama dağılımlı tamir sürelerinin ölçek parametresindeki (β_2) değişim ilk tamir aralığının ortalaması olarak düşünüldüğünde, beklendiği üzere ortalama tamir süresi arttıkça kullanılabilirliğin düştüğü görülmektedir.

6.3 Çalışma Sürelerinin Üstel Dağılım ve Tamir Sürelerinin Gama Dağılımı Gösterdiği Durum

Burada karşımıza 4 farklı durum çıkmaktadır.

- Çalışma süreleri X_i ler ($i=1,2,\dots$) $1/\lambda$ ortalamalı üstel dağılıma ve tamir süreleri Y_i ler ($i=1,2,\dots$) α ve β parametrelili gama dağılımına dayalı birer yenileme süreci gösterebilir. X_i ve Y_i ler sırasıyla f_i ve g_i olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip olsun.

$f_i(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$ ve $g_i(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}, y > 0$ dir. Bu olasılık yoğunluk

fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri $(f_i)_L(t) = \frac{\lambda}{\lambda+t}$ ve $(g_i)_L(t) = (1+\beta t)^{-\alpha}$ olarak elde edilir.

Çalışma ve tamir sürelerinin birer yenileme süreci oluşturduğu varsayımı altında kullanılabilirlik, alt sınır için (5.14) ve üst sınır için (5.16) ifadeleri kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$(A_1)_L(t) = \frac{1}{\lambda+t} + \sum_{i=1}^c \lambda^i (\lambda+t)^{-(i+1)} (1+\beta t)^{-\alpha i}$$

$$(A_2)_L(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t} \left(1 - (1+\beta t)^{-\alpha}\right) \sum_{i=1}^c \lambda^i (\lambda+t)^{-i} (1+\beta t)^{-\alpha i}$$

• Çalışma süreleri X_i ler ($i=1,2,\dots$) $1/\lambda$ ortalamalı üstel dağılıma dayalı bir yenileme süreci ve tamir süreleri Y_i ler ($i=1,2,\dots$) b oranlı α ve β parametrelili gama dağılımına dayalı bir geometrik süreç gösterebilir. X_i ve Y_i ler sırasıyla f_i ve g_i olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip olmak üzere $f_i(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$ ve

$g_i(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_2) (b^{1-i} \beta_2)^{\alpha_2}} y^{\alpha_2-1} e^{-(y/b^{1-i} \beta_2)}$, $y > 0$ dir. Bu olasılık yoğunluk

fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri $(f_i)_L(t) = \frac{\lambda}{\lambda+t}$ ve $(g_i)_L(t) = (1+b^{1-i} \beta t)^{-\alpha}$ olarak elde edilir.

Çalışma sürelerinin bir yenileme süreci ve tamir sürelerinin b oranlı bir geometrik süreç oluşturduğu varsayımı altında kullanılabilirlik, alt sınır için (5.18) ve üst sınır için (5.20) ifadeleri kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$(A_1)_L(t) = \frac{1}{t} \left(1 - (1+\beta_1 t)^{-\alpha_1}\right) \left(1 + \sum_{i=1}^c (1+\beta_1 t)^{-\alpha_1 i} \prod_{j=1}^i (1+b^{1-j} \beta_2 t)^{-\alpha_2}\right)$$

$$(A_2)_L(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \sum_{i=1}^c \frac{(1+b^{1-i}\beta_2 t)^{\alpha_2} - 1}{(1+\beta_1 t)^{\alpha_1 i}} \prod_{j=1}^i (1+b^{1-j}\beta_2 t)^{-\alpha_2}$$

• Çalışma süreleri X_i ler ($i=1,2,\dots$) a oranlı $1/\lambda a^{i-1}$ ortalamalı üstel dağılımlı bir geometrik süreç ve tamir süreleri Y_i ler ($i=1,2,\dots$) α ve β parametrelili gama dağılımlı bir yenileme süreci gösterebilir. X_i ve Y_i ler sırasıyla f_i ve g_i olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip olmak üzere $f_i(x) = \lambda a^{i-1} e^{-\lambda a^{i-1}x}$, $x > 0$ ve

$g_i(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}$, $y > 0$ dir. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonlarının Laplace

dönüşümleri $(f_i)_L(t) = \frac{\lambda}{\lambda + a^{1-i}t}$ ve $(g_i)_L(t) = (1 + \beta t)^{-\alpha}$ olarak bulunmaktadır.

Çalışma sürelerinin a oranlı bir geometrik süreç ve tamir sürelerinin bir yenileme süreci oluşturduğu varsayımı altında kullanılabilirlik, alt sınır için (5.22) ve üst sınır için (5.24) ifadeleri kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$(A_1)_L(t) = \frac{1}{\lambda + t} + \sum_{i=1}^c [a(1 + \beta t)^\alpha]^{-i} (\lambda + ta^{-i})^{-1} \prod_{j=1}^i \frac{\lambda}{\lambda + a^{1-j}t}$$

$$(A_2)_L(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t} (1 - (1 + \beta t)^\alpha) \sum_{i=1}^c (1 + \beta t)^{-\alpha i} \prod_{j=1}^i \frac{\lambda}{\lambda + a^{1-j}t}$$

• Çalışma süreleri X_i ler ($i=1,2,\dots$) a oranlı $1/\lambda a^{i-1}$ ortalamalı üstel dağılıma dayalı bir geometrik süreç ve tamir süreleri Y_i ler ($i=1,2,\dots$) b oranlı α ve β parametrelili gama dağılımına dayalı bir geometrik süreç gösterebilir. X_i ve Y_i ler sırasıyla f_i ve g_i olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip olmak üzere $f_i(x) = \lambda a^{i-1} e^{-\lambda a^{i-1}x}$, $x > 0$ ve

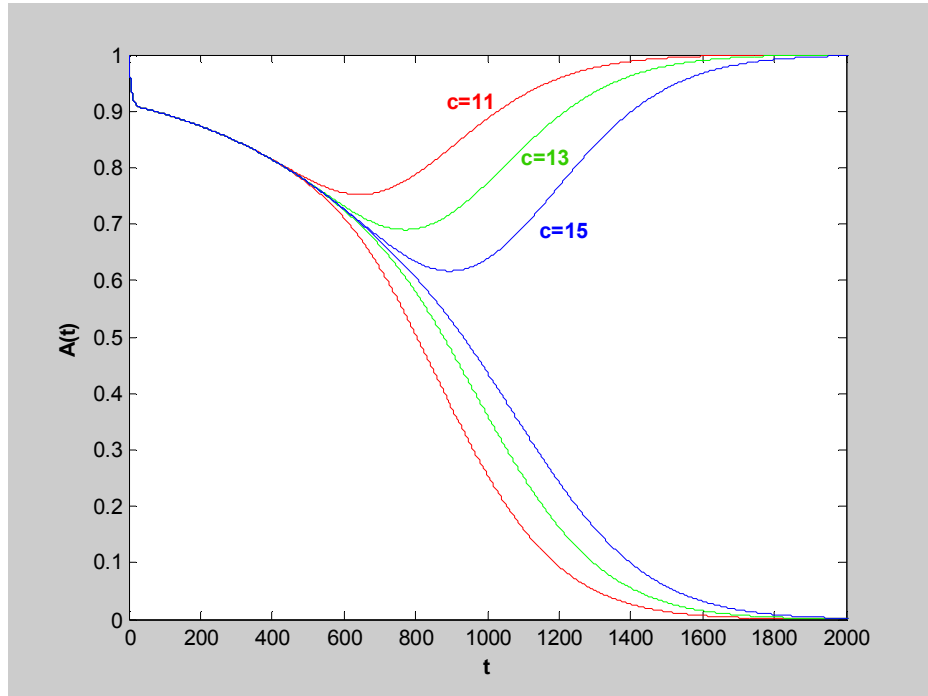
$g_i(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)(b^{1-i}\beta_2)^{\alpha_2}} y^{\alpha_2-1} e^{-(y/b^{1-i}\beta_2)}$, $y > 0$ dir. Bu olasılık yoğunluk

fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri $(f_i)_L(t) = \frac{\lambda}{\lambda + a^{1-i}t}$ ve $(g_i)_L(t) = (1 + b^{1-i}\beta t)^{-\alpha}$ olarak bulunur.

Çalışma sürelerinin a oranlı bir geometrik süreç ve tamir sürelerinin b oranlı bir geometrik süreç oluşturduğu varsayımı altında kullanılabilirlik, alt sınır için (5.26) ve üst sınır için (5.28) ifadeleri kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

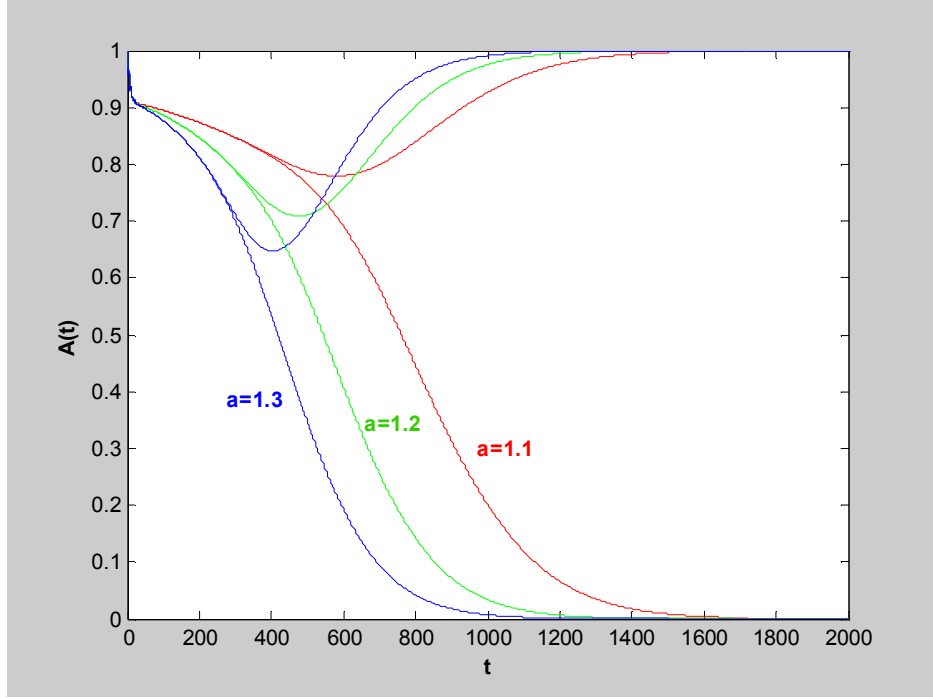
$$(A_1)_L(t) = \frac{1}{\lambda + t} + \sum_{i=1}^c \left(\frac{\lambda}{a}\right)^i (\lambda + a^{-i}t)^{-1} \prod_{j=1}^i (\lambda + a^{1-j}t)^{-1} (1 + b^{1-j}\beta t)^{-\alpha}$$

$$(A_2)_L(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^c (1 - (1 + b^{1-i}\beta t)^{-\alpha}) \lambda^i \prod_{j=1}^i (\lambda + a^{1-j}t)^{-1} (1 + b^{1-j}\beta t)^{-\alpha}$$



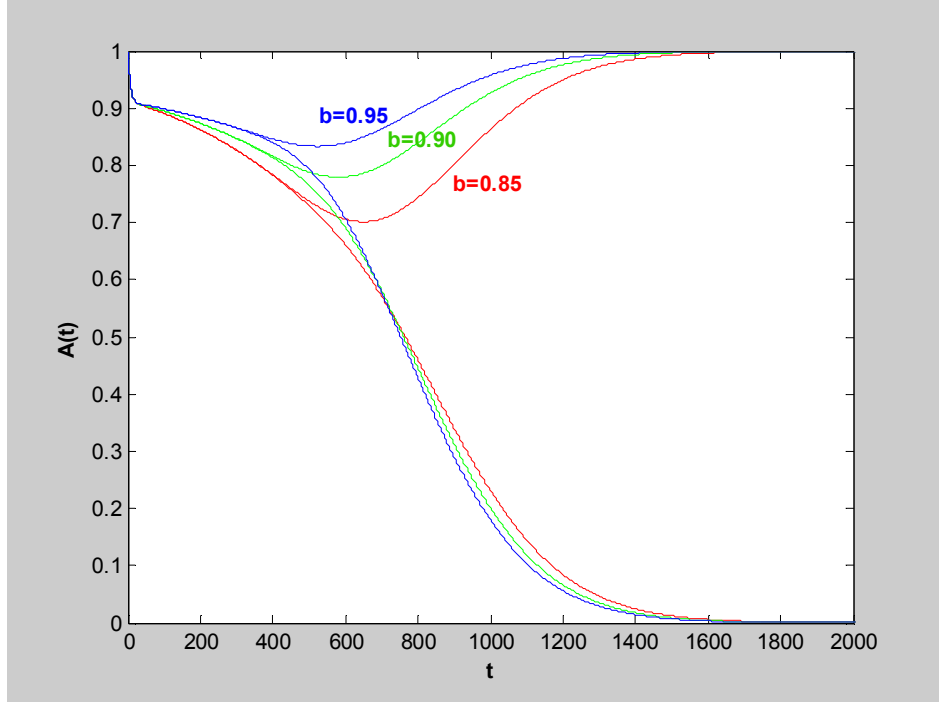
Şekil 6.22 Üstel-Gama $A(t)$ $c=11,13,15$ $\lambda = 0.01$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $a=1.1$, $b=0.9$
(Geometrik – Geometrik)

Daha önce işlenen süreç modellerinde olduğu gibi, kesme değeri arttıkça kullanılabilirlik için daha sağlıklı bir yaklaşım elde edilebilmektedir. (Şekil 6.22)



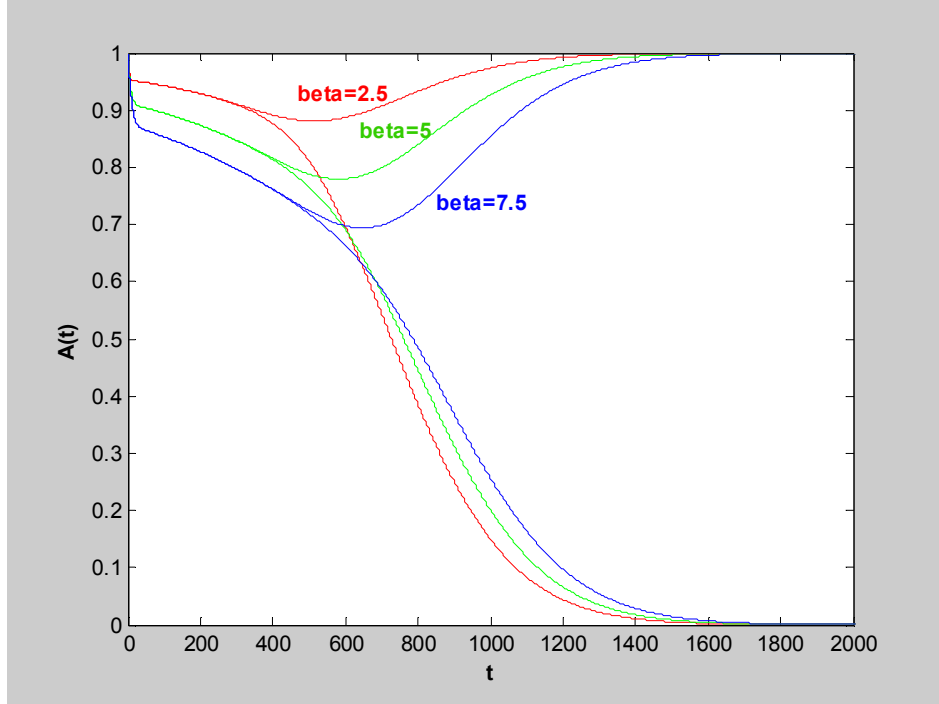
Şekil 6.23 Üstel-Gama $A(t)$ $c=10$, $\lambda = 0.01$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $a=1.1,1.2,1.3$, $b=0.9$
(Geometrik – Geometrik)

Şekil 6.23’de çalışma süreleri parametresindeki değişimin kullanılabilirlik üzerindeki etkisi gözlenmektedir. Alt sınır, çalışma zamanı kullanılarak hesaplanan kullanılabilirlik yaklaşımı olduğundan, çalışma zamanı dağılımındaki herhangi bir değişim alt sınırdan üst sınıra göre daha belirgin bir değişime neden olur. a oranı arttıkça kullanılabilirlik düşmektedir.

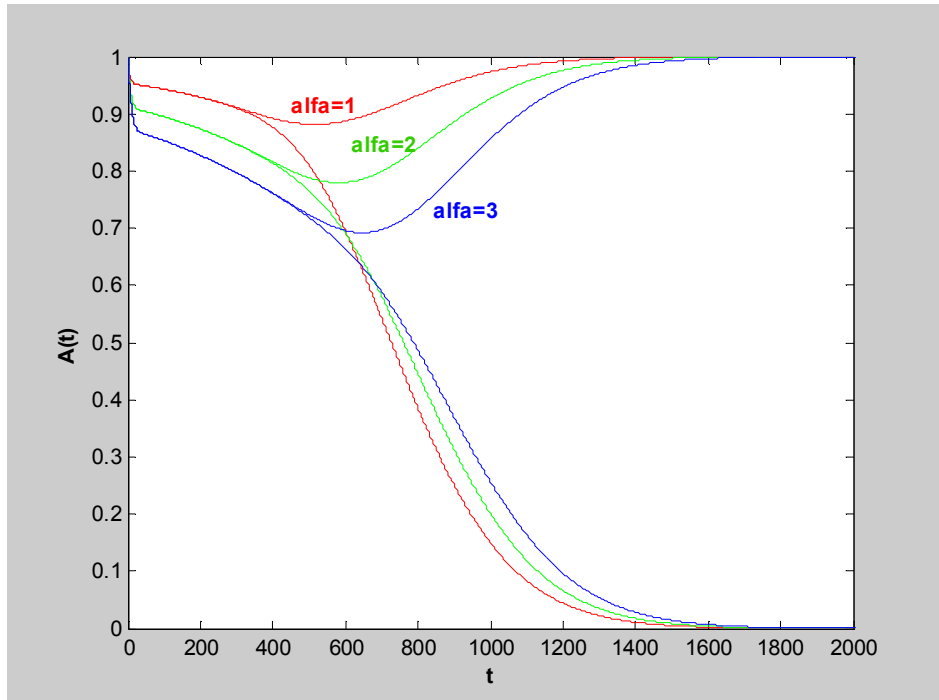


Şekil 6.24 Üstel-Gama $A(t)$ $c=10$, $\lambda = 0.01$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $a=1.1$, $b=0.85,0.90,0.95$
(Geometrik – Geometrik)

Şekil 6.24’de tamir sürelerini ifade eden geometrik sürecin oranındaki değişimin kullanılabilirlik üzerindeki etkisi görülmektedir. b oranı arttıkça kullanılabilirlik artmakta, alt ve üst sınırlar daha kısa sürede birbirinden ayrılmaktadır. Üst sınır tamir süreleri kullanılarak hesaplanan kullanılabilirlik yaklaşımı olduğundan, tamir süreleri dağılımındaki herhangi bir değişim, üst sınıra alt sınıra göre daha belirgin değişime neden olur.



Şekil 6.25 Üstel-Gama $A(t)$ $c=10$, $\lambda = 0.01$, $\alpha = 2$, $\beta = 2.5, 5, 7.5$, $a=1.1$, $b=0.9$
(Geometrik – Geometrik)



Şekil 6.26 Üstel-Gama $A(t)$ $c=10$, $\lambda = 0.01$, $\alpha = 1, 2, 3$, $\beta = 5$, $a=1.1$, $b=0.9$
(Geometrik-Geometrik)

Şekil 6.25 ve 6.26'da ilk tamir aralığı ortalamasındaki değişimin etkileri gözlenmektedir. Gama dağılımlı tamir aralığının ortalaması $\alpha\beta$ ile hesaplanmaktadır. α veya β değeri arttıkça tamir süreleri ortalaması artmakta ve dolayısıyla kullanılabilirlik azalmaktadır.

6.4 Çalışma Sürelerinin Gama Dağılımı ve Tamir Sürelerinin Üstel Dağılım Gösterdiği Durum

Burada karşımıza 4 farklı durum çıkmaktadır.

- Çalışma süreleri X_i ler ($i=1,2,\dots$) α ve β parametrelili gama dağılımına ve tamir süreleri Y_i ler ($i=1,2,\dots$) $1/\mu$ ortalamalı üstel dağılıma dayalı birer yenileme süreci gösterebilir. X_i ve Y_i ler sırasıyla f_i ve g_i olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip olsun.

$f_i(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$, $x > 0$ ve $g_i(y) = \mu e^{-\mu y}$, $y > 0$ dir. Bu olasılık yoğunluk

fonsiyonlarının Laplace dönüşümleri $(f_i)_L(t) = (1 + \beta t)^{-\alpha}$ ve $(g_i)_L(t) = \frac{\mu}{\mu + t}$ olarak elde edilir.

Çalışma ve tamir sürelerinin birer yenileme süreci oluşturduğu varsayımı altında kullanılabilirlik, alt sınır için (5.14) ve üst sınır için (5.16) ifadeleri kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$(A_1)_L(t) = \frac{1}{t} (1 - (1 + \beta t)^{-\alpha}) \left(1 + \sum_{i=1}^c (1 + \beta t)^{-\alpha i} \frac{\mu^i}{(\mu + t)^i} \right)$$

$$(A_2)_L(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^c (1 + \beta t)^{-\alpha i} \frac{\mu^i}{(\mu + t)^i}$$

- Çalışma süreleri X_i ler ($i=1,2,\dots$) α ve β parametrelili gama dağılımına dayalı bir yenileme süreci ve tamir süreleri Y_i ler ($i=1,2,\dots$) b oranlı $1/\mu b^{i-1}$ ortalamalı üstel dağılıma dayalı bir geometrik süreç gösterebilir. X_i ve Y_i ler sırasıyla f_i ve g_i olasılık

yoğunluk fonksiyonlarına sahip olmak üzere $f_i(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$, $x > 0$ ve

$g_i(y) = \mu b^{i-1} e^{-\mu b^{i-1} y}$, $y > 0$ dir. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonlarının Laplace

dönüşümleri $(f_i)_L(t) = (1 + \beta t)^{-\alpha}$ ve $(g_i)_L(t) = \frac{\mu}{\mu + b^{1-i} t}$ olarak elde edilir.

Çalışma sürelerinin bir yenileme süreci ve tamir sürelerinin b oranlı bir geometrik süreç oluşturduğu varsayımı altında kullanılabilirlik, alt sınır için (5.18) ve üst sınır için (5.20) ifadeleri kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$(A_1)_L(t) = \frac{1}{t} \left(1 - (1 + \beta t)^{-\alpha} \right) \left(1 + \sum_{i=1}^c (1 + \beta t)^{-\alpha i} \prod_{j=1}^i \frac{\mu}{\mu + t b^{1-j}} \right)$$

$$(A_2)_L(t) = \frac{1}{t} - \sum_{i=1}^c \left(\frac{b}{\mu} \right)^{1-i} (1 + \beta t)^{-\alpha i} \prod_{j=1}^i \frac{\mu}{\mu + t b^{1-j}}$$

• Çalışma süreleri X_i ler ($i=1,2,\dots$) a oranlı α ve β parametrelili gama dağılımlı bir geometrik süreç ve tamir süreleri Y_i ler ($i=1,2,\dots$) $1/\mu$ ortalamalı üstel dağılımlı bir yenileme süreci gösterebilir. X_i ve Y_i ler sırasıyla f_i ve g_i olasılık yoğunluk fonksiyonlarına

sahip olmak üzere $f_i(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(a^{1-i}\beta)^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(a^{i-1}/\beta)x}$, $x > 0$ ve

$g_i(y) = \mu e^{-\mu y}$, $y > 0$ dir. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri

$(f_i)_L(t) = (1 + a^{1-i}\beta t)^{-\alpha}$ ve $(g_i)_L(t) = \frac{\mu}{\mu + t}$ olarak bulunmaktadır.

Çalışma sürelerinin a oranlı bir geometrik süreç ve tamir sürelerinin bir yenileme süreci oluşturduğu varsayımı altında kullanılabilirlik, alt sınır için (5.22) ve üst sınır için (5.24) ifadeleri kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$(A_1)_L(t) = \frac{1}{t} \left(1 - (1 + \beta t)^{-\alpha}\right) + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^c \left(\frac{\mu}{\mu + t}\right)^i \left(1 - (1 + a^{-i} \beta t)^{-\alpha}\right) \prod_{j=1}^i (1 + a^{1-j} \beta t)^{-\alpha}$$

$$(A_2)_L(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^c \left(\frac{\mu}{\mu + t}\right)^i \prod_{j=1}^i (1 + a^{1-j} \beta t)^{-\alpha}$$

• Çalışma süreleri X_i ler ($i=1,2,\dots$) a oranlı α ve β parametrelili gama dağılıma dayalı bir geometrik süreç ve tamir süreleri Y_i ler ($i=1,2,\dots$) b oranlı $1/\mu b^{i-1}$ ortalamalı üstel dağılıma dayalı bir geometrik süreç gösterebilir. X_i ve Y_i ler sırasıyla f_i ve g_i olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip olmak üzere

$$f_i(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(a^{1-i}\beta)^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(x/a^{1-i}\beta)}, x > 0 \text{ ve } g_i(y) = \mu b^{i-1} e^{-\mu b^{i-1}y}, y > 0 \text{ dir. Bu}$$

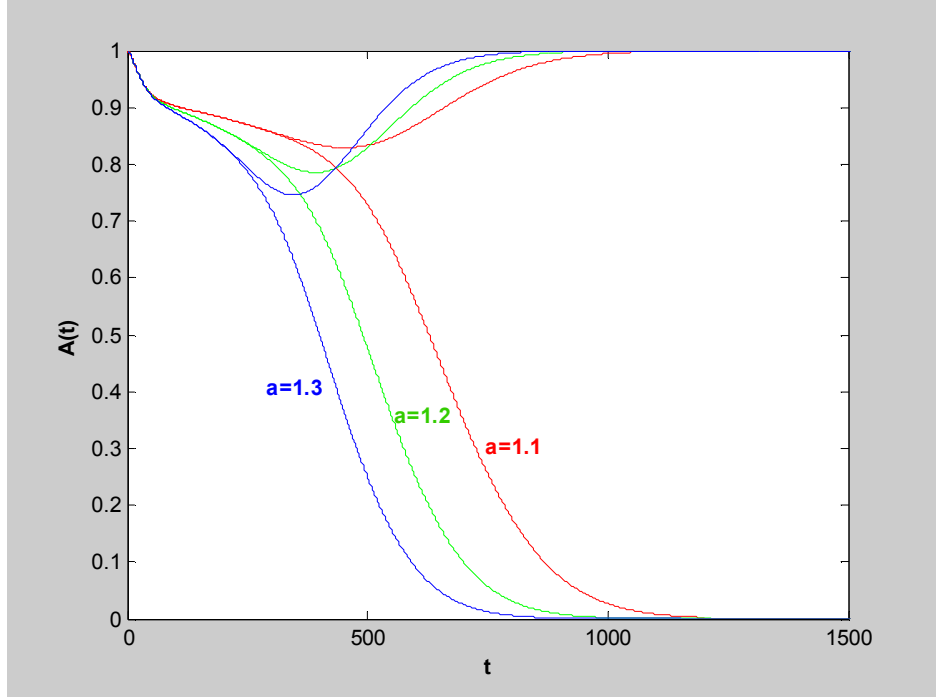
olasılık yoğunluk fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri $(f_i)_L(t) = (1 + a^{1-i} \beta t)^{-\alpha}$ ve

$$(g_i)_L(t) = \frac{\mu}{\mu + b^{1-i}t}$$
 olarak bulunur.

Çalışma sürelerinin a oranlı bir geometrik süreç ve tamir sürelerinin b oranlı bir geometrik süreç oluşturduğu varsayımı altında kullanılabilirlik, alt sınır için (5.26) ve üst sınır için (5.28) ifadeleri kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

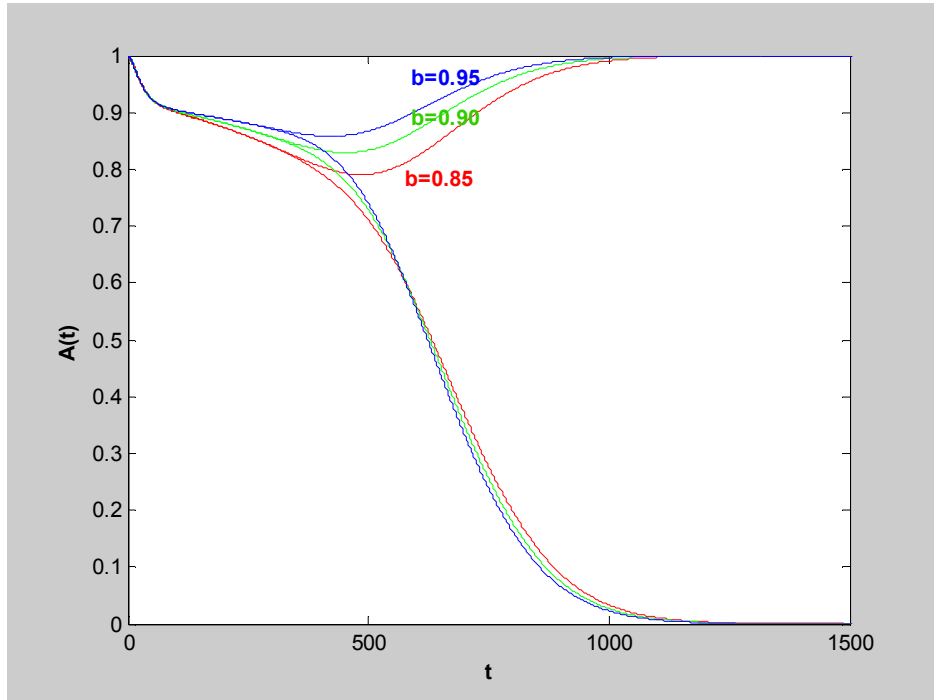
$$(A_1)_L(t) = \frac{1}{t} \left(1 - (1 + \beta t)^{-\alpha}\right) + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^c \left(1 - (1 + a^{-i} \beta t)^{-\alpha}\right) \mu^i \prod_{j=1}^i (1 + a^{1-j} \beta t)^{-\alpha} (\mu + b^{1-j}t)^{-1}$$

$$(A_2)_L(t) = \frac{1}{t} - \sum_{i=1}^c \left(\frac{b}{\mu}\right)^{1-i} \prod_{j=1}^i (1 + a^{1-j} \beta t)^{-\alpha} (\mu + b^{1-j}t)^{-1}$$

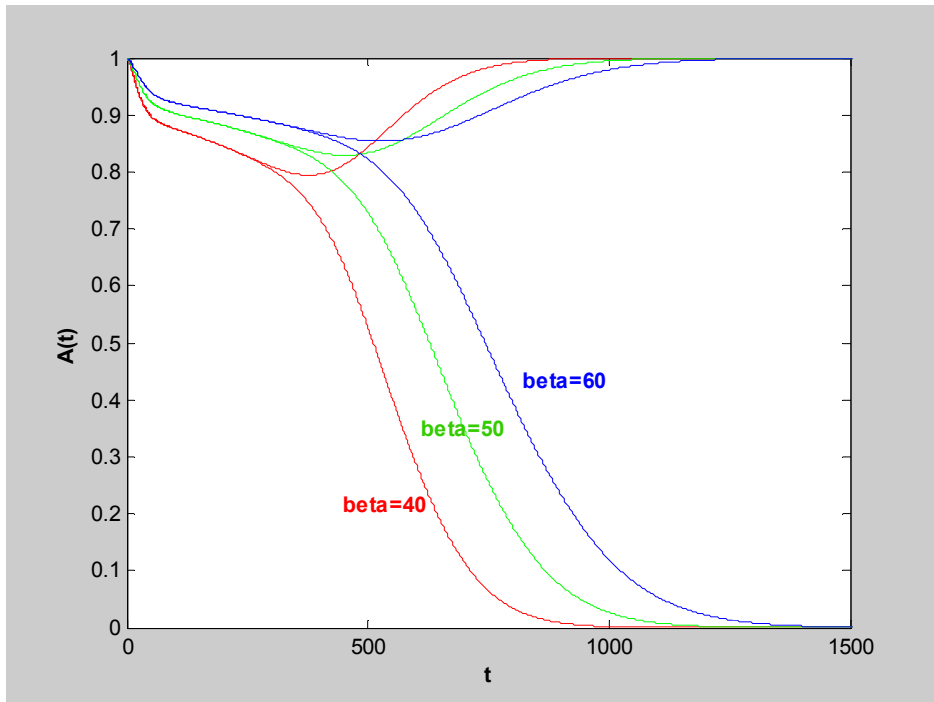


Şekil 6.27 Gama-Üstel $A(t)$ $c=7$, $\alpha = 2$, $\beta = 50$, $\mu = 0.1$, $a=1.1,1.2,1.3$, $b=0.9$
(Geometrik – Geometrik)

Şekil 6.27’de tamir süreleri parametresindeki değişimin etkisi görülmektedir. Alt sınır üst sınıra göre daha belirgin bir değişim göstermektedir. Alt ve üst sınır çakışık olduğu durumda, görece küçük olan tamir süreleri parametreleri için kullanılabilirlik daha büyüktür.



Şekil 6.28 Gama-Üstel $A(t)$ $c=7, \alpha = 2, \beta = 50, \mu = 0.1, a=1.1, b=0.85,0.90,0.95$
(Geometrik – Geometrik)



Şekil 6.29 Gama-Üstel $A(t)$ $c=7, \alpha = 2, \beta = 40,50,60, \mu = 0.1, a=1.1, b=0.9$
(Geometrik-Geometrik)

Şekil 6.28’de tamir sürelerinin oluşturduğu geometrik süreç oranının kullanılabilirlik üzerindeki etkisi görülmektedir. Büyük b değerleri için tamir süreleri ortalaması ($1/\mu b^{i-1}$) daha küçük olacağından, b değeri arttıkça kullanılabilirlik artar.

Şekil 6.29’da değişen ilk çalışma aralığı ortalamasının kullanılabilirlik üzerindeki etkisi görülmektedir. β değeri arttıkça ilk çalışma aralığı ortalaması ($\alpha\beta$) artacağından, kullanılabilirlik artar.

6.5 Çalışma ve Tamir Sürelerinin Normal Dağılım Gösterdiği Durum

Çalışma ve tamir sürelerinin normal dağıldığı varsayımı altında kullanılabilirliğin kapalı formdaki ifadesine ulaşılabilmektedir. İki farklı yoldan bulunan kullanılabilirlik ifadeleri birbirine eşittir. Bu nedenle, grafiklerde söz konusu ifadelerden bir tanesi kullanılmıştır. Fakat sayısal sonuçlar elde edebilmek için, bu analitik ifadede bulunan sonsuz toplamların sınırlandırılması gerekmektedir. Sonsuz toplamın sınırlandırıldığı kesme değere, daha önceki durumlarda olduğu gibi c diyelim. Burada karşımıza 4 farklı durum çıkmaktadır.

- Çalışma süreleri X_i ler ($i=1,2,\dots$) μ ortalamalı ve σ^2 varyanslı, tamir süreleri Y_i ler ($i=1,2,\dots$) ise λ ortalamalı ve ρ^2 varyanslı normal dağılım ile birer yenileme süreci gösterebilir. X_i ve Y_i ler sırasıyla f_i ve g_i olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip olsun.

$$f_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

ve

$$g_i(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\rho} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\lambda}{\rho}\right)^2}, \quad -\infty < y < \infty$$

dır. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonlarının (2.1) ifadesi kullanılarak Laplace dönüşümleri alındığında $(f_i)_L(t) = e^{-t\mu + 1/2t^2\sigma^2}$ ve $(g_i)_L(t) = e^{-t\lambda + 1/2t^2\rho^2}$ elde edilir.

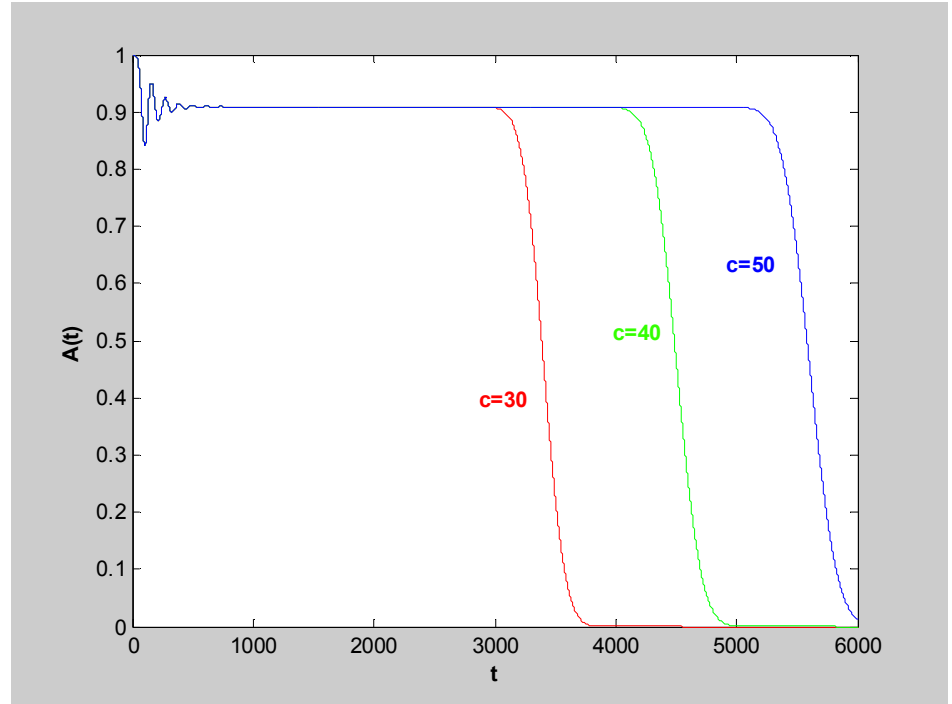
Çalışma ve tamir sürelerinin birer yenileme süreci oluşturduğu varsayımı altında kullanılabilirlik, birinci yoldan (5.13) ve ikinci yoldan (5.15) ifadeleri kullanılarak hesaplanır.

$$A_1(t) = 1 - \Phi(t; \mu, \sigma^2) + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\Phi(t; (\mu + \lambda)i, (\sigma^2 + \rho^2)i) - \Phi(t; (1+i)\mu + i\lambda, (1+i)\sigma^2 + i\rho^2) \right]$$

$$A_2(t) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\Phi((\mu + \lambda)i, (\sigma^2 + \rho^2)i) - \Phi(i\mu + (i-1)\lambda, i\sigma^2 + (i-1)\rho^2) \right]$$

Burada

$$\Phi(t; \mu, \sigma^2) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx .$$



Şekil 6.30 Normal $A(t)$ $c=30,40,50$, $\mu = 100$, $\sigma = 25$, $\lambda = 10$, $\rho = 2.5$
(Yenileme – Yenileme)

Sonsuz toplamdan alınan terim sayısı arttıkça, kullanılabilirlik için daha uzun süre kesin sonuç elde edilmektedir. (Şekil 6.30)

- Çalışma süreleri X_i ler ($i=1,2,\dots$) μ ortalamalı ve σ^2 varyanslı normal dağılım ile bir yenileme süreci, tamir süreleri Y_i ler ($i=1,2,\dots$) ise $b^{1-i}\lambda$ ortalamalı ve $(b^{1-i}\rho)^2$ varyanslı normal dağılım ile b oranlı bir geometrik süreç gösterebilir. X_i ve Y_i ler sırasıyla f_i ve g_i olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip olsun.

$$f_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

ve

$$g_i(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b^{1-i}\rho} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-b^{1-i}\lambda}{b^{1-i}\rho}\right)^2}, \quad -\infty < y < \infty$$

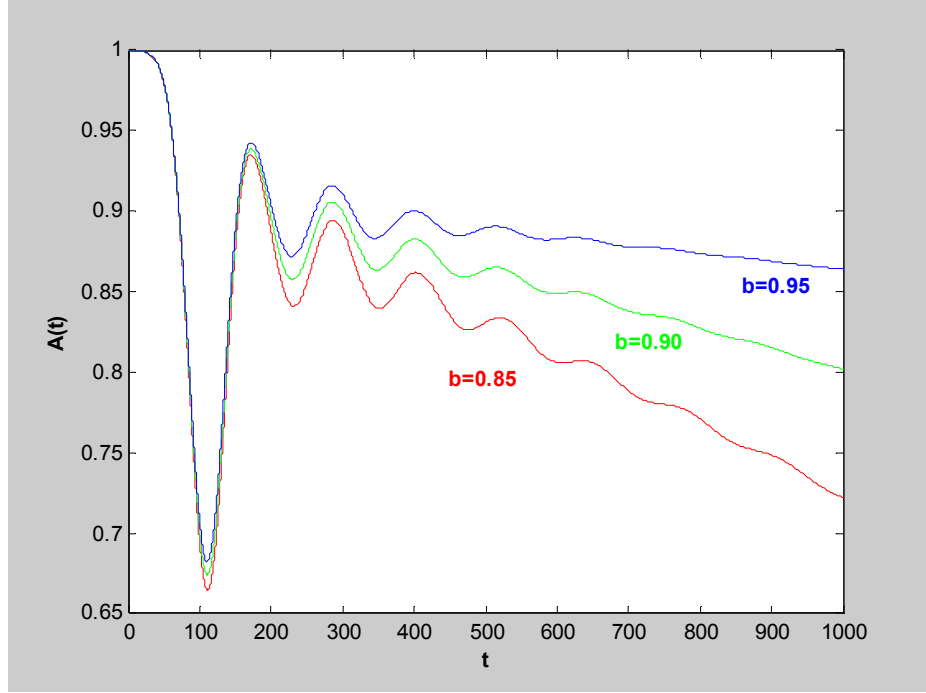
dır. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonlarının (2.1) ifadesi kullanılarak Laplace dönüşümleri alındığında $(f_i)_L(t) = e^{-t\mu + 1/2t^2\sigma^2}$ ve $(g_i)_L(t) = e^{-tb^{1-i}\lambda + 1/2t^2(b^{1-i}\rho)^2}$ elde edilir.

Çalışma sürelerinin bir yenileme süreci ve tamir sürelerinin b oranlı bir geometrik süreç oluşturduğu varsayımı altında kullanılabilirlik, birinci yoldan (5.17) ve ikinci yoldan (5.19) ifadeleri kullanılarak hesaplanır.

$$A(t) = 1 - \Phi(t, \mu, \sigma^2) + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\Phi\left(t, i\mu + \frac{1-(1/b)^{i+1}}{1-(1/b)}\lambda, i\sigma^2 + \frac{1-(1/b^2)^{i+1}}{1-(1/b^2)}\rho^2\right) - \Phi\left(t, (i+1)\mu + \frac{1-(1/b)^{i+1}}{1-(1/b)}\lambda, (i+1)\sigma^2 + \frac{1-(1/b^2)^{i+1}}{1-(1/b^2)}\rho^2\right) \right]$$

$$A_2(t) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\Phi\left(t, i\mu + \frac{1-(1/b)^{i+1}}{1-(1/b)}\lambda, i\sigma^2 + \frac{1-(1/b^2)^{i+1}}{1-(1/b^2)}\rho^2\right) - \Phi\left(t, i\mu + \frac{1-(1/b)^{i+1}}{1-(1/b)}\lambda - b^{-i}\lambda, i\sigma^2 + \frac{1-(1/b^2)^{i+1}}{1-(1/b^2)}\rho^2 - b^{-2i}\rho^2\right) \right]$$

Burada grafik gösterimi elde edebilmek için sonsuz toplamın ilk 50 terimi alınmıştır.



Şekil 6.31 Normal $A(t)$ $c=50$, $\mu = 100$, $\sigma = 25$, $\lambda = 10$, $\rho = 2.5$, $b=0.85, 0.90, 0.95$
(Yenileme-Geometrik)

Tamir sürelerini ifade eden geometrik sürecin oranı (b) arttıkça, ortalama tamir süresi düşmektedir. Dolayısıyla b arttıkça kullanılabilirlik artmaktadır. (Şekil 6.31).

- Çalışma süreleri X_i ler ($i=1,2,\dots$) $a^{1-i}\mu$ ortalamalı ve $(a^{1-i}\sigma)^2$ varyanslı normal dağılım ile a oranlı bir geometrik süreç, tamir süreleri Y_i ler ($i=1,2,\dots$) ise λ ortalamalı ve ρ^2 varyanslı normal dağılım ile bir yenileme süreci gösterebilir. X_i ve Y_i ler sırasıyla f_i ve g_i olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip olsun.

$$f_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a^{1-i}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - a^{1-i}\mu}{a^{1-i}\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

ve

$$g_i(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\rho} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y - \lambda}{\rho}\right)^2}, \quad -\infty < y < \infty$$

dır. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonlarının (2.1) ifadesi kullanılarak Laplace dönüşümleri alındığında $(f_i)_L(t) = e^{-ta^{1-i}\mu + 1/2t^2(a^{1-i}\sigma)^2}$ ve $(g_i)_L(t) = e^{-t\lambda + 1/2t^2\rho^2}$ elde edilir.

Çalışma sürelerinin a oranlı bir geometrik süreç ve tamir sürelerinin bir yenileme süreci oluşturduğu varsayımı altında kullanılabilirlik, birinci yoldan (5.21) ve ikinci yoldan (5.23) ifadeleri kullanılarak hesaplanır.

$$A(t) = 1 - \Phi\left(t, a^{1-i}\mu, a^{2-2i}\sigma^2\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\Phi\left(t, i\lambda + \frac{1-(1/a)^{i+1}}{1-(1/a)}\mu, i\rho^2 + \frac{1-(1/a^2)^{i+1}}{1-(1/a^2)}\sigma^2\right) - \Phi\left(t, i\lambda + \frac{1-(1/a)^{i+1}}{1-(1/a)}\mu + a^{-i}\mu, i\rho^2 + \frac{1-(1/a^2)^{i+1}}{1-(1/a^2)}\sigma^2 + a^{-2i}\sigma^2\right) \right]$$

$$A_2(t) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\Phi\left(t, i\lambda + \frac{1-(1/a)^{i+1}}{1-(1/a)}\mu, i\rho^2 + \frac{1-(1/a^2)^{i+1}}{1-(1/a^2)}\sigma^2\right) - \Phi\left(t, i\lambda - \lambda + \frac{1-(1/a)^{i+1}}{1-(1/a)}\mu, i\rho^2 - \rho^2 + \frac{1-(1/a^2)^{i+1}}{1-(1/a^2)}\sigma^2\right) \right]$$

• Çalışma süreleri X_i ler ($i=1,2,\dots$) $a^{1-i}\mu$ ortalamalı ve $(a^{1-i}\sigma)^2$ varyanslı normal dağılım ile a oranlı bir geometrik süreç, tamir süreleri Y_i ler ($i=1,2,\dots$) ise $b^{1-i}\lambda$ ortalamalı ve $(b^{1-i}\rho)^2$ varyanslı normal dağılım ile b oranlı bir geometrik süreç gösterebilir. X_i ve Y_i ler sırasıyla f_i ve g_i olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip olmak üzere

$$f_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a^{1-i}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - a^{1-i}\mu}{a^{1-i}\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

ve

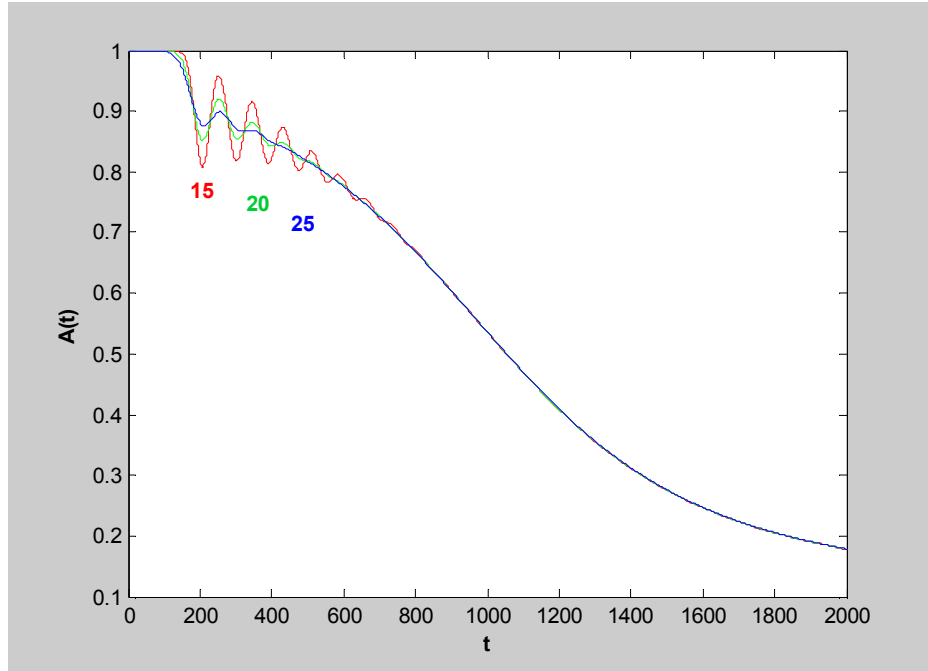
$$g_i(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\rho} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y - \lambda}{\rho}\right)^2}, \quad -\infty < y < \infty$$

dir. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri $(f_i)_L(t) = e^{-ta^{1-i}\mu + 1/2t^2(a^{1-i}\sigma)^2}$ ve $(g_i)_L(t) = e^{-tb^{1-i}\lambda + 1/2t^2(b^{1-i}\rho)^2}$ olarak elde edilir.

Çalışma sürelerinin a oranlı bir geometrik süreç ve tamir sürelerinin b oranlı bir geometrik süreç oluşturduğu varsayımı altında kullanılabilirlik, birinci yoldan (5.25) ve ikinci yoldan (5.27) ifadeleri kullanılarak hesaplanır.

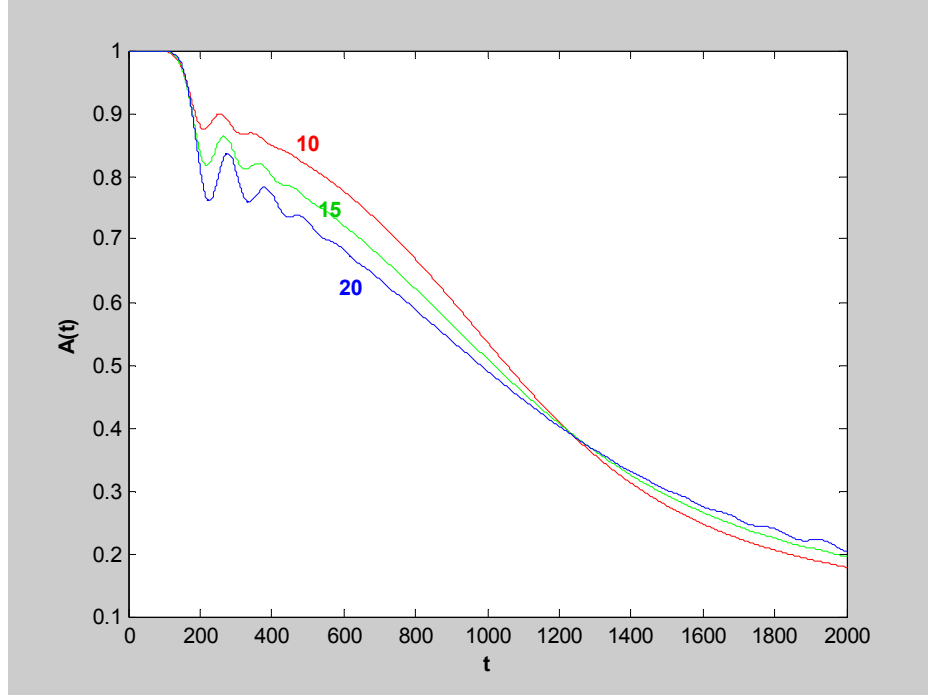
$$A(t) = 1 - \Phi(t, \mu, \sigma) + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\Phi \left(t, \frac{1-(1/a)^{i+1}}{1-(1/a)} \mu + \frac{1-(1/b)^{i+1}}{1-(1/b)} \lambda, \frac{1-(1/a^2)^{i+1}}{1-(1/a^2)} \sigma^2 + \frac{1-(1/b^2)^{i+1}}{1-(1/b^2)} \rho^2 \right) - \Phi \left(t, \frac{1-(1/a)^{i+1}}{1-(1/a)} \mu + a^i \mu + \frac{1-(1/b)^{i+1}}{1-(1/b)} \lambda, \frac{1-(1/a^2)^{i+1}}{1-(1/a^2)} \sigma^2 + a^{2i} \sigma^2 + \frac{1-(1/b^2)^{i+1}}{1-(1/b^2)} \rho^2 \right) \right]$$

$$A_2(t) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\Phi \left(t, \frac{1-(1/a)^{i+1}}{1-(1/a)} \mu + \frac{1-(1/b)^{i+1}}{1-(1/b)} \lambda, \frac{1-(1/a^2)^{i+1}}{1-(1/a^2)} \sigma^2 + \frac{1-(1/b^2)^{i+1}}{1-(1/b^2)} \rho^2 \right) - \Phi \left(t, \frac{1-(1/a)^{i+1}}{1-(1/a)} \mu - b^{i-1} \lambda + \frac{1-(1/b)^{i+1}}{1-(1/b)} \lambda, \frac{1-(1/a^2)^{i+1}}{1-(1/a^2)} \sigma^2 - b^{2-2i} \rho^2 + \frac{1-(1/b^2)^{i+1}}{1-(1/b^2)} \rho^2 \right) \right]$$



Şekil 6.32 Normal $A(t)$ $c=40$, $\mu = 100$, $\sigma = 15, 20, 25$, $a=1.1$, $\lambda = 10$, $\rho = 2.5$, $b=0.90$ (Geometrik-Geometrik)

Şekil 6.32'de ilk çalışma aralığı standart sapmasının kullanılabilirlik üzerindeki etkisi görülmektedir. Sınırlardaki en büyük dalgalanma ilk çalışma aralığı standart sapması 15 iken gerçekleşmektedir. Standart sapma 25 olduğunda ise, başlangıçta hafif dalgalanmalar görülürken, sonrasında bütün standart sapma değerleri için kullanılabilirlik aynı trendi izlemektedir.

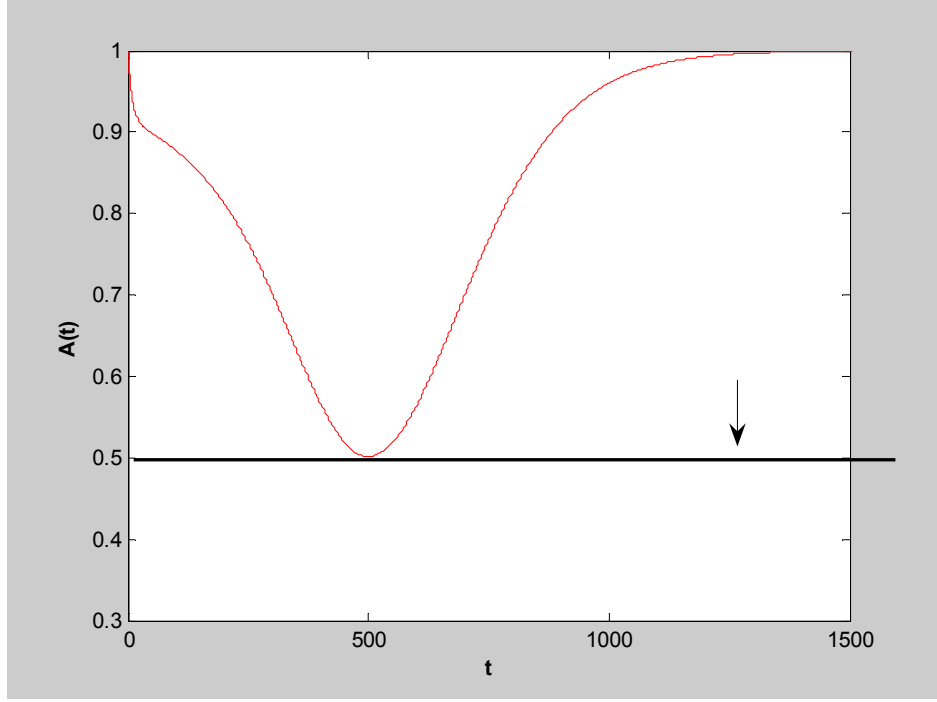


Şekil 6.33 Normal $A(t)$ $c=40$, $\mu = 100$, $\sigma = 25$, $a=1.1$, $\lambda = 10,15,20$, $\rho = 2.5$, $b=0.90$
(Geometrik-Geometrik)

Şekil 6.33’de diğer değişkenler sabit iken, ilk tamir aralığı ortalamasının üç farklı değerinin, kullanılabilirlik üzerindeki etkisi görülmektedir. İlk tamir aralığı ortalaması 10 iken, ilk başta kullanılabilirlik en büyük değere sahipken, sürecin sonlarına doğru en düşük kullanılabilirlik değerine sahip olmaktadır.

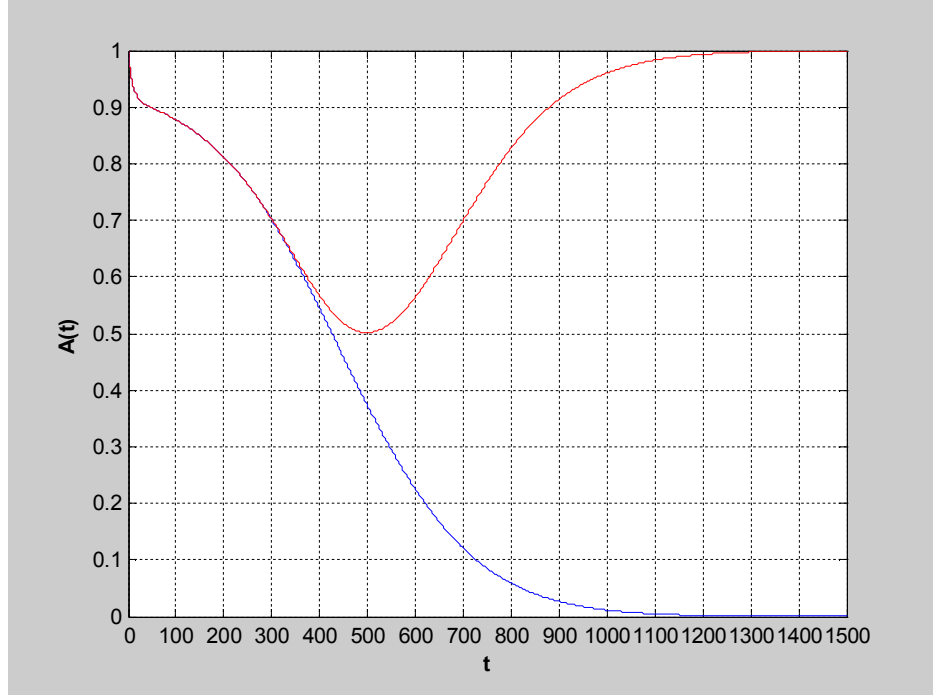
6.6 Noktasal Kullanılabilirlik Hata Fonksiyonu ve Kesinlik Derecesi

Hata fonksiyonunun hesaplanması Kısım 5.3.2 ile verilmiştir. Hata fonksiyonu yardımıyla kullanılabilirlik yaklaşımı için maksimum hata elde edilebilir. Bu durumu bir örnek üzerinde açıklayalım. Kısım 6.1’deki dördüncü durumu göz önüne alalım. Çalışma ve tamir süreleri üstel dağılımlı geometrik süreç oluşturmaktadır. Kullanılabilirlik için oluşturulan üst sınır aşağıdaki şekilde verilmektedir.



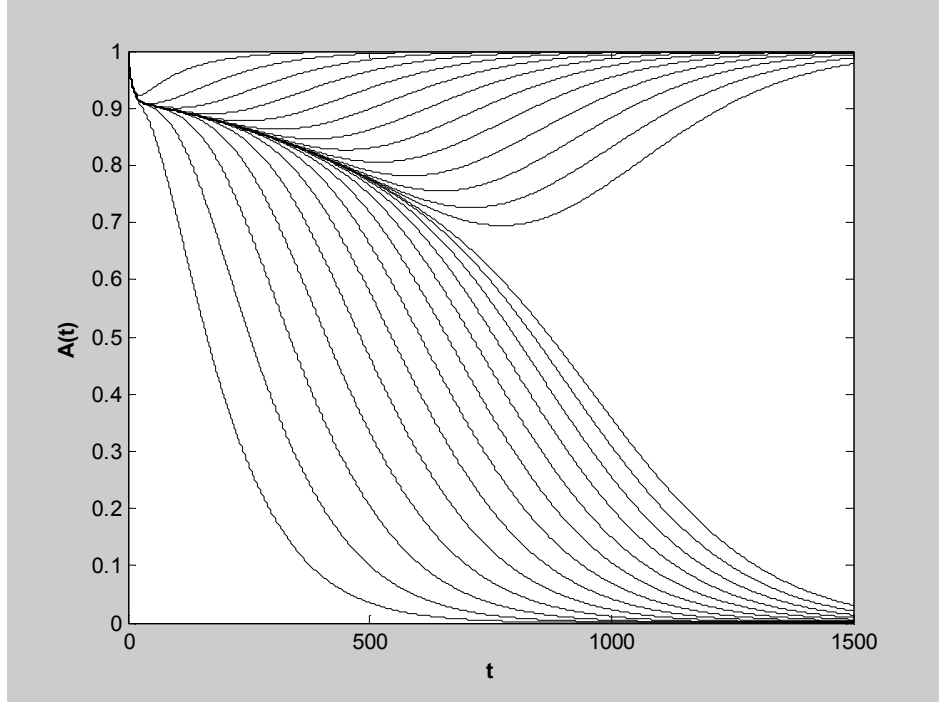
Şekil 6.34 Üstel $A(t)$ Üst Sınır $c=13$, $\lambda = 0.01$, $\mu = 0.1$, $a=1.3$, $b=0.90$
(Geometrik-Geometrik)

Şekil 6.34'de kullanılabilirliğin üst sınırı için kabul edilebilir en küçük hata gösterilmiştir. Alt sınır 0'dan daha küçük bir değer alamayacaktır ve herhangi bir c değeri için yaklaşımın kesinlik derecesi zamanla düşecektir. Bu nedenle, bahsi geçen hata değeri, bu değere ulaşıncaya kadar geçen periyot için kullanılabilirliğin maksimum hatasını verir.



Şekil 6.35 Üstel $A(t)$ $c=13$, $\lambda = 0.01$, $\mu = 0.1$, $a=1.3$, $b=0.90$ (Geometrik-Geometrik)

Kesme değerinin (c) artması kullanılabilirliğin iki yaklaşımının birbirlerinden ayrılma süresini uzatmaktadır. Azalan c değeri ise zıt yönde etki yapmaktadır. Her iki yaklaşım fonksiyonu için de $t=300$ değerine kadar kullanılabilirlik fonksiyonu kesinlik gösterir. Söz konusu değerden sonra ise iki fonksiyon hızla birbirinden ayrılmaya başlar ve kullanılabilirliğin gerçek değeri için iyi bir gösterge olmaz. $t>300$ için tahminde bulunmak istendiğinde, c değerinin artırılması mantıklı olacaktır (Şekil 6.35).



Şekil 6.36 Üstel $A(t)$ $c=1, \dots, 13$, $\lambda = 0.01$, $\mu = 0.1$, $a=1.3$, $b=0.90$
(Geometrik-Geometrik)

Yaklaşım fonksiyonunun kesme değerine göre davranışı Şekil 6.36’da gösterilmiştir. c değeri arttıkça, kullanılabilirlik yaklaşım fonksiyonunun kesinlik derecesi artar. Buradaki en iyi yaklaşım, $c=13$ olduğundaki sınırları kapsar. Bu durum Şekil 6.35’de açık olarak gösterilmiştir. Şekil 6.35’deki bu iki yaklaşım fonksiyonu kullanılabilirlik için en iyi sınırları oluşturur ve bu sınırlar uzun dönemde gerçek kullanılabilirlik değerine çok yakın bir yaklaşım sağlar.

7. SONUÇ

Bu çalışmada öncelikle yenileme süreçleri ve geometrik süreçler tanıtılmıştır. Daha sonra bir sistemin herhangi bir t zamanında çalışması olasılığını ifade eden noktasal kullanılabilirlik kavramı üzerinde durulmuştur. İki ayrı yoldan noktasal kullanılabilirlik için ifadeler elde edilmiştir. Bu ifadelerin kesin değerlerini elde etmek zor olduğundan, söz konusu ifadeler gerçek noktasal kullanılabilirlik değeri için sınırlar geliştirmede kullanılmıştır. Bu sınırlar çalışma ve/veya tamir sürelerinin yenileme süreci ve/veya geometrik süreç oluşturdukları varsayımları altında hesaplanmıştır. Tamir sürelerini modellemede geometrik süreç varsayımı, minimal veya kusursuz tamir varsayımlarına göre çok daha gerçekçidir.

Hesaplanan sınırlar üstel, gama ve normal dağılımlı çalışma ve tamir süreleri üzerinde uygulanmıştır. Gözlenen durumlarda sınırlar elde edilebilmesi için noktasal kullanılabilirlik ifadesinde yer alan sonsuz toplamlar bir kesme değer ile sınırlandırılmıştır. Anılan kesme değerinin, çalışma ve tamir sürelerinin oluşturduğu geometrik süreç oranlarının ve dağılım parametrelerinin kullanılabilirlik yaklaşımına etkileri ayrıntılı olarak işlenmiştir. Sadece çalışma ve tamir sürelerinin normal dağıldığı varsayımı altında kullanılabilirlik fonksiyonunun kapalı formdaki ifadelerine ulaşılabilmektedir. Burada da diğer durumlarda olduğu gibi sayısal sonuçlar elde edebilmek için, kullanılabilirlik fonksiyonundaki sonsuz toplamın kısıtlanması gerekmektedir.

Kullanılabilirlik için oluşturulan alt sınır, daha çok çalışma sürelerine bağlı olarak hesaplandığından, çalışma süreleri parametresindeki bir değişim alt sınırdaki daha belirgin bir değişime neden olur. Aynı şekilde üst sınır, daha çok tamir sürelerine göre oluşturulduğundan, tamir sürelerindeki herhangi bir değişim üst sınır üzerinde daha belirgin bir değişime yol açar.

KAYNAKLAR

- Aydoğdu, H. 1997. Yenileme Süreçlerinde Tahmin. Doktora Tezi. Ankara niversitesi , 153s, Ankara.
- Barlow, R.E. and Proschan, F. 1981. Statistical Theory of Reliability and Life Testing. Mc Ardle Pres, Inc., 290 s., MD.
- Cox, D. R. 1962. Renewal Theory. Methen and Co, London.
- Gamiz, M.L. and Roman, Y. 2008. Non-parametric Estimation of the Availability in a General Repairable System. Reliability Eng. System Saf., 93; 1188-1196.
- Grimmett, G.R. and Stirzaker, D.R. 1992. Probability and Random Processes, Second edition, Clarendon Press, Oxford.
- Bateman, H. 1953. Higher Transcendental Functions, Volume I, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York.
- Karlin, S. and Taylor, H. M. 1975. A First Course in Stochastic Processes. Second edition. Acedemic Press, 557, New York.
- Kawata, T. 1972. Fourier Analysis in Probability Theory. Acedemic Pres,New York.
- Kumar, U.D. and Knezevic, J. 1998. Availability Based Spare Optimization Using Renewal Process. Reliability Eng. System Saf., 59; 217-223.
- Lam, Y. 1988 "Geometric Processes and Replacement Problem". Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 4:366-377.
- Pham- Gia, T. and Turkkan, N. 1999. System Availability in a Gamma Alternating Renewal Process. Naval Res. Logistics, 46; 822-844.

Rehmert, I.J. 2000. Availability Analysis for the Quasi-Renewal Process, Ph.D. Dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, Department of Industrial and Systems Engineering, 125 s., Virginia.

Ross, M. S. 1983. Stochastic Processes. John Wiley & Sons, 510, New York.

Smith, W. L. 1958. Renewal Theory and Its Ramifications. J. Roy. Statis. Soc. B, Volume 20, 243-302.

Zhang, Y. L. 2007. A geometrical process repair model for a repairable system with delayed repair. Computers and Mathematics with Applications, doi:10.1016/j.camwa.2007.06.020.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Nihan ODABAŞI

Doğum Yeri : Samsun

Doğum Tarihi : 08.10.1985

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Dr. Binnaz Rıdvan Ege Anadolu Lisesi (1996-2003)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi

İstatistik Bölümü (2003-2007)

Anadolu Üniversitesi İktisat Fakültesi

İktisat Bölümü (2005-2009)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

İstatistik Anabilim Dalı (Eylül 2007- Ağustos 2010)

Çalıştığı Kurum ve Yıl

T.C. Başbakanlık Dış Ticaret Müsteşarlığı (2008-)