

T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇİZGİ YÖRÜNGELERİNİN EĞRİLİK TEORİSİ ÜZERİNE

Hasan KARATAŞ

Danışman: Doç. Dr. Nihat AYYILDIZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA – 2011

TEZ ONAYI

Hasan KARATAŞ tarafından hazırlanan “Çizgi Yörüngelerinin Eğrilik Teorisi Üzerine” adlı tez çalışması aşağıdaki juri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Süleyman Demirel Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Nihat AYYILDIZ
Süleyman Demirel Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



Juri Üyeleri : Doç. Dr. Ahmet YÜCESAN
Süleyman Demirel Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



Juri Üyeleri : Yrd. Doç. Dr. Murat KEMAL KARACAN
Uşak Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



Doç.Dr. Mehmet Cengiz KAYACAN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	<i>i</i>
ÖZET.....	<i>ii</i>
ABSTRACT.....	<i>iii</i>
TEŞEKKÜR.....	<i>iv</i>
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	<i>v</i>
SIMGELER DİZİNİ.....	<i>vi</i>
1. GİRİŞ.....	1
2. FRENET ve JEODEZİK ÇATILAR ARASINDAKİ İLİŞKİLER.....	2
2.1. Regle Yüzey.....	2
2.2. Bir Regle Yüzeyin Doğal Üçlüstü.....	2
2.3. Merkezi Normal Yüzey.....	6
2.4. Jeodezik Çatı ile Frenet Çatısı Arasındaki İlişki.....	8
2.5. Bir Regle Yüzeyin Şekli.....	9
2.6. Regle Yüzeyin Cebirsel Değişmezleri.....	10
3. BISHOP ÇATISI.....	18
3.1. Bishop Çatısı ile Jeodezik Çatı Arasındaki İlişki.....	20
3.2. Bishop Çatısına Göre Regle Yüzeyin Eğrilik Fonksiyonları.....	21
3.3. Bishop Çatısına Göre Regle Yüzeyin Cebirsel Değişmezleri.....	23
4. KAYNAKLAR.....	29
5. ÖZGEÇMİŞ.....	31

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÇİZGİ YÖRÜNGELERİNİN EĞRİLİK TEORİSİ ÜZERİNE

Hasan KARATAŞ

Süleyman Demirel Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Nihat AYYILDIZ

Bir hareketli katı cisimde yönlendirilmiş bir doğru, Öklid 3–uzayında bir regle yüzey üretir. Regle yüzeye hareketli katı cismin çizgi yörüngesi denir.

Bu tez çalışmasında temel amaç Öklid 3–uzayında çizgi yörüngelerinin eğrilik teorisini geliştirmektir.

Tez çalışması üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çizgi yörüngelerinin tarihsel gelişimi hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, regle yüzeylerin diferansiyel geometrisi geliştirilmeye çalışılmıştır.

Bir regle yüzeyin şeklini belirleyen skalar eğrilik fonksiyonları türetilmiş ve bu fonksiyonları hesaplamak için açık formüller verilmiştir.

Üçüncü bölümde, uzay hareketi ile meydana gelen bir çizgi yörüngesinin özellikleri Bishop çatısına göre incelenmiş ve regle yüzeyin şeklini karakterize eden eğrilik fonksiyonları için bazı formüller bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Bishop çatısı, Jeodezik çatı, Regle yüzey.

2011, 31 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON THE CURVATURE THEORY OF LINE TRAJECTORIES

Hasan KARATAŞ

Süleyman Demirel University

Graduate School of Applied and Natural Sciences

Mathematics Department

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Nihat AYYILDIZ

An oriented line in a moving rigid body generates a ruled surface in Euclidean 3–space. The ruled surface is called the line trajectory of the moving rigid body.

In this dissertation, the basic objective is to develop a curvature theory of line trajectories in Euclidean 3–space.

The thesis is composed of three chapters.

In the first chapter, historical development of line trajectories is given.

In the second chapter, the differential geometry of ruled surfaces is tried to develop. The scalar curvature functions that define the shape of a ruled surface are derived and the explicit formulas for computing these functions are given

In the third chapter, the properties of line trajectory generated by spatial motion is examined with respect to Bishop frame and some formulas for the curvature functions that characterize the shape of a ruled surface are found.

Key Words: Bishop frame, Geodesic frame, Ruled surface.

2011, 31 pages

TEŐEKKÖR

Bu çalıőmanın belirlenmesi ve yűrűtűlmesi esnasında ilgi ve alakasını esirgemeyen, tecrűbelerinden ve bilgilerinden faydalandıđım, ortaya çıkan her tűrlű bilimsel problemin özűmünde devamlı yardımlarımı gördűđüm ve çalıőmanın her aőamasında beni destekleyen deđerli hocam Doç. Dr. Nihat AYYILDIZ'a teőekkűr ve saygılarımı sunarım.

Bu çalıőmayı hazırlarken benden manevi desteklerini esirgemeyen aileme minnet ve űkranlarımı sunarım.

Hasan KARATAŞ
ISPARTA, 2011

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. $\{T, \mathcal{G}, X\}$ ve $\{T, N, B\}$ referans çatılarının yönü.....	9
Şekil 2.2. $L(\varphi, t)$ regle yüzeyi.....	15

SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{R}	Reel sayılar cismi
\mathbb{R}^3	Öklid 3 – uzayı
$L(\varphi, t)$	Regle yüzey
$C(\varphi)$	$L(\varphi, t)$ regle yüzeyin striksiyon eğrisi
\mathcal{G}	$L(\varphi, t)$ regle yüzeyin asimptotik normalı
T	$L(\varphi, t)$ regle yüzeyin merkezi normalı
X	$L(\varphi, t)$ regle yüzeyin yönü
H	Ortalama eğrilik fonksiyonu
K	Gauss eğrilik fonksiyonu
κ	Eğrilik
τ	Torsiyon
S	Şekil operatörü
$L_T(s, t)$	Merkezi normal yüzey
U_T	Merkezi normal yüzeyin birim normalı
γ, Γ, Δ	$L(\varphi, t)$ regle yüzeyinin eğrilik fonksiyonları

1. GİRİŞ

Bir katı cisim üzerindeki farklı elemanlar, farklı yörüngeler meydana getirir. Genel olarak, bir hareketli katı cismin üzerindeki bir yönlendirilmiş doğru Öklid 3–uzayda bir regle yüzey oluştururken, bir noktanın yörüngesi de bir uzay eğrisi meydana getirir (Schaaf, 1988).

Çizgi yörüngelerinin eğrilik teorisi, regle yüzeyin şeklini karakterize etmeyi araştırır. Bu teoriye, 1914 yılında çizgi yörüngeleri için iyi bilinen Euler-Savary denkleminin bir genellemesini veren Disteli, 1976 yılında doğruların eğrilik teorisinin dual formüllerini detaylı bir şekilde inceleyen Veldkamp, bir regle yüzeyin yüksek mertebeden eğriliklerini elde etmek için bu formülü genelleyen Kirson (1975) önemli katkılar sağlamıştır (McCarthy, 1987).

Bir regle yüzey bir C^∞ yüzeyin özel durumu olduğundan bu yüzeyin diferansiyel geometrisi vektör hesabının teknikleri kullanılarak geliştirilir. 1981 yılında McCarthy ve Roth, uzay kinematiklerinde çizgi yörüngelerinin skalar eğrilik teorisini elde etmek için bu yaklaşımı kullanmıştır. Aynı zamanda 1987 yılında McCarthy, bir regle yüzeyin eğrilik teorisinin hem skalar hem de dual formüllerini elde etmiş ve bu iki formül arasında bağıntılar vermiştir (McCarthy ve Roth, 1981).

Richard Bishop tarafından, 1975 yılında yayınlanan "There is more than one way to frame a curve" başlıklı makaleden sonra yazarın adı ile anılan Bishop çatısı, bir eğrinin hareketini tanımlamak için alternatif bir yaklaşımdır. Son zamanlarda Öklid ve Minkowski 3–uzayda Bishop çatısı ile ilgili çalışmalar artmaya başlamıştır. Bu çalışmalar genellikle, Bishop çatısına göre eğrinin özellikleri veya karakterizasyonları üzerine olmuştur (Bükcü ve Karacan, 2010).

Bu tez çalışmasında, Öklid 3–uzayda regle yüzeyin eğrilik teorisinin skalar formülleri Bishop çatısı kullanılarak elde edildi. Böylece, bir regle yüzeyin Bishop çatısına göre eğrilik özellikleri ilk kez verilmiş oldu. Aynı zamanda, jeodezik çatı ile Bishop çatısı arasında bazı bağıntılar elde edildi.

2. FRENET ve JEODEZİK ÇATILAR ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Bu bölümde regle yüzeylerin diferansiyel geometrisi geliştirilmeye çalışılmıştır. Bir regle yüzeyin şeklini tanımlayan skalar eğrilik fonksiyonları türetilmiş ve bu fonksiyonları hesaplamak için açık formüller verilmiştir.

2.1. Regle Yüzey

Bir M katı cisim üzerinde p ve q gibi iki nokta verilsin. Bu noktaları birleştiren $l(t)$ doğrusu

$$l(t) = p + t(q - p) \quad (2.1)$$

denklemleri tanımlansın. Böylece; hareket parametresi φ , p noktasının yörüngesi $P(\varphi)$ ve q noktasının yörüngesi de $Q(\varphi)$ olmak üzere, $l(t)$ doğrusunun izlediği yörünge

$$\begin{aligned} L(\varphi, t) &= P(\varphi) + t(Q(\varphi) - P(\varphi)) \\ &= P(\varphi) + tX(\varphi) \end{aligned}$$

denklemleri tanımlanan bir regle yüzeydir. Bu regle yüzey $L(\varphi, t)$ ile gösterilsin. Burada $P(\varphi)$ uzay eğrisine $L(\varphi, t)$ regle yüzeyinin *dayanak eğrisi* denir ve $P(\varphi)$ regle yüzeyin bir genel uzay eğrisidir. $X(\varphi) = Q(\varphi) - P(\varphi)$ de $R = |p - q|$ yarıçaplı bir küre yüzeyi üzerindeki eğridir ve küresel gösterge olarak adlandırılır. $l(t)$ üzerinde seçilen p' ve q' noktalarının herhangi çifti, aynı küresel göstergeyi vereceğinden $X(\varphi)$ bir tektir. Bu durumda, sadece kürenin R yarıçapı değişir. Aksine, $\mu(\varphi)$ bir C^∞ fonksiyon olmak üzere $L(\varphi, t)$ üzerindeki herhangi

$$C(\varphi) = P(\varphi) + \mu(\varphi)X(\varphi) \quad (2.2)$$

eğrisi $L(\varphi, t)$ nin dayanak eğrisi olarak kullanılabileceğinden tek değildir (McCarthy, 1987).

2.2. Bir Regle Yüzeyin Doğal Üçlüsü

$L(\varphi, t)$ regle yüzeyinin U birim yüzey normali

$$U(\varphi, t) = \frac{\frac{\partial L}{\partial \varphi} \times \frac{\partial L}{\partial t}}{\left\| \frac{\partial L}{\partial \varphi} \times \frac{\partial L}{\partial t} \right\|} = \frac{\left[\frac{dP}{d\varphi} + t \frac{dX}{d\varphi} \right] \times X(\varphi)}{\left[\left(\frac{dP}{d\varphi} + t \frac{dX}{d\varphi} \right)^2 - \left(\left\langle \frac{dP}{d\varphi}, X \right\rangle \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

biçiminde belirlenir.

Kruppa (1957), bu bağıntıyı kullanarak, regle yüzeyin $L_x = L(\varphi_0, t)$ doğrusu boyunca $U(\varphi_0, t)$ birim normalinin $t \rightarrow -\infty$ limit yönüne yaklaştığını gösterdi. Asimptotik normal yön olarak isimlendirilen bu yön,

$$\mathcal{G} = \lim_{t \rightarrow -\infty} U(\varphi_0, t) = -\frac{\frac{dX}{d\varphi} \times X}{\left\| \frac{dX}{d\varphi} \right\|}$$

biçiminde tanımlanır. $t \rightarrow +\infty$ artarken U birim normali, L_x doğrusu etrafında 180° döner ve tamamıyla $-\mathcal{G}$ yönünü alır. U nun 90° döndüğü nokta L_x üzerinde regle yüzeyin striksiyon noktasıdır ve bu noktada U , \mathcal{G} ye diktir. Bu noktada U birim normalinin yönü

$$T = \frac{\frac{dX}{d\varphi}}{\left\| \frac{dX}{d\varphi} \right\|}$$

biçiminde gösterilir. T vektörüne $L(\varphi, t)$ regle yüzeyinin *merkezi normali* denir. Böylece tanımlanan $\{T, \mathcal{G}, X\}$ birim vektörlerinin üçlüsüne, sırasıyla, regle yüzeyin L_x doğrultmanı boyunca *merkezi normali*, *asimptotik normali* ve *yönü* denir. Bu üçlü $X(\varphi)$ küresel eğrisinin teğet-normal çatısı olarak isimlendirilir (McCarthy, 1987).

$L(\varphi, t)$ üzerindeki striksiyon noktalarının kümesine regle yüzeyin *striksiyon eğrisi* denir ve $C(\varphi)$ ile gösterilir. Striksiyon eğrisi, $P(\varphi)$ dayanak eğrisine göre

$$C(\varphi) = P(\varphi) - \frac{\left\langle \frac{dP}{d\varphi}, \frac{dX}{d\varphi} \right\rangle}{\left\langle \frac{dX}{d\varphi}, \frac{dX}{d\varphi} \right\rangle} X(\varphi) \quad (2.3)$$

bağıntısıyla tanımlanır. $L(\varphi, t)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi üzerinde bulunan $\{T, \mathcal{G}, X\}$ üçlüsü regle yüzeyin doğal üçlüsüdür.

Yüzeylerin diferansiyel geometrisi, yüzeyin yerel özelliklerini karakterize etmek için kendisine göre ölçülen yüzey üzerindeki bir doğal referans çatısının açısız değişimi kullanır. Genel yüzeyler karakteristik striksiyon eğrisini içermezken, bir regle yüzey striksiyon eğrisine sahiptir. Bu eğrinin varlığı $C(\varphi)$ de olduğu gibi $\{T, \mathcal{G}, X\}$ doğal üçlüsünün açısız ve konum değişiminin göz önüne alınmasına izin

verir (McCarthy, 1987).

$L(\varphi, t)$ regle yüzeyinin şekli φ parametresinin seçilişinden bağımsızdır. Bu nedenle bir standart parametrizasyon seçilebilir. Bunun için $X(\varphi)$ küresel göstergesinin yay uzunluğunu kullanmak uygundur. s yay uzunluğu parametresi

$$s(\varphi) = \int_0^\varphi \left\| \frac{dX}{d\varphi} \right\| d\varphi \quad (2.4)$$

denklemlerle tanımlanır. $\delta = \left\| \frac{dX}{d\varphi} \right\|$, $X(\varphi)$ nin hızı olarak adlandırılır. Eğer $\delta \neq 0$ ise o zaman $\varphi(s)$ değerini elde etmek için (2.4) denkleminin tersi alınabilir. Çünkü $X(\varphi(s)) = X(s)$ birim hızlıdır, yani $X(s)$ nin teğet vektörü birim büyüklüğe sahiptir.

$\{T, \mathcal{G}, X\}$ çatısının açılal değışimi, $\frac{dT}{ds}$ ve $\frac{d\mathcal{G}}{ds}$ nin T , \mathcal{G} ve X vektörlerine göre hesaplanması ile elde edilebilir.

$$\langle T, X \rangle = 0$$

ifadesinin her iki yanının s ye göre türevi alınırsa

$$\frac{d}{ds} \langle T, X \rangle = \langle \frac{dT}{ds}, X \rangle + \langle T, T \rangle = 0$$

olacağından

$$\langle \frac{dT}{ds}, X \rangle = -1$$

bulunur. γ fonksiyonu

$$\gamma = \langle \frac{dT}{ds}, \mathcal{G} \rangle$$

biçiminde tanımlanırsa, $X(\varphi)$ nin jeodezik Frenet denklemleri

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= -X + \gamma \mathcal{G}, \\ \frac{d\mathcal{G}}{ds} &= -\gamma T, \\ \frac{dX}{ds} &= T \end{aligned} \quad (2.5)$$

biçiminde olur (McCarthy, 1987).

γ fonksiyonu $X(\varphi)$ nin jeodezik eğrilik fonksiyonudur. (2.5) denkleminde $\{T, \mathcal{G}, X\}$ üçlüsünün bileşenlerine göre lineer diferansiyel denklemlerin kümesi olarak bakılabilir. Eğer γ jeodezik eğriliği özelleştirilirse, bu denklemler $X(\varphi)$ için çözülebilir. Bu yüzden γ tamamıyla $L(\varphi, t)$ nin küresel göstergesini karakterize eder.

$X(\varphi)$ ye göre γ için bir formül elde edilebilir: Öncelikle (2.4) denkleminde

$$ds = \left\| \frac{dX}{d\varphi} \right\| d\varphi$$

olduğundan,

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\left\| \frac{dX}{d\varphi} \right\|} = \frac{1}{\delta}$$

bağıntısı yardımıyla (2.5) denklemini göz önüne alırsa,

$$\begin{aligned} \gamma &= \left\langle \frac{dT}{ds}, \mathcal{G} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\left\| \frac{dX}{d\varphi} \right\|^2} \left\langle \frac{d^2 X}{d\varphi^2} \frac{d\varphi}{ds}, X \times \frac{dX}{d\varphi} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\left\| \frac{dX}{d\varphi} \right\|^3} \left\langle \frac{d^2 X}{d\varphi^2}, X \times \frac{dX}{d\varphi} \right\rangle \end{aligned}$$

biçiminde bulunur.

$\{T, \mathcal{G}, X\}$ üçlüsünün konum değişimi $\frac{dC}{ds}$ ile verilir. $\varphi, X(\varphi)$ nin s yay uzunluğu ile yer değiştirirse; $\{T, \mathcal{G}, X\}$ çatısına göre genişletilen $\frac{dC}{ds}$,

$$\frac{dC}{ds} = \left\langle \frac{dC}{ds}, T \right\rangle T + \left\langle \frac{dC}{ds}, \mathcal{G} \right\rangle \mathcal{G} + \left\langle \frac{dC}{ds}, X \right\rangle X$$

biçiminde yazılabilir. Diğer taraftan

$$C(\varphi) = P(\varphi) - \frac{\left\langle \frac{dP}{d\varphi}, \frac{dX}{d\varphi} \right\rangle}{\left\langle \frac{dX}{d\varphi}, \frac{dX}{d\varphi} \right\rangle} X(\varphi)$$

eşitliğinin her iki yanının φ ye göre türevi alınır ve zincir kuralı uygulanırsa

$$\frac{dC}{ds} = \frac{1}{\delta} \frac{dP}{d\varphi} - \frac{\left\langle \frac{dP}{d\varphi}, \frac{dX}{d\varphi} \right\rangle}{\left\langle \frac{dX}{d\varphi}, \frac{dX}{d\varphi} \right\rangle} T + \frac{1}{\delta} \frac{d\mu}{d\varphi} X$$

elde edilir. Buna göre, $\frac{dC}{ds}$ nin bileşenleri

$$\begin{aligned} \langle \frac{dC}{ds}, T \rangle &= 0, \\ \langle \frac{dC}{ds}, \mathcal{G} \rangle &= \frac{1}{\delta} \langle \frac{dP}{d\varphi}, \mathcal{G} \rangle = \Delta, \\ \langle \frac{dC}{ds}, X \rangle &= \frac{1}{\delta} (\langle \frac{dP}{d\varphi}, X \rangle + \frac{d\mu}{d\varphi}) = \Gamma \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Böylece

$$\frac{dC}{ds} = \Gamma X + \Delta \mathcal{G} \quad (2.6)$$

olur. Eğer (2.5) denkleminde X ve \mathcal{G} vektörleri bilinir ve Δ ile Γ fonksiyonları verilirse, (2.6) denklemi bir lineer diferansiyel denklemler kümesi olur. Bu durumda, denklem $C(s)$ için çözülebilir. Böylece; γ , Δ ve Γ fonksiyonları $L(\varphi, t)$ regle yüzeyini tamamıyla belirler. Bu yüzden γ , Δ ve Γ fonksiyonlarına $L(\varphi, t)$ yüzeyinin *eğrilik fonksiyonları* denir (McCarthy, 1987). X birim hızlı eğrisi için yüzey üzerindeki dayanak eğrisi $C(s) = P(s) + \mu(s)X(s)$ olmak üzere, (2.5) ve (2.6) denklemlerinden $L(\varphi, t)$ regle yüzeyinin dağılım parametresi

$$\lambda = \frac{\det(\frac{dC}{ds}, X, \frac{dX}{ds})}{\|\frac{dX}{ds}\|^2} = \frac{\det(\Gamma X + \Delta \mathcal{G}, X, T)}{\|T\|} = \Delta \quad (2.7)$$

dir (McCarthy, 1987).

2.3. Merkezi Normal Yüzey

$\{T, \mathcal{G}, X\}$ üçlüsü $L(\varphi, t)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi boyunca dönerken T ve \mathcal{G} vektörleri de $L(\varphi, t)$ ile uyumlu regle yüzeyler oluşturur. T vektörünün meydana getirdiği regle yüzeye $L(\varphi, t)$ nin *merkezi normal yüzeyi* denir ve $L_T(s, t)$ ile gösterilir (McCarthy, 1987).

Bu yüzey

$$L_T(s, t) = C(s) + tT(s) \quad (2.8)$$

denklemleriyle tanımlanır. $L_T(s, t)$ nin U_T birim yüzey normali

$$\begin{aligned}
U_T(s, t) &= \frac{\left(\frac{dC}{ds} + t\frac{dT}{ds}\right) \times T(s)}{\left[\left\langle \frac{dC}{ds} + t\frac{dT}{ds}, \frac{dC}{ds} + t\frac{dT}{ds} \right\rangle - \left\langle \frac{dC}{ds}, T \right\rangle \left\langle \frac{dC}{ds}, T \right\rangle\right]^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{(\Gamma X + \Delta \mathcal{G} + t(-X + \gamma \mathcal{G})) \times T(s)}{\left[\left\langle \Gamma X + \Delta \mathcal{G} + t(-X + \gamma \mathcal{G}), \Gamma X + \Delta \mathcal{G} + t(-X + \gamma \mathcal{G}) \right\rangle\right]^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{-(\Delta + \gamma t)X + (\Gamma - t)\mathcal{G}}{((\Gamma - t)^2 + (\Delta + \gamma t)^2)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. $L_T(s, t)$ merkezi normal yüzeyinin N merkezi normal ve B asimptotik normali, sırasıyla,

$$N = \frac{1}{\kappa} \frac{dT}{ds}$$

ve

$$B = -\frac{1}{\kappa} \frac{dT}{ds} \times N$$

şeklinindedir. Burada $\kappa = \left\| \frac{dT}{ds} \right\|$ dir. Böylece, $L_T(s, t)$ nin doğal üçlüsü $\{T, N, B\}$ referans çatısı olur (McCarthy, 1987).

$L_T(s, t)$ merkezi normal yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$\mathcal{P}(s) = \frac{\left\langle \frac{dC}{ds}, \frac{dT}{ds} \right\rangle}{\left\| \frac{dT}{ds} \right\|^2} = \frac{-\Gamma + \Delta \gamma}{1 + \gamma^2} \quad (2.9)$$

olmak üzere

$$C_T(s) = C(s) - \mathcal{P}(s) T(s)$$

biçiminde olur.

$\{T, N, B\}$ Frenet çatısı, bir genel uzay eğrisi olarak göz önüne alınan $X(\varphi)$ küresel göstergesinin Frenet referans çatısı olur. $X(\varphi)$ nin eğrilik ve burulması, sırasıyla, κ ve τ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{ds} &= \kappa N, \\
\frac{dN}{ds} &= -\kappa T + \tau B, \\
\frac{dB}{ds} &= -\tau N
\end{aligned}$$

biçimindedir (O'Neill, 1997). Bu denklemler, $L_T(s, t)$ merkezi normal yüzeyin $\{T, N, B\}$ çatısının açısıl değişimini tanımlar. $\{T, N, B\}$; $C_T(s)$ striksiyon eğrisi boyunca dönerken $\{T, N, B\}$ üçlüsünün konum değişimi

$$\frac{dC_T(s)}{ds} = \langle \frac{dC_T(s)}{ds}, T \rangle T + \langle \frac{dC_T(s)}{ds}, N \rangle N + \langle \frac{dC_T(s)}{ds}, B \rangle B$$

biçiminde yazılabileceğinden,

$$\frac{dC_T(s)}{ds} = \frac{dC(s)}{ds} - \frac{d\mathcal{P}(s)}{ds}T - \mathcal{P}(s)\frac{dT}{ds}$$

olup, $\frac{dC_T(s)}{ds}$ nin bileşenleri;

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \langle \frac{dC_T(s)}{ds}, T \rangle = -\frac{d\mathcal{P}(s)}{ds}, \\ \mathcal{K} &= \langle \frac{dC_T(s)}{ds}, B \rangle = \frac{\Delta + \Gamma\gamma}{\kappa} \end{aligned} \quad (2.10)$$

ve

$$\langle \frac{dC_T(s)}{ds}, N \rangle = \kappa \left(\frac{-\Gamma + \gamma\Delta}{\kappa^2} \right) - \kappa\mathcal{P}(s) = 0$$

ifadelerinden

$$\frac{dC_T(s)}{ds} = \mathcal{K}B + \mathcal{T}T$$

elde edilir. κ , τ , \mathcal{K} ve \mathcal{T} fonksiyonları; γ , Δ , Γ fonksiyonlarının $L(\varphi, t)$ yi karakterize ettiği gibi $L_T(s, t)$ merkezi normal yüzeyini karakterize eder (McCarthy, 1987).

2.4. Jeodezik Çatı ile Frenet Çatısı Arasındaki İlişki

$\{T, \mathcal{G}, X\}$ ve $\{T, N, B\}$ referans çatılarının yönü

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{\kappa} \frac{dT}{ds} = \frac{\gamma}{\kappa} \mathcal{G} - \frac{1}{\kappa} X \\ B &= T \times N = \frac{1}{\kappa} \mathcal{G} + \frac{\gamma}{\kappa} X \end{aligned} \quad (2.11)$$

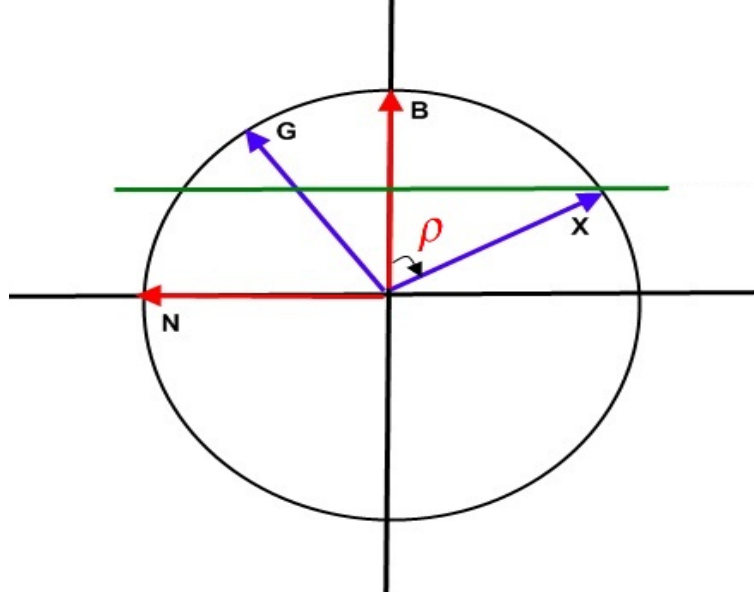
bağıntılarıyla verilsin. Buna göre, X ve B vektörleri arasındaki açı ρ olmak üzere

$$\begin{aligned} N &= -\sin \rho X + \cos \rho \mathcal{G} \\ B &= \cos \rho X + \sin \rho \mathcal{G} \end{aligned} \quad (2.12)$$

şeklindedir. Böylece (2.11) ve (2.12) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\rho = \arcsin\left(\frac{1}{\kappa}\right)$$

bulunur.



Şekil-2.1. $\{T, \mathcal{G}, X\}$ ve $\{T, N, B\}$ referans çatılarının yönü

ρ açısı, B vektöründen X vektörüne ölçülen $X(\varphi)$ nin küresel eğrilik yarıçapıdır. γ, κ, τ fonksiyonları bağımsız değildirler. Bu fonksiyonlar arasındaki bağıntılar, (2.10) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \kappa &= \left\| \frac{dT}{ds} \right\| = \sqrt{1 + \gamma^2}, \\ \tau &= -\frac{d\rho}{ds} \end{aligned} \quad (2.13)$$

biçiminde bulunur. Yüzeyin γ, Δ ve Γ eğrilik fonksiyonları; (2.9), (2.10) ve (2.13) denklemlerinden elde edilir. Böylece $\rho, \kappa, \mathcal{K}$ ve \mathcal{P} fonksiyonlarının kümesi $L(\varphi, t)$ regle yüzeyini tamamiyle karakterize eder (McCarthy, 1987).

2.5. Bir Regle Yüzeyin Şekli

Yukarıda elde edilen sonuçlar, $C(\varphi)$ striksiyon eğrisi boyunca geçen ve $X(\varphi)$ boyunca yönlendirilmiş bir L_x doğrusunun hareketine göre $L(\varphi, t)$ yüzeyinin şeklinin bir kinematik yorumunu vermektten uzaktır. Özel olarak, $\varphi = \varphi_0$ anında

L_x in hızı; L_x in \mathcal{G} boyunca ötelenmesi ile birlikte L_x in \mathcal{G} merkezi teğet vektörü etrafında ani dönmesiyle verilir. Bu iki değer in oranı, (2.7) denkleminde tanımlanan $L(\varphi, t)$ regle yüzeyinin dağılma parametresi olarak bilinen Δ fonksiyonudur.

L_x in çizdiği yolun eğriliği, $L(\varphi, t)$ nin T merkezi normalı boyunca L_T doğrusunun hızının göz önüne alınmasıyla kolayca tanımlanabilir. L_T doğrusu, L_T nin B merkezi teğeti boyunca \mathcal{K} lineer hızı ve κ açısal hızıyla ötelenir ve döner. Bu değerlerin oranı $L_T(s, t)$ merkezi normal yüzeyinin $\Delta_T = \frac{\mathcal{K}}{\kappa}$ dağılma parametresidir. $L_T(s, t)$ yüzeyinin merkezi teğeti boyunca olan doğru L_B dir. (2.8)

denklemindeki L_T doğrusu, L_B ve L_x doğrularının her ikisini de dik olarak keser. Verilen \mathcal{P} , L_B den L_x doğrusuna olan uzaklıktır.

Merkezi normal yüzeyin merkezi teğeti olan L_B doğrusu; L_x , L_B civarında $\Delta_T = \frac{\mathcal{K}}{\kappa}$ açılım uzunluğu ile döner. Bu yüzden yerel olarak $L(\varphi, t)$ regle yüzeyi; L_B ye göre ρ açılı ve \mathcal{P} uzaklıkta bulunan L_x doğrusuyla, L_B eksenini civarında Δ_T açılım uzunluğunun bir vida hareketi boyunca izlenir. L_B ye $L(\varphi, t)$ regle yüzeyin *Disteli eksenini* denir (McCarthy, 1987).

2.6. Regle Yüzeyin Cebirsel Değişmezleri

Bu kesimde $L(\varphi, t)$ regle yüzeyinin S şekil operatörü ile K Gauss eğriliği, H ortalama eğriliği, temel formları gibi temel cebirsel değişmezleri araştırılacaktır. Burada elde edilen sonuçlar orijinaldir.

$L(\varphi, t)$ regle yüzeyi

$$L(\varphi, t) = P(\varphi) + tX(\varphi)$$

biçiminde verilsin. Buna göre

$$\Delta = \frac{1}{\delta} \langle \frac{dP}{d\varphi}, \mathcal{G} \rangle ; \Gamma = \frac{1}{\delta} \langle \frac{dP}{d\varphi}, X \rangle + \frac{d\mu}{d\varphi} ; \mu = -\frac{1}{\delta} \langle \frac{dP}{d\varphi}, T \rangle$$

eşitlikleri göz önüne alırsa,

$$\frac{dP}{d\varphi} = (\Gamma\delta - \frac{d\mu}{d\varphi})X - \mu\delta T + \Delta\delta\mathcal{G}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} L_\varphi &= \frac{dP(\varphi)}{d\varphi} + t \frac{dX(\varphi)}{d\varphi} \\ &= \left(\Gamma\delta - \frac{d\mu}{d\varphi}\right)X + \delta(t - \mu)T + \Delta\delta\mathcal{G}, \end{aligned}$$

ve

$$L_t = X(\varphi)$$

olduğundan $L(\varphi, t)$ regle yüzeyinin U birim normal vektör alanı

$$U = \frac{L_\varphi \times L_t}{\|L_\varphi \times L_t\|} = \frac{(0, \Delta, \mu - t)}{\sqrt{\Delta^2 + (\mu - t)^2}}$$

biçiminde elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} E &= \langle L_\varphi, L_\varphi \rangle = \left(\Gamma\delta - \frac{d\mu}{d\varphi}\right)^2 + \delta^2(\Delta^2 + (t - \mu)^2), \\ F &= \langle L_\varphi, L_t \rangle = \left(\Gamma\delta - \frac{d\mu}{d\varphi}\right), \\ G &= \langle L_t, L_t \rangle = 1 \end{aligned}$$

ifadelerinden $L(\varphi, t)$ regle yüzeyinin I . temel formu, yüzeyin eğrilik fonksiyonlarına göre

$$\begin{aligned} I &= Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi dt + Gdt^2 \\ &= \left(\left(\Gamma\delta - \frac{d\mu}{d\varphi}\right)^2 + \delta^2(\Delta^2 + (t - \mu)^2)\right)d\varphi^2 + 2\left(\Gamma\delta - \frac{d\mu}{d\varphi}\right)d\varphi dt + dt^2 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi de $L(\varphi, t)$ yüzeyi için bir diğer cebirsel değişmez olan ikinci temel formu bulalım. Burada

$$\begin{aligned} L_{\varphi\varphi} &= \delta\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\varphi} - \frac{\partial^2\mu}{\delta\partial\varphi^2} - \delta(t - \mu)\right)X + \delta\left(\Gamma\delta - 2\frac{\partial\mu}{\partial\varphi} - \gamma\delta\Delta\right)T \\ &\quad + \delta\left(\delta\gamma(t - \mu) + \frac{\partial\Delta}{\partial\varphi}\right)\mathcal{G}, \\ L_{t\varphi} &= \delta T, \\ L_{tt} &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
e &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \det (L_\varphi, L_t, L_{\varphi\varphi}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\Delta^2+(t-\mu)^2}} (\Delta(\Gamma\delta^2 - 2\delta\frac{\partial\mu}{\partial\varphi} - \Delta\gamma\delta^2) - \gamma\delta^2 (t-\mu)^2 - \delta(t-\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi}), \\
f &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \det (L_\varphi, L_t, L_{\varphi t}) = \frac{\delta\Delta}{\sqrt{\Delta^2+(t-\mu)^2}}, \\
g &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \det (L_\varphi, L_t, L_{tt}) = 0
\end{aligned}$$

bulunur. O halde $L(\varphi, t)$ regle yüzeyinin ikinci temel formu

$$\begin{aligned}
II &= ed\varphi^2 + 2fd\varphi dt + gdt^2 \\
&= \frac{\delta}{\sqrt{\Delta^2+(t-\mu)^2}} (\Delta(\Gamma\delta - 2\frac{\partial\mu}{\partial\varphi} - \Delta\gamma\delta) - \gamma\delta(t-\mu)^2 - (t-\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi})d\varphi^2 \\
&\quad + \frac{2\delta\Delta}{\sqrt{\Delta^2+(t-\mu)^2}} d\varphi dt
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Yukarıdaki hesaplamalar göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{fF-eG}{EG-F^2}, \\
a_{12} &= \frac{gF-fG}{EG-F^2}, \\
a_{21} &= \frac{eF-fE}{EG-F^2}, \\
a_{22} &= \frac{fF-gE}{EG-F^2}
\end{aligned}$$

olmak üzere $L(\varphi, t)$ regle yüzeyinin şekil operatörü

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

şeklindedir (DoCarmo, 1976). Böylece S şekil operatörü matrisinin bileşenleri

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{1}{\Delta^2+(t-\mu)^2}(\Delta(\frac{\partial\mu}{\partial\varphi} + \Delta\gamma\delta) + \gamma\delta(t-\mu)^2 + (t-\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi}), \\
a_{12} &= -\frac{\Delta}{\Delta^2+(t-\mu)^2}, \\
a_{21} &= \frac{1}{\Delta^2+(t-\mu)^2} \left[(\Delta(\Gamma\delta - 2\frac{\partial\mu}{\partial\varphi} - \Delta\gamma\delta) - \gamma\delta(t-\mu)^2 - (t-\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi})(\Gamma\delta - \frac{d\mu}{d\varphi}) \right. \\
&\quad \left. - \Delta(\Gamma\delta - \frac{d\mu}{d\varphi})^2 - \delta^2\Delta(\Delta^2 + (t-\mu)^2) \right], \\
a_{22} &= \frac{\Delta}{\Delta^2+(t-\mu)^2}(\Gamma\delta - \frac{d\mu}{d\varphi})
\end{aligned}$$

şeklinde verilir. O halde regle yüzeyin cebirsel değişmezlerinden olan Gauss ve ortalama eğriliği, sırasıyla,

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = -\frac{\delta\Delta^2}{(\Delta^2+(t-\mu)^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.15)$$

ve

$$H = \frac{eG-2fF+gE}{EG-F^2} = \frac{-\gamma\delta(\Delta^2+(t-\mu)^2)-(t-\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi}-\Delta\Gamma\delta}{2(\Delta^2+(t-\mu)^2)} \quad (2.16)$$

biçimindedir.

Örnek 2.1. $L(\varphi, t)$ regle yüzeyi

$$L(\varphi, t) = (2 \cos \varphi, 2 \sin \varphi, \varphi) + t(\sin \varphi, -\cos \varphi, 0)$$

şeklinde verilsin. Buna göre $L(\varphi, t)$ yüzeyinin doğrultmanı

$$X(\varphi) = (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0)$$

olur. Böylece

$$\frac{dX}{d\varphi} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$$

olduğundan, $X(\varphi)$ nin hızı

$$\delta = \left\| \frac{dX}{d\varphi} \right\| = 1$$

şeklinde bulunur. Diğer taraftan $L(\varphi, t)$ yüzeyinin merkezi normali

$$T(\varphi) = \frac{\frac{dX}{d\varphi}}{\left\| \frac{dX}{d\varphi} \right\|} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0),$$

asimptotik normali de

$$\mathcal{G} = X \times T = (0, 0, 1)$$

şeklinde elde edilir. O halde (2.5) denklemi göz önüne alınırsa $X(\varphi)$ nin küresel göstergesinin jeodezik eğrilik fonksiyonu

$$\gamma = 0$$

ve eğriliği de

$$\kappa = \left\| \frac{dT}{d\varphi} \right\| = 1$$

şeklinde bulunur. Diğer taraftan B ile X arasındaki ρ açısı da

$$\rho = \frac{\pi}{2}$$

şeklinde olur. $B = \frac{1}{\kappa}\mathcal{G} + \frac{\gamma}{\kappa}X$ ve $\frac{dB}{d\varphi} = -\tau N$ bağıntıları yardımıyla τ bulunabilir.

Buna göre

$$\frac{dB}{d\varphi} = \frac{1}{\kappa}(-\gamma T) + \frac{\gamma}{\kappa}T = 0$$

olduğundan $\tau = 0$ dır. Diğer taraftan, $L(\varphi, t)$ yüzeyinin striksiyon eğrisi $P(\varphi) = (2 \cos \varphi, 2 \sin \varphi, \varphi)$ baz eğrisine göre

$$C(\varphi) = P(\varphi) + \mu X(\varphi) = P(\varphi) - \frac{\langle \frac{dP}{d\varphi}, \frac{dX}{d\varphi} \rangle}{\langle \frac{dX}{d\varphi}, \frac{dX}{d\varphi} \rangle} X(\varphi)$$

biçiminde yazılır. Burada

$$\mu = -\frac{\langle \frac{dP}{d\varphi}, \frac{dX}{d\varphi} \rangle}{\langle \frac{dX}{d\varphi}, \frac{dX}{d\varphi} \rangle} = \frac{\langle (-2 \sin \varphi, 2 \cos \varphi, 1), (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \rangle}{1} = 0$$

olup $\frac{d\mu}{d\varphi} = 0$ dır. Bu nedenle, $C(\varphi)$ striksiyon eğrisi $L(\varphi, t)$ yüzeyinin baz eğrisi

olarak alınabilir. O halde $L(\varphi, t)$ yüzeyinin Γ eğrilik fonksiyonu ve Δ dağılma parametresi, sırasıyla,

$$\Gamma = \frac{1}{\delta} \left(\left\langle \frac{dP}{d\varphi}, X \right\rangle + \frac{d\mu}{d\varphi} \right) = -2$$

ve

$$\Delta = \frac{1}{\delta} \left\langle \frac{dP}{d\varphi}, \mathcal{G} \right\rangle = 1$$

şeklinde olur. Ayrıca bu yüzeyin merkezi normal yüzeyinin striksiyon eğrisi,

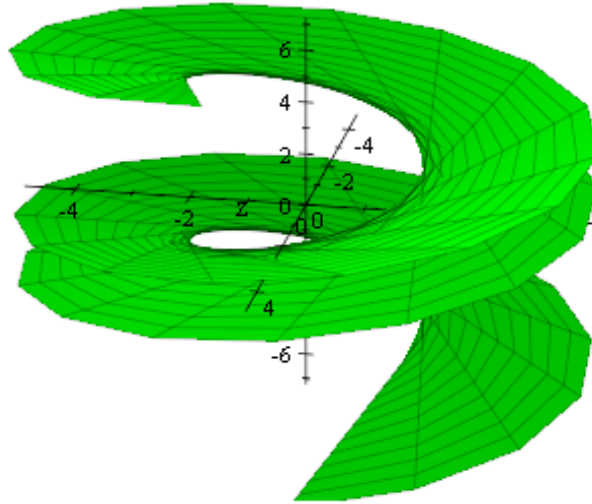
$$C_T(s) = C(s) - \frac{-\Gamma + \Delta\gamma}{1 + \gamma^2} T(s) = (0, 0, \varphi)$$

olarak bulunur ve

$$\mathcal{T} = 0,$$

$$\mathcal{K} = 1$$

dir.



Şekil-2.2. $L(\varphi, t)$ regle yüzeyi

Şimdi, $L(\varphi, t)$ yüzeyinin *I.* ve *II.* temel formları incelenebilir. Bunun için önce yüzeyin φ ve t parametrelerine göre türevi alınırsa;

$$L_\varphi = (-2 \sin \varphi, 2 \cos \varphi, 1) + t(\cos \varphi, \sin \varphi, 0),$$

$$L_t = (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0)$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} E &= \langle L_\varphi, L_\varphi \rangle = 5 + t^2, \\ F &= \langle L_\varphi, L_t \rangle = -2, \\ G &= \langle L_t, L_t \rangle = 1 \end{aligned}$$

olduğundan, I . temel form

$$\begin{aligned} I &= Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi dt + Gdt^2 \\ &= (5 + t^2)d\varphi^2 - 4d\varphi dt + dt^2 \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. İkinci temel formu bulmak için öncelikle yüzeyin ikinci mertebeden $L_{\varphi\varphi}$, $L_{t\varphi}$ ve L_{tt} kısmi türevlerinin bilinmesi gerekir. Buna göre

$$\begin{aligned} L_{\varphi\varphi} &= (-2 \cos \varphi, -2 \sin \varphi, 0) + t(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \\ L_{t\varphi} &= (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \\ L_{tt} &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

ve

$$\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \det(L_\varphi, L_t, L_{\varphi\varphi}) = \frac{-2}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}, \\ f &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \det(L_\varphi, L_t, L_{\varphi t}) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}, \\ g &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \det(L_\varphi, L_t, L_{tt}) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$II = \frac{-2}{\sqrt{t^2+1}}d\varphi^2 + \frac{2}{\sqrt{t^2+1}}d\varphi dt$$

biçiminde bulunur. Diğer taraftan E, F, G, e, f, g ifadeleri yardımıyla $L(\varphi, t)$ yüzeyinin şekil operatörü

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \\ -\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} & -\frac{2}{\sqrt{t^2+1}} \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Böylece yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliği, sırasıyla,

$$K = \frac{1}{(t^2 + 1)^2}$$

ve

$$H = -\frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

şeklinde olur.

3. BISHOP ÇATISI

Bu bölümün amacı, uzay hareketi ile meydana gelen bir çizgi yörüngesinin özelliklerini Bishop çatısına göre incelemek ve böylece uzay kinematiklerine uygulanabilir bir formda regle yüzeylerin diferansiyel özelliklerini geliştirmektir. Ayrıca, regle yüzeyin şeklini karakterize eden eğrilik fonksiyonları için bazı formüller bulmaktır.

Öklid 3–uzayda çatılanabilir bir $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisini göz önüne alalım. Bishop ve Frenet çatıları aşağıdaki gibi iki adi diferansiyel denklem sistemiyle tanımlanabilir. β eğrisi s yay uzunluğu parametresine bağlı olmak üzere Frenet çatısı

$$\begin{bmatrix} \frac{dT}{ds} \\ \frac{dN}{ds} \\ \frac{dB}{ds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

biçiminde verilir. Burada T , β eğrisinin birim teğet vektör alanı, N asli normal vektör alanı, B de binormal vektör alanıdır (Bishop, 1975).

Tanım 3.1. Bir eğri boyunca bir M normal vektör alanının türevi teğetsel ise M ye *relatif paralel vektör alanı* denir (Bishop, 1975).

Tanım 3.2. Bir C^2 regüler eğrisi üzerindeki relatif paralel vektör alanları yönlendirilmiş 1–boyutlu teğetsel kısım ve 2–boyutlu normal kısımdan oluşan \mathbb{R} cismi üzerinde 3–boyutlu bir vektör uzayı meydana getirir. Bu vektör uzayın bir ortonormal bazına *relatif paralel adapte edilmiş çatı* denir (Bishop, 1975).

$\{T, M_1, M_2 = T \times M_1\}$, C^2 sınıftan uzay eğrisinin relatif paralel adapte edilmiş çatısı olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} \langle T, T \rangle &= \langle M_1, M_1 \rangle = \langle M_2, M_2 \rangle = 1 \\ \langle T, M_1 \rangle &= \langle T, M_2 \rangle = \langle M_1, M_2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

olacağından çatının s yay uzunluğuna göre değişimi

$$\begin{bmatrix} \frac{dT}{ds} \\ \frac{dM_1}{ds} \\ \frac{dM_2}{ds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

biçiminde verilir. Böylece her $s \in I$ için reel değerli κ fonksiyonu

$$\kappa = \left\| \frac{dT}{ds} \right\| = \|k_1 M_1 + k_2 M_2\| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$$

olacak şekilde β nin eğrilik fonksiyonudur. Burada k_1 ve k_2 Bishop çatısının doğal eğrilikleri olup

$$k_1 = \kappa \cos \theta \text{ ve } k_2 = \kappa \sin \theta$$

biçimindedir. Burada θ , M_1 normal vektör alanı ile N asli normal vektör alanı arasındaki açıdır. O halde

$$N = \cos \theta M_1 + \sin \theta M_2$$

şeklinde yazılır (Bishop, 1975). Buna göre

$$\tan \theta = \frac{k_2}{k_1}$$

elde edilir. Böylece

$$\theta = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right) \quad (3.2)$$

olur (McCreary, 1998). Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \frac{dN}{ds} &= -\frac{d\theta}{ds} \sin \theta M_1 + \cos \theta \frac{dM_1}{ds} + \frac{d\theta}{ds} \cos \theta M_2 + \sin \theta \frac{dM_2}{ds} \\ &= \frac{d\theta}{ds} (-\sin \theta M_1 + \cos \theta M_2) - \kappa T \\ &= -\kappa T + \tau B \end{aligned}$$

olduğundan Frenet bağıntılarından

$$B = -\sin \theta M_1 + \cos \theta M_2$$

ve

$$\tau = \frac{d\theta}{ds}$$

bulunur (Bishop, 1975). (3.2) denkleminin s ye göre türevi alınırsa (k_1, k_2) eğrisi için

$$\tau = \frac{d\theta}{ds} = \frac{k_1 k_2' - k_1' k_2}{k_1^2 + k_2^2}$$

elde edilir (McCreary, 1998). Buna göre $\theta = \int \tau ds$ şeklinde bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \frac{dB}{ds} &= -\frac{d\theta}{ds} \cos \theta M_1 - \sin \theta \frac{dM_1}{ds} - \frac{d\theta}{ds} \sin \theta M_2 + \cos \theta \frac{dM_2}{ds} \\ &= -\frac{d\theta}{ds} (\cos \theta M_1 + \sin \theta M_2) = -\tau N \end{aligned}$$

ve

$$\frac{dT}{ds} = k_1 M_1 + k_2 M_2 = \kappa \cos \theta M_1 + \kappa \sin \theta M_2 = \kappa N$$

olduğundan

$$\begin{bmatrix} \frac{dT}{ds} \\ \frac{dN}{ds} \\ \frac{dB}{ds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa \cos \theta & \kappa \sin \theta \\ -\kappa & -\frac{d\theta}{ds} \sin \theta & \frac{d\theta}{ds} \cos \theta \\ 0 & -\frac{d\theta}{ds} \cos \theta & -\frac{d\theta}{ds} \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılır. O halde Frenet ve Bishop çatısı (relatif adapte edilmiş çatı) arasında

$$\begin{aligned} T &= T \\ N &= \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} M_1 + \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} M_2 \\ B &= -\frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} M_1 + \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} M_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

şeklinde bir bağıntı vardır (Bishop, 1975).

3.1 Bishop Çatısı ile Jeodezik Çatı Arasındaki İlişki

Bu kesimde Bishop çatısı ve jeodezik çatı arasındaki ilişkiler incelenecektir. Oluş-

turulacak olan regle yüzeyin eğrilik fonksiyonları ve değişmezleri Bishop çatısı kullanılarak bulunacaktır. Burada elde edilen sonuçlar orijinaldir.

2. Bölümde Frenet çatısı ve jeodezik çatı arasında

$$\begin{aligned} T &= T \\ N &= \frac{\gamma}{\kappa} \mathcal{G} - \frac{1}{\kappa} X \\ B &= \frac{1}{\kappa} \mathcal{G} + \frac{\gamma}{\kappa} X \end{aligned}$$

bağıntısı elde edilmiştir. Buna göre (3.3) denklemi göz önüne alınırsa, jeodezik çatı ile Bishop çatısı arasında

$$\begin{aligned} T &= T, \\ \mathcal{G} &= a_1 M_1 + a_2 M_2, \\ X &= -a_2 M_1 + a_1 M_2 \end{aligned}$$

bağıntıları vardır. Burada

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\gamma \cos \theta - \sin \theta}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \\ a_2 &= \frac{\gamma \sin \theta + \cos \theta}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

dir.

3.2. Bishop Çatısına Göre Regle Yüzeyin Eğrilik Fonksiyonları

Bu bölümde uzay hareketi ile meydana gelen bir çizgi yörüngesinin özellikleri Bishop çatısına göre incelenecektir. Hareket parametresi φ olmak üzere, $L(\varphi, t)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi $C(\varphi)$ ve $C(\varphi)$ eğrisi üzerinde relatif paralel adapte edilmiş çatı da $\{T, M_1, M_2\}$ olsun. $\{T, M_1, M_2\}$ üçlüsünün konum değişimi $\frac{dC}{ds}$ ile verilir. φ , $-a_2 M_1 + a_1 M_2$ nin s yay uzunluğu ile yer değiştirirse; $\{T, M_1, M_2\}$ çatısına göre genişletilen $\frac{dC}{ds}$,

$$\frac{dC}{ds} = \left\langle \frac{dC}{ds}, T \right\rangle T + \left\langle \frac{dC}{ds}, M_1 \right\rangle M_1 + \left\langle \frac{dC}{ds}, M_2 \right\rangle M_2$$

biçiminde yazılabilir. Diğer taraftan (2.2) denklemi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} C(\varphi) &= P(\varphi) + \mu(\varphi) X(\varphi) \\ &= P(\varphi) - a_2 \mu(\varphi) M_1 + a_1 \mu(\varphi) M_2 \end{aligned}$$

olur. Bu denklemin her iki tarafının s ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{dC}{ds} &= \frac{1}{\delta} \frac{dP}{d\varphi} + \frac{1}{\delta} \frac{d\mu}{d\varphi} (-a_2 M_1 + a_1 M_2) + \mu(\varphi) \left(-a_2 \frac{dM_1}{ds} + a_1 \frac{dM_2}{ds} \right) \\ &= \frac{1}{\delta} \frac{dP}{d\varphi} + \frac{(-a_2 M_1 + a_1 M_2)}{\delta} \frac{d\mu}{d\varphi} + \mu(\varphi) T \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre $\frac{dC}{ds}$ nin bileşenleri

$$\begin{aligned} \langle \frac{dC}{ds}, T \rangle &= \frac{1}{\delta} \langle \frac{dP}{d\varphi}, T \rangle + \mu(\varphi) \langle T, T \rangle = 0, \\ \langle \frac{dC}{ds}, M_1 \rangle &= \frac{1}{\delta} \langle \frac{dP}{d\varphi}, M_1 \rangle - \frac{a_2}{\delta} \frac{d\mu}{d\varphi} = \tilde{\Gamma}, \\ \langle \frac{dC}{ds}, M_2 \rangle &= \frac{1}{\delta} \langle \frac{dP}{d\varphi}, M_2 \rangle + \frac{a_1}{\delta} \frac{d\mu}{d\varphi} = \tilde{\Delta} \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Böylece

$$\frac{dC}{ds} = \tilde{\Gamma} M_1 + \tilde{\Delta} M_2 \quad (3.5)$$

şeklinde bulunur. Eğer (3.4) denklemde M_1 ve M_2 vektörleri bilinirse ve $\tilde{\Delta}$ ile $\tilde{\Gamma}$ fonksiyonları verilirse (3.5) denklemi bir lineer diferansiyel denklemler kümesi olur. Bu durumda denklem $C(s)$ için çözülebilir. Böylece $L(\varphi, t)$ regle yüzeyinin γ , $\tilde{\Delta}$ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilik fonksiyonları yüzeyi, Bishop çatısına göre tamamıyla belirler. Diğer taraftan

$$\frac{dC}{ds} = \Gamma X + \Delta \mathcal{G}$$

ile (3.5) deklemini göz önüne alınırsa, $L(\varphi, t)$ regle yüzeyinin Bishop ve Jeodezik çatıya göre eğrilik fonksiyonları arasında

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} &= -a_2 \Gamma + a_1 \Delta, \\ \tilde{\Delta} &= a_1 \Gamma + a_2 \Delta \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\Gamma &= -a_2\tilde{\Gamma} + a_1\tilde{\Delta}, \\ \Delta &= a_1\tilde{\Gamma} + a_2\tilde{\Delta}\end{aligned}\tag{3.6}$$

bağıntıları vardır. Ayrıca bu regle yüzeyin dağılma parametresine $\tilde{\lambda}$ denilirse

$$\tilde{\lambda} = \frac{\det\left(\frac{dC}{ds}, X, \frac{dX}{ds}\right)}{\left\|\frac{dX}{ds}\right\|^2} = \begin{vmatrix} \tilde{\Gamma} & \tilde{\Delta} & 0 \\ -a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \tilde{\Gamma}a_1 + \tilde{\Delta}a_2$$

olur. Buna göre Bishop ve jeodezik çatıya göre regle yüzeyin eğrilik fonksiyonları göz önüne alınrsa, dağılma parametresi de

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\Gamma}a_1 + \tilde{\Delta}a_2 = \Delta$$

şeklinde yazılır.

3.3. Bishop Çatısına Göre Regle Yüzeyin Cebirsel Değişmezleri

Bu bölümde $L(\varphi, t)$ regle yüzeyinin relatif paralel adapte edilmiş çatıya göre \tilde{S} şekil operatörü, \tilde{K} Gauss eğriliği, \tilde{H} ortalama eğriliği, \tilde{I} . ve \tilde{II} . temel formları gibi temel cebirsel değişmezleri araştırılacaktır. $L(\varphi, t)$ regle yüzeyi

$$L(\varphi, t) = P(\varphi) + t(-a_2M_1 + a_1M_2)$$

şeklinde verilsin. Buna göre

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma} &= \frac{1}{\delta} \langle \frac{dP}{d\varphi}, M_1 \rangle - \frac{a_2}{\delta} \frac{d\mu}{d\varphi}, \\ \tilde{\Delta} &= \frac{1}{\delta} \langle \frac{dP}{d\varphi}, M_2 \rangle + \frac{a_1}{\delta} \frac{d\mu}{d\varphi}, \\ \mu &= -\frac{1}{\delta} \langle \frac{dP}{d\varphi}, T \rangle\end{aligned}$$

eşitlikleri göz önüne alınrsa,

$$\frac{dP}{d\varphi} = (\delta\tilde{\Gamma} + a_2\frac{d\mu}{d\varphi})M_1 + (\delta\tilde{\Delta} - a_1\frac{d\mu}{d\varphi})M_2 - \delta\mu T$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
L_\varphi(\varphi, t) &= \frac{dP(\varphi)}{d\varphi} + t \frac{d(-a_2 M_1 + a_1 M_2)}{d\varphi} \\
&= \delta(t - \mu) T + (\delta \tilde{\Gamma} + a_2 \frac{d\mu}{d\varphi}) M_1 + (\delta \tilde{\Delta} - a_1 \frac{d\mu}{d\varphi}) M_2, \\
L_t(\varphi, t) &= -a_2 M_1 + a_1 M_2
\end{aligned}$$

olduğundan $L(\varphi, t)$ regle yüzeyinin \tilde{U} birim normal vektör alanı

$$\tilde{U} = \frac{L_\varphi(\varphi, t) \times L_t(\varphi, t)}{\|L_\varphi(\varphi, t) \times L_t(\varphi, t)\|} = \frac{(-a_1(t-\mu), -a_2(t-\mu), a_1 \tilde{\Gamma} + a_2 \tilde{\Delta})}{((t-\mu)^2 + (a_1 \tilde{\Gamma} + a_2 \tilde{\Delta})^2)^{\frac{1}{2}}}$$

şeklinde elde edilir. O halde

$$\tilde{h} = \|L_\varphi \times L_t\|^2 = (\delta^2 (t - \mu)^2 + \delta^2 (a_1 \tilde{\Gamma} + a_2 \tilde{\Delta})^2)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\tilde{E} = \langle L_\varphi, L_\varphi \rangle &= (\delta(-a_2 \tilde{\Gamma} + a_1 \tilde{\Delta}) - \frac{d\mu}{d\varphi})^2 + \tilde{h}, \\
\tilde{F} = \langle L_\varphi, L_t \rangle &= (-a_2 \tilde{\Gamma} + a_1 \tilde{\Delta}) \delta - \frac{d\mu}{d\varphi}, \\
\tilde{G} = \langle L_t, L_t \rangle &= 1
\end{aligned}$$

olur. Bu ifadeler göz önüne alınırsa $L(\varphi, t)$ regle yüzeyinin \tilde{I} . temel formu, yüzeyin eğrilik fonksiyonlarına göre

$$\begin{aligned}
\tilde{I} &= \tilde{E} d\varphi^2 + 2\tilde{F} d\varphi dt + \tilde{G} dt^2 \\
&= ((\delta(-a_2 \tilde{\Gamma} + a_1 \tilde{\Delta}) - \frac{d\mu}{d\varphi})^2 + \tilde{h}) d\varphi^2 + 2((-a_2 \tilde{\Gamma} + a_1 \tilde{\Delta}) \delta - \frac{d\mu}{d\varphi}) d\varphi dt + dt^2
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Şimdi de $L(\varphi, t)$ yüzeyi için bir diğer cebirsel değişmez olan

ikinci temel formu bulalım. Burada

$$\begin{aligned}
L_{\varphi\varphi} &= (\delta \frac{d\tilde{\Gamma}}{d\varphi} + a_2 \frac{d^2\mu}{d\varphi^2})M_1 + (\delta\tilde{\Gamma} + a_2 \frac{d\mu}{d\varphi})(-k_1T) \\
&\quad (\delta\tilde{\Delta} - a_1 \frac{d\mu}{d\varphi})M_2 + (\delta\tilde{\Delta} - a_1 \frac{d\mu}{d\varphi})(-k_2T) \\
&\quad -\delta \frac{d\mu}{d\varphi}T + \delta(t-\mu)(k_1M_1 + k_2M_2) \\
&= (-\delta(k_1\tilde{\Gamma} + k_2\tilde{\Delta}) - (1+\delta)\frac{d\mu}{d\varphi})T \\
&\quad + (\delta \frac{d\tilde{\Gamma}}{d\varphi} + a_2 \frac{d^2\mu}{d\varphi^2} + \delta(t-\mu)k_1)M_1 \\
&\quad + (\delta\tilde{\Delta} - a_1 \frac{d\mu}{d\varphi} + \delta(t-\mu)k_2)M_2
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
L_{t\varphi} &= -a_2(-k_1T) + a_1(-k_2T) = T, \\
L_{tt} &= (0, 0, 0)
\end{aligned}$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{e} &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2}} \det(L_\varphi, L_t, L_{\varphi\varphi}) \\
&= \frac{((a_1\tilde{\Gamma}+a_2\tilde{\Delta})((-a_2\tilde{\Gamma}+a_1\tilde{\Delta})\delta^2-2\delta\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}-(a_1\tilde{\Gamma}+a_2\tilde{\Delta})\gamma\delta^2)-\gamma\delta^2(t-\mu)^2-\delta(t-\mu)(a_1\frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial\varphi}+a_2\frac{\partial\tilde{\Delta}}{\partial\varphi}))}{\sqrt{(t-\mu)^2+(a_1\tilde{\Gamma}+a_2\tilde{\Delta})^2}}, \\
\tilde{f} &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2}} \det(L_\varphi, L_t, L_{\varphi t}) = \frac{\delta(a_1\tilde{\Gamma}+a_2\tilde{\Delta})}{\sqrt{\delta^2(t-\mu)^2+\delta^2(a_1\tilde{\Gamma}+a_2\tilde{\Delta})^2}}, \\
\tilde{g} &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2}} \det(L_\varphi, L_t, L_{tt}) = 0
\end{aligned}$$

bulunur. O halde $L(\varphi, t)$ regle yüzeyinin ikinci temel formu

$$\begin{aligned}
\tilde{II} &= \tilde{e}d\varphi^2 + 2\tilde{f}d\varphi dt + \tilde{g}dt^2 \\
&= \frac{((a_1\tilde{\Gamma}+a_2\tilde{\Delta})((-a_2\tilde{\Gamma}+a_1\tilde{\Delta})\delta^2-2\delta\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}-(a_1\tilde{\Gamma}+a_2\tilde{\Delta})\gamma\delta^2)-\gamma\delta^2(t-\mu)^2-\delta(t-\mu)(a_1\frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial\varphi}+a_2\frac{\partial\tilde{\Delta}}{\partial\varphi}))}{\sqrt{(t-\mu)^2+(a_1\tilde{\Gamma}+a_2\tilde{\Delta})^2}}d\varphi^2 \\
&\quad + \frac{2\delta(a_1\tilde{\Gamma}+a_2\tilde{\Delta})}{\sqrt{\delta^2(t-\mu)^2+\delta^2(a_1\tilde{\Gamma}+a_2\tilde{\Delta})^2}}d\varphi dt
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki hesaplamalar göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{11} &= \frac{\tilde{f}\tilde{F}-\tilde{e}\tilde{G}}{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2}, \\
\tilde{a}_{12} &= \frac{\tilde{g}\tilde{F}-\tilde{f}\tilde{G}}{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2}, \\
\tilde{a}_{21} &= \frac{\tilde{e}\tilde{F}-\tilde{f}\tilde{E}}{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2}, \\
\tilde{a}_{22} &= \frac{\tilde{f}\tilde{F}-\tilde{g}\tilde{E}}{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2},
\end{aligned}$$

şeklinde isimlendirilirse $L(\varphi, t)$ regle yüzeyinin şekil operatörü

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

şeklindedir. Böylece \tilde{S} şekil operatörü matrisinin bileşenleri

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} &= \frac{1}{\Delta^2 + (t-\mu)^2} ((a_1\tilde{\Gamma} + a_2\tilde{\Delta})(\frac{\partial\mu}{\partial\varphi} + (a_1\tilde{\Gamma} + a_2\tilde{\Delta})\gamma\delta) + \gamma\delta(t-\mu)^2 \\ &\quad + (t-\mu)(a_1\frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial\varphi} + a_2\frac{\partial\tilde{\Delta}}{\partial\varphi})), \\ \tilde{a}_{12} &= -\frac{\Delta}{(a_1\tilde{\Gamma} + a_2\tilde{\Delta})^2 + (t-\mu)^2}, \\ \tilde{a}_{21} &= \frac{1}{(a_1\tilde{\Gamma} + a_2\tilde{\Delta})^2 + (t-\mu)^2} \left[((a_1\tilde{\Gamma} + a_2\tilde{\Delta})((-a_2\tilde{\Gamma} + a_1\tilde{\Delta})\delta - 2\frac{\partial\mu}{\partial\varphi} - \Delta\gamma\delta) \right. \\ &\quad - \gamma\delta(t-\mu)^2 - (t-\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi}((-a_2\tilde{\Gamma} + a_1\tilde{\Delta})\delta - \frac{\partial\mu}{\partial\varphi}) \\ &\quad - (a_1\tilde{\Gamma} + a_2\tilde{\Delta})((-a_2\tilde{\Gamma} + a_1\tilde{\Delta})\delta - \frac{\partial\mu}{\partial\varphi})^2 \\ &\quad \left. - \delta^2(a_1\tilde{\Gamma} + a_2\tilde{\Delta})((a_1\tilde{\Gamma} + a_2\tilde{\Delta})^2 + (t-\mu)^2) \right], \\ \tilde{a}_{22} &= \frac{(a_1\tilde{\Gamma} + a_2\tilde{\Delta})}{(a_1\tilde{\Gamma} + a_2\tilde{\Delta})^2 + (t-\mu)^2} ((-a_2\tilde{\Gamma} + a_1\tilde{\Delta})\delta - \frac{\partial\mu}{\partial\varphi}) \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Buna göre regle yüzeyin cebirsel değişmezlerinden olan Gauss ve ortalama eğriliği, sırasıyla,

$$\tilde{K} = \frac{\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} = -\frac{\delta(a_1\tilde{\Gamma} + a_2\tilde{\Delta})^2}{((a_1\tilde{\Gamma} + a_2\tilde{\Delta})^2 + (t-\mu)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \frac{\tilde{e}\tilde{G} - 2\tilde{f}\tilde{F} + \tilde{g}\tilde{E}}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} \\ &= \frac{-\gamma\delta((a_1\tilde{\Gamma} + a_2\tilde{\Delta})^2 + (t-\mu)^2) - (t-\mu)(a_1\frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial\varphi} + a_2\frac{\partial\tilde{\Delta}}{\partial\varphi}) - (a_1\tilde{\Gamma} + a_2\tilde{\Delta})(-a_2\tilde{\Gamma} + a_1\tilde{\Delta})\delta}{2((a_1\tilde{\Gamma} + a_2\tilde{\Delta})^2 + (t-\mu)^2)} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 3.1. $\theta = \frac{\pi}{2}$ için $L(\varphi, t)$ regle yüzeyi

$$L(\varphi, t) = (2 \cos \varphi, 2 \sin \varphi, \varphi) + t(\sin \varphi, -\cos \varphi, 0)$$

şeklinde verilsin. Buna göre $L(\varphi, t)$ yüzeyinin doğrultmanı

$$X(\varphi) = (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0),$$

merkezi normal

$$T(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0),$$

asimptotik normal

$$\mathcal{G} = (0, 0, 1)$$

şeklinde. Buna göre $X(\varphi)$ nin küresel göstergesinin jeodezik eğriliği

$$\gamma = 0,$$

eğriliği de

$$\kappa = \left\| \frac{dT}{d\varphi} \right\| = 1$$

olur. Diğer taraftan $X(\varphi)$ nin hızı

$$\delta = \left\| \frac{dX}{d\varphi} \right\| = 1$$

biçiminde bulunur. Böylece (3.4) denkleminde

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\gamma \cos \theta - \sin \theta}{\kappa} = -1, \\ a_2 &= \frac{\gamma \sin \theta + \cos \theta}{\kappa} = 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde (3.5) denklemi yardımıyla Bishop çatısı

$$\begin{aligned} T &= (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \\ M_1 &= (0, 0, -1), \\ M_2 &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Buna göre $L(\varphi, t)$ yüzeyinin eğrilik fonksiyonları

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma} &= \frac{1}{\delta} \left\langle \frac{dP}{d\varphi}, M_1 \right\rangle - \frac{a_2}{\delta} \frac{d\mu}{d\varphi} = -1, \\ \tilde{\Delta} &= \frac{1}{\delta} \left\langle \frac{dP}{d\varphi}, M_2 \right\rangle + \frac{a_1}{\delta} \frac{d\mu}{d\varphi} = 2\end{aligned}$$

şeklinde olur. Böylece $L(\varphi, t)$ regle yüzeyinin cebirsel invariantları $\tilde{I} = I$, $\tilde{II} = II$, $\tilde{S} = S$, $\tilde{K} = K$, $\tilde{H} = H$ biçiminde bulunur.

4. KAYNAKLAR

- Bishop, R. L., 1975. More Than One Way to Frame a Curve. The American Mathematical Monthly, 82(3), 246 – 251.
- Bükcü, B., Karacan, M. K., 2010. On Natures of Bishop Frame. Journal of Vectorial Relativity, 5 (4) , 34 – 41.
- Bükcü, B., Karacan, M. K., 2009. The Slant Helices According to Bishop Frame. International Journal of Computational and Mathematical Sciences 3(2), 63 – 66.
- Disteli, M., 1914. Über das Analogon der Savaryschen Formel und Konstruktion in der Kinematischen Geometrie des Raumes. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 62, 261 – 309.
- DoCarmo, M. P., 1976. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, 503p. New Jersey.
- Kirson, Y., 1975. Higher Order Curvature Theory for Space Kinematics. PhD Dissertation, University of California, 140p. Berkeley.
- Kruppa, E., 1957. Analytische und Konstruktive Differentialgeometrie. Springer-Verlag. 191p.
- McCarthy, J. M., Roth, B. , 1981. The Curvature Theory of Line Trajectories in Spatial Kinematics. ASME Journal of Mechanical Design, 103(4), 718 – 724.
- McCarthy, J. M., 1987. On the Scalar and Dual Formulation of The Curvature Theory of Line Trajectories. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design , Transactions of the ASME , 109(1), 101 – 106.
- McCreary , P. R., 1998. Visualizing Riemann Surface. Urbana, Ph. D. Dissertation, University of Illinois at Urbana Champaign, 134p. Urbana, Illinois.

O'Neill, B., 1997. Elementary Differential Geometry. Academic Press, Inc.,
482 p. New York.

Schaaf, J. A., 1988. Curvature Theory of Line Trajectories in Spatial Kinematics.
Ph.D. Dissertation, University of California, 111p. Davis.

Veldkamp, G.R., 1976. On the Use of Dual Numbers, Vectors and Matrices
in Instantaneous Spatial Kinematics. Mechanism and Machine Theory,
11, 141 – 156.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hasan KARATAŞ
Doğum Yeri ve Yılı : Merkez / GAZİANTEP, 1986
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce



Eğitim Durumu :

Lise : Atatürk Lisesi, 2001-2004
Lisans : Süleyman Demirel Üniversitesi, 2005-2009
Yüksek Lisans : Süleyman Demirel Üniversitesi, 2009-2011