

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**PETRİ AĞLARI İLE İMALAT SİSTEMLERİNİN MODELLENMESİ VE
ANALİZİNDE YENİ BİR YAKLAŞIM**

**DOKTORA TEZİ
Fatih TÜYSÜZ**

Anabilim Dalı : Endüstri Mühendisliği

Programı : Endüstri Mühendisliği

HAZİRAN 2010

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**PETRİ AĞLARI İLE İMALAT SİSTEMLERİNİN MODELLENMESİ VE
ANALİZİNDE YENİ BİR YAKLAŞIM**

**DOKTORA TEZİ
Fatih TÜYSÜZ
(507042105)**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 05 Mayıs 2010

Tezin Savunulduğu Tarih : 24 Haziran 2010

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Cengiz KAHRAMAN (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ziya ULUKAN (GSÜ)
Doç. Dr. Tufan Vehbi KOÇ (İTÜ)
Doç. Dr. Orhan FEYZİOĞLU (GSÜ)
Yrd. Doç. Dr. Alp ÜSTÜNDAĞ (İTÜ)**

HAZİRAN 2010

ÖNSÖZ

Bu çalışmamda değerli katkılarını esirgemeyip, çalışmamın her aşamasında destek olan ve beni yönlendiren, akademik anlamda örnek aldığım danışman hocam Sayın Prof. Dr. Cengiz KAHRAMAN'a bana göstermiş olduğu ilgi ve sabır için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu günlere gelmemde büyük emeği olan, sevgilerini ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, bana olan inançlarını hiç kaybetmeyen ve en umutsuz anlarımda sürekli yanımda olan başta annem Hülya TÜYSÜZ olmak üzere tüm aileme teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ayrıca varlıklarıyla hayatıma değer katan ve bana olan desteklerini her zaman yanımda hissettiğim dostlarıma hayatımda oldukları için çok teşekkürler.

Haziran 2010

Fatih TÜYSÜZ
Endüstri Y. Mühendisi

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	iii
İÇİNDEKİLER	v
KISALTMALAR	vii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	ix
ŞEKİL LİSTESİ.....	xi
SEMBOL LİSTESİ.....	xiii
ÖZET.....	xv
SUMMARY	xix
1. GİRİŞ	1
1.1 Ele Alınan Problemin Tanımı ve Çalışmanın Amacı	1
1.2 Çalışmanın Kapsamı.....	3
1.3 Tez Organizasyonu	4
2. İMALAT SİSTEMLERİ VE MODELLEME.....	5
2.1 İmalat Kavramı ve İmalat Sistemlerinin Sınıflandırılması.....	5
2.2 Hücreyel İmalat ve Diğer İmalat Yaklaşımları.....	7
2.3 İmalatta Esneklik ve Esnek İmalat Hücresi Kavramı.....	8
2.4 İmalat Sistemlerinin Temel İlkeleri.....	12
2.5 İmalat Sistemlerinin Tasarım ve Analizinde Karşılaşılan Problemler	14
2.6 Model ve Modelleme Kavramı.....	17
3. PETRİ AĞLARI VE İMALAT SİSTEMLERİNDE MODELLEME	21
3.1 Petri Ağları ile İmalat Sistemlerinin Modellenmesi.....	21
3.2 Petri Ağlarının Tanımı ve Özellikleri.....	23
3.2.1 Petri ağlarının tanımı	23
3.2.2 Petri ağlarının özellikleri	27
3.3 Petri Ağlarında Analiz Yöntemleri.....	32
3.3.1 Ulaşılabilirlik analizi yöntemi	32
3.3.2 Değişmez değer analiz yöntemi	35
3.4 Petri Ağları ile Modelleme	37
3.4.1 Petri ağları ile genel modelleme yaklaşımı.....	38
3.4.2 Petri ağları ile sistematik modelleme yöntemleri	43
3.5 Petri Ağları ile İlgili Literatür Araştırması.....	51
4. PETRİ AĞLARINDA ZAMAN.....	59
4.1 Petri Ağlarında Zamanın Önemi	59
4.2 Petri Ağlarının Zaman Uzantıları	60
4.2.1 Zaman Petri ağları.....	60
4.2.2 Zamanlı Petri ağları	62
4.3 Deterministik Zamanlı Petri Ağları ve Analizi	66
5. STOKASTİK PETRİ AĞLARI.....	71
5.1 Petri Ağlarında Stokastiklik	71
5.2 Stokastik Petri Ağlarının Tanımı.....	73

5.3 Stokastik Petri Ağları ile Performans Analizi	75
5.4 Genelleştirilmiş Stokastik Petri Ağları	77
5.5 Genelleştirilmiş Stokastik Petri Ağlarının Tanımı ve Analizi.....	79
5.5.1 GSPA'nın tanımı.....	79
5.5.2 İşaretleme ve ateşleme kuralları.....	79
5.5.3 Durum uzayının elde edilmesi	80
5.5.4 Kararlı durum performansının tahmini	80
5.6 Deterministik ve Stokastik Petri Ağları.....	85
6. BULANIK PETRİ AĞLARI.....	87
6.1 Bulanık Kümeler Teorisi	87
6.2 Bulanık Aritmetik İşlemler.....	96
6.2.1 Bulanık sayılarla toplama ve çıkarma işlemleri.....	96
6.2.2 Bulanık sayılarla çarpma ve bölme işlemleri.....	98
6.3 Olasılık ve Olabilirlik Kavramları.....	100
6.4 Petri Ağlarında Bulanıklık.....	101
6.5 Bulanık Petri Ağları Yaklaşımları	104
6.5.1 Bulanık-zamanlamalı Petri ağları	104
6.5.2 Zaman-bulanık Petri ağları	106
7. ÖNERİLEN BULANIK-STOKASTİK PETRİ AĞLARI YAKLAŞIMI	109
7.1 Giriş	109
7.2 Bulanık Parametrelili Stokastik Petri Ağları Yöntemi Önerisi.....	109
7.2.1 Önerilen bulanık parametrelili stokastik PA yönteminin teorik altyapısı ve önemli kavramlar	111
7.2.2 Önerilen bulanık parametrelili stokastik PA yöntemi algoritması.....	114
7.3 Bulanık Parametrelili Stokastik Petri Ağları Yöntemi için Örnek Uygulama..	116
8. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	143
KAYNAKLAR.....	148
ÖZGEÇMİŞ.....	160

KISALTMALAR

PA	: Petri Ağı/Ağları
Hİ	: Hücresel İmalat
GT	: Grup Teknolojisi
EİS	: Esnek İmalat Sistemi
FMS	: Flexible Manufacturing System
SPA	: Stokastik Petri Ağı/Ağları
GSPA	: Genelleştirilmiş Stokastik Petri Ağı/Ağları
DSPA	: Deterministik ve Stokastik Petri Ağı/Ağları
OÜM	: Ortalama Üretim Miktarı
OKO	: Ortalama Kullanım Oranı
BTO	: Bozulma ve Tamir Oranı
OASM	: Ortalama Ara Stok Miktarı

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 3.1: C yinleme matrisi ve x bir tamsayı vektörü olmak üzere yapısal özellikler için gerek ve yeter koşullar	37
Çizelge 3.2: PA bileşenlerinin imalat sistemindeki karşılıkları.....	41
Çizelge 3.3: PA özellikleri ve imalat sistemindeki anlamları.....	42
Çizelge 3.4: İmalat kavramlarının PA modellerine çevrilmeleri.....	42
Çizelge 6.1: Olabilirliğe karşı olasılık	100
Çizelge 7.1: Modelde kullanılan konumlar, geçişler ve ateşleme hızları	119
Çizelge 7.2: Bulanıklaştırılmış geçiş ateşleme hızları ve α – kesim ifadeleri	121
Çizelge 7.3: Nihai bulanık kararlı durum olasılıkları ($k=1$ için).....	123
Çizelge 7.4: Nihai bulanık kararlı durum olasılıkları ($k=2$ için).....	129
Çizelge 7.5: Örnek esnek imalat sisteminin hesaplanan performans ölçüleri	138

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1: İmalat Sistemlerinin Sınıflandırılması.....	6
Şekil 3.1: İşaretli bir PA ve bileşenleri.....	26
Şekil 3.2: (a) Geçiş t_1 geçerli, (b) Geçerli geçiş t_1 oluştu.....	27
Şekil 3.3: Sınırlandırılmış, canlı ve geri dönebilir bir PA.....	35
Şekil 3.4: Ulaşılabilirlik grafiği.....	35
Şekil 3.5: Petri Ağlarında Temel İlişki Örnekleri :(a) Sırasal, (b) Eş Zamanlı, (c) Çatışan, (d) Döngüsel, (e) Birbiriyle Bağdaşmayan.....	40
Şekil 3.6: Esnek İmalatta Sıklıkla Kullanılan Petri Ağ Modülleri; (a) Kaynak/Operasyon, (b) Periyodik bakımı yapılan kaynak/operasyon, (c) Hata eğilimli kaynak/operasyon, (d) Öncelik, (e) Tekrar işleme.....	48
Şekil 4.1: Zaman Petri ağları.....	61
Şekil 4.2: Girdi okları ve geçişlerle ilişkilendirilmiş zaman farkları.....	62
Şekil 4.3: Ateşleme süreleri içeren zamanlı PA.....	63
Şekil 4.4: Tutma-bekleme süreleri içeren zamanlı PA.....	65
Şekil 4.5: Konumlar ve geçişlere atanan zaman arasındaki farklar.....	66
Şekil 4.6: (a) zamanlı konum , (b) geçişten konuma zamanlı ok, (c) konumdan geçişe zamanlı okların dönüştürülmüş denk zamanlı geçiş Petri Ağları ..	69
Şekil 6.1: Konveks ve konveks olmayan bulanık kümeler.....	90
Şekil 6.2: Değişik üyelik fonksiyonları, (a) yamuk, (b) normal, (c) üçgen.....	92
Şekil 6.3: Üyelik fonksiyonu kısımları.....	93
Şekil 6.4: Üçgensel bulanık sayı.....	94
Şekil 6.5: Yamuk bulanık sayı.....	95
Şekil 6.6: Rassal ve bulanık sayılar.....	101
Şekil 7.1: Ele alınan esnek imalat hücresi.....	117
Şekil 7.2: Esnek imalat hücresinin PA modeli ($k=1$ için).....	119
Şekil 7.3: Modellenen esnek imalat hücresinin ulaşılabilirlik grafiği ve Markov zinciri ($k=1$ için).....	120
Şekil 7.4: Bulanık kararlı durum olasılıklarının grafiksel gösterimi ($k=1$ için), (a) π_0 , (b) π_1 , (c) π_2 , (d) π_3	122
Şekil 7.5: Esnek imalat hücresinin PA modeli ($k=2$ için).....	124
Şekil 7.6: Modellenen esnek imalat hücresinin ulaşılabilirlik grafiği ve Markov zinciri ($k=2$ için).....	124
Şekil 7.7: Bulanık kararlı durum olasılıklarının grafiksel gösterimi ($k=2$ için), (a) π_0 , (b) π_1 , (c) π_2 , (d) π_3 , (e) π_4 , (f) π_5 , (g) π_6	127
Şekil 7.8: Esnek imalat hücresinin kararlı durumda ortalama üretim miktarı ($k=1$).....	130
Şekil 7.9: M1 makinesinin kararlı durumda ortalama kullanım oranı ($k=1$).....	131
Şekil 7.10: M1 makinesinin kararlı durumda ortalama bozulma ve tamir oranı ($k=1$).....	132
Şekil 7.11: Kararlı durumda sistemdeki ortalama ara stok miktarı ($k=1$).....	133

Şekil 7.12: Esnek imalat hücresinin kararlı durumda ortalama üretim miktarı ($k=2$)	134
Şekil 7.13: M1 makinesinin kararlı durumda ortalama kullanım oranı ($k=2$)	135
Şekil 7.14: M1 makinesinin kararlı durumda ortalama bozulma ve tamir oranı ($k=2$)	136
Şekil 7.15: Kararlı durumda sistemdeki ortalama ara stok miktarı ($k=2$)	137

SEMBOL LİSTESİ

r	: Sistemin herhangi bir elemanın güvenilirliği
Z	: İşaretli Petri ağı yapısı
T	: Sonlu geçiş kümesi
I	: Konumlardan geçişlere yönlendirilmiş oklar kümesi
O	: Geçişlerden konumlara yönlendirilmiş oklar kümesi
m	: Petri ağı işaretleme
p	: Konum
t	: Geçiş
w	: Ok ağırlığı
C	: Yineleme matrisi
$R(m)$: Ulaşılabilirlik grafiği
u	: Ateşleme sayım vektörü
τ	: Zaman gecikmesi
λ	: Geçiş ateşleme hızı/üstel dağılım parametresi
π	: Denge/kararlı durum olasılığı
μ	: Zamanlı Petri ağında ulaşılabilir durumların kümesi
SJ	: Ortalama kalma süresi
Ψ	: Gömülü Markov zincirinin kararlı durum olasılık dağılımı
v	: Ortalama ziyaret sayısı
$\mu(x)$: Üyelik derecesi
α	: Bulanık sayılarda alfa kesimi

PETRİ AĞLARI İLE İMALAT SİSTEMLERİNİN MODELLENMESİ VE ANALİZİNDE YENİ BİR YAKLAŞIM

ÖZET

Son yıllardaki teknolojik ve ekonomik gelişmeler işletmelerin sürekli değişen yeni ürün talepleri ve ürün çeşitlerine esnek ve hızlı tepki vermelerini zorunlu kılmaktadır. Bu da imalatta ve imalat sistemlerinde esneklik kavramını ortaya çıkarmaktadır. Esneklik, üretim sisteminin piyasadaki değişikliklere hızlı ve etkili şekilde uyum sağlayabilmesiyle ilgili bir kavramdır. Günümüzün dinamik, belirsiz ve rekabetçi iş dünyası, uzun dönem başarısı için esnekliği bir gereksinim haline getirmektedir. Günümüzde ileri ve çağdaş olarak kabul gören imalat sistemlerine bakıldığında esneklik ve hücreyel imalat yaklaşımlarının baskın olduğu görülmektedir.

Esnek bir imalat sistemi, çok yönlü makineler, otomatik taşıma sistemi, bir karar verme sistemi, farklı ürünler üreten birden fazla eşzamanlı iş süreçleri akışları ve üretim maliyetlerini düşürmek için ortak kaynakları içeren bir kesikli durum sistemidir. Bu sistemler, modelleme ve analizde hem kalitatif hem de kantitatif bakış açılarının dikkate alınmasını gerektirmektedir. Kalitatif analiz, çıkmazların ve aşırı yüklenmelerin olmaması veya kaynak paylaşımı durumunda bazı bağdaşmazlıkların olması gibi yapısal özellikleri incelemektedir. Kantitatif analiz ise, performans özellikleri (sistem çıktı miktarı gibi), tepki verme (ortalama tamamlanma süreleri gibi) veya faydalanma/kullanma özellikleri (ortalama kuyruk uzunluğu veya kullanım oranları gibi) konularını incelemeye yöneliktir. Kantitatif analiz, modellenen sistemin verimliliğiyle ilgilenirken, kalitatif analiz modellenen sistemin etkinliğiyle ilgilidir.

Esnek imalat sistemlerinin modellenmesi ve analizinde kuyruk ağları, Markov zincirleri, simülasyon ve Petri ağları gibi birçok kullanılan metod ve araç bulunmaktadır. Grafikselsel ve matematiksel bir araç olarak Petri ağları, zaman uyumlu, paralel, eşzamanlı, dağıtık, kaynak paylaşımı, deterministik olmayan ve/veya stokastik olarak karakterize edilebilen kompleks sistemlerin modellenmesi ve analizi için kullanılabilir. Bu çeşit kompleks sistemler diferansiyel denklemler, fark denklemleri gibi geleneksel araçlar kullanılarak matematiksel olarak tanımlamanın zor olduğu karakteristik özellikler göstermektedirler. Diğer yandan, Petri ağları matematiksel bir araç olarak sistem davranışını tanımlayan durum denklemlerinin elde edilmesine, cebirsel sonuçlar bulunmasına ve diğer matematiksel araçlar geliştirilmesine imkan vermektedirler. Blok diyagramları veya mantıksal ağaçlar gibi diğer grafikselsel sistem temsil tekniklerine göre, Petri ağları bir sistemdeki parçalar ve faaliyetler arasındaki mantıksal etkileşimleri daha doğal bir yolla ifade etmek için özellikle daha uygundur. Modelleme açısından bakıldığında, Petri ağ teorisi hem etkinlik hem de verimlilik analizi için uygun modeller oluşturulmasına izin vermektedir.

Grafikselsel doğası, statik ve dinamik sistem karakteristiklerini ve sistem belirsizliğini tanımlayabilme yeteneği ve matematiksel teknikler içermesinden dolayı, Petri ağları

güçlü bir araç olarak esnek imalat sistemlerinin modellenmesi ve analizi için uygun bir kavramsal altyapı oluşturmaktadır.

Her ne kadar zaman kavramı orjinal Petri ağ teorisinde ilk başta dahil edilmemişse de, bir çok pratik uygulamada zamanın dahil edilmesi bir gerekliliktir. Zamanın dikkate alınmadığı durumda, üretim hızının ve kaynak kullanımının belirlenmesi gibi zamanla ilgili performans analizi yapabilmek mümkün değildir. Petri ağları ile esnek bir imalat sisteminin modellenmesinde, sistemin zamana bağlı performansını ve sistem dinamiğini analiz etmek için zamanlama ve faaliyet sürelerinin dikkate alınması gerekmektedir.

Petri ağlarında zaman sıklıkla geçişlerle ilişkilendirilmektedir. Bunun nedeni, bir modelde geçişler olayları temsil etmektedir ve de zamanı konumlarla temsil edilen koşul veya şartlarla ilişkilendirmekten daha doğaldır. Bir Petri ağ modelinde zaman gecikmeleri deterministik veya olasılıksal olarak ifade edilebilmektedir. Eğer zaman gecikmeleri deterministik olarak tanımlanırsa bu Petri ağı deterministik zamanlı ağ, eğer gecikmeler olasılıksal olarak tanımlanırsa stokastik ağ olarak adlandırılmaktadır. Zamanlı Petri ağları ve stokastik Petri ağları klasik Petri ağlarının gözde iki uzantısıdır ve imalat sistemleri alanında yoğun olarak kullanılmaktadırlar.

Bir stokastik Petri ağı her bir geçişin geçişin, olurlu hale gelmesinden ateşlenmesine kadar olan gecikmeyi üstel dağılımla tanımlayan rassal değişkenle ilişkilendirildiği bir Petri ağıdır. Ateşleme hızlarının üstel dağılımının hafızasızlık özelliğinden dolayı, sınırlandırılmış bir stokastik Petri ağının ulaşılabilirlik grafiği sonlu Markov zinciriyle eş yapılıdır. Kuyruk ağları ve Markov zincirleri kompleks sistemlerin modellenmesi ve analizi için esnek, güçlü ve kullanımı kolay araçlardır ve yoğun olarak da kullanılmaktadırlar. Yine de, bazı gerçekle örtüşmeyen matematiksel varsayımlarından ötürü Markov zincirleri ve kuyruk modelleriyle kompleks sistemlerdeki belirsiz olayların nedensel ilişkisini tanımlayabilmek zordur. Petri ağ modellerinde, belirsiz olayların nedensel ilişkisi konumlar, geçişler ve oklarla tanımlanabilmektedir. Bu yüzden, stokastik Petri ağlarını kullanarak bir esnek imalat sisteminin modeli diğerlerinde olduğundan daha kolay oluşturulmaktadır. Stokastik Petri ağları, performans analizi amacı için Petri ağlarının modelleme gücünü Markov zincirlerinin analitik işlenebilirliği/izlenebilirliği ile birleştirmektedir.

Literatürde zamanlı ve stokastik Petri ağlarıyla ilgili zaman ve şansın kavramsallaştırılması konusunda bazı eleştiriler yer almaktadır. Bu eleştiriler zaman ve ağlarla ilgilidir ve özellikle belirsizliğe vurgu yapmaktadırlar. Bu çalışmalar ve belirsizliğe yapılan gönderme belirsizlik ve kesin olmamayı içeren çevrelerde birçok gerçek dünya uygulamasında başarıyla uygulanan bulanık kümeler teorisine dikkatleri çevirmektedir.

Bulanık kümeler ve Petri ağları teorisini birleştiren bazı yaklaşımlar bulunmaktadır ve bunlar sadece kullanılan bulanık araçlarda değil aynı zamanda bulanıklaştırılan ağ elemanlarında da farklılık göstermektedir. Bir Petri ağ yapısı konumlar, geçişler, jetonlar ve oklardan oluşan dörtlü bir yapıdır ve teorik olarak da bunların her biri bulanıklaştırılabilir.

Kompleks sistemlerin analiz ve tasarımı sıklıkla iki çeşit belirsizlik içermektedir; rassallık ve bulanıklık. Rassallık, parametrelerin davranışlarını olasılık dağılım fonksiyonları kullanarak tanımlamayı ifade etmektedir. Bir başka deyişle, rassallık stokastik değişkenliği modellemektedir. Bulanıklık, dilsel yapı veya tam olmayan bilgiden kaynaklanan ölçümdeki kesin olmamayı modellemektedir. Esnek imalat sistemlerinin modellenmesinde, girdi ve model parametreleri de genellikle belirsiz

parametreler şeklindedir. Sistem modellemede, belirsizliğe neden olan kesin olmamanın olası kaynakları sistem girdileri, sistem çıktıları ve kesin olmayan iç operasyonlardır. Bazı durumlarda, belirsizlik aynı anda hem rassallıktan (stokastik değişkenlik) hem de kesin olmamadan (bulanıklık) kaynaklanmaktadır. Zamanın tek rassal değişken olduğu ve zaman gecikmesinin olasılık fonksiyonlarıyla tanımlandığı stokastik Petri ağları, varyans ölçüleri ve olasılık dağılımları ile sistemdeki belirsizliği iyi bir şekilde karakterize edebilmektedirler. Bununla beraber, analiz süresince parametre değerlerindeki belirsizlik sonuçlarda gizlenebilmektedir. Bunu telafi edebilmek için bulanık kümeler teorisinin kullanılması önemli bir alternatif olarak düşünülmüştür.

Her ne kadar modellemede belirsizliği tanımlamak için baskın olarak olasılık teorisine dayanan stokastik modeller kullanılsa da, olasılıksal modeller sadece rassallığı tanımlayabilmekte ve her çeşit belirsizliği tanımlayamamaktadır. Özellikle, örneğin ölçmenin sınırlı kesinliğinin sonucu olarak verilerin kesin olmaması, istatistiksel bir yapıda değildir ve olasılık kullanılarak tanımlanamamaktadır.

Bu çalışmada, hem stokastik değişkenlik hem de kesin olmamayı temsil etmek için stokastik Petri ağlarını bulanık küme teorisi ile birlikte kullanarak, esnek imalat sistemlerinin modellenmesi için yeni bir yaklaşım geliştirilmiştir. Bu yaklaşımda, üstel dağılım parametresi üçgensel bulanık sayı ile temsil edilmektedir. Bulanıklaştırılmış parametre ve bulanık matematik kullanılarak, bulanık denge/kararlı durum olasılık dağılımı elde edilmektedir. Her ne kadar, bugüne kadar bulanık Petri ağları ve stokastik Petri ağları sistem modelleme ve analizinde ayrı ayrı kullanılmış olsalar da, bu çalışmanın önemli katkısı, bulanık küme teorisinin stokastik Petri ağlarıyla birlikte sistem modelleme ve analizinde kullanılmasını ilk defa önermesi ve göstermesidir.

Bulanık parametrelili stokastik Petri ağları olarak adlandırılan ve kesikli durum dinamik sistemlerinin modellenmesi ve analizine imkan veren bu yöntem, belirsizliğin iki boyutu olan olasılıksal (stokastik) değişkenlik ve kesin olmamayı (bulanıklık) ifade edebilmek için bulanık küme teorisinin stokastik Petri ağları ile birlikte kullanılmasına dayanmaktadır. Bu yöntem bulanık kümeler ve Petri ağları teorilerini birleştiren iki aşamalı bir yöntemdir ve kompleks sistemlerin modellenmesi ve analiz gücünün artırılmasını amaçlamaktadır. Her ne kadar, geliştirilen bu yöntem esnek bir imalat hücresine uygulanmış olsa da, sadece esnek imalat sistemlerinin modellenmesi ve analiziyle sınırlı değildir. Stokastik Petri ağları ile modellenebilen herhangi bir zaman kritik, dinamik ve kompleks sistemin modellenmesi ve analizi için kullanılabilir. Uygulama sonuçları da göstermektedir ki, geliştirilen bu yöntemin en önemli özelliği ve katkısı sistem modellemede bulanık küme teorisinin stokastik Petri ağları ile birlikte kullanılmasını içermesinin yanı sıra aynı zamanda sistemin daha derin bir şekilde analiz edilmesine ve anlaşılmasına imkan vermesidir.

A NEW APPROACH IN MODELING AND ANALYSIS OF MANUFACTURING SYSTEMS WITH PETRI NETS

SUMMARY

Recent technological and economical developments make organizations respond to continuously changing product demands and product varieties flexibly and rapidly. This reveals the flexibility concept in both manufacturing and manufacturing systems. Flexibility is a concept related to the rapid and effective compliance of the production system to market changes. Today's highly dynamic, probabilistic and competitive business environment makes flexibility an obligation to firms for long term success. Flexible and cellular manufacturing systems are the dominant approaches among today's manufacturing systems which are accepted as advanced and modern.

A flexible manufacturing system is a discrete-event system and contains a set of versatile machines, an automatic transportation system, a decision-making system, multiple concurrent flows of job processes that make different products, and often exploits shared resources to reduce the production cost. These systems require both qualitative and quantitative aspects to be considered for modeling and analysis. Qualitative analysis searches for structural properties like the absence of deadlocks, the absence of overflows or the presence of certain mutual exclusions in case of resource sharing. Quantitative analysis looks for performance properties (e.g. throughput), responsiveness properties (e.g. average completion times) or utilization properties (e.g. average queue lengths or utilization rates). Quantitative analysis concerns the evaluation of the efficiency of the modeled system whereas qualitative analysis concerns the effectiveness of the modeled system.

There are many methods and tools used for modeling and analysis of flexible manufacturing systems such as queueing networks, Markov chains, simulation and Petri nets. Petri nets as a graphical and mathematical tool, can be used for modeling and analyzing complex systems which can be characterized as synchronous, parallel, simultaneous, distributed, resource sharing, nondeterministic and/or stochastic. The complex systems of these types exhibit characteristics which are difficult to describe mathematically using conventional tools like differential equations, difference equations. On the other hand, Petri nets as a mathematical tool provide obtaining state equations describing system behavior, finding algebraic results and developing other mathematical models. With respect to other techniques of graphical system representation like block diagrams or logical trees, Petri nets are particularly more suited to represent in a natural way logical interactions among parts or activities in a system. In modeling point of view, Petri net theory allows the construction of the models amenable both for the effectiveness and efficiency analysis.

Due to the graphical nature, ability to describe static and dynamic system characteristics and system uncertainty, and the presence of mathematical analysis techniques, Petri nets as a powerful tool, form an appropriate conceptual infrastructure for the modeling and analysis of flexible manufacturing systems.

Although the concept of time was not included in the original Petri net theory, for many practical applications, the addition of time is a necessity. Without an explicit notion of time, it is not possible to conduct temporal performance analysis, i.e. to determine production rate, resource utilization. In modeling a flexible manufacturing system with Petri nets, timing and activity durations for analyzing temporal performance and dynamics of the system should be taken into consideration.

In Petri nets, time is often associated to transitions. The reason for this is that transitions represent events in a model and it is more natural to consider events to take time rather than time to be related to conditions, that is, places. The time delays in a Petri net model can be specified either deterministically or probabilistically. If the time delays are deterministically given, such a Petri net model is called as deterministic timed net and if the delays are probabilistically specified, the Petri net model is called stochastic net. Timed Petri nets and stochastic Petri nets are two popular extensions of Petri nets which are widely used in the application field of manufacturing systems.

A stochastic Petri net is a Petri net where each transition is associated with an exponentially distributed random variable that expresses the delay from the enabling to the firing of the transition. Due to the memoryless property of the exponential distribution of firing delays, the reachability graph of a bounded stochastic Petri net is isomorphic to a finite Markov chain. Queueing networks and Markov chains provide flexible, powerful and easy to use tools for modeling and analysis of complex manufacturing systems and are widely used. However, it is difficult to describe the causal relation of uncertain events explicitly in the complex models using Markov chain and queueing network models because of their unrealistic mathematical assumptions. In Petri net models, we can explicitly describe the causal relation of uncertain events by using places, transitions, and arcs. Therefore, using stochastic Petri nets, we can construct the model of a flexible manufacturing system more easily than using the other models. Stochastic Petri nets combine the modeling power of PNs and the analytical tractability of Markov processes for the purpose of performance analysis.

There are some criticisms related to timed and stochastic Petri nets about the conceptualization of time and chance in literature. These criticisms are related to time and nets, and emphasize mainly on uncertainty. These studies and reference to uncertainty turned the attention on the fuzzy set theory which has been applied successfully in modeling and designing many real world systems in environments of uncertainty and imprecision.

There are several approaches that combine fuzzy sets and Petri nets theories, differing not only in the fuzzy tools used but also in the elements of the nets that are fuzzified. A Petri net structure is a four tuple consisting of places, transitions, tokens and arcs, and theoretically each of these can be fuzzified.

Analysis and design of complex systems often involve two kinds of uncertainty: randomness and fuzziness. Randomness refers to describing the behavior of the parameters by using probability distribution functions. In other words, the randomness models stochastic variability. Fuzziness models measurement imprecision due to linguistic structure or incomplete information. In modeling flexible manufacturing system, input and model parameters are usually in the form of uncertain parameters. The possible sources of imprecision causing uncertainty in system modeling are system inputs, system outputs and imprecise inner operations.

In some cases, the uncertainty arises from both randomness (stochastic variability) and imprecision (fuzziness) simultaneously. Stochastic Petri nets in which time is the only random variable and time delay is described by probability functions well characterize the uncertainty in the system with the measures of variance and probability distributions. During the analysis, the uncertainty in parameter values can be hidden in the results. The use of the fuzzy sets theory to be able to compensate this can be considered as an important alternative.

Although the dominating concept to describe uncertainty in modeling is stochastic models which are based on probability theory, probabilistic models are not suitable to describe all kinds of uncertainty, but only randomness. Especially the imprecision of data which is for example as a result of the limited precision of measuring is not statistical in nature and can not be described by using probability.

In this study, a new approach for modeling flexible manufacturing systems by using stochastic Petri nets together with the fuzzy sets theory to represent both stochastic variability and imprecision is developed. In this approach, the exponential distribution parameter is represented by a triangular fuzzy number. By using the fuzzified parameters and fuzzy mathematics, the fuzzy steady-state distribution is obtained. Although fuzzy Petri nets and stochastic Petri nets have been separately used in modeling and analysis of systems, the significant contribution of this study, as the first, is the suggestion of the use of the fuzzy sets theory together with stochastic Petri nets in system modeling and analysis.

The proposed approach which is named as stochastic Petri nets with fuzzy parameters for modeling and analysis of discrete-event dynamic systems is based on using stochastic Petri nets together with the fuzzy sets theory to represent both dimensions of uncertainty which are probabilistic (stochastic) variability and imprecision (fuzziness). This approach is a two stage method which combines two theories, fuzzy sets and Petri nets, and aims at increasing the power of the modeling and analysis of complex systems. Although the proposed approach was applied to a flexible manufacturing cell, it is not restricted to modeling and analysis of flexible manufacturing systems. It can be used for modeling and analysis of any time critical, dynamic and complex system modeled by stochastic Petri nets. The main contribution of the developed method, in addition to the suggestion of the use of the fuzzy sets theory together with stochastic Petri nets in system modeling, is that a deep analysis and understanding of the system can be attained.

1. GİRİŞ

1.1 Ele Alınan Problemin Tanımı ve Çalışmanın Amacı

İmalat terimi, hammaddelerin pazarlanabilir ürünlere dönüştürülmesi için yapılan tüm organize faaliyetleri içermektedir (Wu, 1994). İmalatın amacı fonksiyonel olarak arzu edilen, estetik olarak tatmin edici, çevre için güvenli, ekonomik olarak ulaşılabilir, oldukça güvenilir ve yüksek kaliteli ürünler üreterek toplumu zenginleştirmektir. Bir diğer amacı da istihdam sağlayarak ülke ekonomisine katkıda bulunmaktır (Askin ve Standridge, 1993). Bir imalat sistemi ise bir dizi katma değer ekleyen imalat süreçlerini uygulayarak hammadde ya da malzemelerin daha yararlı ürünlere çevrilmesini sağlar (Wu, 1994). İmalat sistemleri genel olarak ikiye ayrılmaktadırlar. Bunlar, kesikli parça imalatı ve sürekli işlemedir. Kesikli parça imalatı motor bloğu, devre kartları gibi açıkça ayırt edilebilen başlı başına parçaları içermektedir. Sürekli işlemede ise petrol rafinerileri ve kimya endüstrisinde olduğu gibi ürün kesintisiz bir şekilde akmaktadır. Bu çalışmada kesikli parça imalatı sınıfında yer alan imalat sistemleri ele alınmaktadır.

İmalat sistemleri emek yoğun imalat sistemlerinden başlayarak, kitlesel imalat sistemleri, otomasyon yoğun kitlesel imalat sistemleri, atölye tipi imalat, grup/hücreli imalat hücreleri, esnek imalat sistemleri, çevik (agile) imalat sistemleri ve bilgisayarla bütünleşik imalat sistemlerine uzanan bir evrim ve gelişme göstermiştir. Günümüzün rekabet koşullarında, işletmeler, varlıklarını sürdürebilmek, büyümek ve kar elde etmek gibi uzun dönemli hedeflere sahiptir. İşletmelerin bu amaçlarına ulaşabilmeleri için de, iş yaptıkları ortamı en iyi şekilde anlamaları gerekmektedir. Çağımızda, küresel rekabet ve müşterilerin bireyselleşmesinde bir artış söz konusudur (Singh ve Rajamani, 1996). Günümüzün imalat dünyası birbirinden farklı türlü türlü ürünler, yüksek kalite, kısa teslim süresi ve değişken müşteri talebi gibi kavramlarla karakterize edilebilir. Bu da, düşük talebe sahip çok çeşitli ürünün, en kısa zamanda ve en düşük maliyetle üretilebilmesini zorunlu kılmaktadır (Chen ve Chen, 2003). İşletmelerin bunu gerçekleştirebilmek ve

rekabette avantajlı duruma geçebilmek için doğru üretim stratejisini seçmeleri; grup teknolojisi ve hücreli üretim, tam zamanında üretim, esnek üretim sistemleri, bilgisayarla bütünleşik üretim sistemleri ve toplam kalite yönetimi gibi modern üretim ve yönetim sistemleri ve tekniklerinden azami ölçüde yararlanmaları gerekmektedir. Bu çalışmada esnek imalat sistemleri üzerinde durulacaktır.

Organizasyonların rekabet gücünü arttırmada esneklik hayati bir öneme sahiptir ve bu yüzden de esnek imalat sistemi tasarımı oldukça önemli bir konudur. Günümüzde daha küçük partiler halinde üretim, daha kısa ürün ömrü, yeni ürünün hızla piyasaya sürülmesi ve benzeri normlar, tasarım ve üretim yöntemlerinin daha esnek hale getirilmesi ve firmaların esnek üretim sistemleri olarak anılan üretim sistemlerine yönelmesine neden olmuştur (Dinçmen, 2005). Son yıllardaki ekonomik gelişmeler firmaların sürekli değişen yeni ürün talepleri ve ürün çeşitlerine esnek ve hızlı tepki vermelerini zorunlu kılmıştır. Bu da firmaların imalat sistemlerinin esnek olmasını gerektirmektedir (Manzini ve diğ., 2004). Esneklik, üretim sisteminin piyasadaki değişikliklere hızlı ve etkili şekilde uyum sağlayabilmesiyle ilgili bir kavramdır. Genel anlamda esneklik çok çeşitli olası çevrelere uyum yeteneğini ölçen bir kavramdır. Günümüzün dinamik, probabilistik ve bireysel iş dünyası uzun dönem başarısı için esnekliği bir gereksinim haline getirmiştir (Askin ve Standridge, 1993; Askin ve diğ., 1997).

Esnek üretim sistemi, işlemsel ve kontrol karakteristikleri açısından birbirinden farklı yapılardaki geniş bir üretim sistemleri yelpazesini anlatan genel bir terimdir. Bunun içinde yer alan esnek hücreli üretim sisteminden beklenen şey, robotlar, otomatik yönlendirmeli malzeme taşıyıcılar, otomatik depolama sistemleri ve bilgisayar destekli dizayn ve imalat sistemleri gibi gelişmiş teknolojilerden faydalanarak akış tipi üretim verimliliğiyle atölye tipi üretimin sağladığı esneklik ve teknik yetkinliği başarabilmektir (Yang, 1994). Esnek üretim sistemleri otomasyon yoğun sistemlerdir ve mümkün olduğunca personel müdahalesini (insan ihtiyacını) en aza indirmektedirler. Bu haliyle esnek imalat sistemleri çok büyük avantajlar sağlamakla beraber uygulaması pahalı sistemlerdir ve çoğu zaman büyük miktarda yatırım gerektirmektedirler (Askin ve Standridge, 1993). Buradan yola çıkarak böyle bir sistemin tasarlanması, işletilmesi ve geliştirilmesinde sistematik bir modelleme ve analiz yaklaşımına ihtiyaç duyulduğu sonucuna varılabilir. Günümüzde yazılım teknolojilerindeki gelişmeler sayesinde simülasyon teknikleri sistem tasarımı ve

geliştirilmesinde yoğun bir şekilde kullanılmakla beraber, artan sistem karmaşıklığından kaynaklanan sorunlarla baş edebilmek için sistem modelleme ve simülasyondaki çalışmalar simülasyon tekniklerinden modelleme metodolojisine kaymaktadır (Vangheluwe ve diğ., 2001). Esnek imalat sistemleri pahalı donanım ve yazılım yatırımı gerektirdiğinden kurulumundan önce modellenmesi ve denenmesi gerekmektedir (Zhou ve Venkatesh, 1999). Bu amaçla hazırlanacak olan bu tezde, esnek bir imalat hücresinin modellenmesi ve analizi hedeflenmektedir. Carl Adam Petri (1962) tarafından geliştirilen Petri ağları (PA) modelleme metodolojisi ele alınarak esnek imalat sistemlerinin modellenmesi ve analizinde nasıl kullanıldığı incelenecek ve PA'na dayanan yeni bir modelleme yaklaşımı ortaya konulmaya çalışılacaktır.

1.2 Çalışmanın Kapsamı

Bu çalışmada,

- Esnek bir imalat hücresinin modellenmesi ve analizi hedeflenmektedir. Bu amaçla Carl Adam Petri (1962) tarafından geliştirilen Petri ağları (PA) modelleme metodolojisi ele alınarak esnek imalat sistemlerinin modellenmesi ve analizinde nasıl kullanıldığı incelenecektir.
- Petri ağlarında zaman kavramı ve nasıl kullanıldığı, Petri ağlarının stokastik ve bulanık ortamda modellenmesi ve analizi incelenecektir.
- İmalat sistemleri için Petri ağlarına dayanan ve bulanık küme teorisini de içeren yeni bir modelleme yaklaşımı geliştirilecektir.
- Esnek imalat sistemlerini PA ile modellenmesinde sistem büyüdükçe (örneğin, tüm bir imalat sistemi) ortaya çıkan model de karmaşık hale geleceğinden bütün bir imalat sisteminin analizi de karmaşıklaşmaktadır. Bunun için bu çalışmada ortaya konacak olan modelin uygulanabilirliğini göstermek için tüm sistemi oluşturan alt sistemlerden bir tanesi olan tek bir imalat hücresi ele alınacaktır.
- Ele alınacak imalat hücresi hem stokastik hem de bulanık ortamda PA ile modellenerek sonuçlar değerlendirilecektir.

1.3 Tez Organizasyonu

Bu çalışmanın bir sonraki bölümünde imalat kavramı, imalat sistemlerinin sınıflandırılması ve imalat sistemlerinde modelleme konuları anlatılacaktır. Üçüncü bölümde Petri ağları (PA) ve imalat sistemlerinin modellenmesinde nasıl kullanıldıkları detaylı bir şekilde incelenecektir. Dördüncü bölümde Petri ağlarında zaman kavramı ve zamanın önemi ile Petri ağlarının zaman uzantıları verilecektir. Sonraki bölümde Petri ağlarında stokastiklik, klasik stokastik Petri ağları ve genelleştirilmiş stokastik Petri ağları yöntemleri anlatılacaktır. Bulanık kümeler teorisi ve Petri ağlarında bulanıklık altıncı bölümde yer alacaktır. Yedinci bölümde stokastik Petri ağları ve bulanık küme teorisi bütünleştirilerek yeni bir modelleme ve analiz yaklaşımı ortaya koyulacaktır. Ayrıntılarıyla anlatılacak bu yeni yöntem aynı bölümde örnek bir uygulamayla gösterilecek ve sekizinci bölümde de sonuçlar tartışılacaktır.

2. İMALAT SİSTEMLERİ VE MODELLEME

2.1 İmalat Kavramı ve İmalat Sistemlerinin Sınıflandırılması

En genel bakış açısıyla üretim ekonomik değeri olan mal veya hizmetlerin oluşturulmasını sağlayan faaliyetler bütünü olarak tanımlanabilir. Burada önemli olan üretim sonunda ortaya çıkan mal veya hizmetin ekonomik bir değerinin olması ve değer yaratmasıdır. Üretim terimi sadece bir ürünün ortaya çıkması ya da oluşturulması amacıyla yapılan faaliyetler için değil, aynı zamanda bir ürüne değer katmak, değerini arttırmak amacıyla yapılan faaliyetleri de kapsamaktadır (Tanyaş ve Baskak, 2006). Üretim başlıca dört yolla gerçekleştirilmektedir. Bunlar;

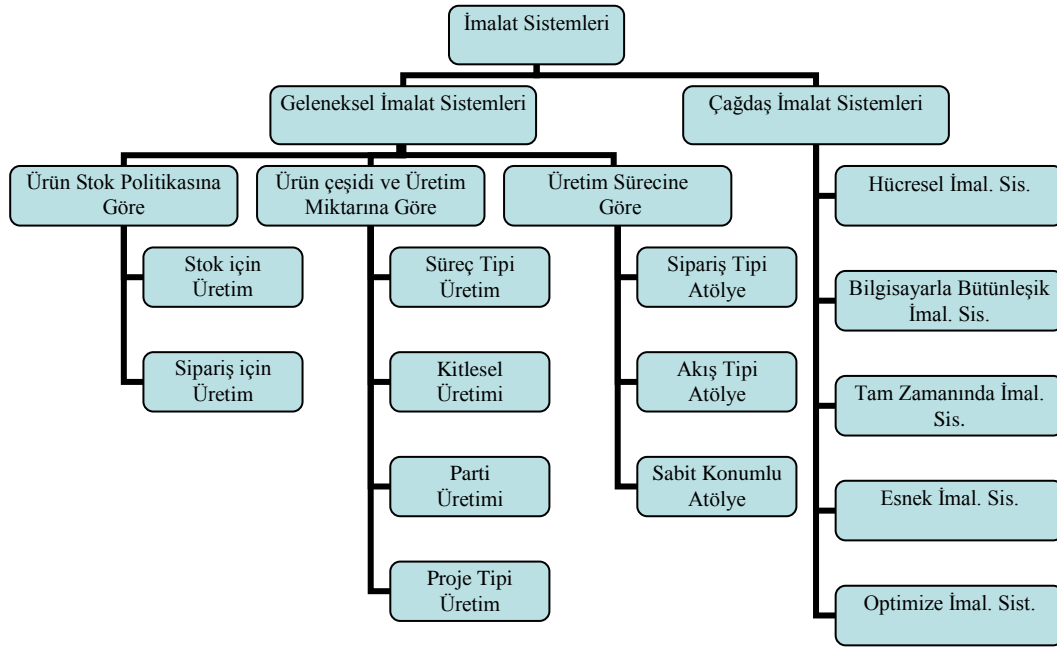
- biçim değişikliği yoluyla (ağaçtan sandalyeye vb.)
- yer değişikliği yoluyla (nakliye vb.)
- zaman değişikliği yoluyla (soğuk hava depoculuğu vb.)
- el değiştirme yoluyla (ticaret)

Üretim sistemleri genel olarak üretilen ürüne göre hizmet üreten sistemler ve mal üreten sistemler şeklinde sınıflandırılmaktadır. Hizmet üreten sistemler (eğitim, dağıtım, ulaşım, konaklama, sağlık vb.) girdilerin fiziksel veya kimyasal durumunda bir değişiklik olmamakla beraber yine de topluma bir değer yaratmaktadırlar (Acar, 1995). Mal üreten sistemler ise imalat sistemleri olarak adlandırılmaktadır. İmalat sistemlerinin hizmet üreten sistemlerden ayıran nokta sonuçta elle tutulabilir ve gözle görülebilir bir fiziksel ürünün ortaya çıkmasıdır.

İmalat terimi, hammaddelerin pazarlanabilir ürünlere dönüştürülmesi için yapılan tüm organize faaliyetleri içermektedir (Wu, 1994). İmalatın amacı fonksiyonel olarak arzu edilen, estetik olarak tatmin edici, çevre için güvenli, ekonomik olarak ulaşılabilir, oldukça güvenilir ve yüksek kaliteli ürünler üreterek toplumu zenginleştirmektir. Bir diğer amacı da istihdam sağlayarak ülke ekonomisine katkıda bulunmaktır (Askin ve Standridge, 1993). Bir imalat sistemi ise bir dizi katma değer ekleyen imalat süreçlerini uygulayarak hammadde ya da malzemelerin daha yararlı

ve sonuç olarak nihai ürünlere çevrilmesini sağlar (Wu, 1994). İmalat sistemleri genel olarak ikiye ayrılmaktadırlar. Bunlar, kesikli parça ve sürekli işlemedir. Kesikli parça imalatı motor bloğu, devre kartları gibi açıkca ayırt edilebilen başlı başına parçaları içermektedir. Sürekli işlemede ise petrol rafinerileri ve kimya endüstrisinde olduğu gibi ürün kesintisiz bir şekilde akmaktadır.

İmalat sistemleri çeşitli karakteristiklere göre farklı şekilde sınıflandırılabilir. İmalat sistemlerinin detaylı bir sınıflandırılması Şekil 2.1’de görülmektedir.



Şekil 2.1: İmalat sistemlerinin sınıflandırılması.

Şekil 2.1’de görüldüğü gibi imalat sistemleri emek yoğun imalat sistemlerinden başlayarak, kitlesele imalat sistemleri, otomasyon yoğun kitlesele imalat sistemleri, atölye tipi imalat, grup/hücresele imalat hücreleri, tam zamanında imalat sistemleri, esnek imalat sistemleri ve bilgisayarla bütünleşik imalat sistemlerine uzanan bir evrim ve gelişme göstermiştir. Herhangi bir imalat sistemini bu sınıflandırmalardan sadece bir tanesine sokmak mümkün olmayabilir. Bir imalat sistemi bu sınıflamalardan bir veya daha fazlasına girebilmektedir.

Geleneksel üretim sistemlerinde öncelikli amaç, mevcut kaynaklar ile en fazla üretimin yapılması ve makine kapasitesinin azami ölçüde kullanılmasıdır. Modern üretim sistemlerinde ise öncelik, müşteri taleplerinin olabildiğince karşılanmasına verilmektedir. Ayrıca, makine kapasitesinden çok, işgücünün azami ölçüde

kullanılması ön plandadır. Bunu gerçekleştirmek için de olabildiğince esnek bir üretim sistemine sahip olmak gerekmektedir.

Son yıllardaki ekonomik gelişmeler firmaların sürekli değişen yeni ürün talepleri ve ürün çeşitlerine esnek ve hızlı tepki vermelerini zorunlu kılmıştır. Bu da firmaların imalat sistemlerinin esnek olmasını gerektirmektedir (Manzini ve diğ., 2004). Esneklik, üretim sisteminin piyasadaki değişikliklere hızlı ve etkili şekilde uyum sağlayabilmesiyle ilgili bir kavramdır. Günümüzün dinamik, probabilistik ve bireysel iş dünyası uzun dönem başarısı için esnekliği bir gereksinim haline getirmiştir. Çağdaş imalat sistemlerine bakıldığında hücresel imalatın önemli bir rol oynadığı görülmektedir. Hücresel imalat çağdaş imalat sistemleri içerisinde yer alan esnek imalat sistemi, otomasyon ve tam zamanında üretim sistemleri için de temel şart niteliğindedir (Burbidge, 1992; Tanyaş ve Baskak, 2006). Buradan da anlaşılacağı gibi günümüzde imalat sistemleri için baskın olan modern ve çağdaş yaklaşım esneklik ve hücresel imalattır. Bu amaçla bu çalışmada esnek imalat hücrelerinin modellenmesi ve analizi konusu ele alınmaktadır. Bir sonraki bölümde imalatta esneklik ve hücresel imalat konuları detaylı şekilde sunulmaktadır.

2.2 Hücresel İmalat ve Diğer İmalat Yaklaşımları

Hücresel imalat (Hİ) bir sistemi mümkün olduğunca bağımsız alt sistemlere ayıran ve alt sistemlerin hızlı ve etkin çalışma yeteneğini tüm sisteme yansıtmayı amaçlayan bir yaklaşımdır (Durmuşoğlu ve diğ., 2003).

Benzer özellikler taşıyan parçaların, benzer şekilde üretilmeleri nedeniyle bir araya toplandığı sistemler hücre olarak tanımlanmaktadır. Bir hücrede benzer parça-ailesini üretmek için çalışanların bir takım olarak bir araya getirilmesi ve benzer olmayan makinelerin gruplaşma stratejisi ise hücresel imalat olarak tanımlanmaktadır (Askin ve Zhou, 1998). Hİ grup teknolojisinin bir uygulamasıdır ve imalat hücrelerinin oluşturulması ve operasyonunu içermektedir. Benzer özellikler taşıması nedeniyle aynı ailede yer alan parçaların aynı tezgahlar üzerinde ve aynı makineler kullanılarak üretilmesi olasıdır. Bu benzerlikler aile içindeki her bir parçanın üretimi için gerekli makinelerden oluşan üretim hücrelerini oluşturur. Dolayısıyla, üretim hücrelerinde aynı fonksiyonel özelliği taşımayan üretim araçlarının bir araya getirilmesi söz konusudur (Askin ve diğ., 1997).

Hİ sistemleri, konvansiyonel (klasik) üretim sistemleri ile bilgisayarla bütünleşik üretim sistemleri arasında köprü oluşturmakta ve geleceğin fabrikası olarak düşünülmektedir. Hİ sistemleri esnek olmayan, tekrarlı parti, kitlesel üretimden daha esnek küçük parti üretimine daha makul bir maliyetle geçişe olanak sağlamaktadır. Konvansiyonel üretim tesis yerleşiminden hücreli yerleşime dönüşüm tam zamanında üretim ilkeleri ve esnek üretim sistemlerinin gelişmiş teknolojisiyle birlikte hız kazanmıştır (Yang, 1994).

Hİ çeşitli sayıdaki ürünleri mümkün olan en az israf ile üretmeyi amaçlayan bir yaklaşımdır. Parça ailelerinin hücrelerde işlenmesinin avantajı ise büyük partiler oluşturmaya gerek olmaksızın üretimde ölçek ekonomisinden faydalanmayı mümkün kılmasıdır. Bu yüzden de günümüzde tamamen ya da kısmen atölye tipi üretimden hücreli imalata geçiş çalışmaları oldukça yaygınlaşmaktadır (Djassemi, 2005).

Hİ yaklaşımının temeli, küçük bir sistemin etkin ve kontrol edilebilir olma özelliğini, büyük sisteme yansıtmaktır. Bu yansıma, büyük sistem içinde birbirinden bağımsız küçük alt sistemler oluşturma şeklinde gerçekleşir. Böylece kümeler bağımsız küçük sistemler olarak büyük sistemin karmaşıklığını çözüme yardımcı olur (Gülenç, 2005).

Hücre içindeki tüm tesisler ve birimler, hücreye giren bütün parçaları kendi içinde üretecek şekilde organize edilmişlerdir. Bu açıklamaların ardından hücreli imalatın ana fikrinin, imalat sisteminin küçük alt sistemlere bölünmesi olduğunu söyleyebiliriz. Bu bölünmenin temel amacı ise verimlilik ve esnekliğin bir araya getirilmesi ve kontrolün karmaşıklığını azaltmaktır (Gülenç, 2005).

2.3 İmalatta Esneklik ve Esnek İmalat Hücresi Kavramı

Hİ, grup teknolojisi felsefesinin üretim alanındaki bir uygulamasıdır (Selim ve diğ., 1998). Grup teknolojisi, hücrenin düzenlenmesinden başlayarak, tüm üretim sistemini ve üretim-yönetim organizasyonunu saran bir felsefedir (Durmuşoğlu, 1984).

Grup Teknoloji (GT) ilkeleri, konvansiyonel atölye tipinden her biri belli bir ürün/parça ailesine özel imalat hücrelerinden oluşan hücreli yerleşime dönüşümün temelini oluşturmaktadır (Yang, 1994). GT ve Hİ'nin getirdiği literatürde yer alan birçok faydalar vardır. Bunlar (Askin ve Standridge, 1993; Yang, 1994; Askin ve diğ.,

1997), maliyetlerde azalma, azalan üretim akış süresi, artan kullanım, azalan envanter seviyesi, daha iyi kalite kontrol ve ürün değişimine daha hızlı cevap verebilme şeklinde özetlenebilir. Bu iyileştirmelerin sonucu olarak yenilik oranında artış, kalite güvence, teslimat hızı ve firmanın pazardaki imajında da gelişmeler meydana gelmektedir.

Literatürde belirtilen ve hücresele üretimden beklenen bir çok operasyonel faydanın yanında Hİ hakkında bazı eleştiriler ve şikayetler de yer almaktadır. Bir başka ifadeyle Hİ'nin bazı eksik yanları da bulunmaktadır. Bunlardan en önemlisi Hİ uygulanmasıyla imalat esnekliğinin azalması ve makina kullanım oranının düşmesi olarak gösterilmektedir (Yang, 1994; Djassemi, 2005; Askin ve diğ., 1997). Hücrelerde, ürün taleplerindeki dinamik ve rassal dalgalanmaların sonucu olarak dengesiz/değişen makina kullanımını ortaya çıkmaktadır. Firmalar Hİ sistemlerini uygulayarak operasyonel verimliliği arttırmaya çalışırken, esnek operasyonların stratejik yararlarını kaybetmek istememektedirler. Atölye tipi sistemlerde gelen parçalar belli bir alanda aynı tipteki makinalardan herhangi birinde işlenebildiğinden imalat hücrelerine göre daha esnektirler. Hİ sistemlerinde ise hücreler birbirlerinden farklı makinalardan olduğundan ve belli bir ürün/parça ailesini işleyebildiklerinden daha az esnektirler (Djassemi, 2005). Kanannan ve Gosh (1996), çalışmalarında Hİ yerleşimi ile süreç tipi yerleşimi çeşitli şartlar altında karşılaştırmışlar ve sonuç olarak da hücresele atölyenin oldukça katı olduğunu ve esnek olmadığını ve sağladığı diğer hiçbir avantajın da eksik olduğu rotalama esnekliğini telafi edemediğini bulmuşlardır. Oysaki günümüzde işletmelerin her alanda olduğu gibi imalat sistemlerinde de esnekliğe sahip olması gerekmektedir. Hİ sistemlerinin tasarlanması ve uygulaması aşamasında esneklik boyutu da mutlaka dikkate alınmalıdır ve amaç esnek hücresele imalat sistemini gerçekleştirmek olmalıdır.

Organizasyonların rekabet gücünü arttırmada esneklik hayati bir öneme sahiptir ve bu yüzden de esnek hücre tasarımı oldukça önemli bir konudur. Günümüzde daha küçük partiler halinde üretim, daha kısa ürün ömrü, yeni ürünün hızla piyasaya sürülmesi ve benzeri normlar, tasarım ve üretim yöntemlerinin daha esnek hale getirilmesi ve firmaların esnek imalat sistemleri (EİS) olarak anılan üretim sistemlerine yönelmesine neden olmuştur (Dinçmen, 2005).

Esneklik, üretim sisteminin piyasadaki değişikliklere hızlı ve etkili şekilde uyum sağlayabilmesiyle ilgili bir kavramdır. Genel olarak iki çeşit esneklikten bahsedilebilir. Bunlar (Manzini ve diğ., 2004).

- *Yetenek (capability) esnekliği*: bir sistemin ürün varyasyonları ve değişimleri cinsinden değişen pazar taleplerine adapte olabilmeye yeteneğidir.
- *Kapasite (capacity) esnekliği*: bir sistemin ürün miktarları cinsinden değişen pazar taleplerine karşılık verebilme yeteneğidir.

Bu iki genel anlamda esneklik imalat sektöründe en önemli başarı faktörleridir.

Hİ sistemleri bağlamında ilişkili esneklik tipleri ise şöyledir (Askin ve diğ., 1997).

- *Makina (tezgah) esnekliği*: hücrelerde gruplanan makinaların yüksek sayıda farklı operasyon tiplerini gerçekleştirebilme yeteneğidir.
- *Rotalama esneliği*: hücre sisteminin parçaları tamamıyla çeşitli hücrelerde işleyebilme yeteneğidir.
- *Parça hacmi esnekliği*: hücre sisteminin mevcut ürün karışımında değişik üretim hacimlerini gerçekleştirebilme yeteneğidir.
- *Parça karışımı esnekliği*: hücre sisteminin farklı ürün çeşitlerini minimum bozulmayla gerçekleştirebilme yeteneğidir.

Hİ'da imalat hücreleri oluşturulurken bu esneklik boyutlarının da dikkate alınması gerekmektedir. Bu yüzden son yıllardaki çalışmalar esnek imalat hücrelerinin oluşturulması üzerinde yoğunlaşmaktadır. Bunun nedeni daha öncede belirtildiği gibi klasik Hİ sistemlerinin sahip olduğu bu en önemli dezavantajın ortadan kaldırılması ve organizasyonların rekabet gücünün artırılmasıdır.

Esnek imalat sistemi (EİS), işlemsel ve kontrol karakteristikleri açısından birbirinden farklı yapılarıdaki geniş bir üretim sistemleri yelpazesini anlatan genel bir terimdir. Bunu içinde yer alan EİS sisteminden beklenen şey robotlar, otomatik yönlendirmeli malzeme taşıyıcılar, otomatik depolama sistemleri ve bilgisayar destekli dizayn ve imalat sistemleri gibi gelişmiş teknolojilerden faydalanarak akış tipi üretim verimliliğiyle atölye tipi üretimin sağladığı esneklik ve teknik yetkinliği başarabilmektir (Yang, 1994).

Esnek imalat sistemleri otomasyon yoğun sistemlerdir ve mümkün olduğunca personel müdahalesini (insan ihtiyacını) en aza indirmektedirler. Bu yüzden esnek otomasyona olanak tanıyan bilgisayarla bütünleşik üretim sistemi, esnek üretim sistemlerinin temelini oluşturmaktadır. Bir başka ifadeyle esnek üretim sistemleri bilgisayarla bütünleşik üretim sisteminin bir türevidir ya da yan ürün olarak da düşünülebilirler (Dinçmen, 2005). Buradan yola çıkarak esnek üretim hücresi ve çok hücreli esnek üretim sistemi kavramlarını aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

- *Esnek imalat hücresi*: ortak bir malzeme taşıyıcısına sahip bir grup esnek tezgahın oluşturduğu esnek üretim sistemidir.
- *Çok hücreli EİS*: birden fazla sayıda esnek üretim hücresi ve gerekirse esnek tezgahlardan ve bu birimleri birleştiren malzeme taşıma sisteminden oluşan esnek üretim sistemidir.

Daha önceden belirtilen nedenlerden ötürü imalat hücrelerinin tasarımında esneklik boyutunu sisteme yerleştirmek gerekmektedir ve çeşitli şekillerde bu gerçekleştirilebilir. İki esnek üretim hücresini düşünecek olursak bunları birbirinden farklı biçimde oluşturmak mümkündür. Bu hücrelerden biri, yalnızca, yüksek derecede uzmanlaşmış (esnekliği olmayan) tezgahlardan oluşabilir. Burada, hücreye esneklik kazandırabilmenin koşulu, söz konusu tezgah parkını, imal edilebilecek değişik ürün tiplerine uygun, değişik tipten yeterli sayıda tezgah içerecek biçimde düzenlemek ve hücre içi harekette etkinliği sağlamaktır. Diğer bir şekilde ise, hücre birbirinin aynı ama yüksek esnekliğe sahip (değişik bir çok işlem yapabilen) tezgahlardan ve hücre içi hareket en az düzeyde olacak biçimde oluşturulabilir. Bu iki hücreden ilki, bir tesis bağlamında tamamlayıcı tip esnek üretim sistemi (complementary-type FMS), ikincisi ise aralarında değiştirilebilir tip esnek üretim sistemi (interchangeable-type FMS) olarak tanımlanabilir. Burada esnekliği sağlamanın çok önemli bir özelliği ortaya çıkmaktadır. Buna göre, hiçbir esnekliği olmayan tezgahlardan oluşan bir düzenleme ile yüksek bir esneklik derecesi elde edilebilir. Tam tersine, yüksek esneklikteki tezgahlardan oluşan bir düzenlemede de, denetim sistemi bu esnekliğin gereklerini yerine getiremeyecek düzeyde ise beklenen çeşitlilikte üretim mümkün olmayabilir (Dinçmen, 2005).

2.4 İmalat Sistemlerinin Temel İlkeleri

Bilim ve mühendislik disiplinleri bazı temel kural ve ilkelere dayanmaktadırlar. İmalat sistemlerinin tasarım ve işletimi de bazı temel ilkelere dayanmaktadır. İmalat sistemlerinin temel ilkeleri aşağıdaki gibidir (Askin ve Standridge, 1993);

- *Ort. Süreç İçi İş Miktarı = Ort. Üretim Hızı × Çevrim Süresi* (Little İlkesi): kararlı durumda bir imalat sisteminin ortalama çıktı miktarı ortalama süreç içi iş miktarının çevrim süresine oranıdır ve bu oran da sabittir. Little ilkesinin önemli sonuçları vardır. Buna göre, bir imalat sisteminde süreç içi iş miktarı sisteme daha fazla malzeme sokularak arttırıldıkça sistemde üretilen hem ürün miktarı hem de çevrim süresi artacaktır. Üretim hızı kapasiteye yaklaştıkça (en az bir makine tam olarak kullanıldığında) üretim hızı artışı azalacak ve daha fazla süreç içi iş miktarı artışı sonucu çevrim süresi de artacaktır. Bunun temel nedeni sistemin kapasite sınırındadır ve sonuç da sistemin aşırı yüklenmesidir.
- *Maddenin Korunumu*: imalat sistemleri girdi hammaddelerini işleyerek nihai ürüne dönüştürürler. Metal kesiminde olduğu gibi bir iş istasyonunda işlemede malzemenini bir kısmı ayrılır. İyi ürünler bir sonraki aşamaya geçerken reddedilenler tekrar işlenir veya hurdaya çıkar. İmalat modellerinin iş istasyonuna giren ile çıkan malzeme arasındaki farkın biriken envanter miktarına eşit olduğunu gösteren denge denklemlerini sağlaması gerekmektedir. Uzun erimde, kararlı bir sistemin envanter birimi olmamalıdır ve girdi çıktı miktarına eşitlenmelidir.
- *Sistem kapsamı arttıkça sistemin güvenilirliği azalır*: büyük sistemler tasarım, koordinasyon ve yürütülmesi açısından zordurlar. Olasılık teorisiyle açıklamak gerekirse, eğer bağımsız N bileşenden oluşan bir sistemde her bir elemanın güvenilirliği r_i olmak üzere tüm sistemin işliyor olması olasılığı $\prod_{i=1}^N r_i$ olacaktır. Bunu sistemin uygunluğu olarak adlandırırsak, $r_i \leq 1$ olduğundan sisteme yeni elemanlar eklemek sistemin uygunluğunu azaltacaktır. Sisteme paralel yeni elemanlar eklendiğinde bireysel olarak r_i değeri artacaktır fakat sistemin büyüklüğü arttıkça bu sadece sistemin uygunluğundaki kayıp oranını azaltacaktır.
- *Nesneler bozulur*: doğadaki her nesne ve canlı zamanla birçok etkenden dolayı bozulur. Hiçbir sistem ve nesne zaman içinde ilk baştaki performansını sürekli

koruyamaz. Tüm donanım ve yazılımlar, makinalar, malzemeler vb. zaman içinde çevredeki dış faktörlerin etkisiyle bozulurlar ve asla sabit kalamazlar.

- *Kompleksliğin üstel büyümesi:* eğer bir sistem M bileşenden oluşuyorsa ve her biri N tane durumda olabiliyorsa, sistemin N^M tane olası durumu vardır. Sistemin tasarımı ve işletilmesi sırasında tüm bu durumların dikkate alınması gerekmektedir. M bileşenli bir sistemde bileşenler arasında $M(M-1)/2$ adet olası bağlantı vardır. Buna göre bir ağda bileşenler arasındaki bağlantıların sayısı sistem büyüklüğünün doğrusal artışından daha hızlı artmaktadır.
- *Teknoloji gelişir:* bilimsel anlamda gelişim hızı artmaktadır. Eskiden iyi ve yeterli olan sistemler günümüzde artık yeterince iyi değildirler ve yetersizdirler. Sistemlerin hayatta kalabilmesi için ilerleme ve gelişme kaydetmesi gerekir, aksi takdirde varlıklarını sürdüremezler.
- *Sistem bileşenleri rassal davranış gösterirler:* mevcut insan gelişmişlik seviyesinde dünya doğal olarak stokastik veya basitçe fazla karmaşık olduğundan tam olarak anlaşılabilir değildir. Bunun sonucunda da olaylar keskin bir biçimde kestirilememektedir. Kesme araçları sertliğe göre değişir, iş parçaları değişiklik gösterir, işleme şartları zamanla değişir ve makinalar işleme hızları ve hazırlık süreleri olarak değişir. Genellikle sistemler deterministik olarak düşünülerek modellenir, fakat burada stokastik değişimlerin sonucu önemli derecede etkilemeyeceği kabul edilir. Genelde sistem parametrelerinin ortalama değerinin en iyi tahmini kullanılır. Kısacası her model belli varsayımlar ve kabuller altında sistemi temsil edebilir ve sistem davranışlarının tüm değişkenliğinin modellenmesi oldukça güçtür.
- *İnsan mantığının sınırları:* insan mantığı tek bir seferde tek bir işi dikkate alabilecek doğrusal düşünme eğilimindedir. İnsanın kısa süreli hafızası 7 parçayla sınırlıdır ve kavramsal bakışı üç boyutlu dünyadaki deneyimlerle sınırlandırılmıştır. Doğa bilimlerinin devamlı karakteristiğinin tersine mühendislik tasarımı zamanla değişen yapay yapılarla ilgilidir. Bu sınırlandırmalar optimal çözümler talep etmek yerine insanın bir amaca ulaşmak için gerekli minimum koşulları eyleme geçirmeye karar verme eğilimi göstermesine neden olmaktadır.

- *Birleştirmek, basitleştirmek ve ortadan kaldırmak zaman, para ve enerji tasarrufu sağlar:* her faaliyet zaman, para ve enerji tüketir. Sistem tasarımında ve işletilmesinde faaliyetlerin birleştirilmesi, basitleştirilmesi ve mümkünse ortadan kaldırılması üretkenlik ve verimliliği arttıracaktır.

Bu temel ilkeler sistem tasarımında dikkate alınması gereken önemli kurallar olmakla beraber katı standartlar olarak düşünülmemeli ve yol gösterici araçlar olarak dikkate alınmalıdır. Durumsallık gereği ve her sistemin bir diğerinden farklı olduğu düşünülürse bu ilkeler genel bir yaklaşımı ortaya koymaktadırlar.

2.5 İmalat Sistemlerinin Tasarım ve Analizinde Karşılaşılan Problemler

Bir imalat sistemi temel olarak olay sürümlü bir sistemdir ve kendi süreçleri arasında eş zamanlı, sırasal, birbiriyle çatışan ve koordineli faaliyetlerden oluşmaktadır. Bu süreçler genellikle eş zamanlı olmayan bir şekildedir ve bazen de ortak kaynaklar için birbirleriyle rekabet halindedir. Bir imalat sisteminin tasarım aşamasında bir dizi süreçler veya sistem bileşenlerinden sentezlenir. Genel anlamda en azından aşağıda belirtilen olası problemlerin çözümlenmesi gerekmektedir (Cheung ve diğ., 2006).

- *Ortak kaynakların paylaşımı:* bir imalat sisteminin kaynakları sınırlıdır ve imalat süreçleri arasında maksimum oranda paylaşılacak şekilde kullanılır. Bu yüzden birden fazla süreç aynı kaynaklar için rekabet halindedir. Eğer sistem iyi tasarlanıp analiz edilmemişse bu durum sistemde çıkmazlara neden olacaktır. Bu yüzden sistemde çıkmazların olmaması sistemin devam edebilmesi için çok önemli bir özelliktir ve her imalat sistemi için de önemli bir amaçtır.
- *Sistem bileşenlerinin sonlu kapasitesi:* sistem bileşenleri hiçbir zaman sonsuz kapasiteye sahip değildirler. İmalat sistem tasarımında hiçbir elemanın kapasitesi tanımlanan sınırı geçmemelidir. Bu yüzden kapasite aşımının olmaması önemli bir sistem özelliğidir.
- *Sistemin tekrar başlatılabilmesi:* imalat sistemi için istenen diğer önemli bir özellik de sistemin ulaşılan bir durumdan tekrar başa dönebilmesidir. Bu özellik sistemin yeniden başlatılabilmesi özelliğidir ve de imalat sistem tasarımında kilit bir öneme sahiptir.

Bütün bu özellikler bir sistemin doğruluk ve dayanıklılığına katkı sağlamaktadırlar. Bir önceki bölümde belirlenen imalat sistemlerinin temel ilkeleri ile birlikte bu özellikler de dikkate alınarak imalat sistemleri tasarlanmalıdır.

Matias ve diğ. (2006) gerçekleştirdiği çalışmada imalat sistemlerinin analizi ve iyileştirilmesinde kullanılan yöntem ve tekniklerin genel bir değerlendirmesi sunulmaktadır. Bu çalışma iki aşamadan oluşmaktadır ve ilk aşamada imalat sistemlerinde kullanılan modelleme ve simülasyon araçlarının gerçek imalat sistemlerine uygulanma sonuçları değerlendirilmektedir. Burada amaçlanan performans göstergelerinin elde edilmesi ve iyileştirme çalışmaları için minimum veri gereksinimini karşılamasıdır. İkinci olarak da farklı sektörlerden ve farklı büyüklükteki imalat firmalarında imalat sistemlerinin analizi ve iyileştirilmesi çalışmalarında yer almış yönetici ve danışmanlarla yapılan görüşme sonuçları derlenmiştir. Bu çalışmada amaç kullanılan yöntem ve araçların yeterliliğinin ve zayıf yönlerinin belirlenmesi ve karşılaşılan önemli problemlerin ortaya koyulmasıdır. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibidir;

- *İmalat sistemlerinde sürekli iyileştirmeyi gerçekleştirebilmek için genel bir analiz yaklaşımının standartlaştırılmasının zorluğu:* imalat sistemlerinin çeşitliliği ve analiz amaçlarının değişkenliği standart bir metod ortaya koyulmasını zorlaştırmaktadır. Bunun nedeni günümüzde imalatın karmaşıklığı ve de üretim süreçlerinin üretilen ürünler kadar fazlalaşmasıdır. Talep yapısı, stok politikası, işgücü niteliği, üretim miktarları, esneklik ve katılık, resmi ve resmi olmayan sistemler, iyi ve kötü gelenekler, eski ve yeni kültürler gibi faktörler her bir işletme için imalat analizini farklılaştırmaktadır.
- *Stratejik kararları tanımlamaya yönlendirilmiş yöntemler:* birçok durumda teşhise yönelik yöntemlerle ilgili girişimler veya gösterge sistemlerin geliştirilmesi firmanın stratejik konuları üzerinde yoğunlaşmaktadır. Bunlar kavramsal bir değerle referans sağlamakla beraber imalatın operasyonel seviyesinde uygulanabilmeye yetecek kadar gelişmiş değillerdir. İş süreçleri mühendisliği (business process reengineering) bilgi yönetimi için güçlü bir araçtır fakat imalat ortamında taktiksel kararların verilmesi sürecinde bir boşluk bulunmaktadır.

- *Sadece betimsel analiz:* sıklıkla imalat sistemlerinin analiz sonuçları sistemdeki faaliyetler ve kaynakların mevcut durumunun denetimi şekline dönüşmektedir. Bu da faaliyetlerin kalitatif modellerine neden olmaktadır. Üretim değişkenlerinin (çevrim süresi, maliyet, verimlilik, kalite vb.) kantitatif verileri ile faaliyet modelleri ilişkilendirilmediğinde faaliyetlerden kaynaklanan problemlerin büyüklüğünün tanımlanması, sıralanması ve derecelendirilmesini imkansız hale getirmektedir.
- *Modelleme ve analiz araçları arasında arayüzün olmaması:* teknik ve yöntemlerin birçoğu sistemin fonksiyonelliğini modelleyen faaliyetler ve akışlar gibi nesnelerin grafiksel temsilini kullanmaktadır. Yine de bu sistemler dinamik simülator veya karar destek sistemi gibi analiz araçlarıyla doğrudan bağlantılı değildir. Model diyagramları bu araçlar tarafından kullanılabilen formatlara kolayca çevrilememektedir.
- *Süreçlerin katma değerinin sayısallaştırılmasının zorluğu:* ürün geliştirme alanında eklenen değer teknikleri oldukça gelişmiş olmakla beraber imalat mühendisliği alanında yeterince gelişmiş değildir. İmalat sistemlerinde taşıma, envanter, bekleme, aşırı üretim, kusurlu parçalar gibi katma değeri olmayan kayıpların ortadan kaldırılması günümüz imalat firmalarının iyileştirme stratejileri ile entegre kavramlardır, fakat bunları uygulamaya koymada birçok zorluk ortaya çıkmaktadır. Günümüzde bunların genel amaçlı uygulaması için tam anlamıyla entegre yöntem ve araçlar bulunmamaktadır.
- *Kalite dışı maliyetlerin sayısallaştırılmasının zorluğu:* firmalar imalat maliyetleri için iyi formüllerle çalışmaktadırlar, fakat yeniden işleme, kusurluların elenmesi, muayene gibi kalite israflarının maliyetlerini tam olarak tanımlayabilen yöntemler bulmak oldukça zordur.
- *Tekniklerin seçimi ve iyileştirme faaliyetlerinin planlanması için yöntemlerin olmaması:* büyük kapsamlı bir analizin sonuçları genellikle çok büyük sayıda olası iyileştirme faaliyetlerini ortaya koymaktadır. Böyle bir durumda analistler ciddi sayıda imalat stratejisi ve teknolojileriyle karşı karşıya kalmaktadır ve bunlardan her biri de üretkenliği arttırmak ve imalat maliyetlerini azaltmak için en iyi çözümü sunduğunu iddia etmektedir. Bu tekniklerin çeşitliliği uygulamaya koyma planlamaları için yeni önceliklendirme mekanizmalarını gerektirmektedir.

- *İleri tekniklerin yetersiz gerçek kullanımı:* üretim planlama, darboğazlar ve çizelgeleme gibi somut problemlerin çözümünde simülasyon kullanılmakla beraber imalat sisteminin baştan başa analizi için kullanılmamaktadır. Uzman sistemler, bulanık kümeler veya yapay sinir ağları gibi ileri yaklaşımlar imalat sektöründe hala geniş bir şekilde uygulanmamaktadır. Özellikler küçük ve orta boy imalat işletmeleri metod mühendisliği tarafından sağlanan klasik araçları kullanmaktadırlar.

2.6 Model ve Modelleme Kavramı

Gerçek bir sistemin modeli o sistemin başka bir araçla ve genellikle daha basitleştirilmiş bir biçimde gösterimidir (Askin ve Standridge, 1993). Bir başka deyişle model bir sistemin önemli özelliklerinin matematiksel olarak ifade edilmesidir (Zhou ve Venkatesh, 1999). Modeller fiziksel modeller ve matematiksel modeller olarak ikiye ayrılmaktadır.

- *Fiziksel Modeller:* çok geniş bir alanda uzun yıllardır kullanılmaktadırlar. Bunlara örnek olarak mimarların kullandığı ölçekli maket modeller gösterilebilir. Bu modellerin en önemli özelliği görsel yönünün kuvvetli olmasıdır. Fiziksel modeller 2 veya 3 boyutlu olabilirler.
- *Matematiksel Modeller:* bu modellerde gerçek sistemi tanımlamak için bir dizi matematiksel denklemler veya mantıksal ilişkiler tanımlanmaktadır. Örneğin, standart üretim süreleri, makina arızaları arasındaki zaman ve parti büyüklüğü gibi parametreler kullanılmaktadır. Matematiksel modelleri fiziksel modellerden ayıran fark, karar değişkenlerinin kullanımınıdır. Yararlı modellerin kurulmasındaki anahtar faktör uygun karar değişkenlerinin seçilmesidir. Bu da problemin tanımı ve sentezi ile yakından ilgilidir. Matematiksel modeller hesaplama biçimlerine göre analitik ve deneysel olarak ikiye ayrılmaktadırlar.
 - *Analitik Modeller:* gerçek sistemin daha matematiksel bir özetini temsil ederler. Sistemin toplam performansını özetleyen bir dizi denklemler üretilir fakat bunlar meydana gelen detaylı olayları ifade etmezler. Kuyruk teorisi, matematiksel programlama ve sezgisel yaklaşımlar (heuristics) bu modellerdendir.

- *Deneysel Modeller:* bilgisayar simülasyonları ve fiziksel simülasyonlar bu gruba girmektedir. Simülasyon modelleri işletim parametreleri veya kontrol mantığında değişiklikler yaparak sistemde meydana gelen olayları taklit ederler. Analitik ve deneysel modeller bir arada kullanılarak karma modeller de elde edilebilir.

Modelleme birçok amaç için kullanılmaktadır. En önemli kullanım alanları ise aşağıdaki şekilde özetlenebilir (Askin ve Standridge, 1993)

- *Optimizasyon:* karar değişkenleri için en iyi değerlerin bulunması
- *Performans tahmini:* potansiyel planların ve duyarlılığın denetimi
- *Kontrol:* istenilen kontrol kurallarının seçiminde yardımcı olmak
- *Kavrama:* sistemin daha iyi anlaşılmasını sağlamak
- *Haklı çıkarma:* görüşlerin desteklenmesi ve satış kararlarına yardımcı olmak.

Günümüzde modern imalat sistemleri makinalar, taşıma sistemleri, insan ve bilgisayar sistemlerinin karmaşık konfigürasyonundan oluşmaktadır. Modern imalat sistemleri içinde yer alan esnek imalat sistemleri ayrık olay sistemleridir ve birbirinden farklı makinalar, otomatik taşıma sistemleri ile neyin ne zaman ve nerede yapılmasını belirleyen karar verme sisteminden oluşmaktadır (Silva ve Valette, 1989).

Esnek üretim sistemleri otomasyon yoğun sistemlerdir ve mümkün olduğunca personel müdahalesini (insan ihtiyacını) en aza indirmektedirler. Bu haliyle esnek imalat sistemleri çok büyük avantajlar sağlamakla beraber uygulaması pahalı sistemlerdir ve çoğu zaman büyük miktarda yatırım gerektirmektedirler (Askin ve Standridge, 1993). Buradan yola çıkarak böyle bir sistemin tasarlanması, işletilmesi ve geliştirilmesinde sistematik bir modelleme ve analiz yaklaşımına ihtiyaç duyulduğu sonucuna varılabilir. Günümüzde yazılım teknolojilerindeki gelişmeler sayesinde simülasyon teknikleri sistem tasarımı ve geliştirilmesinde yoğun bir şekilde kullanılmakla beraber, artan sistem karmaşıklığından kaynaklanan sorunlarla baş edebilmek için sistem modelleme ve simülasyondaki çalışmalar simülasyon tekniklerinden modelleme metodolojisine kaymaktadır (Vangheluwe ve diğ., 2001). Esnek imalat sistemleri pahalı donanım ve yazılım yatırımı gerektirdiğinden

kurulumundan önce modellenmesi ve denenmesi gerekmektedir (Zhou ve Venkatesh, 1999).

Bir imalat sisteminin yaşam döngüsü boyunca farklı aşamalarda bazı kararlar verilmesi gerekmektedir. Tasarım aşaması esas olarak sistemin temel yapısının ve boyutlarının belirlenmesidir. Operasyon aşaması ise kaynakların dağıtılması veya atanması, çizelgeleme, kontrol, gözetim ve detaylı değişiklikleri içermektedir (Allam ve Alla, 1998). Bütün bu zorlukların üstesinden gelebilmek için sistemin daha kurulmadan önce bir modeline ihtiyaç vardır.

Buradan yola çıkarak böyle bir sistemin tasarlanması, işletilmesi ve geliştirilmesinde sistematik bir modelleme ve analiz yaklaşımına ihtiyaç duyulduğu sonucuna varılabilir.

3. PETRİ AĞLARI VE İMALAT SİSTEMLERİNDE MODELLEME

3.1 Petri Ağları ile İmalat Sistemlerinin Modellenmesi

Bu bölümde Petri ağları kullanılarak imalat sistemlerinin modellenmesi ve analizinin nedenleri ve Petri Ağlarının sağladığı avantajlar açıklanacaktır. Modern imalat sistemleri oldukça paralel ve dağıtılmış sistemlerdir. Bu sistemlerin hem kalitatif hem de kantitatif bir bakış açısıyla analiz edilmeleri gerekmektedir. Kalitatif analiz çıkmazların olmaması, aşırı yoğunluğun önlenmesi ve paylaşılan kaynakların kullanımında belirli bağdaşmazlıkların olması gibi özellikleri incelemektedir (örneğin bir robot). Kalitatif analizin temel amacı modellenen sistemin doğruluğunu sağlamaktır. Kantitatif analiz ise performans özellikleri (işlem hacmi), tepkisel özellikler (ortalama tamamlanma süresi) veya kullanma özellikleri (ortalama kuyruk uzunlukları veya kullanım oranları) gibi özellikleri incelemektedir. Bir başka deyişle kantitatif analiz modellenen sistemin verimliliğinin değerlendirilmesiyle ilgilenmektedir. Petri ağları sistemin hem doğruluğu hem de verimliliğinin incelenmesine izin veren modeller kurulmasına imkan sağlamaktadır (DiCesare ve diğ., 1993).

Esnek bir imalat sisteminin davranışı olaylar ve faaliyetler şeklinde ifade edilir. Bir olay sistemin durumunda bir değişime denk gelirken faaliyet bir makine tarafından gerçekleştirilen operasyona denk gelmektedir. Farklı faaliyet kümeleri sistemin durumlarını belirlemektedir. Her bir durumda farklı faaliyetler eş zamanlı olarak meydana gelebilir, örneğin; aynı anda birkaç makine kendi operasyonlarını yerine getirirken aynı anda bir robotun da bir parçayı bir yerden diğerine taşıyor olması. Petri ağları bu gibi eş zamanlı meydana gelen olaylar sisteminin modellenmesi için basit ve uygun bir yöntem sağlamaktadırlar (Zuberek ve Kubiak, 1994).

Esnek bir imalat sistemi, farklı ürünleri aynı zamanda yapan iş süreçlerinin birçok eş zamanlı akışlarını içermektedir ve üretim maliyetlerini azaltmak için sıklıkla paylaşılan kaynakları kullanmaktadır. Kaynak paylaşımı ve karmaşık süreç rotalama

gibi özellikler bu çeşit bir sistemin karakteristiklerinin diferansiyel denklemler, fark denklemleri gibi konvansiyonel araçlarla ifade edilmesini zorlaştırmaktadır (Murata, 1989; Jeng, 1997b; Zhou ve Dicesare, 1992). Petri ağları grafiksel doğası, hem statik hem de dinamik sistem karakteristikleri ve sistem belirsizliğini ifade etme ve incelemeye imkan veren yapısı ve de matematiksel analiz tekniklerinin var olması sebebiyle esnek imalat sistemlerinin modellenmesi için uygun bir araç olarak kabul edilmektedir (Qiao ve diğ., 2002).

Bir imalat sisteminin tasarlanması aşamasında iki amacı karşılaması gerekmektedir. İlk olarak sistem tasarımı kullanım anlamında gereken fonksiyonları yerine getirebilmedir. İkinci olarak da sistem çıkmazları ve kapasite aşımı gibi hatalardan bağımsız doğru bir sistem tasarımının olması gerekmektedir. Petri ağları, sistem tasarımının doğruluğu ve tutarlılığının etkin bir şekilde analiz edilebilmesine imkan veren bir dizi bileşenden oluşan sistemin sentezlenebilmesine uygun kavramsal bir altyapı sunmaktadır (Cheung ve diğ., 2006). Ayrıca Petri ağları, sistemin altında bulanabilecek darboğazlar, çıkmazlar ve diğer ilgili problemler hakkında yararlı bilgiler sağlamak ve daha da önemlisi mevcut sistem üzerinde testler yapmaya gerek kalmaksızın öneriler oluşturulmasına imkan vermektedir (Valavanis, 1990).

Bunların ışığında Petri ağları ile modellemenin avantajlarını aşağıdaki gibi özetleyebiliriz (Desrochers ve Al-Jaar, 1995; Zhou ve Venkatesh, 1999).

- Karmaşık bir endüstriyel sistemin eş zamanlılık, aynı anda veya farklı zamanlarda meydana gelme, çatışma, birbiriyle bağdaşmazlık, öncelik ilişkileri, deterministik olmayan ve sistem çıkmazları gibi karakteristiklerinin modellenmesinin kolaylığı. Petri ağları modelleri sistem bağımlılıklarının görsel olarak ifade edilmesini sağlar. Global bilgi yerine lokal bilgi üzerinde yoğunlaşır. Yukardan aşağıya, aşağıdan yukarıya ve karma metotlarla model tasarımı mümkündür.
- Grafiksel Petri ağı gösteriminden doğrudan denetleyici kontrol kodlarının üretilmesi. Programlanabilir mantık kontrolleri veya bilgisayarlar kullanılarak gerçek zamanlı uygulamalar için Petri ağı algoritması elde edilebilir.
- Çoğu kez zaman alıcı simülasyonlara gerek kalmaksızın sistemdeki çıkmazlar ve kapasite aşımı gibi istenmeyen özelliklerin kontrol altına alınması.

- Birçok sistem için simülasyona gerek kalmaksızın performans analizinin yapılması. Üretim hızı, çevrim süresi, kaynak kullanımı ve güvenilirlik değerlendirilebilir. Darboğaz olan makineler belirlenebilir.
- Petri ağ modelleri oldukça gelişmiş matematiksel ve pratik temeliyle hiyerarşik bir modelleme aracı ortaya koymaktadır.
- Modelden ayırık olay simülasyonu kurulabilir.
- İmalat sistemine gerçek zamanlı kontrol, izleme ve hata düzeltme için imkan veren durum bilgisi sağlanabilir.
- Petri ağ modeli sistemdeki öncelik ilişkileri, eş zamanlı operasyonlar, tekrarlı faaliyetler ve paylaşılan kaynakların birbiriyle bağdaşmazlığını da içerdiğinden çözümlenmeye de yardımcı olmaktadır.

3.2 Petri Ağlarının Tanımı ve Özellikleri

3.2.1 Petri ağlarının tanımı

Petri ağları, Carl Adam Petri (1962)'nin otomasyon ve haberleşme uygulamaları için ağ şeklinde matematiksel bir araç ortaya koyduğu doktora çalışmasına dayanarak geliştirdiği ve kendi adıyla anılan, ayırık olay sistemlerinin modellenmesi, analiz ve tasarımında kullanılan grafiksel ve matematiksel bir metodolojidir. Petri ağlarının fabrika otomasyonu, performans değerlendirme, iletişim protokolleri doğrulaması, yazılım sistemi spesifikasyonlarının tanımlanması ve tasarımı, ofis bilgi sistemleri, programlanabilir mantık ve imalat sistemleri alanlarında uygulamaları geliştirilmiştir. Petri ağları eş zamanlı, eş zamansız, paralel, aynı anda meydana gelen, dağıtılmış, kaynak paylaşımının olduğu, ardışıklığın olduğu, deterministik ve/veya stokastik karaktere sahip kompleks sistemlerinin modellenmesinde kullanılabilir (Murata, 1989; Bobbio, 1990; DiCesare ve diğ., 1993; Zhou ve Venkatesh, 1999; Cardoso ve Camargo, 2000; Marsan ve diğ., 1995). Petri ağları matematiksel bir araç olarak sistemin davranışlarını açıklayan durum denklemlerinin elde edilmesine, cebirsel sonuçların bulunmasına ve diğer matematiksel modellerin geliştirilmesine imkan sağlamaktadır (Murata, 1989). Ayrıca modelde yer alan semboller yardımıyla sistemdeki olaylar için simülasyon imkanı sağlar.

PA üç görüş altında düşünülebilir (Cardoso ve Camargo, 1999). Bunlar,

1. Konumlar ve geçişler olarak adlandırılan iki çeşit düğüm ve konumlar üzerine dağılmış olan jetonların (işaretleme) hareketi vasıtasıyla sistem dinamiğinin tanımlanabildiği ve de jeton oyunuyla gelişimin tanımlanabildiği bir grafikdir.
2. Bileşenleri doğal sayılar olan ve davranışın doğrusal programlamayla karakterize edilebildiği bir vektörler topluluğudur.
3. Kuralın her bir kullanımında koşulun tüketildiği ve eylemin üretildiği bir “eğer koşul sonra eylem” şeklinde spesifik üretim kuralı sistemidir.

İşaretili (marked) bir Petri ağı (PA) $Z = (P, T, I, O, m)$ şeklinde beşli bir yapıdır ve

1. $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}, n > 0$, çemberlerle ifade edilen sonlu konum (place) kümesi
2. $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}, s > 0$, dikdörtgen ya da çubuk şeklinde gösterilen sonlu geçiş (transition) kümesi, burada $P \cup T \neq \emptyset$ ve $P \cap T = \emptyset$ 'dir.
3. $I : P \times T \rightarrow N, N = \{0, 1, 2, \dots\}$ olmak üzere, P 'den T 'ye yönlendirilmiş oklar (arc) kümesini tanımlayan girdi fonksiyonu
4. $O : T \times P \rightarrow N, T$ 'den P 'ye yönlendirilmiş oklar (arc) kümesini tanımlayan çıktı fonksiyonu
5. $m : P \rightarrow N$, i . bileşeni i . konumdaki jeton (token) sayısını ifade eden işaretlemedir (marking). Bir başlangıç işaretleme m_0 ile gösterilir. Jetonlar (token) noktalar ile temsil edilir.

$I(p, t) = k$ ifadesi p konumunu t geçişine bağlayan k tane paralel okun olduğunu göstermektedir. Aynı şekilde $O(p, t) = k$ ifadesi de t geçişini p konumuna bağlayan k tane paralel okun olduğunu göstermektedir. Eğer $k = 0$ ise konumlar ile geçişler arasında ok olmadığını anlamına gelmektedir. $I(p, t) > 1$ durumunda $I(p, t)$ sayısı okun ağırlığı ya da p konumunda t geçişine yönlendirilmiş okların sayısı olarak adlandırılır. Aynı şekilde $O(t, p)$ de t geçişinden p konumuna yönlendirilmiş okların sayısı ya da ok ağırlığı olarak ifade edilir.

Alternatif biçimde bir PA $Z = (P, T, F, W, m)$ şeklinde de ifade edilebilir. Burada F tüm okların kümesi $\{P \times T\} \cup \{T \times P\}$ nin bir alt kümesi ve $W : F \rightarrow N$ de okların ağırlığıdır.

I ve O iki adet $n \times s$ pozitif tamsayı matrislerdir. Ağ yapısını ifade etmenin pratik bir yolu da yineleme (incidence) matrislerinin kullanılmasıdır. O matrisinden I matrisinin çıkarılmasıyla yineleme matrisi elde edilir ve aşağıdaki gibi ifade edilir

$$C = O - I \quad (3.1)$$

Başlangıç işaretlemesinin olmadığı ve yönlendirilmiş grafik yapısının tanımlandığı (P, T, I, O) şeklindeki dört bileşenden oluşan yapıya PA yapısı denir (Zhou ve Venkatesh, 1999). Bu bileşenler, grafiksel gösterimde çember biçiminde ifade edilen konum (place), dikdörtgen kutu ya da çubuk şeklinde gösterilen geçiş (transition), konum ve geçişi birbirine bağlayan yönlendirilmiş ok (arc), ve konumlar içinde nokta biçiminde gösterilen jetonlar (token)'dır (Murata, 1989).

İşaretlemenin olmadığı PA yapısı sistemin statik kısmını ifade etmektedir. Sistemin davranışı sistemin durumu ve bunların değişimiyle ifade edilebilir (DiCesare ve diğ., 1993). Ağ yapısının dinamikleri işaretleme (marking) ve işaretleme değişim kuralının (marking evolution rule) tanımlanmasıyla oluşturulmaktadır.

Bir Z ağının M işaretlemesi P 'nin N doğal sayılar üzerinde bir uygulamasıdır. Örneğin; her bir konuma pozitif bir tamsayının (jeton sayısı) atanmasıdır.

Bir işaretli PA veya ağ sistemi ise (Z, M_0) çiftidir. Burada Z = bir Petri ağı ve M_0 = başlangıç işaretlemesidir.

Bir konumdaki jeton sayısı o konumun yerel durumunu (local state) ifade eder (durum değişkeninin değeri). Tüm ağ sisteminin durumu konumların tüm yerel durumlarının birleşimiyle ifade edilir. Bir M işaretlemesi $n = |P|$ vektörü şeklinde ifade edilebilir. Burada p . bileşen, $M(p)$, p konumundaki jeton sayısını ifade eder. M vektörü ağ sistemi tarafından tanımlanan ayrık olay dinamik sisteminin durum vektörüdür (state vector).

Ağ sistemini çalışması ve değişimi jeton oyunu (token game) olarak da adlandırılan geçerlilik (enabling) ve oluşum-geçiş (firing-occurrence) kurallarıyla gerçekleşmektedir.

$t \in T$ olmak üzere bir geçiş sadece ve sadece eğer $m(p) \geq I(p, t)$, $\forall p \in P$ durumunda geçerli (enabled) hale gelir.

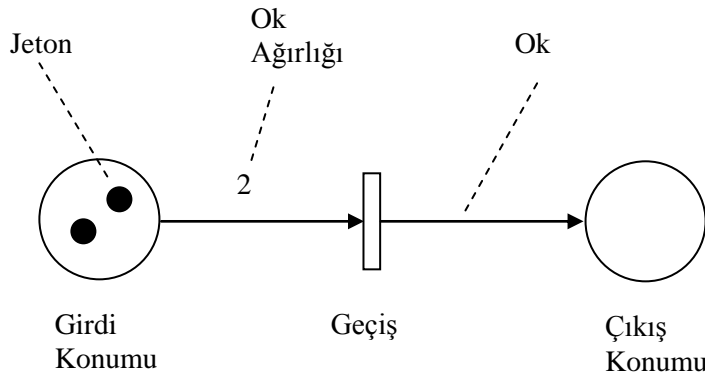
Bir t geçişi m işaretlemesinde geçerli hale gelmiş olmak üzere ateşlenir ve m' işaretlemesini oluşturur. Bu durum aşağıdaki gibidir:

$$m'(p) = m(p) - I(p,t) + O(p,t), \forall p \in P \quad (3.2)$$

m' işaretlemesi m işaretlemesinden erişilebilir olarak ifade edilir. Geçerlilik kuralı şu anlama gelmektedir: bir t geçişinin tüm girdi konumları yeterli sayıda jetona sahip ise t geçişi geçerli hale gelir. Bir başka ifadeyle bir olayın olması için gerekli tüm şartlar sağlandığında olay meydana gelir. Mantık bakış açısından bu şartlar bir VE ilişkisi oluşturur. Geçiş ya da ateşleme kuralı da geçerli hale gelen bir t geçişinin veya olayın meydana geldiğini ifade eder.

Jetonların konumların içine yerleştirilmesi ve geçişler arasındaki akışları modellenen sistemin ayrık olay dinamik davranışının tanımlanması ve çalışılmasına imkan vermektedir (Zhou ve Venkatesh, 1999).

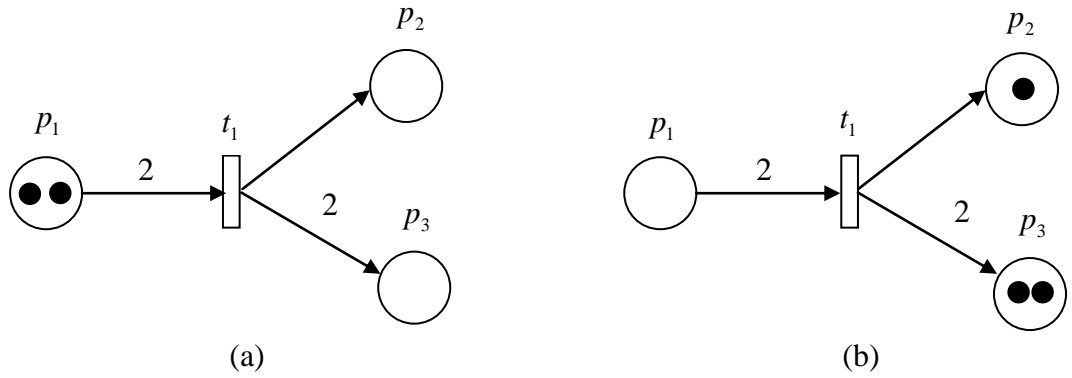
Bir konum bir başka konuma, ya da bir geçiş bir başka geçişe doğrudan bağlı olamaz. Geçiş ve konumu birbirine bağlayan oklar üzerindeki değerler, geçiş ve konum arasındaki paralel bağlantı sayısını gösterir. Herhangi bir geçiş iki çeşit konuma sahiptir. Kendinden önceki konumlar girdi konumu, kendinden sonraki konumlar çıktı konumu olarak adlandırılır. Petri ağı bileşenleri Şekil 3.1'de gösterilmiştir.



Şekil 3.1: İşaretli bir PA ve bileşenleri.

Jetonların hareketi, Petri ağları ile dinamik bir çalışma imkanı sağlar. Jetonların konumlar arasında hareket edebilmesi için, ilk anda yeterli sayıda jetonun gerekli konum veya konumlara yerleştirilmesi gerekir. Başlangıç işaretlemesi, ilk anda hangi konumda ne kadar jeton olduğu bilgisini verir. Bu sağlandıktan sonra, jeton

konumlar arasında hareket eder. Bunun için iki konum arasındaki geçişin oluşması gereklidir. Geçişin oluşmasından önce de geçerlilik kuralının yerine gelmesi gerekir. Bir geçişin geçerli olması için, girdi konumu ile geçiş arasındaki paralel ok sayısı kadar jetonun geçişe ait girdi konumunda yer alması şarttır. Bu şart sağlandıktan sonra geçiş geçerli olur. Geçiş gerçekleştikten sonra, girdi konumu ile geçiş arasındaki paralel ok sayısı kadar jeton girdi konumundan silinir. Geçiş ile çıktı konumu arasındaki paralel ok sayısı kadar jeton çıktı konumuna yerleştirilir. Geçerlilik kuralı ve oluşum kuralı ile ilgili gösterimler Şekil 3.2’de verilmiştir (Zurawski ve Zhou, 1994).



Şekil 3.2: (a) Geçiş t_1 geçerli, (b) Geçerli geçiş t_1 oluştu.

3.2.2 Petri ağlarının özellikleri

Matematiksel bir araç olarak Petri ağları bir dizi özelliğe sahiptirler. Bu özellikler modellenen sistemin fonksiyonel özelliklerinin varlığının ya da bulunmamasının belirlenmesine imkan vermektedir (Zhou ve DiCesare, 1993; Murata, 1989; Leondes, 2001). Bu özellikler genel olarak yapısal (structural) ve davranışsal (behavioral) özellikler şeklinde sınıflandırılmaktadır. Davranışsal özellikler bir PA'nın başlangıç durumu veya başlangıç işaretlemesine dayanan özelliklerdir. Yapısal özellikler ise başlangıç durumu ya da işaretlemesine dayanmayan özelliklerdir ve sadece PA topolojisi ve yapısına dayanmaktadır.

Petri ağları özelliklerinden literatürde en çok bilinenleri ve kullanılanları, ulaşılabilirlik (reachability), canlılık (liveness), geri dönebilirlik (reversibility), korunumluluk (conservativeness) ve sınırlanmışlık (boundedness) özellikleridir. Bu özelliklerin anlamları ve ne işe yaradıkları aşağıda detaylı olarak anlatılmaktadır.

3.2.2.1 Ulaşılabilirlik

$Z = (P, T, I, O, m_0)$ bir PA olmak üzere, eğer m_0 işaretlemesini m işaretlemesine dönüştüren bir geçiş oluşumları sıralaması var ise m işaretlemesi m_0 işaretlemesinden ulaşılabilir. Eğer m 'de geçerli hale gelen bir geçiş oluşumu ya da ateşlenmesi (firing) m işaretlemesine neden olursa, m işaretlemesi m işaretlemesinden derhal ulaşılabilir olarak adlandırılır. m_0 işaretlemesinden ulaşılabilir tüm işaretlemelerin kümesi R ile temsil edilir.

Ulaşılabilirlik özelliği başlangıç işaretlemesine dayandığından davranışsal bir özelliktir. İmalat sistemlerinin modellenmesi ve tasarımında önemli bir nokta sistemin spesifik bir duruma ulaşip ulaşamayacağı veya belli bir fonksiyonel davranış sergileyebilip sergileyemeyeceğidir. Ulaşılabilirlik modellenen sistemin belirli bir m işaretlemesinde olması olasılığı sorusuna cevap vermektedir (Marsan ve diğ., 1995). Ulaşılabilirlik özelliği genel olarak PA ile modellenen sistemin belirlenen spesifikasyonları sağladığı ya da istenmeyen özellikler sergileyip sergilemediğini ortaya koymaya yaradığından oldukça önemlidir.

İstenen fonksiyonel davranışın sonucu olarak modellenen sistemin spesifik bir duruma ulaşip ulaşamayacağını bulabilmek için, m spesifik durumu ve oluşum sıralamaları istenilen fonksiyonel davranışı ifade etmek üzere m_0 işaretlemesini m işaretlemesine dönüştüren geçiş oluşumlarının sıralamasının bulunması gerekmektedir. Bir PA modelinde m_0 işaretlemesini m işaretlemesine dönüştüren ilave geçiş oluşum sıralamalarının olması PA modelinin sistemin altında yatan yapı ve dinamikleri tam olarak yansıtamadığını gösterir. Bu aynı zamanda eğer PA modeli sistem gereksinimlerini doğru olarak yansıtıyorsa, gerçek sistemin fonksiyonel davranışında beklenmeyen durumların varlığını işaret edebilir (Zurawski ve Zhou, 1994).

3.2.2.2 Sınırlandırılmışlık

$Z = (P, T, I, O, m_0)$ bir PA ve ulaşılabilir kümesi de R olmak üzere, bir $p \in P$ konumu B -sınırlıdır eğer $m(p) \leq B, \forall m \in R$ ise ve burada B pozitif bir tamsayıdır.

Eğer P 'deki her bir konum B -sınırlı ise Z de B -sınırlıdır.

Eğer Z sonlu başlangıç işaretlemesi m_0 için sınırlı ise Z yapısal olarak sınırlıdır.

PA'nda konumlar sıklıkla imalat sistemlerindeki parçalar, ekipmanlar, paletler ve AGV'ler için depolama alanlarını temsil etmek için kullanılmaktadırlar. Aynı zamanda konumlar kaynakların uygunluğunu temsil etmek için de kullanılmaktadırlar. Bu depolama alanlarının ve kaynakların kapasite aşımının önlenmesine yönelik önerilen kontrol stratejilerinin belirlenmesi gerekmektedir. PA'nın sınırlandırılmışlık özelliği modellenen sistemdeki aşırı yüklenmelerin ve aşımaların (overflow) varlığının belirlenmesi için kullanılmaktadır. Kesikli bir imalat sistemi özellikle bir kuyruk sistemi olarak modellendiğinde sınırlandırılmışlık kavramı genellikle imalat sisteminin istikrarı veya kararlılığı (stability) olarak değerlendirilmektedir (Zhou ve Venkatesh, 1999).

3.2.2.3 Korunumluluk

Bir PA $Z = (P, T, I, O, m_0)$ bir w vektörüne göre korunumludur eğer bir $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ vektörü var ise ve $w_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ öyle ki $w^r m = w^r m_0, \forall m \in R$ ve R ulaşılabilir kümedir.

Bir PA $Z = (P, T, I, O, m_0)$ bir w vektörüne göre kısmen korunumludur (partially conservative) eğer bir $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ vektörü var ise ve $w_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$ ve $w \neq o$ öyle ki $w^r m = w^r m_0, \forall m \in R$.

Eğer Z ağı $w = (1, 1, \dots, 1)^r$ vektörüne göre korunumlu ise veya

$$\sum_{i=1}^n m(p_i) = \sum_{i=1}^n m_0(p_i), \forall m \in R \text{ ise } Z \text{ katı korunumludur (strictly conservative).}$$

Korunumluluk özelliği başlangıç işaretlemesine dayanmadığında yapısal bir özelliktir.

Gerçek sistemlerde kullanımdaki kaynak sayısı finansal ve diğer nedenlerle sınırlıdır. Eğer kaynakları ifade etmek için jetonlar kullanılırsa ve sistemdeki sayıları sabitlenmiş ise, bir PA'nda jetonların sayısı sistemin işaretlemeleri ne olursa olsun değişmeden kalacaktır. Bunun altında yatan neden kaynakların ne yaratılıp ne de yok olmayacağı varsayımdır. Ağ yapısı açısından bakılacak olursa, her bir geçişin girdi oklarının sayısı o geçişin çıktı oklarının sayısına eşit olması anlamına gelmektedir. Korunumluluk her bir işaretleme için jetonların ağırlıklı toplamalarının değişmediğini ifade etmektedir.

3.2.2.4 Canlılık

Eğer herhangi bir $m \in R$ işaretlemesinde oluşumu ya da ateşlenmesi t geçişini geçerli yapan bir işaretlemeye ulaşan bir geçiş sıralaması var ise t geçişi canlıdır. Aynı şekilde t geçişi eğer herhangi bir $m \in R$ işaretlemesinde t geçişini içeren bir geçiş oluşum sıralaması var ise canlıdır. Bir PA kendisini oluşturan tüm geçişler canlı ise canlıdır. Eğer ağı canlı kılan sonlu başlangıç işaretlemesi varsa PA yapısal olarak canlıdır (structurally live).

$m \in R$ olmak üzere m işaretlemesinde başlayarak t geçişini geçerli kılan herhangi bir geçiş sıralaması yok ise t geçişi ölüdür (dead). Eğer hiçbir geçişin geçerli hale gelmediği bir $m \in R$ işaretlemesi var ise PA çıkmaz (deadlock) içermektedir ve bu işaretleme çıkmaz işaretleme olarak adlandırılır. Canlılık özelliğinin önemli bir sonucu eğer en az bir geçiş canlı ise PA sistemi çıkmaza girmeyeceğidir. Bununla beraber çıkmazların olmaması bir PA sisteminin canlı olması için tek başına geçerli bir koşul değildir (Marsan ve diğ., 1995).

Çıkmaz durumları kaynakların uygun atanamaması veya kaynakların tamamının ya da bir kısmının aşırı kullanımı sonucu ortaya çıkmaktadır. Esnek ve otomatize imalat sistemlerinde makineler, malzeme taşıma sistemleri (AGV, robot vb) ve depolama alanları ortak kaynaklardır. Ortak kaynak kullanımının olduğu bir ortamda aşağıdaki dört durum aynı anda meydana gelerek çıkmaza neden olabilir (Coffman ve diğ., 1971). Bunlar,

1. Bağdaşmazlık (mutual exclusion): bir kaynak ya uygundur ya da bu kaynağa başkalarıyla paylaşımı olmayan erişime sahip bir sürece atanmıştır.
2. Tutmak ve beklemek (hold and wait): bir süreç bir kaynak ya da kaynakları elinde tutarken daha fazla kaynak talep ediyorsa.
3. Önalım hakkının olmaması (no preemption): bir sürece atanan kaynak ya da kaynaklar süreç tarafından serbest bırakılmadan uzaklaştırılmıyorsa.
4. Dairesel bekleme (circular wait): iki veya daha fazla sürecin zincir şeklinde sıralandığı ve her bir sürecin zincirin bir sonraki süreci tarafından tutulan kaynakları beklemesi durumunda.

Bir PA'nın canlılık özelliğine sahip olması m_0 başlangıç işaretlemesinden ulaşılabilir bir m işaretlemesi için herhangi bir oluşum-ateşleme sıralaması boyunca ilerleyerek

ağdaki herhangi bir t geçişin ateşlenmesi tamamıyla mümkündür anlamına gelmektedir. Bu yüzden eğer bir PA canlı ise sistemde çıkmaz olmayacaktır. Bazı durumlarda bir sistemin başlatılması bazı geçiş veya geçişlerin sonlu sayıda ateşlenmesi ve daha sonra ölü hale gelmesi şeklinde modellenebilir. Başlatılma periyodundan sonra, ağ sistemi canlı olmasa bile sistem çıkmazsız (deadlock-free) bir davranış sergileyebilir (Zhou ve Venkatesh, 1999; Zurawski ve Zhou, 1994).

3.2.2.5 Geri dönebilirlik

Eğer $\forall m \in R(m_0), m_0 \in R(m)$ ise $Z = (P, T, I, O, m_0)$ PA geri dönebilirdir (reversible). m' işaretlemesi m işaretlemesinden ulaşılabilir olmak üzere $m' \in R(m_0)$ işaretlemesi bir başlangıç durumu (home state) olarak adlandırılır. Eğer ağı geri dönebilir yapan sonlu başlangıç işaretlemesi var ise PA yapısal olarak geri dönebilirdir.

Geri dönebilirlik bir PA sisteminin başlangıç işaretlemesine sonsuz sıklıkta geri dönebilmesi olasılığını ifade etmektedir (Marsan ve diğ., 1995). Bir PA'nın geri dönebilirliği m_0 'dan ulaşılabilen herhangi bir m işaretlemesi için m_0 işaretlemesinin de m 'den ulaşılabilir olduğu anlamına gelmektedir. Birçok sistem için hatalı durumlardan doğru durumlara geçiş gerektiğinden bu önemli bir özelliktir (örneğin; imalat sistemleri açısından hata düzeltilmesi (error recovery) durumu). Ayrıca bu özellik tekrarlanan tüm imalat sistemlerinde sistemin dögüsel davranışını garanti etmesi açısından da önemlidir. Eğer bir ağ çıkmaz içeriyorsa ağ geri dönebilir değildir (Zhou ve Venkatesh, 1999; Murata, 1989).

PA özelliklerinden sınırlandırılmışlık, canlılık ve geri dönebilirlik birbirinden bağımsız özelliklerdir (Murata, 1989; Marsan ve diğ., 1995). Bu da bu özelliklerin ayrı ayrı incelenmesine imkan vermektedir. Petri ağlarının özelliklerinin sistem modellemesinde ne amaçla kullanıldıklarını özetleyecek olursak; canlılık özelliğinden, özellikle sistemlerin ölü noktalarının belirlenmesinde yararlanır. Geri dönebilirlik özelliği, belirli bir işlem yapıldıktan sonra, sistemin işlem öncesi durumuna gelmesini sağlar. Sınırlandırılmışlık özelliği de, sistemdeki kapasite sınırlamalarının modelde gösterilmesine imkan verir. Korunumluluk özelliği, jetonlar kaynakları ifade ettiklerinde, sistemin PA modelindeki jeton sayısının değişmediğini göstermektedir. Buna göre kaynaklar ne yaratılır ne de yok olurlar. PA bakış açısıyla her bir geçişe gelen girdi oklarının sayısı çıktı oklarının sayısına eşittir.

Ulaşılabilirlik özelliği, sistemin işleyişinin istenen konumlara gelip gelmediğini araştırır. Bu özelliğe dayalı olarak geliştirilen ulaşılabilirlik analizi yardımıyla, sistemin başlangıç durumundan itibaren gelebileceği tüm olası durumlar belirlenir (Murata, 1989; Zurawski ve Zhou, 1994; Zhou ve Venkatesh, 1999).

3.3 Petri Ağlarında Analiz Yöntemleri

Petri ağları analiz yöntemleri literatürde çeşitli şekillerde sınıflandırılmakta ve adlandırılmaktadır. Marsan ve diğ. (1995) bu yöntemleri yapısal analiz teknikleri (structural analysis techniques) ve durum uzayı analiz teknikleri (state space analysis techniques) olmak üzere iki gruba ayırmaktadır. Yapısal analiz teknikleri PA model ve sistemlerinde başlangıç işaretlemesinin dikkate alınmadığı ve modelin yapısal veya statik bileşenlerinin incelendiği tekniklerdir. Bu tekniklerde modelin yapısal özellikler dikkate alınarak sistem analiz edilmektedir. Ulaşılabilirlik analiz teknikleri (reachability analysis techniques) olarak da adlandırılan durum uzayı analiz teknikleri başlangıç işaretlemesinin dikkate alındığı ve de başlangıç işaretlemesine dayanan özelliklerin incelendiği tekniklerdir. Bu teknikler PA modelleriyle değil PA sistemleriyle ilgilidir.

Murata (1989) bu yöntemleri üç grupta toplamaktadır. Bunlar ulaşılabilirlik ağacı veya grafiği yöntemi (reachability tree method), matris-denklemler yaklaşımı ve indirgeme veya ayrıştırma teknikleridir. Bunlardan ulaşılabilirlik ağacı yöntemi ve indirgeme yöntemleri başlangıç işaretlemesine dayanmaktadır ve durum uzayı analiz teknikleri sınıfındadır. Matris-denklemler yaklaşımı başlangıç işaretlemesine dayanmamaktadır ve yapısal analiz teknikleridir. Matris-denklemler yaklaşımı değişmez değer analiz yöntemi (invariant analysis method) olarak da adlandırılmaktadır (Zhou ve Venkatesh, 1999).

3.3.1 Ulaşılabilirlik analizi yöntemi

Ulaşılabilirlik analizinde sistemin başlangıç durumu veya koşulundan başlanılarak sistemin ulaşabileceği tüm olası durumlar ve ilişkiler elde edilmeye çalışılır. Bu süreç sonunda elde edilen işaretlemelerin temsili, ulaşılabilirlik ağacı veya grafiği olarak adlandırılır. Ulaşılabilirlik ağacında düğümler m_0 başlangıç işaretlemesinden ve takip eden işaretlemelerden türetilen işaretlemeleri, her bir ok da bir işaretlemeyi diğerine dönüştüren geçiş oluşunu veya ateşlenmesini ifade eder (Murata, 1989).

Burada asıl amaç m_0 başlangıç işaretlemesinden başlayarak olası tüm işaretlemelerin elde edilebilmesidir (Proth ve Xie, 1996). Ulaşılabilirlik ağacı elde edildikten sonra eğer durum sayısı sonlu ise PA'nın davranışsal özellikleri incelenebilir. İşaretli bir PA için tüm olası işaretlemelerin elde edilip adlandırılması için iki strateji bulunmaktadır (Zhou ve Venkatesh, 1999). Bunlar, önce derinlemesine (depth-first) ve önce-enlemesine (breadth-first) stratejileridir.

Önce-derinlemesine stratejisinde başlangıç işaretlemesinden başlanarak tüm geçerli geçişler belirlenir, rassal olarak herhangi biri ateşlenir ve yeni bir işaretleme ortaya çıkar. Eğer bu işaretleme eski ya da ölü ise durulur ve bunun elde edildiği işaretlemeyle geri dönülerek ateşlenmemiş başka bir geçiş ile devam edilir. Aksi taktirde elde edilen bu yeni işaretlemede aynı şekilde tüm geçerli geçişler belirlenir, bunlardan birinin ateşlenmesiyle yeni bir işaretleme elde edilir. Eğer işaretlemelerin sayısı sonlu ise bu şekilde devam edilerek tüm geçişler ateşlenerek tüm işaretlemeler elde edilir.

İkinci stratejide ise tüm geçerli geçişlerin aynı anda ateşlenmesiyle yeni işaretlemeler ortaya çıkar. Her bir işaretleme için eğer eski veya ölü ise bir sonraki işaretlemeyle geçilir. Aksi taktirde tüm geçerli geçişler belirlenir ve hepsi ateşlenerek yeni işaretlemeler elde edilir. Bu süreç aynı seviyedeki tüm işaretlemeler bitene kadar devam eder ve hepsi bittiyse bir sonraki seviyedeki işaretlemelere geçilir. Bu her iki strateji de aynı ulaşılabilirlik grafiğini ortaya çıkaracaktır. Bir PA ve başlangıç işaretleme için ulaşılabilirlik grafiği her zaman tektir.

Bir PA sınırlandırılmamış ise veya modellenen sistemde sonsuz sayıda durum var ise ulaşılabilirlik ağacı oluşturma süreci sonsuza kadar devam edecektir. Bir başka deyişle eğer ağ sınırlandırılmamış ise ulaşılabilirlik ağacı sonsuza kadar büyüyecektir. Bunu önlemek ve ulaşılabilirlik ağacını sonlu tutabilmek için sonsuz olarak düşünülebilecek özel bir sembol w kullanılır. w aşağıdaki özellikleri sağlar (Murata, 1989).

Herhangi sonlu bir k tamsayısı için $w > k, w \leq w$ ve $w \pm k = w$ ve

Eğer bir m' işaretleme elde edilirse öyle ki m_0 'ı m' e bağlayan yol üzerinde bir m işaretleme varsa ve

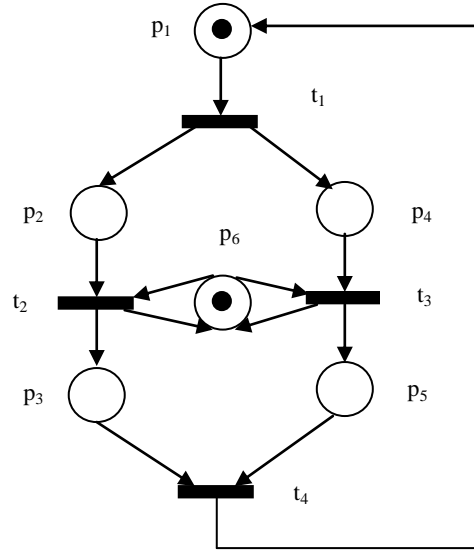
PA'nın tüm konumları için $m'(p) \geq m(p)$,

PA'nın en az bir tane p' konumu için $m(p') > m(p)$ sağlıyorsa p' işaretlemesi w şeklinde ifade edilir. m' den elde edilen tüm işaretlemelerde p' nin işaretlemesi w olarak kabul edilir (Proth ve Xie, 1996). Bu ulaşılabilirlik ağacı PA'nın davranışsal özelliklerinin analizi için kullanılabilir.

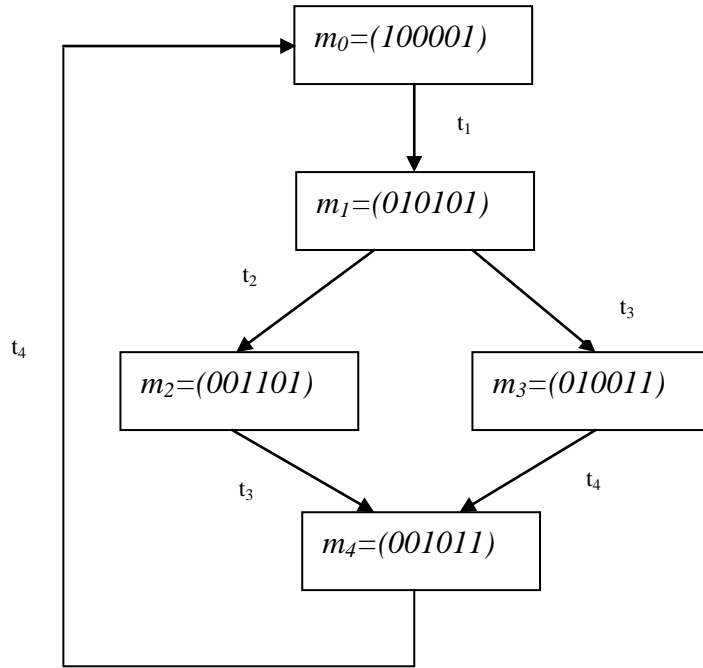
Ulaşılabilirlik grafiği kullanılarak analiz edilebilecek özellikler ise şöyledir (Murata, 1989; Proth ve Xie, 1996; Zhou ve Venkatesh, 1999)

1. Ağ sınırlandırılmış ve ulaşılabilirlik grafiği de sonludur sadece ve sadece herhangi bir düğümde w bulunmuyorsa. Eğer $m(p) = w$ olmak üzere ulaşılabilirlik ağacında böyle bir m işaretlemesi var ise p konumu sınırlandırılmamıştır.
2. Ağ güvenlidir sadece ve sadece ağacın her bir düğümü yalnızca 0 ve 1'leri içeriyorsa.
3. Eğer hiçbir ölüson (deadend) w içermiyorsa, ağdaki farklı ölüsonların sayısı ağın ölü işaretlemelerinin sayısına eşittir. Eğer bir ölüson w içeriyorsa, ağ sonsuz sayıda ölü işaretlemeye sahiptir.
4. Eğer bir geçiş ağaçta ok ismi olarak bulunmuyorsa, bu geçiş ölüdür.
5. Ulaşılabilirlik ağacında w sembolünü bulundurmayan herhangi iki düğüm için yönlendirilmiş bir yol (path) var ise ve de tüm geçişler mevcut ise, ağ canlıdır.
6. Eğer ulaşılabilirlik ağacında w sembolünü bulundurmayan ve herhangi bir düğümden başlangıç işaretlemesi m_0 'a yönlendirilmiş bir yol var ise ağ geri dönebilir.

PA analizinde ulaşılabilirlik analizi yöntemi temel bir yaklaşımdır ve sadece davranışsal özelliklerin analiz edilebilmesine imkan vermektedir. Bu yöntemin sınırlaması kombinyonel durum hızlı artışı problemidir (combinatorial state explosion problem). w sembolü sınırlandırılmamış bir PA için ulaşılabilirlik ağacının elde edilmesi için kullanıldığından, ağın canlılık ve geri dönebilirlik özellikleri ağacın görünümüne bakılarak analiz edilemez (Peterson, 1981; Wong ve Zhou, 1992). Şekil 3.3'de sınırlandırılmış, canlı ve geri dönebilir bir PA ve Şekil 3.4'de de bu ağın ulaşılabilirlik grafiği görülmektedir.



Şekil 3.3: Sınırlandırılmış, canlı ve geri dönebilir bir PA.



Şekil 3.4: Ulaşılabilirlik grafiği.

3.3.2 Değişmez değer analiz yöntemi

Konumlar ve geçişler arasındaki ilişkileri temsil eden oklar iki matris şeklinde ifade edilebilirler. Bu matrisler ve oluşum kuralına dayanan doğrusal denklemler oluşturularak jetonların toplamının değişmeden kaldığı konumların alt kümeleri elde edilebilir. Aynı zamanda işaretlemeyi tekrar aynı işaretlemeye döndüren geçiş ateşleme sırası bulmak da mümkündür.

Matematiksel olarak C yineleme matrisi $C = O - I$ olmak üzere, oluşum kuralı durum denklemi olarak aşağıdaki gibi ifade edilir

$$m_k = m_{k-1} + Cu_k, k = 1, 2, \dots, \quad (3.3)$$

burada m_k , m_{k-1} işaretlemesinden hemen ulaşılabilir bir işaretleme ve u_k ise sadece bir elemanı 1 diğerleri 0 olan $s \times 1$ şeklinde bir sütun vektörüdür ve k . ateşleme vektörü olarak adlandırılır.

Eğer k . ateşlemede t_i geçişi ateşlenirse, u_k vektörünün i . elemanı 1 ve diğer tüm elemanları 0 olacaktır. C matrisinin i . elemanı t_i geçişinin ateşlenmesi sonucu meydana gelen işaretleme değişimini ifade etmektedir.

Yineleme matrisi ile ilgili olarak iki önemli kavram da P-Değişmez Değeri (P-Invariant) ve T-Değişmez Değeri (T-Invariant).

$C^T x = 0$ ifadesinin pozitif tamsayı çözümü x P-Değişmez Değeri olarak adlandırılır.

(3.3) durum denkleminin her iki tarafını P-Değişmez Değeri'nin transpozesi olan x^T ile çarparak

$$x^T m_k = x^T m_{k-1} + x^T C u_k, k = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

elde edilir. $C^T x = 0$ ise $x^T C = 0$ olacağından

$$x^T m_k = x^T m_{k-1}, k = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

elde edilir. Bu yüzden $x^T m_k = x^T m_0 = \text{sabit}$ elde edilir.

P-Değişmez Değeri şu şekilde açıklanabilir: Bir P-Değişmez Değeri'ndeki sıfırdan farklı elemanlar okların ağırlığını temsil etmekte öyle ki bu konumlardaki jetonların ağırlıklı ortamlarının toplamı bir başlangıç işaretlemesinden ulaşılabilen tüm işaretlemeler için sabittir (Zurawski ve Zhou, 1994). Bu konumlar $\|x\|$ şeklinde gösterilen bir P-Değişmez Değeri tarafından kaplanmaktadır denilebilir.

$Cy = 0$ ifadesinin tamsayı çözümü y , P-Değişmez Değeri olarak adlandırılır. Varsayalım bir geçişler sıralamasının ateşlenmesi m_0 işaretlemesini tekrar m_0 işaretlemesine dönüştürsün. Toplam ateşleme vektörü u 'nun i . elemanı sıralamadaki t_i geçişlerinin ateşlenme sıklığı olsun. u aynı zamanda ateşlenme sayım vektörüdür.

Buna göre,

$$m_0 = m_0 + Cu \quad (3.6)$$

ise $Cu = 0$ 'dır ve u bir P-Değişmez Değeri'dir.

Bir P-Değişmez Değeri'ndeki sıfırdan farklı elemanlar bir m_0 işaretlemesini tekrar m_0 işaretlemesine dönüştüren ateşleme sıralamasına ait geçişlerin ateşleme sayısını ifade etmektedir. Bir P-Değişmez Değeri m_0 işaretlemesini tekrar m_0 işaretlemesine dönüştüren tüm ateşleme sıralamasını ve bu geçişlerin sıralamada kaç defa ortaya çıktığını göstermekle beraber geçişlerin ateşlemelerini sıralamasını tayin etmemektedir (Zurawski ve Zhou, 1994; Zhou ve Venkatesh, 1999).

Aynı zamanda ağdaki geçişlerin ve konumların alt kümeleri P-Değişmez Değeri ve T-Değişmez Değeri ile bulunabilir. T-Değişmez Değeri geçişlerin alt kümelerini, P-Değişmez Değeri ise konumların alt kümelerini vermektedir.

C yineleme matrisi Petri ağlarının yapısal özelliklerinin analizinde önemli bir rol oynamaktadır. Bununla ilgili sonuçlar Çizelge 3.1'de özetlenmektedir.

Çizelge 3.1: C yineleme matrisi ve x bir tamsayı vektörü olmak üzere yapısal özellikler için gerek ve yeter koşullar.

Özellik	Gerek ve Yeter Koşullar
Yapısal olarak sınırlandırılmış	$\exists x > 0, x^T C \leq 0$
Korunumlu	$\exists x > 0, x^T C = 0$
Tekrarlı	$\exists x > 0, Cx \geq 0$
Tutarlı	$\exists x > 0, Cx = 0$

3.4 Petri Ağları ile Modelleme

Petri ağları, Carl Adam Petri (1962)'nin otomasyon ve haberleşme uygulamaları için ağ şeklinde matematiksel bir araç ortaya koyduğu doktora çalışmasına dayanarak geliştirdiği ve kendi adıyla anılan, ayrık olay sistemlerinin modellenmesi, analiz ve tasarımında kullanılan grafiksel ve matematiksel bir metodolojidir. Petri ağları eş zamanlı, eş zamansız, paralel, aynı anda meydana gelen, dağıtılmış, kaynak paylaşımının olduğu, ardışıklığın olduğu, deterministik ve/veya stokastik karaktere sahip kompleks sistemlerinin modellenmesinde kullanılabilir (Murata, 1989; Bobbio, 1990; DiCesare ve diğ., 1993; Zhou ve Venkatesh, 1999; Cardoso ve Camargo, 2000; Marsan ve diğ., 1995). Petri ağları matematiksel bir araç olarak

sistemin davranışlarını açıklayan durum denklemlerinin elde edilmesine, cebirsel sonuçların bulunmasına ve diğer matematiksel modellerin geliştirilmesine yardımcı olur (Murata, 1989).

Ayrık olay sistemleri durum uzayları ayrık kümelerden oluşan doğrusal olmayan sistemlerdir (Bulanch ve diğ., 2002). Eş zamanlılık, asenkron çalışma, olay sürümlülük, ve belirsizlik gibi özelliklere sahip sistemlere ayrık olay sistemleri denilmektedir. Durumlar arası geçişler olay sürümlüdür ve bu geçişler ateşleme/tetikleme koşulunun sağlanmasıyla gerçekleşir. Ayrık olayların gerçekleşmesine bağlı olarak geçişler asenkron olarak tetiklenebilir. Ayrık olay sistemlerin davranışları çoğunlukla, kendi içlerinde işlemekte olan ayrık olaylarla belirlenir. Esnek imalat sistemleri, haberleşme ağları, bilgisayar ağ sistemleri, ulaşım sistemleri, robotlar vb. sistemler ayrık olay sistemlerine örnek olarak verilebilir.

Ayrık olay sistemleri üzerinde tasarım, analiz, sentez vb. işlemler yapılırken ihtiyaç duyulan model, temel olarak iki yöntem kullanılarak elde edilir. Bunlar; Sonlu Durum Makinesi (finite state machine) ve Petri ağı (PA) yaklaşımlarıdır. Sonlu Durum Makinesi yaklaşımları ardışık çalışabilen modeller sunmaktadır. Sonlu Durum Makinesi kullanılarak oluşturulan modeller grafiksel görünüm yönünden zayıf kalmaktadır (Uzam, 1998). Petri ağları ayrık olay sistemlerinin modellenmesinde, analizinde, tasarımında ve kontrolünde anlaşılabilirliği ve grafiksel görselliği yüksek modeller sunmaktadır.

Petri ağları, grafiksel sistem temsiliinde kullanılan blok diyagramları veya mantıksal ağaçlar gibi tekniklerle kıyaslandığında bir sistem içerisindeki parçalar ve aktiviteler arasındaki mantıksal etkileşimleri daha doğal bir yoldan ifade edebilmek için daha uygundur (Bobbio, 1990). Bu özellikleriyle Petri ağları ayrık olay sistemlerinin, iletişim protokollerinin, yazılım ve işletim sistemlerinin, endüstriyel kontrol sistemlerinin, çok işlemcili hafıza sistemlerinin, veri akışı işleyen sistemlerin, programlanabilir mantık kontrol devrelerinin ve esnek imalat sistemlerinin modellenmesi ve analizi gibi çok geniş bir uygulama alanına sahiptir.

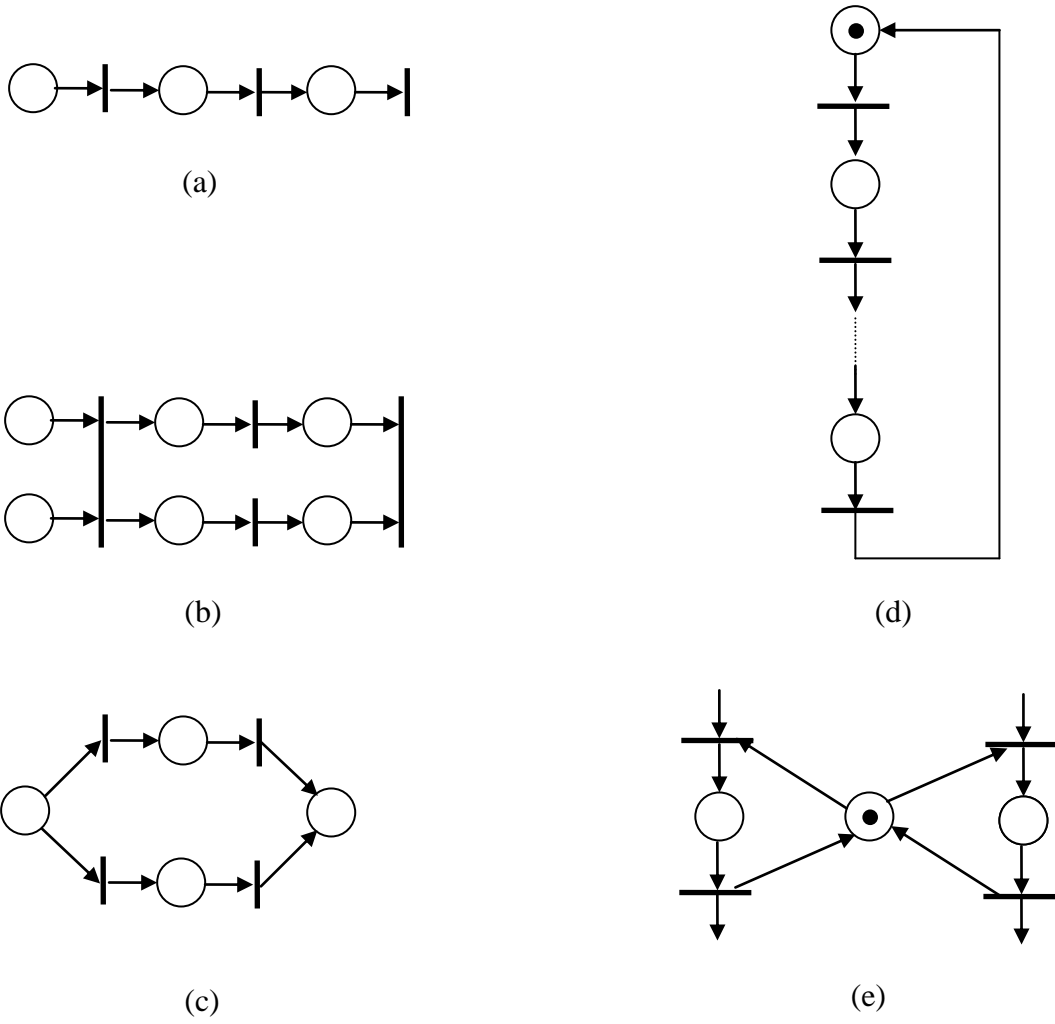
3.4.1 Petri ağları ile genel modelleme yaklaşımı

Bu kısımda Petri ağları ile bir sistemin modellenmesinde modellenen sistemde karşılaşılabilecek ve dikkat edilmesi gereken özellikler ve ilişkiler ile bütünsel bir genel modelleme yaklaşımı anlatılacaktır. Bunun yanında bu genel modelleme

yaklaşımı imalat sistemleri için genelleştirilerek ele alınacaktır. Bir başka deyişle imalat sistemlerinin açısından Petri ağları ile modelleme göz önünde bulundurulacaktır.

Günümüzün modern imalat sistemleri otomasyon ağırlıklı sistemlerdir. Otomasyonel bir imalat sistemi robotlar, makinalar, hammadde, taşıma sistemleri, sensörler, bilgisayarlar ve spesifik süreçlere ait aksesuarlar gibi çok çeşitli bileşenleri içermektedirler. Bu sistemlerin modellenmesi aşamasında ana operasyonlarla beraber bunların öncelik, eş zamanlılık ve çatışma ilişkilerinin de üzerinde durulması gerekmektedir. Bu süreçler ve operasyonlar arasındaki temel ilişkiler aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir (Zhou ve Robbi, 1994) ve Şekil 3.5’de bu temel ilişki örnekleri verilmektedir.

1. *Sırasal (sequential)*: eğer bir operasyon diğerini takip ediyorsa, bunları ifade eden konum ve geçişler sırasal bir ilişki oluştururlar.
2. *Eş Zamanlı (concurrent)*: eğer iki operasyon bir olay tarafından başlatılıyorsa, bunlar bir geçişle başlatılan paralel bir yapı oluştururlar, örneğin; iki konumun aynı olayın çıktısı olması. Eş zamanlı operasyonlar, birden fazla konumun aynı anda işaretlenebildiği veya birden fazla geçişin geçerli olabildiği sırasal olarak birbirine bağlı konum/geçiş serisi olarak ifade edilebilirler.
3. *Çatışan (conflicting)*: eğer iki operasyondan herhangi biri bir operasyonu takip ediyorsa, geçişler aynı konumdan iki çıktı oluşturacaklardır.
4. *Döngüsel (cyclic)*: eğer bir operasyonlar sırası birbiri ardına devam ediyorsa ve sonuncunun tamamlanması ilkini başlatıyorsa operasyonlar arasında döngüsel bir yapı oluşur.
5. *Birbiriyle Bağdaşmazlık, Ayrıklık (Mutually Exclusive)*: eğer paylaşılan kaynakların kullanımı kısıtından dolayı bu süreçler aynı anda meydana gelemiyorlarsa iki süreç birbiriyle bağdaşmazdır. Örneğin; bir robot iki makine tarafından yükleme ve boşaltma için kullanılıyor olabilir. Bu iki yapı paralel bağdaşmaz ve sırasal bağdaşmazdırlar (Zhou ve DiCesare, 1991).



Şekil 3.5: Petri Ağlarında Temel İlişki Örnekleri: (a) Sırasal, (b) Eş Zamanlı, (c) Çatışan, (d) Döngüsel, (e) Birbiriyle Bağdaşmayan.

Petri ağları ile sistem modellenmesinde kaynaklar tahsis edilmiş/adanmış (dedicated) ve paylaşılan (shared) olmak üzere ikiye ayrılmaktadır (Colom, 2003). Tahsis edilmiş kaynak tek bir girdi ve tek bir çıktı oku bulunan konum özelliği taşıırken paylaşılan kaynak birden fazla girdi ve yine birden fazla çıktı okları içeren konum özelliği göstermektedir. Bir sensörün durumunu temsil eden bir koşul modellenen koşulun doğruluna işaret eden jeton taşıyan konum ile modellenir. Aynı çeşit kaynaklar içerdikleri jeton sayısı kaynak sayısına denk gelen konumlarla ifade edilebilirler. Bir operasyonun başlatılması farklı çeşit kaynak ve şartların uygunluğunu gerektirmektedir ve birden fazla girdi oku içeren geçiş olarak modellenir. Bir operasyonun tamamlanması bazı kaynakların serbest bırakılmasına

ve koşulların durumunda değişime neden olabilir ve birden fazla çıktı oku bulunan geçiş olarak modellenir.

Bir imalat sisteminin modellenmesinde PA bileşenleri konum, geçiş ve jetonlar aşağıdaki şekilde yorumlanmaktadır (Desrochers ve Al-Jaar, 1995).

- Konumlar, makinalar, otomatik kılavuzlu araçlar, bilgisayar kodu veya tampondaki parçaları temsil ederler. Bir veya daha fazla jetonun bir konumda bulunması o kaynağın uygunluğunu ifade ederken, hiç jeton bulunmaması kaynağın uygun olmadığı anlamına gelir. Bu yüzden konumların amacı sistemin merkezi olmayan doğasını ve karmaşık bir imalat sistemindeki bilginin dağıtılmış durumunu tamamıyla kavrayabilmektir.
- Bir geçişin ateşlenmesi/tetiklenmesi bir faaliyeti ifade eder. Bu faaliyet iki arka arkaya gelen olayla başlar ve biter. Olaylar arasındaki zaman sıfır olabilir, derhal olan (immediate) geçiş. Örneğin; bir makine onarım faaliyeti “tamirin başlatılması” olayı ile başlar. Belli bir zaman süresi sonunda “tamirin bitmesi” olayı ile biter. Bunun yanında bir parça programının indirilmesi iki faaliyeti neredeyse anlık zaman farkıyla ayıracak şekilde tamamlanır.
- Konumlar ve geçişler birlikte sistemin işletimindeki koşulları ve öncelik ilişkilerini ifade etmektedirler.

PA bileşenleri ve özelliklerinin imalat sistemlerinin modellenmesinde nasıl kullanıldıkları ve neyi ifade ettikleri Çizelge 3.2-3.4’deki gibidir (Zhou ve Venkatesh, 1999).

Çizelge 3.2: PA bileşenlerinin imalat sistemindeki karşılıkları.

PA Bileşenleri	İmalat Sistemindeki Karşılıkları
Konumlar	Kaynak durumu ve operasyonlar
Geçişler	Operasyonların, süreçlerin, aktivitelerin ve olayların başlangıcı ve/veya bitişi
Yönlendirilmiş oklar	Malzeme, kaynak, bilgi ve/veya kontrol akışının yönü

Çizelge 3.3: PA özellikleri ve imalat sistemindeki anlamları.

PA Özellikleri	Modellenen İmalat Sistemindeki Anlamı
Ulaşılabilirlik	Başlangıç koşullarından belirli bir durumun elde edilebilmesi
Sınırlandırılmışlık	Kapasite aşımının olmaması (ör. iş istasyonu veya depolama alanı)
Güvenilirlik (safeness)	Tek bir kaynağın uygun olması veya devam eden bir işlem bitmeden yeni bir talebin olmaması
Korunumluluk	Makina ve AGVler gibi tüketilemeyen kaynakların korunumu
Canlılık	Çıkmazların-ölü noktaların olmaması veya modellenen olay, operasyon, süreç veya aktivitenin devam etmesinin garanti edilmesi
Geri dönebilirlik	Tekrar başlayabilme ve döngüsel (cyclic) davranış
Tekrarlanabilirlik	Bazı işaretlemeler için tekrarlı operasyon, aktivite ve olayların olması
Tutarlılık	Bazı işaretlemeler için döngüsel davranışın olması

Çizelge 3.4: İmalat kavramlarının PA modellerine çevrilmeleri.

İmalat Kavramları	PA modellemesi
Hareketli veya üretilen parti miktarı	Yönlendirilmiş okların ağırlığı
Kaynak miktarı (ör. AGVler, makineler, iş istasyonları ve robotlar)	İlgili kaynakların miktarını modelleyen konumlardaki jeton sayısı
Bir iş istasyonunun kapasitesi	İş istasyonunun uygunluğunu modelleyen konumlardaki jeton sayısı
İşlemdeki iş miktarı (work-in-process)	Tüm makinelerin operasyonları ve güvenlik stoğunu modelleyen konumlardaki jeton sayısı
Üretim hacmi	Bir ürünün tamamlanmasını ifade eden geçişlerin ateşlenme sayısını modelleyen konumlardaki jeton sayısı
Bir operasyonunun süresi (ör. Hazırlık, işlem ve yükleme)	Operasyonu modelleyen konum veya geçişle ilgili zaman gecikmesi
Taşıma veya ulaştırma süresi	Taşıma veya ulaştırmayı modelleyen yönlendirilmiş ok, konum veya geçişle ilgili zaman gecikmesi
Sistem durumu	PA işaretlemesi (zamanlı PA için zamanlama bilgisi)
Sıra, aynı anda kullanım, çatışma, kaynak paylaşımı	PA modülleri

PA ile bir sistemin modellenmesinde izlenmesi gereken genel modelleme yöntemi aşağıdaki gibi özetlenebilir (Zhou ve Venkatesh, 1999).

1. *Operasyonlar ve Kaynakların Tanımlanması:* eldeki endüstriyel otomatize sistem tanımı için, önemli olayların, operasyonların, süreçlerin, kaynakların, koşulların ve rotalama bilgisi vb. belirlenip tanımlanmasıdır.

2. *İlişkilerin Tanımlanması*: bir önceki adımda belirlenen olaylar, operasyonlar ve/veya süreçler arasındaki ilişkilerin tanımlanmasıdır. Kaynaklar farklı sınıflara ayrılmalı, paylaşılan kaynaklar için ana atama kuralları ile rotalama bilgisi belirlenmelidir. Bundan sonra başlangıç ağ yapısına kabaca karar verilebilir.
3. *Petri Ağının Tasarımı*: olaylar, operasyonlar ve süreçler için konum ve/veya geçişlerin tasarlanarak adlandırılmasıdır. İkinci aşamada tanımlanan ilişkilere göre bu konum ve geçişler sıralanır. Kaynakların durumlarını ve koşulları modelleyen konumlar işaretlenir ve adlandırılır. Ne iki konumun ne de iki geçişin birbirlerine doğrudan bağlanmasını önleyecek şekilde gerekli konumlar ve geçişler modele eklenir. Her bir geçiş için, eğer geçişi geçerli kılmak için kaynak/kaynakların gereksinim, gerekli koşulun gerçekleşmesi veya operasyon/operasyonların tamamlanmasının gerekliliği konumda temsil ediliyorsa, konumdan geçişe bir girdi oku çizilir. Eğer bir geçişinin ateşlenmesi veya tetiklenmesi kaynakları serbest bırakıyorsa, koşulları değiştiriyorsa ve konumda operasyonun başlamasına işaret ediyorsa, geçişten konuma bir çıktı oku çizilir. Bir konumdan geçişe doğru olan girdi oklarının sayısı geçişi geçerli kılmak için gerekli olan konumdaki jeton sayısına (kaynak miktarı) eşit olmalıdır. Bir geçişten konuma doğru olan çıktı oklarının sayısı geçişin ateşlenmesine bağlı olarak konumda üretilecek olan jeton sayısına eşit olmalıdır. Sistemin başlangıç durumuna göre tüm konumların başlangıç jeton sayıları belirlenir. Eğer gerekiyorsa zamanlama vb. diğer karakteristikler ilişkilendirilmelidir.
4. *Petri Ağının Modifikasyonu*: modelin sistemin fonksiyonel operasyonlarını yansıtıp yansıtmadığı kontrol edilerek ağda düzeltmeler yapılır ve gerçek sistemi yansıtması sağlanır.

Burada sunulan bu genel PA modelleme yöntemi bilinen davranışsal özellikleri sahip bir ağ modeli ortaya çıkarmayabilir (Zhou ve DiCesare, 1993; Zhou ve Robbi, 1994). Modelleme sürecinde, belli bir koşulu yerine getirmek için bir konum işaretli iken bir geçişi geçersizleştiren (disabled) engelleyici oklar (inhibitor arc) veya öncelik geçişleri (priority transitions) kullanılması da gerekebilir.

3.4.2 Petri ağları ile sistematik modelleme yöntemleri

Petri ağları eş zamanlılık, çatışma, bağdaşmazlık vb. durumları içeren sistemlerin modellenmesi için uygun bir metodoloji olmakla beraber modellenen sistemin

karmaşıklığı arttıkça bazı problemler ortaya çıkmakta ve model çok büyümekte ve de modellenen sistemin özellikle analiz edilebilir olması güçleşmektedir. Bu problemler genel olarak durum uzayının üstel artmasından kaynaklanmaktadır ve durum uzayı patlaması (state space explosion) problemi olarak adlandırılmaktadır. Bunun önüne geçebilmek için önemli sistem özelliklerinin korunduğu ve sistemin kolayca analiz edilebildiği sistematik sentez modelleri önerilmektedir.

PA ile bir imalat sistemini modellemenin en az iki tane ortak yolu bulunmaktadır (Dicesare ve Jeng, 1993). İlkinde konumlar kaynak uygunluğunu veya faaliyet durumunu ifade etmek için kullanılmaktadır. Geçişler ise olayların başlangıç ve bitişlerini temsil etmektedir. İkincisinde ise konumlar yine koşulları temsil etmektedir. Bunun yanında faaliyet bir olay olarak düşünülmekte ve geçişlerle ifade edilmektedir.

İmalat kontrolünün PA ile modellenmesi iki genel yaklaşım vardır (Dicesare ve Jeng, 1993). Bunlardan biri, bir önceki bölümde anlatıldığı gibi, sistematik bir genel modelleme yöntemiyle sistemin PA modelini oluşturmak ve istenen sistem özellikleri için analiz etmektir. Fakat orta büyüklükteki durum sayısı için bile özellikle canlılık özelliğini analiz etmek pratik olarak mümkün olmayabilir. Bunun üstesinden gelmek için önemli özellikler korunarak ağı boyutunu (durum sayısını) düşüren dönüştürme yöntemleri geliştirilmiştir (Johnsonbaugh ve Murata, 1981; Lee ve diğ., 1987; Uzam, 2004; Huang ve diğ., 2005; Rangel ve diğ., 2005). Ağı boyutu uygun dönüştürme yöntemleri kullanılarak düşürüldükten sonra indirgenmiş ağ üzerinde analiz gerçekleştirilebilmektedir. Bu yöntemler oldukça güçlü olmakla beraber esnek imalat sistemlerinde olduğu gibi birçok paylaşılan kaynağın olduğu bir ortamda yeterli olmayabilir. Alternatif bir yaklaşım olarak istenilen özellikleri garanti eden sistematik modelleme yöntemlerinden faydalanmaktır. Bu sentez yöntemleri analiz ihtiyacını halletmekte ve bu sayede durum uzayı patlaması problemini önlemektedir.

Sentez yöntemleri olarak adlandırılan sistematik modelleme yöntemleri yukarıdan-aşağıya (top-down), aşağıdan-yukarıya (bottom-up) ve karma (hybrid) yöntemler olarak sınıflandırılmaktadır. Bir PA modelinin sentezinde odak noktası hem sistem teknik özelliklerinin hem de çıkmazın olmaması, kapasite aşımının olmaması ve döngüsel davranış gibi davranışsal özelliklerin karşılanmasıdır (Zhou ve DiCesare, 1993; Proth ve Xie, 1996).

3.4.2.1 Aşağıdan-yukarıya yöntemler

Aşağıdan-yukarıya yaklaşımların ardındaki temel düşünce parçala (decomposition) ve birleştir (composition) olarak özetlenebilir. Parçalama bir sistemi birkaç alt sisteme ayırmaktır. İmalat sistemlerinde bu parçalama iş tiplerine ve/veya fiziksel tesis yerleşimine göre yapılabilir. Sistemin karmaşıklığına göre hiyerarşik parçalama kullanılabilir. Daha sonra tüm alt sistemler Petri ağları olarak modellenir. Birleştirme ise bu alt sistemleri tek bir tam model şeklinde entegre etmektir (Zhou ve Venkatesh, 1999).

Bu yöntemlerde ilk olarak tamamlanmamış (incomplete) alt sistemler detaylı bir şekilde ayrı ayrı belirlenir. Bu alt sistemler genellikle basit ve kolayca doğrulanabilirlerdir. Her bir alt sistemdeki etkileşimler konumlar, geçişler veya yollarla temsil edilir. Daha sonra her bir sentez aşamasında bu etkileşimler göz önünde bulundurularak ilgili alt sistemler konumlar ve/veya geçişlerin birleştirilmesiyle daha büyük bir alt sistem oluşturulur. Birleşime sonucu oluşan ağın analizi hemen yapılabilir ve bu sayede sentezin son aşamasına gelindiğinde analiz basitleştirilmiş olur. Sentez aşamalarının sonunda nihai sistem ve bazı önemli özellikleri elde edilmiş olur (DiCesare ve Jeng, 1993).

Sistemin parçalanmasıyla ortaya çıkan ve modül olarak da adlandırılan alt sistem çeşitleri şöyledir (Zhou ve Jeng, 1998).

- *Kaynak/Operasyon modülü*: tahsis edilmiş/adanmış bir kaynak gerektiren tek bir operasyon aşamasını tanımlamaktadır. Şekil 3.6 (a)' da görüldüğü gibi p_1 ve p_3 geçiş parçalarının stoklarını oluşturan tampon stoğunu temsil etmektedir. p_4 konumu tek veya çoklu kapasite kaynağının uygunluğu temsil etmektedir. t_1 , t_2 ve p_2 ile ilgili üç yorum ise şöyledir;
 1. t_1 ve t_2 geçişleri sırasıyla bir operasyonun başlangıç ve bitişini tanımlarken, p_2 konumu ise operasyonu temsil etmektedir.
 2. t_1 ve t_2 geçişleri sırasıyla yükleme ve boşaltmayı tanımlarken, p_2 konumu ise operasyonu temsil etmektedir.
 3. t_1 ve t_2 geçişleri sırasıyla hazırlık ve operasyon veya süreci tanımlarken p_2 konumu kullanılmaya hazır kaynağın durumunu temsil etmektedir.

- *Periyodik bakımı yapılan kaynak/operasyon modülü:* bir önceki modül periyodik bakım gerektiren bir kaynağa genişletilebilir. Varsayalım her k süreci sonunda kaynak bakıma gereksinim duysun. Şekil 3.6 (b) bu modülü göstermektedir. p_4 konumu k adet jetonla başlangıçta işaretlenmiştir ki bu da kaynağın ardışık k kere kullanılabilmesi anlamına gelmektedir. p_6 konumunun her seferinde yalnız bir operasyonun devam ettiğini garanti etmesi gerekmektedir. Unutulmamalıdır ki t_3 geçişi (bakım hizmeti) sadece p_5 konumu k tane jeton biriktirdiğinde geçerli olmaktadır. Burada t_3 geçişine tamir için gerekli zamanı belirten bir gecikme ilişkilendirilebilir (zamanlı Petri Ağı-Timed Petri Net) .
- *Hata eğilimli kaynak/operasyon modülü:* Şekil 3.6 (a)'daki modüle bir döngü/halka eklenerek Şekil 3.6 (c)'deki gibi hata eğilimli bir kaynağa genişletilebilir. t_3 geçişi makinanın bozulmasını ve t_4 geçişi de tamir edilmesini ifade etmektedir. p_5 konumu tamirde olan kaynağın durumunu göstermektedir.
- *Öncelik modülü:* her biri kendine tahsis edilmiş bir kaynak gerektiren farklı rotaları tanımlamaktadır. Kaynaklar genellikle farklı performans gösterirler. Bu yüzden bir parça bu kaynakların herhangi biri tarafından işlenmeye hazır olduğunda uygun kaynaklar arasında en yüksek önceliğe sahip olanını alacaktır. Öncelikler işlem süreleri, kalite fonksiyonları vb. ile belirlenmektedir.
- *Tekrar işleme modülü:* bir süreçte hata oluştuğunda bir parça çoğunlukla pratikte hurdaya ayrılmakla beraber tekrar işlenmesi gerekebilir. Şekil 3.6 (a)'daki modüle parçayı tekrar p_1 konumuna getiren bir geçişin eklenmesiyle Şekil 3.6 (e)'deki gibi tekrar işleme modülü elde edilmektedir.

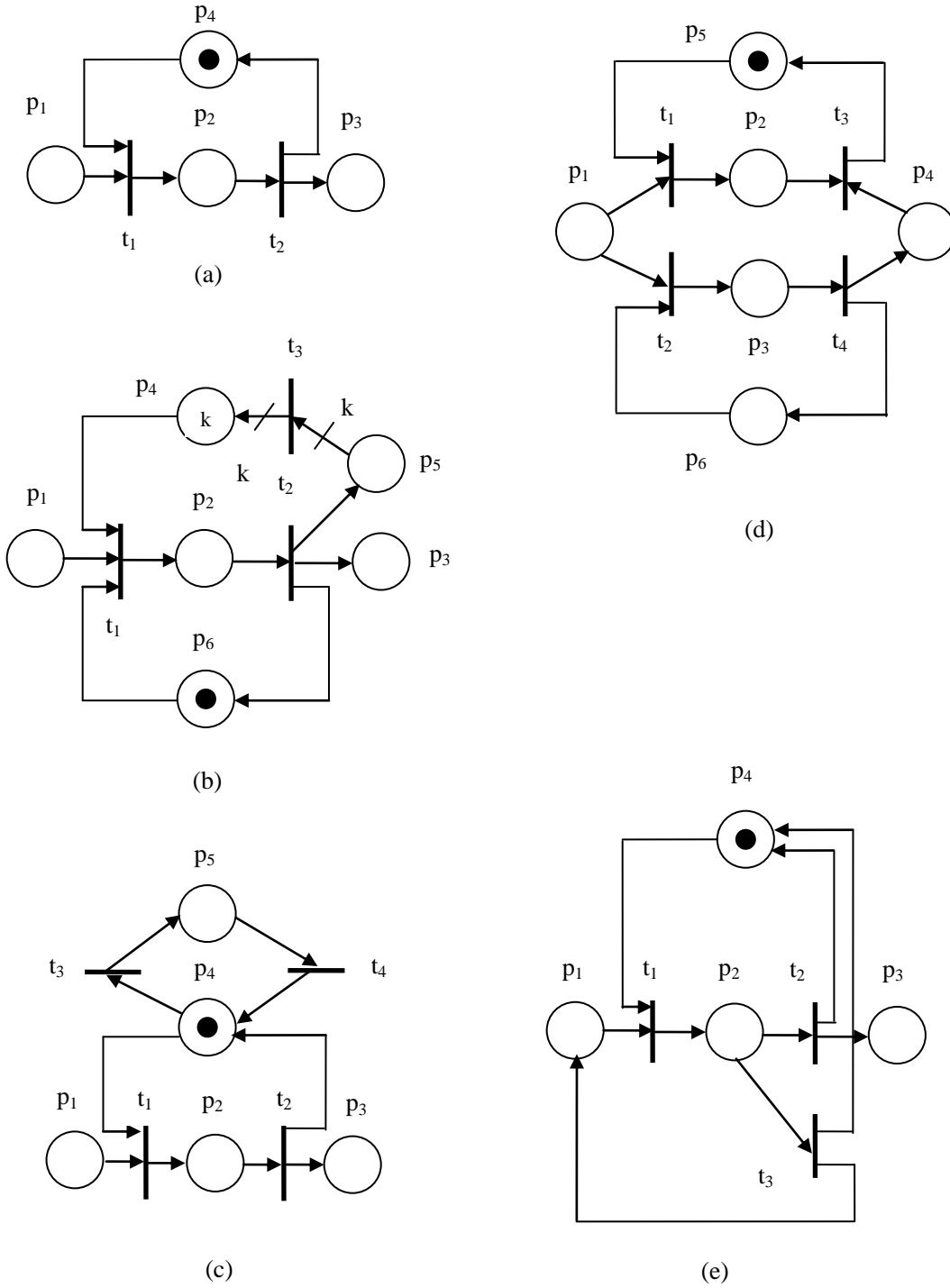
Bütün bu modüller tahsis edilmiş/adanmış kaynaklar paralel veya sıralı süreçler arasında paylaşılan bir kaynak haline dönüşürse kaynak paylaşımının olduğu duruma genişletilebilirler. Bu modüller önemli yapı taşları olarak düşünülebilirler ve bazı paylaşılan konumların birleştirilmesiyle elde edilen ilişkilendirilmiş modüller karmaşık bir imalat sisteminin PA modelini ortaya çıkarabilir.

Bütün ayrı modeller aşağıdaki şekilde tam bir Petri ağı modeli oluşturacak şekilde birleştirilebilir (Zhou ve Venkatesh, 1999).

- *Konumların Paylaşılması:* bu konumlar genellikle farklı operasyon ve süreçler arasında paylaşılan kaynaklardır.

- Geçişlerin Paylaşılması: paylaşılan geçişler alt sistemler arasındaki belirli senkronizasyonu güçlendiren senkronizasyon noktaları görevi görürler.
- Bir konum veya geçişle başlayan ve farklı konum veya geçişle biten temel yolların paylaşılması.
- İki veya daha fazla modülü bağlamak için arayüz olarak Petri ağ yapılarının eklenmesi.

Aynı zamanlılığın (concurrency) olduğu bir ortamda etkileşimler anlamında aşağıdan-yukarıya yöntemler sistemin tanımlanmasında özgürlük sağlamaktadır. Sentezin başında modellenen sistem birbirinden bağımsız altsistemlerin birleşimi olarak ele alınır ve tüm etkileşimler ihmal edilir. Alt sistemler gerçek hayattaki robot, makina ve taşıma araçları gibi karşılıklara denk geldiklerinden bu yaklaşım sistemin tanımlanmasında kolaylık sağlamaktadır. Bunun yanında sistemin alt parçalara ayrılması sonucu modellenen sistem hakkında bazı bilgilerin kaybolması ve bazı önemli özelliklerin (canlılık ve sınırlandırılmışlık gibi) elde edilememesi durumu ortaya çıkabilir. Yinede bu yöntemlerin en önemli avantajı nihai ağın analizini basitleştirmesidir. Bunun nedeni her bir sentez aşamasında her bir altağdan elde edilen bilgiler sayesinde bazı özelliklerin ortaya çıkan birleştirilmiş ağda kolayca doğrulanabilir olmasıdır (DiCesare ve Jeng, 1993). Bu yöntemlerin en önemli dezavantajı bazı önemli ağ özelliklerinin elde edilmesini garanti etmemesidir (DiCesare ve Jeng, 1993; Zhou ve Venkatesh, 1999).



Şekil 3.6: Esnek imalatta sıklıkla kullanılan Petri ağ modülleri; (a) Kaynak/Operasyon, (b) Periyodik bakımı yapılan kaynak/operasyon, (c) Hata eğilimli kaynak/operasyon, (d) Öncelik, (e) Tekrar işleme.

3.4.2.2 Yukarıdan-aşağıya yöntemler

Yukarıdan aşağıya dizayn konumların, geçişlerin ve alt-yapıların adım adım rötüşlanmasına (refinement) dayanan bir Petri ağı tasarım sürecidir. Bu konumlar, geçişler ve alt-yapıların daha karmaşık yapı gösteren modüller veya altağlarla yer değiştirilmesiyle gerçekleştirilmektedir. Her bir birbirini takip eden adım istenen seviyeye ulaşıncaya kadar giderek artan detay içermektedir. İstenen detay seviyesi modelin amacına göre basit veya daha karmaşık olabilir. Rötüşlama teorisi istenen PA sistem özelliklerinin her bir adımda korunmasını garanti altına almak için kullanılır. Bu rötüşlamalar oldukça yerel ve hiçbir yan etki içermediğinden, bu yöntemle altağlar arasındaki etkileşimleri ele almak oldukça zordur (Zhou ve Venkatesh, 1999).

Bu yaklaşımda ilk aşamada sistemin birinci seviyesine uygun bir PA modeli bulunur. Bu noktada modellenen sistemin genel bir analizi ve sistem spesifikasyonları gereklidir. Daha sonra bu aşamada büyük genel sistem birbirinden bağımsız alt sistemlere ayrılır.

İlk seviye PA üzerinde karar kılındıktan sonra geçişler, konumlar veya toplu aktiviteleri temsil eden yapılar daha fazla detayı içerecek şekilde rötüşlanır. Her bir rötüşlama adımında yeni detaylar modele eklemekte ve belirli özelliklerin sağlanarak tüm ağın istenilen özelliklere sahip olması garanti edilmektedir. Bu yöntemler özellikle hiyerarşik yapıların tanımlanmasında oldukça uygundur. Ayrıca montaj ve demontaj Petri ağları için de uygun bir yaklaşımdır (Zhou ve Venkatesh, 1999).

Yukarıdan-aşağıya yöntemlerin sağladığı en büyük avantaj sentezin başından sonuna kadar tüm sistemin bütünsel olarak görülebmesidir. Bu yöntemler özellikle sırasallığın olduğu sistemlerin modellenmesinde uygun olmakla beraber eş zamanlılığın ve kaynak paylaşımının olduğu durumlarda etkileşimlerin karmaşıklığından dolayı bazı özelliklerin korunması için kullanılan prensipler yetersiz kalmaktadır. Bunun yanında eğer sistem paylaşılan kaynakların ayrıldığı ve modüllerin içerisine yerleştirildiği şekilde tasarlanırsa yukarıdan-aşağıya yöntemler oldukça iyi sonuçlar vermektedir (DiCesare ve Jeng, 1993).

3.4.2.3 Karma (hybrid) yöntemler

Yukarıdan-aşağıya ve aşağıdan-yukarıya yaklaşımların birleşiminden karma yöntemler oluşmaktadır. Karma sentez iki aşamadan oluşmaktadır (Zhou ve

DiCesare, 1993). Yukarıdan-aşağıya tasarım ve aşağıdan-yukarıya tasarımdır. Yukarıdan-aşağıya tasarımda ilk seviye PA tanımlamasından başlanarak adım adım operasyon konum ve/veya geçişleri istenilen detay seviyesine ulaşıncaya kadar daha detaylandırılır. Bu aşamanın amacı sistemi uygulama amacına göre yeterli sistem operasyon detayını modele sokmaktır. Aşağıdan-yukarıya tasarım aşamasında ağa kaynak konumları ilave edilir ve buradaki asıl amaç alt sistemler veya detaylı operasyon süreçleri arasındaki etkileşimlerin doğru olarak oluşturulmasıdır. Tüm paylaşılan kaynaklar bu aşamada dikkate alınır. Bunların uygun şekilde kullanılması ve serbest bırakılması sınırlandırılmışlık, canlılık ve geri dönebilirlik özelliklerine sahip bir PA modelinin oluşturulması açısından oldukça önemlidir. Gerekirse bu iki aşama yer değiştirilerek de uygulanabilir.

Konumlar operasyon ve kaynak konumları şeklinde iki sınıfa ayrılırlar. Operasyon konumları operasyon veya süreci, kaynak konumu da bir veya daha fazla kaynağın uygunluğunu temsil ederler. Kaynak konumları da kendi aralarında iki sınıfa ayrılırlar. Bunlardan ilki kapasite ve miktarı ve bunun sonucunda başlangıçtaki jeton sayısının sabit olduğu kaynaklardır, örneğin: robot ve makinalar. İkinci sınıfta yer alan kaynaklar ise kaynak sayısının değişken olduğu kaynaklardır, örneğin; iş sayısı. İstenen bazı özellikleri sağlayabilmek için modele kontrol amaçlı konumlar yerleştirilir.

Bu yöntem aşağıdaki şekilde uygulanmaktadır:

1. Tüm ana kaynaklar uygun olduğunda çalışan bir sistem için sınırlandırılmış, canlı ve geri dönebilir PA seçilir ve operasyon ve kaynak konumları belirlenir
2. Bu sistem temel tasarım modülleri kullanılarak operasyon konumları olarak tanımlanan alt sistemlere ayrılır. Bu operasyon konumları, hiçbir operasyon bölünemeyene kadar ya da daha fazla bölmenin gereksiz olacağı noktaya kadar daha detaylı temel tasarım modülleri ile değiştirilir.
3. Operasyonlar belli kaynaklara ihtiyaç duyduğunda her aşamada paylaşılmayan kaynaklar uygun şekilde eklenir.
4. Paylaşılan kaynak konumları ve bunların okları belirli koşullar sağlanacak şekilde eklenir. Bu kaynaklar paylaşılan bir tampon kaynağı ve farklı eş zamanlı ve sırasal süreçler tarafından paylaşılan imalat kaynağını içerebilirler. Bu yapılar

baz alınarak sistemi canlı ve geri dönebilir kılan başlangıç işaretlemeleri elde edilmelidir.

Aşağıdan-yukarıya ve yukarıdan-aşağıya yöntemlerin kombinasyonu olan yöntemlerin bazı kısıtlmaları bulunmaktadır (DiCesare ve Jeng, 1993). Tek bir konumda birden fazla aynı özellikte kaynak varsa, problem kaynak atama probleminde dölüşebilir. Sayıca birden fazla ve farklı süreçler tarafından paylaşılan birbirinden farklı kaynaklar varsa istenilen özelliklere sahip Petri ağının sentezi oldukça zor olabilmektedir.

3.5 Petri Ağları ile İlgili Literatür Araştırması

Carl Adam Petri (1962) tarafından ortaya konan Petri ağlarının imalat sistemlerinin modellenmesi analizinde ilk olarak kullanılması Valette ve diğ. (1982) tarafından gerçekleştirilmiştir. Petri ağlarını kullanarak bir otomobil üretim sistemindeki taşıma sistemi için birbiriyle bağlantılı kontrolörlerin belirlenmesi ve onaylanması gerçekleştirerek PA'nın esnek üretim sistemlerinde uygulanabilirliğini ortaya koymuştur. Burada kullandıkları yaklaşım ayrıştırma ve yapılandırmaya dayanmaktadır. Valette (1987) PA'nın aynı anda kullanımın olduğu durumlar için diğer tüm modellerden daha uygun olduğunu belirtmektedir.

Alla ve diğ. (1985) renkli PA'nı kullanarak Valette (1982)'nin otomobil üretim sistemini modellemiştir. Renkli PA'nın sahip olduğu özellikler farklı parça ve makinaların birbirlerinden ayırt edilmelerine imkan sağlamaktadır. Narahari ve Viswanadham (1985) PA'nı iki çeşit imalat sisteminin modellemek için kullanmışlardır. Bu sistemlerden biri üç makina ve iki tampondan oluşan bir transfer hattı diğeri ise üç makina ve iki çeşit parçadan oluşan esnek bir imalat sistemidir. Yukarıdan aşağıya bir modelleme yaklaşımı ortaya koydukları ve değişmezlik (invariant) metodları ile analiz yaptıkları bu çalışmada sınırlandırılmışlık, canlılık ve geri dönebilirlik özelliklerin imalat sistemlerinde önemini belirlemişlerdir.

Barad ve Sipper (1988), imalat sistemlerinde esnekliğin çok boyutlu karakterine dikkat çekerek esnekliğin tanımlanması ve ölçümü için bir yaklaşım ortaya koymuşlardır. PA'nı esnek bir imalat sisteminin modellenmesi ve farklı sistemlerin esneklik bazında karşılaştırılması için kullanmışlardır.

Balbo ve diğ. (1988) kompleks sistem davranışlarının modellerinin çözümü için kuyruk ağ modelleri ve stokastik PA'larını birleştiren hiyerarşik bir modelleme yaklaşımı ortaya koymuşlardır. Önerilen yaklaşım iki örneğe uygulanmış ve modelin baştan başa değerlendirilmesinde her iki tekniğin de bireysel güçlü yanlarının nasıl birleştirildiği gösterilmiştir.

Valavanis (1990), her bir jeton, yer, geçiş ve okun bir diğerinden ayırt edilebildiği genişletilmiş PA'nı ortaya koyarak bir ağ modelinde daha fazla bilginin ifade edilebileceğini belirtmiştir. Bu çalışmada bir robot, bir girdi istasyonu ve bir de çıktı istasyonundan oluşan bir esnek imalat sistemini modelleyip simüle etmiştir.

Zhou ve diğ. (1990) kaynak paylaşımının olduğu çıkmaz olmayan ve çıkmaza eğilimli iki imalat sisteminin performansını analiz edilip karşılaştırmışlardır. Yukarıdan aşağıya ve aşağıdan yukarıya modelleme yaklaşımlarıyla sistem stokastik PA ile modellenmekte ve sonra da işlem hacmi gibi performans indisleri elde edilerek karşılaştırma yapılmaktadır.

Al-Jaar ve Desrochers (1990) çeşitli imalat durumları için otomatize imalat sistemlerinin performans değerlendirmesinde genelleştirilmiş stokastik PA'larının kullanımını önermişlerdir. Esnek ve güçlü bir performans değerlendirme aracı olan genelleştirilmiş stokastik PA'larının işleme merkezi kontrollörü, transfer hattı ve üretim ağlarında nasıl kullanılabilceği gösterilmiştir. Yazarlar aynı zamanda genelleştirilmiş stokastik PA'larının kompleks imalat sistemlerinin modellenmesi ve analizinde kullanılmasının avantajlarını ortaya koymuşlardır.

Zhou ve DiCesare (1991, 1992, 1993) esnek imalat sistemlerinde kaynak paylaşım problemlerinin modellenmesinde paralel ve ardışık birbiriyle bağdaşmazlıkları önermektedirler. Ortaya koydukları karma sentez yaklaşımı karmaşık imalat sistemlerinin PA ile modellenmesinde uygun davranışsal özelliklerin geliştirilmesine imkan vermektedir. Bu yaklaşım bütün işaretlemelerin sayılmasına gerek kalmaksızın analizi mümkün kılmaktadır.

Zhou ve diğ. (1993) esnek bir imalat hücresinin PA ile istenen özellikleri sağlayan bir hücrenin nasıl modellendiğini ve detaylı bir sentez sürecinin nasıl yapıldığı açıklanmıştır. Bu süreçte yukardan aşağıya, sistem ayrıştırması ve modüler birleştirme yaklaşımlarını kullanarak sistemin önemli özelliklerinin korunması ve hiyerarşinin sağlanması gerçekleştirilmiştir. Oluşturan model canlılık, güvenilirlik ve

ters çevirilebilirlik sistem özelliklerine sahiptir. Deterministik zamanlı PA kullanılarak hücrenin çevrim süresinin nasıl hesaplanabileceği gösterilmiştir.

Teng ve Zhang (1993) imalat sistemlerinin modellenmesi ve simülasyonunda ayrıştırma problemini ele aldıkları çalışmada bir sistemi alt sistemlere ayırarak bir imalat sistemi operasyonlarındaki paralellik özelliğini seçip çıkartmaya yarayan bir ayrıştırma prosedürü geliştirmişlerdir. Geliştirdikleri ayrıştırma prosedürü PA'ndaki ilişki matrisine dayanmaktadır. Bu sayede bir ağ birçok alt ağlara ayrıştırılabilmektedir.

Shiizuka ve Suzuki (1994) esnek imalat sistemlerindeki otomatik kılavuzlu araç (AGV) şebekelerinin modellenmesinde PA'nın modelleme gücünü göstermişlerdir. Renkli PA kullanarak otomatik kılavuzlu araçların dümdüz gitme, iki yolun kesişmesi, yolun üçe ayrılması, üç yolun birleşmesi gibi davranışlarını modellemişlerdir.

Kiritsis ve Porchet (1996) PA'nı bilgisayar destekli tasarım veya bilgisayar destekli süreç planlama olarak süreç planlamasında kullanmışlardır. Üç aşamalı bir yaklaşım ortaya koymuşlardır. İlk olarak sabit formatlı işleme tablosu oluşturulmak, ikinci aşamada ise işleme tablosunu baz alarak PA modeli kurulmaktadır. Üçüncü aşamada ise PA modelinin erişilebilirlik grafiği bulunmaktadır. Son olarak da erişilebilirlik grafiği indirgenmekte ve basit sezgisel yaklaşımla optimum sonuç bulunmaktadır.

Yeung ve diğ. (1996) esnek imalat sistemlerinin dinamik davranışının modellenmesinde bulanık renkli PA'larını önermişlerdir. Yazarlar önerilen yaklaşımı bir devre anakart üretim sistemine uygulamışlar ve modelin sistem davranışının simüle edilmesindeki yeterliliğini göstermişlerdir.

Jeng (1997a), esnek imalat sistemlerinin modellenmesi için bir sentezleme teorisi ortaya koymuştur. Bu teori aşağıdan yukarıya veya modüler birleştirme yaklaşımı kullanarak ağ modelleri kurmayı sağlamaktadır. Her bir modül esnek bir imalat sisteminde bir kaynak tipini kontrol eden alt sistem olarak temsil eden bir kaynak kontrol ağı olarak modellenmektedir. Modüller arasındaki etkileşimler ortak geçiş ve geçiş alt ağları olarak tanımlanmaktadır. Bu modüllerin birleştirilmesiyle elde edilen ağ hem korunumlu hem de sınırlandırılmıştır. Bu önerilen metotta sadece ağın yapısı ve başlangıç işaretlemesi incelendiğinden dolayı ulaşılabilirlik ağacı gibi durum sayma tekniklerinden daha verimli olduğu belirtilmektedir.

Koriem ve Patnaik (1997) paralel ve dağıtık sistemlerin performans değerlendirmesi için geliştirilmiş stokastik yüksek seviye PA adlı yöntemi ortaya koymuşlardır. Önerilen bu yöntem geçiş ağları ve geliştirilmiş stokastik PA'nın bir karma versiyonudur ve en önemli avantajı da durum uzayının azaltılmasıdır.

Allam ve Alla (1998) yarı iletken parça imalatı yapan bir sistemin modellenmesi ve simüle edilmesinde ayrık PA kullanımının olası durumların sayısının çok artması ve simülasyon maliyetinden yüksek olmasından dolayı uygun olmadığını belirtmişlerdir. Bu amaçla gerçek yaşam elektronik parça imalat sistemlerinin modellenmesi ve analizi için karma PA kullanımını önermişlerdir. Bu yaklaşımın daha doğru ve hızlı simülasyon sonuçları verdiğini bir örnek üzerinde göstermişlerdir.

Wang ve Wu (1998) otomasyon bir imalat sistemin modellenmesi için ilk olarak renkli zamanlı nesneye yönelik PA olarak adlandırdıkları yeni bir yöntemi önermişlerdir. Bu yöntemin dört önemli karakteristiği bulunmaktadır. İlki otomasyon imalat sisteminin dinamik davranışı nesneye yönelik olarak gösterilmektedir. İkincisi malzeme akış karakteristiklerinin ve zaman kısıtlarının modellenmesi için girdi/çıkıtı dönüşüm fonksiyonları, renkli jetonlar ve ilgili zaman gecikme özellikleri kullanılmasıdır. Üçüncü olarak imalat sisteminin dinamik davranışı ve kontrol mantığı belirgin bir şekilde ifade edilebilmektedir. Son olarak ise imalat sisteminin eş zamanlı modelleme, çizelgeleme ve kontrolü için bütünleşik ve tutarlı ortam sağlanmaktadır. Önerilen bu yöntemin otomasyon imalat sisteminin dinamik davranışının daha iyi modellenmesi ve analizine imkan verdiğini belirtmişlerdir.

Yan ve diğ. (1998) imalat sistemlerinin modellenmesi ve analizinde diğer yöntemlerden daha uygun olduğunu belirttikleri ve genişletilmiş stokastik yüksek seviye değerlendirme PA olarak adlandırdıkları yeni bir yöntem önermişlerdir. Bu sayede sistemin daha basit, daha tanımlayıcı ve sezgisel olarak daha iyi ifade edildiğini belirtmişlerdir. Bu yöntem sayesinde sistemin dinamik tekrar çizelgelemesinin mümkün olduğunu simülasyon sonuçlarına dayanarak ortaya koymuşlardır. Gecikmesiz ve üstel zamanlı geçişlerin yanı sıra üstel dağılmayan ateşleme zamanlı geçişler de bu yöntemde kullanılabilir. Bu sayede sistemin zamansal davranışı daha gerçekçi bir şekilde modellenebilmektedir.

Zimmerman ve Hommel (1999) çalışmalarında imalat sistemlerinin modellenmesinde renkli PA tabanlı yeni bir metod ortaya koymuşlardır. Renkli stokastik PA olarak adlandırılan bu yöntemle bir imalat sisteminin yapısı ve iş planları ayrı ayrı modellenebilmektedir.

Zimmerman ve diğ. (2001) imalat sistemlerinin PA modelleri için iki safhali optimizasyon metodu sunmuşlardır. Tekrarlı meta sezgisel simüle tavlama (simulated annealing) yöntemi kullanılarak ilk aşamada optimale yakın bir sonuç bulunmuş ikinci aşamada ise optimal sonuca ulaşılmıştır.

Lefebvre (2001) kesikli ve sürekli PA modellerinde ateşleme frekanslarının tahmini için bir yöntem önermektedir. Deterministik zamanlı PA'da üretim frekanslarının tahmini ateşleme sıralamalarından yaklaşık olarak elde edilmekte, sürekli PA'da ise doğrudan işaretleme vektörünün varyantlarından elde edilmektedir. Önerilen yöntemde birden fazla çözümün var olması durumunda tek bir çözüm elde etmek için PA'ları ilave ilişkilerle genişletilmektedir.

Abdallah ve diğ. (2002) esnek imalat sistemlerinde çıkmazların olmadığı çizelgeleme problemini ele alarak zamanlı Petri ağlarına dayanan bir çizelgeleme algoritması ortaya koymuşlardır. Bu algoritma esnek imalat sistemlerinin bir sınıfı olan kaynak paylaşımlı sırasal sistemlerin çizelgelenmesi için geliştirilmiştir. Modelde amaç ortalama akış süresinin minimize edilmesidir ve önerilen algoritma PA modelinin geçişlerinin ateşlenme sırasını dikkate alarak optimal veya optimale yakın çıkmazın olmadığı bir çizelge üretmektedir. Daha büyük çizelgeleme problemleri için sezgisel bir yaklaşımla desteklenen algoritma uygulama sonuçlarına göre yazarlar PA bazlı çizelgeleme yaklaşımının matematiksel programlama gibi diğer yaklaşımlara göre daha uygun olduğunu iddia etmektedir.

Chen ve Chen (2003) renkli PA kullanarak esnek imalat sistemlerinin dinamik alet tahsisi ve kontrolünün modellenmesinde nesneye yönelik bir yaklaşım sunmuştur. Esnek imalat sistemi alt sınıflara ayrılarak sistem modelinin karmaşıklığı azaltılmıştır. Yine PA bazlı simülasyon kullanılarak sistem performansı değerlendirilmiştir.

Uzam (2002a; 2002b; 2004) esnek imalat sistemlerinde makina, robot, takım gibi sınırlı sayıdaki paylaşılan kaynaklardan ortaya çıkan çıkmazların önlenmesi için optimal bir prosedür ortaya koymuştur. İlk çalışmada önerilen prosedür bir esnek

imalat sisteminin PA modelinin ulaşılabilirlik grafiğinin kullanımı esas almaktadır. Bu yöntemde ulaşılabilirlik grafiği çok büyük çıkmakta ve bu da optimum sonucu bulmayı zorlaştırmaktadır. Bunun için ikinci çalışmada PA indirgeme yaklaşımını kullanarak optimum sonucu elde etmek için gereken hesaplama miktarının basitleştirilmesi açıklanmış ve bir örnek üzerinde gösterilmiştir.

Bucholz (2004) stokastik PA ve ilgili modellerin sayısal analizi için yaklaşık bir çözüm tekniği önermiştir. Bu yaklaşım sayısal çözüm teknikleri ve sabit nokta hesaplamalarını birleştirmektedir. Diğer yaklaşık yöntemlerle kıyaslandığında, önerilen yöntem yüksek olasılıklı durumların detaylı bir şekilde ve düşük olasılıklı durumlarla biraraya getirilmesini sağlamaktadır.

Wang ve diğ. (2005) ağ şebekeli imalat sistemlerinin modellenmesi ve kontrol sistemi tasarımı için karma (hybrid) PA yaklaşımını önermiştir. Modellenen sistem değişkenlerinin bazıları ayrık bazıları ise sürekli olduğundan her ikisi aynı PA modeli içinde ifade edilmiş ve oluşturulan model baz alınarak sistem için kontrol mekanizması ortaya konmuştur.

Chen ve diğ. (2005) deterministik ve stokastik PA'larını parti konumları ve jetonlarıyla güçlendirerek parti deterministik ve stokastik PA olarak adlandırılan yeni bir yöntem önermişlerdir. Geliştirilen modelin yapısal ve performans analizi için yöntem ortaya koymuşlardır. Bu önerilen yöntem özellikle envanter ve tedarik zinciri sistemlerinin modellenmesi ve analizi için uygun yaklaşımdır.

PA'nın imalat sistemlerindeki farklı kullanım alanları ile ilgili olarak şu kaynaklardan faydalanılabilir; esnek imalat sistemlerinin kaynaklı süreç ağlarıyla modellenmesi ve analizi (Jeng ve diğ., 2002), PA ile endüstriyel sistemlerin güvenilirlik tasarımı (Bertolini ve diğ., 2006), stokastik PA ile tedarik zinciri modellenmesi ve analizi (Chen ve diğ., 2005), zamanlı PA ile esnek imalat sistemlerinin çizelgelenmesi (Zuberek ve Kubiak, 1999; Lee ve Korbaa, 2006; Kim ve diğ., 2007; Hsu ve diğ., 2007; Ghaeli ve diğ., 2008; Zhang and Gu, 2009), PA ile esnek imalat sistemlerinin modellenmesi ve çizelgelenmesi (Zha ve diğ., 2002; Korbaa ve diğ., 2003; Huang ve diğ., 2008), ayrık imalat sistemlerinin indirgenmiş PA ile modellenmesi (Rangel ve diğ., 2005), kaynak paylaşımının olduğu imalat sistemlerinin PA ile tasarımında özelliğini koruyan altağ indirgeme yöntemleri (Huang ve diğ., 2005), birleştirilmiş PA yaklaşımı ile imalat sistemlerinin

kontrolünde hata telafisi (Odrey ve Mejia, 2005), ayırık olay dinamik sistemlerin PA ile performans analizi (Koriem ve diğ., 2004), karma PA ile bir şişeleme tesisinin modellenmesi ve simülasyonu (Giua ve diğ., 2005), karma ve büyük ölçekli karmaşık üretim sistemlerinin PA bazlı nesneye yönelik yaklaşımla modellenmesi (Villani ve diğ., 2005; Liu ve diğ., 2005), PA ile modellemede yapılandırma ve birleştirme konuları (Gomes, 2005), otomatize imalat sistemlerinde karma PA ve ikili grafik yaklaşımıyla çıkmazların önlenmesi (Maione ve DiCesare, 2005), otomatize imalat sistemleri için çıkmaz önlemeye yönelik politikalar (Xing ve diğ., 2009), esnek imalat sistemlerinin canlılığını güçlendirilmesi için geliştirilmiş iterasyonlu sentez yöntemi (Uzam ve Zhou, 2006), esnek imalat sistemlerinin bulanık PA modelleri (Venkateswaran ve Bhat, 2006), PA ve genetik algoritma yöntemleriyle esnek imalat sistemlerinin döngüsel çizelgelenmesi (Hsu ve diğ., 2008), karma dinamik sistemlerin modellenmesi, analizi ve kontrolü (Lefebvre ve diğ., 2007), bulanık PA ile modelleme (Korpeoglu ve Yazici, 2007; Huang ve diğ., 2008; Cheng ve Yang, 2009) esnek montaj sistemlerinde çıkmaz önlenmesi için kaynak merkezli Petri ağları (Wu ve diğ., 2008), karma dinamik sistemlerinin PA ile çoklu bakış açılı modellenmesi (Lee ve diğ., 2008), PA'larında durum uzayı ve ulaşılabilirlik analizi (Praveen ve Lodaya, 2008; Reinhardt, 2008, Fronk ve Kehden, 2009), kaynak paylaşımli paralel imalat süreçlerinin PA modellemesi ve çıkmaz analizi (Ahmad ve diğ., 2009).

4. PETRİ AĞLARINDA ZAMAN

4.1 Petri Ağlarında Zamanın Önemi

Carl Adam Petri (1962) tarafından ortaya koyulan orjinal Petri ağları modelleme yaklaşımında zaman kavramından zamanlamanın PA modellerinin davranışı üzerindeki etkisinden dolayı özellikle kaçınılmıştır. Aslında PA modelleri veya sistemlerinde faaliyetlerin zamanlama kısıtlarıyla ilişkilendirilmesi bazı geçişlerin ateşlenmesini önleyebilir ve bunun sonucunda da PA yapısı tarafından gerçek sistem davranışlarının tamamının ifade edildiği varsayımını ihlal edebilir (Marsan ve diğ., 1995).

Peterson (1981) zaman ve zamanlama kavramının eklenmesinin PA'na güçlü bir yeni özellik kazandırabileceğini fakat PA'nın temel felsefesiyle bir ölçüde tutarlı olamayabileceğini ifade etmektedir. Bu bakış açısının arkasındaki temel gerçek PA'nın formel otomata olarak düşünülmesi ve teorik özelliklerinin incelenmesidir. Bu yüzden PA ile ilgili ilk çalışmalar daha çok PA model ve sistemlerini temel özellikleri, analiz teknikleri ve hesaplama karmaşıklığı ile ilgiliydi. Bu gibi konularla ve problemlerle ilgilenirken zaman kavramına ihtiyaç duyulmamaktadır. Gerçek bir sistemin parçaları arasındaki sadece mantıksal ilişkiler söz konusu ise zaman kavramı önemli değildir. Bunu yanında gerçek bir sistemin verimliliği ve performansı dikkate alındığında zaman kavramı çok büyük bir önem taşımaktadır.

Petri ağları sistemin yaşayabileceği tüm olası durumları ortaya koymayı amaçladığında anlık spesifikasyonlar ve sistem performansı da önem kazanmaktadır. Bir başka ifadeyle dinamik sistemlerin çizelgelenmesi ve performans değerlendirilmesinde ağ modellerine geçişler ve/veya konularla ilişkilendirilmiş zaman gecikmesinin ilave edilmesi gerekli ve faydalıdır (Murata, 1989). PA modellerinin performans durumunun incelenebilmesi için faaliyetlerin sürelerinin dikkate alınması ve model spesifikasyonlarına dahil edilmesi gerekmektedir (Zuberek ve Kubiak, 1993). Özetle modellenen bir sistemin zaman bazlı

performansının analizi ve dinamik davranışlarının incelenmesi için Petri ağlarına zaman ve sürelerin dahil edilmesi gerekmektedir.

Petri ağı modellerinde zaman; aralarında çeşitli etkileşimin olduğu farklı faaliyetlerin başlama ve bitiş zamanlarını belirtir. Petri ağlarında zamanlama mekanizmasının kullanılması farklı şekillerde olabilmektedir. Bunlar genel olarak deterministik zamanlı PA ve stokastik PA olarak ikiye ayrılmaktadır (Murata, 1989; Bobbio, 1990; Zhou ve Venkatesh, 1999). Deterministik PA'da zaman gecikmesi deterministik olarak bilinmektedir, stokastik PA'da ise zaman gecikmesi olasılıksal olarak ifade edilmektedir. Stokastik PA Bölüm 5'de detaylı olarak anlatılacaktır. Burada zamanlama kavramının ve zaman gecikmesinin PA bileşenlerine nasıl uygulandığı, farklı zaman uzantıları ve deterministik PA sunulacaktır.

4.2 Petri Ağlarının Zaman Uzantıları

Zaman kısıtının olduğu eşzamanlı sistemlerinin modellenmesi için önerilen Petri ağlarının zamanlı uzantıları genel olarak ikiye ayrılmaktadır (Lefevbre, 2001; Cassex ve Rouz, 2006; Bouyer, ve diğ., 2008). Bunlar; zaman Petri ağları (Time Petri Nets-TPN) ve zamanlı Petri ağlarıdır (Timed Petri Nets-TdPN).

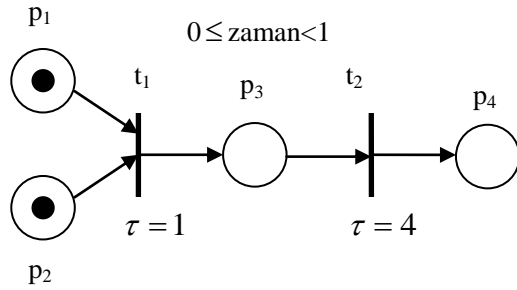
4.2.1 Zaman Petri ağları

Merlin (1974) tarafından ilk defa ortaya koyulan zaman Petri ağları her bir geçişi bir zaman aralığıyla ilişkilendirmektedir. Bir geçiş olurlu hale geldikten sonra ateşlenebilir (tüm girdi konumları gerekli sayıda jeton içermeli) ve yine eğer olurlu hale geldiği andan itibaren geçen zaman belli bir aralıkta yer alıyorsa ateşlenebilmektedir. Bir başka deyişle bir geçiş belli bir zaman aralığı içinde ateşlenebilmektedir. Zaman sadece eğer başka geçişleri edilgen hale getirmese akmaktadır.

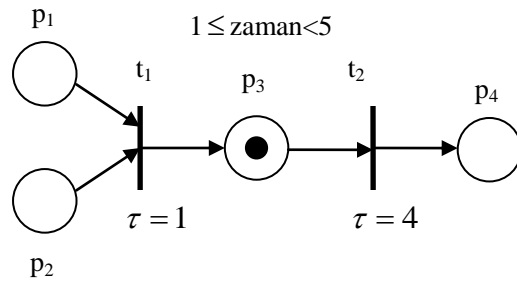
Bu yaklaşım olurlu yapan süreler (enabling durations) olarak da adlandırılmaktadır. Bu yaklaşımda geçişlerin ateşlenmesi anında gerçekleşmektedir ve bu esnada jetonların uzaklaştırılıp oluşturulması da aynı anda olmaktadır. Zaman gecikmeleri geçişler ateşlenmeden önce belli zaman periyodu boyunca geçişlerin bekletilmesiyle modelde temsil edilmektedir (Bowden, 2000). Şekil 4.1 (a)-(c)'de zaman Petri ağları görülmektedir. Şekil 4.1 (a)'da t_1 geçişi olurlu haldedir ve ateşlenmeden önce 1 zaman birimi beklemesi gerekmektedir. zaman = 1 olunca aynı anda geçiş ateşlenir

ve p_1 ve p_2 girdi konumlarından jetonları uzaklaştırır ve p_3 çıktı konumuna yerleştirir, Şekil 4.1 (b). Şekil 4.1 (c)'de t_2 geçişi olurludur ve ateşlenmeden önce 4 zaman birimi beklemelidir, yani zaman = 5 olduğunda ateşlenir.

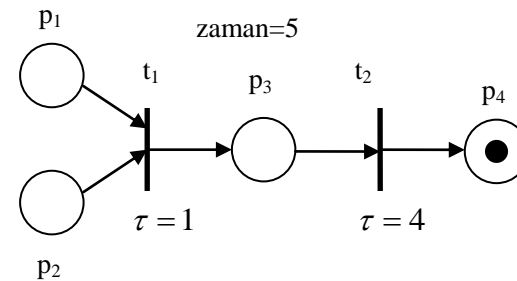
Bu şekilde belli bir süre bekleyip daha sonra bir geçişin ateşlenmesi kararı lokal olarak yapılamamaktadır. Fakat global olarak gecikme boyunca başka hiçbir geçişin –bu geçişin ateşlenmesi düşünülen geçişle hiçbir girdi ve çıktı konumu paylaşmamasına rağmen- edilgen olmadığı kontrol edilmelidir. Bu da bu yaklaşımın uygulanabilirliğini sınırlandırmaktadır. Buna ilaveten bu önemli gereksinimden ötürü sınırlandırılmamış zaman Petri ağları için tüm önemli problemler karar verilemezdir (Bouyer ve diğ., 2008).



(a) başlangıç durumu



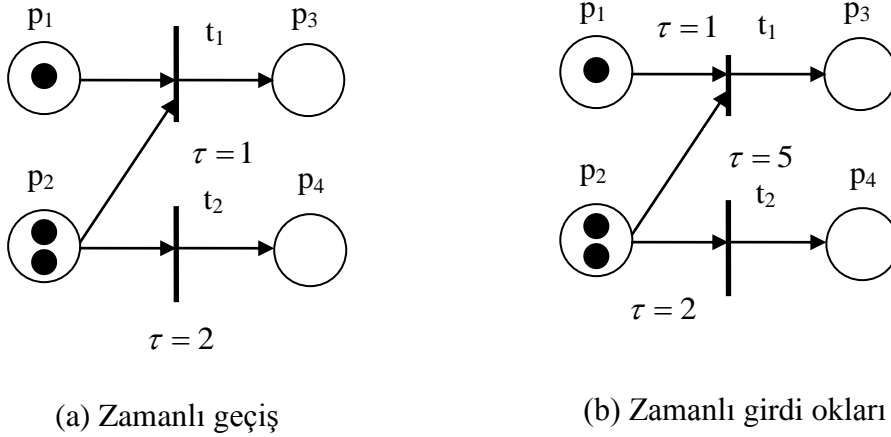
(b) t_1 geçişi ateşlendi



(c) nihai durum

Şekil 4.1: Zaman Petri ağları.

Bu yaklaşımda zaman gecikmeleri geçişlerin yerine geçiş girdi oklarıyla da ilişkilendirilebilmektedir. Şekil 4.2 (a)-(b)'de zamanlı geçiş ve zamanlı girdi oku Petri ağları verilmektedir. Yine burada da geçişler için zamanlama dikkate alınmadan önce geçişlerin sağlaması gereken ön koşul geçişlerin olurlu hale gelmesidir.



Şekil 4.2: Girdi okları ve geçişlerle ilişkilendirilmiş zaman farkları.

Şekil 4.2 (a)'da t_1 ve t_2 geçişleri olurludur ve t_1 geçişi zaman = 1, t_2 geçişi ise zaman = 2 olduğunda ateşlenmektedir. Şekil 4.2 (b)'de zaman geçiş girdi okları için tanımlanmıştır ve t_2 geçişi zaman = 2 olduğunda ateşlenmektedir. Bu yaklaşımın avantajı bazı durumlarda gerçek sistemle model arasındaki ilişkinin daha kolay oluşturulmasını sağlamasıdır (Diaz ve Senac, 1994).

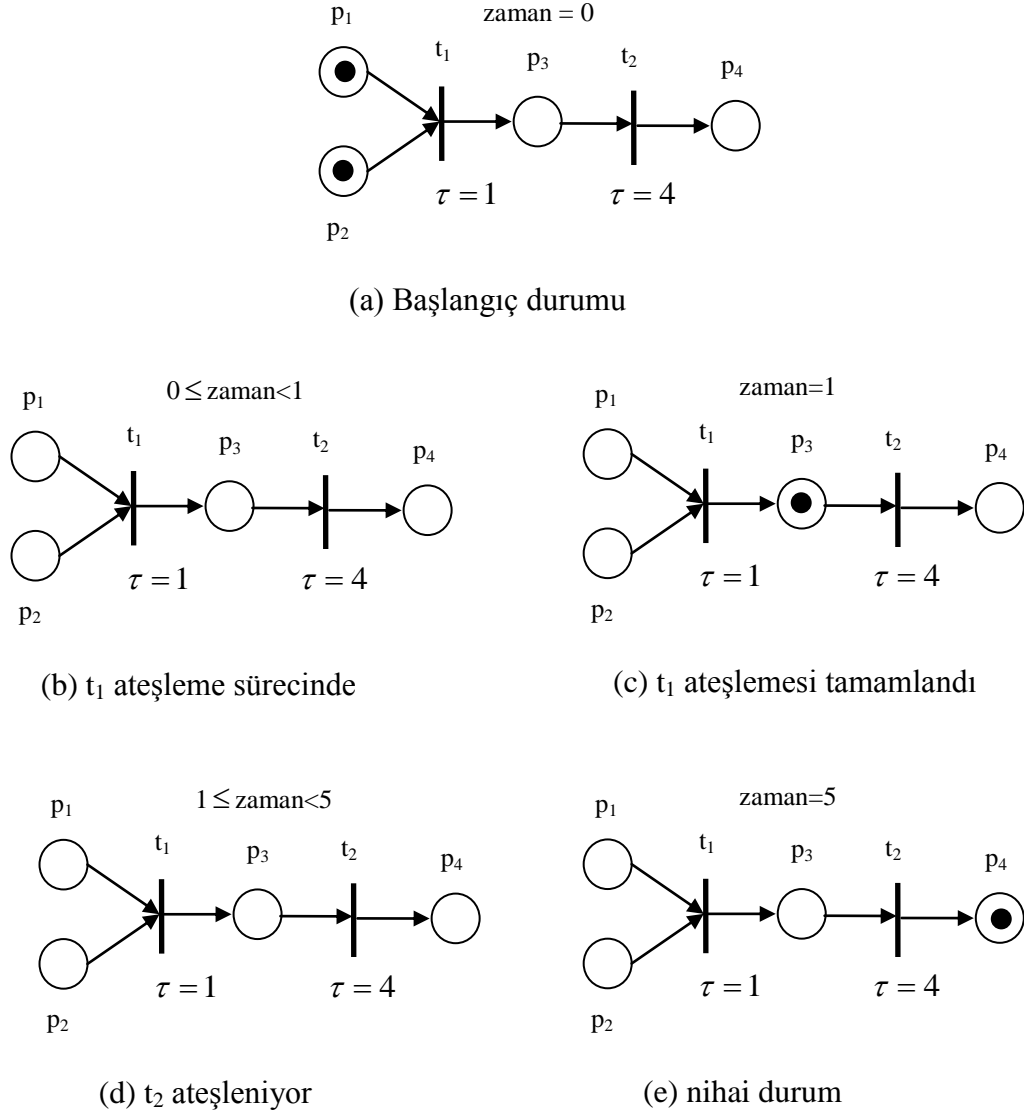
4.2.2 Zamanlı Petri ağları

Zamanlı Petri ağlarında zamanlama ağ modelinde ateşleme süreleri (firing durations) ve tutma-bekletme süreleri (holding durations) olarak iki yaklaşımla ifade edilmektedir. Tutma süreleri ve ateşleme süreleri yaklaşımları temel olarak zamanı aynı şekilde ifade etmektedirler. Aralarındaki tek fark birinde jetonlar geçişlerde tutulurken-bekletilirken diğerinde jetonlar konumlarda tutulmakta-bekletilmektedir (Bowden, 2000).

4.2.2.1 Ateşleme süreleri yaklaşımı

Ateşleme süreleri yaklaşımı ilk olarak Ramchandani (1974) tarafından ortaya koyulmuştur. Zaman kavramının olmadığı Petri ağlarında geçişler olurlu hale geldikten sonra girdi jetonlarını uzaklaştırıp çıktı jetonları oluşturarak herhangi bir zamanda ateşlenmektedir. Ateşleme sürelerinin dahil edildiği durumda her bir geçişle

ilişkilendirilmiş zaman gecikmesi bulunmaktadır. Bir geçiş olurlu hale geldiğinde girdi jetonları hemen uzaklaştırır fakat çıktı jetonlarını belirli bir ateşleme süresi geçinceye kadar oluşturmaz. Şekil 4.3 (a)-(e)'de geçişlerle ilişkilendirilmiş τ ateşleme süreleri görülmektedir.



Şekil 4.3: Ateşleme süreleri içeren zamanlı PA.

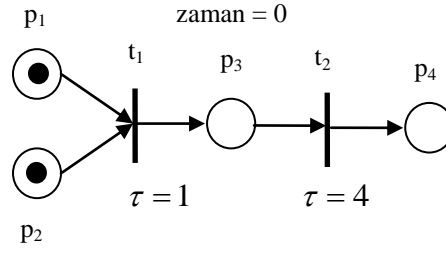
Şekil 4.3 (b)'de t_1 geçişi olurlu halde ateşlemeye başlayarak p_1 ve p_2 girdi konumlarından jetonları uzaklaştırıyor. Çıktı jetonunun p_3 konumunda oluşturulduğu zaman = 1 oluncaya kadar geçiş ateşlenmeye devam ediyor, Şekil 4.3 (c). t_2 geçişi Şekil 4.3 (d) ve Şekil 4.3 (e)'de görüldüğü gibi aynı şekilde sürece devam ediyor. Sadece PA oluşum kuralları değişmekle kalmayıp aynı zamanda Şekil 4.3 (b) ve Şekil 4.3 (d)'de görüldüğü gibi yeni durumlar da ortaya çıkmaktadır. Bu da PA'ndan elde edilen ulaşılabilirlik ya da durum uzayı ağacının da yeniden tanımlanması

ihtiyacını ortaya çıkarmaktadır. Bu durumda PA'nın durumu sadece işaretlemeler değil aynı zamanda her bir geçişin koşulları tarafından belirlenmektedir. Ateşleme süreleri yaklaşımının en önemli dezavantajı ulaşılabilirlik ağacının büyümesi problemidir (Bowden, 2000; Cassez ve Roux, 2006; Bouyer ve diğ., 2008).

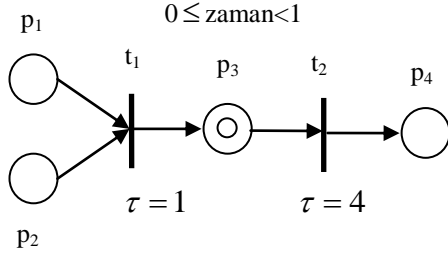
4.2.2.2 Tutma-bekletme süreleri yaklaşımı

Tutma süreleri yaklaşımı jetonları uygun (available) ve uygun olmayan (unavailable) şeklinde iki sınıfa ayırarak çalışmaktadır. Uygun jetonlar bir geçişi olurlu hale getirmek için kullanılabilirken, uygun olmayan jetonlar kullanılamazlar. Bu yaklaşımda her bir geçişe bir süre atanır ve bir geçiş ateşlendiğinde jetonların uzaklaştırılması ve oluşturulması hareketi anında yerine getirilir. Yine de bu jetonlar kendilerini oluşturan geçiş tarafından belirtilen çıktı konumunda bulunmaları gereken zamana kadar yeni geçişleri olurlu hale getirmeye uygun değildirler.

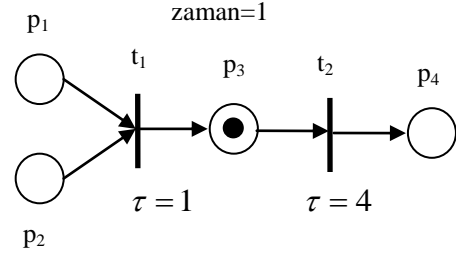
Şekil 4.4(a)-(e)'de tutma süreli zamanlı PA görülmektedir. t_1 geçişi olurlu hale gelir ve anında ateşlenir. Ateşlemeyle p_1 ve p_2 girdi konumlarından bir jeton uzaklaştırılır ve p_3 konumunda bir jeton oluşturulur, Şekil 4.4(b). Yine de oluşturulan jeton kendisini oluşturan geçişin tutma süresi kadar zaman geçinceye kadar t_2 geçişini olurlu hale getirmeye uygun değildir. Jetonun uygun olmadığı içi boş olarak gösterilerek ifade edilmektedir. Buna göre t_2 geçişi zaman 1 oluncaya kadar olurlu hale gelemez. t_2 ateşlendiğinde p_3 konumundan bir jeton uzaklaştırılır ve p_4 konumunda bir tane oluşturulur, Şekil 4.4(d). p_4 konumundaki jeton t_2 geçişi 4 zaman birimlik tutma süresine sahip olduğundan zaman = 5 oluncaya kadar uygun değildir.



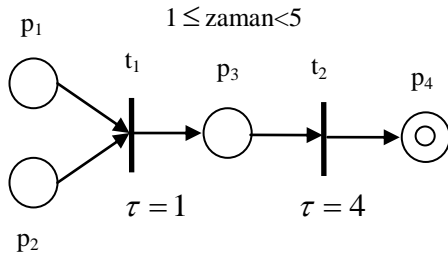
(a) Başlangıç durumu



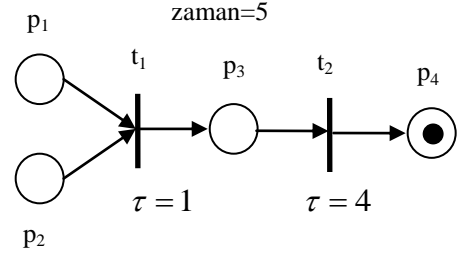
(b) t_1 ateşlendi, p_3 'deki jeton uygun değil



(c) p_3 'deki jeton uygun



(d) t_2 ateşlendi, p_4 'deki jeton uygun değil

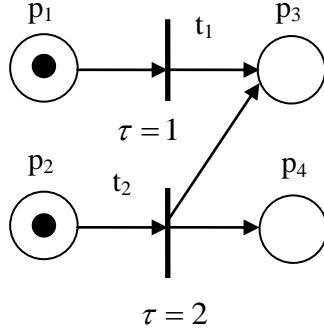


(e) nihai durum

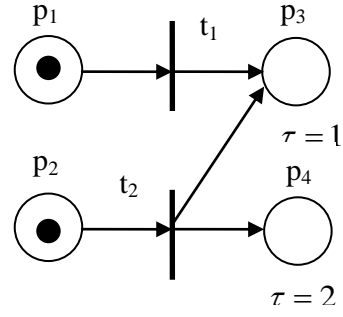
Şekil 4.4: Tutma-bekleme süreleri içeren zamanlı PA.

Tutma süreleri konumlara ilk olarak Sifakis (1977) tarafından uygulanmıştır. Konumlarla ilişkilendirilen tutma süreleri geçişlerle ilişkilendirilenlerle aynı şekilde çalışmaktadır. Bu ikisi arasındaki fark jetonların uygun olmama süresini aldıkları kaynaktır. Zaman bir geçişe atandığında verilen bu geçiş tarafından oluşturulan her bir jeton aynı tutma-bekleme süresine sahiptir. Zaman konumla ilişkilendirildiğinde ise verilen bir konumda oluşturulan her bir jeton kendisiyle ilişkili aynı tutma-bekleme süresine sahiptir.

Şekil 4.5(a)-(b)'de sırasıyla geçişlere atanan zaman gecikmesi ve konumlara atanan zaman gecikmesi görülmektedir.



(a) Zamanlı geçiş



(b) Zamanlı konum

Şekil 4.5: Konumlar ve geçişlere atanan zaman arasındaki farklar.

Her iki ağda da t_1 ve t_2 geçişleri olurlu haldedir. Bu geçişlerin ateşlenmesi p_3 konumunda iki adet jetona ve p_4 konumunda da bir adet jetonun oluşmasını sağlamaktadır. Zamanın geçişlerle ilişkilendirilmesi durumunda, zaman=1 olduğunda p_3 konumundaki jetonlardan birinin uygun hale gelir diğeri de zaman=2 olduğunda uygun hale gelir. p_4 konumundaki jeton zaman=2 olduğunda uygun hale gelmektedir. Zamanın konumla ilişkilendirildiği durumda p_3 konumundaki iki jeton da 1 zaman birimi boyunca uygun değildir ve p_4 konumundaki jeton 2 zaman birimi boyunca uygun değildir.

Bu iki teknikten biri diğere göre daha üstün olmamakla beraber zaman genellikle geçişle ilişkilendirilmektedir. Geçişler bir modeldeki olayları temsil etmekte ve olayların zamanla ilişkilendirilmesi şartlarla yani konumlarla ilişkilendirilmesinden daha doğal bir yaklaşımdır (Bowden, 2000; Cassez ve Roux, 2006).

4.3 Deterministik Zamanlı Petri Ağları ve Analizi

Bir eş zamanlı ve çatışma içeren sisteminde operasyonlar veya faaliyetler için zaman gecikmeleri sabit ise sistem deterministik zamanlı PA olarak modellenebilir. Eğer böyle bir sistemde seçim mümkünse ve sistem serbestçe seçim yapabiliyorsa bu durumda sistemin davranışları deterministik olmayacaktır.

Dinamik sistemlerin zaman bağlı davranışını tanımlamakta faydalı olan zamanlı PA'da zamanlama geçişler, konumlar veya oklarla ilişkilendirilebilmektedir. Bunun sonucu zamanlı işaretli bir grafik ortaya çıkmaktadır. PA'da zaman aşağıdaki dört şekilde oluşturulmaktadır.

1. Eğer bir operasyon veya aktiviteyi modellemek için kullanılan geçiş belli bir τ zamanı alıyorsa, bu geçiş τ ile ilişkilendirilebilir. Bu geçişin olurlu hale gelmesinden sonra ateşlenmesi τ kadar zaman almaktadır.
2. Eğer bir konum bir operasyon, faaliyet veya süreci modellemek için kullanılan konum belli bir τ zamanı alıyorsa, bu konum τ ile ilişkilendirilebilir. Bir konuma jeton ulaştıktan sonra, jetonun çıktı geçişini olurlu hale getirmeye uygun durumuna gelmesine kadar τ kadar zaman gerekmektedir.
3. Eğer bir konumdan geçişe yönlendirilmiş bir ok taşıma süreci veya malzeme akış sürecini modelliyorsa ve bu τ kadar zaman alıyorsa, ok τ ile ilişkilendirilir. Geçiş olurlu hale getirebilmek için konum içinde yer alan jetonun τ kadar süre beklemesi gerekmektedir.
4. Eğer bir geçişten konuma doğru yönlendirilmiş bir ok taşıma süreci veya malzeme akış sürecini modelliyorsa ve bu τ kadar zaman alıyorsa, ok τ ile ilişkilendirilir. Geçişin ateşlenmesiyle oluşan jetonun konuma ulaşabilmesi için τ kadar zaman gerekmektedir.

Petri ağ model ve sistemlerine zamanı eklerken modelin altındaki zamanlı olmayan ağ yapısının temel davranışlarını değiştirmemek oldukça önemlidir. Bu sayede zamanlı PA için temel PA modelinin özelliklerini inceleyerek çalışabilmek mümkün olmaktadır.

Zamanlı işaretli bir grafikte bir döngü düşünülürse, döngüdeki zaman gecikmelerinin toplamı zaman gecikmelerinin modelle nasıl ilişkilendirildiğine bakmaksızın sabit kalacaktır. Bu işaretli grafik döngüsündeki jeton sayısı da sabit olacaktır (Zhou ve Venkatesh, 1999).

Formel olarak deterministik zamanlı bir PA $Z = (P, T, I, O, m_0)$ işaretli grafiği ve konum, geçiş ve/veya oklarla ilişkilendirilmiş 0 veya pozitif zaman gecikmesiyle tanımlanmaktadır. Eğer sıfırdan farklı zaman gecikmesi sadece geçiş (konum, ok) ile ilişkilendirilmişse, Z aynı zamanda zamanlı geçiş (konum, ok) PA olarak adlandırılır.

Bir deterministik zamanlı Petri ağında deterministik zaman geçiş, konum ve/veya oklarla ilişkilendirilebilir. τ zaman gecikmeli konum içindeki bir jeton çıktı geçişini olurlu hale getirmeye uygun olabilir ya da olmayabilir. Bir konuma jeton(lar) ulaştıktan sonra jeton(lar)ın uygun hale gelebilmesi τ kadar zaman alır. Eğer bir

konumdan geçişe yönlendirilmiş bir ok τ kadarlık zaman gecikmesine sahipse, konumdaki jetonun çıktı geçişini olurlu hale getirmesine hazır olması τ kadar zaman alacaktır. Bir geçiş olurlu hale getirmeye hazır olan bir jeton hazır jeton olarak adlandırılmaktadır. Eğer bir konumdan geçişe yönlendirilmiş ok 0 zaman gecikmesine sahipse bu konum içinde yer alan bu jeton hazır jetondur. Eğer bir geçişten konuma yönlendirilmiş bir ok τ zaman gecikmesine sahipse, geçişin ateşlenmesiyle oluşan jetonun konuma ulaşabilmesi için τ kadar zaman harcaması gerekmektedir.

Tek oklu sıradan (ordinary) PA için geçerli olan ateşleme kuralları zamanlı PA için aşağıdaki gibi genellebilir.

- Herhangi bir anda, t geçiş m işaretlemesinde olurlu hale gelir eğer t 'nin her bir girdi konumu p en az bir tane hazır jeton içeriyorsa,
- Bir kere t geçiş m 'de olurlu hale gelirse, her bir girdi konumundan bir jetonu uzaklaştırarak ateşlemeye başlar. t ile ilişkilendirilmiş zaman gecikmesi kadar sonra ateşleme tamamlanır, ve t 'den p 'ye doru olan okla ilişkilendirilmiş zaman gecikmesi kadar sonra her bir p çıktı konumuna bir jeton toplanır. p ile ilişkili zaman artı p 'nin çıktı oku ile ilişkili zaman kadar sonra yeni biriktirilen jeton hazır hale gelir.

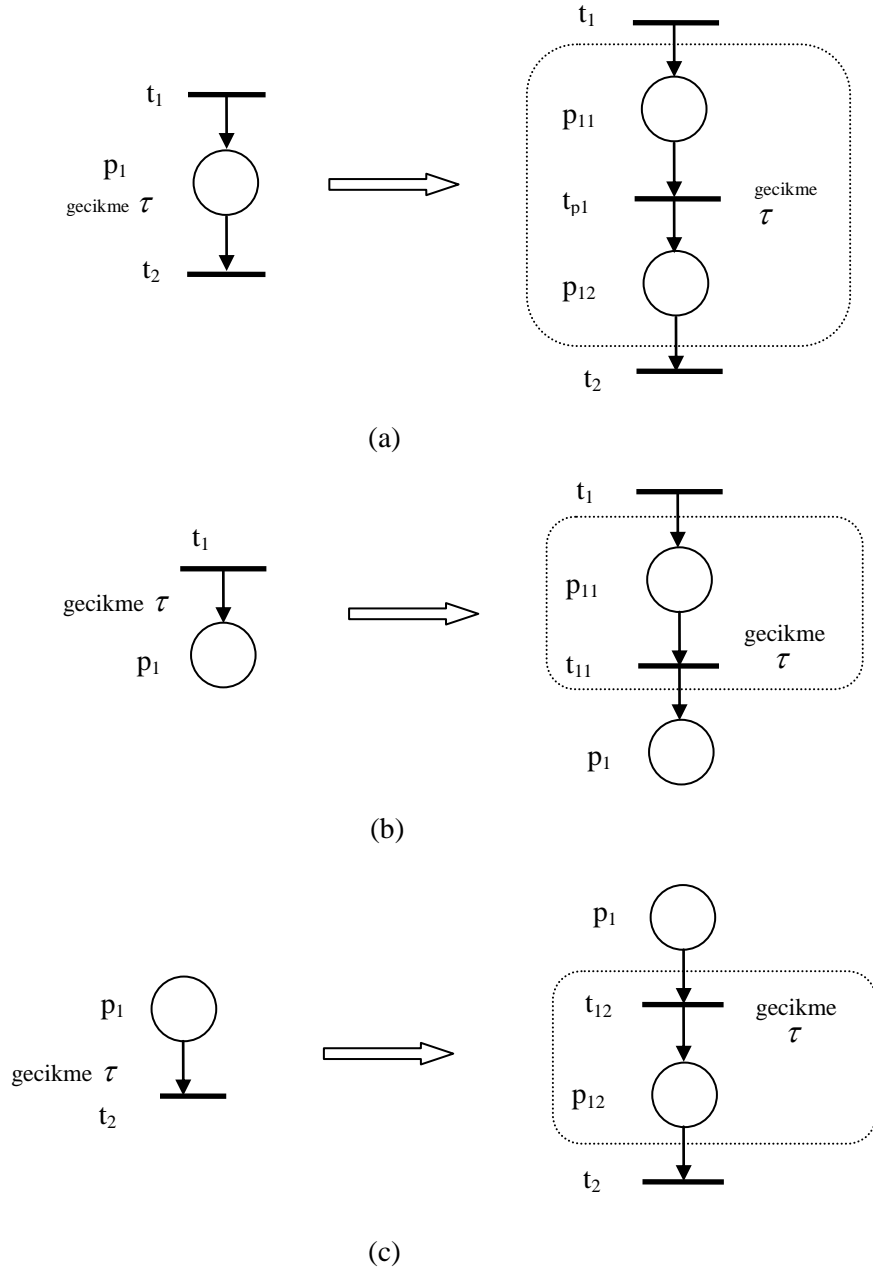
Hazır jetonlar tarafından olurlu hale getirilen geçişlerin hemen ateşlendiği kabul edilmektedir. Bir t geçiş m 'de k -olurludur eğer $m(p) \geq kI(p,t)$, $\forall p \in P$ ve burada k pozitif bir tamsayıdır. Eğer t hazır jetonlar tarafından k -olurlu hale getirilirse, t geçiş k kere aynı anda ateşlenir.

Daha önce de belirtildiği gibi Petri ağlarında zamanlama konum, geçiş veya oklarla ilişkilendirilerek oluşturulabilmektedir. Zaman gecikmesinin kesin olarak bilindiği deterministik zamanlı bir Petri ağından zamanlı geçiş PA veya zamanlı konum PA veya zamanlı ok PA'na dönüşüm mümkündür.

Teorem 4.1: Deterministik zamanlı bir PA zamanlı bir geçiş veya zamanlı konum veya zamanlı ok Petri ağına dönüştürülebilir.

İspat: İlk olarak herhangi bir deterministik zamanlı PA'nın zamanlı geçiş PA dönüştürülebildiğini ispatlayabilmek için zamanlı konum, bir geçişten bir konuma zamanlı ok ve bir konumdan bir geçişe zamanlı ok dönüşümlerinin sadece geçişlerle

ilişkili gecikmelere sahip denk yapılarının ortaya koyulması gerekmektedir. Bu dönüşümler Şekil 4.6(a)-(c)'deki gibidir. Bütün bu dönüşümlerde davranışsal özellikler korunmaktadır. İkinci olarak da PA yapılarının zaman süresi çiftleri de korunmaktadır. Bu yüzden deterministik zamanlı bir PA zamanlı geçiş PA'na zamana ait davranışını değiştirmeden dönüştürülebilmektedir. Aynı şekilde herhangi bir deterministik zamanlı PA'nı zamanlı konum veya zamanlı ok PA'na dönüştüren dönüşümler oluşturulabilir.



Şekil 4.6: (a) zamanlı konum, (b) geçişten konuma zamanlı ok, (c) konumdan geçiş zamanlı okların dönüştürülmüş denk zamanlı geçiş Petri ağları.

Deterministik zamanlı Petri ağlarının davranışsal özelliklerinin incelenmesi zaman içermeyen PA modellerininkiyle aynıdır. Zamanlı olmayan PA'nın davranışsal özelliklerinin incelenmesinde kullanılan teknikler zamanlı PA'na da uygulanabilmektedir. Bununla beraber Ruiz ve diğ. (1991) deterministik zamanlı Petri ağlarını zaman içermeyen Petri ağlarına dönüştüren bir yöntem önermektedir.

Deterministik zamanlı Petri ağlarının incelenmesi ve performans analizinde iki temel kavram önemli rol oynamaktadır (Zhou ve Venkatesh, 1999). Bunlar bir döngüdeki toplam zaman gecikmesi ve bir döngüdeki toplam jeton sayısıdır. İşaretli bir grafikte bu ikisi de sabittir. Güçlü şekilde birleştirilmiş (strongly connected) bir işaretli grafik sınırlı sayıda temel döngü içerir. Bir döngüdeki toplam zaman gecikmesi döngüyü oluşturan tüm konum, geçiş ve okların gecikmelerinin toplanmasıyla elde edilir. Toplam jeton sayısı döngüye ait konumlarda yer alan jetonların toplanmasıyla elde edilmektedir. Ramchandini (1974) ve Ramamoorthy ve Ho (1980) bunu aşağıdaki teoremden ortaya koymuşlardır.

Teorem 4.2: Güçlü şekilde deterministik zamanlı bir Petri ağında çevrim süresi

$$\pi = \text{Maks}_i(D_i / N_i) \quad (4.1)$$

şeklinde elde edilir ve burada

D_i : i . döngünün toplam zaman gecikmesi ve

N_i : i . döngünün jeton sayısıdır.

D_i / N_i : i . döngünün çevrim zamanıdır.

Eğer zaman gecikmesi $[\tau_{Min}, \tau_{Maks}]$ gibi zaman aralığı şeklinde verilirse, çevrim süresinin alt ve üst sınırları aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\pi_{Min} = \text{Maks}_i(D_{Min,i} / N_i) \text{ ve } \pi_{Maks} = \text{Max}_i(D_{Maks,i} / N_i) \quad (4.2)$$

burada $D_{Min,i}$ ($D_{Maks,i}$) tüm gecikmeler için π_{Min} (π_{Maks})'i baz alan i . döngünün toplam zaman gecikmesidir.

$[\tau_{Min}, \tau_{Maks}]$ gecikmeli bir geçişin olurlu hale geldikten sonra en az τ_{Min} ve en fazla τ_{Maks} kadar süre sonra ateşlenebilmektedir. Konumlar ve oklar için aralıklı zaman gecikmeleri için aynı durum geçerlidir. Elde edilen bu alt ve üst sınırlar kaynakların kullanım durumuyla ilgili problemlerin analiz edilmesine imkan vermektedir.

5. STOKASTİK PETRİ AĞLARI

5.1 Petri Ağlarında Stokastiklik

Kompleks imalat sistemlerinin tasarımı, değerlendirilmesi ve analizi için çeşitli araçlar bulunmaktadır. Genel olarak imalat sistemlerinin davranışlarının analizinde iki genel yaklaşım bulunmaktadır. Bunlar simülasyon ve matematiksel analiz teknikleridir. Bu araçların esnek, güçlü ve kullanımının kolay olması gerekmektedir. Bu araçlardan en fazla kullanılanları kuyruk teorisi, Markov zincirleri ve simülasyon teknikleridir (Al-Jaar, 1990).

Kuyruk teorisi imalat sistemlerinin performans değerlendirilmesi için oldukça sıklıkla kullanılmaktadır. Kuyruk teorisi modelleri imalat sistemlerindeki dinamikler, etkileşimler ve belirsizlikleri hesaba katmaktadır. Üstel dağılımlı hizmet birimleri, Poisson gelişleri, bloke olmayan operasyonlar ve sonsuz tampon kapasitesi kısıtları altında çarpım-biçimli (product-form) modeller geliştirilebilmekte ve matematiksel algoritmalarla da çözülebilmektedirler. Bununla beraber sonlu tampon kapasiteleri, bloke olma, arızalar, müşterilerin ayrılması ve birleşmesi, eş zamanlılık ve öncelikler gibi özelliklerin modele eklenmesi durumunda model yaklaşık çözümler ve simülasyon teknikleriyle çözülebilmektedir (Al-Jaar, 1990). Kuyruk teorisi modelleri modellenen sistemde spesifikasyonlar açısından daha az detay dikkate alındığı durumlarda sistem davranışını temsil edebilirliği kabul edilebilirdir (Balbo ve diğ., 1988).

Markov zinciri modelleri ise üstel durum uzayı patlaması sorunuyla karşı karşıya bulunmaktadır. Bu yüzden bu modellerin elde edilmesi sistemin tüm olası durumlarının dikkate alınmasını gerektirmektedir. Bu da çok kolay olmayıp bu modellerin uygulanabilirliği açısından bir dezavantaj oluşturmaktadır.

Simülasyon yaklaşımı bir imalat sisteminin detaylı operasyonunu doğru şekilde modelleyebilmektedir. Simülasyonun en önemli avantajı modelde ne seviyede detay ifade edilirse edilsin uygulanabilir olmasıdır ve bu sebeple de en fazla kullanılan tekniktir (Balbo ve diğ., 1988). Bununla beraber simülasyon teknikleri

çok fazla girdi datası ve işlem süresi getirmekte bu da hesaplama zamanı açısından pahalı olmaktadır. Genellikle de fazla sayıda parametre ve değişken olduğundan birden fazla simülasyon ve analiz gerekmektedir (Al-Jaar, 1990).

Petri ağları daha önce de belirtildiği gibi eşzamanlı olaylar, aynı anda kullanım, mantıksal öncelik ilişkileri ve yapısal etkileşimleri doğal ve basit bir şekilde ifade edebilmektedir. Çatışmalar, blokeler, sonlu tampon kapasitesi, eş zamanlılık, öncelikler ve montaj/demontaj operasyonlarını kolayca ve etkin bir şekilde modelleyebildiğinden ötürü imalat sistemlerinin modellenmesinde oldukça uygun bir metodoloji olarak öne çıkmaktadır. Buna ilaveten modellenen bir sistemin zaman bazlı performansının analizi ve dinamik davranışlarının incelenmesi için Petri ağlarına zaman ve süreler dahil edilebilmektedir (zamanlı Petri ağları). Üretim hızı, kaynak kullanımı gibi performans analizi zamanlı Petri ağları ile modellenmektedir. Esnek bir imalat sisteminde darboğazların bulunması, optimal tampon büyüklüğünün ve palet dağılımının belirlenmesi de mümkün olabilmektedir (Zhou ve diğ., 1990).

İmalat sistemlerinin modellenmesi ve analizinde en önemli konulardan biri çıkmaz (deadlock) durumudur. Özellikle kaynak paylaşımının olduğu bir imalat sisteminde kaynakların uygun şekilde atanmaması sistemde çıkmaza neden olmaktadır (Peterson, 1981). Petri ağları açısından sistemin davranışı sadece yapısına değil aynı zamanda başlangıç durumuna göre değişebilmektedir. Bunun gibi performans konularını incelemek ve kaynak paylaşımının olduğu imalat sistemlerinin analizi için stokastik Petri ağları (SPA) önerilmekte ve kullanılmaktadır (Molloy, 1982). Stokastik Petri ağları eş zamanlılık, aynı anda kullanım, öncelik ve üstünlüğü temsil etmede oldukça güçlü bir modelleme aracıdır (Balbo ve diğ., 1988; Haas, 2002, 2004).

Stokastik Petri ağlarının tanımı ve özelliklerine geçmeden önce imalat sistemlerinin modellenmesinde stokastik Petri ağlarının diğer matematiksel yaklaşımlarla kıyaslandığında avantajları aşağıdaki gibi özetlenebilir (Al-Jaar ve Desrochers, 1990);

- PA modelleri iyi gelişmiş matematiksel ve pratik altyapısıyla hiyerarşik bir modelleme aracı ifade etmektedirler. Yapısal analiz (çıkılmazlar, bağdaşmazlık, canlılık, ve sınırlandırılmışlık) ve zamana ait analizi (sistem çıktı hızı, kaynak

kullanımı, süreç içi envanter gibi performans ölçüleri) stokastik Petri ağlarıyla gerçekleştirilebilir.

- Stokastik Petri ağlarının uzantısı olan geliştirilmiş stokastik Petri ağları (generalized stochastic Petri nets) gömülü Markov zincirlerine eşyapılı (isomorphic) olduğundan (Molloy, 1982) kullanımı kuyruk teorisi, Markov zincirleri veya stokastik sistemler hakkında derinlemesine bilgi gerektirmemektedir. Daha da önemlisi PA modelleri çok karmaşık Markov zincirlerini temsil edebilmektedir.
- Ulaşılabilirlik grafiği stokastik PA modelinden kolayca elde edilebilmekte ve denk gelen Markov zincirini çözmede kullanılabilir. Bu da tüm olası sistem durumlarını dikkate alma zorunluluğunu ortadan kaldırmaktadır.
- PA modellerinde adım adım değişimler jeton, konum veya geçiş ekleyerek basitçe yapılabilmektedir. Diğer yandan bir Markov zincirinde küçük bir değişiklik bile genellikle modeldeki tüm durumların tekrar tanımlanmasını gerektirmektedir.

Bu bölümde stokastik Petri ağlarının tanımı ve çözümü, uzantıları olan geliştirilmiş stokastik Petri ağları ve deterministik stokastik Petri ağları ele alınacaktır.

5.2 Stokastik Petri Ağlarının Tanımı

Zaman gecikmeleri rassal değişkenler olarak modellendiğinde veya çakışmaların çözülmesi için deterministik zamanlı Petri ağlarına olasılık dağılımları eklendiğinde stokastik Petri ağları elde edilmektedir. Çoğunlukla bu modellerde zaman gecikmeleri sadece geçişlerle ilişkilendirilmektedir (Murata, 1989; Zhou ve Venkatesh, 1999; Gharbi ve Ioualalen, 2002). Eğer rassal değişkenler, genel dağılım veya hem deterministik hem de rassal değişkenlerden oluşuyorsa ortaya çıkan stokastik ağlar analitik olarak çözülememektedir (Marsan, 1995; Zhou ve Venkatesh, 1999). Bu durumlarda simülasyon ve yaklaşık tahmini yöntemler kullanılmak zorundadır. Bu yüzden birçok stokastik Petri ağ modelleri zaman gecikmesi ile ilişkilendirilen dağılımın çeşidine kısıtlama getirmektedir.

Stokastik bir Petri ağı her bir geçişi üstel dağılan rassal bir değişkenle ilişkilendirildiği ve bu rassal değişkenin geçişin olurlu hale gelmesinden ateşlenmesine kadar olan gecikmeyi ifade ettiği bir Petri ağıdır (Murata, 1989).

Stokastik Petri ağları ilk olarak Florin ve Natkin (1982) ve Molloy (1982) tarafından ortaya koyulmuştur ve bu çalışmalarda geçişler üstel olasılık dağılımıyla ilişkilendirilmiştir. Stokastik Petri ağları öncelik geçişleri, inhibitör oklar ve olasılıksal oklar içerebilirler ve bunlar denk Markov süreçleri şeklinde ifade edilebilirler. Bu da bir dizi matematiksel denklem çözerek analizi gerçekleştirmeye olanak vermektedir.

Bir t_i geçişiyle ilişkilendirilen τ_i zaman gecikmesi aşağıdaki üstel dağılım fonksiyonuna sahip negatif olmayan sürekli bir X rassal değişkeni olsun

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda_i x} \quad (5.1)$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_x(x) = \lambda_i e^{-\lambda_i x}$ olacaktır.

Buna göre ortalama gecikme

$$\bar{\tau}_i = \int_0^{\infty} [1 - F_i(t)] dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda_i t} dt = \frac{1}{\lambda_i} \quad (5.2)$$

elde edilir, burada λ_i , t_i geçişinin ateşleme hızıdır.

Stokastik bir Petri ağı (P, T, I, O, m_0, A) şeklinde ifade edilebilir, burada $A: T \rightarrow R^+$ tüm geçişlere pozitif ateşleme hızları atayan ateşleme fonksiyonu ve λ_i de t_i geçişinin ateşleme hızıdır.

Herhangi bir sonlu konumlu, sonlu geçişli, işaretli bir Petri ağı kesikli uzay Markov sürecine eşyapılıdır (isomorpik). Sınırlandırılmış bir stokastik Petri ağı sonlu Markov süreci veya zincirine eşyapılıdır (Molloy, 1982).

Buna göre üstel dağılımın hafızasızlık özelliğine dayanarak Molloy (1982) stokastik Petri ağlarının sürekli zamanlı Markov zincirine eşyapılı olduğunu ifade etmektedir. Markov zincirinin durumlarının sayısı SPA'nın ulaşılabilir işaretlemelerinin sayısına karşılık gelmektedir.

Tek boyutlu bir Markov zinciri tek bir tane rassal değişken içermektedir ve bir SPA'na karşılık gelen Markov zincirinde zaman tek rassal değişkendir.

5.3 Stokastik Petri Ağları ile Performans Analizi

Sınırlandırılmış bir SPA'nın sonlu Markov zincirine eşyapılı olmasının sonucu olarak SPA ile performans analizi aşağıdaki şekilde yapılmaktadır (Murata, 1989; Marsan ve diğ., 1995; Zhou ve Venkatesh, 1999)

1. Sistemin PA yapısı aşağıdan-yukarıya, yukarıdan-aşağıya veya karma yaklaşımla oluşturulur. Daha sonra geçişler üstel zamanlı gecikmelerle ilişkilendirilir.
2. Ulaşılabilirlik grafiği $R(m_0)$ elde edilir. Her bir oka ilgili geçişin hızı atanır. Tüm durumlar veya işaretlemeler $m_0, m_1, m_2, \dots, m_{q-1}$ şeklinde adlandırılır. Burada q tüm durumların sayısıdır ve $q = |R(m_0)|$ 'dir.
3. Markov sürecinin analiz edilmesi: SPA (N, m_0) geri dönebilir olmak üzere SPA ergodik sürekli zamanlı bir Markov zinciri meydana getirir ve kararlı durum (steady-state) olasılık dağılımı $\Pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_q)$ aşağıdaki doğrusal matris denklemlerin çözülmesiyle elde edilir.

$$\Pi A = 0 \quad (5.3)$$

$$\sum_{i=0}^{q-1} \pi_i = 1 \quad (5.4)$$

burada $A = (a_{ij})_{q \times q}$ kare matrisi geçiş hız matrisi (transition rate matrix) ve π_i de m_i işaretlemesinde (durumunda) olma olasılığı olmak üzere $i = 0, 1, \dots, q-1$ için A 'nın i . satır elemanı a_{ij} şu şekilde hesaplanmaktadır;

3.1 eğer $j \neq i$ ise, a_{ij} değeri m_i işaretlemesinden m_j işaretlemesine yönlendirilmiş tüm okların hızlarının toplamıdır.

3.2 A 'nın herhangi bir satır elemanı $\sum_{j=0}^{q-1} a_{ij} = 0$ sağladığından

$$a_{ii} = -\sum_{j \neq i}^{q-1} a_{ij} \quad (5.5)$$

şeklinde elde edilir. Burada $-a_{ii}$ değeri m_i işaretlemesinde olurlu olan geçişlerin hızlarının toplamını ifade eder (m_i işaretlemesinden ayrılan geçişlerin hızları)

4. Elde edilen kararlı durum olasılıkları Π ve geçiş ateşleme hızları A kullanılarak SPA olarak modellenen sistemin performans tahminleri elde edilir. Bunlardan en yaygın olanları şunlardır

a. *Belirli bir koşulun olasılığı*: B belirli bir koşulu sağlayan $R(m_0)$ 'ın alt kümesi olmak üzere istenen olasılık

$$P(B) = \sum_{m_i \in B} \pi_i \quad (5.6)$$

örneğin; bu belirli koşul bir kaynağın faydalı bir iş yapması ise $P(B)$ kaynak kullanımındır.

b. *Jetonların sayısının beklenen değeri*: B_{ij} , $R(m_0)$ 'ın alt kümesi olmak üzere öyle ki B_{ij} 'nin her bir işaretlemesinde p_i konumundaki jeton sayısı j olsun. O zaman k -sınırlı bir p_i konumundaki jetonların sayısının beklenen değeri

$$E[m(p_i)] = \sum_{j=1}^k jP(B_{ij}) \quad (5.7)$$

örneğin; eğer p_i A-tipi tamamlanmış ürünlerin uygunluğunu temsil ediyorsa, $E[m(p_i)]$ değeri A-tipi ürünlerin ortalama envanter miktarıdır.

c. *Birim zamandaki ateşlemelerin ortalama değeri*: B_j değeri t_j geçişinin olurlu olduğu $R(m_0)$ 'nin bir alt kümesi olsun. t_j geçişi sadece olurlu hale geldiğinde ateşlenebildiğinden t_j 'nin birim zamandaki ortalama ateşleme sayısı

$$f_{ij} = \sum_{m_i \in B_j} \pi_i \lambda_{ji} \quad (5.8)$$

şeklinde elde edilir burada λ_{ji} değeri m_i işaretlemesindeki t_j geçişinin ateşleme hızıdır. İşaretleme bağımsız (marking-independent) durumunda $\lambda_{ji} = \lambda_j$ olduğundan yukarıdaki formül

$$f_j = \sum_{m_i \in B_j} \pi_i \lambda_j = \lambda_j \sum_{m_i \in B_j} \pi_i \quad (5.9)$$

şeklinde basitleştirilebilir.

- d. *Sistemin ortalama çıktı veya üretim hızı.* Bir ürünün T' alt kümesindeki bir geçiş her ateşlendiğinde üretildiği düşünülürse ortalama çıktı miktarı g aşağıdaki gibi elde edilir.

$$g = \sum_{t_j \in T'} f_j \quad (5.10)$$

5.4 Genelleştirilmiş Stokastik Petri Ağları

Zaman içermeyen bir Petri ağı modelinde her bir geçiş ateşlemesi üstel dağılımlı rassal zaman gecikmesiyle modellendiğinde ortaya genellikle büyük bir Markov zinciri çıkmaktadır öyle ki sayısal zorluktan dolayı çözümü çok zor ya da mümkün değildir. Bir sistemin büyüklüğü ve karmaşıklığı arttıkça sistemin grafiksel temsilinin çok zorlaşması SPA'nın bir sınırlamasıdır. Stokastik Petri ağlarında karşılaşılan en önemli sorun SPA modelinin kompleksliği arttıkça ilişkili Markov zincirinin durum sayısının çok hızlı bir şekilde artmasıdır (Marsan ve diğ., 1995; Koriem ve Patnaik, 1997). Bu sorunun üstesinden gelebilmek ve bir SPA çözümünün kompleksliğini azaltmak için genelleştirilmiş stokastik Petri ağları geliştirilmiştir (Marsan ve diğ., 1984; Marsan ve diğ., 1995).

Genelleştirilmiş stokastik Petri ağları (GSPA) stokastik Petri ağlarının acele (immediate) geçişler eklenmiş bir uzantısıdır. Bir GSPA'nda geçişler zamanlı geçişler (zaman harcayan aktivitelerin tanımlanması) ve acele geçişler (modelin herhangi bir mantıksal davranışını ifade etmek için) olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Zamanlı bir geçiş üstel dağılımlı ateşleme hızına sahip iken acele geçiş ateşleme gecikmesi içermemektedir ve zaman gecikmesi ihmal edilebilecek kadar az olan mantıksal kontrol veya aktiviteyi modellemek için kullanılır. Zamanlı geçişler SPA'ndaki gibi davranırken acele geçişler sonsuz ateşleme hızına sahiptir ve sıfır zaman süresinde ateşlenirler.

GSPA'larında ulaşılabilirlik kümesi somut (tangible) ve yok olan (vanishing) şeklinde ikiye ayrılmaktadır. En az bir tane acele geçişin olurlu olduğu işaretlemeler yok olan işaretleme olarak adlandırılırken sadece zamanlı geçişlerin (üstel dağılımlı) olurlu olduğu işaretlemeler somut işaretleme olarak adlandırılmaktadır (Marsan ve diğ., 1995). Yok olan bir işaretlemedeki harcanan zaman miktarı deterministik olarak sıfır iken somut bir işaretlemede harcanan zaman miktarı bir olasılıkla pozitiftir.

GSPA'nın dinamiğini tanımlamak için zamanlı ve acele davranışı yok olan ve somut işaretlemelere başvurarak ayrı ayrı incelemek gerekmektedir. Zamanlı dinamiklerin incelenmesi SPA'daki ile tam olarak aynıdır. Her bir zamanlı geçişin bir zamanlayıcıya sahip olduğu düşünülebilir. Bu zamanlayıcı geçiş ateşlemeden sonra ilk defa olurlu hale geldiğinde geçişle ilişkilendirilen üstel olasılık dağılım fonksiyonundan örneklenen bir değere ayarlanır. Geçişin olurlu olduğu tüm zaman aralıkları boyunca bu zamanlayıcı azaltılır. Zamanlayıcı değeri sıfıra ulaştığında geçiş ateşlenir. Her bir zamanlı geçiş dağıtılmış bir ortamda bazı faaliyetlerin gerçekleşmesini modellemek için kullanılır ve tüm olurlu faaliyetler tamamlanana kadar PA yapısı tarafından aksi tanımlanmadığı sürece paralel gerçekleşir. Faaliyetler tamamlandığında lokal çevresinde durum değişikliğine neden olurlar. Zamanlı çatışmaların çözülmesi için özel bir mekanizmaya gerek yoktur ve zamana bağlı bilgi çatışmanın çözülmesine imkan veren bir metrik sağlar.

Yok olan işaretlemeler durumunda ise GSPA zaman tüketmez ve herşey anında meydana gelir. Bu şu anlama gelmektedir eğer sadece bir acele geçiş olurlu hale geldiğinde geçiş ateşlenir ve işaretleme oluşur. Eğer birkaç acele geçiş olurlu hale gelirse hangi geçişin ateşleneceğini belirleyen bir metriğe ihtiyaç vardır. Hangi geçişin önce ateşleneceğinin seçimi sadece bir çatışmanın çözülmesi gerektiği durumda geçerlidir. Eğer birden fazla acele geçiş olurlu hale gelirse ve bunların ateşlenmesi birbirlerini etkisiz hale getirmiyorsa bu geçişler eş zamanlı olarak ateşlenirler. Eğer bu geçişler aynı çatışma kümesine dahilseler geçiş ağırlığı olarak adlandırılan bu geçişlerin ateşleme frekansına dayanan olasılık yoğunluk fonksiyonları tanımlanmalıdır. Geçiş ağırlıkları aynı çatışma kümesinde yer alan eş zamanlı olurlu hale gelen geçişlerin ateşleme olasılıklarının hesaplanması için kullanılmaktadırlar.

Buna göre zamanlı geçişlerin zamansal bilgisi ile acele geçişler için ağırlıkların belirlenmesi arasında fark gözlemlenmektedir. Zamanlı bir geçiş ile ilişkilendirilmiş zamana bağlı bilgi sadece geçiş tarafından modellenen faaliyetin karakteristiklerine dayanmaktadır. Zamanlı bir geçişin zamana bağlı spesifikasyonu diğer zamanlı geçişlerle ilgili bilgiye ihtiyaç duymamaktadır. Bunun yanında acele geçişler için ağırlıkların belirlenmesi aynı çatışma kümesine ait tüm geçişler göz önüne alınarak gerçekleştirilmelidir. Aynı çatışma kümesinde yer alan tüm olurlu geçişler dikkate alınarak ağırlıklar normalize edilmelidir.

5.5 Genelleştirilmiş Stokastik Petri Ağlarının Tanımı ve Analizi

5.5.1 GSPA'nın tanımı

Stokastik Petri ağlarının etkinliğini arttırmak için geliştirilen ve zamanlı Petri ağlarının özel bir sınıfı olan genelleştirilmiş stokastik Petri ağları aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

Bir GSPA $Z = (P, T, E, W, H, A)$ şeklinde tanımlanır. Burada

P : sonlu boş olmayan konum kümesi

T : sonlu boş olmayan geçiş kümesi. T kümesi T_i ve T_e diye iki ayrı kümeye ayrılır. T_i acele geçişler kümesi, T_e ise zamanlı (üstel dağılımlı) geçişler kümesidir

E : konumlardan geçişlere veya geçişlerden konumlara yönlendirilmiş olan oklar kümesi $E \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ öyle ki $\forall (t \in T) \exists (p_i, p_j \in P) (p_i, t) \in E \wedge (t, p_j) \in E$

$W: E \rightarrow N^+$ okların ağırlığı

H : sonlu inhibitör oklar kümesi öyle ki $H \subseteq P \times T$ ve $E \cap H = \emptyset$

$A: T_e \rightarrow R^+$ ortalama ateşleme süreleri

Acele geçişler tüm işaretlemelerde sıfır ateşleme zamanına sahiptir. T_e kümesinin elemanları üstel dağılımlı ateşleme süresine sahiptir.

5.5.2 İşaretleme ve ateşleme kuralları

Üstel fonksiyonun hafızasızlık özelliğine dayanarak GSPA işaretlemesi m

$m: P \rightarrow N^+$ (bir konumdaki jeton sayısı)

şeklinde tanımlanır.

GSPA için olurluluk koşulu deterministik zamanlı PA ile aynıdır. Acele geçişler zamanlı geçişlere göre öncelik taşırlar ve aşağıdaki ateşleme kuralları geçerlidir;

1. Olurlu acele geçişler var iken olurlu haldeki üstel dağılımlı geçişler ateşlenmez.
2. İki veya daha fazla aynı anda acele geçişli olurlu ise hepsi eşzamanlı olarak ateşlenir.
3. Eğer olurlu bazı acele geçişler çatışyorsa, bunlardan sadece bir tanesi daha önceden tanımlanan olasılık dağılımına göre ateşlenir.

Acele geçişlerin ateşlenmesiyle oluşan durumlar yok olan durumlar, zamanlı geçişlerin ateşlenmesiyle oluşan durumlar ise somut durumlar olarak adlandırılır.

5.5.3 Durum uzayının elde edilmesi

Zamanlı bir PA'nın ulaşılabilirlik grafiği $R = (\mu, \theta, \gamma)$ 'dir ve burada

μ : zamanlı PA'nın ulaşılabilir durumlarının kümesi

θ : yönlendirilmiş oklar kümesi, $\theta \subseteq (\mu \times \mu)$, öyle ki $(\mu_i \times \mu_j) \in \theta$ sadece ve sadece

μ_j , μ_i 'den doğrudan ulaşılabilir ise

γ : μ_i durumundan μ_j durumuna olan geçişin olasılığı γ_{ij} 'yi atayan nitelendirme fonksiyonudur.

Buna göre, $\gamma: \theta \rightarrow (0,1)$; $\gamma(\mu_i, \mu_j) = \gamma_{ij}$

Durumların kalma süreleri (sojourn times) sıfırdan büyük veya eşittir. Sıfırdan farklı kalma süresi olan durumlar somut durumlar, sıfır kalma süresi olan durumlar da yok olan durumlardır. Yok olan durumlar sıfır zaman süresinde değiştiğinden sistemin zamana göre değerlendirilmesinde herhangi bir etkileri yoktur. Bir başka ifadeyle GSPA'da sistemin zamana bağlı analizinde yok olan durumların etkisi olmadığından sadece somut işaretlemeler/durumlar dikkate alınarak kararlı durum olasılıkları ve performans indisleri hesaplanmaktadır (Marsan, ve diğ., 1995).

5.5.4 Kararlı durum performansının tahmini

k -sınırlı m_0 başlangıç durumuna sahip GSPA sistemlerinin altındaki stokastik süreç sonlu durum uzaylı, homojen, indirgenemez ve sürekli zamanlı yarı Markov süreci olarak sınıflandırılmaktadır (Marsan, ve diğ., 1995; Haas, 2002). GSPA durumunda gömülü Markov zinciri zaman kavramını önemsemeden ve yarı Markov sürecinin durumlar kümesine odaklanacak şekilde düşünülür (Motameni, ve diğ., 2008).

Bir GSPA sistemi ile ilişkili sürekli zamanlı markov zinciri aşağıdaki basit kurallar uygulanarak elde edilir (Marsan, 1995; Motameni, ve diğ., 2008)

1. Sürekli zamanlı Markov zincirinin durum uzayı $S = s_i$ GSPA $(m_i \rightarrow s_i)$ ile ilişkili PA'nın ulaşılabilirlik kümesi $R(m_0)$ 'a tekabül eder.

2. s_i (m_i işaretlemesine denk gelen) durumundan s_j (m_j) durumuna geçiş hızı zamanlı geçişler için ateşleme hızlarının veya acele geçişler için ağırlıkların toplanmasıyla elde edilir. Bu geçişler m_i işaretlemesinde olurlu halledirler ve ateşlenmeleri m_j işaretlemesine neden olur.

Bu kuralları temel alarak ve GSPA tanımından başlayarak sürekli zamanlı Markov zincirine eşyapıdaki durum geçiş hız matrisi (state transition rate matrix) elde edilebilir.

A : durum geçiş hız matrisi

w_k : t_k geçişinin ateşleme hızı (acele geçiş için ağırlığı)

$E_j(m_i)$: ağı m_i işaretlemesinden m_j işaretlemesine getiren geçişler kümesi

olmak üzere durum geçiş hız matrisinin elemanları a_{ij} aşağıdaki gibi elde edilir,

$$a_{ij} = \frac{\sum_{t_k \in E_j(m_i)} w_k}{q_i} \quad (5.11)$$

burada q_i .

$$q_{ij} = \begin{cases} \sum_{t_k \in E_j(m_i)} w_k, & i \neq j \\ q_i, & i = j \end{cases} \quad (5.12)$$

$$q_i = \sum_{t_k \in E(m_i)} w_k \quad (5.13)$$

m_i işaretlemesinde ortalama kalma süresi (average sojourn time) aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$SJ_i = \frac{1}{q_i} \quad (5.14)$$

R , RT ve RV sırasıyla stokastik sürecin sırasıyla ulaşılabilirlik, somut ulaşılabilirlik ve yok olan ulaşılabilirlik kümelerini temsil etmek üzere bu kümeler arasında aşağıdaki ilişki vardır

$$R = RT \cup RV \quad \text{ve} \quad RT \cap RV = \phi \quad (5.15)$$

İşaretlemeler yokolanlar matrisin ilk elemanları ve somut olanlar da son elemanları olacak şekilde düzenlenirse A durum geçiş matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir;

$$A = B + C = \begin{bmatrix} D & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ F & G \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

B matrisinin elemanları acele geçişlerin ateşlenmesiyle meydana gelen işaretleme değişimlerini, C matrisinin elemanları zamanlı geçişlerin ateşlenmesiyle meydana gelen işaretleme değişimlerini ifade eder. D matrisi yok olanlardan yok olan işaretlemelere geçişin olasılıklarını, E matrisi de somuttan somuta geçişlerin olasılıklarını ifade etmektedir. F matrisi somuttan yok olana işaretlemelerini G ise somut işaretlemeler içinde kalanların olasılıklarını ifade etmektedir.

ψ gömülü Markov zincirinin kararlı durum olasılık dağılımı olmak üzere aşağıdaki lineer matris denklem sisteminin çözümü

$$\begin{aligned} \psi &= \psi A \\ \psi 1^T &= 1 \end{aligned} \quad (5.17)$$

gömülü Markov zinciri tarafından gerçekleştirilen geçişlerin (durumların) sayısı şeklinde yorumlanabilir. $\frac{1}{\psi}$ değeri s_i durumunun geçiş ateşlemesi sayısı cinsinden ölçülen ortalama tekrarlama zamanıdır.

GSPA ile ilişkilendirilen stokastik sürecin kararlı durum olasılık dağılımı her bir ψ_i 'yi denk gelen işaretlemedeki kalma süresi ile ağırlıklandırıp tüm dağılım normalize edilerek elde edilir. Bu yöntem somut durumların sayısıyla kıyaslandığında yok olan durumların sayısı daha az olduğunda hesaplama olarak kabul edilebilir bir yöntemdir. Bunun yanında bu yöntemde yok olan işaretlemelerin de olasılığı hesaplanmaktadır ve bu yok olan işaretlemelerde harcanan zaman sıfır olduğundan nihai çözümün bilgi içeriğine katkısı yoktur. Buna ilave olarak yok olan işaretlemeler geçiş olasılık matrisi A 'nın boyutunu arttırmakta ve bu da çözümün hesaplanmasını daha pahalı ve bazı durumlarda imkansız hale getirmektedir. Bunu önlemek için sadece somut işaretlemelerin toplam geçiş olasılıkları hesaplanarak indirgenmiş gömülü Markov zinciri (reduced embedded Markov chain) elde edilmelidir (Marsan ve diğ., 1995). İndirgenmiş gömülü Markov zincirinin geçiş olasılık matrisi şu şekilde ifade edilebilir;

$$A' = G + FH \quad (5.18)$$

burada

$$H = \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{n_0} D^k \right) E & \text{yok olan durumlar arasında döngü yok} \\ [I - D]^{-1} E & \text{yok olan durumlar arasında döngü var} \end{cases} \quad (5.19)$$

ψ' indirgenmiş gömülü Markov zincirinin kararlı durum olasılık dağılımını temsil eden satır vektörü olmak üzere

$$\begin{aligned} \psi' &= \psi' A \\ \psi' 1^T &= 1 \end{aligned} \quad (5.20)$$

probleminin çözümü bir referans işaretlemesine yapılan birbirini izleyen iki ziyaretin sadece somut işaretlemeler için doğrudan ortalamasını vermektedir. İndirgenmiş gömülü Markov zincirinin herhangi bir işaretlemesini referans işaretleme (m_i) olarak alırsak m_i işaretlemesine yapılan iki birbirini izleyen ziyaret arasında herhangi bir m_j işaretlemesine yapılan ortalama ziyaret sayısı v_{ij}

$$v_{ij} = \frac{\psi'_j}{\psi'_i} \quad (5.21)$$

şeklinde elde edilir.

Somut işaretlemeler kümesi ile ilgili durağan (stationary) olasılık dağılımı ortalama kalma süreleri aracılığıyla aşağıdaki formülle elde edilir.

$$\eta'_j = \frac{v_{ij} S J_j}{CY(m_i)} \quad (5.22)$$

burada $CY(m_i)$ GSPA'nın m_i işaretlemesine göre çevrim süresidir ve aşağıdaki şekilde elde edilir;

$$CY(m_i) = \sum_{k: m_k \in T} v_{ik} S J_k \quad (5.23)$$

GSPA ile ilişkili sürekli zamanlı Markov zincirinin olasılık geçiş matrisi Q' indirgenmiş gömülü Markov zincirinin geçiş olasılık hız matrisi A' nün satırlarını denk gelen somut işaretlemelerin ortalama kalma süresi $\frac{1}{q_i}$ ile bölünerek elde edilir.

Q' nün diagonal elemanları diagonal olmayan elemanların negatif toplamına eşitlenir.

$$q'_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{SJ_i} a'_{ij} & i \neq j \\ -\sum_{i \neq j} q'_{ij} & i = j \end{cases} \quad (5.24)$$

Alternatif bir yol olarak somut işaretlemeler üzerinde kararlı durum olasılık dağılımları aşağıdaki lineer matris denklemlerinin çözülmesiyle elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \eta' Q' &= 0 \\ \eta' 1^T &= 1 \end{aligned} \quad (5.25)$$

bu sonuç göstermektedir ki GSPA aynı SPA'nda olduğu gibi uygun sürekli zamanlı Markov zincirini çözülmesiyle analiz edilebilir.

Kararlı durum dağılımı η' performans indisleri şeklinde ifade edilen SPA'nın davranışının kantitatif olarak değerlendirilmesinin temelini oluşturmaktadır.

GSPA'da en çok kullanılan performans göstergeleri şöyledir;

1. *GSPA'nın belli bir koşulunun olasılığı:* Y koşulunun PA'nın belli işaretlemeleri için doğru olduğu kabul edilirse, istenen olasılık

$$P(Y) = \sum_{m_i \in A} \eta_i \quad (5.26)$$

olarak elde edilir.

2. *Bir konumdaki jetonların sayısının beklenen değeri:* B_{ij} , $R(m_0)$ 'ın alt kümesi olmak üzere öyle ki B_{ij} 'nin her bir işaretlemesinde p_i konumundaki jeton sayısı j olsun. O zaman k -sınırlı bir p_i konumundaki jetonların sayısının beklenen değeri

$$E[m(p_i)] = \sum_{j=1}^k jP(B_{ij}) \quad (5.27)$$

3. *Birim zamandaki ateşlemelerin ortalama değeri:* B_j değeri t_j geçişinin olurlu olduğu $R(m_0)$ 'nin bir alt kümesi olsun. t_j geçişi sadece olurlu hale geldiğinde ateşlenebildiğinden t_j 'nin birim zamandaki ortalama ateşleme sayısı

$$f_j = \sum_{m_i \in B_j} w_j \eta_i \quad (5.28)$$

şeklinde elde edilir.

5.6 Deterministik ve Stokastik Petri Ağları

Literatürde çeşitli stokastik Petri ağları modelleri önerilmektedir. Bunlar stokastik Petri ağları (SPA), genelleştirilmiş stokastik Petri ağları (GSPA) ve deterministik ve stokastik Petri ağları (DSPA) olarak adlandırılmaktadır. SPA'da geçişlerin zaman gecikmesi üstel olasılık dağılım fonksiyonuyla ilişkilendirilmektedir. GSPA'da üstel dağılımlı geçişlere ilave olarak sıfır zaman gecikmesine sahip acele geçişler yer almaktadır. Marsan ve Chiola (1987) tarafından ortaya konan DSPA, GSPA'nın bir uzantısıdır ve de sabit ateşleme süreli deterministik geçişlere izin vermektedir. DSPA özellikle bilgisayar ve iletişim sistemlerinin modellenmesi ve analizi için uygun bir araç olarak görülmektedir (German, 1995; Blume ve diğ., 2007).

DSPA'nda geçişlerin ateşlenmesi çok küçüktür (atomic) ve de ateşleme gecikmesi en az olan bir sonraki ateşleme için seçilir. DSPA'nın analizi için çok önemli bir yapısal olarak kısıtlama bulunmaktadır. Buna göre DSPA'da bir işaretlemeye en fazla bir tane deterministik geçiş olurlu olabilmektedir.

DSPA'nın analizi için çeşitli yöntem yaklaşımları önerilmektedir. Bu yöntemler sistemin uzun dönem davranışının ve zamana bağlı davranışının analiz ve değerlendirilmesini amaçlamaktadır. DSPA'nın sayısal analizi temelde yatan sürekli zamanlı stokastik süreç için geçici/süreksiz (transient) veya durağan (stationary) dağılımlarının hesaplanmasını gerektirmektedir. Literatürde yer alan çeşitli araştırmacılar tarafından önerilen yöntemler kısaca şöyledir;

Choi ve diğ. (1993) DSPA'nın ateşleme sürecinin Markov yenileyici (generative) stokastik süreç olduğunu belirterek Laplace-Stieltjes dönüşümlerinin nümerik tersine dayanan sayısal bir analiz yöntemi ortaya koymuşlardır. Teorik olarak önemli bir yaklaşım olmakla beraber bu yöntem büyük DSPA'nın geçici/süreksiz (transient) analizi için sayısal çözümün çok kompleks olmasından dolayı uygun değildir (Lindermann ve Thümmel, 1999; Ciardo ve Li, 1999).

German (1995) tarafından önerilen bütünleyici değişkenler yönteminde DSPA'nın altında yatan stokastik sürecin geçici davranışını tanımlayan durum denklemleri elde edilmektedir. Bu yöntem üç kısıt altında çalışmaktadır. Bunlar; her bir işaretlemeye en fazla bir tane deterministik geçişin olurlu olabilmesi, tüm deterministik geçişlerin aynı ateşleme gecikmesine sahip olması ve de deterministik geçişlerin başka bir geçiş/geçişlerin ateşlenmesiyle edilgen olmamasıdır. Bu yöntem belirli kısıtlar

altında dahi parçalı diferansiyel denklem sistemlerinin sayısal çözümünü gerektirdiğinden pratik olarak uygulanabilirliği sınırlıdır (Lindermann ve Thümmeler, 1999).

Linderman ve Thümmeler (1999) eş zamanlı deterministik geçişlerin olduğu DSPA için analiz yöntemi önermektedirler. Önerilen yöntem durum denklemleri Fredholm integral denklemleri olan genel uzaylı markov zincirinin analizine dayanmaktadır. Bu yöntem bütünleyici değişkenler yöntemine göre üç kat daha az hesaplama gerektirmektedir.

Ciardo ve Li (1999) büyük DSPA'nın analizine imkan veren kesin sonuç vermeyen bir yaklaşık çözüm yöntemi önermektedirler. Bu yöntemde bir DSPA için ortalama kalma sürelerinin ortalaması için sınır ve yaklaşık değerler hesaplanmaktadır. Kesin sonuç vermeyen sezgisel bir yaklaşımdır.

Bu yöntemleri genel olarak değerlendirecek olursak, önerilen yöntem yaklaşımları bazı kısıtlar altında ve de spesifik koşullarda uygulanabilirler. Henüz ortaya koyulmuş ortak ve genel bir yaklaşım bulunmamakta ve geliştirme çalışmaları da devam etmektedir. Bu yöntemler doğruluk ve hesap gereksinimi açısından farklılıklar göstermektedir. Örneğin, iki veya daha fazla eş zamanlı olurlu deterministik geçiş olması durumunda matematiksel analiz mümkün olmamaktadır (Blume ve diğ., 2007). Bu yöntemlerde önerilen algoritmalar Laplace-Stieltjes dönüşümlerinin tersi, integral hesaplamaları ve diferansiyel denklem çözümleri gibi oldukça karmaşık ve büyük hesaplamalar gerektirmektedir. Bu da yöntemlerin uygulanabilirliğini azaltmaktadır.

6. BULANIK PETRİ AĞLARI

6.1 Bulanık Kümeler Teorisi

İlk defa Azerbaycan asıllı Zadeh (1965) tarafından geliştirilen bulanık küme teorisi, esas olarak insan düşünce ve algılarındaki belirsizlikle ilgilenir ve bu belirsizliği sayısallaştırmaya çalışır (Kahraman ve Tolga, 1998). Bulanık küme teorisinin en önemli özelliği ve katkısı belirsizlik içeren bilgileri (vague knowledge) temsil edebilme yeteneğidir. Mantık, sistem, küme vb. için bulanıklık, belirsizliğin bir ifadesi olarak ortaya çıkar. Geçmişte belirsizliklerin işlenmesi ve anlamlı sonuçlara varılabilmesi için ihtimaller teorisi kullanılmıştır. Matematik ve mühendislikte bu teori belirsizlik durumlarında istatistik yöntemlerle beraber kullanılır. Bu nedenle de bütün belirsizliklerin rastgele karakterde olduğu kavramı yaygınlaşmıştır. Rastgeleliğin en önemli özelliği, sonuçların ortaya çıkmasında tamamen şans olayının rol oynaması ve gerekli öngörülerin ve tahminlerin kesin bir doğrulukla önceden yapılamamasıdır (Şen, 2001). Ancak bilinen belirsizliklerin hepsi rasgele karakterde değildir ve günlük hayatta karşılaşılan belirsizliklerin çoğu rasgele değildir. Rastgele karakterde olmayan olaylar için örneğin, sözel belirsizlikler halinde inceleme ve sonuç çıkarma işlemlerinde ihtimaller hesabı ve istatistik gibi sayısal belirsizlikleri gerektiren metodolojiler (yöntembilimler) kullanılamaz (Ross, 1995).

Genel anlamda bulanık kelimesi, iyi tanımlanmış sınırları olmayan aktiviteler kümesi veya gözlemlere tanımlamaların yapılamadığı durumları ifade eder (Chen ve Hwang, 1992). Bulanık kümeler teorisinin en önemli gücü ve önemi sayısal değişkenler yerine dilsel değişkenleri ya da sözel ifadeleri kullanarak kesin olmayan (imprecise) kavramları temsil etmesidir (Ross, 1995).

Klasik kümelerde elemanların bir kümeye ait olma durumları veya üyelikleri iki gruba ayrılır: Üyeler (kesinlikle kümeye ait olanlar) ve üye olmayanlar (kesinlikle kümeye ait olmayanlar). Klasik kümenin temsil ettiği sınıfa üye olan ve olmayan elemanlar arasında keskin bir ayırım vardır. Aristo mantığına göre çalışan klasik

küme yaklaşımında bir kümeye giren öğelerin o kümeye ait oluşları durumunda üyelik derecesi 1'e, ait olmamaları durumunda ise 0'a eşit varsayılmaktadır. Bu ikisi arasında hiç bir üyelik derecesi düşünülmez. Bulanık kümeler teorisinde ise elemanların üyelik dereceleri 0 ile 1 arasında değişmektedir. Örneğin, uzun boyluluğu ele alacak olursak, klasik küme yaklaşımına ya da Aristo mantığına göre insanlar boy bakımından ya uzundur ya da kısadır. Bulanık kümelere göre uzun boyluluğun değişik dereceleri vardır. Uzun boylulardan bir tanesi gerçek uzun boylu olarak olarak esas alınırsa ondan biraz daha uzun ya da kısa olanlar uzun boylu değil diye küme dışında bırakılmazlar. Esas alınan uzun boyluluğun altında ve üstündeki boylar o kadar kuvvetli olmasa bile, uzun boyluluğa ait olma derecesi biraz daha az olmakla beraber, yine de uzun boylular kümesine girer. Böylece tüm insanların teker teker boy açısından birer uzunluk üyelik dereceleri bulunmaktadır.

Klasik kümeler üyelik özelliklerinin kesin olarak tamamını içeren elemanları içerirken, bulanık kümeler üyelik özelliklerinin kesin olmayarak sağlayan elemanları içerir. Bu yüzden bulanık bir kümedeki elemanın üyeliği yaklaşık (approximate) olabilir (Ross, 1995).

Bir bulanık küme kesintisiz üyelik derecelerine sahip elemanlar topluluğudur (Chen ve Hwang, 1992). Başka bir ifadeyle bulanık küme değişik üyelik derecesinde öğeleri olan bir topluluk olarak tanımlanabilir (Şen 2001). Bulanık bir küme, evrensel kümedeki her olası elemana, onun bulanık kümedeki üyelik derecesini temsil edecek şekilde bir değer atayarak matematiksel olarak tanımlanabilir. Elemanlar, bulanık kümeye daha büyük veya daha küçük üyelik dereceleri ile yani, daha fazla veya daha az derecelere bağlı olabilir.

Bu üyelik dereceleri $[0,1]$ kapalı aralığındaki reel sayılarla ifade edilirler. Böylece "güneşli" kavramını temsil eden bir bulanık kümede, % 0 bulutlu havaya 1, % 20 bulutlu havaya 0,8, % 30 bulutlu havaya 0,4 ve % 75 bulutlu havaya 0 üyelik derecesi atanabilir (Kahraman, 1995).

Matematiksel olarak bulanık küme tanımı ise şöyledir (Zimmermann, 1987).

U klasik bir evrensel küme olsun, elemanları genel olarak x şeklinde gösterilsin. Bu durumda bu evrensel küme, $U = \{ x \}$ şeklinde gösterilecektir.

U içinde bir A bulanık kümesi, U 'nun her elemanına $[0,1]$ aralığında bir reel sayı değeri atayan $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir.

Bulanık küme, A , küme elemanı ve üyelik derecesi çifti ile beraber aşağıdaki şekilde gösterilir,

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in U\} \quad (6.1)$$

Klasik bir A kümesi için üyelik fonksiyonu,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{sadece ve sadece } x \in A \\ 0, & \text{sadece ve sadece } x \notin A \end{cases} \quad (6.2)$$

$U, \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ şeklinde sonlu bir küme ise U 'da bulanık bir küme A şu şekilde de ifade edilebilir (Zadeh, 1972; Chen ve Hwang, 1992; Ross, 1995)

$$A = \sum_i^n x_i / \mu_A(x_i) \quad (6.3)$$

Eğer U sonsuz ve sürekli küme ise,

$$A = \int x / \mu_A(x) \quad (6.4)$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Bulanık kümelerin gösterimine bir örnek;

$U = \{Ahmet, Mehmet, Oğuz, Boran\}$ sonlu bir küme olsun. Bir bayan tarafından değerlendirilen “yakışıklı erkekler” bulanık kümesi aşağıdaki gibi karakterize edilebilir,

$$A = \{(Ahmet, 0.7), (Mehmet, 0.2), (Oğuz, 0.8), (Boran, 0.6)\}$$

veya

$$A = Ahmet/0.7 + Mehmet/0.2 + Oğuz/0.8 + Boran/0.6$$

Bulanık bir kümenin üç özelliği sağlaması beklenir. Bunlar,

- Bulanık kümenin normal olmasıdır ki, bunun için en azından o kümede bulunan öğelerden bir tanesinin en büyük üyelik derecesi olan 1'e sahip bulunması gerekliliğidir. Normallik koşulu, en azından bir $x \in A$ için $\mu_A(x) = 1$ ile verilir.
- Bulanık kümenin konveks (dış bükey) olmasıdır ki, bunun anlamı üyelik derecesi 1'e eşit olan öğeye yakın sağda ve soldaki öğelerin üyelik derecelerinin de 1'e yakın olmasıdır. Bulanık kümenin konveks olması uygulama açısından

önemlidir. Bir bulanık kümenin konveks olması şartı aşağıdaki gibidir (Chen ve Hwang, 1992),

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)) \quad (6.5)$$

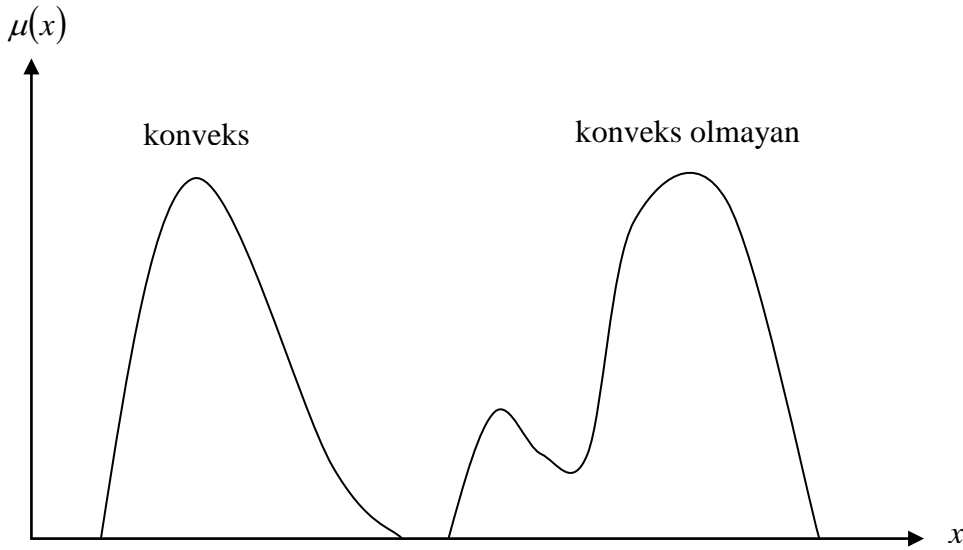
$x_1, x_2 \in U$ ve $\lambda \in [0,1]$.

Bir başka ifadeyle, konveks bir bulanık küme üyelik derecesi değerleri monotonik artan veya üyelik derecesi değerleri monotonik azalan veya elemanların artan değerleri için üyelik derecesi değerleri önce monotonik artan ve sonra da monotonik azalan bir üyelik fonksiyonu ile ifade edilir. Kısaca, x, y ve z bir bulanık küme olan A 'nın elemanları olmak üzere ve $x < y < z$ şeklinde bir ilişki varken,

$$\mu_A(y) \geq \min[\mu_A(x), \mu_A(z)] \quad (6.6)$$

ise A 'ya konveks bulanık küme denir (Zadeh, 1965).

Şekil 6.1'de konveks ve konveks olmayan bulanık kümeler görülmektedir.



Şekil 6.1: Konveks ve konveks olmayan bulanık kümeler.

Üyelik derecesi 1'e eşit olan öğeden sağa veya sola eşit mesafede hareket edildiği zaman bulunan öğelerin üyelik derecelerinin birbirine eşit olmasıdır ki, buna da bulanık kümenin simetrik özelliği denir (Ross, 1995; Şen, 2001).

Bulanık bir kümenin bu üç özellikten ilk iki tanesini mutlaka sağlayacak biçimde değişik üyelik derecesi fonksiyonuna sahip olması gerekmektedir. Bir bulanık kümenin son şart olan simetri özelliğini sağlamasına gerek yoktur. Önemli bulanık küme işlemleri aşağıdaki gibidir;

A, B ve C, U evreninde üç bulanık küme olsun. U 'daki herhangi bir eleman x olmak üzere A, B ve C bulanık kümeleri için birleşim, kesişim ve tümleyen işlemleri,

$$\text{Birleşim: } \mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)], \quad (6.7)$$

veya

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \quad (6.8)$$

şeklindedir. Burada olduğu gibi A ve B gibi iki tane bulanık kümenin birleşimi durumunda her bir kümeye ait öğenin A ve B 'deki üyelik derecelerinin en büyüğü alınır.

$$\text{Kesişim: } \mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)], \quad (6.9)$$

veya

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \quad (6.10)$$

şeklindedir. Burada iki kümede de bulunan ortak öğelerin üyelik derecelerinin en küçüğü alınır.

$$\text{Tümleyen: } \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (6.11)$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca klasik kümeler için De Morgan kuralı bulanık kümeler için de geçerlidir ve aşağıdaki ifade edilir (Ross, 1995).

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad (6.12)$$

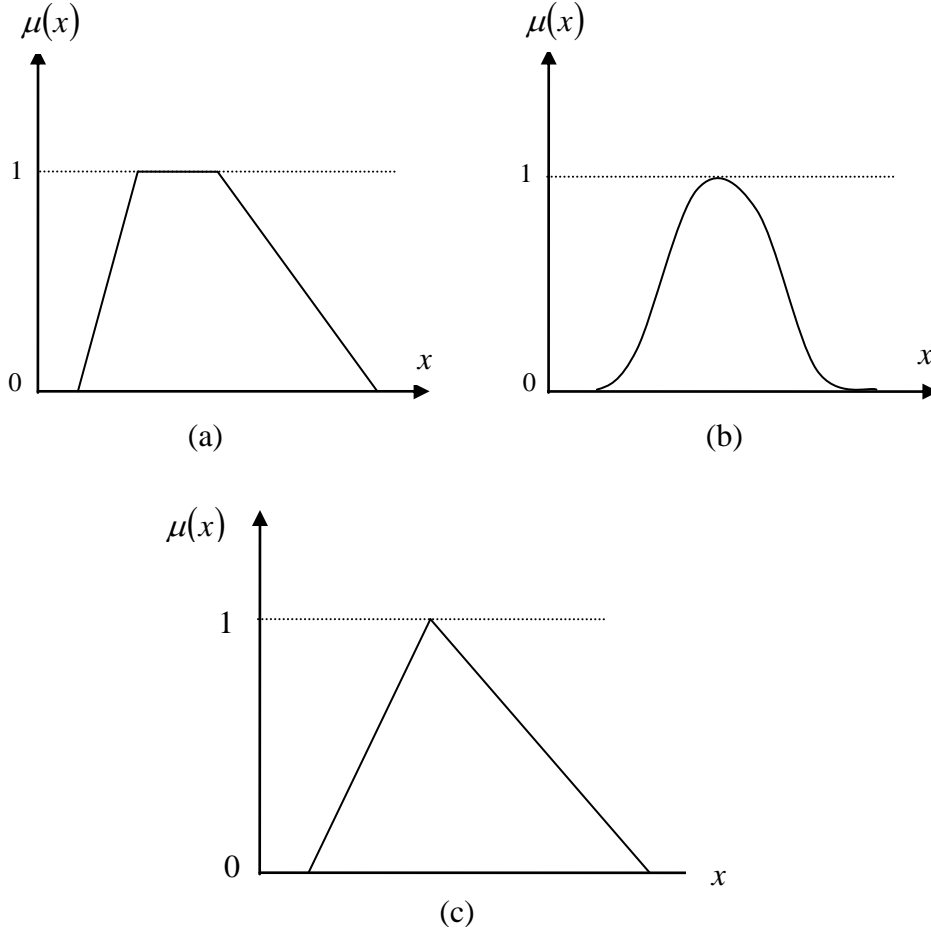
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad (6.13)$$

Üyelik fonksiyonu bulanık küme elemanlarının kümeye ait olma derecesini belirleyen matematiksel bir ifadedir. Bulanık kümeler her zaman nesnel evrenini, $X, [0,1]$ birim aralığına taşıyan fonksiyonlardır (Ross, 1995).

Genel olarak, küme üyelerinin değerleri ile değişiklik gösteren eğriye üyelik fonksiyona (önem eğrisi) denilmektedir. Üyelik fonksiyonunun en önemli özellikleri, alt küme sınırlarındaki değerlerin ortadaki öğelerinkine göre daha düşük olmasıdır. Klasik kümelere benzerlik teşkil etmesi açısından en büyük önem derecesine sahip olan ortaya yakın öğelere 1 üyelik değeri verilirse, diğerleri 0 ile 1 arasında ondalıklı ve sürekli olarak değişecektir. Bir başka deyişle, 0 ile 1 arasındaki değişimin her bir öğe için değerine üyelik derecesi, bunun bir alt küme içindeki değişimine ise üyelik

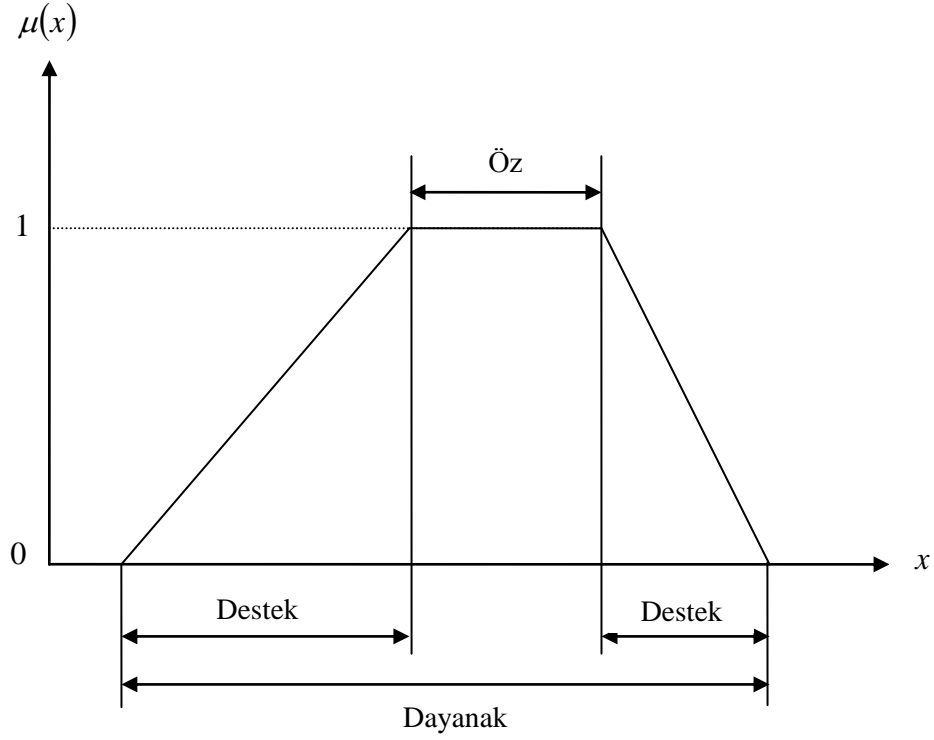
fonksiyonu adı verilir. Böylece, üyelik fonksiyonu şemsiyesi altında toplanan öğeler önem derecelerine göre birer üyelik derecesine sahiptir.

Uygulamalarda en çok kullanılan düzgün şekilli üyelik fonksiyonları üçgen, yamuk, normal dağılım (çan eğrisi) şeklindeki üyelik fonksiyonlarıdır. Pratik uygulamalarda bunlardan en fazla üçgen, ondan sonra da yamuk olanı kullanılmaktadır (Ross, 1995; Zimmermann, 1985). Şekil 6.2’de değişik üyelik fonksiyonları görülmektedir.



Şekil 6.2: Değişik üyelik fonksiyonları, (a) yamuk, (b) normal, (c) üçgen.

Bulanık bir kümenin içerdiği tüm bilgi üyelik fonksiyonu ile ifade edildiğinden üyelik fonksiyonun iyi tanınması ve özelliklerinin bilinmesi gerekmektedir (Ross, 1995; Şen, 2001). En genel haliyle, yamuk şeklindeki bir üyelik fonksiyonu ve değişik kısımları Şekil 6.3’deki gibidir.



Şekil 6.3: Üyelik fonksiyonu kısımları.

Yukarıda görüldüğü gibi bir bulanık kümede bir değil, birden fazla öğenin üyelik derecesi 1'e eşit olabilir. Bu durumda, 1 üyelik derecesine sahip öğelerin tam anlamı ile hiçbir şüphe olmaksızın sadece o kümeye ait oldukları sonucu ortaya çıkar. Bu şekilde üyelik derecesine sahip öğeler kümenin orta kısmında toplanırlar. Üyelik dereceleri 1'e eşit olan öğelerin toplandığı alt küme kısmına , o kümenin özü (core) denir ve burada $\mu(x) = 1$ 'dir. Üçgen şeklindeki üyelik fonksiyonunda sadece bir tane öğenin üyelik derecesi 1'e eşit olduğundan, üçgen üyelik fonksiyonlarının özü bir noktadır.

Bunun aksine bir bulanık kümenin özü haricindeki öğeleri içeren aralığa kümenin dayanağı (support) denir. Dayanakta bulunan her öğenin üyelik derecesi az ve çok değerde (0 ile 1 arasında) değişir ve matematiksel olarak $\mu(x) > 0$ şeklinde gösterilir.

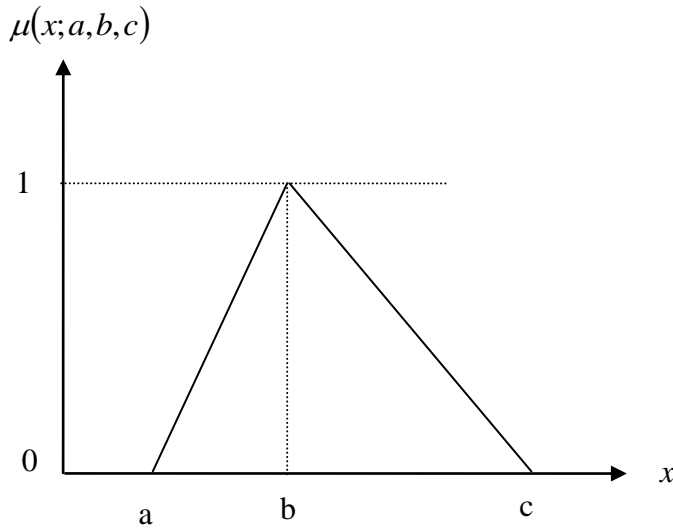
Üyelik dereceleri 0'a ve 1'e eşit olmayan öğelerin bulunduğu aralığa üyelik fonksiyonunun sınırları (boundary) veya geçiş bölgeleri denir ve matematiksel olarak $0 < \mu(x) < 1$ şeklinde ifade edilir. Bunlar kümenin kısmi öğeleridir ve bir kümeye bulanıklık özelliğinin sağlanması bu geçiş yerlerinin bulunması sonucundadır.

Eğer A reel ekseninde tanımlı konveks tek nokta (single-point) normal bir bulanık küme ise, A bulanık bir sayı olarak adlandırılır (Ross, 1995). Bulanık sayı terimi

“10’a yakın”, “bir kaç” gibi kesin olmayan (imprecise) sayısal miktarları ele almak için kullanılmaktadır (Chen ve Hwang, 1992). İki bulanık sayı sadece ve sadece üyelik dereceleri aynı olduğunda birbirine eşittir. Bulanık kuralların öncül ve soncul kısımlarında bulunan, örneğin “hız yüksek” gibi bulanık küme kısımları birer yaklaşıklık ifade ederler. Bu yüzden “yaklaşık 3”, “yaklaşık 7”, “aşağı yukarı 9”, “5’den büyük ve yaklaşık” gibi ifadelerin hepsi bir bulanık (yaklaşık) sayıyı ifade eder. Bu yaklaşıklıkların her biri bir bulanık alt kümeyle karşılık gelir. Bu bulanık sayılarla bilinen aritmetik işlemlerin yapılması mümkün değildir (Zimmermann, 1987; Şen, 2001).

Bulanık sayılarla bazı kısıtlamalar altında işlemler yapılabilir. Bir bulanık sayının var olabilmesi için, bunun A gibi bir bulanık kümesinin normal, konveks (dış bükey), sınırlı destek ve her üyelik derecesi kesiminde kapalı ve sonlu bir aralığın bulunması gerekir. Anlamlı bulanık aritmetik işlemlerin yapılması için bulanık sayıların mutlaka sınırlı desteği ile dış bükey olmaları gerekir. Bulanık aritmetik işlemlere geçmeden önce iki önemli bulanık sayı olan üçgensel ve yamuk bulanık sayılardan bahsedilecektir.

Daha önce de belirtildiği gibi pratik uygulamalarda en fazla kullanılan iki bulanık sayı üçgensel (üçgen) bulanık sayı ve yamuk bulanık sayıdır. Şekil 6.4’de üçgensel bir bulanık sayı görülmektedir.



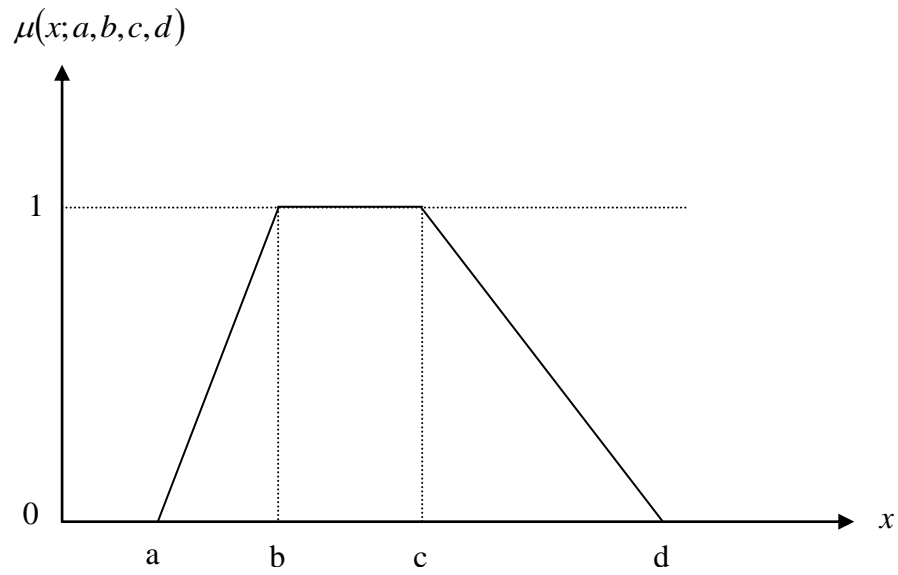
Şekil 6.4: Üçgensel bulanık sayı.

A bulanık kümesi ile gösterilen bir üçgen bulanık sayının matematiksel ifadesi (üçgen üyelik fonksiyonu),

$$\mu(x) = \mu_A(x; a, b, c) = \begin{cases} (x-a)/(b-a), & \text{eğer } a \leq x < b \\ (c-x)/(c-b), & \text{eğer } b \leq x \leq c \\ 0 & , \text{ eğer } x > c \text{ veya } x < a \end{cases} \quad (6.14)$$

şeklindedir. Buradaki a ve c bulanık küme desteğinin sırası ile alt ve üst sınır değerlerini, b ise tam üyelikli tek sayıyı göstermektedir.

Bir diğer önemli bulanık sayı olan yamuk bulanık sayı Şekil 6.5’de görüldüğü gibidir ve yamuk bulanık sayının matematiksel ifadesi üçgensel bulanık sayıya benzer olarak aşağıdaki gibidir,



Şekil 6.5: Yamuk bulanık sayı.

$$\mu(x) = \mu_A(x; a, b, c, d) = \begin{cases} (x-a)/(b-a), & \text{eğer } a \leq x < b \\ 1 & , \text{ eğer } b \leq x < c \\ (d-x)/(d-c), & \text{eğer } c \leq x \leq d \\ 0 & , \text{ eğer } x > d \text{ veya } x < a \end{cases} \quad (6.15)$$

Yamuk sayılar a, b, c ve d olmak üzere dört sayı ile temsil edilirler. Bunlardan a ve d bulanık sayının desteğinin sırasıyla alt ve üst sınırlarını, b ve c ise bu iki sayı arasındaki üyelik derecesi tam olan yamuk sayıların kümesinin sınırlarını gösterir. Eğer b = c olursa yamuk bulanık sayı üçgen bulanık sayı haline dönüşecektir.

6.2 Bulanık Aritmetik İşlemler

Bulanık aritmetik işlemler genelleme ilkesinin (extension principle) doğrudan uygulamasıdır ve bulanık sayılarda kullanılır. Bulanık sayılarda aritmetik işlemler ve özellikleri aşağıdaki gibidir;

6.2.1 Bulanık sayılarla toplama ve çıkarma işlemleri

\tilde{M} ve \tilde{N} bulanık sayılardan oluşan iki bulanık küme olmak üzere. Bu iki bulanık kümenin toplamı, $\forall x, y, z \in R$ olmak üzere,

$$\mu_{\tilde{M}+\tilde{N}}(z) = \max_{z=x+y}(\mu_{\tilde{M}}(x) \wedge \mu_{\tilde{N}}(y)) \quad (6.16)$$

şeklinde ifade edilir. Sağ taraftaki maks işaretinin altındaki $z = x + y$ eşitliği \tilde{M} ve \tilde{N} bulanık sayılarında değişkenlerden x ve y 'nin toplamının z ettiği tüm durumların bulunması demektir. Örneğin,

$$\tilde{M} = \{1/0,9 + 2/0,7 + 4/0,5 + 6/0,2 + 9/0,1\}$$

ve

$$\tilde{N} = \{2/1,0 + 3/0,6 + 4/0,3\} \text{ olsun.}$$

Bunların toplanması için önce her bir kümedeki öğeler kartezyen çarpımdaki gibi eşleştirilerek, eşleşen elemanların toplamları alınır. Böylece önce çarpım kümesinin öğeleri elde edilir. Bunlar $\{(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (4,2), (4,3), (4,4), (6,2), (6,3), (6,4), (9,2), (9,3), (9,4)\}$ gibi $5 \times 3 = 15$ adet öğe olarak bulunur. İkinci aşamada bu eşleşmiş değerlerin toplamı alınarak 15 birleşik öğeli küme elde edilir. Bu küme $\{3, 4, 5, 4, 5, 3, 3, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ öğelerine sahiptir. Böylece, yukarıdaki genelleme işlemindeki $x + y = z$ işlemi yapılarak toplam bulanık kümesinin z öğeleri elde edilir. Şimdi bu öğelerin tek olanına toplamdaki $\mu_{\tilde{M}}(x)$ ve $\mu_{\tilde{N}}(y)$ değerlerinden küçük olanı tayin edilir. En son kümede 3 öğesi bir tanedir ve bunun \tilde{M} 'deki $\mu_{\tilde{M}}(x) = 0,9$ dereceli 1 öğesi ve \tilde{N} 'deki $\mu_{\tilde{N}}(y) = 1,0$ üyelik dereceli 2 öğesi alındığından bu üyelik derecelerininin küçüğü olan 0,9 toplamdaki 3 öğesinin üyelik derecesini verir, yani $\mu_{\tilde{M}+\tilde{N}}(3) = \min[0,9;1,0] = 0,9$ elde edilir. O halde, toplam bulanık kümesinin ilk bulanık öğesi $3/0,9$ 'dır.

Diğer taraftan, toplam kümede 4 ögesi 2 tane bulunmaktadır. Bunların önceki tek öğeye benzer şekilde olarak üyelik derecelerinin hesaplanması ile birinci 4 ögesinin üyelik derecesi için $\min[0,9;0,6]=0,6$, diğerinin ise $\min[0,7;1,0]=0,7$ elde edilir. Bu iki aynı miktardaki ögenin, yani 4 veya 4'ün olması için önceden elde edilen en küçük (min) üyelik derecelerinin en büyüklenmesi (maks) ile $\mu_{\tilde{M}+\tilde{N}}(4)=\max[0,6;0,7]=0,7$ elde edilir. Yani 4 bulanık ögesi 4/0,7 şeklindedir. Diğer öğeler içinde aynı işlemleri gerçekleştirerek bulanık sayılardan oluşan sonuç toplam bulanık kümesi şu şekilde elde edilir,

$$\mu_{\tilde{M}+\tilde{N}}(z) = \{3/0,9 + 4/0,7 + 5/0,5 + 6/0,5 + 7/0,5 + 8/0,3 + 9/0,2 + 10/0,2 + 11/0,1 + 12/0,1 + 13/0,1\}.$$

Bulanık toplama işleminin özellikleri aşağıdaki gibi özetlenebilir (Chen ve Hwang, 1992; Ross, 1995)

- Değişme özelliği: $\tilde{M} + \tilde{N} = \tilde{N} + \tilde{M}$
- Birleşme özelliği: $(\tilde{M} + \tilde{N}) + \tilde{K} = \tilde{M} + (\tilde{N} + \tilde{K})$
- $\tilde{M} + 0 = 0 + \tilde{M}$
- Simetrik olmama: $\tilde{M} + (-\tilde{N}) = (-\tilde{N}) + \tilde{M} \neq 0$, $-\tilde{N}, \tilde{N}$ 'nin görüntüsü iken üyelik fonksiyonu

$$\mu_{-\tilde{N}}(x) = \mu_{\tilde{N}}(-x) \quad (6.17)$$

şeklindedir.

Bulanık sayılarda çıkarma işlemi,

$$M_{\tilde{M}-\tilde{N}}(z) = \max_{z=x+(-y)}(\mu_{\tilde{M}}(x) \wedge \mu_{\tilde{N}}(-y)) = \max_{z=x+y}(\mu_{\tilde{M}}(x) \wedge \mu_{-\tilde{N}}(y)) \quad (6.18)$$

şeklinde ifade edilir. Aynı örnek üzerinden gidecek olursak, \tilde{M} ve \tilde{N} bulanık kümelerinin çıkarılması sonucunda elde edilen çıkarım bulanık kümesi, öncesindeki çıkarımın öğeleri $\{-1, -3, -4, 0, -1, -2, 2, 1, 0, 4, 3, 2, 7, 6, 5\}$ olarak bulunur. Bu öğelerin her birinin üyelik derecelerinin yine toplama benzer şekilde en küçüklenmesi (min) ve en büyüklenmesi (maks) ile elde edilen çıkarım kümesinin son şekli,

$$\mu_{\tilde{M} \cdot \tilde{N}}(z) = \{-3/0,3 + -2/0,6 + -1/0,9 + 0/0,7 + 1/0,5 + 2/0,5 + 3/0,2 + 4/0,2 + 5/0,1 + 6/0,1 + 7/0,1\}$$

olarak bulunur.

6.2.2 Bulanık sayılarla çarpma ve bölme İşlemleri

Bulanık sayıların çarpılması işlemi biraz daha karışıktır, çünkü bulanık sayıların işaretlerinin dikkate alınması gerekmektedir (Chen ve Hwang, 1992).

\tilde{M} ve \tilde{N} pozitif bulanık sayılar olmak üzere,

$$\mu_{\tilde{M}}(x) = 0, \quad \forall x < 0 \quad (6.19)$$

ve

$$\mu_{\tilde{N}}(y) = 0, \quad \forall y < 0 \quad (6.20)$$

şeklinde olacaktır. z , \tilde{M} ve \tilde{N} 'nin çarpımının sonucu olsun. $\mu_z(z)$ tepenin ($\mu_z(z) = 1$) solunda monotik artan, ve sağında da monotik azalan olduğundan, çarpma işlemi aşağıdaki şekilde gerçekleştirilir (Kaufmann ve Gupta, 1985);

1. Sol tarafta, $xy \leq z$ şartını sağlayan tüm (x,y) çiftleri dikkate alınır. Böylece,

$\mu_z(z)$ 'nin sol tarafı şu şekilde tanımlanır;

$$\mu_{\tilde{M} \cdot \tilde{N}}(z) = \underset{xy \leq z}{maks} (\mu_{\tilde{M}}(x) \wedge \mu_{\tilde{N}}(y)) \quad (6.21)$$

2. Sağ tarafta, $xy \geq z$ şartını sağlayan tüm (x,y) çiftleri dikkate alınır. Böylece,

$\mu_z(z)$ 'nin sağ tarafı şu şekilde tanımlanır;

$$\mu_{\tilde{M} \cdot \tilde{N}}(z) = \underset{xy \geq z}{maks} (\mu_{\tilde{M}}(x) \wedge \mu_{\tilde{N}}(y)) \quad (6.22)$$

3. Süreci basitleştirmek için, (x,y) çiftlerinden herhangi birinin üyelik derecesi 0 olanlar atlanır. Tersine, $\mu_{\tilde{M} \cdot \tilde{N}}(z) = 1$ 'i sağlayan z değeri bulunur. Bu hangi z değeri için tepenin solundan sağına geçildiğini gösterecektir.

Başka bir şekilde açıklayacak olursak, iki bulanık sayının çarpım ve bölüm işlemlerinin anlaşılması için öncelikle aralık sayılarının bu işlemler karşısında nasıl davranacaklarını izah edilmesi gerekmektedir (Şen, 2001). Bir aralık sayısı sadece alt ve üst sınır değerleri ile belirlenir. Bunun diğre bir anlamı, bu alt ve üst sınırlar

arasında bulunan bütün sayıların üyelik derecelerinin 1'e eşit olduğu kabul edilirse, üçgen veya yamuk yaklaşık sayıları yerine dikdörtgen bir sayı elde edilir.

Aralık sayılardan iki tanesi $A=[a, b]$ ve $B=[c, d]$ olsun. Bunların çarpımı tanım olarak,

$$A \cdot B = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)] \quad (6.23)$$

şeklinde verilir. Örneğin, $A=[-3, 4]$ ve $B=[1, 9]$ ise,

$$A \cdot B = [\min(-3, -27, 4, 36), \max(-3, -27, 4, 36)] = [-27, 36]$$

elde edilir. Kural olarak, ilk sayının önce alt sınırı, sonraki sayının alt ve üst sınırları ile çarpılarak iki sayı ve benzer olarak, ilk sayının üst sınırı ile yine sonraki sayının üst ve alt sınır değerleri çarpılarak elde edilen diğer iki sayı önceki iki sayı ile birlikte düşünülürse, çarpım işleminin sonucunu içeren dört ögeli bir küme elde edilir. İşte bu küme öğelerinin en küçüğü çarpımın alt sınırını, en büyüğü ise üst sınırını gösterir.

Bulanık çarpma işleminin özellikleri aşağıdaki gibi özetlenebilir (Chen ve Hwang, 1992; Ross, 1995);

1. \tilde{M} ve \tilde{N} 'nin işaretleri aynı ise $\tilde{M} \cdot \tilde{N}$ pozitif bir bulanık sayıdır.
2. $-\tilde{M} \cdot \tilde{N} = -(\tilde{M} \cdot \tilde{N})$ olduğundan, \tilde{M} ve \tilde{N} farklı işaretler alabilirler.
3. Bulanık sayıların çarpımı değişme ve birleşme özelliklerine sahiptir,

$$\tilde{M} \cdot \tilde{N} = \tilde{N} \cdot \tilde{M} \quad (6.24)$$

ve

$$(\tilde{M} \cdot \tilde{N}) \cdot \tilde{K} = \tilde{M} \cdot (\tilde{N} \cdot \tilde{K}) \quad (6.25)$$

4. \tilde{M} 'nin tersi \tilde{M}^{-1} şeklinde ifade edilir ve $\tilde{M} \cdot \tilde{M}^{-1} \neq 1$ 'dir.

Bulanık sayılarda bölme işlemi benzer şekilde,

$\tilde{M} : \tilde{N}$ 'nin sol tarafı için,

$$\mu_{\tilde{M}:\tilde{N}}(z) = \max_{z \geq x/y} (\mu_{\tilde{M}}(x) \wedge \mu_{\tilde{N}}(y)), \quad \forall x, y, z. \quad (6.26)$$

ve

$\tilde{M} : \tilde{N}$ 'nin sağ tarafı için.

$$\mu_{\tilde{M}:\tilde{N}}(z) = \underset{z \leq x/y}{maks} = (\mu_{\tilde{M}}(x) \wedge \mu_{\tilde{N}}(y)), \quad \forall x, y, z. \quad (6.27)$$

şeklindedir.

Bölme işlemi çarpma işleminin bir uzantısıdır ve \tilde{N}^{-1} , \tilde{N} 'nin tersi olmak üzere $\tilde{M} \cdot \tilde{N} = \tilde{M} : \tilde{N}^{-1}$ 'dir. \tilde{N}^{-1} de şu şekilde ifade edilir,

$$\mu_{\tilde{N}^{-1}}(y) = \mu_{\tilde{N}}(1/y) \quad (6.28)$$

Bunu kullanarak çarpmada olduğu gibi aşağıdaki şekilde formülize edilebilir,

$$\mu_{\tilde{M}:\tilde{N}^{-1}}(z) = \underset{z \geq x(1/y)}{maks} = (\mu_{\tilde{M}}(x) \wedge \mu_{\tilde{N}}(1/y)) = \underset{z \geq xy}{maks}(\mu_{\tilde{M}}(x), \mu_{\tilde{N}^{-1}}(y)) \quad (6.29)$$

ve

$$\mu_{\tilde{M}:\tilde{N}^{-1}}(z) = \underset{z \leq x(1/y)}{maks} = (\mu_{\tilde{M}}(x) \wedge \mu_{\tilde{N}}(1/y)) = \underset{z \leq xy}{maks}(\mu_{\tilde{M}}(x), \mu_{\tilde{N}^{-1}}(y)) \quad (6.30)$$

6.3 Olasılık ve Olabilirlik Kavramları

Olasılık (probability) ve olabilirlik (possibility) ile rassallık ve bulanıklık kavramlarının farkları bulanık küme teorisinde önem kazanır (Kahraman ve Tolga, 1998). Olasılık ve olabilirlik kavramları arasındaki fark Zimmermann'ın (1985) verdiği örnekle kolayca anlaşılabilir: Çizelge 6.1, 1'den 9'a kadar oluşan bir x kümesini göstermektedir. P_x , olasılığı; B_x ise olabilirliği temsil etmektedir. Her ikisi için de sınır 0'dan 1'e kadardır.

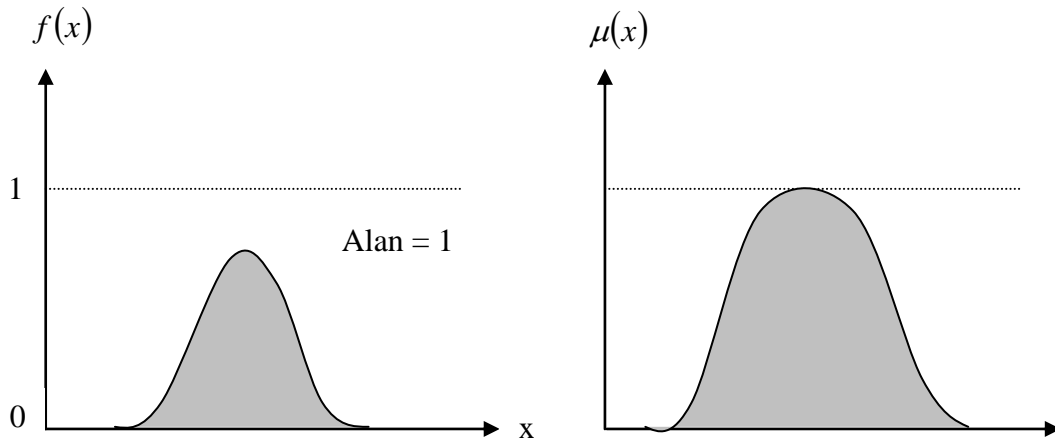
Çizelge 6.1: Olabilirliğe karşı olasılık.

x: Hans'ın kahvaltıda yediği yumurta sayısı ve $x = \{1, 2, \dots, 9\}$									
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B_x	1	1	1	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0,0
P_x	0,1	0,8	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Olasılık yaklaşımı, Hans'ın kahvaltıda yumurta yediği gün sayısını belirlemek için kahvaltı yaptığı günlerin gözlenmesini gerektirmektedir. 100 günlük bir gözlem

sonucunda, Hans'ın 80 gün iki yumurta, 10 gün bir yumurta ve 10 gün 3 yumurta yediği belirlenmiş olsun. Buna karşılık olabirlik yaklaşımı, Hans'ın iştahına ait bir miktar bilgiye dayandırılır, gözlem yapılmasını gerektirmez. Hans'ın günde 1, 2, 3 ve 4 yumurtayı eşit rahatlıkla yiyebileceği kesinlikle biliniyor olsun. Bundan dolayı 1, 2, 3 veya 4 yumurta yemesinin olabirlikleri 1,0'dır. Bununla birlikte, günde 5 yumurta yemesinin olabirliği daha az kesin olduğundan, bu olabirlik değeri sadece 0,8'dir. Bunun anlamı, Hans'ın 0,8 kesinlikle günde 5 yumurta yediğidir. 0,8 nümerik değeri, Hans'ın günde 2 yumurta yemesi olasılığı ile karıştırılmamalıdır.

Rassallık ve bulanıklık arasındaki fark ise, rassal sayılar ve bulanık sayılar farkı ile ortaya konabilir (Kahraman ve Tolga, 1998). Rassal bir sayı $\mu_x = f(x)$ gibi bir üyelik fonksiyonuna sahiptir. Burada $f(x)$, $\int_R f(x)dx = 1$ eşitliğini sağlayan bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur ve genellikle de konvektir. Şekil 6.6'da rassal ve bulanık bir sayı gösterilmektedir. Bu eğrinin altında kalan alan 1'den fazla olabilir.



Şekil 6.6: Rassal ve bulanık sayılar.

6.4 Petri Ağlarında Bulanıklık

Kompleks sistemlerin modellenmesi ve analizinde genellikle iki çeşit belirsizlik bulunmaktadır. Bunlar rassallık (randomness) ve bulanıklıktır (fuzziness). Rassallık parametrelerin davranışının olasılık dağılım fonksiyonuyla ifade edilmesini içermektedir. Bir başka ifadeyle rassal modelleme stokastik değişkenliği ifade etmektedir. Bunun yanında bulanıklık dilsel yapı veya tam olmayan bilgiden kaynaklanan ölçümdeki kesin olmamayı (imprecision) modellemektedir (Hu ve diğ., 2002). Girdi ve model parametreleri çoğunlukla belirsiz parametreler şeklindedir. Belirsiz parametrelerin olduğu durumda istatistiksel testler vasıtasıyla örneklem

rassallık testleri yapılarak belirsizlik tanımlanabilmektedir. Eğer örneklem rassallık özelliği göstermiyorsa bulanık mantık gibi belirsizlik modellerine ihtiyaç vardır (Möller ve diğ., 2002).

Sistem modellemede karşılaşılan kesin olmama durumunun (imprecision) olası kaynakları şunlardır (Virtanen, 1995);

1. Sistem girdileri

- a) Sistem özelliklerinin sayısal değerlere eşleştirme sağlayan iyi tanımlanmış bir ölçümlemeye uygun olmaması.
- b) İyi tanımlanmış bir ölçümlemenin olmasına rağmen bunun pahalı, yavaş veya gereksiz olması.
- c) İyi tanımlanmış ve göreceli olarak pahalı olmayan bir ölçümlemenin bulunması fakat bulanık betimlemenin aynı derecede veya daha uygun ve etkin olması.

2. Sistem çıktıları

3. Kesin olmayan iç operasyonlar.

Bir PA geçişler, konumlar, jetonlar ve oklardan oluşan dört çeşit nesneden oluşmaktadır ve teorik olarak bu nesnelerin hepsi bulanıklaştırılabilir (Srinivasan ve Gracanin, 1993).

- *Bulanık Jeton:* bir konuma ait olan veya olmayan standart PA'ndaki jetonun genellemesidir. Bu şekilde bir jeton gerçeklik değeri olarak 0 veya 1'e sahip bir eleman olarak görülebilir. Bu gerçeklik değerinin $[0,1]$ birim aralığında bir değer almasına izin verilerek bulanık jeton oluşturulur. Daha güçlü bir yaklaşım olarak jetonun bir dilsel değişken için üyelik fonksiyonu şeklinde tanımlanan düşük, orta ve yüksek gibi dilsel bir değere sahip olmasıdır. Bu fonksiyon aynı zamanda jetonun belirli bir konuma üyelik derecesini veya önermenin gerçeklik derecesini tanımlar.
- *Bulanık Konum:* bulanık bir konum kendisiyle ilişkilendirilmiş bir özelliğe sahiptir. Bu konumda yer alan bir jeton bu özelliğe sahip olma derecesi veya bu konuma ait olması ile karakterize edilir. Bu şekilde "sürat düşüktür" gibi bulanık bir önerme veya sonuç elde edilir.

- *Bulanık Geçiş*: bulanık bir geçiş eğer-o zaman (if-then) gibi bir bulanık üretim kuralına denk gelebilir ve bulanık çıkarım algoritmaları gibi gerçeklik değerleriyle gerçekleştirilir.
- *Bulanık Ok*: bulanık bir ok kendisine denk gelen girdi jetonunun gereken değerini belirtebilir. Eğer jeton gereksinimi tam olarak karşılamıyorsa, jeton ile gereken değer arasındaki mesafenin yaklaşık bir tahmini hesaplanır. Eğer mesafe önceden belirlenen maksimum değerden büyük ise geçiş ateşlenemez. Minimum mesafeli jeton seçilir.

Daha önceki bölümlerde de belirtildiği gibi dinamik eş zamanlı sistemlerin performans değerlendirmesi ve tanımlanmasında zaman kavramı önemli bir rol oynamaktadır. Bunun gibi sistemlerin modellenmesi ve analizinde olasılık zamanlı Petri ağları güçlü bir modelleme aracı olarak öne çıkmaktadır. Zaman gecikmesinin olasılık fonksiyonlarıyla ifade edildiği Stokastik Petri ağları sistemdeki belirsizlikleri varyans ve dağılımlar gibi olasılıksal ölçüler kapsamında iyi bir şekilde karakterize edebilmektedir. Bunun yanında bir çok olay sürümlü (event-driven) sistemde olasılıksal modeller için parametrelerin tahmin edilmesi, eldeki verilerin yeterli olmaması ya da bir olayın davranışı hakkındaki toplanan verilerde olasılıksal tekrarlamamanın olmamasından dolayı oldukça güçtür. Analizin yürütülmesi esnasında parametre değerlerindeki belirsizlik elde edilen sonuçlarda gizlenebilmektedir. Bu eksikliğin giderilebilmesi için bulanık kümeler teorisi kullanılması önemli bir alternatif olarak düşünülmektedir.

Klasik stokastik PA yöntem ve araçları kullanılarak büyük ölçekli sistemlerin modellenmesinde en önemli problem durum uzayının aşırı büyümesi problemidir. Bulanık kümeler yaklaşımıyla farklı olabilirlik içeren farklı senaryolar aynı anda modellenebilir ve aynı zamanda da model kompleksliği kontrol altında tutulabilir. Dahası fazla sayıda bileşen ve kaynak içeren sistemler, kesin olmayan sayıda aktif bileşen ve kaynak tarafından tanımlanan bulanık durumlar kullanılarak daha kompakt bir şekilde modellenebilir (Ammar ve Yu, 1995).

Petri (1966) ağ tanımlamalarında açık bir şekilde zamanı katmamıştır ve zamanlı ve stokastik Petri ağlarıyla ilgili bazı gözlem ve eleştirilerde de bulunmuştur. Petri (1987) bir çalışmasında bunu şu ifadelerle belirtmiştir; “*zamanlı ve stokastik ağlara baktığımda, zamanın ve şansın kavramlaştırılmasıyla ilgili bazı temel problemler*

görüyorum” (s. 505). Petri (1996) daha sonraki çalışmasında zaman ve ağların ölçüm ve kontrolü ile ilgili aksiyomlar sunmaktadır. Ölçüm aksiyomu “ $t_0 < t < t_1$ şeklinde atomik yargılar (judgement) kümesi tanımlar. Bu t zamanını ölçekte bir kesimle sınırlandıran t_0 ve t_1 (komşu olmaları gerekmez) diye iki geçişle karakterize eder, ... Bu kesikli/sürekli modellemede bir belirsizlik kuralı tesis etmektedir”(s. 17). Petri'nin (1996) belirsizliğe yapmış olduğu bu gönderme bu alanda dikkatlerin bulanık küme teorisi ve bulanık mantığa yönelmesini sağlamıştır. Bu yüzden zamanı bulanık küme teorisi açısından açıkca modellemek oldukça faydalıdır (Murata, ve diğ., 1999).

6.5 Bulanık Petri Ağları Yaklaşımları

Bulanık kümeler ve Petri ağ teorilerini birleştiren çeşitli yaklaşımlar bulunmaktadır ve bu yaklaşımlar sadece kullanılan araçlar değil aynı zamanda bulanıklaştırılan ağ elemanları açısından farklılık göstermektedir.

6.5.1 Bulanık-zamanlamalı Petri ağları

Bulanık-zamanlamalı Petri ağları (Fuzzy-Timing Petri Nets) Murata (1996) ve Murata ve diğ. (1999) tarafından gerçek zamanlı sistemlerin zamansal belirsizliklerini ele alabilmek için ortaya koyulmuştur. Bu yaklaşımda bulanık küme teorisi belirsiz veya öznel zamanlama bilgisini ifade etmek için kullanılmaktadır. Bulanık-zamanlamalı Petri ağları temel olarak dört tane bulanık küme teorili zaman fonksiyonuna dayanmaktadır (Murata, 1996; Murata ve diğ., 1999; Zhou ve diğ., 2000). Bunlar bulanık tarih bilgisi (fuzzy timestamp), bulanık olurlu kılma zamanı (fuzzy enabling time), bulanık oluş zamanı (fuzzy occurrence time) ve bulanık gecikmedir (fuzzy delay). Bu bulanık zaman fonksiyonları, $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ şeklinde tanımlanan üçgen veya yamuk olabilirlik dağılımlarıyla tanımlanmaktadır.

Bulanık-zamanlamalı Petri ağlarında bir t geçişinden p konumuna olan her bir (t,p) oku $d_{tp}(\tau)$ şeklinde ifade edilen bir bulanık gecikmeyle ilişkilendirilmektedir. Bu fonksiyon t geçişinin bir olayının başlamasını takiben bir jetonun p konumuna varması için gereken zaman uzunluğunun olabilirlik dağılımıdır.

Bir t geçişinin n tane jeton tarafından olurlu hale getirildiğini farz edelim. Bu durumda bulanık olurlu kılma zamanı $e_t(\tau)$ bütün jetonların ulaşma zamanlarının en geç varış zamanı olabilirlik dağılımıdır ve

$$e_i(\tau) = \text{engeç}\{\pi_i(\tau), i = 1, 2, \dots, n\} \quad (6.31)$$

şeklinde hesaplanır. Burada *engeç*, n tane dağılımdan en geç-varış/en düşük-olabilirlik dağılımını oluşturan operatördür. $\pi_i(t)$ ise t geçişinin p_i girdi konumuna ulaşan i olurlu jetonunun bulanık zaman dağılımıdır.

Bir olayın bulanık oluş zamanı $o_i(\tau)$, e_i olayının olması veya ateşlenmesindeki zamanın olabilirlik dağılımıdır. e_i olay olmak üzere m tane olayın bulanık olurlu kılma zamanı $e_i(\tau)$, $i = 1, 2, \dots, m$ olsun. Buna göre bulanık olurlu kılma zamanı $e_i(\tau)$ olan bir t geçişinin bulanık oluş zamanı $o_i(\tau)$ aşağıdaki gibi hesaplanır

$$o_i(\tau) = \min\{e_i(\tau), \text{enerken}\{e_i(\tau), i = 1, 2, \dots, m\}\} \quad (6.32)$$

burada *enerken*, m dağılımdan en erken-varış/en yüksek-olabilirlik dağılımını oluşturan operatör, *min* ise dağılımların kesişimidir.

Bulanık tarih bilgisi $\pi(\tau)$, belirli bir jetonun τ zamanında belirli bir konuma ulaşmasının olabilirliğinin sayısal tahminini veren bulanık zaman fonksiyonu veya olabilirlik dağılımını ifade etmektedir. Başlangıç işaretlemesi başlangıç bulanık tarih bilgisini de içermektedir. Başlangıçtaki hariç diğer bütün bulanık tarih bilgileri bir olay olduğunda (geçiş ateşlendiğinde) her defasında dinamik olarak hesaplanıp güncellenmektedir. Bir e_i olayı tarafından üretilen bir jetonun bulanık tarih bilgisi $\pi_p(\tau)$ jetonun p konumuna varış zamanının olabilirlik dağılımıdır ve

$$\begin{aligned} \pi_p(\tau) &= o_i(\tau) \oplus d_p = \sup_{\tau = \tau_1 + \tau_2} \min\{o_i(\tau_1), d_p(\tau_2)\}, \text{ eğer } \exists \tau_1, \tau_2 \text{ öyle ki } \tau = \tau_1 + \tau_2 \\ &= 0 \text{ aksi halde.} \end{aligned} \quad (6.33)$$

burada $o_i(\tau)$, e_i olayının bulanık oluş zamanı ve $d_p(\tau)$ de t geçişinden p çıktı konumuna giden okun bulanık gecikmesidir.

Bulanık-zamanlamalı Petri ağlarının nasıl uygulandığı ve detaylar Murata (1996) ve Murata ve diğ. (1999)'da sunulmaktadır. Burada sadece temel kavramlara ve özelliklere yer verilmiştir. Özetle bu yaklaşımın sağladığı avantajlar; kullanılan hesaplamalar tekrarlı toplamalar ve reel sayıların karşılaştırılmasını içerdiğinden ve sadece belli sonlu sayıda sıralama için gerekli olduğundan hızlı hesaplama kolaylığı sağlamaktadır. Bir diğer avantajı da tüm durum uzayını elde etmeye gerek olmaksızın sistem hakkında gereken bilgiye ulaşılmasını sağlamasıdır.

6.5.2 Zaman-bulanık Petri ağları

Valette ve diğ. (1989) bir olabilirlik dağılımı ile tanımlanan bulanık süreyi olurlu kılma süresinin kesin olmaması durumunu ifade etmek için kullanarak zaman-bulanık Petri ağlarını ortaya koymuşlardır. Bu yaklaşım zaman Petri ağlarının bulanık bir genellemesidir. Bu yaklaşımla ilgili temel tanımlar ve özellikler aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

Bu yaklaşımda geçişlerle ilişkilendirilen olurluluk zamanı bulanık aralıklarla tanımlanmaktadır.

Bulanık tarih (fuzzy date), tek bir değere sahiptir ve değeri tam olarak bilinmemektedir. Bu yüzden bu tarihin olası değerlerinin bulanık kümesi seçimli (disjunctive) bir kümedir.

$[a, b]$ şeklindeki bir zaman aralığı a ve b tarihleri arasındaki zaman periyodudur. a ve b değerlerinin bulanık olduğu ve bunun sonucu \tilde{A} ve \tilde{B} şeklinde iki bulanık küme ile tanımlandığı zaman aralığı bulanık zaman aralığı olarak adlandırılmaktadır. \tilde{A} 'dan sonra ve \tilde{B} 'den önceki tarihler kümesi birleşik bir kümedir.

l , $[a, b]$ aralığının uzunluğu olmak üzere $\tilde{L} = \tilde{B} \oplus (-\tilde{A})$ ifadesi olası l değerlerinin bulanık kümesidir. Bulanık bir tarih bir geçişin ateşlenmesiyle ilişkilendirilebilmektedir. Örneğin; herhangi bir jeton için a bir t_1 geçişi ve b de t_2 geçişiyle ilişkilendirilmiş olsun. $\tilde{L} = \tilde{B} \oplus (-\tilde{A})$ ifadesi t_1 geçişinin bulanık olurluluk süresini ifade etmektedir.

Eğer a kesinlikle olmuş, olan veya olacak bir olayla ilişkilendirildiğinde \tilde{A} bulanık kümesinin özü (core) boş olmayacaktır. Eğer özü boş ise bu durum olayın olmayacağı anlamına gelmektedir.

Bulanık işaretleme (fuzzy marking), Petri ağının olası ulaşılabilir işaretlemelerinin kümesinin tanımlanmasıdır. Bulanık bir işaretlemede her bir jeton lokasyonu konumlar kümesi üzerinde bir olabilirlik dağılımına sahiptir. Bir jetonun kesin olarak belirli bir konumda olduğu iddia edilemez ve jetonun konumlar arasından bir konumda olduğu söylenebilir.

İki tarih arasında yer alan zaman aralığı $[a, b]$ birleşik olduğundan olabilirlik dağılımı yerine her bir (o^*, p) çifti ile ilişkilendirilmiş $\mu_{o^*, p}$ şeklinde üyelik

fonksiyonuyla temsil edilebilmektedir, örneğin; o^* jetonunun p konumuna ait olduğu zamanlar kümesi. τ zamanında üyelik fonksiyonu

$$\mu_{o^*,p}(\tau) = \pi_{o^*}(p) \quad (6.34)$$

şeklinde hesaplanır.

Bulanık işaretleme ve bulanık ateşleme tarihlerinin hesaplamaları eğer tüm zamanlar mevcut zamandan büyük ise yapılmamaktadır. Bulanık ateşleme tarihi sadece mevcut zaman bulanık tarihin desteğine (support) ait ise hesaplanır. Hesaplama prosedürü aşağıdaki şekildedir;

1. Mevcut zaman bir ateşleme tarihinin desteğinin en küçük zamanına eşit olduğunda yeni bir hesaplama başlanır.
2. Bu bulanık tarihten sonra olası zaman aralığı elde edilir. Bulanık tarih o^* jetonu t' 'in çıktığı konumunda görüldüğünde tanımlanır.
3. Çıktığı konumlarından birini takip eden her geçiş dikkate alınarak bunları mevcut zamanda olurlu yapan bütün jeton yapıları oluşturulur. Burada sadece olabilirlik dağılımları sıfırdan farklı olan jetonlar dikkate alınır.
4. Bu geçişlerin ateşlenebileceği tarihten itibaren takip eden olası zaman aralığı hesaplanır
5. t geçişinin o^* için ateşlendiği bulanık tarihten sonra gerekli olan zaman aralığı hesaplanır.
6. t' 'nin çıktığı konumlarını takip eden geçişlerin ateşlemesinden sonra gerekli olan zaman aralığı hesaplanır.
7. Gecikme ateşlemesinin olmaması durumu için bu geçişlerin bulanık ateşleme tarihleri çıkarılır.
8. Eğer var ise her bir ateşleme tarihine gecikme eklenir
9. t geçişinin tüm çıktığı konumlarının yeni işaretlemesi hesaplanır.

Bu yaklaşım değişen durumların dikkate alınması ve belirsiz bilgiyi birleştirilmesi açısından önemlidir. Zaman Petri ağlarının bir uzantısı olarak düşünülebilir, çünkü her bir geçişe bulanık ateşleme tarihi atamaktadır.

Pedrycz ve Camargo (2003) zaman faktörünü ağ yapısına geçişler ve konumlar seviyesinde zamana bağlı ilişkileri birleştirerek eklemektedir. Zaman faktörünün ağ performansı üzerindeki etkisi geçişlerin ateşlenmeleri ve girdi ve çıktı konumlarının işaretleme seviyeleri dağılımı cinsinden ifade edilmektedir.

Bu iki bulanık Petri ağı yaklaşımının yanında literatürde yer alan diğer önemli bulanık Petri ağları ise kısaca şöyledir. Ding ve diğ. (2005; 2006) her bir geçiş ateşlemesi bir bulanık sayıyla ilişkilendirerek, geçiş süresince ateşleme jetonları girdi konumlarından uzaklaştırılıp çıktı konumlarına eklenmektedir. Bu modelde performans analizi ulaşılabilirlik durum grafiğine dayanmaktadır. Bu modelde bulanık integral ve diferansiyel denklemler kullanılmaktadır.

7. ÖNERİLEN BULANIK-STOKASTİK PETRİ AĞLARI YAKLAŞIMI

7.1 Giriş

Sistem modellemede karşılaşılan iki çeşit belirsizlik olan olasılıksal değişkenlik ya da stokastiklik ve kesin olmama ya da bulanıklık genellikle birbirinden bağımsız olarak kullanılmaktadır. Petri ağlarında da bu durum aynıdır ve de stokastik PA ve bulanık PA ve uzantıları birbirinden ayrı olarak düşünülmemekte ve bunun sonucunda da ayrı ayrı kullanılmaktadır. Daha önceki bölümlerde bahsedilen ve yapılan detaylı literatür çalışmasında PA ile ilgili olarak stokastiklik ve bulanıklığın birlikte yer aldığı herhangi bir çalışmaya rastlanmamıştır. Oysaki, belirsizliğin bu iki önemli boyutunu birlikte göz önünde bulundurarak modele dahil etmek, modellenen sistemin daha detaylı bir şekilde analiz edilebilmesine ve daha iyi anlaşılmasına imkan verecektir.

Bu amaçla bu tez çalışmasında zaman kritik, dinamik ve kompleks sistemlerin modellenmesi ve analizi için yeni bir modelleme yaklaşımı önerilmektedir. Bulanık parametrelili stokastik Petri ağları yöntemi olarak adlandırılan (Tüysüz ve Kahraman, 2010) ve iki aşamalı olan bu yaklaşımın amacı kesikli-olay dinamik sistemlerin modellenmesinde kullanılan stokastik PA ile bulanık küme teorilerinin birlikte kullanılarak belirsizliğin daha iyi ifade edilebilmesi ve kompleks sistemlerin modellenme ve analiz gücünün artırılmasıdır. Bir sonraki bölümde bu yöntemin teorik altyapısı detaylı bir şekilde sunulmakta ve önerilen yöntemin esnek bir imalat hücresinin modellenmesi ve analizinde nasıl kullanılabileceğini gösteren örnek bir uygulama verilmektedir.

7.2 Bulanık Parametrelili Stokastik Petri Ağları Yöntemi Önerisi

Esnek imalat sistemleri gibi kompleks sistemlerin tasarım ve analizinde genellikle iki çeşit belirsizlik söz konusudur (Hu ve diğ., 2002). Bunlar rassallık ve bulanıklıktır. Rassallık, parametrelerin davranışlarının olasılık dağılımları ile ifade edilmesini içermektedir. Bir başka deyişle, rassallık olasılıksal ya da stokastik değişkenliği

modellemektedir. Bulanıklık ise dilsel yapıdan ya da bilginin tam olmamasından kaynaklanan kesin olmamayı modellemektedir. Esnek imalat sistemlerinin modellenmesinde, girdi ve model parametreleri genellikle belirsiz parametreler şeklindedir. Belirsizliğe neden olan kesin olmamanın olası kaynakları ise sistem girdileri, sistem çıktıları ve kesin olmayan iç operasyonlardır (Virtanen, 1995).

Sistem modellemede belirsizliği tanımlamak için kullanılan baskın kavram olasılık teorisini temel alan stokastik modeller olmasına rağmen, bu olasılıksal modeller belirsizliğin tüm boyutlarını tanımlamakta yetersiz kalmaktadır ve sadece rassallığı ifade edebilmektedir. Özellikle modellemede kullanılacak olan veriler gözlem ve ölçümlerden elde edildiğinden ve de ölçmenin sınırlı kesinliğinden dolayı, verilerin kesin olmaması istatistiksel bir yapıda değildir ve olasılık teorisine de ifade edilememektedir (Viertel ve Hareter, 2004).

Zamanın tek rassal değişken olduğu ve zaman gecikmesinin olasılık dağılım fonksiyonları ile tanımlandığı stokastik PA, sistemdeki belirsizliği varyans ölçüleri ve olasılık dağılımları ile iyi bir şekilde karakterize edebilmektedir. Bunun yanında, analiz süresince, parametre değerlerindeki belirsizlik sonuçlarda gizlenebilmektedir. Bunun giderilebilmesi için bulanık kümeler teorisinin kullanılması önemli bir alternatif olarak ortaya çıkmaktadır.

Bu çalışmada özellikle esnek imalat sistemlerinin modellenmesi ve analizinde, belirsizliğin her iki boyutu olan stokastik değişkenlik ve kesin olmamayı birlikte ifade edebilmek için bulanık parametrelili stokastik PA olarak (Tüysüz ve Kahraman, 2010) adlandırabileceğimiz yeni bir yaklaşım önerilmekte ve ortaya koyulmaktadır. Her ne kadar stokastik PA ve bulanık PA, kesikli-olay dinamik sistemlerin modellenmesi ve analizinde ayrı ayrı kullanılmakta olsalar da önerilen bu yöntemin en önemli katkısı bu iki teorisinin birlikte kullanılmasını içerdiğinden dolayı önem taşımaktadır.

Bulanık parametrelili stokastik PA yöntemi iki aşamadan oluşmaktadır ve temel olarak bulanık parametreler kullanarak sistemin stokastik analizine dayanmaktadır. İlk aşama, Molloy (1982) tarafından ortaya koyulan ve 5. Bölüm'de detaylı şekilde açıklanan klasik stokastik PA'nın aynısıdır. Tek fark her bir kararlı durum olasılığının parametrik olarak geçiş ateşleme hızları cinsinden elde edilmesidir. Bu aşamada herhangi bir sayısal sonuç hesaplanmamaktadır ve sistemin stokastik

yapısını içermektedir. İkinci aşamada ise, elde edilen parametrik kararlı durum ifadelerinde yer alan geçiş ateşleme hızları üçgensel bulanık sayılarla ifade edilmekte ve bulanık matematik kullanılarak bulanık olasılık değerleri hesaplanmaktadır. Elde edilen bu bulanık olasılık değerleri kullanılarak sistemin önemli performans göstergeleri hesaplanabilmektedir.

Önerilen yöntem sunulmadan önce yöntemde kullanılan önemli kavramlar ele alınacaktır. İlk olarak yöntemde kullanılan bulanık matematik ve önemli kavramlar ile bulanık stokastik analizin teorik altyapısı verilecektir. Daha sonra ise önerilen yöntem bir bütün olarak adım adım algoritmik olarak sunulacaktır. Son olarak da önerilen bu yöntemin uygulaması sayısal bir örnek üzerinde gösterilecektir.

7.2.1 Önerilen bulanık parametrelili stokastik PA yönteminin teorik altyapısı ve önemli kavramlar

İlk olarak yöntemde kullanılan bulanık matematik ve bununla ilgili önemli kavramlar açıklanacaktır. Bulanık küme teorisi ve uygulamaları hakkında detaylı bilgi için Zadeh (1965), Zimmerman (1994) ve Ross (1995) kaynaklarından faydalanılabilir.

Tanım 7.1: Bir bulanık sayı konveks ve normal bir bulanık küme şeklinde tanımlanır. Bu çalışmada kullanılan bulanık sayılar üçgensel bulanık sayılardır. Bir önceki bölümde Şekil 6.4’de verildiği gibi, bir üçgensel bulanık sayı, $a < b < c$ şeklinde üç sayıyla tanımlanır ve $[a, c]$ aralığı bulanık sayının dayanağı, $x = b$ noktası da öz ya da köşesini ifade eder.

Üçgensel bir bulanık sayı olması için grafiğinin sürekli ve $[a, b]$ aralığında monoton artan, $[b, c]$ aralığında ise monoton azalan olması gerekmektedir.

Tanım 7.2: α – kesimleri bir bulanık küme boyunca bulanık olmayan kümeler üreten dilimlerdir. \tilde{A} herhangi bir Ω kümesinin bir bulanık alt kümesi olmak üzere, \tilde{A} ’nın α – kesimi, $\tilde{A}(\alpha)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır,

$$\tilde{A}(\alpha) = \{x \in \Omega \mid \tilde{A}(x) \geq \alpha\} \quad (7.1)$$

ve tüm α için $0 \leq \alpha \leq 1$ şeklindedir.

Herhangi bir \tilde{Q} bulanık sayısı için $\tilde{Q}(\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 1$ aralığında kapalı ve sınırlandırılmıştır ve

$$\tilde{Q}(\alpha) = [q_1(\alpha), q_2(\alpha)] \quad (7.2)$$

şeklinde ifade edilebilir ve burada $q_1(\alpha)$ ($q_2(\alpha)$) ifadesi α 'nın artan (azalan) bir fonksiyonudur ve de $q_1(1) \leq q_2(1)$ 'dir.

Eğer \tilde{Q} üçgensel bir bulanık sayı ise

1. $q_1(\alpha)$, $[0,1]$ aralığında α 'nın sürekli ve monoton artan bir fonksiyonudur
2. $q_2(\alpha)$, $[0,1]$ aralığında α 'nın sürekli ve monoton azalan bir fonksiyonudur.
3. $q_1(1) = q_2(1)$ 'dir.

Monoton artma (azalma), $dq_1(\alpha)/d\alpha > 0$ ($dq_2(\alpha)/d\alpha < 0$) şartının sağlanıp sağlanmadığına bakılarak kontrol edilebilir.

Bulanık sayılar için bulanık aritmetik işlemler iki temel hesaplama yöntemi kullanılarak gerçekleştirilir. Bunlar genişleme/genelleme (extension) ilkesi ve α -kesimleri veya aralık aritmetiğidir. Bu çalışmada genelleme ilkesine denk olmakla beraber daha kullanıcı ve bilgisayar dostu olan α -kesimleri ve aralık aritmetiği yöntemi kullanılacaktır.

\tilde{A} and \tilde{B} iki bulanık sayı olsun. α -kesimleri kapalı ve sınırlandırılmış aralık olduğundan $\tilde{A}(\alpha) = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ ve $\tilde{B}(\alpha) = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$ olmak üzere temel bulanık işlemler aşağıdaki şekilde yapılır.

$$\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}(\alpha) = [a_1(\alpha) + b_1(\alpha), a_2(\alpha) + b_2(\alpha)] \quad (7.3)$$

$$\tilde{A}(\alpha) - \tilde{B}(\alpha) = [a_1(\alpha) - b_2(\alpha), a_2(\alpha) - b_1(\alpha)] \quad (7.4)$$

$$\tilde{A}(\alpha) \cdot \tilde{B}(\alpha) = [c(\alpha), d(\alpha)] \quad (7.5)$$

ve burada

$$c(\alpha) = \min\{a_1(\alpha)b_1(\alpha), a_1(\alpha)b_2(\alpha), a_2(\alpha)b_1(\alpha), a_2(\alpha)b_2(\alpha)\} \quad (7.6)$$

$$d(\alpha) = \max\{a_1(\alpha)b_1(\alpha), a_1(\alpha)b_2(\alpha), a_2(\alpha)b_1(\alpha), a_2(\alpha)b_2(\alpha)\} \quad (7.7)$$

$$\tilde{A}(\alpha) / \tilde{B}(\alpha) = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] \cdot \left[\frac{1}{b_2(\alpha)}, \frac{1}{b_1(\alpha)} \right] \quad (7.8)$$

$\tilde{A}(\alpha) / \tilde{B}(\alpha)$ işleminde, tüm α için $\tilde{B}(\alpha)$ sıfır değerini içermemelidir.

Canlı ve sınırlandırılmış stokastik PA'ları üstel dağılımın hafızasızlık özelliğinden dolayı sürekli zamanlı Markov zincirlerine eşyapılı olduğundan (Molloy, 1982), ateşleme gecikmelerinin üstel dağılımının hafızasızlık özelliği çok önemlidir. Bu çalışmada önerilen yöntemde üstel dağılımın geçiş ateşleme hızları üçgensel bulanık sayılarla ifade edilmektedir. Bu yöntemdeki amaç hem rassallığı hem de bulanıklığı dikkate almak olduğundan, bulanık parametrelerin stokastik analizinin yapılabilmesi için bulanık üstel fonksiyonun tanımlanması ve bu bulanık fonksiyonun hafızasızlık özelliğini sağlaması gerekmektedir.

Üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (7.9)$$

ile verilmektedir. $f(x; \lambda)$ fonksiyonunun ortalaması ve varyansı sırasıyla $\frac{1}{\lambda}$ ve $\frac{1}{\lambda^2}$ 'dir.

Klasik üstel fonksiyonun hafızasızlık özelliğinin olasılık ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$P[X \geq t + \tau | X \geq t] = P[X \geq \tau] \quad (7.10)$$

(7.10) ifadesindeki λ değerini $\tilde{\lambda}$ bulanık değeri ile değiştirirsek bulanık üstel dağılım $E(\tilde{\lambda})$ elde ederiz. $\tilde{\mu}$ bulanık ortalama olmak üzere, α – kesimleri

$$\tilde{\mu} = \left\{ \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \mid \lambda \in \tilde{\lambda}(\alpha) \right\} \quad (7.11)$$

şeklinde elde edilir. (7.11) işleminin sonucu her zaman $\frac{1}{\lambda}$ 'dir. Bunun sonucu

$\tilde{\mu} = \frac{1}{\tilde{\lambda}}$ 'dir. $\tilde{\sigma}^2$ bulanık varyans olmak üzere, aynı şekilde $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{\tilde{\lambda}^2}$ elde edilir.

Görüldüğü gibi bulanık ortalama (varyans) klasik ortalamanın (varyans) bulanıklaştırılmış halidir.

A ve B iki bulanık olay olmak üzere koşullu olasılık şu şekilde tanımlanmaktadır (Zadeh, 1968);

$$\tilde{P}(A|B) = \frac{\tilde{P}(A \cdot B)}{\tilde{P}(B)}, \tilde{P}(B) > 0 \quad (7.12)$$

Bulanık koşullu olasılığın bulanık üstel α – kesimlerini kullanarak, (7.10) ifadesinde yerleştirerek $\alpha \in [0,1]$ için

$$P[X \geq t + \tau | X \geq t](\alpha) = \left\{ \frac{\int_{t+\tau}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx}{\int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx} \mid \lambda \in \tilde{\lambda}(\alpha) \right\} \quad (7.13)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi (7.13)'deki integral işleminin sonucu aşağıdaki gibidir

$$P[X \geq t + \tau | X \geq t](\alpha) = \{e^{-\lambda \tau} \mid \lambda \in \tilde{\lambda}(\alpha)\} \quad (7.14)$$

(7.14)'ün sağ tarafı $\{e^{-\lambda \tau} \mid \lambda \in \tilde{\lambda}(\alpha)\} = \left\{ \int_{\tau}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \mid \lambda \in \tilde{\lambda}(\alpha) \right\}$ olduğundan

$$P[X \geq t + \tau | X \geq t](\alpha) = P[X \geq \tau](\alpha) \quad (7.15)$$

elde edilir. Bu da (7.10) ifadesinin bulanık üstel fonksiyon için de geçerli olduğunu ve de bulanık üstel dağılımın da hafızasızlık özelliğine sahip olduğunu ispatlamaktadır. Bunu kullanarak klasik stokastik PA'nda kullanılan stokastik analiz yaklaşımını bulanık ortamda da uygulamak, bir başka ifadeyle bulanık sayılar ve bulanık matematik kullanarak stokastik analiz yapmak mümkündür.

7.2.2 Önerilen bulanık parametrelili stokastik PA yöntemi algoritması

Önerilen bulanık parametrelili stokastik PA yöntemi daha önce de belirtildiği gibi iki aşamadan oluşmaktadır ve algoritmik olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir:

Aşama 1:

- 1.1. Sistemin PA modeli aşağıdan-yukarıya, yukarıdan-aşağıya veya karma (hybrid) sistematik modelleme yaklaşımlarıyla oluşturulur. Daha sonra geçişler üstel zamanlı gecikmelerle ilişkilendirilir.
- 1.2. Ulaşılabilirlik grafiği $R(m_0)$ elde edilir. Her bir oka ilgili geçişin ateşleme hızı atanır. Tüm durumlar veya işaretlemeler $m_0, m_1, m_2, \dots, m_{q-1}$ şeklinde adlandırılır. Burada q tüm durumların sayısıdır ve $q = |R(m_0)|$ 'dir.

1.3. Oluşan SPA'nın kararlı durum (steady-state) olasılık dağılımı $\Pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_q)$ geçiş ateşleme cinsinden parametrik olarak aşağıdaki doğrusal matris denklemlerinden elde edilir.

$$\begin{aligned} \Pi A &= 0 \\ \sum_{i=0}^{q-1} \pi_i &= 1 \end{aligned} \quad (7.16)$$

burada $A = (a_{ij})_{q \times q}$ kare matrisi geçiş hız matrisi (transition rate matrix) ve π_i de m_i işaretlemesinde (durumunda) olma olasılığı olmak üzere $i = 0, 1, \dots, q-1$ için A 'nın i . satır elemanı a_{ij} şu şekilde hesaplanmaktadır;

1.3.1. eğer $j \neq i$ ise, a_{ij} değeri m_i işaretlemesinden m_j işaretlemesine yönlendirilmiş tüm okların hızlarının toplamıdır.

1.3.2. A 'nın herhangi bir satır elemanı $\sum_{j=0}^{q-1} a_{ij} = 0$ sağladığından

$a_{ii} = -\sum_{j \neq i}^{q-1} a_{ij}$ şeklinde elde edilir. Burada $-a_{ii}$ değeri m_i işaretlemesinde olurlu olan geçişlerin hızlarının toplamını ifade eder (m_i işaretlemesinden ayrılan geçişlerin hızları)

Burada elde edilen her bir kararlı durum olasılığı, π_i , geçiş ateşleme hızları olan λ_i 'lerin birer fonksiyonu şeklindedir ve sayısal bir olasılık değeri hesaplanmaz.

Aşama 2:

2.1. Adım (1.3)'de elde edilen parametrik kararlı-durum olasılıklarında üçgensel bulanık sayılar şeklinde tanımlanan geçiş ateşleme hızları yerleştirilir.

2.2. (7.3)-(7.8) denklemleri kullanılarak bulanık kararlı-durum olasılıkları α - kesimleri cinsinden elde edilir.

2.3. Her bir kararlı-durum olasılığı, π_i , için en geniş olası değer aralığını veren $\alpha = 0$ hesaplanır. $\alpha = 1$ için elde edilen değer klasik SPA'nın olasılık değeridir.

2.4. Her bir π_i için maksimum ve minimum değer ($\alpha = 0$) $[0, 1]$ kapalı aralığında olmalıdır. Eğer her bir π_i için $\alpha = 0$ aralığı bu şartı sağlarsa çözüm olurludur.

Fakat herhangi bir kararlı-durum olasılığı bunu sağlamazsa bir sonraki adımdaki optimizasyon uygulanır.

2.5. Buckley (2005) belirttiği gibi bulanık değişkenli fonksiyonların hesaplanmasında α – kesimleri ve aralık aritmetiği kullanıldığında elde edilen sonuç genişleme ilkesi kullanılarak elde edilen sonuçtan daha büyük olabilmektedir. Bunun nedeni α – kesimleri ve aralık aritmetiğinin temel olarak maksimum ve minimum operatörlerini baz alması ve bunun sonucu olarak da daha büyük aralıklar üretmesidir. Teorik olarak $\alpha = 0$ kesimi olası en geniş değer aralığını vermektedir. Bizim amacımız bulanık olasılık değerleri hesaplamak olduğundan olası en geniş değer aralığı $[0,1]$ aralığıdır. Bunun için bulanık kararlı-durum olasılıklarının α – kesimlerini bulabilmek için sonucu olurlu yapan bir optimizasyon problemi çözülmelidir. Bu problem şu şekildedir;

Bulanık kararlı-durum olasılığının α – kesimi ifadesi $\pi_i = [\pi_i^-(\alpha), \pi_i^+(\alpha)]$ olsun, burada $i = 1, 2, \dots, n$ ve n durum sayısı olmak üzere problemin yapısı

$$\text{Min}(Z) = \alpha$$

$$\pi_i^+(\alpha) \leq 1$$

$$\pi_i^-(\alpha) \geq 0$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

$$\pi_i^-(\alpha) \leq \pi_i^+(\alpha)$$

şeklinde. Burada bulunan en küçük α değeri kararlı-durum olasılıklarını olurlu yapan teorik $\alpha = 0$ kesimidir.

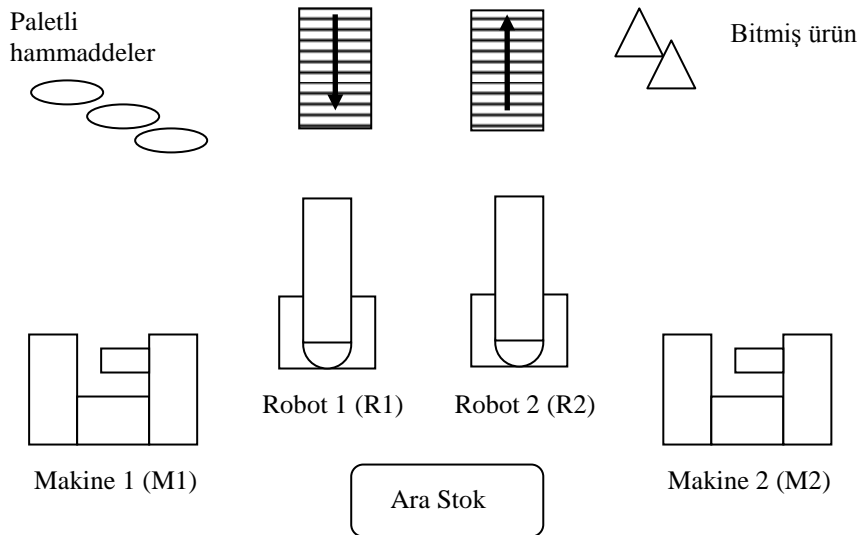
Bir sonraki bölümde önerilen bulanık parametrelili stokastik PA yönteminin sayısal bir örnek uygulaması yer almaktadır.

7.3 Bulanık Parametrelili Stokastik Petri Ağları Yöntemi için Örnek Uygulama

Bir önceki bölümde esnek imalat sistemleri gibi kompleks dinamik sistemlerinin modellenmesi ve analizi için hem stokastik değişkenliği hem de kesin olmamayı birlikte temsil eden bulanık parametrelili stokastik Petri ağları yaklaşımı ve bunun yeni algoritma yapısı verilmiştir. Bu kısımda ise önerilen bu yöntemin daha iyi anlaşılabilmesi için sayısal bir örnek üzerinde uygulaması yer almaktadır. Daha

önce de belirtildiği gibi klasik ve stokastik PA yöntemleriyle modellemede karşılaşılan en önemli sorunlardan biri sistemin kompleksliği arttıkça durum uzayının ve bunun neticesinde de ulaşılabilirlik grafiğinin çok büyümesi ve sonuç olarak da sistemin analizinin giderek zorlaşması ve hatta bazen imkansız hale gelmesidir. Bu amaçla bu çalışmada esas hedeflenen bulanık küme teorisi ile stokastik PA yöntemlerinin ilk defa olarak birlikte kullanıldığı yeni bir yöntemi ortaya koymak olduğundan seçilen uygulama literatürden seçilmiş bir uygulamadır. Daha önceki bölümlerde verilen detaylı literatür araştırmalarında yer alan özellikle stokastik PA ile ilgili sayısal örnek ve uygulamaların büyük bir kısmı seçilen bu örnekle hem komplekslik hem de içerik olarak benzerlik göstermektedir. Bu çalışmada seçilen örnek Zhou ve Venkatesh (1999)'dan alınmış esnek bir imalat hücresidir.

Ele alınan esnek imalat hücresi Şekil 7.1'de görüldüğü gibi, her biri R1 ve R2 robotları tarafından malzeme yüklenen ve boşaltılan iki adet makineden (M1 ve M2) oluşmaktadır. Bir tane konveyör hammaddeleri paletlerle teker teker taşımakta ve R1 robotu M1 makinesine bu hammaddeyi yüklemektedir. Bir diğer konveyör ise R2 robotunun M2 makinesinden aldığı ve üzerine koyduğu bitmiş ürünü taşımaktadır. İki makine arasında ise iki parça kapasiteli bir tampon/ara stoğu bulunmaktadır. Sistem belirli çeşit bir ürün üretmektedir. Üç paletten birinde bulunan her bir ham iş parçası önce M1 makinesinde ve daha sonra da M2 makinesinde işlenmektedir.



Şekil 7.1: Ele alınan esnek imalat hücresi.

Sistemle ilgili diğer bilgi ve varsayımlar aşağıdaki gibidir;

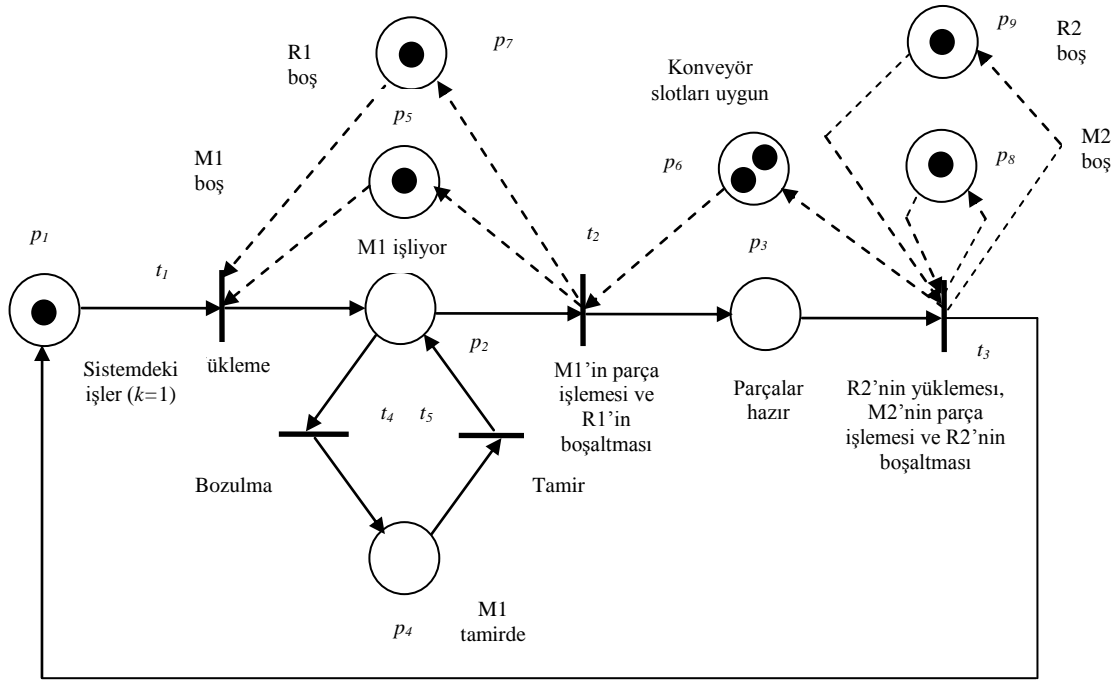
1. M1 makinesi M2 makinesinden daha hızlı olmasına rağmen parça işleme esnasında bozulabilmektedir. Ortalama olarak, M1'in bozulması 2 zaman birimi almaktadır ve çeyrek zaman biriminde tamir edilmektedir. Buna göre M1'in ortalama bozulma ve tamir oranları (1/zaman birimi) sırasıyla 0.5 ve 0.4'tür. M2 ve iki robotun bozulmadığı kabul edilmektedir.
2. R1'in yükleme hızı birim zamanda 40 parçadır. M1'in işlemesi ve R1'in boşaltması için ortalama oran birim zamanda 5 parçadır.
3. M2'nin parça işlemesi, R2'nin yükleme ve boşaltması için ortalama oran birim zamanda 4 parçadır.
4. Bütün bu operasyonlarla ilişkili zaman gecikmelerinin üstel dağıldığı kabul edilmektedir.

Burada denge/kararlı durumda makine ortalama kullanım oranı ve sistemin üretim/çıktı oranları sistemde sadece bir iş parçasının olduğu ve iki iş parçasının olduğu durumlar için bulunarak sistem analiz edilecektir.

$k=1$, sistemde sadece bir iş parçasının olduğu durum için;

Aşama 1:

İlk olarak sistemin Petri ağları kullanılarak modellenmesi ve geçişlerin üstel zaman gecikmeleriyle ilişkilendirilmesi gerekmektedir. Sistemin PA modeli Şekil 7.2'de görülmektedir.



Şekil 7.2: Esnek imalat hücresinin PA modeli ($k=1$ için).

Çizelge 7.1’de modelde kullanılan PA elemanları ve ne ifade ettikleri verilmektedir.

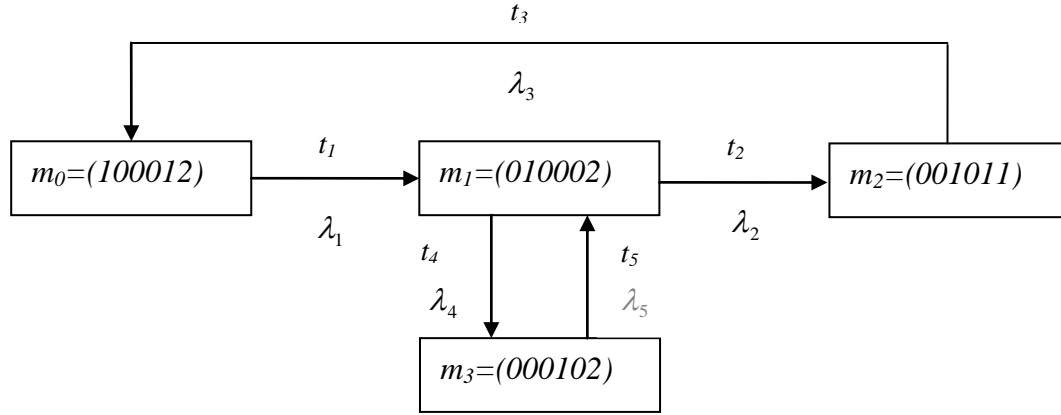
Çizelge 7.1: Modelde kullanılan konumlar, geçişler ve ateşleme hızları.

Konumlar	Açıklama	
p_1	İş parçalarını içeren paletler uygun	
p_2	M1 makinesi iş işliyor	
p_3	Ara parçalar M2 makinesinde işlenmek için uygun	
p_4	M1 tamirde	
p_5	M1 uygun	
p_6	Konveyör slotları uygun	
p_7	R1 uygun (analiz açısından gereksiz)	
p_8	M2 uygun (analiz açısından gereksiz)	
p_9	R2 uygun (analiz açısından gereksiz)	
Geçişler	Açıklama	Ateşleme Hızları
t_1	R1 bir parçayı M1’e yüklüyor	$\lambda_1=40$
t_2	M1 parça işliyor ve R1 bir parçayı boşaltıyor	$\lambda_2=5$
t_3	R2 bir parçayı yüklüyor/boşaltıyor ve M2 bir parçayı işliyor	$\lambda_3=4$
t_4	M1 bozuluyor	$\lambda_4=0,5$
t_5	M1 tamir ediliyor	$\lambda_5=0,5$

Burada önemli bir nokta, p_7 , p_8 ve p_9 konumlarındaki jeton değerlerine bağlı olarak her bir işaretlemedeki gereksiz bilgi analizde ihmal edilmektedir. Bunun nedeni p_7

konumun p_5 konumuyla aynı sayıda jeton içermesi ve diğer iki konumun da her zaman bir jeton içermesidir. Bu sebeple yeni bir işaretlemeye yol açmadıklarından ve bunun sonucu da yeni bir sistem durumu oluşturmadıklarından analizde ihmal edilebilirlerdir.

Sistemin ulaşılabilirlik grafiği ve modellenen sistemin Markov zinciri Şekil 7.3'deki gibidir.



Şekil 7.3: Modellenen esnek imalat hücresinin ulaşılabilirlik grafiği ve Markov zinciri ($k=1$ için).

Denklem (7.16) kullanılarak aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 - \lambda_4 & \lambda_2 & \lambda_4 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & 0 & -\lambda_5 \end{pmatrix} = 0 \quad (7.17)$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

Bu denklem sisteminin çözümü kararlı durum olasılıklarını parametrik olarak, geçiş ateşleme hızları cinsinden aşağıdaki şekilde vermektedir;

$$\Pi^T = \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 \lambda_3 \lambda_5 / \lambda \\ \lambda_1 \lambda_3 \lambda_5 / \lambda \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_5 / \lambda \\ \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 / \lambda \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

ve burada $\lambda = \lambda_2 \lambda_3 \lambda_5 + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_5 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_5 + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4$ şeklinde tanımlanmaktadır.

Kararlı durum olasılıklarını geçiş ateşleme hızları cinsinden elde ettikten sonra ikinci aşamada geçiş ateşleme hızları üçgensel bulanık sayılar olarak tanımlanmalıdır.

Aşama 2:

Her bir geçiş ateşleme hızının bulanık sayı değerleri ve α – kesim ifadeleri Çizelge 7.2’deki gibidir.

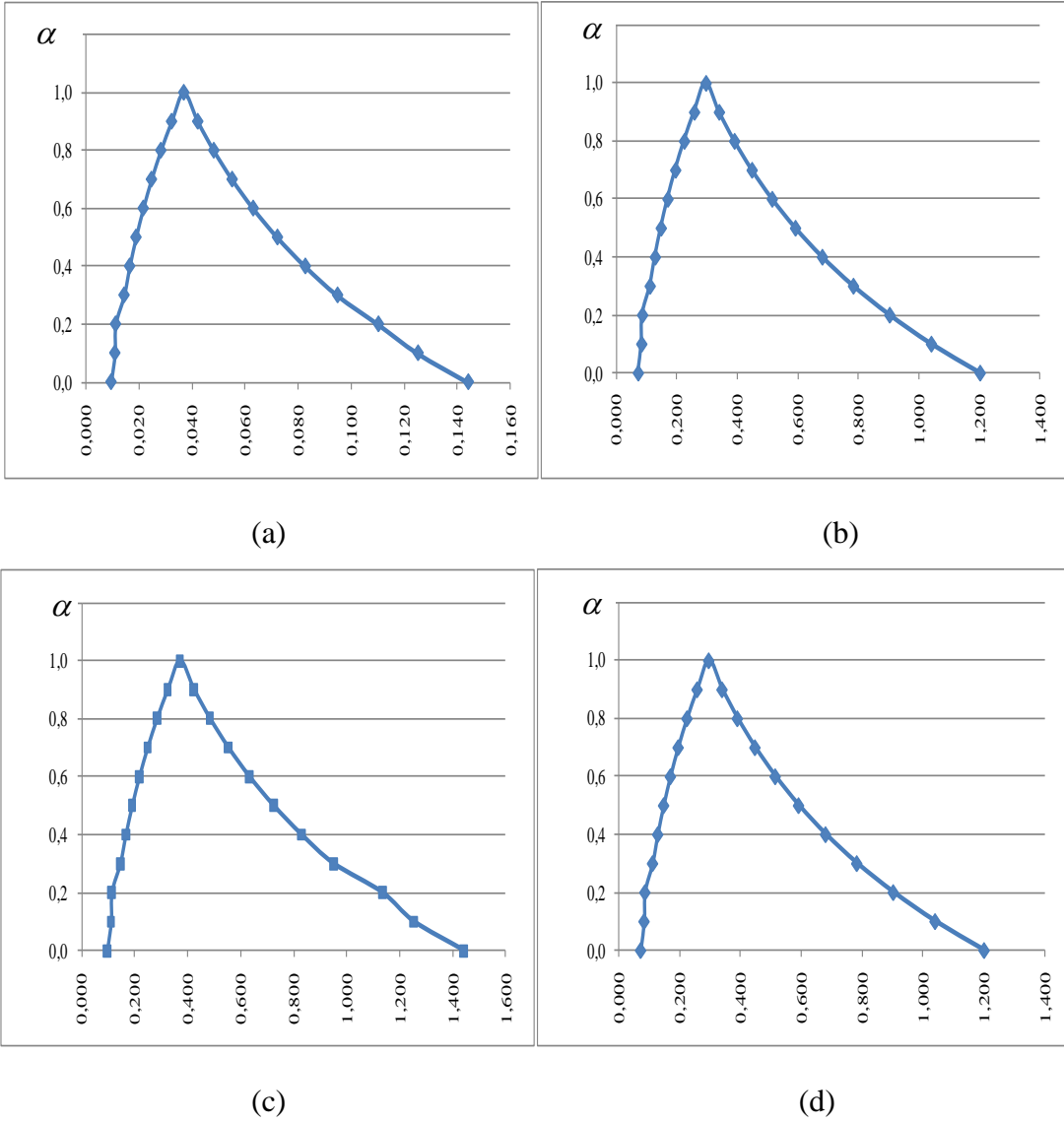
Çizelge 7.2: Bulanıklaştırılmış geçiş ateşleme hızları ve α – kesim ifadeleri.

Bulanık λ değeri	α -kesim gösterimi
$\lambda_1=(30/40/50)$	$\lambda_1=[30+10\alpha; 50-10\alpha]$
$\lambda_2=(4/5/6)$	$\lambda_2=[4+\alpha; 6-\alpha]$
$\lambda_3=(3/4/5)$	$\lambda_3=[3+\alpha; 5-\alpha]$
$\lambda_4=(0,4/0,5/0,6)$	$\lambda_4=[0,4+0,1\alpha; 0,6-0,1\alpha]$
$\lambda_5=(0,4/0,5/0,6)$	$\lambda_5=[0,4+0,1\alpha; 0,6-0,1\alpha]$

Çizelge 7.2’deki bulanık değerleri Denklem (7.18)’de elde edilen parametrik kararlı durum ifadesinde yerine koyarak ve Denklem (7.3)-(7.8) ifadelerinde verilen bulanık matematik işlemleri uygulayarak aşağıdaki bulanık kararlı durum olasılıklarının α – kesim cinsinden ifadeleri elde edilir;

$$\begin{aligned}
 \pi_0(\alpha) &= \left[\frac{0,1\alpha^3 + 1,1\alpha^2 + 4\alpha + 4,8}{-3,1\alpha^3 + 50,7\alpha^2 - 275,6\alpha + 498}; \frac{-0,1\alpha^3 + 1,7\alpha^2 - 9,6\alpha + 18}{3,1\alpha^3 + 32,1\alpha^2 + 110\alpha + 124,8} \right] \\
 \pi_1(\alpha) &= \left[\frac{\alpha^3 + 10\alpha^2 + 33\alpha + 36}{-3,1\alpha^3 + 50,7\alpha^2 - 275,6\alpha + 498}; \frac{-\alpha^3 + 16\alpha^2 - 85\alpha + 150}{3,1\alpha^3 + 32,1\alpha^2 + 110\alpha + 124,8} \right] \\
 \pi_2(\alpha) &= \left[\frac{\alpha^3 + 11\alpha^2 + 40\alpha + 48}{-3,1\alpha^3 + 50,7\alpha^2 - 275,6\alpha + 498}; \frac{-\alpha^3 + 17\alpha^2 - 96\alpha + 180}{3,1\alpha^3 + 32,1\alpha^2 + 110\alpha + 124,8} \right] \\
 \pi_3(\alpha) &= \left[\frac{\alpha^3 + 10\alpha^2 + 33\alpha + 36}{3,1\alpha^3 + 32,1\alpha^2 + 110\alpha + 124,8}; \frac{-\alpha^3 + 16\alpha^2 - 85\alpha + 150}{3,1\alpha^3 + 32,1\alpha^2 + 110\alpha + 124,8} \right]
 \end{aligned} \tag{7.19}$$

Şekil 7.4’de bulanık kararlı durum olasılıklarının grafiksel gösterimi yer almaktadır.



Şekil 7.4: Bulanık kararlı durum olasılıklarının grafiksel gösterimi ($k=1$ için),
(a) π_0 , (b) π_1 , (c) π_2 , (d) π_3 .

Her bir $\pi_i = [\pi_i^-(\alpha), \pi_i^+(\alpha)]$, $i=0,1,2,3$ için maksimum ve minimum ($\alpha = 0$ değeri) değer $[0,1]$ aralığında olması gerekirken, Şekil 7.4’de de görüldüğü gibi π_1^+, π_2^+ ve π_3^+ bu şartı sağlamamaktadır. Bu sebeple bu şartı sağlayan minimum α – kesim değerini bulabilmek için adım 2.5’de verilen optimizasyon modelinin uygulanması gerekmektedir. $\pi_1 = \pi_3$ ve $i=0,1,2,3$ için $\pi_i^-(\alpha) \geq 0$ olduğundan optimizasyon probleminin yapısı aşağıdaki gibi olmaktadır;

$$\text{Min}(Z) = \alpha$$

$$\pi_0^+(\alpha) \leq 1$$

$$\pi_1^+(\alpha) \leq 1$$

$$\pi_2^+(\alpha) \leq 1$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

$$\pi_0^+(\alpha), \pi_1^+(\alpha), \pi_2^+(\alpha) \geq 0$$

Gerekli sadeleştirmelerden sonra, problem aşağıdaki şekilde elde edilir;

$$\text{Min}(Z) = \alpha$$

$$-3,2\alpha^3 - 30,4\alpha^2 - 119,6\alpha - 106,8 \leq 0$$

$$-4,1\alpha^3 - 16,1\alpha^2 - 195\alpha + 25,2 \leq 0$$

$$-4,1\alpha^3 - 15,1\alpha^2 - 206\alpha + 55,2 \leq 0$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

Doğrusal olmayan bu optimizasyon probleminin sonucu MATLAB, MS Excel vb. programlar yardımıyla bulunabilmektedir. Optimizasyon probleminin sonucu 0,263'tür. Elde edilen bu α değeri bulanık kararlı durum olasılıklarını olurlu/mümkün kılan değerdir. Buna göre $k=1$ durumu için nihai kararlı durum olasılıkları Çizelge 7.3'deki gibi elde edilir.

Çizelge 7.3: Nihai bulanık kararlı durum olasılıkları ($k=1$ için).

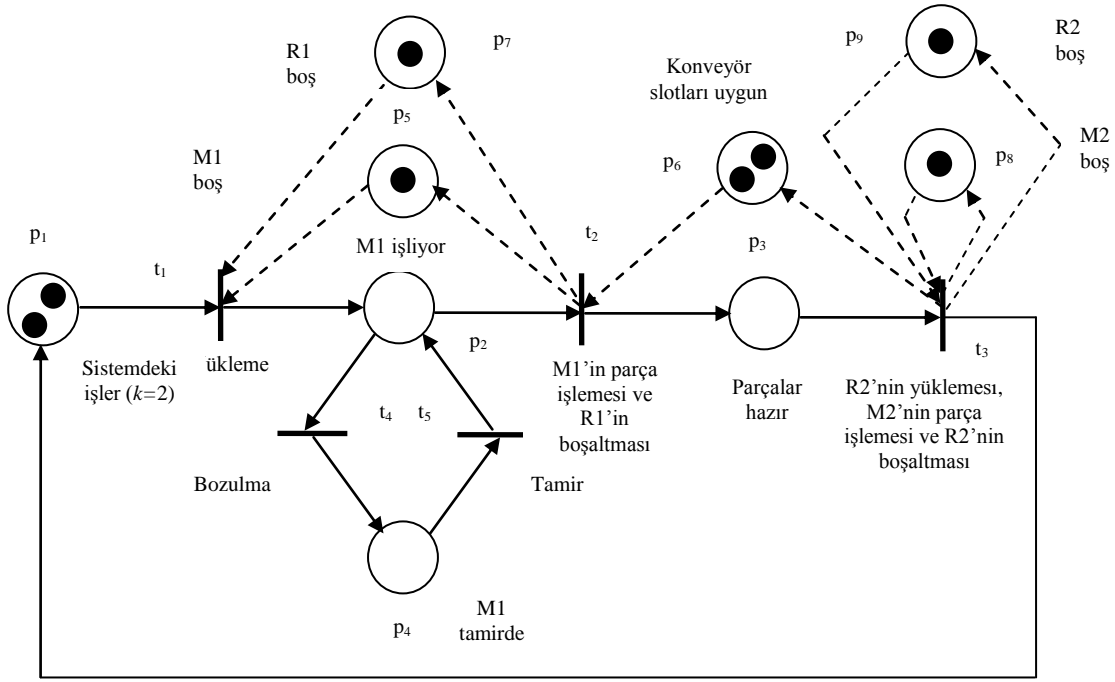
	$\alpha=0$ kesimi	$\alpha=1$ kesimi
π_0	[0,014; 1,000]	0,038
π_1	[0,106; 0,826]	0,296
π_2	[0,138; 1,000]	0,370
π_3	[0,106; 0,826]	0,296

Çizelge 7.3'de görüldüğü gibi $\alpha=0$ değeri en büyük olasılık aralığını verirken $\alpha=1$ değeri klasik stokastik PA olasılık değerini vermektedir.

$k=2$, sistemde iki iş parçasının olduğu durum için;

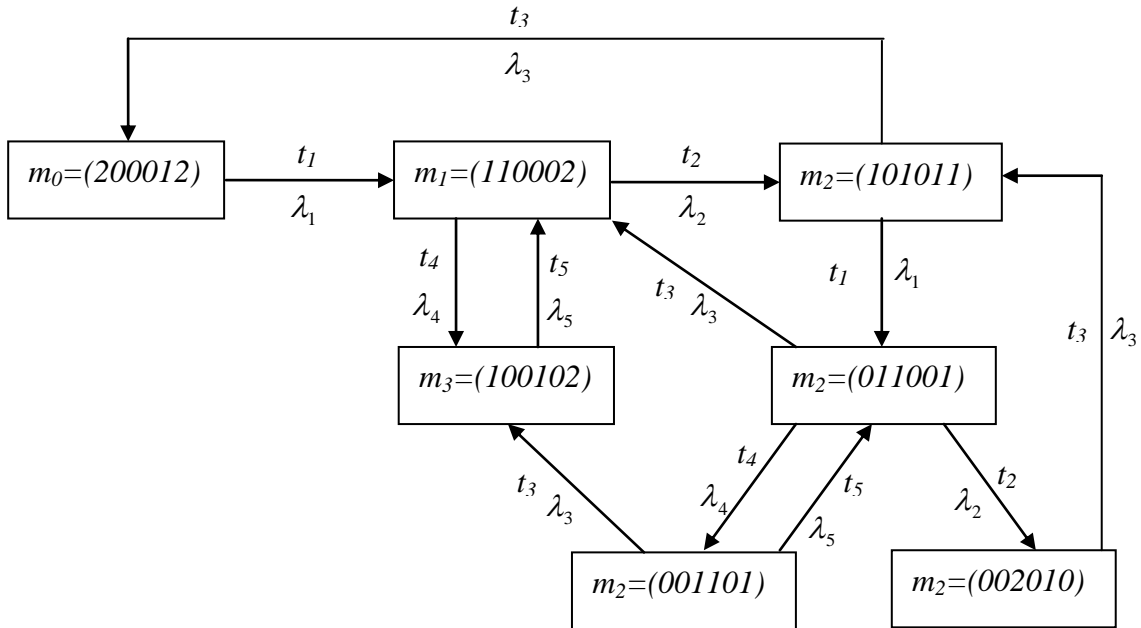
Aşama 1:

Sistemin PA modeli Şekil 7.5'deki gibidir.



Şekil 7.5: Esnek imalat hücrenin PA modeli ($k=2$ için).

Sistemin ulaşılabilirlik grafiği ve modellenen sistemin Markov zinciri Şekil 7.6'daki gibidir.



Şekil 7.6: Modellenen esnek imalat hücrenin ulaşılabilirlik grafiği ve Markov zinciri ($k=2$ için).

Denklem (7.16) kullanılarak aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6) \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 - \lambda_4 & \lambda_2 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_3 - \lambda_1 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & 0 & -\lambda_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & -\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 & \lambda_4 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & \lambda_5 & -\lambda_3 - \lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (7.20)$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 = 1$$

Bu denklem sisteminin çözümüyle kararlı durum olasılıkları geçiş ateşleme hızları cinsinden parametrik olarak aşağıdaki şekilde elde edilir;

$$\Pi^T = \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \\ \pi_6 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \lambda_3^2 \lambda_5 \beta / \lambda \\ \lambda_2 \lambda_3^2 \lambda_5 (\beta + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_4 + \lambda_1 \lambda_5) / \lambda \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_5 \beta / \lambda \\ \lambda_1 \lambda_3^2 \lambda_4 (\beta + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_4 + \lambda_1 \lambda_5) / \lambda \\ \lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_5 (\lambda_3 + \lambda_5) / \lambda \\ \lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 / \lambda \\ \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_5 (\lambda_3 + \lambda_5) / \lambda \end{pmatrix} \quad (7.21)$$

ve burada

$$\lambda = [\lambda_2 \lambda_3^2 \lambda_5 + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_5 (\lambda_1 + \lambda_5) + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_5 + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 (\lambda_1 + \lambda_3)] \beta + \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_5 (\lambda_3 + \lambda_5) \quad \text{ve}$$

$$\beta = \lambda_3 \lambda_4 + (\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_5) \text{ şeklinde tanımlanmaktadır.}$$

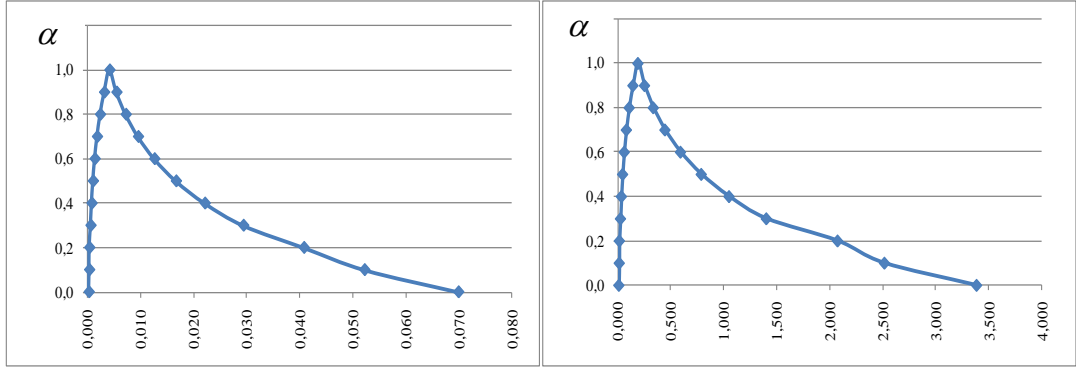
Kararlı durum olasılıklarını geçiş ateşleme hızları cinsinden elde ettikten sonra ikinci aşamada geçiş ateşleme hızları üçgensel bulanık sayılar olarak tanımlanmalıdır.

Aşama 2:

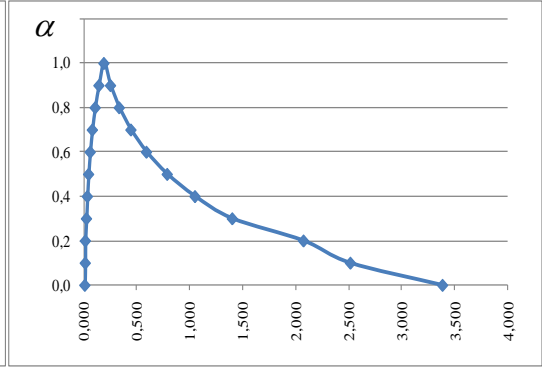
Çizelge 7.2'deki bulanık değerleri Denklem (7.21)'de elde edilen parametrik kararlı durum ifadesinde yerine koyarak ve Denklem (7.3)-(7.8) ifadelerinde verilen bulanık matematik işlemleri uygulayarak aşağıdaki bulanık kararlı durum olasılıklarının α - kesim cinsinden ifadeleri elde edilir;

$$\begin{aligned}
\pi_0(\alpha) &= \left[\frac{0,23\alpha^6 + 4,74\alpha^5 + 40,57\alpha^4 + 184,6\alpha^3 + 470,98\alpha^2 + 638,88\alpha + 360}{64,13\alpha^6 - 2.045,9\alpha^5 + 27.173,47\alpha^4 - 192.337,36\alpha^3 + 765.197\alpha^2 - 1.622.405,6\alpha + 1.432.254} ; \right. \\
&\quad \left. \frac{0,23\alpha^6 - 7,5\alpha^5 + 101,77\alpha^4 - 735,56\alpha^3 + 2.986,66\alpha^2 - 6.459,6\alpha + 5.814}{64,13\alpha^6 + 1.276,34\alpha^5 + 10.562,27\alpha^4 + 46.524,8\alpha^3 + 115.055,58\alpha^2 + 151.472,88\alpha + 82.944} \right] \\
\pi_1(\alpha) &= \left[\frac{14,23\alpha^6 + 275,1\alpha^5 + 2.199,5\alpha^4 + 9.357,1\alpha^3 + 22.343,4\alpha^2 + 28.398,6\alpha + 15.012}{64,13\alpha^6 - 2.045,9\alpha^5 + 27.173,47\alpha^4 - 192.337,36\alpha^3 + 765.197\alpha^2 - 1.622.405,6\alpha + 1.432.254} ; \right. \\
&\quad \left. \frac{14,3\alpha^6 - 446,7\alpha^5 + 5.808,5\alpha^4 - 40.245,1\alpha^3 + 156.714\alpha^2 - 325.195\alpha + 280.950}{64,13\alpha^6 + 1.276,34\alpha^5 + 10.562,27\alpha^4 + 46.524,8\alpha^3 + 115.055,58\alpha^2 + 151.472,88\alpha + 82.944} \right] \\
\pi_2(\alpha) &= \left[\frac{2,3\alpha^6 + 47,4\alpha^5 + 405,7\alpha^4 + 1.846\alpha^3 + 4.709,8\alpha^2 + 6.388,8\alpha + 3.600}{64,13\alpha^6 - 2.045,9\alpha^5 + 27.173,47\alpha^4 - 192.337,36\alpha^3 + 765.197\alpha^2 - 1.622.405,6\alpha + 1.432.254} ; \right. \\
&\quad \left. \frac{2,3\alpha^6 - 75\alpha^5 + 1.017,7\alpha^4 - 7.355,6\alpha^3 + 29.866,6\alpha^2 - 64.596\alpha + 58.140}{64,13\alpha^6 + 1.276,34\alpha^5 + 10.562,27\alpha^4 + 46.524,8\alpha^3 + 115.055,58\alpha^2 + 151.472,88\alpha + 82.944} \right] \\
\pi_3(\alpha) &= \left[\frac{24,3\alpha^6 + 475,1\alpha^5 + 3.859,5\alpha^4 + 16.677,1\alpha^3 + 40.433,4\alpha^2 + 52.158,6\alpha + 27.972}{64,13\alpha^6 - 2.045,9\alpha^5 + 27.173,47\alpha^4 - 192.337,36\alpha^3 + 765.197\alpha^2 - 1.622.405,6\alpha + 1.432.254} ; \right. \\
&\quad \left. \frac{24,3\alpha^6 - 766,7\alpha^5 + 10.068,5\alpha^4 - 7.0445,1\alpha^3 + 276.964\alpha^2 - 580.195\alpha + 505.950}{64,13\alpha^6 + 1.276,34\alpha^5 + 10.562,27\alpha^4 + 46.524,8\alpha^3 + 115.055,58\alpha^2 + 151.472,88\alpha + 82.944} \right] \\
\pi_4(\alpha) &= \left[\frac{11\alpha^6 + 221\alpha^5 + 1.843\alpha^4 + 8.167\alpha^3 + 20.286\alpha^2 + 26.784\alpha + 14.688}{64,13\alpha^6 - 2.045,9\alpha^5 + 27.173,47\alpha^4 - 192.337,36\alpha^3 + 765.197\alpha^2 - 1.622.405,6\alpha + 1.432.254} ; \right. \\
&\quad \left. \frac{11\alpha^6 - 353\alpha^5 + 4.713\alpha^4 - 33.511\alpha^3 + 133.840\alpha^2 - 284.700\alpha + 252.000}{64,13\alpha^6 + 1.276,34\alpha^5 + 10.562,27\alpha^4 + 46.524,8\alpha^3 + 115.055,58\alpha^2 + 151.472,88\alpha + 82.944} \right] \\
\pi_5(\alpha) &= \left[\frac{\alpha^6 + 21\alpha^5 + 183\alpha^4 + 847\alpha^3 + 2.196\alpha^2 + 3.024\alpha + 1.728}{64,13\alpha^6 - 2.045,9\alpha^5 + 27.173,47\alpha^4 - 192.337,36\alpha^3 + 765.197\alpha^2 - 1.622.405,6\alpha + 1.432.254} ; \right. \\
&\quad \left. \frac{\alpha^6 - 33\alpha^5 + 453\alpha^4 - 3.311\alpha^3 + 13.590\alpha^2 - 29.700\alpha + 27.000}{64,13\alpha^6 + 1.276,34\alpha^5 + 10.562,27\alpha^4 + 46.524,8\alpha^3 + 115.055,58\alpha^2 + 151.472,88\alpha + 82.944} \right] \\
\pi_6(\alpha) &= \left[\frac{11\alpha^6 + 232\alpha^5 + 2.031\alpha^4 + 9.446\alpha^3 + 24.616\alpha^2 + 34.080\alpha + 19.584}{64,13\alpha^6 - 2.045,9\alpha^5 + 27.173,47\alpha^4 - 192.337,36\alpha^3 + 765.197\alpha^2 - 1.622.405,6\alpha + 1.432.254} ; \right. \\
&\quad \left. \frac{11\alpha^6 - 364\alpha^5 + 5.011\alpha^4 - 36.734\alpha^3 + 151.236\alpha^2 - 331.560\alpha + 302.400}{64,13\alpha^6 + 1.276,34\alpha^5 + 10.562,27\alpha^4 + 46.524,8\alpha^3 + 115.055,58\alpha^2 + 151.472,88\alpha + 82.944} \right]
\end{aligned} \tag{7.22}$$

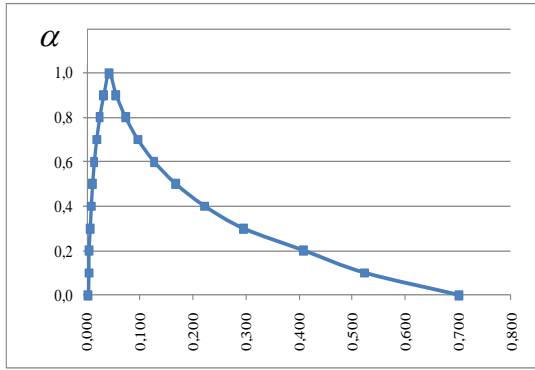
Şekil 7.7’de bulanık kararlı durum olasılıklarının grafiksel gösterimi yer almaktadır.



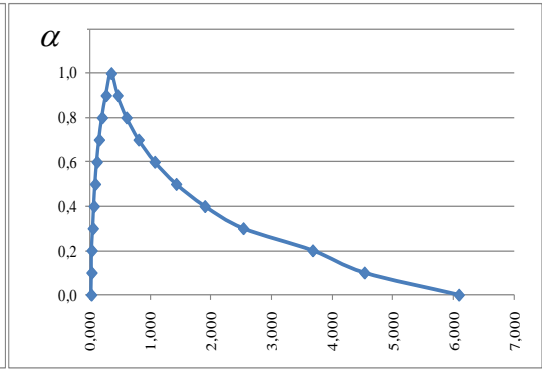
(a)



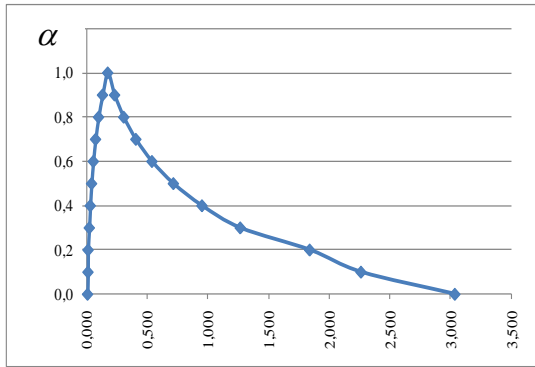
(b)



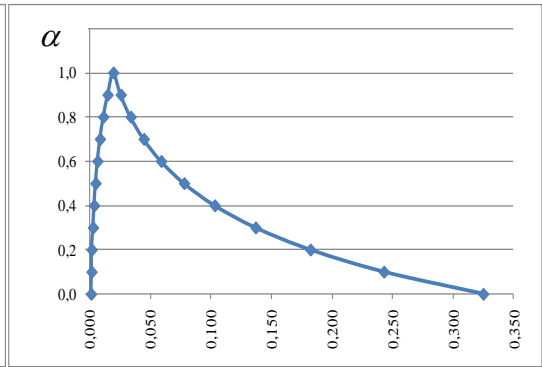
(c)



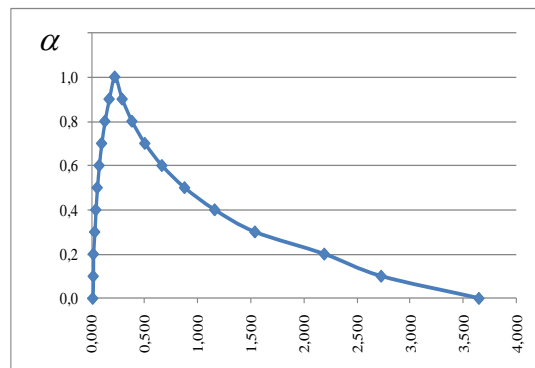
(d)



(e)



(f)



(g)

Şekil 7.7: Bulanık kararlı durum olasılıklarının grafiksel gösterimi ($k=2$ için),
 (a) π_0 , (b) π_1 , (c) π_2 , (d) π_3 , (e) π_4 , (f) π_5 , (g) π_6 .

Her bir $\pi_i = [\pi_i^-(\alpha), \pi_i^+(\alpha)]$, $i=0,1,2,\dots,6$ için maksimum ve minimum ($\alpha = 0$ değeri) değer $[0,1]$ aralığında olması gerekirken, Şekil 7.7’de de görüldüğü gibi $\pi_1^+, \pi_3^+, \pi_4^+$ ve π_6^+ bu şartı sağlamamaktadır. Bu sebeple bu şartı sağlayan minimum α – kesim değerini bulabilmek için adım 2.5’de verilen optimizasyon modelinin uygulanması gerekmektedir. $i=0,1,2,3$ için $\pi_i^-(\alpha) \geq 0$ ve $\pi_0^+(\alpha) \leq 1, \pi_2^+(\alpha) \leq 1, \pi_5^+(\alpha) \leq 1$ olduğundan optimizasyon probleminin yapısı aşağıdaki gibi olmaktadır;

$$\text{Min}(Z) = \alpha$$

$$\pi_1^+(\alpha) \leq 1$$

$$\pi_3^+(\alpha) \leq 1$$

$$\pi_4^+(\alpha) \leq 1$$

$$\pi_6^+(\alpha) \leq 1$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

$$\pi_1^+(\alpha), \pi_3^+(\alpha), \pi_4^+(\alpha), \pi_6^+(\alpha) \geq 0$$

Gerekli sadeleştirmelerden sonra problem,

$$\text{Min}(Z) = \alpha$$

$$-49,83\alpha^6 - 1.723,04\alpha^5 - 4.753,77\alpha^4 - 86.769,9\alpha^3 + 41.658,42\alpha^2 - 476.667,88\alpha + 198.006 \leq 0$$

$$-39,83\alpha^6 - 2.043,04\alpha^5 - 493,77\alpha^4 - 116.969,9\alpha^3 + 161.908,42\alpha^2 - 731.667,88\alpha + 423.006 \leq 0$$

$$-53,13\alpha^6 - 1.629,34\alpha^5 - 5.849\alpha^4 - 80.035,8\alpha^3 - 18.784,42\alpha^2 - 436.172,88\alpha + 169.056 \leq 0$$

$$-53,13\alpha^6 - 1.640,34\alpha^5 - 5.551,27\alpha^4 - 83.258,8\alpha^3 - 36.180,42\alpha^2 - 483.032,88\alpha + 219.456 \leq 0$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

şeklinde elde edilir.

Doğrusal olmayan bu optimizasyon probleminin sonucu 0,625’tir. Elde edilen bu α değeri bulanık kararlı durum olasılıklarını olurlu/mümkün (feasible) kılan değerdir. Buna göre $k=2$ durumu için nihai kararlı durum olasılıkları Çizelge 7.4’deki gibi elde edilir.

Çizelge 7.4: Nihai bulanık kararlı durum olasılıkları ($k=2$ için).

	$\alpha=0$ kesimi	$\alpha=1$ kesimi
π_0	[0,001; 0,120]	0,004
π_1	[0,062; 0,551]	0,190
π_2	[0,014; 0,118]	0,042
π_3	[0,114; 1,000]	0,346
π_4	[0,059; 0,504]	0,177
π_5	[0,007; 0,055]	0,020
π_6	[0,075; 0,620]	0,221

Bu kısımda bir önceki bölümde algoritmik olarak sunulan bulanık parametrelili stokastik Petri ağları yöntemini kullanarak bulanık kararlı/denge durumu olasılıklarının nasıl elde edilebildiği sayısal bir örnekle gösterilmiştir. Şimdi ise örnek uygulama için sistem analiz edilerek sonuçlar değerlendirilecektir.

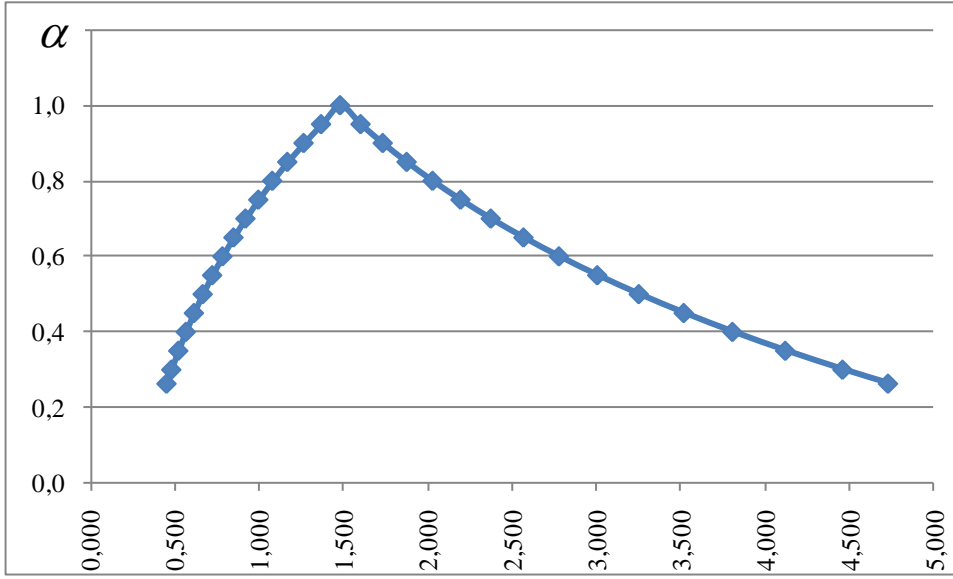
Bulanık kararlı durum olasılıkları elde edildikten sonra, ele alınan esnek imalat hücresi için önemli performans ölçüleri ve sistemin analizi $k=1$ ve $k=2$ durumları için ayrı ayrı aşağıdaki gibidir;

$k=1$ için sistemin performans ölçüleri ve analizi;

- *Esnek imalat hücresinin kararlı durumda ortalama üretim miktarı;* Sistemde tek bir çeşit ürün üretilmektedir ve bir ürünün tamamlanması t_3 geçişiyle modellenmektedir. Bu geçişin olurlu olduğu işaretlemelere bakıldığında (Şekil 7.3) sadece m_2 işaretlemesi olduğu görülmektedir. Böylece, sistemin ortalama üretim miktarı t_3 geçişinin olurlu olma olasılığı ile t_3 geçişinin ateşleme hızının çarpımıdır. Buna göre, Esnek imalat hücresinin kararlı durumda ortalama üretim miktarı $O\ddot{U}M$ olmak üzere Çizelge 7.3'deki değerler kullanılarak;

$$\begin{aligned} O\ddot{U}M &= \pi_2 \lambda_3 \\ &= [0,138; 1,000][3,263; 4,737] \\ &= [0,450; 4,737] \text{ iş parçası/zaman birimi} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Şekil 7.8'de esnek imalat hücresinin kararlı durumda ortalama üretim miktarının α – kesimiyle değişimi görülmektedir.



Şekil 7.8: Esnek imalat hücrenin kararlı durumda ortalama üretim miktarı ($k=1$).

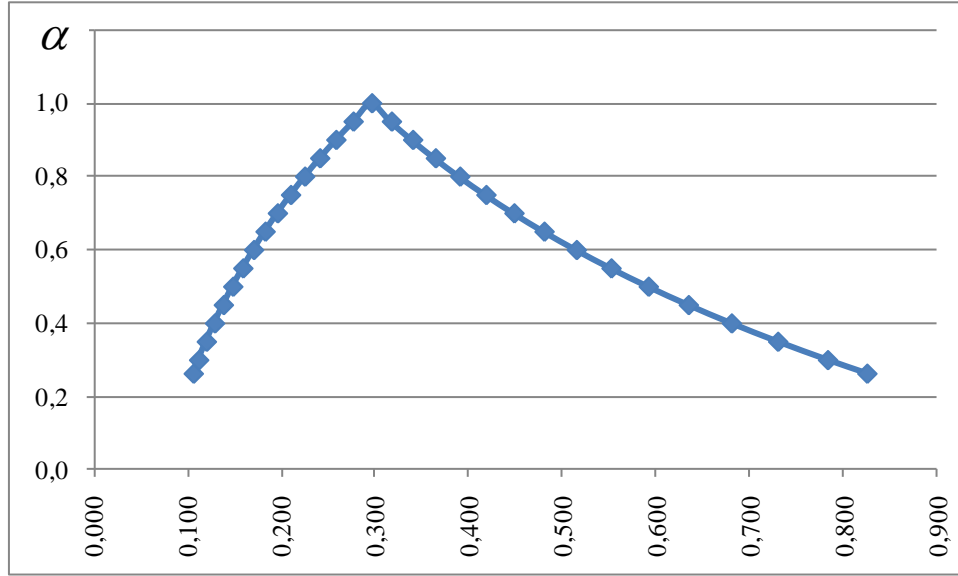
Şekil 7.8’de görüldüğü gibi esnek imalat hücrenin kararlı durumda $O\ddot{U}M$ teorik en geniş aralık olan $\alpha=0,263$ aralığında 0,45 iş parçası ile 4,737 iş parçası arasında olmaktadır. Bununla beraber $\alpha=1$ için elde edilen 1,481 iş parçası değeri klasik (crisp) stokastik PA sonucunu vermektedir. Buna göre esnek imalat hücrenin birim zamanda ürettiği ürün miktarı denge veya kararlı durumunda bulanıklığın veya kesin olmamanın en fazla olduğu durumda 0,45 ile 4,737 iş parçası arasında iken, klasik stokastik analiz sonucu 1,481 iş parçasıdır.

- *M1 makinesinin kararlı durumda ortalama kullanımı*; M1 makinesinin ortalama kullanımı M1’in bir parçayı işleme olasılığıyla belirlenmektedir. Bu da p_2 konumunun işaretli olduğu m_1 işaretlemesine karşılık gelmektedir. Bu yüzden M1’in beklenen kullanımı π_1 ’dir. Buna göre, M1 makinesinin kararlı durumda ortalama kullanımı OKO olmak üzere Çizelge 7.3’deki değerler kullanılarak;

$$OKO_{M1} = \pi_1$$

$$=[0,106; 0,826]$$

olarak elde edilir. Şekil 7.9’da M1 makinesinin kararlı durumda ortalama kullanım oranının α – kesimiyle değişimi görülmektedir.



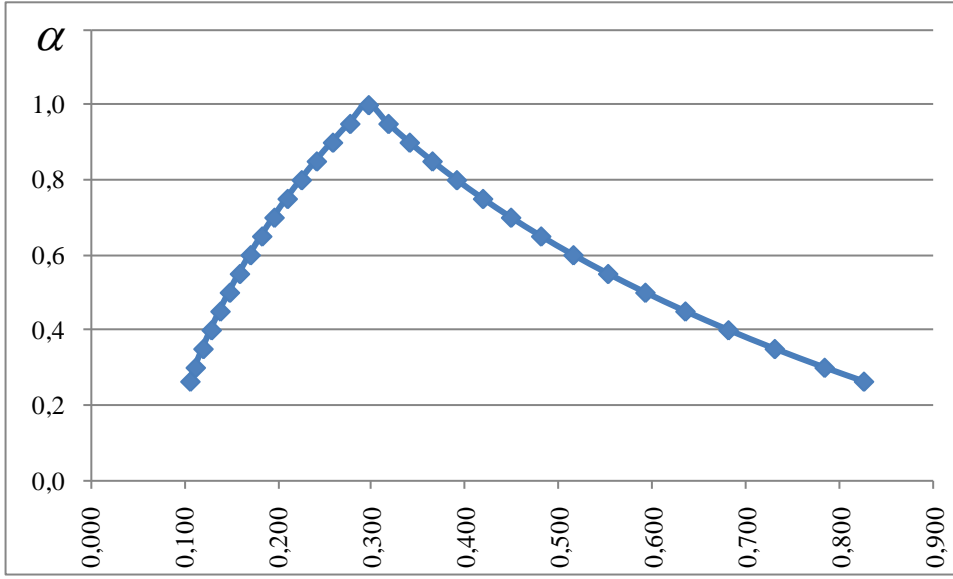
Şekil 7.9: M1 makinesinin kararlı durumda ortalama kullanım oranı ($k=1$).

Şekil 7.9'da görüldüğü gibi M1 makinesinin kararlı durumda *OKO* teorik en geniş aralık olan $\alpha=0,263$ aralığında % 10,6 ile % 82,6 arasında olmaktadır. Bununla beraber $\alpha=1$ için elde edilen % 29,6'lık kullanım oranı değeri klasik (crisp) stokastik PA sonucunu vermektedir. Buna göre bu esnek imalat hücresinde M1 makinesinin kullanımı sistemin denge veya kararlı durumunda bulanıklığın veya kesin olmamanın en fazla olduğu durumda % 10,6 ile % 82,6 arasında değişebiliyor iken, klasik stokastik analiz sonucu bu oran % 29,6 olarak elde edilmektedir.

- *M1 makinesinin kararlı durumda ortalama bozulma ve tamir oranı*; M1 makinesinin bozulması ve tamiri t_4 ve t_5 ateşlemelerinin birlikte olurlu olduğu m_3 işaretlemesine veya π_3 olasılığına denk gelmektedir. Buna göre, M1'in kararlı durumda beklenen ortalama bozulma ve tamir oranı *BTO* olmak üzere Çizelge 7.3'deki değerler kullanılarak;

$$\begin{aligned}
 BTO_{M1} &= \pi_3 \\
 &= [0,106; 0,826]
 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Şekil 7.10'da M1 makinesinin kararlı durumda ortalama bozulma ve tamir oranının α - kesimiyle değişimi görülmektedir.



Şekil 7.10: M1 makinesinin kararlı durumda ortalama bozulma ve tamir oranı ($k=1$).

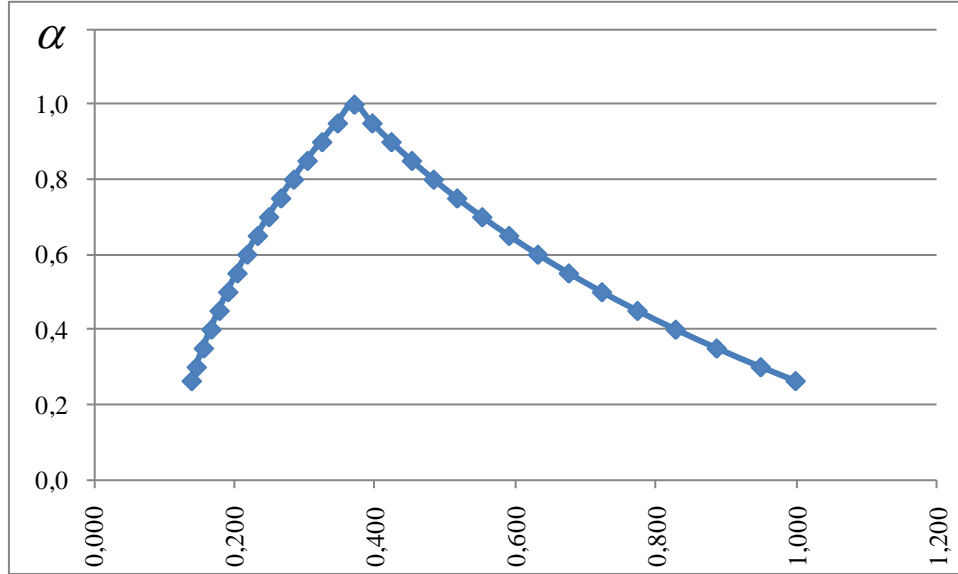
Şekil 7.10'da görüldüğü gibi M1 makinesinin kararlı durumda *BTO* teorik en geniş aralık olan $\alpha=0,263$ aralığında % 10,6 ile % 82,6 arasında olmaktadır. Bununla beraber $\alpha=1$ için elde edilen % 29,6'lık kullanım oranı değeri klasik (crisp) stokastik PA sonucunu vermektedir. Buna göre bu esnek imalat hücresinde M1 makinesinin bozulma ve tamir oranı sistemin denge veya kararlı durumunda bulanıklığın veya kesin olmamanın en fazla olduğu durumda % 10,6 ile % 82,6 arasında değişebiliyorken, klasik stokastik analiz sonucu bu oran % 29,6 olduğu görülmektedir.

- *Kararlı durumda ortalama ara stok miktarı*; M1 makinesi M2 makinesinden daha hızlı olduğundan iki makine arasında ve M2 makinesinde işlenmek üzere bekleyen ara parça stoğu oluşacaktır. Sistemin PA modeli incelendiğinde, Şekil 7.2'de de görüldüğü gibi bu t_2 ateşlemesinin ateşlenmesi ve p_3 konumunun işaretli olmasıyla ifade edilmektedir. Buna göre p_3 konumunun işaretli olduğu işaretleme π_2 olduğundan, ortalama ara stok miktarı *OASM* ile ifade edilmek üzere, Çizelge 7.3'deki değerler kullanılarak;

$$\begin{aligned}
 OASM &= k \times \pi_2 \\
 &= 1 \times [0,138; 1,000] \\
 &= [0,138; 1,000] \text{ iş parçası}
 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradaki k sistemdeki iş parçası miktarıdır ve Şekil 7.3'de de görüldüğü gibi p_3 konumu en fazla sadece 1 jeton içerdiğinden 1 değeri alınmaktadır.

Şekil 7.11’de kararlı durumda sistemdeki ortalama ara stok miktarının α – kesimiyle değişimi görülmektedir.



Şekil 7.11: Kararlı durumda sistemdeki ortalama ara stok miktarı ($k=1$).

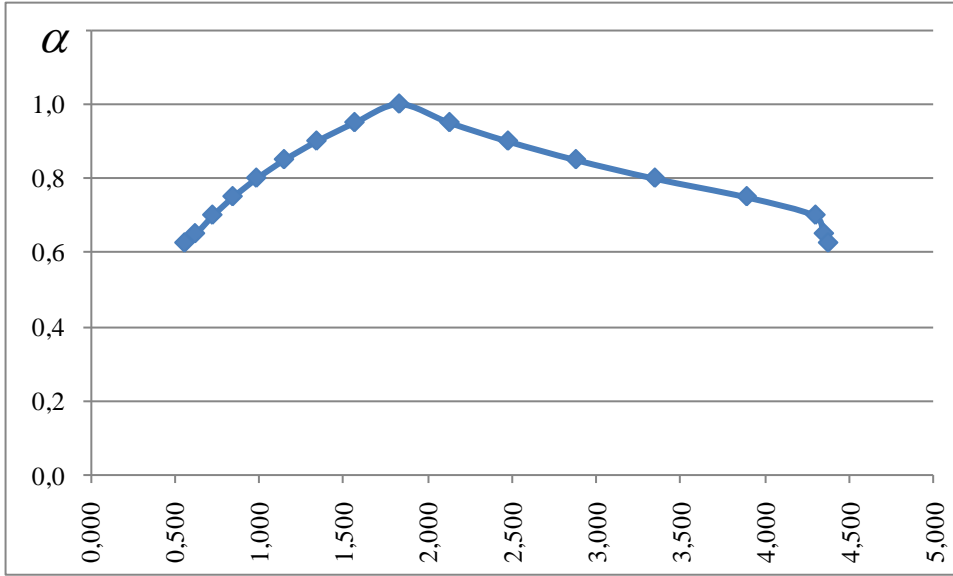
Şekil 7.11’de görüldüğü gibi esnek imalat hücresinde kararlı durumda M1 ve M2 makineleri arasında bulunan ve M2 makinesinde işlemeye hazır olan *OASM* teorik en geniş aralık olan $\alpha=0,263$ aralığında 0,138 iş parçası ile 1 iş parçası arasında olmaktadır. Bununla beraber $\alpha=1$ için elde edilen 0,37 iş parçası değeri klasik (crisp) stokastik PA sonucunu vermektedir. Buna göre esnek imalat hücresinin denge veya kararlı durumunda bulanıklığın veya kesin olmamanın en fazla olduğu durumda 0,138 ile 1 iş parçası arasında iken, klasik stokastik analiz sonucu *OASM* değeri 0,37 iş parçası olarak elde edilmektedir.

$k=2$ için sistemin performans ölçüleri ve sistemin analizi;

- *Esnek imalat hücresinin kararlı durumda ortalama üretim miktarı*; Sistemde tek bir çeşit ürün üretilmektedir ve bir ürünün tamamlanması t_3 geçişiyle modellenmektedir. Bu geçişin olurlu olduğu işaretlemelere bakıldığında (Şekil 7.6), bunların m_2 , m_4 , m_5 ve m_6 işaretlemeleri olduğu görülmektedir. Böylece, sistemin ortalama üretim miktarı t_3 geçişinin olurlu olma olasılığı ile t_3 geçişinin ateşleme hızının çarpımıdır. Buna göre, esnek imalat hücresinin kararlı durumda ortalama üretim miktarı *OÜM* olmak üzere Çizelge 7.4’deki değerler kullanılarak;

$$\begin{aligned}
O\ddot{U}M &= (\pi_2 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6) \lambda_3 \\
&= ([0,014; 0,118] + [0,059; 0,504] + [0,007; 0,055] + [0,075; 0,620])[3,625; 4,375] \\
&= [0,562; 4,375] \text{ iş parçası/zaman birimi}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Şekil 7.12’de Esnek imalat hücresinin kararlı durumda ortalama üretim miktarının α – kesimiyle değişimi görülmektedir.



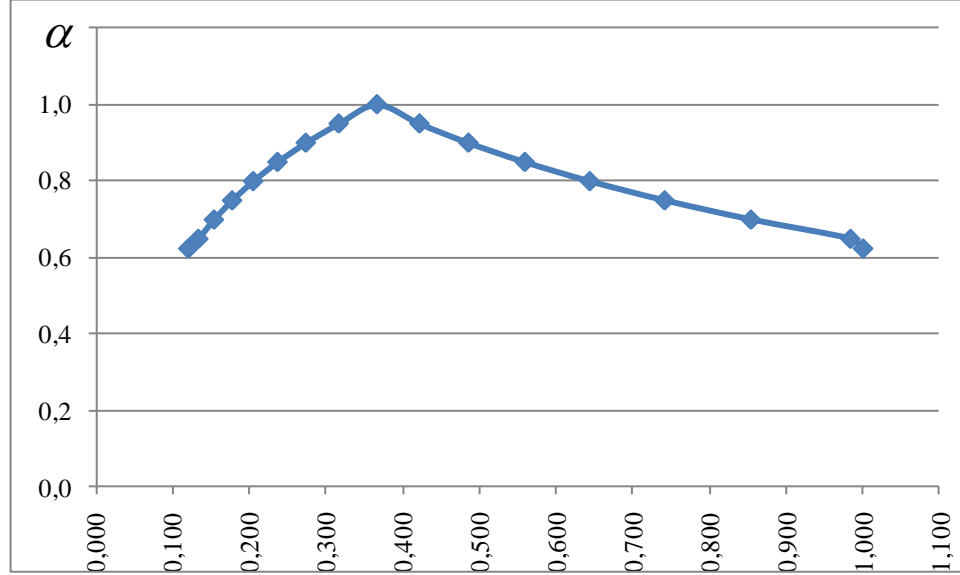
Şekil 7.12: Esnek imalat hücresinin kararlı durumda ortalama üretim miktarı ($k=2$).

Şekil 7.12’de görüldüğü gibi esnek imalat hücresinin kararlı durumda $O\ddot{U}M$ teorik en geniş aralık olan $\alpha=0,625$ aralığında 0,562 iş parçası ile 4,375 iş parçası arasında olmaktadır. Bununla beraber $\alpha=1$ için elde edilen 1,834 iş parçası değeri klasik (crisp) stokastik PA sonucunu vermektedir. Buna göre esnek imalat hücresinin birim zamanda ürettiği ürün miktarı denge veya kararlı durumunda bulanıklığın veya kesin olmamanın en fazla olduğu durumda 0,562 ile 4,375 iş parçası arasında değişiyor iken, klasik stokastik analiz sonucu 1,834 iş parçasıdır.

- *M1 makinesinin kararlı durumda ortalama kullanımı*; M1 makinesinin ortalama kullanımı M1’in bir parçayı işleme olasılığıyla belirlenmektedir. Bu da p_2 konumunun işaretli olduğu m_1 ve m_4 işaretlemesine veya π_1 ve π_4 olasılıklarına karşılık gelmektedir. Bu yüzden M1’in beklenen kullanımı $\pi_1 + \pi_4$ ’dir. Buna göre, M1 makinesinin kararlı durumda ortalama kullanımı OKO olmak üzere Çizelge 7.4’deki değerler kullanılarak;

$$\begin{aligned}
OKO_{M1} &= \pi_1 + \pi_4 \\
&= [0,062; 0,551] + [0,059; 0,504] \\
&= [0,121; 1,000]
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Şekil 7.13’de M1 makinesinin kararlı durumda ortalama kullanım oranının α – kesimiyle değişimi görülmektedir.



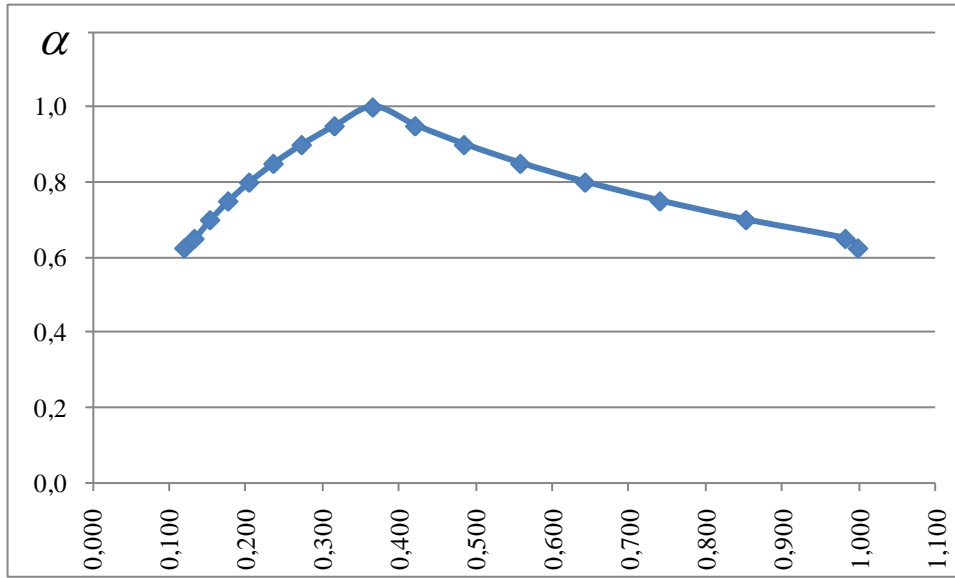
Şekil 7.13: M1 makinesinin kararlı durumda ortalama kullanım oranı ($k=2$).

Şekil 7.13’de görüldüğü gibi M1 makinesinin kararlı durumda *OKO* teorik en geniş aralık olan $\alpha=0,625$ aralığında % 12,1 ile % 100 arasında olmaktadır. Bununla beraber $\alpha=1$ için elde edilen % 36,7’lik kullanım oranı değeri klasik (crisp) stokastik PA sonucunu vermektedir. Buna göre bu esnek imalat hücresinde M1 makinesinin kullanımını sistemin denge veya kararlı durumunda bulanıklığın veya kesin olmamanın en fazla olduğu durumda % 12,1 ile % 100 arasında değişebiliyorken, klasik stokastik analiz sonucu bu oran % 36,7 olarak elde edilmektedir.

- *M1 makinesinin kararlı durumda ortalama bozulma ve tamir oranı*; M1 makinesinin bozulması ve tamiri t_4 ve t_5 ateşlemelerinin birlikte olurlu olduğu m_3 ve m_5 işaretlemesine veya π_3 ve π_5 denk gelmektedir. Buna göre, M1’in kararlı durumda beklenen ortalama bozulma ve tamir oranı *BTO* olmak üzere Çizelge 7.4’deki değerler kullanılarak;

$$\begin{aligned}
BTO_{M1} &= \pi_3 + \pi_5 \\
&= [0,114; 1,000] + [0,007; 0,055] \\
&= [0,121; 1,000]
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Şekil 7.14’de M1 makinesinin kararlı durumda ortalama bozulma ve tamir oranının α – kesimiyle değişimi görülmektedir.



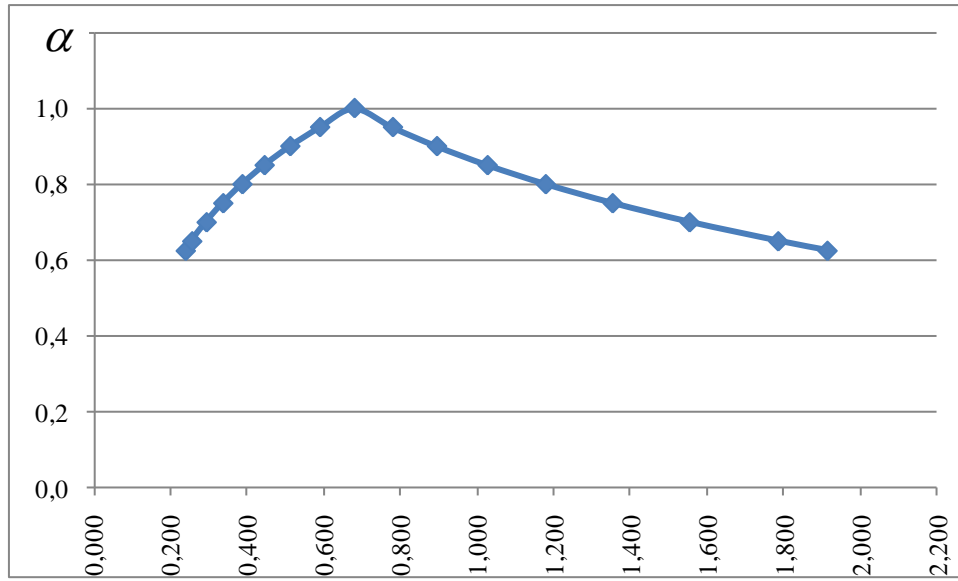
Şekil 7.14: M1 makinesinin kararlı durumda ortalama bozulma ve tamir oranı ($k=2$).

Şekil 7.14’de görüldüğü gibi M1 makinesinin kararlı durumda BTO teorik en geniş aralık olan $\alpha=0,625$ aralığında % 12,1 ile % 100 arasında olmaktadır. Bununla beraber $\alpha=1$ için elde edilen % 36,7’lik kullanım oranı değeri klasik (crisp) stokastik PA sonucunu vermektedir. Buna göre bu esnek imalat hücresinde M1 makinesinin bozulma ve tamir oranı sistemin denge veya kararlı durumunda bulanıklığın veya kesin olmamanın en fazla olduğu durumda % 12,1 ile % 100 arasında değişebiliyorken, klasik stokastik analiz sonucu bu oran % 36,7 olarak elde edilmektedir.

- *Kararlı durumda ortalama ara stok miktarı*; M1 makinesi M2 makinesinden daha hızlı olduğundan iki makine arasında ve M2 makinesinde işlenmek üzere bekleyen ara parça stoğu oluşacaktır. Sistemin PA modeli incelendiğinde Şekil 7.5’de de görüldüğü gibi bu t_2 ateşlemesinin ateşlenmesi ve p_3 konumunun işaretli olmasıyla ifade edilmektedir. Buna göre p_3 konumunun işaretli olduğu işaretlemeler m_2, m_4, m_5 ve m_6 olduğundan, ortalama ara stok miktarı $OASM$ ile ifade edilmek üzere, Çizelge 7.4’deki değerler kullanılarak;

$$\begin{aligned}
OASM &= (k=1) \times (\pi_2 + \pi_4 + \pi_5) + (k=2) \times \pi_6 \\
&= 1 \times ([0,014; 0,118] + [0,059; 0,504] + [0,007; 0,055]) + 2 \times [0,075; 0,620] \\
&= [0,237; 1,917] \text{ iş parçası}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradaki k sistemdeki iş parçası miktarıdır ve Şekil 7.6’da görüldüğü gibi p_3 konumu 1 ve 2 jeton içerebilmektedir ve bu sebeple 1 jeton ve 2 jeton durumları gözönüne alınmaktadır. Şekil 7.15’de kararlı durumda sistemdeki ortalama ara stok miktarının α – kesimiyle değişimi görülmektedir.



Şekil 7.15: Kararlı durumda sistemdeki ortalama ara stok miktarı ($k=2$).

Şekil 7.15’de görüldüğü gibi esnek imalat hücresinde kararlı durumda M1 ve M2 makineleri arasında bulunan ve M2 makinesinde işlemeye hazır olan $OASM$ teorik en geniş aralık olan $\alpha=0,625$ aralığında 0,237 iş parçası ile 1,917 iş parçası arasında olmaktadır. Bununla beraber $\alpha=1$ için elde edilen 0,679 iş parçası değeri klasik (crisp) stokastik PA sonucunu vermektedir. Buna göre esnek imalat hücresinin denge veya kararlı durumunda bulanıklığın veya kesin olmamanın en fazla olduğu durumda 0,237 ile 1,917 iş parçası arasında iken, klasik stokastik analiz sonucu $OASM$ 0,679 iş parçası olarak elde edilmektedir.

$k=1$ ve $k=2$ durumları için bulanık parametrelili stokastik PA yöntemi ve klasik stokastik PA yöntemiyle hesaplanan performans ölçüleri Çizelge 7.5’de görülmektedir.

Çizelge 7.5: Örnek esnek imalat sisteminin hesaplanan performans ölçüleri.

Performans Ölçütü	<i>k</i> =1 durumu		<i>k</i> =2 durumu	
	Önerilen Yöntem ($\alpha=0,263$)	Klasik SPA ($\alpha=1$)	Önerilen Yöntem ($\alpha=0,625$)	Klasik SPA ($\alpha=1$)
<i>OÜM</i> (iş parçası/zaman br.)	[0,450; 4,737]	1,481	[0,562; 4,375]	1,834
<i>OKO_{M1}</i> (%)	[0,106; 0,826]	0,296	[0,121; 1,000]	0,367
<i>BTO_{M1}</i> (%)	[0,106; 0,826]	0,296	[0,121; 1,000]	0,367
<i>OASM</i> (iş parçası/zaman br.)	[0,138; 1,000]	0,380	[0,237; 1,917]	0,679

Bu çalışmada ortaya konan bulanık parametrelili stokastik Petri ağları yöntemi daha önce de belirtildiği gibi, bulanık sayılar kullanarak sistemin stokastik analizine imkan vermektedir. Klasik stokastik Petri ağlarından farklı olarak elde edilen denge/kararlı durum olasılıkları da bulanık sayılar şeklindedir. Bu yöntemde kullanılan bulanık sayılar ve bunun sonucunda elde edilen sonuçlar, bulanık küme teorisinde yer alan α -kesim gösterimiyle ifade edilmektedir. Bu yöntemde bulanık belirsizliğin en fazla olduğu değer aralığı elde edilebilmekte iken, bunun yanında $\alpha=1$ değeri için elde edilen değerler de klasik stokastik analiz sonucunu vermektedir. Bu sebeple bu yöntem klasik stokastik PA analizini de içermektedir.

k= 1 durumu için elde edilen sonuçlar incelendiğinde Çizelge 7.5’de görüldüğü gibi modellenen esnek imalat hücresinin denge/kararlı durumda birim zamandaki beklenen ortalama üretim miktarı (*OÜM*) 0,450 iş parçası ile 4,737 iş parçası arasında değişmektedir. Klasik PA sonucuna bakıldığında denge/kararlı durumda birim zamanda beklenen ortalama üretim miktarının 1,481 iş parçası olduğu görülmektedir. Bu da sistemin üretim miktarının geniş bir aralıkta artıp azalabileceğini ve sistemin üretim hızının değişken olduğunu göstermektedir.

M1 makinesinin denge/kararlı durumda beklenen ortalama kullanım oranı (*OKO_{M1}*) ya da parça işlediği zaman oranı incelendiğinde, klasik PA analiz sonucuna göre yaklaşık % 30 iken, bulanık parametrelili stokastik PA analizine göre % 10,6 ile % 82,6 gibi bir aralıkta değişebileceği görülmektedir. Bu da M1 makinesinin veriminin en az % 10,6 olabileceğini bununla beraber daha da arttırılabileceğini göstermektedir.

Aynı şekilde M1 makinesinin denge/kararlı durumda beklenen ortalama bozulma ve tamir oranı (*BTO_{M1}*) da klasik PA analiz sonucuna göre yaklaşık % 30 iken, bulanık parametrelili stokastik PA analizine göre % 10,6 ile % 82,6 gibi geniş bir aralıktadır.

M1 makinesinin ortalama kullanım oranı ile birlikte değerlendirildiğinde tutarlı olduğu görülmektedir.

Denge/kararlı durumda M1 ve M2 makinesi arasında M2 makinesinde işlenmeye hazır bekleyen ara stok miktarının beklenen ortalama değeri (*OASM*) klasik stokastik PA analizine göre 0,380 iş parçası iken önerilen yöntemde bulanık belirsizliğin en yüksek olduğu durumda 0,138 iş parçası ile 1 iş parçası arasında değişebilmektedir. Sistemde tek parça olduğundan M2 makinesinde işlenmek için bekleyen en fazla 1 iş parçası olabileceğinden bunun kabul edilebilir bir durum olduğu düşünülebilir.

$k=2$ durumu için Çizelge 7.5'de görülen sonuçlar incelendiğinde modellenen esnek imalat hücresinin denge/kararlı durumda birim zamandaki beklenen ortalama üretim miktarı (*OÜM*) 0,562 iş parçası ile 4,375 iş parçası arasında değişmektedir. Klasik PA sonucuna bakıldığında denge/kararlı durumda birim zamanda beklenen ortalama üretim miktarının ise 1,834 iş parçası olduğu görülmektedir. Bu da $k=1$ durumunda da olduğu sistemin üretim miktarının geniş bir aralıkta artıp azalabileceğini ve sistemin üretim hızının değişken olduğunu göstermektedir.

M1 makinesinin denge/kararlı durumda beklenen ortalama kullanım oranı (*OKO_{M1}*) ya da parça işlediği zaman oranı incelendiğinde, klasik PA analiz sonucuna göre yaklaşık % 37 iken, bulanık parametrelili stokastik PA analizine göre % 12,1 ile % 100 gibi bir aralıkta değişebileceği görülmektedir. M1 makinesinin veriminin beklenen en az değeri % 12,1 olabilirken diğer yanda tam kapasiteye çıkabileceği görülmektedir.

$k=1$ durumunda olduğu gibi M1 makinesinin denge/kararlı durumda beklenen ortalama bozulma ve tamir oranı ortalama kullanım oranıyla aynı olduğu görülmektedir. (*BTO_{M1}*) klasik PA analiz sonucuna göre yaklaşık % 37 iken, bulanık parametrelili stokastik PA analizine göre % 12,1 ile % 100 gibi geniş bir aralıktadır. Beklenen en küçük değer olan %12,1 oranının gene de yüksek olduğu görülmektedir.

Denge/kararlı durumda M2 makinesinde işlenmeye hazır bekleyen ara stok miktarının beklenen ortalama değeri (*OASM*) klasik stokastik PA analizine göre 0,679 iş parçası iken önerilen yöntemde bulanık belirsizliğin en yüksek olduğu durumda 0,235 iş parçası ile 1,917 iş parçası arasında değişebilmektedir. Sistemde aynı anda 2 iş parçası olduğundan M2 makinesinde işlenmek için bekleyen en fazla 2 iş parçası olabilmesi durumu kabul edilebilir bir durumdur.

$k=1$ ve $k=2$ durumları için analiz sonuçlarını karşılaştırılacak olursak, denge/kararlı durumda $O\ddot{U}M$ klasik stokastik PA analiz sonucuna göre 1,481 iş parçasından 1,834 iş parçasına çıktığı görülmektedir. Sistemdeki iş parçası sayısının 2 katına çıkmasıyla beraber sistemin $O\ddot{U}M$ aynı oranda artmamaktadır. Bulanık parametrelili stokastik PA yöntemiyle elde edilen sonuçlara göre, bulanık belirsizliğin en yüksek olduğu durumda $k=1$ için $O\ddot{U}M$ 'nin beklenen en yüksek değeri 4,737 iş parçası iken, $k=2$ durumunda beklenen en yüksek değer 4,375 iş parçasına düşmektedir. Bu da sistemdeki iş parçası sayısının artmasıyla beraber sistemin üretim üretim miktarı veriminin düştüğünü göstermektedir. Esnek imalat hücresinin veriminin göreceli olarak $k=1$ durumunda $k=2$ durumuna göre daha yüksek olduğu görülmektedir.

M1 makinesi için OKO $k=2$ durumunda klasik stokastik PA analiz sonucuna göre yaklaşık % 30'dan ($k=1$ durumunda) yaklaşık % 37'ye çıkmaktadır. Bulanık parametrelili stokastik PA sonucuna göre ise % 10,6 - % 82,6 aralığından % 12,5 - % 100 aralığına çıkmaktadır. Bu sonuçlar göstermektedir ki sistemde 2 iş parçası olduğunda M1 makinesi parça işlemede yavaş kalmaktadır ve sistemin performansını düşürmektedir.

M1 makinesi için BTO $k=2$ durumunda hem klasik stokastik hem de bulanık parametrelili stokastik PA analiz sonuçlarına göre $k=2$ durumunda $k=1$ durumuna göre göreceli olarak daha iyi çıkmaktadır. Bunun nedeni M1 makinesinin parça işlerken bozulma ihtimali olduğundan ve tek seferde sadece 1 iş parçası işleyebildiğinden aynı oranda artması zaten beklenmedik bir durumdur. $k=2$ durumunda BTO oranının artmasının nedeni M1 makinesinin OKO ve dolayısıyla parça işleme süresinin artmasından dolayı bozulma olasılığının artmasıdır.

Denge/kararlı durumda M1 ve M2 makinesi arasında M2 makinesinde işlenmeye hazır bekleyen ara stok miktarının beklenen ortalama değeri ($OASM$), $k=2$ durumunda klasik stokastik PA analizine göre $k=1$ durumundaki 0,380 iş parçası değerinden 0,679 iş parçası değerine yükselmektedir. Bulanık parametrelili stokastik PA yöntemi sonuçlarına göre $k=2$ durumunda $k=1$ durumu aralığı olan 0,138 – 1 iş parçası aralığının 0,237 – 1,917 iş parçası aralığına genişlemektedir. Her iki yöntemde de sistemdeki iş parçası sayısı iki katına çıktığında $OASM$ da yaklaşık iki katına çıkmaktadır ve bu da kabul edilebilir bir sonuçtur. Buna göre M2 makinesinin $k=1$ ve $k=2$ durumlarında veriminde önemli bir değişiklik yoktur.

Bütün bu sonuçlar birlikte değerlendirildiğinde, ele alınan esnek imalat hücrelerinin performans ve verimliliğinde belirleyici olan M1 makinesidir. $k=1$ durumunda M1 makinesinin sistem üzerindeki etkisi daha az iken $k=2$ durumunda sistemin performansı üzerindeki etkisi daha belirgin olarak ortaya çıkmaktadır. Buna göre sistemin performansının artırılması için üzerinde durulması gereken ve iyileştirilmesi/geliştirilmesi gereken nokta M1 makinesinin verimliliğidir. M2 makinesinin sistemin performansı üzerindeki etkisi $k=1$ ve $k=2$ durumlarında aynı ölçüdedir ve M1 makinesinin performansında iyileştirme yapılmadan sadece M2 makinesinde iyileştirme yapmak çok da anlamlı olmayacaktır. Aslında M1 makinesinin parça işleme hızının M2 makinesinden yüksek olmasından dolayı ilk başta M2 makinesinin sistem performansı üzerindeki etkisinin daha belirleyici olması beklenirken bu analiz sonucu göstermektedir ki esas belirleyici olan M1 makinesidir ve şu anda M2 makinesinin performansı beklentileri karşılayabilmektedir.

8. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

İnsanlar ilk olarak kendi ihtiyaçlarını karşılamak için birşeyler üretmeye başlamış, zaman ilerledikçe de ulaşılan toplumsal seviye ve diğer bir çok faktörün de etkisiyle bu önemli faaliyet bireysel olmaktan çıkmış ve toplu halde yapılması gereken bir faaliyet şeklini almıştır. 18. yüzyılda gerçekleşen sanayi devrimiyle beraber insanların sadece yaşam şekilleri değil aynı zamanda çalışma şekilleri ve üretim anlayışı da değişmiştir. Artık üretim kavramı çok daha geniş bir anlam kazanmış ve bireysel olarak gerçekleştirilen bir faaliyet olmaktan çıkarak, birden fazla insan ve diğer bir çok faktörle birlikte gerçekleştirilen organize faaliyetler bütünü halini almıştır. Bir çeşit üretim şekli olan imalatın amacı da ihtiyaç sahipleri için performans olarak tatmin edici, güvenilir, ekonomik olarak ulaşılabilir, kaliteli ürünler üreterek toplumu zenginleştirmek ve aynı zamanda da istihdam sağlayarak ülke ekonomisine ve toplumsal refaha katkıda bulunmaktır.

İmalat sistemleri incelendiğinde, emek yoğun imalat sistemlerinden başlayarak, kitlesel imalat sistemleri, otomasyon yoğun kitlesel imalat sistemleri, atölye tipi imalat, grup/hücreli imalat hücreleri, tam zamanında imalat sistemleri, esnek imalat sistemleri ve bilgisayarla bütünleşik imalat sistemlerine uzanan bir evrim ve gelişim gösterdiği görülmektedir.

Son yıllardaki teknolojik ve ekonomik gelişmeler işletmelerin sürekli değişen yeni ürün talepleri ve ürün çeşitlerine esnek ve hızlı şekilde tepki vermelerini zorunlu kılmaktadır. Bu da imalatta ve imalat sistemlerinde esneklik kavramını ortaya çıkarmaktadır. Esneklik, üretim sisteminin piyasadaki değişikliklere hızlı ve etkili şekilde uyum sağlayabilmesiyle ilgili bir kavramdır. Günümüzün dinamik, belirsiz ve rekabetçi iş dünyası, uzun dönem başarısı için esnekliği bir gereksinim haline getirmektedir. Günümüzde ileri ve çağdaş olarak kabul gören imalat sistemlerine bakıldığında esneklik ve hücreli imalat yaklaşımlarının baskın olduğu görülmektedir.

Esnek imalat sistemleri otomasyon yoğun sistemlerdir ve personel müdahalesini en aza indirgemeyi amaçlamaktadırlar. Bu sebeple de genellikle büyük miktarda yatırım gerektiren ve uygulaması pahalı sistemlerdir. Bu amaçla böyle bir sistemin tasarlanması, işletilmesi ve geliştirilmesinde sistematik bir modelleme ve analiz yaklaşımına ihtiyaç duyulmaktadır.

Her ne kadar son yıllarda yazılım teknolojilerindeki gelişmeler sayesinde simülasyon teknikleri imalat sistem tasarımı ve geliştirilmesinde yoğun bir şekilde kullanılmakla beraber, artan sistem karmaşıklığından kaynaklanan sorunlarla baş edebilmek için bu yöndeki çalışmaların simülasyon tekniklerinden modelleme metodolojisine doğru kaydığı daha önceki bölümlerde vurgulanmıştı. Bu amaçla bu çalışmada esnek imalat hücrelerinin modellenmesi ve analizi konusu detaylı bir şekilde ele alınmıştır.

Petri ağları, Carl Adam Petri (1962)'nin otomasyon ve haberleşme uygulamaları için ağ şeklinde matematiksel bir araç ortaya koyduğu doktora çalışmasına dayanarak geliştirdiği ve kendi adıyla anılan, ayrık olay sistemlerinin modellenmesi, analizi ve tasarımında kullanılan grafiksel ve matematiksel bir metodolojidir. Çok geniş mühendislik alanlarında uygulamalara imkan veren bu metodoloji, 1980'lerden itibaren imalat sistemlerinin modellenmesi ve analizinde de kullanılmaya başlanmıştır. Petri ağları grafiksel doğası, hem statik hem de dinamik sistem karakteristikleri ve sistem belirsizliğini ifade etme ve incelemeye imkan veren yapısı ve de matematiksel analiz tekniklerinin var olması sebebiyle esnek imalat sistemlerinin modellenmesi ve analizinde günümüzde uygun bir araç olarak yoğunlukla kullanılan ve kabul gören bir yaklaşımdır.

Esnek imalat sistemleri gibi kompleks sistemlerin modellenmesi ve analizinde belirsizliğin iki boyutu söz konusudur; rassallık ve bulanıklık. Rassallık, parametrelerin davranışlarının olasılık dağılımları ile ifade edilmesini içermekte ve olasılıksal ya da stokastik değişkenliği modellemektedir. Bulanıklık ise dilsel yapıdan ya da bilginin tam olmamasından kaynaklanan kesin olmamayı modellemektedir. Sistem modellemede belirsizliği tanımlamak için kullanılan baskın kavram olasılık teorisini temel alan stokastik modeller olmakla beraber, bu olasılıksal modeller belirsizliğin tüm boyutlarını tanımlamakta yetersiz kalmaktadır ve sadece rassallığı ifade edebilmektedir. Özellikle modellemede kullanılacak olan veriler gözlem ve ölçümlerden elde edildiğinden ve de ölçmenin sınırlı kesinliğinden dolayı, verilerin kesin olmaması istatistiksel bir yapıda değildir ve olasılık teorisiyle de ifade

edilememektedir (Viertl ve Hareter, 2004). Esnek imalat sistemlerinin modellenmesi ve analizinde sıklıkla kullanılan ve klasik Petri ağlarının bir uzantısı olan stokastik Petri ağları için de aynı durum söz konusudur. Bunun giderilebilmesi için bulanık kümeler teorisinin kullanılması önemli bir alternatif olarak ortaya çıkmaktadır.

Daha önceki bölümlerde de detaylı olarak bahsedilen ve burada belirtilen sebeplerden ötürü bu tez çalışmasında esnek imalat sistemleri gibi zaman kritik, dinamik ve kompleks sistemlerin modellenmesi ve analizi için bulanık parametrelili stokastik Petri ağları yöntemi olarak adlandırılan (Tüysüz ve Kahraman, 2010) yeni bir modelleme ve analiz yaklaşımı geliştirilmiş ve sayısal bir örnek üzerinde nasıl uygulandığı gösterilmiştir. Her ne kadar stokastik PA ve bulanık PA, kesikli-olay dinamik sistemlerin modellenmesi ve analizinde ayrı ayrı kullanılmakta olsalar da önerilen bu yöntemin en önemli özelliği ve katkısı bu iki teorisinin ilk defa olarak bütünleşik olarak birlikte kullanılmasıdır.

Bu yöntemde bulanık parametreler ve bulanık matematik kullanılarak sistemin stokastik analizi gerçekleştirilmektedir. İki aşamadan oluşan bulanık parametrelili stokastik PA yönteminin ilk aşamasında, sistemin denge/kararlı durum olasılıkları parametrik olarak geçiş ateşleme hızları cinsinden elde edilmektedir. Bu aşamada herhangi bir sayısal sonuç hesaplanmamaktadır ve sistemin stokastik yapısını içermektedir. İkinci aşamada ise, elde edilen parametrik denge/kararlı durum olasılıklarında yer alan geçiş ateşleme hızları üçgensel bulanık sayılar cinsinden tanımlanmakta ve bulanık matematik kullanılarak bulanık olasılık değerleri hesaplanmaktadır. Son olarak da bulanık denge/kararlı durum olasılık değerleri ve diğer bulanık sistem parametreleri kullanılarak sistemin önemli performans göstergeleri hesaplanmakta ve sistemin analizi gerçekleştirilmektedir.

Ortaya konan bulanık parametrelili stokastik Petri ağları yöntemi iki makine, iki robot ve konveyörlerden oluşan esnek bir imalat hücresinin modellenmesi ve analizi için sistemde tek bir iş parçasının olduğu ($k=1$) ve iki iş parçasının olduğu ($k=2$) durumları için ayrı ayrı uygulanmış ve sonuçlar klasik stokastik PA yönteminin sonuçları ile karşılaştırmalı olarak değerlendirilmiştir. Bulanık parametrelili stokastik PA yöntemi ile denge/kararlı durumda edilen olasılık ve diğer performans ölçü değerlerinin teorik en geniş aralığı veren α değeri kullanılarak olası en iyi ve en kötü değerleri elde edilirken, α -kesim=1 için klasik stokastik PA değerleri elde edilmiştir. Buradan elde edilen sonuçlar da göstermektedir ki geliştirilen bulanık parametrelili

stokastik PA yöntemi hem stokastik belirsizlik hem de bulanık belirsizliği birlikte bütünleşik olarak dikkate aldığından modellenen sistemin daha detaylı bir şekilde analiz edilebilmesine ve daha iyi anlaşılmasına imkan vermekte ve kompleks sistemlerin modellenme ve analiz gücünü arttırmaktadır.

Bununla beraber bulanık parametrelili stokastik PA yönteminde klasik stokastik PA yönteminde elde edilen kararlı durum olasılıklarının parametrik ifadeleri kullanılmaktadır. Klasik stokastik PA yöntemiyle modelleme ve analizde sistem kompleksliği arttıkça sistemin içerdiği durum sayısı artmakta ve sonuç olarak da ulaşılabilirlik grafiği genişlemektedir. Durum uzayı patlaması olarak adlandırılan bu durum nedeniyle stokastik PA ile modelleme ve analizde çoğunlukla yazılım desteğine ihtiyaç vardır. Oysaki, bu yazılımlar sayısal değerler olarak sayısal sonuç vermekte ve kararlı durum olasılıklarının parametrik ifadesini hesaplayamamaktadır. Aynı şekilde bulanık aritmetik kullanarak da bulanık parametrik ifade veren herhangi bir yazılım bulunmamaktadır. Geliştirilen bu yöntem uygulanmasında bir zorluk teşkil edecek bu durum ancak genel modelleme yaklaşımlarından biri olan sistemin daha küçük anlamlı parçalara bölünmesi ve her parçanın kendi içinde modellendikten sonra birleştirilmesi ve parçalı olarak analiz edilmesiyle aşılabılır. Bir diğer önemli nokta da imalat sistemlerinin performans değerlendirmesi ve analizinde sıklıkla kullanılan simülasyon tekniğinin bulanık ortamda yapılmasının zorluğudur. Bulanık simülasyona imkan veren herhangi bir geliştirilmiş yazılım vb. araç bulunmamaktadır. Bu sadece bu çalışmada sunulan bulanık parametrelili stokastik PA yöntemi için değil tüm bulanık mantık uygulamaları için de bir eksiklik oluşturmaktadır.

Gelecekte bu çalışmadan esinlenerek başka çalışmalar yapmak isteyen araştırmacılar bu çalışmada ortaya konan yeni yöntemi esnek imalat sistemlerinden başka diğer zaman kritik, dinamik ve kompleks nitelikteki sistemlerin modellenmesi ve analizinde kullanabilirler. Bu çalışmada geliştirilen yöntem tek bir çeşit ürünün üretildiği esnek bir imalat hücresinin modellenmesi ve analizine uygulanmıştır. Birden fazla ürün çeşidinin modellenenebildiği ve klasik Petri ağlarının bir uzantısı olan renkli Petri ağlarının stokastik uzantıları incelenerek önerilen yöntemin uygulanması önemli bir çalışma konusu olarak düşünülebilir. Ayrıca, her ne kadar geliştirilen bu yöntem bulanık doğası gereği esneklik sağlasa da bulanık

parametrelere dayanan daha detaylı bir duyarlılık analizi üzerinde de çalışmak mümkün olabilir.

KAYNAKLAR

- Abdallah, I. B., Elmaraghy, H.A., and Elmekawy, T.,** 2002. Deadlock-free scheduling in flexible manufacturing systems using Petri nets, *International Journal of Production Research*, Vol. **40**, no. 12, 2733-2756.
- Acar, N.,** 1995. *Tam Zamanında Üretim*. MPM Yayınları, No. 542, Ankara.
- Ahmad, F., Huang, H., and Wang, X.L.,** 2010. Petri net modeling and deadlock analysis of parallel manufacturing processes with shared-resources, *The Journal of Systems and Software*, **83**, 675-688.
- Alla, H., Ladet, P., Martinez, J., and Silva, M.,** 1985. *Modeling and Validation of Complex Systems by Colored Petri Nets: An Application to a Flexible Manufacturing System*, Advances in Petri Nets 1984, pp. 15-31, Eds. G. Rozenberg, H. Genrich and G. Roucairal, Springer-Verlag.
- Al-Jaar, R.Y., and Desrochers, A.A.,** 1990. Performance evaluation of automated manufacturing systems using generalized stochastic Petri nets, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. **6**, no. 6, 621-638.
- Allam, M., and Alla, H.,** 1998. Modeling and simulation of an electronic component manufacturing system using hybrid Petri nets. *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*, Vol. **11**, no. 3, 374-383.
- Ammar, H.H., and Yu, L.,** 1995. Fuzzy marking Petri nets: concepts and definition, *Proceedings of the 1995 IEEE International Symposium on Intelligent Control*, Monterey, CA, USA, Aug 27-29.
- Askin, R.G., and Standridge, C.S.,** 1993. *Modeling and Analysis of Manufacturing Systems*. Wiley, USA.
- Askin, R.G., Selim, H.M., and Vakharia A. J.,** 1997. A methodology for designing flexible cellular manufacturing systems. *IEEE Transactions*, **29**, 599-610.
- Balbo, G., Bruell, S.C., and Ghanta, S.,** 1988. Combining queueing networks and generalized stochastic Petri nets for the solution of complex models of system behavior. *IEEE Transactions on Computers*, Vol. **37**, no. 10, 1251-1268.
- Barad, M., and Sipper, D.,** 1988. Flexibility in manufacturing systems: definitions and Petri net modeling. *Int. J. Prod. Res.*, Vol. **26**, no. 2, 237-248.
- Bertolini, M., Bevilacqua, M., and Mason, G.,** 2006. Reliability design of industrial plants using Petri nets. *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, Vol. **12**, no. 4, 397-411.

- Blume, H., Sydow, T.V., Becker, D., and Noll, T.G.,** 2007. Application of deterministic and stochastic Petri-Nets for performance modeling of NoC architectures. *Journal of Systems Architecture*, **53**, 466-476.
- Bobbio, A.,** 1990. *System Modelling with Petri Nets*, Systems Reliability Assessment, pp. 103-143, Eds. Colombo, A.G. and Saiz de Bustamante, A., Kluwer Academic P.G.
- Bouyer, P., Haddad, S., and Reynier, P. A.,** 2008. Timed Petri nets and timed automata: on the discriminating power of zeno sequences. *Information and Computation*, **206**, 73–107.
- Bowden, F. D. J.,** 2000. A brief survey and synthesis of the roles of time in Petri nets. *Mathematical and Computer Modeling*, **31**, 55-68.
- Buckley, J.J.,** 2005. *Simulating Fuzzy Systems*. Springer Berlin Heidelberg New York, Vol. 171, Germany.
- Bucholz, P.,** 2004. Adaptive decomposition and approximation for the analysis of stochastic Petri nets, *Performance Evaluation*, **56**, 23-52.
- Bulanch, S., Brauchle, A., Pfeleiderer, H.-J., and Kucerovsky, Z.,** 2002. Design and implementation of discrete event control systems: a Petri net based hardware approach. *Discrete Event Dynamic Systems Theory and Application*, Vol. **12**, no.3, 287-309.
- Burbidge, J.L.,** 1992. Change to group technology: process organization is obsolete, *International Journal of Production Research*, Vol. **30**, no. 5, 1209-1219.
- Cardoso, J., and Camargo, H.,** 2000. *Fuzziness in Petri Nets*. Physica-Verlag, Germany.
- Cassez, F., and Roux, O.H.,** 2006. Structural translation from time Petri nets to timed automata. *The Journal of Systems and Software*, **79**, 1456–1468.
- Chen, J., and Chen, F.F.,** 2003. Performance modelling and evaluation of dynamic tool allocation in flexible manufacturing systems using coloured Petri nets: An object-oriented approach. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. **21**, no. 2, 98-109.
- Chen, H., Amodeo, L., Chu, F., and Labadi, K.,** 2005. Modeling and performance evaluation of supply chains using batch deterministic and stochastic Petri nets. *IEEE Transactions on Automation and Engineering*, Vol. **2**, no.2, 132-144.
- Chen, S. J. and Hwang, C. L.,** 1992. *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making*, Springer-Verlag, Germany.
- Cheng, Y.H., and Yang, L.I.,** 2009. A fuzzy Petri nets approach for railway traffic control in case of abnormality: evidence from Taiwan railways system, *Expert Systems with Applications*, **36**, 8040-8048.
- Cheung, K.S., Cheung, T.Y., and Chow, K.O.,** 2006. A Petri-net-based synthesis methodology for use-case-driven system design. *The Journal of Systems and Software*, **79**, 772-790.
- Choi, H., Kulkarni, V.G., and Trivedi, K.S.,** 1993. *Transient Analysis of Deterministic and Stochastic Petri Nets by the Method of*

Supplementary Variables, Application and Theory of Petri Nets 1993, Lecture Notes in Computer Science 691, pp. 166-185, Eds. M. Ajmone Marsan, Springer, Berlin.

- Ciardao, G. and Li, G.**, 1999. Approximate transient analysis for subclasses of deterministic and stochastic Petri nets. *Performance Evaluation*, **35**, 109-129.
- Coffman, E. G., Elphick, M. J., and Shoshani, A.**, 1971. System deadlocks. *Computer Surveys*, **3**, 67-78.
- Colom, J. M.**, 2003. The resource allocation problem in flexible manufacturing systems. *Proceedings of the 24th International Conference on Applications and Theory of Petri Nets (ICATPN 2003)*, Eindhoven, The Netherlands, June 23-27.
- Desrochers, A. A., and Al-Jaar, R. Y.**, 1995. *Applications of Petri Nets in Manufacturing Systems, Modeling, Control, and Performance Analysis*. IEEE Press, New York.
- Diaz, M., and Senac, P.**, 1994. Time stream Petri nets-a model for timed multimedia information. *Lecture Notes in Computer Science*, **815**, 219-238.
- DiCesare, F., Harhalakis, G., Proth, J.M., Silva, M., and Vernadat, F.B.**, 1993. *Practice of Petri Nets in Manufacturing*. Chapman & Hall, Great Britain.
- DiCesare F., and Jeng, M. D.**, 1993. *Synthesis for Manufacturing Systems Integration*, Practice of Petri Nets in Manufacturing Systems, pp. 103-146, Eds. DiCesare, F., Harhalakis, G., Proth, J. M., Silva, M., and Vernadat, F. B., Chapman & Hall, Great Britain.
- Dinçmen, M.**, 2005. Esnek üretim teknolojileri. <http://www.angelfire.com/co2/muratdinc/calismalar/fms.htm>, alındığı tarih 08.11.2005.
- Ding, Z., Bunke, H., Schneider, M., and Kandel, A.**, 2005. Fuzzy timed Petri net definitions, properties, and applications. *Mathematical and Computer Modelling*, **41**, 345-360.
- Ding, Z., Bunke, H., Kipersztok, O., Schneider, M., and Kandel, A.**, 2006. Fuzzy timed Petri nets-analysis and implementation. *Mathematical and Computer Modelling*, **43**, 385-400.
- Djassemi, M.**, 2005. A simulation analysis of factors influencing the flexibility of cellular manufacturing. *International Journal of Production Research*, Vol. **43**, no.11, 2101-2111.
- Durmuşoğlu, M.B.**, 1984. Üretim Sistemleri Tasarımında Grup Teknolojisi Yaklaşımı, *1. Ulusal Makine Tasarım ve İmalat Kongresi*, Ankara.
- Durmuşoğlu, M. B., Kulak, O., ve Balcı, H. H.**, 2003. Türkiye’de hücreli üretim uygulamalarını analizi ve değerlendirilmesi. *Endüstri Mühendisliği*, Sayı 2, 25-31.
- Florin, G., and Natkin, S.**, 1982. *Evaluation Based Upon Stochastic Petri Nets of the Maximum Throughput of a Full Duplex Protocol*, pp. 102-125,

Eds. C. Girault and W. Reisd, Informatik fachberichte, Springer-Verlag, New York.

- Fronk, A., and Kehden, B.,** 2009. State space analysis of Petri nets with relation-algebraic methods. *Journal of Symbolic Computation*, **44**, 15-47.
- German, R.,** 1995. New results for the analysis of deterministic and stochastic Petri nets. *Proceedings of the International Computer Performance and Dependability Symposium - IPDS95*, IEEE Computer Society Press, 0-8186-7059-2/95, pp. 114-123.
- Gharbi, N., and Ioualalen, M.,** 2002. Performance Analysis of Retrieval Queueing Systems Using Generalized Stochastic Petri nets. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, Vol. **65**, No. 6,86-100.
- Giua, A., Pilloni, M.T., and Seatzu, C.,** 2005. Modelling and simulation of a bottling plant using hybrid Petri nets. *International Journal of Production Research*, Vol. **43**, no.7, 1375-1395.
- Gomes, L.,** 2005. Structuring and composability issues in Petri nets modeling, *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, Vol.1, no.2, 112-123.
- Gülenç, İ. F.,** 2005. Genetik algoritma ve benzerlik katsayısı yaklaşımlarının uygunluk değer ölçüsü ile karşılaştırılması: cam kalıp örneği. *Endüstri Mühendisliği Dergisi*, Cilt: **16**, Sayı:2, 12-18.
- Haas, P.J.,** 2002. *Stochastic Petri Nets: Modelling, Stability, Simulation*. Springer-Verlag, USA.
- Haas, P.J.,** 2004. Stochastic Petri nets for modeling and simulation. *Proceedings of the 2004 Winter Simulation Conference*, Washington DC, USA, December 5-8.
- Hsu, T., Korbaa, O., Dupas, R., and Goncalves, G.,** 2008. Cyclic scheduling for FMS: modelling and evolutionary solving approach. *European Journal of Operational Research*, Vol. **191**, no. 2, 464-484.
- Hu, L., Wu, R., and Shao, S.,** 2002. Analysis of dynamical systems whose inputs are fuzzy stochastic processes, *Fuzzy Sets and Systems*, **129**, 111-118.
- Huang, B., Sun, Y., and Sun, Y. M.,** 2008. Scheduling of flexible manufacturing systems based on Petri nets and hybrid heuristic search. *International Journal of Production Research*, Vol. **46**, no. 16, 4553–4565.
- Huang, H.J., Jiao, L., and Cheung, T.Y.,** 2005. Property-preserving subnet reductions for designing manufacturing systems with shared resources. *Theoretical Computer Science*, **332**, 461-485.
- Huang, Y.M., Chen, J.N., Huang, T.C., Jeng, Y.L., and Kuo, Y.H.,** 2008. Standardized course generation process using dynamic fuzzy Petri nets. *Expert Systems with Applications*, **34**, 72–86.
- Jeng, M. D.,** 1997a. A petri net synthesis theory for modeling flexible manufacturing systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics*, Vol.27, no. 2 April, 169-183.
- Jeng, M. D.,** 1997b. Petri nets for modeling automated manufacturing systems with error recovery. *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, Vol. **13**, no. 5, 752-760.

- Jeng, M.D., Xie, X., and Peng, M.Y.,** 2002. Process nets with resources for manufacturing modeling and their analysis. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. **18**, no. 6, 875-889.
- Johnsonbaugh, R., and Murata, T.,** 1981. Additional methods for reduction and expansion of marked graphs. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. **28**, no.10, 1009-1014.
- Kahraman, C.,** 1995. İleri imalat teknolojilerinin ekonomik analizi ve esneklik faktörünün sayısallaştırılmasına bulanık kümeler yaklaşımı, *Doktora Tezi*, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Kahraman, C. ve Tolga, E.,** 1998. Mühendislik ekonomisinde bulanık küme uygulamaları ve bulanık eşdeğer düzgün yıllık nakit akışı analizi, *Galatasaray Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, **1 (1)**, 66-76.
- Kannan, V.R., and Ghosh, S.,** 1996. A virtual cellular manufacturing approach to batch production. *Decision Science*, **27**, 519-539.
- Kaufmann, A. and Gupta, M. M.,** 1985. *Introduction to Fuzzy Arithmetic*, Van Nostrand, New York.
- Kim, Y.W., Suzuki, T., and Narikiyo, T.,** 2007. FMS scheduling based on timed Petri net model and reactive graph search. *Applied Mathematical Modelling*, **31**, 955-970.
- Kiritsis, D., and Porchet, M.,** 1996. A generic Petri net model for dynamic process planning and sequence optimization. *Advances in Engineering Software*, **25**, 61-71.
- Korbaa, O., Benasser, A., and Yim, P.,** 2003. Two FMS scheduling methods based on Petri nets: a global and a local approach. *International Journal of Production Research*, Vol. **41**, no. 7, 1349-1371.
- Koriem, S.M. and Patnaik, L.M.,** 1997. A generalized high-level Petri net model for performance analysis. *J. Systems Software*, **36**, 247-265.
- Koriem, S.M., Dabbous, T.E., and El-Kilani, W.S.,** 2004. A new Petri net modeling technique for the performance analysis of discrete event dynamic systems. *The Journal of Systems and Software*, **72**, 335-348.
- Korpeoglu, B.B., and Yazici, A.,** 2007. A fuzzy Petri net model for intelligent databases. *Data & Knowledge Engineering*, **62**, 219-247.
- Lee, K. H., Favrel, J., and Baptiste, P.,** 1987. Generalized Petri net reduction method. *IEEE Transactions Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. **SMC-17**, no. 2, 297-303.
- Lee, J.K., and Korbaa, O.,** 2006. Scheduling analysis of FMS: an unfolding timed Petri nets approach. *Mathematics and Computers in Simulation*, **70**, 419-432.
- Lee, J. S., Zhou, M.C., and Hsu, P.L.,** 2008. Multiparadigm modeling of hybrid dynamic systems using a Petri net framework. *IEEE Transactions on Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, Vol. **38**, no. 2, 493-498.

- Lefebvre, D.**, 2001. Estimation of the firing frequencies in discrete and continuous Petri nets models. *International Journal of Systems Science*, Vol. **32**, no. 11, 1321-1332.
- Lefebvre, D., Delherm, C., Leclercq, E., and Druaux, F.**, 2007. Some contributions with Petri nets for the modelling, analysis and control of HDS. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **1**, 451–465.
- Leondes, C.T.**, 2001. *Computer-Aided Design, Engineering, & Manufacturing: Systems Techniques & Applications*, Vol. V, The Design of Manufacturing Systems. CRC Press LLC, Boca Raton.
- Lindermann, C., and Thümmler, A.**, 1999. Transient analysis of deterministic and stochastic Petri nets with concurrent deterministic transitions. *Performance Evaluation*, **36-37**, 35-54.
- Liu, H., Jiang, Z., and Fung, R.Y.K.**, 2005. Modeling of large-scale re-entrant manufacturing systems by extended object-oriented Petri nets. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, **27**, 190-204.
- Manzini, R., Gamberi, M., Regattieri, A., and Persona, A.**, 2004. Framework for designing a flexible cellular assembly system. *International Journal of Production Research*, Vol. **42**, no.17, 3505-3528.
- Marsan, M.A, Bobbio, G., and Conte, G.**, 1984. A class of generalized stochastic Petri nets for the performance evaluation of multiprocessor systems. *ACM Trans. Comp. Syst.*, **2**, 93-122.
- Marsan, M.A, Balbo, G., Conte, G., Donatelli, S., and Franceschinis, G.**, 1995. *Modelling with Generalized Stochastic Petri Nets*. Wiley, Chichester.
- Merlin, P. M.**, 1974. A study of the recoverability of computing systems. *PhD thesis*, University of California, Irvine, CA.
- Marsan, M.A., and Chiola, G.**, 1987. On Petri nets with deterministic and exponentially distributed firing times, in *Advances in Petri Nets 1987, Lecture Notes in Computer Science*, vol. **266**, 132-145, Eds. G. Rozenberg, Springer, Berlin.
- Maione, G., and DiCesare, F.**, 2005. Hybrid Petri net and digraph approach for deadlock prevention in automated manufacturing systems. *International Journal of Production Research*, Vol. **43**, no. 24, 5131–5159.
- Matias, J. C. H., Vizan, A., Hidalgo, A., and Rios, J.**, 2006. Evaluation of techniques for manufacturing process analysis. *Journal of Intelligent Manufacturing*, **17**, 571-583.
- Molloy, M.K.**, 1982. Performance analysis using stochastic Petri nets. *IEEE Transactions on Computers*, Vol. **C-31**, no. 9, 913-917.
- Motameni, H., Movaghar, A., Siasifar, M., Montazeri, H., and Rezaei, A.**, 2008. Analytic evaluation on Petri net by using Markov chain theory to achieve optimized models. *World Applied Sciences Journal*, Vol. **3**, no. 3, 504-513.

- Möller, B., Graf, W., Beer, M., and Sickert, J.-U.**, 2002. Fuzzy randomness: towards a new modelling of uncertainty, *The Fifth World Congress Computational Mechanics*, Vienna, Austria, July 7-12.
- Murata, T.**, 1989. Petri nets: properties, analysis and applications. *Proceedings of IEEE*, Vol. **77**, no.4, 541-580.
- Murata, T.**, 1996. Temporal uncertainty and fuzzy-timing high-level Petri nets, in *Application and Theory of Petri Nets, Lecture Notes in Computer Science*, Vol. **1091**, 11-28, Springer-Verlag, New York.
- Murata, T., Suzuki, T., and Shatz, S.M.**, 1999. Fuzzy-timing high-level Petri nets (FTHNs) for time-critical systems, in *Fuzziness in Petri Nets, Studies in Fuzziness and Soft Computing*, Vol. **22**, 88-114.
- Narahari, Y., and Viswanadham, N.**, 1985. A Petri net approach to the modeling and analysis of FMSs. *Annals of Operations Research*, **30**, 449-472.
- Odrey, N.G., and Mejia, G.**, 2005. An augmented Petri net approach for error recovery in manufacturing systems control. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, **21**, 346-354.
- Pedrycz, W., and Camargo, H.**, 2003. Fuzzy timed Petri nets. *Fuzzy Sets and Systems*, **140**, 301-330.
- Peterson, J.L.**, 1981. *Petri Net Theory and the Modeling of Systems*. Prentice, Inc., Englewood Cliffs, NJ.
- Petri, C.A.**, 1966. Kommunikation mit Automaten. Bonn: Institut für Instrumentelle Mathematik, Schriften des IIM Nr. 3, 1962, English translation: Communication with Automata, New York: Griffiss Air Force Base, Tech. Rep., **RADC-TR-65-377**, Vol. **1**, Suppl. 1.
- Petri, C.A.**, 1987. Forgotten topics of net theory, in *Procs. of the 1987 Advanced Course in Petri Nets – Part 2, Lecture Notes in Computer Science*, Vol. **255**, pp. 500-514, Springer-Verlag, New York,
- Petri, C.A.**, 1996. Nets, time and space. *Theoretical Computer Science*, **153**, 3-48.
- Praveen, V., and Lodaya, K.**, 2008. Analyzing reachability for some Petri nets with fast growing markings. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, **223**, 215–237.
- Proth, J. M., and Xie, X.**, 1996. *Petri Nets: A Tool for Design and Management of Manufacturing Systems*. John Wiley & Sons, Chichester.
- Qiao, G., McLean, C., and Riddick, F.**, 2002. Simulation system modeling for mass customization manufacturing. *Proceedings of the 2002 Winter Simulation Conference*, San Diego, California, USA, December 8-11.
- Ramamoorthy, C. V., and Ho, G. S.**, 1980. Performance evaluation of asynchronous concurrent systems using Petri nets. *IEEE Transactions on Software Engineering*, Vol. **SE-6**, no. 5, 440-449.
- Ramchandani, C.**, 1974. Analysis of asynchronous concurrent systems by timed Petri nets, *PhD thesis*, MIT, Cambridge, MA.

- Rangel, I.R., Trevino, A.R., and Mellado, E.L.**, 2005. Building reduced Petri net models of discrete manufacturing systems. *Mathematical and Computer Modelling*, **41**, 923-937.
- Reinhardt, K.**, 2008. Reachability in Petri nets with inhibitor arcs. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, **223**, 239–264.
- Ross, T. J.**, 1995. *Fuzzy Logic with Engineering Applications*, McGraw-Hill, USA.
- Roux, O. H., and Cassez, F.**, 2006. Structural translation from time Petri nets to timed automata. *The Journal of Systems and Software* , **79**, 1456–1468.
- Ruiz, V.V., Escrig, D.F., and Gomez, F.C.**, 1991. Simulation of timed Petri nets by ordinary Petri nets and applications to decidability of the timed reachability problem and other related problems. *4th International Workshop on Petri Nets and Performance Models*, Melbourne, Australia, pp. 154-163.
- Selim, H.M., Askin, R.G., and Vakharia, A.J.**, 1998. Cell formation in group technology: review, evaluation and directions for future research. *Computers and Industrial Engineering*, Vol. **34**, no. 1, 3-20.
- Shiizuka, H., and Suzuki, M.**, 1994. Modeling of AGV networks in flexible manufacturing systems. *Computers and Industrial Engineering*, Vol. **27**, no. 1-4, 81-86.
- Sifakis, J.**, 1977. Use of Petri nets for performance evaluation, in *Measuring, Modelling and Evaluating Computer Systems*, pp. 75-93, Eds. H. Beilner and E. Gelenbe, North Holland.
- Silva, M., and Valette, R.**, 1989. Petri nets and flexible manufacturing, in *Advances in Petri nets 1989, Lecture Notes in Computer Science*, **424**, pp. 374-417, Springer Verlag, Germany.
- Singh, N., and Rajamani, D.**, 1996. *Cellular Manufacturing Systems: Design, Planning and Control*. Chapman & Hall, London.
- Srinivasan, P., and Gracanin, D.**, 1993. Approximate reasoning with fuzzy Petri nets. *The second IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pp. 396-401, San Francisco, California, USA.
- Şen, Z.**, 2001. *Bulanık Mantık ve Modelleme İlkeleri*. Bilge Kültür Sanat, İstanbul.
- Tanyaş, M., ve Baskak, M.**, 2006. *Üretim Planlama ve Kontrol*. İrfan Yayıncılık, No. 111, İstanbul.
- Teng, S.H.G., and Zhang, J.**, 1993. A Petri net-based decomposition approach in modeling of manufacturing systems. *Int. J. Prod. Res.*, Vol. **31**, no. 6, 1423-1439.
- Tüysüz, F., and Kahraman, C.**, 2010. Modeling a flexible manufacturing cell using stochastic Petri nets with fuzzy parameters. *Expert Systems with Applications*, **37**, 3910-3920.
- Uzam, M.**, 1998. Petri net based supervisory control of discrete event systems and their ladder logic diagram implementations. *PhD Thesis*, The University of Salford, U.K.

- Uzam, M.**, 2002a. An optimal deadlock prevention policy for flexible manufacturing systems using Petri net models with resources and the theory of regions. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, **19**, 192–208.
- Uzam, M.**, 2002b. The use of the Petri net reduction approach for an optimal deadlock prevention policy for flexible manufacturing systems. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, **23**, 204-219.
- Uzam, M., and Zhou, M.C.**, 2006. An improved iterative synthesis method for liveness enforcing supervisors of flexible manufacturing systems. *International Journal of Production Research*, Vol. **44**, no. 10, 1987–2030.
- Valavanis, K.P.**, 1990. On the hierarchical modeling analysis and simulation of flexible manufacturing systems with extended Petri nets. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. **20**, no. 1, 94-110.
- Valette, R.**, 1987. Nets in production systems, in *Advances in Petri Nets 1986*, Vol. **255**, pp. 191-217, Eds. W. Brauer, W. Reisig, and G. Rozenbergs, Springer-Verlag, Germany.
- Valette, R., Courvoisier, M., and Mayeux, D.**, 1982. *Control of flexible production systems and Petri nets*. Informatik Fachberichte, Vol. **66**, Springer Verlag, pp. 264-267.
- Valette, R., Cardoso, J., and Dubois, D.**, 1989. Monitoring manufacturing systems by means of Petri nets with imprecise markings, *IEEE International Symposium on Intelligent Control*, Albany, NY, September 25-26.
- Vangheluwe, H., Kerckhoffs, E.J.H., and Vansteenkiste, G.**, 2001. Computer automated modeling of complex systems. *Proceedings of the 15th European Simulation Multiconference, ESM'2001*, Prague, Czech Republic, June 6-9.
- Venkateswaran, P.R., and Bhat, J.**, 2006. Fuzzy Petri net algorithm for flexible manufacturing systems, *ACSE Journal*, Vol. **6**, no. 1, 1-5.
- Viertl, R., and Hareter, D.**, 2004. Fuzzy information and stochastics, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, Vol. **1**, no. 1, 39-52.
- Villani, E., Pascal, J.C., Miyagi, P.E., and Valette, R.**, 2005. A Petri net-based object-oriented approach for the modelling of hybrid productive systems, *Nonlinear Analysis*, **62**, 1394-1418.
- Virtanen, H.E.**, 1995. A study in fuzzy Petri nets and the relationship to fuzzy logic programming, *Reports on Computer Science & Mathematics*, Ser. A., Åbo Akademi, No. 162.
- Wang, L.C., and Wu, S.Y.**, 1998. Modeling with colored timed object-oriented Petri nets for automated manufacturing systems, *Computers and Industrial Engineering*, Vol. **34**, no.2, 463-480.
- Wang, Z., Zhang, J., and Chan, F.T.S.**, 2005. A hybrid Petri nets model of networked manufacturing systems and its control system architecture, *Journal of Manufacturing Technology Management*, Vol. **16**, no. 1, 36-52.

- Wong, H. M., and Zhou, M.C.**, 1992. Automated generation of modified reachability trees for Petri nets, *1992 Regional Control Conference*, Brooklyn, NY, July 24-25.
- Wu, B.**, 1994. *Manufacturing Systems Design and Analysis* (2nd ed). Chapman & Hall, Great Britain.
- Wu, N., Zhou, M.C., and Li, Z. W.**, 2008. Resource-oriented Petri net for deadlock avoidance in flexible assembly systems, *IEEE Transactions on Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, Vol. **38**, no. 1, 56-69.
- Xing, K., Zhou, M., Liu, H., and Tian, F.**, 2009. Optimal Petri-net-based polynomial-complexity deadlock-avoidance policies for automated manufacturing systems, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, Vol. **39**, no. 1, 188-199
- Yan, H.S, Wang, N.S., Zang, J.G., and Cui, X.Y.**, 1998. Modeling, scheduling and simulation of flexible manufacturing systems using extended stochastic high-level evaluation Petri nets, *Robots and Computer-Integrated Manufacturing*, **14**, 121-140.
- Yang, Y.**, 1994. Strategic implications of manufacturing cell formation design, *Integrated Manufacturing Systems*, Vol. **5**, No.4/5, 957-6061.
- Yeung, D.S., Liu, J.N.K., Shiu, S.C.K., and Fung, G.S.K.**, 1996. Fuzzy coloured Petri nets in modeling flexible manufacturing systems. *Proceedings of Mexico-USA Collaboration in Intelligent Systems Technologies*, Cancun, Mexico, November 12-15.
- Zadeh, L.A.**, 1965. Fuzzy sets, *Information Control*, **8**, 338 –353.
- Zadeh, L.A.**, 1968. Probability measures of fuzzy events, *J. Math. Anal. Appl.*, **23**, 421-427.
- Zadeh, L. A.**, 1972. A fuzzy-set-theoretic interpretation of linguistic hedges, *Journal of Sybernetics*, **2** (3), 4-34.
- Zha, X. F., Li, L. L., and Zhang, W. J.**, 2002. A knowledge Petri net model for flexible manufacturing systems and its application for design and verification of FMS controllers, *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*, Vol. **15**, no. 3, 242-264.
- Zhang, H., and Gu, M.**, 2009. Modeling job shop scheduling with batches and setup times by timed Petri nets, *Mathematical and Computer Modelling*, **49**, 286–294.
- Zhou, M., McDermott, K., and Patel, P.A.**, 1993. Petri net synthesis and analysis of a flexible manufacturing system cell, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. **23**, no. 2, 523-531.
- Zhou, M., and DiCesare, F.**, 1991. Parallel and sequential mutual exclusions for Petri net modeling for manufacturing systems, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. **7**, no. 4, 515-527.
- Zhou, M., and DiCesare, F.**, 1993. *Petri Net Synthesis for Discrete Event Control of Manufacturing Systems*. Kluwer Academic, Norwell, MA.

- Zhou, M., DiCesare, F., and Guo, D.,** 1990. Modeling and performance analysis of a resource-sharing manufacturing system using stochastic Petri nets. *Proceedings of the 5th IEEE International Symposium on Intelligent Control*, Vol. 2, Issue 5-7, 1005-1010.
- Zhou, M.C., and DiCesare, F.,** 1992. A hybrid methodology for synthesis of Petri net models for manufacturing systems, *IEEE Trans. Robot. Automat.*, Vol. 8, no.3, 350-361.
- Zhou, M. C., and Jeng, M. D.,** 1998. Modeling, analysis, simulation, scheduling, and control of semiconductor manufacturing systems: a Petri net approach, *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*, Vol. 11, no. 3, 333-357.
- Zhou, M.C, and Venkatesh, K.,** 1999. *Modeling, Simulation and Control of Flexible Manufacturing Systems: A Petri Net Approach*. World Scientific, Singapore.
- Zhou, M.C, and Robbi, A.D.,** 1994. Applications of Petri net methodology to manufacturing systems, in *Computer Control Of Manufacturing Systems*, Eds. S. Joshi and G. Smith, Chapman and Hall, 1994, USA.
- Zhou, Y., Murata, T., DeFanti, T., and Zhang, H.,** 2000. Fuzzy-timing Petri net modeling and simulation of a networked virtual environment: NICE, *Trans. on Fundamentals in Electronics, Communications and Computers*, Vol. E83-A, no. 11, 2166-2176.
- Zimmermann, H. J.,** 1985. *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, Kluwer, Nijhoff Publishing, Boston.
- Zimmermann, H. J.,** 1987. *Fuzzy Set, Decision Making and Expert Systems*, Kluwer, Boston.
- Zimmerman, H.,-J.,** 1994. *Fuzzy Set Theory and Its Applications (2nd revised edition)*, Kluwer Academic Publishers, USA
- Zimmermann, A., and Hommel, G.,** 1999. Modelling and evaluation of manufacturing systems using dedicated Petri nets, *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, 15, 132-138.
- Zimmermann, A., Rodriguez, D., and Silva. M.,** 2001. A two phase optimization method for Petri nets models of manufacturing systems, *Journal of Intelligent Manufacturing*, 12, 409-420.
- Zuberek, W.M., and Kubiak, W.,** 1993. Timed Petri net models of flexible manufacturing cells. *Proceedings of the 36th Midwest Symposium on Volume*, Detroit, Michigan, USA, August 16-18.
- Zuberek, W.M., and Kubiak, W.,** 1994. Throughput analysis of manufacturing cells using timed Petri nets, *IEEE Int. Conf. on Systems, Man and Cybernetics*, San Antonio, TX, USA, October 2-5.
- Zuberek, W.M., and Kubiak, W.,** 1999. Timed Petri nets in modeling and analysis of simple schedules for manufacturing cells, *Computers and Mathematics with Applications*, 37, 191-206.

Zurawski R., and Zhou M.C., 1994. Petri nets and industrial applications: a tutorial, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. **41**, no. 6, 567-583.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad:	Fatih Tüysüz
Doğum Yeri ve Tarihi:	İstanbul, 27.01.1980
Lisans Üniversitesi:	İstanbul Teknik Üniversitesi, Endüstri Müh. Böl., 2002
Y. Lisans Üniversitesi:	İstanbul Teknik Üniversitesi, Endüstri Müh. Y.L., 2004

Yayın Listesi:

- **Tüysüz, F.**, and Kahraman, C., 2010. Modeling a flexible manufacturing cell using stochastic Petri nets with fuzzy parameters, *Expert Systems with Applications*, Vol. **37**, no. 5, 3910-3920.
- **Tüysüz, F.**, and Kahraman, C., 2006. Project risk evaluation using a fuzzy analytic hierarchy process: an application to information technology projects, *International Journal of Intelligent Systems*, Vol. **21**, no. 6, 559-584.
- Kahraman, C., and **Tüysüz, F.**, 2010. Manufacturing System Modeling Using Petri Nets, in *Production Engineering and Management under Fuzziness*, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Vol. **252**, 95-124, Eds. C. Kahraman and M. Yavuz, Springer Berlin, Germany.
- Kahraman, C., Çebi, S., and **Tüysüz, F.**, 2010. Fuzzy Location Selection Techniques, in *Production Engineering and Management under Fuzziness*, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Vol. **252**, 329-358, Eds. C. Kahraman and M. Yavuz, Springer Berlin, Germany.