

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**İKİNCİ MERTEBEDEN SİNGÜLER PERTÜRBE OLMUŞ
BAŞLANGIÇ-DEĞER PROBLEMİ İÇİN FARK METODU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Adem DUMAN

DANIŞMAN: Yrd. Doç. Dr. Musa ÇAKIR

VAN-2011

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**İKİNCİ MERTEBEDEN SİNGÜLER PERTÜRBE OLMUŞ
BAŞLANGIÇ-DEĞER PROBLEMİ İÇİN FARK METODU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Adem DUMAN

VAN-2011

KABUL ve ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Yrd. Doç. Dr. Musa ÇAKIR danışmanlığında, Adem DUMAN tarafından sunulan “İkinci Mertebeden Singüler Pertürbe Olmuş Başlangıç-Değer Problemi İçin Fark Metodu” isimli bu çalışma “Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği” ve “Fen Bilimleri Enstitüsü Yönergesi”nin ilgili hükümleri gereğince 18/07/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Yrd. Doç. Dr. Musa ÇAKIR

İmza:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Sebaheddin ŞEVGİN

İmza:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Fevzi ERDOĞAN

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .../.../..... tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

.....

Enstitü Müdürü

ÖZET

İKİNCİ MERTEBEDEN SİNGÜLER PERTÜRBE OLMUŞ BAŞLANGIÇ-DEĞER PROBLEMİ İÇİN FARK METODU

DUMAN, Adem

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Musa ÇAKIR

Temmuz 2011, 45 Sayfa

Bu çalışmada, birinci ve ikinci mertebeden türevli terimlerin katsayılarının pozitif küçük parametre olduğu başlangıç-değer problemleri incelenmiştir. İkinci mertebeden singüler pertürbe olmuş başlangıç değer problemlerinin nümerik çözümü için üstel katsayılı sonlu fark şemaları kurulmuştur. Fark şemasının pertürbasyon parametresinden bağımsız ayırık maksimum normda birinci mertebeden düzgün yakınsak olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca teoriyi destekleyen bazı nümerik örnekler verilmiştir.

Alınan teorik sonuçlar Matematica programlama dilinde bir örnek üzerinde denetlenmiştir.

Anahtar kelimeler: Singüler pertürbe özellikli problem, başlangıç-değer problemi, Üstel katsayılı fark şeması, Düzgün yakınsaklık

ABSTRACT

DIFFERENCE METHOD FOR SECOND ORDER SINGULARLY PERTURBED INITIAL-VALUE PROBLEM

DUMAN, Adem

Msc, Mathematics Science

Supervizor: Asst. Prof. Dr. Musa ÇAKIR

July 2011, 45 Pages

In this study, initial-value problem with small parameter by the first and second derivatives is considered. For numerical solution of singularly perturbed initial-value problem of the second order the exponential coefficient difference schemes have been constructed. It has been proved that the difference scheme is first-order uniform convergent in the discrete maximum norm, independently of the perturbation parameter. Furthermore, some numerical experiments supporting the theory are presented.

The theoretical results taking have been audited on a sample in Matematica programming language.

Key words: Singular perturbed problems, initial-value problem, the difference scheme of exponential coefficients, Uniform convergence

ÖNSÖZ

Diferansiyel denklemler için singüler pertürbe olmuş problemler; matematik, akışkanlar mekaniği, meteoroloji, difüzyon süreçleri, kontrol teorisi, kimyasal reaksiyon ve fizik gibi uygulamalı bilim dallarında çok sık kullanılmaktadır. 20.yy ortalarından itibaren konuyla ilgili ciddi çalışmalar yapılmış olup son yıllarda ilgili araştırmalar oldukça artmıştır.

Singüler pertürbe özellikli problemler, yüksek mertebeden türevli terimlerin katsayılarının pozitif küçük bir parametre olduğu problemlerdir. Singüler pertürbe olmuş bir problemin çözümü, tanım bölgesinin bazı kısımlarında düzenli ve yavaş, bazı kısımlarında ise çok ani değişim göstermesi nedeniyle düzensiz ve anidir. Yani çözüm, sınır katları da denilen ince geçiş katlarında parametreye bağlı olarak hızlı, bu geçiş katları dışında da regüler değişim gösterir. Bu da singüler pertürbe özellikli problemlerin geçiş katlarındaki durumunu da kapsayan daha genel çözüm için ciddi zorluklara sebebiyet vermektedir. Bu nedenle singüler pertürbe özellikli denklemin kesin çözümü yerine, uygun metotları kullanarak nümerik çözümünü elde etmek daha kolaydır.

Bu çalışmada, ikinci mertebeden singüler pertürbe olmuş başlangıç değer problemi için baz fonksiyonları yardımıyla üstel katsayılı fark şemaları oluşturulmuştur. Ardından asimptotik değerlendirmeler ve nümerik çözümün kesin çözüme yakınsaklığı incelenmiştir.

Bu çalışma tamamlanana değin, sabırla göstermiş oldukları ilgi ve öğretim arzusuyla yardımlarını esirgemeyen başta değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Musa Çakır olmak üzere, Prof. Dr. Cemil Tunç, Arş. Gör. Dr. Erkan Çimen, Yrd. Doç. Dr. Sebahattin ŞEVGİN, Arş. Gör. Gıyas Sakar ve varlığı iyilikle eş değer amcam Yusuf Duman'a teşekkürü ve saygıyı borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ	xi
SİMGELER DİZİNİ	xiii
1. GİRİŞ ve LİTERATÜR BİLDİRİŞLERİ	1
2. ÖN BİLGİLER	4
3. SÜREKLİ PROBLEM	8
4. FARK ŞEMASININ KURULMASI	15
5. DÜZGÜN HATA DEĞERLENDİRMESİ	26
6. NÜMERİK SONUÇLAR	34
6.1. Çözüm Algoritması	34
6.2. Örnek	35
6.3. Program	37
6.4. Çizelge ve Grafikler	38
7. TARTIŞMA ve SONUÇ	42
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ	45

ŞEKİLLER DİZİNİ

	sayfa
Şekil 4.1. $\varphi_j^{(i)}(t)$, $i = 1,2$ baz fonksiyonu.	16
Şekil 4.2. $\varphi_0(t)$ fonksiyonu.	23
Şekil 6.1. $\varepsilon = 2^{-3}$, $N = 64$ için kesin ve nümerik çözümün davranışı.	40
Şekil 6.2. $\varepsilon = 2^{-4}$, $N = 64$ için kesin ve nümerik çözümün davranışı.	40
Şekil 6.3. $\varepsilon = 2^{-5}$, $N = 64$ için kesin ve nümerik çözümün davranışı.	41
Şekil 6.4. $\varepsilon = 2^{-6}$, $N = 64$ için kesin ve nümerik çözümün davranışı.	41

ÇİZELGELER DİZİNİ

	sayfa
Çizelge 6.1. (6.1)-(6.2) probleminin çözümünden elde edilen w_τ şebekesi üzerinde ε' na göre maksimum hata ve P^N yakınsaklık oranları	36
Çizelge 6.2. Çizelge 6.2. $N = 2^6$, $\varepsilon = 2^{-3}$ için düğüm noktalarındaki fonksiyon değerleri	38
Çizelge 6.2. Çizelge 6.2. $N = 2^6$, $\varepsilon = 2^{-4}$ için düğüm noktalarındaki fonksiyon değerleri	38
Çizelge 6.2. Çizelge 6.2. $N = 2^6$, $\varepsilon = 2^{-5}$ için düğüm noktalarındaki fonksiyon değerleri	39
Çizelge 6.2. Çizelge 6.2. $N = 2^6$, $\varepsilon = 2^{-6}$ için düğüm noktalarındaki fonksiyon değerleri	39

SİMGELER DİZİNİ

t	:	Bağımsız değişken
l	:	Diferansiyel fark operatörü
L	:	Diferansiyel operatör
t_j	:	Düğüm noktaları
y_j	:	Fark probleminin çözümü (yaklaşık çözüm)
θ_j	:	Fark probleminin üstel katsayısı
u_0	:	İndirgenmiş problemin çözümü
R_j	:	Kalan terim
ε	:	Singüler pertürbasyon parametresi
u_j	:	Sürekli problemin çözümü (kesin çözüm)
τ	:	Şebeke adımı
$u^k(t)$:	$u(t)$ fonksiyonunun k . mertebeden türevi
$u_{t,j}$:	$u(t)$ fonksiyonunun t_j noktasındaki ileri fark türevi
$u_{\bar{t},j}$:	$u(t)$ fonksiyonunun t_j noktasındaki geri fark türevi
$u_{t,j}^0$:	$u(t)$ fonksiyonunun t_j noktasındaki merkezi fark türevi
$u_{\bar{t}t,j}$:	$u(t)$ fonksiyonunun t_j noktasındaki ikinci fark türevi
$\ \cdot\ _{C(w_\tau)}$:	w_τ şebekesindeki ayrık norm
\hat{z}	:	z fonksiyonunun t_{j+1} noktasındaki değeri $z(t_{j+1})$
\check{z}	:	z fonksiyonunun t_{j-1} noktasındaki değeri $z(t_{j-1})$

1. GİRİŞ ve LİTERATÜR BİLDİRİŞLERİ

Singüler pertürbe olmuş problemler, diferansiyel denklemde yüksek türevler içeren terimlerin katsayılarının, küçük pozitif parametre olduğu problemlerdir. Birçok doğa olayı çeşitli parametrelere göre ani değişkenlik gösterir. Bu tür problemler örneğin, akışkanlar mekaniği, akışkanlar dinamiği (Neyfeh, 1973), elastik kuantum mekaniği, kütlelerin hareketi, plastik, kimyasal reaktör teorisi, aerodinamik, elektron plazma dalgaları, elektrik akımı (Kadalbajoo ve Reddy, 1989), manyetik dinamik, arıtılmış gaz dinamik, oşinografi, meteoroloji, iletişim hatları, yayılma teorisi ve reaksiyon-difüzyon, kontrol teorisi (O'Malley, 1974) gibi uygulamalı bilim dallarının çeşitli alanlarında ortaya çıkmaktadır. Singüler pertürbe özellikli problemlere ilgi, yaklaşık olarak yirminci yüzyılın başlarında başlamıştır. Araştırmalar esasen asimptotik açılımlar üzerine yoğunlaşmış ve 1960' lı yılların akabindeki dönemlerde yapılan çalışmalarla çok iyi sonuçlar alınarak kapsamı genişletilmiştir.

Singüler pertürbe özellikli problemlerle ilgili yapılan çalışmalar:

Friedrichs ve Wasow (1946) tarafından singüler pertürbasyon terimi ilk kez ortaya atıldı. Neyfeh (1973), diferansiyel denklemler ve kısmi diferansiyel denklemler için pertürbe metotlarını geliştirerek vermiştir. O'Malley (1974; 1991), bu tür problemleri asimptotik olarak çözmüş ve singüler pertürbe metotları üzerinde çalışmıştır. Doolan ve ark. (1980), başlangıç ve sınır katlı problemler için nümerik metotları ve nümerik çözümlerini incelemiştir. Lange ve Miura (1982), yüksek mertebeli türevde küçük parametre bulunan ikinci mertebe diferansiyel denklemleri için asimptotik yaklaşımlar verdiler. Samarskii (2001), Amiraliev (1990;1991) ve Çakır (2000), fark şemaları teorisini geliştirerek, singüler pertürbe olmuş problemlerin fark şemasını kurarak yaklaşık çözümlerini incelemişlerdir. Ceiges (1988;1991), birinci tip sınır şartı içeren problemlerin asimptotik ve bazı nitelik özelliklerini incelemiş ve yaklaşık çözüm için fark şemasını kurmuş ve ayrıca problemin nümerik çözümünü bulmuştur. Amiraliev ve Memmedov (1995), singüler pertürbe olmuş problemlerin düzgün şebekelerindeki fark şeması üzerinde çalışmışlardır. Miller ve ark. (2000), sınır değer problemlerini sınır katlarında nümerik çözümlerini inceleyerek, bu problemler için kuvvetli hesaplama tekniklerini vermişlerdir. Bakhvalov (1969), bağımsız değişkenli bilinmeyen fonksiyonları sınır katı içermeyen özel dönüşümler geliştirerek

inşa etmiştir. Roos ve ark. (1996), singüler pertürbe denklemlerin genel nümerik metotlarını vermiştir. Farell ve ark. (2000), bu konuda sınır katı tekniklerini belirtmişlerdir.

Bu problemlerin çözümü, tanım bölgesinin bazı kısımlarında ani, bazı kısımlarda ise yavaş ve düzenli değişir. Hızlı değişimin olduğu sınır katlarında çözümün türevleri sınırsızdır (Neyfeh, 1973; O'Malley, 1974; O'Malley, 1991). Bu nedenle klasik nümerik metotlar çözümün ani değiştiği yerlerde kararsızlık gösterir ve uygulanması objektif sonuçlar vermez. Çünkü sınır katlarında çözüme daha kesinlikli yaklaşılması beklentisiyle şebeke adımları küçültülse dahi nümerik çözüm kesin çözüme yakınsamamakla beraber ıraksar. Bu sebeple singüler pertürbe özellikli problemlerin çözümü için üstel katsayılı fark şemalarının kurulması idealdir (Kadalbajoo, 1989).

Bu çalışmada,

$$Lu \equiv \varepsilon^2 u'' + \varepsilon a(t)u' + b(t)u = f(t), \quad 0 < t \leq T \quad (1.1)$$

$$u(0) = A, \quad u'(0) = B/\varepsilon \quad (1.2)$$

formundaki lineer ikinci mertebeden singüler pertürbe olmuş başlangıç-değer problemini, sonlu-fark metodu kullanarak nümerik çözümünü bulacağız. Burada $\varepsilon > 0$ küçük pozitif parametredir A ve B verilen sabittir, $a(t) \geq \alpha > 0$, $b(t) \geq \beta > 0$, $f(t)$ $[0, T]$ aralığında yeterince düzgün fonksiyonlardır. (1.1)-(1.2) probleminin genellikle pozitif ve küçük ε değerleri için $t = 0$ ' a yakın bir başlangıç katmanı vardır.

Bu çalışmada, (1.1)-(1.2) probleminin asimptotik değerlendirmeleri verilmiştir. Problemin nümerik çözümü için düzgün şebekede sonlu fark şeması oluşturulmuştur. Fark şeması, üstel taban fonksiyonlarının integral formunda kalan terimlerin kullanılmasıyla oluşturulur ki bu şema singüler pertürbe olmuş problemlerde uygulanır. Genel olarak problemin üstel katsayılı fark şeması kurularak fark şemasının hata değerlendirmesi kapsamında yakınsaklık analizi yapılarak çözüm algoritması incelenecektir.

Çalışmamız yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş ve literatür bildirişleri, ikinci bölümde çalışmamız için gerekli olan ön bilgilere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde kesin çözüm ile ilgili değerlendirilmeler ele alınmıştır. Dördüncü bölümde fark şemasının kurulmasına yer verilmiştir. Beşinci bölümde yakınsaklığın analizi yapılmıştır. Altıncı bölümde alınan teorik sonuçlar bir örnek üzerinde değerlendirilmiş; çözüm algoritması, bilgisayar programı, düzgün şebeke düğüm

noktalarında kesin, yaklaşık değerleri, hatalarını içeren tabloya ve grafiklere yer verilmiştir. Yedinci ve son bölümde ise tartişma, sonuç ve değerlendirme yapılmıştır.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde konuyla ilgili kullanılacak bazı temel tanımlar, eşitsizlikler ve formlar verilecektir.

Tanım 2.1. Şebeke

$[a, b]$ kapalı aralığının sonlu sayıda noktadan oluşan parçalanışına bir şebeke denir. Bu şebekede tanımlanmış fonksiyona ise şebeke fonksiyonu denir.

i. Düzgün Olmayan Şebeke

$[a, b]$ aralığında tanımlanan

$$\bar{w} = \{x_i | a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b\}$$

ayrık noktalar kümesine düzgün olmayan şebeke denir. x_i noktalarına ise düğüm noktaları veya şebeke düğümleri denir. \bar{w} şebekesinde tanımlanmış $f(x)$ fonksiyonuna şebeke fonksiyonu denir. $f(x_i)$ ($x_i \in \bar{w}$) değerini kısa olarak f_i şeklinde belirteceğiz

ii. Düzgün Şebeke ve Şebeke Fonksiyonu

$[a, b]$ aralığında tanımlanan

$$\bar{w}_h = \left\{ x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, N; h = \frac{b-a}{N} \right\}.$$

şebeke fonksiyonu, düğümler eşit aralıklı ise düzgün şebekedir. h -sabitine şebeke adımı denir (Amiraliyev ve Duru, 2002).

Tanım 2.2. Sağ, Sol ve Merkezi Fark Türevleri

Türevlerin yaklaşımı için çoğu kez fark türevleri denilen aşağıdaki ifadeler kullanılır.

Birinci türev için;

$$\text{İleri Fark Türevi} \quad : \quad y_{x,i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

$$\text{Geri Fark Türevi} \quad : \quad y_{\bar{x},i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$$

$$\text{Merkezi Fark Türevi} \quad : \quad y_{x,i}^0 = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

$y_{\bar{x},i}$ geri fark türevi ile $y_{x,i}$ ileri fark türevi $h \rightarrow 0$ durumunda $u'(x_i)$ değerine $O(h)$ hızıyla yaklaşacaktır. Fakat $y_{x,i}^0$ merkezi fark türevi $h \rightarrow 0$ durumunda $u'(x_i)$ değerine $O(h^2)$ hızıyla yaklaşacaktır.

İkinci türev için:

$$\text{İkinci Fark Türevi : } y_{\bar{x}x,i} = \frac{1}{h}(u_{x,i} - u_{\bar{x},i}) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

İkinci mertebeden fark türevi $h \rightarrow 0$ durumunda $u''(x_i)$ değerine $O(h^2)$ hızıyla yaklaşacaktır (Samarskii, 2001).

Tanım 2.3. Düzgün Yakınsaklık

u_i problemin kesin çözümü ve y_i problemin yaklaşık çözümü olmak üzere ε' dan bağımsız yeterince küçük tüm h sabitleri için

$$\max_i |u_i - y_i| \leq Ch^k$$

olacak şekilde ε' dan bağımsız bir C sabiti var ise yaklaşık çözüm kesin çözüme h 'ın k 'inci derecesiyle yakınsar ($O(h^k)$ hızıyla yakınsar) veya yaklaşık çözüm $O(h^k)$ kesinliğine sahiptir denir. Eğer k' inci mertebeden yakınsama istenirse hata sabiti ε' dan bağımsız olmak zorundadır (Amiraliyev ve Duru, 2002).

Lemma 2.1. Gronwall İntegral Eşitsizliği

$u(t)$ azalmayan bir fonksiyon olmak üzere; $u(t)$, $p(t)$ ve $q(t)$ fonksiyonlarının sürekli olduğunu varsayalım.

$$u(t) \leq v_0 + \int_0^t [p(s)u(s) + q(s)] ds, \quad p(t) \geq 0$$

ise

$$u(t) \leq v_0 \exp\left(\int_0^t p(\xi) d\xi\right) + \int_0^t q(s) \exp\left(\int_s^t p(\xi) d\xi\right) ds$$

olur (Memmedov, 1980).

Tanım 2.4. μ Eşitsizliği

$$|ab| \leq \mu a^2 + \frac{1}{4\mu} b^2, \quad \mu > 0.$$

eşitsizliği doğrudur (Memmedov, 1980).

Tanım 2.5. Kuadratur Formülleri

Fark şemalarının kurulması ve incelenmesinde aşağıdaki kuadratur formülleri kullanılacaktır.

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x)f(x)dx &= \{\sigma f(b) + (1 - \sigma)f(a)\} \left[\int_a^b p(x)dx \right] \\ &+ f(a; b) \int_a^b (x - x^{(\sigma)})p(x)dx \end{aligned} \quad (2.1)$$

burada σ -reel parametre, $P(x) \in C[a, b]$ ağırlık fonksiyonudur.

$$R(f) = \int_a^b dx p(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}(x, \xi) d\xi, \quad f \in C^n, \quad n = 1 \text{ veya } 2$$

$$K_s(x, \xi) = T_s(x - \xi) - (b - a)^{-1}(x - a)(b - \xi)^s, \quad s = 0, 1$$

$$x^{(\sigma)} = \sigma b + (1 - \sigma)a, \quad f(a; b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

$$T_s(\lambda) = \begin{cases} \lambda^s/s! & , \lambda \geq 0 \\ 0 & , \lambda < 0. \end{cases}$$

$$\int_a^b p(x)f'(x)dx = f(a; b) \int_a^b p(x)dx + \bar{R}(f) \quad (2.2)$$

burada σ -reel parametre, $P(x) \in [a, b]$ ağırlık fonksiyonudur.

$$\bar{R}(f) = - \int_a^b dx p'(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}(x, \xi) d\xi, \quad f \in C^n, \quad n = 1 \text{ veya } 2$$

$$\bar{R}(f) = - \int_a^b dx p(x) \int_a^b f''(\xi) K_{n-1}(x, \xi) d\xi, \quad f \in C^2$$

(2.1) ve (2.2) kuadratur formlarında aynı $K_s(x, \xi)$ fonksiyonu kullanılmaktadır. Ayrıca,

$$K_0(a, \xi) = K_0(b, \xi) = 0,$$

$$K_1(a, \xi) = K_1(b, \xi) = K_1(x, a) = K_1(x, b) = 0$$

$$K_1(x, \xi) = K_1(\xi, x)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} K_1(x, \xi) = -K_0(x, \xi) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} K_1(x, \xi) = -K_0(\xi, x)$$

olduğu görülür (Amiraliyev ve Memmedov, 1995).

Tanım 2.6. Fark Şemasının Kararlılığı

Kararlılık, fark problemleri veya genellikle yaklaşık algoritmalar için, bunların pratik uygulanabilmesinin gerektirdiği önemli bir özelliktir.

$$L_h y = \varphi_h, \quad x \in w_h \quad (2.3)$$

$$l_h y = f_h, \quad x \in \gamma_h \quad (2.4)$$

fark probleminin söz konusu olduğunu varsayalım, burada L_h ve l_h \bar{w}_h sebekesinde tanımlanan fonksiyonlar kümesinde etkili olan fark operatörleri, φ_h, f_h belli şebeke fonksiyonları olan bu başlangıç veri fonksiyonları ve yeteri kadar küçük $h \leq h_0$ için bir tek çözüme sahip olduğunu varsayalım. \tilde{y} ile, (2.3)-(2.4) probleminin başlangıç veri fonksiyonları $\tilde{\varphi}_h$ ve \tilde{f}_h olan çözümünü belirleyelim.

Eğer öyle h 'a bağlı olmayan C_1, C_2 sabitleri varsa yeteri kadar küçük $h \leq h_0$ için

$$\|\tilde{y} - y\|_1 \leq C_1 \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_2 + C_2 \|\tilde{f}_h - f_h\|_3 \quad (2.5)$$

eşitsizliği sağlanmış olsun. Bu durumda (2.3)-(2.4) fark seması sağ tarafa ve başlangıç şartına göre kararlıdır denir. Burada $\|\cdot\|_j, j = 1, 2, 3$ şebeke normlarıdır.

Böylece kararlılık, fark semasının çözümünün başlangıç veri fonksiyonlarına sürekli bağlı olduğunu, hem de bu bağlılığın h 'a göre düzgün biçimli olduğunu ifade ediyor. Problemin lineer olduğundan açıktır ki, kararlılığı ifade eden (2.5) eşitsizliği

$$\|z\|_1 \leq C_1 \|\varphi_h\|_2 + C_2 \|f_h\|_3$$

eşitsizliğine denktir (Amiraliyev ve Duru, 2002).

3. SÜREKLİ PROBLEM

Bu kısımda fark şeması kurulmasında kesin çözümle ilgili değerlendirmeler için iki lemma ve ispatları verilecektir.

Lemma 3.1

$u(t)$ (1.1)- (1.2) probleminin çözümü ve $a(t) \in C[0, T]$, $b(t), f(t) \in C^1[0, T]$ olsun. Bu durumda

$$|u^{(K)}(t)| \leq C\varepsilon^{-K} \left\{ \delta_* + \left(\int_0^t (f^2(\xi) + f'^2(\xi)) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, K = 0, 1, 2$$

olacak şekilde bir pozitif C sabiti vardır. Burada

$$\delta_*^2 = |B^2 + b(0)A^2 - 2f(0)A| + f^2(0).$$

Bu çalışma boyunca c, c_i, C, C_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) ε' dan ve τ şebeke adımından bağımsız sabitleri gösteriyor (Amiraliyev, 1998).

İspat 3.1

(1.1) denklemini $2u'(t)$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} 2\varepsilon^2 u''u' + 2\varepsilon a(t)u'^2 + 2b(t)u'u &= 2f(t)u' \\ 2\varepsilon^2 u''u + 2b(t)u'u - 2f(t)u' + 2\varepsilon a(t)u'^2 &= 0 \\ [\varepsilon^2 u'^2 + b(t)u^2 - 2f(t)u]' + 2\varepsilon a(t)u'^2 &= b'(t)u^2 - 2f'(t)u \end{aligned}$$

olur. Eşitlik $[0, t]$ aralığında integre edilirse,

$$\begin{aligned} (\varepsilon^2 u'^2 + b(t)u^2 - 2f(t)u)|_0^t + 2\varepsilon \int_0^t a(\xi)u'^2 d\xi &= \int_0^t b'(\xi)u^2 d\xi - 2 \int_0^t f'(\xi)u d\xi \\ \varepsilon^2 u'^2 + b(t)u^2 - 2fu - \varepsilon^2 u'^2(0) - b(0)u^2(0) + 2f(0)u(0) + 2\varepsilon \int_0^t a(\xi)u'^2 d\xi \\ &= \int_0^t b'(\xi)u^2 d\xi - 2 \int_0^t f'(\xi)u d\xi \\ \varepsilon^2 u'^2 + b(t)u^2 - 2fu + 2\varepsilon \int_0^t a(\xi)u'^2 d\xi \\ &= B^2 + b(0)A^2 - 2f(0)A + \int_0^t b'(\xi)u^2 d\xi - 2 \int_0^t f'(\xi)u d\xi \end{aligned}$$

elde edilir. Burada μ eşitsizliğini kullanırsak ($b(t) \geq \beta > 0$ ve $\mu < \beta$),

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 u'^2 + \beta u^2 - \mu u^2 - \frac{1}{\mu} f^2(t) + 2\varepsilon \int_0^t a(\xi) u'^2 d\xi \\ \leq B^2 + b(0)A^2 - 2f(0)A + \int_0^t b'(\xi) u^2 d\xi - 2 \int_0^t f'(\xi) u d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 u'^2 + (\beta - \mu) u^2 - \frac{1}{\mu} f^2(t) + \varepsilon \int_0^t a(\xi) u'^2 d\xi \\ \leq B^2 + b(0)A^2 - 2f(0)A + \int_0^t b'(\xi) u^2 d\xi - 2 \int_0^t f'(\xi) u d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 u'^2 + u^2 + \varepsilon \int_0^t a(\xi) u' d\xi \\ \leq B^2 + b(0)A^2 - 2f(0)A + f^2(t) + \int_0^t b'(\xi) u^2 d\xi - 2 \int_0^t f'(\xi) u d\xi \end{aligned}$$

olur. Şimdi de eşitsizliğin sağ tarafı için $f^2(t) = f^2(0) + 2 \int_0^t f(\xi) f'(\xi) d\xi$ ve

$$2 \int_0^t f'(\xi) u d\xi \leq \int_0^t u^2(\xi) d\xi + \int_0^t f'^2(\xi) d\xi \text{ eşitsizliklerini kullanırsak,}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 u'^2 + u^2 + \varepsilon \int_0^t a(\xi) u' d\xi \\ \leq B^2 + b(0)A^2 - 2f(0)A + f^2(0) + 2 \int_0^t f(\xi) f'(\xi) d\xi \\ + \int_0^t b'(\xi) u^2 d\xi + \int_0^t u^2(\xi) d\xi + \int_0^t f'^2(\xi) d\xi \end{aligned}$$

olur. Burada $\delta_*^2 = B^2 + b(0)A^2 - 2f(0)A + f^2(0)$ alınır ve eşitsizliğin sağ tarafı için

$$2 \int_0^t f(\xi) f'(\xi) d\xi \leq \int_0^t f^2(\xi) d\xi + \int_0^t f'^2(\xi) d\xi \text{ eşitsizliği kullanılırsa,}$$

$$\varepsilon^2 u'^2 + u^2 + \varepsilon \int_0^t a(\xi) u' d\xi \leq \delta_*^2 + \int_0^t (b'(\xi) + 1) u^2 d\xi + \int_0^t f^2(\xi) d\xi + 2 \int_0^t f'^2(\xi) d\xi$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 u'^2 &\leq \varepsilon^2 u'^2 + u^2 + \varepsilon \int_0^t a(\xi) u' d\xi \\ &\leq C_0 \left\{ \delta_*^2 + \int_0^t [u^2(\xi) + f^2(\xi) + f'^2(\xi)] d\xi \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

olacak şekilde pozitif bir C_0 sabiti vardır. (3.1)'de Gronwall İntegral Eşitsizliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 u'^2 &\leq C_0 \delta_*^2 + \int_0^t [C_0 u^2(\xi) + C_0 [f^2(\xi) + f'^2(\xi)]] d\xi \\
&\leq C_0 \delta_*^2 \exp\left(\int_0^t C_0 d\xi\right) + C_0 \int_0^t [f^2(\xi) + f'^2(\xi)] \cdot \exp\left(\int_\xi^t C_0 d_s\right) d\xi \\
&= C_0 \delta_*^2 \exp(C_0 t) + C_0 \int_0^t [f^2(\xi) + f'^2(\xi)] \cdot \exp(C_0(t - \xi)) d\xi \\
&\leq C^2 \left(\delta_*^2 + \int_0^t [f^2(\xi) + f'^2(\xi)] d\xi \right)
\end{aligned}$$

olur. Burada karekök eşitsizliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned}
u'^2 &\leq C^2 \varepsilon^{-2} \left(\delta_*^2 + \int_0^t [f^2(\xi) + f'^2(\xi)] d\xi \right) \\
(u'^2)^{1/2} &\leq \left(C^2 \varepsilon^{-2} \left(\delta_*^2 + \int_0^t [f^2(\xi) + f'^2(\xi)] d\xi \right) \right)^{1/2} \\
&\leq C \varepsilon^{-1} \left(\delta_* + \left(\int_0^t [f^2(\xi) + f'^2(\xi)] d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte gerekli düzenlemeler yapılsa

$$|u'(t)| \leq C \varepsilon^{-1} \left\{ \delta_* + \left(\int_0^t [f^2(\xi) + f'^2(\xi)] d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

olur ve genel olarak,

$$|u^{(K)}(t)| \leq C \varepsilon^{-K} \left\{ \delta_* + \left(\int_0^t [f^2(\xi) + f'^2(\xi)] d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

yazılabilir.

Lemma 3.2

(1.1) ve (1.2) probleminin çözümü $u(t)$ ve $a(t), b(t), f(t) \in C^1[0, T]$ olmak üzere

$$|u^{(K)}(t)| \leq C \left(1 + \varepsilon^{1-K} + \varepsilon^{-K} e^{\frac{-C_0 t}{\varepsilon}} \right), \quad K = 0,1,2$$

değerlendirmesi doğrudur (Amiraliyev, 1998).

İspat 3.2

(1.1)-(1.2) probleminin çözümünü

$$u(t) = u_0(t) + v(t) + R_\varepsilon(t)$$

biçiminde arayalım. Burada $u_0(t) = \frac{f(t)}{b(t)}$ indirgenmiş problemin çözümü ve $v(t)$,

$R_\varepsilon(t)$ sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümüdür:

$$\begin{cases} Lv = 0 \\ v(0) = A - u_0(0), v'(0) = B/\varepsilon - u_0'(0) \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} LR_\varepsilon = -\varepsilon^2 u_0'' - \varepsilon a u_0' \\ R_\varepsilon(0) = 0, R_\varepsilon'(0) = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Şimdi (3.2) probleminin çözümünün,

$$|v^{(K)}(t)| \leq C \varepsilon^{-K} e^{\frac{-C_0 t}{\varepsilon}}, \quad K = 0,1,2 \quad (3.4)$$

eşitsizliğini sağladığını ispatlayalım. Bunun için $\lambda > 0$ keyfi bir sabit olmak üzere

$$Lv(v' + \lambda \varepsilon^{-1} v) = 0$$

eşitliğini ele alırsak,

$$\begin{aligned} (\varepsilon^2 v'' + \varepsilon a v' + b v)(v' + \lambda \varepsilon^{-1} v) &\leq (\varepsilon^2 v'^2 + b v^2 + 2\lambda \varepsilon v' v + \lambda a v^2)' \\ &= 2\varepsilon^2 v'' v' + b' v^2 + 2b v' v + 2\lambda \varepsilon v'' v \\ &\quad + 2\lambda \varepsilon v'^2 + \lambda a' v' v \end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} 2\varepsilon^2 v'' v' &= \varepsilon^2 (v'^2)' \\ 2b v' v &= (b v^2)' - b' v^2 \\ \lambda a' v' v &= \frac{1}{2} \lambda a' (v^2) \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon^2 v'^2 + bv^2 + 2\lambda\varepsilon v'v + \lambda av^2)' \\
& \leq -(2a\varepsilon - 2\lambda\varepsilon)v'^2 - (2\varepsilon^{-1}\lambda b - b' - \lambda a')v^2
\end{aligned} \tag{3.5}$$

elde edilir. (3.5) ifadesinde

$$\delta(t) = \varepsilon^2 v'^2 + bv^2 + 2\lambda\varepsilon v'v + \lambda av^2 \tag{3.6}$$

olmak üzere $\delta(t)$ için alttan bir değerlendirme yapmak için (3.6) eşitliğinde

$$2\lambda\varepsilon v'v \geq -\lambda\varepsilon^2 a^{-1}v'^2 - \lambda av^2$$

eşitsizliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
\delta(t) & \geq \varepsilon^2 v'^2 + bv^2 - \lambda\varepsilon^2 a^{-1}v'^2 - \lambda av^2 + \lambda av^2 \\
& = \varepsilon^2(1 - \lambda a^{-1})v'^2 + bv^2 \\
& \geq C_1(\varepsilon^2 v'^2 + v^2), \quad (C_1 > 0)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

olur.

Şimdi de $\delta(t)$ için üstten bir değerlendirme yapmak için (3.6) eşitliğinde

$$2\lambda\varepsilon v'v \leq \lambda\varepsilon^2 v'^2 + \lambda v^2$$

eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\delta(t) & \leq \varepsilon^2 v'^2 + bv^2 + \lambda\varepsilon^2 v'^2 + \lambda v^2 + \lambda av^2 \\
& \leq \varepsilon^2(1 + \lambda)v'^2 + (b + \lambda + \lambda a)v^2 \\
& \leq C_2(\varepsilon^2 v'^2 + v^2), \quad (C_2 > 0)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi de (3.5) eşitliğinin sağ tarafını ele alalım:

$$-\delta'(t) \geq 2\varepsilon(a - \lambda)v'^2 + (2\varepsilon^{-1}\lambda b - b' - \lambda a')v^2 \tag{3.8}$$

burada $\bar{a}_* = \max_{[0,T]} a'(t)$, $\bar{b}_* = \max_{[0,T]} b'(t)$, $a(t) \geq \alpha > 0$, $b(t) \geq \beta > 0$

alınır $\lambda < \alpha$ ve $2\lambda\beta - \varepsilon\bar{b}_* - \varepsilon\lambda\bar{a}_* > 0$ olduğu kabul edilirse

$$2\varepsilon(a - \lambda)v'^2 + (2\varepsilon^{-1}\lambda b - b' - \lambda a')v^2 \geq 2\varepsilon(\alpha - \lambda)v'^2 + \varepsilon^{-1}(2\lambda\beta - \varepsilon\bar{b}_* - \varepsilon\lambda\bar{a}_*)v^2$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapırsa

$$\begin{aligned}
-\delta(t) & \geq 2\varepsilon(\alpha - \lambda)v'^2 + \varepsilon^{-1}(2\lambda\beta - \varepsilon\bar{b}_* - \varepsilon\lambda\bar{a}_*)v^2 \\
& \geq C_3\varepsilon^{-1}\delta(t)
\end{aligned}$$

yani

$$\delta'(t) \leq -C_3 \varepsilon^{-1} \delta(t) \quad (3.9)$$

olur. Burada C_3 için aşağıdaki değerlendirme yapılabilir:

$$0 < C_3 \leq \min \left\{ \frac{2(\alpha - \lambda)}{(1 + \lambda)}, \frac{2\lambda\beta - \varepsilon\bar{b}_* - \varepsilon\lambda\bar{a}_*}{b_* + \lambda + \lambda a_*} \right\}.$$

(3.9) eşitsizliğinin çözümü için integrasyon çarpanı kullanılırsa

$$\delta(t) \leq C e^{-\frac{C_3 t}{\varepsilon}} \quad (3.10)$$

eşitsizliği elde edilir. (3.7) ve (3.10) eşitsizliklerinden

$$\varepsilon^2 v'^2 < \varepsilon^2 v'^2 + v^2 \leq C^2 e^{-\frac{C_3 t}{\varepsilon}}$$

$$\sqrt{v'^2} \leq \sqrt{\varepsilon^{-2} C^2 e^{-\frac{C_3 t}{\varepsilon}}}$$

$$|v'(t)| \leq \varepsilon^{-1} C e^{-\frac{C_3 t}{2\varepsilon}}$$

olur. Eşitsizliği K -ıncı mertebeden yazarsak

$$|v^{(K)}(t)| \leq C \varepsilon^{-K} e^{-\frac{C_0 t}{\varepsilon}}, \quad C_0 = C_3/2$$

buradan (3.4) eşitsizliği ispatlanmış olur.

Şimdi de

$$|R_\varepsilon^{(K)}| \leq C \varepsilon^{1-K}, \quad K = 0, 1, 2$$

olduğunu gösterelim:

$$\begin{cases} LR_\varepsilon(t) \equiv -\varepsilon^2 u_0'' - \varepsilon a u_0' = \Psi(t) \\ R_\varepsilon(0) = 0, \quad R_\varepsilon'(0) = 0 \end{cases}$$

$LR_\varepsilon(t)$ ifadesine Lemma 3.1'i uygularsak,

$$|R_\varepsilon^{(K)}(t)| \leq C \varepsilon^{-K} \left\{ \delta_* + \left(\int_0^t (\Psi^2(\xi) + \Psi'^2(\xi)) d\xi \right)^{1/2} \right\}$$

olur. Burada

$$\left(\int_0^t (\Psi^2(\xi) + \Psi'^2(\xi)) d\xi \right)^{1/2} \leq C \varepsilon$$

olduğu dikkate alınrsa,

$$|R_\varepsilon^{(K)}(t)| \leq C\varepsilon^{1-K}$$

elde edilir. Buradan hareketle

$$\begin{aligned} |u'(t)| &\leq |u_0'(t)| + |v'(t)| + |R_\varepsilon'(t)| \\ &\leq C_2 + C\varepsilon^{-1}e^{-\frac{C_0 t}{\varepsilon}} + C_1\varepsilon^0 \\ &\leq C\left(1 + \varepsilon^{-1}e^{-\frac{C_0 t}{\varepsilon}}\right) \end{aligned}$$

Benzer işlemler yapılırsa

$$|u''(t)| \leq C\left(1 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2}e^{-\frac{C_0 t}{\varepsilon}}\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak $K = 0,1,2$ için

$$|u^{(K)}(t)| \leq C\left(1 + \varepsilon^{1-K} + \varepsilon^{-K}e^{-\frac{C_0 t}{\varepsilon}}\right)$$

yazılabilir.

4. FARK ŞEMASININ KURULMASI

(1.1)-(1.2) ikinci mertebeden singüler pertürbe olmuş başlangıç-değer problemi için,

$$a^2(t) - 4b(t) > 0, \quad (0 \leq t \leq T)$$

olduğu kabul edilecektir. $[0, T]$ aralığında,

$$w_\tau = \{t_j = j\tau, j = \overline{1, M-1}; M\tau = T\}, \quad \bar{w}_\tau = w_\tau \cup \{t = 0, T\}$$

düzgün şebekesini oluşturalım. Buradan fark şemasının kurulması işlemine

$$\chi_j^{-1} \tau^{-1} \int_0^T Lu\varphi_j(t) dt = \chi_j^{-1} \tau^{-1} \int_0^T f(t)\varphi_j(t) dt, \quad (j = 1, 2, \dots, M-1) \quad (4.1)$$

özdeşliğini esas alarak başlayalım. $\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^{M-1}$ baz fonksiyonları aşağıdaki biçime sahiptir:

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda_{1,j}(t-t_{j-1})} - e^{\lambda_{2,j}(t-t_{j-1})}}{e^{\lambda_{1,j}\tau} - e^{\lambda_{2,j}\tau}} \equiv \varphi_j^{(1)}(t), & t_{j-1} < t < t_j \\ \frac{e^{-\lambda_{2,j}(t_{j+1}-t)} - e^{-\lambda_{1,j}(t_{j+1}-t)}}{e^{-\lambda_{2,j}\tau} - e^{-\lambda_{1,j}\tau}} \equiv \varphi_j^{(2)}(t), & t_j < t < t_{j+1} \\ 0 & , \quad t \notin (t_{j-1}, t_{j+1}) \end{cases}$$

burada

$$\lambda_{1,j} = 0.5\varepsilon^{-1} \left[a_j + \sqrt{a_j^2 - 4b_j} \right],$$

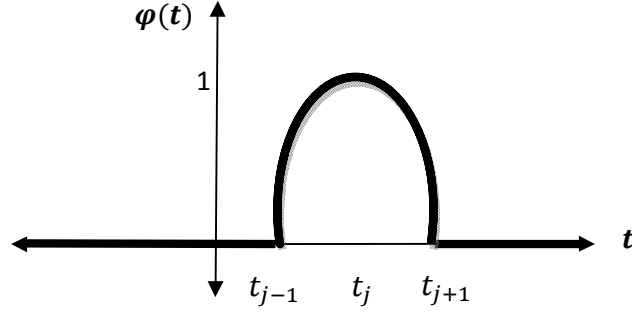
$$\lambda_{2,j} = 0.5\varepsilon^{-1} \left[a_j - \sqrt{a_j^2 - 4b_j} \right].$$

olup, $\varphi_j^{(1)}(t)$ ve $\varphi_j^{(2)}(t)$ baz fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümleridir:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \varphi''(t) - a_j \varepsilon \varphi'(t) + b_j \varphi(t) = 0, & t_{j-1} < t < t_j \\ \varphi(t_{j-1}) = 0, \quad \varphi(t_j) = 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \varphi''(t) - a_j \varepsilon \varphi'(t) + b_j \varphi(t) = 0, & t_j < t < t_{j+1} \\ \varphi(t_j) = 1, \quad \varphi(t_{j+1}) = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Burada $\varphi_j^{(i)}(t)$, $i = 1,2$ baz fonksiyonları geometrik olarak aşağıdaki biçimdedir:



Şekil 4.1. $\varphi_j^{(i)}(t)$, $i = 1,2$ baz fonksiyonu.

$$\chi_j = \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) dt = \frac{2\tau^{-1}(\lambda_{1,j} - \lambda_{2,j})}{\lambda_{1,j}\lambda_{2,j} \operatorname{sh} \left[(\lambda_{1,j} - \lambda_{2,j}) \cdot \frac{\tau}{2} \right]} \operatorname{sh} \left(\frac{\lambda_{1,j}\tau}{2} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\lambda_{2,j}\tau}{2} \right). \quad (4.4)$$

(4.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \chi_j^{-1} \left[\varepsilon^2 \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) u''(t) dt + \varepsilon \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} a(t) \varphi_j(t) u'(t) dt \right. \\ \left. + \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} b(t) \varphi_j(t) u(t) dt \right] \\ = \chi_j^{-1} \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} f(t) \varphi_j(t) dt \end{aligned}$$

olur. Burada $a(t) \geq a_j > 0$, $b(t) \geq b_j > 0$ ve $f(t) \geq f_j > 0$ olduğu göz önünde bulundurularak, eşitlikte $a(t)$, $b(t)$ ve $f(t)$ sürekli fonksiyonları yerine, sırasıyla a_j , b_j ve f_j skaler değerlerinin kullanılmasını sağlayacağız. Buradaki amaç integralleri (2.1) ve (2.2) kuadratur formüllerinin uygulanmasına uygun hale getirmektir.

$$\begin{aligned} \chi_j^{-1} \left[\varepsilon^2 \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) u''(t) dt + \varepsilon a_j \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) u'(t) dt + b_j \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) u(t) dt \right. \\ \left. + \varepsilon \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} [a(t) - a_j] \varphi_j(t) u'(t) dt + \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} [b(t) - b_j] \varphi_j(t) u(t) dt \right] \\ = \chi_j^{-1} \tau^{-1} f_j \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) dt + \chi_j^{-1} \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} [f(t) - f_j] \varphi_j(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \chi_j^{-1} \left[\varepsilon^2 \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) u''(t) dt + \varepsilon a_j \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) u'(t) dt + b_j \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) u(t) dt \right] \\
& + \chi_j^{-1} \left[\varepsilon \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} [a(t) - a_j] \varphi_j(t) u'(t) dt + \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} [b(t) - b_j] \varphi_j(t) u(t) dt \right] \\
& = \chi_j^{-1} \tau^{-1} f_j \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) dt + \chi_j^{-1} \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} [f(t) - f_j] \varphi_j(t) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \chi_j^{-1} \left[\varepsilon^2 \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) u''(t) dt + \varepsilon a_j \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) u'(t) dt + b_j \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) u(t) dt \right] \\
& = \chi_j^{-1} \tau^{-1} f_j \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) dt \\
& - \chi_j^{-1} \left[\varepsilon \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} [a_j - a(t)] \varphi_j(t) u'(t) dt \right. \\
& \left. + \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} [b_j - b(t)] \varphi_j(t) u(t) dt \right] + \chi_j^{-1} \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} [f(t) - f_j] \varphi_j(t) dt
\end{aligned}$$

burada (4.4) ifadesindeki $\chi_j = \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) dt$ eşitliğinden yararlanılırsa

$$\chi_j^{-1} \tau^{-1} f_j \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) dt = \chi_j^{-1} f_j \chi_j = f_j$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \chi_j^{-1} \left[\varepsilon^2 \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) u''(t) dt + \varepsilon a_j \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) u'(t) dt + b_j \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) u(t) dt \right] \\
& = f_j - R_j
\end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir. Tanım.2.5' te verilen (2.2) kuadratur formülünü uygulayabilmek için ilk terimde kısmi integrasyon metodunu uygularsak,

$$u''(t) dt = dv \Rightarrow u'(t) = v$$

$$\varphi_j(t) = u \Rightarrow \varphi_j'(t) dt = du$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) u''(t) dt &= \varepsilon^2 \tau^{-1} \left[(u'(t) \varphi_j(t)) \Big|_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} - \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j'(t) u'(t) dt \right] \\
&= -\varepsilon^2 \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j'(t) u'(t) dt
\end{aligned} \tag{4.6}$$

olur. (4.6) eşitliğini (4.5) ifadesinde kullanıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} & \chi_j^{-1} \left[-\varepsilon^2 \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi'_j(t) u'(t) dt + \varepsilon a_j \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) u'(t) dt + b_j \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) u(t) dt \right] \\ & = f_j - R_j \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir. Burada R_j kalan terimi

$$\begin{aligned} R_j & = \chi_j^{-1} \varepsilon \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} [a(t) - a(t_j)] \varphi_j(t) u'(t) dt \\ & \quad + \chi_j^{-1} \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} [b(t) - b(t_j)] \varphi_j(t) u(t) dt + \chi_j^{-1} \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} [f(t_j) - f(t)] \varphi_j(t) dt \end{aligned} \quad (4.8)$$

şeklindedir.

(4.7) bağıntısındaki her bir terime (t_{j-1}, t_j) ve (t_j, t_{j+1}) aralıkları üzerinde Tanım.2.6'da verilen uygun kuadratur formülleri sırasıyla;

1.terime (2.2) kuadratur formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned} & -\varepsilon^2 \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi'_j(t) u'(t) dt \\ & = -\varepsilon^2 \tau^{-1} \left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_j^{(1)}(t) u'(t) dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi_j^{(2)}(t) u'(t) dt \right] \\ & \approx -\varepsilon^2 \tau^{-1} \left[u_{\bar{t},j} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_j^{(1)}(t) dt + u_{t,j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi_j^{(2)}(t) dt \right] \\ & = -\varepsilon^2 \tau^{-1} [u_{\bar{t},j} - u_{t,j}] \end{aligned}$$

2.Terime (2.2) kuadratur formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \varepsilon a_j \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) u'(t) dt \\ & = \varepsilon a_j \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_j^{(1)}(t) u'(t) dt + \varepsilon a_j \tau^{-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi_j^{(2)}(t) u'(t) dt \\ & \approx \varepsilon a_j \tau^{-1} u_{\bar{t},j} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_j^{(1)}(t) dt + \varepsilon a_j \tau^{-1} u_{t,j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi_j^{(2)}(t) dt \end{aligned}$$

3. Terime (2.1) kuadratur formülü uygulanıp (t_{j-1}, t_j) aralığı için $\sigma = 1$ ve (t_j, t_{j+1}) aralığı için $\sigma = 0$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
& b_j \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) u(t) dt \\
&= b_j \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_j^{(1)}(t) u(t) dt + b_j \tau^{-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi_j^{(2)}(t) u(t) dt \\
&\approx b_j \tau^{-1} \{ \sigma u(t_j) + (1 - \sigma) u(t_{j-1}) \} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_j^{(1)}(t) dt \\
&+ b_j \tau^{-1} u(t_{j-1}; t_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t - t^{(1)}) \varphi_j^{(1)}(t) dt \\
&+ b_j \tau^{-1} \{ \sigma u(t_{j+1}) + (1 - \sigma) u(t_j) \} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi_j^{(2)}(t) dt \\
&+ b_j \tau^{-1} u(t_j; t_{j+1}) \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t - t^{(0)}) \varphi_j^{(2)}(t) dt \\
&= b_j \tau^{-1} u_j \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_j^{(1)}(t) dt + b_j \tau^{-1} u_{\bar{t},j} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t - t_j) \varphi_j^{(1)}(t) dt \\
&+ b_j \tau^{-1} u_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi_j^{(2)}(t) dt + b_j \tau^{-1} u_{t,j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t - t_j) \varphi_j^{(2)}(t) dt
\end{aligned}$$

olur. Terimlere uyguladığımız (2.1) ve (2.2) kuadratur formüllerini (4.7) ifadesinde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon^2 \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j'(t) u'(t) dt + \varepsilon a_j \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) u'(t) dt + b_j \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) u(t) dt \\
&\approx \varepsilon^2 \tau^{-1} (u_{t,j} - u_{\bar{t},j}) + \varepsilon a_j \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_j^{(1)}(t) dt \cdot u_{\bar{t},j} + \varepsilon a_j \tau^{-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi_j^{(2)}(t) dt \cdot u_{t,j} \\
&+ b_j \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_j^{(1)}(t) dt \cdot u_j + b_j \tau^{-1} u_{\bar{t},j} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t - t_j) \varphi_j^{(1)}(t) dt \\
&+ b_j \tau^{-1} u_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi_j^{(2)}(t) dt + b_j \tau^{-1} u_{t,j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t - t_j) \varphi_j^{(2)}(t) dt \tag{4.9}
\end{aligned}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon^2 \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi'_j(t) u'(t) dt + \varepsilon a_j \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) u'(t) dt + b_j \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) u(t) dt \\
& \approx \varepsilon^2 u_{\bar{t},j} + \varepsilon a_j (\chi_{1j} u_{\bar{t},j} + \chi_{2j} u_{t,j}) + b_j \chi_j u_j + b_j \mu_{1j} u_{\bar{t},j} + b_j \mu_{2j} u_{t,j}
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Şimdi de

$$u_{t,j} = u_{0,t,j} + \frac{\tau}{2} u_{\bar{t},j} \quad \text{ve} \quad u_{\bar{t},j} = u_{0,t,j} - \frac{\tau}{2} u_{\bar{t},j}$$

dönüşümlerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 u_{\bar{t},j} + \varepsilon a_j (\chi_{1j} u_{\bar{t},j} + \chi_{2j} u_{t,j}) + b_j \chi_j u_j + b_j \mu_{1j} u_{\bar{t},j} + b_j \mu_{2j} u_{t,j} \\
& = \varepsilon^2 u_{\bar{t},j} + \varepsilon a_j \left[\chi_{1j} \left(u_{0,t,j} - \frac{\tau}{2} u_{\bar{t},j} \right) + \chi_{2j} \left(u_{0,t,j} + \frac{\tau}{2} u_{\bar{t},j} \right) \right] + b_j \chi_j u_j \\
& \quad + b_j \mu_{1j} \left(u_{0,t,j} - \frac{\tau}{2} u_{\bar{t},j} \right) + b_j \mu_{2j} \left(u_{0,t,j} + \frac{\tau}{2} u_{\bar{t},j} \right) \\
& = \varepsilon^2 \left\{ 1 + \frac{\tau}{2} \varepsilon^{-1} a_j (\chi_{2j} - \chi_{1j}) + \varepsilon^{-2} b_j \frac{\tau}{2} (\mu_{2j} - \mu_{1j}) \right\} u_{\bar{t},j} \\
& \quad + \varepsilon a_j (\chi_j + \varepsilon^{-1} a_j^{-1} b_j \mu_j) u_{0,t,j} + b_j \chi_j u_j
\end{aligned} \tag{4.10}$$

olur. burada

$$\begin{aligned}
\chi_{1j} &= \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_j^{(1)}(t) dt \quad , \quad \chi_{2j} = \tau^{-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi_j^{(2)}(t) dt \quad , \\
\mu_{1j} &= \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t - t_j) \varphi_j^{(1)}(t) dt \quad , \quad \mu_{2j} = \tau^{-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t - t_j) \varphi_j^{(2)}(t) dt \quad , \\
\mu_j &= \mu_{1j} + \mu_{2j} \quad , \quad \chi_j = \chi_{1j} + \chi_{2j}
\end{aligned}$$

biçimindedir.

(4.10) ifadesinde fark türevlerinin katsayılarını düzenlersek

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{\tau}{2} \varepsilon^{-1} a_j (\chi_{2j} - \chi_{1j}) + \varepsilon^{-2} b_j \frac{\tau}{2} (\mu_{2j} - \mu_{1j}) \\
& = \frac{\tau}{2} (\lambda_{1,j} - \lambda_{2,j}) \frac{ch[(\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j})\tau/2]}{sh[(\lambda_{1,j} - \lambda_{2,j})\tau/2]}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
& \chi_j + \varepsilon^{-1} a_j^{-1} b_j \mu_j \\
& = \frac{(\lambda_{1,j} - \lambda_{2,j}) sh[(\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j})\tau/2]}{(\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j}) sh[(\lambda_{1,j} - \lambda_{2,j})\tau/2]}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilir.

(4.11) ve (4.12) eşitliklerini (4.10) ifadesinde kullanıp (4.7)'i elde etmek için de (4.4)'te verilen χ_j^{-1} ile çarparsak, fark şeması

$$lu \equiv \varepsilon^2 \theta_{1,j} u_{\bar{t},j} + \varepsilon a_j \theta_{2,j} u_{t,j}^0 + b_j u_j = f_j - R_j, \quad j = 1, 2, \dots, M-1 \quad (4.13)$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} \theta_{1,j} &= \chi_j^{-1} \left[\frac{\tau}{2} (\lambda_{1,j} - \lambda_{2,j}) \frac{ch[(\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j})\tau/2]}{sh[(\lambda_{1,j} - \lambda_{2,j})\tau/2]} \right] \\ &= \frac{\tau \lambda_{1,j} \lambda_{2,j} sh[(\lambda_{1,j} - \lambda_{2,j}) \cdot \frac{\tau}{2}]}{2(\lambda_{1,j} - \lambda_{2,j}) sh\left(\frac{\lambda_{1,j}\tau}{2}\right) sh\left(\frac{\lambda_{2,j}\tau}{2}\right)} \frac{\tau}{2} (\lambda_{1,j} - \lambda_{2,j}) \frac{ch[(\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j})\tau/2]}{sh[(\lambda_{1,j} - \lambda_{2,j})\tau/2]} \\ &= \frac{\tau^2}{4} \cdot \lambda_{1,j} \lambda_{2,j} \frac{ch[(\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j})\tau/2]}{sh\left(\frac{\lambda_{1,j}\tau}{2}\right) sh\left(\frac{\lambda_{2,j}\tau}{2}\right)} \\ &\equiv \frac{b_j \tau^2}{4\varepsilon^2} \left[1 + cth\left(\frac{\lambda_{1,j}\tau}{2}\right) cth\left(\frac{\lambda_{2,j}\tau}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \theta_{2,j} &= \chi_j^{-1} \left[\frac{(\lambda_{1,j} - \lambda_{2,j}) sh[(\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j})\tau/2]}{(\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j}) sh[(\lambda_{1,j} - \lambda_{2,j})\tau/2]} \right] \\ &= \frac{\tau \lambda_{1,j} \lambda_{2,j} sh[(\lambda_{1,j} - \lambda_{2,j}) \cdot \frac{\tau}{2}]}{2(\lambda_{1,j} - \lambda_{2,j}) sh\left(\frac{\lambda_{1,j}\tau}{2}\right) sh\left(\frac{\lambda_{2,j}\tau}{2}\right)} \frac{(\lambda_{1,j} - \lambda_{2,j}) sh[(\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j})\tau/2]}{(\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j}) sh[(\lambda_{1,j} - \lambda_{2,j})\tau/2]} \\ &= \frac{\tau}{2} \frac{\lambda_{1,j} \lambda_{2,j}}{\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j}} \frac{sh[(\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j})\tau/2]}{sh(\lambda_{1,j}\tau/2) sh(\lambda_{2,j}\tau/2)} \\ &\equiv \frac{b_j \tau}{2a_j \varepsilon} \left[cth\left(\frac{\lambda_{1,j}\tau}{2}\right) + cth\left(\frac{\lambda_{2,j}\tau}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

olarak yazılabilir.

$\theta_{1,j}$ ve $\theta_{2,j}$ katsayılarının asimptotik değerlendirilmesi için

$$\begin{aligned} \lambda_{1,j} &= 0.5\varepsilon^{-1} \left[a_j + \sqrt{a_j^2 - 4b_j} \right] \\ \lambda_{2,j} &= 0.5\varepsilon^{-1} \left[a_j - \sqrt{a_j^2 - 4b_j} \right] \end{aligned}$$

eşitliklerinde $\varepsilon = 1$ ve $\theta_{1,j}$, $\theta_{2,j}$ fonksiyonlarının limiti alınırsa

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \rightarrow 0} \theta_{1,j} &= \lim_{\tau \rightarrow 0} ch[(\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j})\tau/2] \cdot \frac{\frac{\tau\lambda_{1,j}}{2} \cdot \frac{\tau\lambda_{2,j}}{2}}{sh(\frac{\lambda_{1,j}\tau}{2})sh(\frac{\lambda_{2,j}\tau}{2})} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} ch[(\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j})\tau/2] \cdot \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\frac{\tau\lambda_{1,j}}{2}}{sh(\frac{\lambda_{1,j}\tau}{2})} \cdot \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\frac{\tau\lambda_{2,j}}{2}}{sh(\frac{\lambda_{2,j}\tau}{2})} = 1\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \rightarrow 0} \theta_{2,j} &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\lambda_{1,j}\lambda_{2,j}}{\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j}} \cdot \frac{sh[(\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j})\tau/2]}{sh(\frac{\lambda_{1,j}\tau}{2})sh(\frac{\lambda_{2,j}\tau}{2})} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{sh[(\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j})\tau/2]}{\frac{[(\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j})\tau]}{2}} \cdot \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\frac{\lambda_{1,j}\tau}{2}}{sh(\frac{\lambda_{1,j}\tau}{2})} \cdot \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\frac{\lambda_{2,j}\tau}{2}}{sh(\frac{\lambda_{2,j}\tau}{2})} = 1\end{aligned}$$

olur.

Şimdi ise (1.2₂) başlangıç koşulu için bir fark şemasını elde etmek için

$$\int_{t_0}^{t_1} Lu\varphi_0(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} f(t)\varphi_0(t)dt \quad (4.16)$$

özdeşliğini ele alalım. Burada $\varphi_0(t)$ baz fonksiyonu aşağıdaki biçime sahiptir:

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda_{2,0}(t_1-t)} - e^{-\lambda_{1,0}(t_1-t)}}{e^{-\lambda_{2,0}\tau} - e^{-\lambda_{1,0}\tau}}, & t \in (t_0, t_1) \\ 0 & , \quad t \notin (t_0, t_1) \end{cases}$$

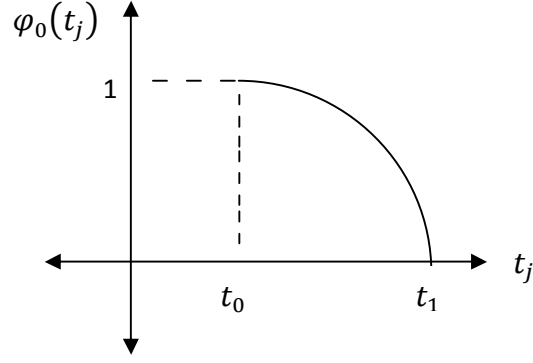
burada

$$\lambda_{1,0} = 0.5\varepsilon^{-1} [a_0 + \sqrt{a_0^2 - 4b_0}], \quad \lambda_{2,0} = 0.5\varepsilon^{-1} [a_0 - \sqrt{a_0^2 - 4b_0}].$$

$\varphi_0(t)$ fonksiyonu aşağıdaki problemin çözümüdür:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \varphi_0''(t) - a_0 \varepsilon \varphi_0'(t) + b_0 \varphi_0(t) = 0, & t_j < t < t_{j+1} \\ \varphi_0(t_0) = 1, \quad \varphi_0(t_1) = 0. \end{cases}$$

$[t_0, t_1]$ kapalı aralığında $\varphi_0(t)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.2. $\varphi_0(t)$ fonksiyonu.

(4.16) eşitliğinden

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(t) u''(t) dt + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} a(t) \varphi_0(t) u'(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} b(t) \varphi_0(t) u(t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} f(t) \varphi_0(t) dt \end{aligned}$$

elde edilir. (2.1) ve (2.2) kudratur formüllerinin uygulanması için gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(t) u''(t) dt + \varepsilon a_0 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(t) u'(t) dt + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} [a(t) - a_0] \varphi_0(t) u'(t) dt \\ & \quad + b_0 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(t) u(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} [b(t) - b_0] \varphi_0(t) u(t) dt \\ &= f_0 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} [f(t) - f_0] \varphi_0(t) \\ & \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(t) u''(t) dt + \varepsilon a_0 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(t) u'(t) dt + b_0 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(t) u(t) dt \\ &= f_0 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(t) dt - r \end{aligned} \tag{4.17}$$

olur. Burada kalan terim

$$\begin{aligned} r &= \int_{t_0}^{t_1} [f(0) - f(t)] \varphi_0(t) dt + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} [a(t) - a(0)] \varphi_0(t) u'(t) dt \\ & \quad + \int_{t_0}^{t_1} [b(t) - b(0)] \varphi_0(t) u(t) dt \end{aligned} \tag{4.18}$$

biçiminde yazılabilir.

Şimdi de (4.17) ifadesinin ilk teriminde (2.2) kuadratur formülünü uygulayabilmek için kısmi integrasyon metodunu uygularsak,

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(t) u''(t) dt &= \varepsilon^2 \left[(\varphi_0(t) u'(t)) \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0'(t) u'(t) dt \right] \\
&= -\varepsilon^2 u'(0) - \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0'(t) u'(t) dt \\
&= -\varepsilon B - \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0'(t) u'(t) dt
\end{aligned} \tag{4.19}$$

biçiminde yazılabilir. (4.17) ifadesini (4.19)' a göre düzenlersek,

$$\begin{aligned}
&-\varepsilon B - \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0'(t) u'(t) dt + \varepsilon a_0 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(t) u'(t) dt + b_0 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(t) u(t) dt \\
&= f_0 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(t) dt - r
\end{aligned} \tag{4.20}$$

olur. (4.20) ifadesinin sol tarafındaki her bir terime (t_0, t_1) aralığında sırasıyla (2.2), (2.2) ve (2.1) kuadratur formülleri uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&-\varepsilon B - \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0'(t) u'(t) dt + \varepsilon a_0 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(t) u'(t) dt + b_0 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(t) u(t) dt \\
&\approx -\varepsilon B + \varepsilon^2 u_{t,0} + \varepsilon a_0 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(t) dt \cdot u_{t,0} + b_0 u_0 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(t) dt \\
&\quad + b_0 u_{t,0} \int_{t_0}^{t_1} (t - t_0) \varphi_0(t) dt \\
&= \varepsilon^2 u_{t,0} + \varepsilon a_0 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(t) dt \cdot u_{t,0} + b_0 u_{t,0} \int_{t_0}^{t_1} t \varphi_0(t) dt - \varepsilon B + b_0 A \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(t) dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan hareketle

$$\varepsilon^2 \left[1 + \varepsilon^{-1} a_0 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(t) dt + \varepsilon^{-2} b_0 \int_{t_0}^{t_1} t \varphi_0(t) dt \right] u_{t,0} - \varepsilon B + I_0(b_0 A - f_0) + r = 0$$

yazılabilir. Gerekli düzenlemeler ardından,

$$\varepsilon^2 \theta_0 u_{t,0} - \varepsilon B + I_0(b_0 A - f_0) + r = 0 \tag{4.21}$$

olur. Burada

$$I_0 = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(t) dt = \frac{\varepsilon^2 b_0^{-1} [\lambda_{1,0}(1 - e^{-\lambda_{2,0}\tau}) - \lambda_{2,0}(1 - e^{-\lambda_{1,0}\tau})]}{e^{-\lambda_{2,0}\tau} - e^{-\lambda_{1,0}\tau}},$$

$$\theta_0 = 1 + \varepsilon^{-1} a_0 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(t) dt + \varepsilon^{-2} b_0 \int_{t_0}^{t_1} t \varphi_0(t) dt$$

$$= \frac{\tau(\lambda_{1,0} - \lambda_{2,0})}{2sh[(\lambda_{1,0} - \lambda_{2,0})\tau/2]} e^{(\lambda_{1,0} + \lambda_{2,0})\tau/2} \quad (4.22)$$

biçimindedir. Sonuç olarak (4.13) ve (4.21) bağıntılarını esas alarak ve $y_j, u(t_j)$ kesin çözümünün yaklaşık çözümü olmak üzere (1.1)-(1.2) probleminin nümerik çözümü için aşağıdaki fark denklemini yazabiliriz:

$$\begin{cases} ly_j \equiv \varepsilon^2 \theta_{1,j} y_{\bar{t},j} + \varepsilon a_j \theta_{2,j} y_{t,j}^0 + b_j y_j = f_j, & t \in w_\tau & (4.23) \\ y_0 = A & & (4.24) \\ \varepsilon^2 \theta_0 y_{t,0} - \varepsilon B + I_0(b_0 A - f_0) = 0 & & (4.25) \end{cases}$$

Burada $\theta_1, \theta_2, \theta_0$ katsayıları sırasıyla (4.14), (4.15) ve (4.22) bağıntılarıyla verilmiştir.

5. DÜZGÜN HATA DEĞERLENDİRMESİ

$z = |y - u|$ olsun. Bu durumda (4.22) - (4.24) fark şemasının hatası için

$$\begin{cases} lz = R & (5.1) \\ z_0 = 0 & (5.2) \\ \varepsilon^2 \theta_0 z_{t,0} = r & (5.3) \end{cases}$$

fark problemi sağlanır. Burada R ve r yaklaşım hataları olup sırasıyla (4.8) ve (4.18) ile tanımlanır.

Lemma 5.1

z (5.1) - (5.3) fark probleminin çözümü olsun. Bu durumda,

$$\Delta_0 |z_{t,j}| + |z_{j+1} + z_j| \leq C \left\{ \Delta_0 |z_{t,0}| + \max_{1 \leq j \leq M-1} |R_j| + \tau \sum_{j=1}^{M-2} |R_{t,j}| \right\}$$

eşitsizliği $j = 0, 1, 2, \dots, M-1$ için sağlanır. Burada $\Delta_0 = \max(\varepsilon, \tau)$ 'dir (Amiraliyev, 1998).

İspat 5.1

(5.1) denklemini z_t^0 ile çarparsak,

$$lz \equiv \varepsilon^2 \theta_1 z_{\bar{t}t} z_t^0 + \varepsilon a \theta_2 z_t^0{}^2 + b z_j z_t^0 = R z_t^0 \quad (5.4)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikte

$$\begin{aligned} z_{\bar{t}t} z_t^0 &= \left(\frac{z_t - z_{\bar{t}}}{\tau} \right) \left(\frac{z_t + z_{\bar{t}}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2\tau} (z_t^2 - z_{\bar{t}}^2) = \frac{1}{2} (z_t^2)_{\bar{t}} \\ \theta_1 z_{\bar{t}t,j} z_t^0 &= \frac{1}{2} \theta_1 (z_t^2)_{\bar{t}} = \frac{1}{2} [(\theta_1 z_t^2)_{\bar{t}} - z_{\bar{t}}^2 \theta_{1\bar{t}}] \end{aligned} \quad (5.5)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$z = \frac{1}{2}(z_{j+1} + z_{j-1}) - \frac{\tau^2}{2} z_{\bar{t}t}$$

eşitliğinden yararlanarak,

$$\begin{aligned} zz_t^0 &= \frac{1}{2}(z_{j+1} + z_{j-1}) \left(\frac{z_{j+1} - z_{j-1}}{2\tau} \right) - \frac{\tau^2}{2} z_{\bar{t}t,j} z_t^0 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{z_{j+1}^2 - z_{j-1}^2}{2\tau} \right) - \frac{\tau^2}{2} z_{\bar{t}t,j} z_t^0 \\ &= \frac{1}{2} (z^2)_t - \frac{\tau^2}{4} (z_t^2)_{\bar{t}} \\ &= \frac{1}{4} [(z^2)_t + (z^2)_{\bar{t}}] - \frac{\tau^2}{4} (z_t^2)_{\bar{t}} \\ &= \frac{1}{4} [\hat{z}^2 + z^2]_{\bar{t}} - \frac{\tau^2}{4} (z_t^2)_{\bar{t}} \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}[(x+y)^2 + (x-y)^2]$ özdeşliği dikkate alınarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} zz_t^0 &= \frac{1}{4} [\hat{z}^2 + z^2]_{\bar{t}} - \frac{\tau^2}{4} (z_t^2)_{\bar{t}} \\ &= \frac{1}{8} [(\hat{z} + z)^2]_{\bar{t}} + \frac{1}{8} [(\hat{z} - z)^2]_{\bar{t}} - \frac{\tau^2}{4} (z_t^2)_{\bar{t}} \\ &= \frac{1}{8} [(\hat{z} + z)^2]_{\bar{t}} + \frac{\tau^2}{8} \left[\left(\frac{\hat{z} - z}{\tau} \right)^2 \right]_{\bar{t}} - \frac{2\tau^2}{8} (z_t^2)_{\bar{t}} \\ &= \frac{1}{8} [(\hat{z} + z)^2]_{\bar{t}} - \frac{\tau^2}{8} (z_t^2)_{\bar{t}} \\ bzz_t^0 &= \frac{1}{8} [b(\hat{z} + z)^2]_{\bar{t}} - \frac{1}{8} b\tau^2 (z_t^2)_{\bar{t}} \\ &= \frac{1}{8} [b(\hat{z} + z)^2]_{\bar{t}} - \frac{1}{8} b_{\bar{t}} (z + \check{z})^2 - \frac{\tau^2}{8} (bz_t^2)_{\bar{t}} + \frac{\tau^2}{8} b_{\bar{t}} z_{\bar{t}}^2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

olur. (5.5) ve (5.6) bağıntıları (5.4) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \theta_1 z_{\bar{t}t} z_t^0 + \varepsilon a \theta_2 z_t^0 + bzz_t^0 &= Rz_t^0 \\ \frac{1}{2} \varepsilon^2 [(\theta_1 z_t^2)_{\bar{t}} - z_{\bar{t}}^2 \theta_{1\bar{t}}] + \varepsilon a \theta_2 z_t^0 + \frac{1}{8} [b(\hat{z} + z)^2]_{\bar{t}} - \frac{\tau^2}{8} (bz_t^2)_{\bar{t}} + \frac{\tau^2}{8} b_{\bar{t}} z_{\bar{t}}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} b_{\bar{t}} (z + \check{z})^2 + R z_t^0 \\
\frac{1}{2} \varepsilon^2 \left[\left(\theta_1 - \frac{\tau^2 b}{4 \varepsilon^2} \right) z_t^2 \right]_{\bar{t}} - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left[\left(\theta_{1\bar{t}} - \frac{\tau^2 b_{\bar{t}}}{4 \varepsilon^2} \right) z_{\bar{t}}^2 \right] + \varepsilon a \theta_2 z_t^0{}^2 + \frac{1}{8} [b(\hat{z} + z)^2]_{\bar{t}} \\
&= \frac{1}{8} b_{\bar{t}} (z + \check{z})^2 + R z_t^0 \\
\frac{1}{2} \varepsilon^2 [p z_t^2]_{\bar{t}} + \varepsilon a \theta_2 z_t^0{}^2 + \frac{1}{8} [b(\hat{z} + z)^2]_{\bar{t}} &= \frac{1}{2} \varepsilon^2 [q z_{\bar{t}}^2] + \frac{1}{8} b_{\bar{t}} (z + \check{z})^2 + R z_t^0 \quad (5.7)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$p = \theta_1 - \frac{\tau^2 b}{4 \varepsilon^2}, \quad q = \theta_{1\bar{t}} - \frac{\tau^2 b_{\bar{t}}}{4 \varepsilon^2}, \quad \hat{z} = z(t_{j+1}), \quad \check{z} = z(t_{j-1}).$$

(5.7) bağıntısını 2τ ile çarpar ve $j = 1$ ' den $j = s$ 'ye kadar toplamı alınırsa,

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 p_s z_{t,s}{}^2 - \varepsilon^2 p_0 z_{t,0}{}^2 + 2\tau \sum_{j=1}^s a_j \theta_{2,j} z_{t,j}^0{}^2 + \frac{1}{4} b_s (z_{s+1} + z_s)^2 - \frac{1}{4} b_0 (z_1 + z_0)^2 \\
= \tau \sum_{j=1}^s \left\{ \varepsilon^2 q_j z_{\bar{t},j}^2 + \frac{1}{4} b_{\bar{t},j} (z_j + z_{j-1})^2 \right\} + 2\tau \sum_{j=1}^s R_j z_{t,j}^0 \quad (5.8)
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
2\tau \sum_{j=1}^s R_j z_{t,j}^0 &= 2\tau \sum_{j=1}^s R_j \left(\frac{z_j + z_{j-1}}{2} \right)_t \\
&= \tau \sum_{j=1}^s \left(R_j (z_j + z_{j-1}) \right)_t - \tau \sum_{j=1}^s R_{t,j} (z_{j+1} + z_j) \\
&= R_{s+1} (z_{s+1} + z_s) - R_1 (z_1 + z_0) - \tau \sum_{j=1}^s R_{t,j} (z_{j+1} + z_j) \\
&= R_{s+1} (z_{s+1} + z_s) - \tau R_s (z_{s+1} + z_s) - R_1 (z_1 + z_0) - \tau \sum_{j=1}^{s-1} R_{t,j} (z_{j+1} + z_j) \\
&= R_{s+1} (z_{s+1} + z_s) - (R_{s+1} + R_s) (z_{s+1} + z_s) - R_1 (z_1 + z_0) - \tau \sum_{j=1}^{s-1} R_{t,j} (z_{j+1} + z_j) \\
&= R_s (z_{s+1} + z_s) - R_1 (z_1 + z_0) - \tau \sum_{j=1}^{s-1} R_{t,j} (z_{j+1} + z_j)
\end{aligned}$$

eşitliği kullanılarak (5.8)' de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 p_s z_{t,s}^2 + \frac{1}{4} b_s (z_{s+1} + z_s)^2 \\
& \leq \varepsilon^2 p_0 z_{t,0}^2 + \frac{1}{4} b_0 (z_1 + z_0)^2 - R_1 (z_1 + z_0) + R_s (z_{s+1} + z_s) \\
& + \tau \sum_{j=1}^s \left\{ \varepsilon^2 q_j z_{\bar{t},j}^2 + \frac{1}{4} b_{\bar{t},j} (z_j + z_{j-1})^2 \right\} - \tau \sum_{j=1}^{s-1} R_{t,j} (z_{j+1} + z_j), s \leq M-1 \quad (5.9)
\end{aligned}$$

olur.

$\tau \geq \varepsilon$ için $C_0 \tau^2 \leq \varepsilon^2 p \leq C_1 \tau^2$ ve $\varepsilon^2 |q| \leq C_0 \tau^2$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
p &= \theta_1 - \frac{\tau^2 b}{4\varepsilon^2} \\
&= \frac{b\tau^2}{4\varepsilon^2} \left[1 + \operatorname{cth} \left(\lambda_1 \frac{\tau}{2} \right) \operatorname{cth} \left(\lambda_2 \frac{\tau}{2} \right) \right] - \frac{\tau^2 b}{4\varepsilon^2} \\
\frac{\varepsilon^2 p}{\tau^2} &= \frac{b}{4} \operatorname{cth} \left(\lambda_1 \frac{\tau}{2} \right) \operatorname{cth} \left(\lambda_2 \frac{\tau}{2} \right).
\end{aligned}$$

Şimdi de $\tau/\varepsilon \rightarrow \infty$ ' a limit alınırsa,

$$\lim_{\tau/\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{b}{4} \operatorname{cth} \left(\lambda_1 \frac{\tau}{2} \right) \operatorname{cth} \left(\lambda_2 \frac{\tau}{2} \right) = \frac{\beta}{4} = C_0.$$

$\tau/\varepsilon \rightarrow 1$ 'e limit alınırsa

$$\lim_{\tau/\varepsilon \rightarrow 1} \frac{b}{4} \operatorname{cth} \left(\lambda_1 \frac{\tau}{2} \right) \operatorname{cth} \left(\lambda_2 \frac{\tau}{2} \right) = C_1$$

olur. Yukarıdaki limit değerleri dikkate alındığında

$$C_0 \tau^2 \leq \varepsilon^2 p \leq C_1 \tau^2 \quad (5.10)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\begin{aligned}
q &= \theta_{1\bar{t}} - \frac{\tau^2 b_{\bar{t}}}{4\varepsilon^2} \\
&= \frac{\tau^2 b_{\bar{t}}}{4\varepsilon^2} \left[1 + \operatorname{cth} \left(\lambda_1 \frac{\tau}{2} \right) \operatorname{cth} \left(\lambda_2 \frac{\tau}{2} \right) \right]_{\bar{t}} - \frac{\tau^2 b_{\bar{t}}}{4\varepsilon^2} \\
&= \left[\frac{\tau^2 b_{\bar{t}}}{4\varepsilon^2} \cdot \operatorname{cth} \left(\lambda_1 \frac{\tau}{2} \right) \operatorname{cth} \left(\lambda_2 \frac{\tau}{2} \right) \right]_{\bar{t}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\tau^2 b_{\bar{\tau}}}{4\varepsilon^2} \operatorname{cth}\left(\lambda_1 \frac{\tau}{2}\right) \operatorname{cth}\left(\lambda_2 \frac{\tau}{2}\right) + \frac{\tau^2 b}{4\varepsilon^2} \left[-\frac{\operatorname{cth}\left(\lambda_2 \frac{\tau}{2}\right)}{\operatorname{sh}^2\left(\lambda_1 \frac{\tau}{2}\right)} \cdot \frac{\tau}{2} \lambda_1' - \frac{\operatorname{cth}\left(\lambda_1 \frac{\tau}{2}\right)}{\operatorname{sh}^2\left(\lambda_2 \frac{\tau}{2}\right)} \cdot \frac{\tau}{2} \lambda_2' \right].$$

burada $\tau/\varepsilon \rightarrow \infty$ a limit alınır

$$\begin{aligned} \lim_{\tau/\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon^2 |q|}{\tau^2} &= \lim_{\tau/\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{b_{\bar{\tau}}}{4} \operatorname{cth}\left(\lambda_1 \frac{\tau}{2}\right) \operatorname{cth}\left(\lambda_2 \frac{\tau}{2}\right) \\ &+ \lim_{\tau/\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{b \tau}{4} \frac{\operatorname{cth}\left(\lambda_2 \frac{\tau}{2}\right)}{2 \operatorname{sh}^2\left(\lambda_1 \frac{\tau}{2}\right)} \cdot \frac{\tau}{2} \lambda_1' + \lim_{\tau/\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{b \tau}{4} \frac{\operatorname{cth}\left(\lambda_1 \frac{\tau}{2}\right)}{2 \operatorname{sh}^2\left(\lambda_2 \frac{\tau}{2}\right)} \cdot \frac{\tau}{2} \lambda_2' \\ &= \lim_{\tau/\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{b_{\bar{\tau}}}{4} = \frac{\beta}{4} = C_0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

olur. Sonuç olarak $\varepsilon^2 |q| \leq C_0 \tau^2$ yazılabilir. $\tau \leq \varepsilon$ için $0 < C_0 \leq p \leq C_1$ ve $|q| \leq C_0$ olduğunu aşikardır.

(5.9) eşitsizliğinin sağ tarafına μ eşitsizliğini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\delta_s \leq \delta_* + \tau \sum_{j=1}^s \{d_j \delta_{j-1} + \rho_j\}, \quad s \leq M-1 \quad (5.12)$$

Burada

$$\delta_j = \varepsilon^2 p_j z_{t,j}^2 + \frac{1}{4} b_j (z_{j+1} + z_j)^2$$

$$\delta_* = C_0 \delta_0 + C_1 \max_{1 \leq j \leq M-1} |R_j|^2, \quad C_0 > 1$$

$$j = 1, 2, \dots, s-1 \text{ ve } \rho_s = 0 \text{ olmak üzere } |\rho_j| \leq C |R_{t,j}| \cdot |z_{j+1} + z_j|$$

$$j = 1, 2, \dots, s \text{ için } 0 \leq d_j \leq C.$$

(5.12) eşitsizliğine Gronwall eşitsizliğinin fark benzerini uygulayalım:

$$\begin{aligned} \delta_s &\leq e^{Ct_s} \left\{ \delta_* + C\tau \sum_{j=1}^s |\rho_j| \right\} \\ &= e^{Ct_s} \left\{ C_0 \delta_0 + C_1 \max_{1 \leq j \leq M-1} |R_j|^2 + C\tau \sum_{j=1}^{s-1} |R_{t,j}| \cdot |z_{j+1} + z_j| \right\} \end{aligned}$$

$$\leq C \left\{ \Delta_0^2 z_{t,0}^2 + |z_1|^2 + \max_{1 \leq j \leq M-1} |R_j|^2 + \tau \sum_{j=1}^{s-1} |R_{t,j}| \cdot |z_{j+1} + z_j| \right\} \quad (5.13)$$

Burada $\Delta_0 = \max(\varepsilon, \tau)$ olmak üzere $\varepsilon^2 p_0 \leq C \varepsilon^2 \leq C \Delta_0^2$ yazılabilir.

(5.13) eşitsizliği düzenlenirse

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 p_s z_{t,s}^2 + \frac{1}{4} b_s (z_{s+1} + z_s)^2 \\ \leq C \left\{ \Delta_0^2 z_{t,0}^2 + |z_1|^2 + \max_{1 \leq j \leq M-1} |R_j|^2 + \tau \sum_{j=1}^{M-2} |R_{t,j}| |z_{j+1} + z_j| \right\} \\ \varepsilon^2 p_s z_{t,s}^2 + \max_{1 \leq j \leq M-1} (z_{s+1} + z_s)^2 \\ \leq C \left\{ \Delta_0^2 z_{t,0}^2 + |z_1|^2 + \max_{1 \leq j \leq M-1} |R_j|^2 + \max_{1 \leq j \leq M-2} |z_{j+1} + z_j| \cdot \tau \sum_{j=1}^{M-2} |R_{t,j}| \right\} \end{aligned}$$

Eşitsizliğin sağ tarafına μ eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 p_s z_{t,s}^2 + \max_{1 \leq j \leq M-1} (z_{s+1} + z_s)^2 \\ \leq C \left\{ \Delta_0^2 z_{t,0}^2 + |z_1|^2 + \max_{1 \leq j \leq M-1} |R_j|^2 + \left(\tau \sum_{j=1}^{M-2} |R_{t,j}| \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

Burada $z_1 = z_0 + \tau z_{t,0}$ eşitliği yazılıp ardından karekök eşitsizliği uygulanırsa

$$\Delta_0 |z_{t,j}| + |z_{j+1} + z_j| \leq C \left\{ \Delta_0 |z_{t,0}| + \max_{1 \leq j \leq M-1} |R_j| + \tau \sum_{j=1}^{M-2} |R_{t,j}| \right\}$$

olur.

Lemma 5.2. R ve r yaklaşım hataları için

$$\Delta_0 |z_{t,0}| \leq C \tau$$

$$\|R\|_{C(w_\tau)} \leq C \tau$$

$$\tau \sum_{i=1}^{M-2} |R_{t,i}| \leq C \tau$$

eşitsizlikleri mevcuttur (Amiraliyev, 1998).

İspat 5.2

$\|R\|_{C(w_\tau)} \leq C\tau$ olduğunu gösterelim:

$$R_j = \chi_j^{-1} \varepsilon \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} [a(t) - a(t_j)] \varphi_j(t) u'(t) dt \\ + \chi_j^{-1} \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} [b(t) - b(t_j)] \varphi_j(t) u(t) dt + \chi_j^{-1} \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} [f(t_j) - f(t)] \varphi_j(t) dt.$$

Burada

$$\chi_j = \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) dt$$

eşitliği ve lemma 3.2 göz önünde bulundurulursa $|u'(t)| \leq C/\varepsilon$ ve $|u(t)| \leq C$ eşitsizlikleri yazılabilir. Ayrıca $|a(t) - a(t_j)| \leq |a'(\xi)|\tau$ eşitsizliğini ortalama değer teoreminden yazabiliriz. Bu eşitsizlikleri R_j eşitliğinde dikkate alırsak:

$$\|R\|_{C(w_\tau)} \leq \varepsilon^2 \frac{C_1}{\varepsilon} \tau \frac{C_2}{\varepsilon} \chi_j^{-1} \chi_j + C_3 \tau C_4 \chi_j^{-1} \chi_j + C_5 \tau \chi_j^{-1} \chi_j$$

$$\|R\|_{C(w_\tau)} \leq C\tau,$$

olur.

Şimdi de $\Delta_0|_{z_{t,0}}| \leq C\tau$ olduğunu gösterelim.

$$r = \int_{t_0}^{t_1} [f(0) - f(t)] \varphi_0(t) dt + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} [a(t) - a(0)] u'(t) \varphi_0(t) dt \\ + \int_{t_0}^{t_1} [b(t) - b(0)] u(t) \varphi_0(t) dt$$

(4.3) eşitliğini ele alalım,

$$\varepsilon^2 \theta_0 z_{t,0} = r$$

$$\Delta_0|_{z_{t,0}}| = \Delta_0 \frac{|r|}{\varepsilon^2 \theta_0} \leq \varepsilon \frac{|r|}{\varepsilon^2 \theta_0} = \frac{|r|}{\varepsilon \theta_0} \leq \frac{|r|}{\varepsilon} \quad (5.14)$$

burada

$$\lim_{\tau/\varepsilon \rightarrow 0} \theta_0 = \lim_{\tau/\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\lambda_{1,0} - \lambda_{2,0}) \tau/2}{\text{sh}[(\lambda_{1,0} - \lambda_{2,0}) \tau/2]} e^{(\lambda_{1,0} - \lambda_{2,0}) \tau/2} = 1$$

$|u'(t)| \leq C/\varepsilon$, $|u(t)| \leq C$, $|\varphi_0(t)| \leq 1$ ve ortalama değer teoreminden benzeri olan

terimlerde $|f(t) - f(t_j)| \leq |f'(\xi)|\tau$ eşitsizliğini (5.14)'te uygularsak:

$$\Delta_0 |z_{t,0}| \leq \frac{|r|}{\varepsilon} \leq \frac{\tau C_1 \tau}{\varepsilon} + \varepsilon \frac{C_2 \tau \cdot \frac{C_3}{\varepsilon} \cdot \tau}{\varepsilon} + \frac{C_4 \tau C_5 \tau}{\varepsilon} \leq C\tau$$

olur.

Teorem 5.1.

u (1.1)-(1.2) probleminin ve y (4.22)-(4.24) probleminin çözümü ise

$$\max_{1 \leq j \leq M} |y_j - u_j| \leq C\tau \quad (5.15)$$

hata değerlendirme doğrudur (Amiraliyev, 1998).

İspat 5.1.

$$z_{j+1} = (z_{j+1} + z_j)/2 + (\tau z_{t,j})/2$$

özdeşliğinden

$$|z_{j+1}| \leq |z_{j+1} + z_j|/2 + \Delta_0 |z_{t,j}|/2$$

eşitsizliği elde edilir. Burada Lemma 5.1 ve Lemma 5.2 sonuçları kullanılırsa (5.15) eşitsizliği elde edilir.

6. NÜMERİK SONUÇLAR

6.1. Çözüm Algoritması

$$Lu \equiv \varepsilon^2 u'' + \varepsilon a(t)u' + b(t)u = f(t), \quad 0 < t \leq T$$

$$u(0) = A, \quad u'(0) = B/\varepsilon$$

$$w_\tau = \{t_j = j\tau, j = \overline{1, M-1}; M\tau = T\}$$

$$a(t) \geq \alpha > 0, \quad b(t) \geq \beta > 0$$

$$a^2(t) - 4b(t) > 0$$

Yukarıdaki problemin fark şeması

$$ly_j \equiv \varepsilon^2 \theta_{1,j} y_{t,j} + \varepsilon a_j \theta_{2,j} y_{t,j}^0 + b_j y_j = f_j, \quad t \in w_\tau$$

$$y_0 = A$$

$$\varepsilon^2 \theta_0 y_{t,0} - \varepsilon B + I_0(b_0 A - f_0) = 0$$

biçimindedir. Burada

$$\theta_{1,j} = \frac{b_j \tau^2}{4\varepsilon^2} \left[1 + \operatorname{cth} \left(\frac{\lambda_{1,j} \tau}{2} \right) \operatorname{cth} \left(\frac{\lambda_{2,j} \tau}{2} \right) \right]$$

$$\theta_{2,j} = \frac{b_j \tau}{2a_j \varepsilon} \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\lambda_{1,j} \tau}{2} \right) + \operatorname{cth} \left(\frac{\lambda_{2,j} \tau}{2} \right) \right]$$

$$\lambda_{1,j} = 0.5\varepsilon^{-1} \left[a_j + \sqrt{a_j^2 - 4b_j} \right], \quad \lambda_{2,j} = 0.5\varepsilon^{-1} \left[a_j - \sqrt{a_j^2 - 4b_j} \right]$$

$$I_0 = \frac{\varepsilon^2 b_0^{-1} [\lambda_{1,0} (1 - e^{-\lambda_{2,0} \tau}) - \lambda_{2,0} (1 - e^{-\lambda_{1,0} \tau})]}{e^{-\lambda_{2,0} \tau} - e^{-\lambda_{1,0} \tau}}$$

$$\theta_0 = \frac{\tau(\lambda_{1,0} - \lambda_{2,0})}{2\operatorname{sh}[(\lambda_{1,0} - \lambda_{2,0})\tau/2]} e^{(\lambda_{1,0} + \lambda_{2,0})\tau/2}$$

Şeklindedir. Fark şeması tekrar düzenlenirse:

$$y_{j+1} = \left[\frac{4\varepsilon^2 \theta_{1,j} - 2\tau^2 b_j}{2\varepsilon^2 \theta_{1,j} + \varepsilon \tau a_j \theta_{2,j}} \right] y_j + \left[\frac{-2\varepsilon^2 \theta_{1,j} + \varepsilon \tau b_j \theta_{2,j}}{2\varepsilon^2 \theta_{1,j} + \varepsilon \tau a_j \theta_{2,j}} \right] y_{j-1} + \frac{\tau^2 f_j}{2\varepsilon^2 \theta_{1,j} + \varepsilon \tau a_j \theta_{2,j}}$$

$$y_0 = A$$

$$y_1 = \tau \frac{\varepsilon B + I_0(f_0 - b_0 A)}{\varepsilon^2 \theta_0} + A$$

elde edilir.

6.2. Örnek

$$\varepsilon^2 u'' + \varepsilon(2t + 3)u' + (t^2 + 3t + 2 + \varepsilon)u = f(t), \quad 0 < t \leq 1 \quad (6.1)$$

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 1/\varepsilon \quad (6.2)$$

verilsin. Burada

$$f(t) = 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon t(2t + 3) + t^2(t^2 + 3t + 2 + \varepsilon).$$

(6.1)-(6.2) diferansiyel denkleminde Sturm dönüşümü uygulanırsa sabit katsayılı diferansiyel denklem haline gelir. Buradan hareketle

$$u = v \cdot e^{-\frac{1}{2} \int \frac{2t+3}{\varepsilon} dt} = v \cdot e^{-\frac{t^2+3t}{2\varepsilon}} \quad (6.3)$$

diferansiyel denklemde $u(t)$ fonksiyonunun uygun türevlerinde Sturm dönüşümü dikkate alınarak kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$v'' + K(t)v = Q(t)$$

olur. Burada

$$K(t) = \frac{(t^2 + 3t + 2 + \varepsilon)}{\varepsilon^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{2t + 3}{\varepsilon} \right)^2 - \left(\frac{2t + 3}{\varepsilon} \right)', \quad Q(t) = \frac{f}{\varepsilon^2} e^{\frac{t^2+3t}{2\varepsilon}}$$

şeklindedir. K ve Q fonksiyonları hesaplanırsa

$$\begin{cases} v'' - \frac{1}{4\varepsilon^2} v = \frac{f}{\varepsilon^2} e^{\frac{t^2+3t}{2\varepsilon}} \\ v(0) = 1 \\ v'(0) = 5/2\varepsilon \end{cases}$$

sabit katsayılı diferansiyel denklemi elde edilir. $v(t)$ fonksiyonunun çözümü:

$$v(t) = 3e^{\frac{t}{2\varepsilon}} - 2e^{-\frac{t}{2\varepsilon}}$$

olmak üzere (6.3) dönüşümünde yerine yazılırsa,

$$u(t) = e^{-\frac{t^2+3t}{2\varepsilon}} \left(3 - 2e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \right) + t^2$$

kesin çözümü elde edilir. Kesin çözüme ilişkin seçeceğimiz pozitif küçük ε parametresi için fark şemasında belirtilen $a^2(t) - 4b(t) > 0$ şartını sağlatalım:

$$a(t) = (2t + 3), \quad b(t) = (t^2 + 3t + 2 + \varepsilon)$$

$$a^2(t) - 4b(t) > 0$$

$$\varepsilon < 0.25.$$

$z_j = \max_{\bar{w}_\tau} |y_j - u_j|$ için elde edilen bazı sonuçlar verilmiştir (Bkz. Çizelge 6.1).

Çizelge 6.1. (6.1)-(6.2) probleminin çözümünden elde edilen w_τ şebekesi üzerinde ε' na göre maksimum hata ve P^N yakınsaklık oranları

N	64	128	256	512	1024	2048	4096
ε							
2^{-3}	1.01902E-1 0.99	5.12832E-2 0.99	2.25733E-2 1.00	1.28914E-2 1.00	6.45208E-3 1.00	3.22771E-3 1.00	1.61427E-3
2^{-4}	2.04092E-1 0.98	1.03675E-1 0.99	5.21621E-2 0.99	2.26193E-2 1.00	1.31245E-2 1.00	6.56960E-3 1.00	3.28668E-3
2^{-5}	4.40839E-1 0.99	2.05215E-1 0.98	1.04097E-1 0.99	5.24412E-2 0.99	2.63228E-2 1.00	1.31964E-2 1.00	6.60616E-3
2^{-6}	8.07405E-1 0.99	4.07704E-1 0.99	2.05519E-1 0.98	1.04195E-1 0.99	5.25263E-2 0.99	2.63795E-2 1.00	1.32215E-2

P^N düzgün yakınsaklık oranı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$P^N = \log_2 \left(\frac{e^N}{e^{2N}} \right).$$

Burada

$$e^N = \max_{\varepsilon} e_{\varepsilon}^N \text{ ve } e_{\varepsilon}^N = \|y - u\|_{\infty, \bar{w}_\tau}$$

biçimindedir. (4.23)-(4.25) probleminin fark şemasından elde edilen nümerik sonuçlar karşılaştırılarak, hatalar ve düzgün yakınsaklık oranı bulunmuş ve Çizelge 6.1.'de gösterilmiştir. Nümerik sonuçlar, önerilen şemanın iyi çalışır biçimde olduğunu göstermektedir.

Örnek 6.2., 6.1' de verilen çözüm algoritması yardımıyla (6.3)' te belirtilen matematica programına işlenerek, düzgün şebekedeki her bir düğüm noktasındaki kesin çözümü u_j , yaklaşık çözümü y_j ve hatası z_j olmak üzere verilmiştir. Yaklaşım tespiti için temsilen ilk tablonun birinci sütun genel sonuçları aşağıda tablolar ve grafikler üzerinde gösterilmiştir.

6.3. Program

Örnek 6.2. için mathematica programı aşağıda verilmiştir.

```

eps = Input["eps="]; n = Input["n="]; h =  $\frac{1}{n}$ ; Do[t[i] = i * h, {i, 0, n}];
Print["eps=", eps]; Print["n=", n]; Print["h=", N[h]];
Do[a[i] = 2 * t[i] + 3, {i, 0, n}];
Do[b[i] = (t[i])^2 + 3 * (t[i]) + 2 + eps, {i, 0, n}];
Do[f[i] = 2 * eps^2 + 2 * eps * t[i] * a[i] + ((t[i])^2) * (b[i]), {i, 0, n}];
Do[lamda1[i] =  $\frac{1}{2 * eps} (a[i] + \sqrt{(a[i])^2 - 4 * (b[i])})$ , {i, 0, n}];
Do[lamda2[i] =  $\frac{1}{2 * eps} (a[i] - \sqrt{(a[i])^2 - 4 * (b[i])})$ , {i, 0, n}];
tet0 = (h * (lamda1[0] - lamda2[0]) * (Exp[ $\frac{1}{2} ((lamda1[0] + lamda2[0]) * h)$ ]]) /
  (2 * Sinh[ $\frac{1}{2} ((lamda1[0] - lamda2[0]) * h)$ ]);
ntg =
  ((eps^2) * ((lamda1[0]) * (1 - Exp[(-lamda2[0]) * h]) -
    (lamda2[0]) * (1 - Exp[(-lamda1[0]) * h]))) /
  ((b[0]) * (Exp[(-lamda2[0]) * h] - Exp[(-lamda1[0]) * h]));
Do[tet1[i] =  $\frac{(b[i]) * h^2}{4 * (eps)^2} * (1 + Coth[\frac{(lamda1[i]) * h}{2}]) *
  Coth[\frac{(lamda2[i]) * h}{2}]$ , {i, 0, n}];
Do[
  tet2[i] =  $\frac{(b[i]) * h}{2 * (a[i]) * eps} * (Coth[\frac{(lamda1[i]) * h}{2}] + Coth[\frac{(lamda2[i]) * h}{2}])$ ,
  {i, 0, n}]; y[0] = 1.0;
y[1] = 1.0 +  $\frac{h}{(eps^2) * tet0} * (eps + ntg * ((b[0]) - (f[0])))$ ;
Do[
  y[i + 1] =
  (( $\frac{2 * (eps^2) * tet1[i]}{h^2} - b[i]$ ) * (y[i]) +
  ( $\frac{eps * (a[i]) * tet2[i]}{2 * h} - \frac{(eps^2) * tet1[i]}{h^2}$ ) * (y[i - 1]) + f[i]) /
  ( $\frac{(eps^2) * tet1[i]}{h^2} + \frac{eps * (a[i]) * tet2[i]}{2 * h}$ ), {i, 1, n - 1}];
Do[u[i] = (t[i])^2 + (Exp[ $-\frac{(t[i])^2 + 2 * (t[i])}{2 * eps}$ ]]) * (3 - 2 * Exp[ $-\frac{t[i]}{eps}$ ]]),
  {i, 0, n}]; Do[Print["y[" , i, "]=", y[i]], {i, 0, n}];
Do[Print["u[" , i, "]=", u[i]], {i, 0, n}];
Do[Print["r[" , i, "]=", NumberForm[N[Abs[y[i] - u[i]]], 8]],
  {i, 0, n}];

```

6.4. Çizelge ve Grafikler

Düzgün şebekede 6.2.Örnek için elde edilen bazı sonuçlar 64 adım için aşağıdaki çizelgelerde verilmiştir. Çizelgeler grafitize edilerek hata davranışları gözlemlenmiştir.

Çizelge 6.2. $N = 2^6$, $\varepsilon = 2^{-3}$ için düğüm noktalarındaki fonksiyon değerleri

j	y_j	u_j	z_j
0	1.000000	1.000000	0.000000
1	1.118110	1.089070	0.029045
2	1.173680	1.119940	0.053742
3	1.182800	1.109560	0.073241
4	1.158330	1.070940	0.087394
5	1.110460	1.013970	0.096495
6	1.047190	0.946090	0.101102
7	0.974709	0.872807	0.101902
8	0.897749	0.798126	0.099623
9	0.819867	0.724893	0.094974
10	0.743670	0.655064	0.088606
11	0.671010	0.589917	0.081094
12	0.603146	0.530221	0.072924
13	0.540869	0.476370	0.064499
14	0.484617	0.428484	0.056133
15	0.434555	0.386486	0.048069
16	0.390648	0.350169	0.040479
17	0.352719	0.319237	0.033482
18	0.320489	0.293343	0.027146
19	0.293615	0.272112	0.021503
20	0.271717	0.255162	0.016554
21	0.254397	0.242118	0.012279
22	0.241257	0.232616	0.008640
23	0.231907	0.226317	0.005589
24	0.225976	0.222904	0.003072
25	0.223116	0.222085	0.001031
26	0.223005	0.223597	0.000592
27	0.225348	0.227202	0.001854
28	0.229880	0.232687	0.002808
29	0.236361	0.239863	0.003508
30	0.244579	0.248564	0.003985
31	0.254349	0.258641	0.004296
32	0.265506	0.269967	0.004461
33	0.277909	0.282430	0.004522
34	0.291433	0.295934	0.004500
35	0.305974	0.310393	0.004419
36	0.321442	0.325737	0.004295
37	0.337760	0.341903	0.004143
38	0.354863	0.358838	0.003976
39	0.372696	0.376498	0.003802
40	0.391216	0.394843	0.003627
41	0.410382	0.413842	0.003459
42	0.430166	0.433466	0.003300
43	0.450540	0.453692	0.003152
44	0.471483	0.474502	0.003019
45	0.492980	0.495879	0.002899
46	0.515015	0.517808	0.002793
47	0.537578	0.540279	0.002701
48	0.560666	0.563282	0.002622
49	0.584253	0.586810	0.002557
50	0.608352	0.610855	0.002503
51	0.632953	0.635412	0.002459
52	0.658053	0.660478	0.002425
53	0.683648	0.686047	0.002399
54	0.709736	0.712118	0.002382
55	0.736316	0.738687	0.002371
56	0.763387	0.765753	0.002366
57	0.790948	0.793314	0.002366
58	0.818999	0.821369	0.002370
59	0.847538	0.849916	0.002379
60	0.876565	0.878956	0.002390
61	0.906081	0.908486	0.002405
62	0.936085	0.938507	0.002422
63	0.966576	0.969018	0.002441
64	0.997556	1.000020	0.002463

Çizelge 6.3. $N = 2^6$, $\varepsilon = 2^{-4}$ için düğüm noktalarındaki fonksiyon değerleri

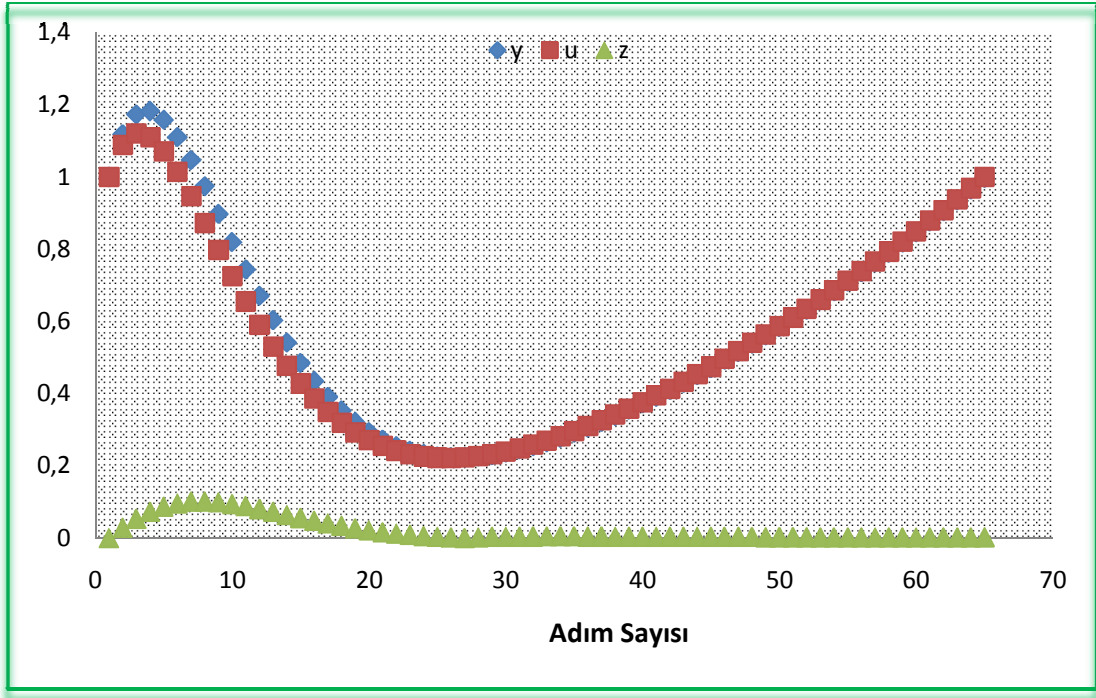
j	y_j	u_j	z_j
0	1.000000	1.000000	0.000000
1	1.222410	1.121390	0.101016
2	1.244900	1.076380	0.168523
3	1.156650	0.956120	0.200530
4	1.015340	0.811246	0.204092
5	0.856836	0.668311	0.188524
6	0.702218	0.539916	0.162301
7	0.562764	0.430823	0.131942
8	0.443474	0.341597	0.101877
9	0.345490	0.270739	0.074751
10	0.267742	0.215893	0.051849
11	0.208032	0.174505	0.033527
12	0.163716	0.144158	0.019558
13	0.132122	0.122719	0.009403
14	0.110779	0.108386	0.002393
15	0.097533	0.099683	0.002150
16	0.090576	0.095420	0.004844
17	0.088443	0.094660	0.006218
18	0.089976	0.096670	0.006695
19	0.094283	0.100884	0.006602
20	0.100690	0.106869	0.006179
21	0.108698	0.114296	0.005597
22	0.117948	0.122915	0.004966
23	0.128182	0.132541	0.004359
24	0.139222	0.143035	0.003813
25	0.150947	0.154294	0.003347
26	0.163276	0.166242	0.002965
27	0.176159	0.178824	0.002664
28	0.189562	0.191998	0.002435
29	0.203466	0.205734	0.002268
30	0.217861	0.220013	0.002151
31	0.232742	0.234817	0.002075
32	0.248105	0.250136	0.002031
33	0.263950	0.265963	0.002012
34	0.280279	0.282290	0.002011
35	0.297091	0.299116	0.002025
36	0.314387	0.316436	0.002049
37	0.332168	0.334248	0.002080
38	0.350435	0.352552	0.002117
39	0.369188	0.371347	0.002158
40	0.388428	0.390631	0.002202
41	0.408155	0.410404	0.002249
42	0.428370	0.430667	0.002297
43	0.449071	0.451418	0.002346
44	0.470260	0.472657	0.002397
45	0.491937	0.494386	0.002448
46	0.514101	0.516602	0.002501
47	0.536752	0.539307	0.002554
48	0.559891	0.562500	0.002609
49	0.583518	0.586182	0.002664
50	0.607632	0.610352	0.002719
51	0.632233	0.635010	0.002776
52	0.657323	0.660156	0.002833
53	0.682900	0.685791	0.002891
54	0.708964	0.711914	0.002950
55	0.735516	0.738525	0.003009
56	0.762556	0.765625	0.003069
57	0.790083	0.793213	0.003130
58	0.818097	0.821289	0.003191
59	0.846600	0.849854	0.003253
60	0.875590	0.878906	0.003316
61	0.905067	0.908447	0.003380
62	0.935032	0.938477	0.003444
63	0.965485	0.968994	0.003509
64	0.996425	1.000000	0.003575

Çizelge 6.4. $N = 2^6$, $\varepsilon = 2^{-5}$ için düğüm noktalarındaki fonksiyon değerleri

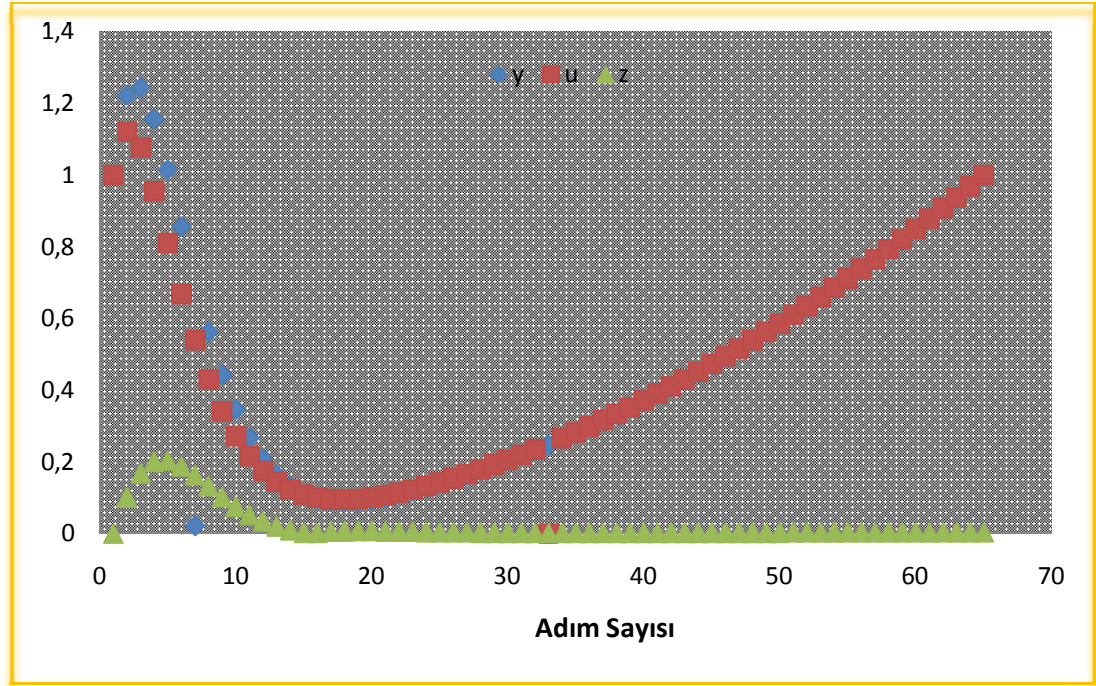
j	y_j	u_j	z_j
0	1.000000	1.000000	0.000000
1	1.395340	1.079850	0.315484
2	1.229420	0.821030	0.408390
3	0.903961	0.552329	0.351632
4	0.594363	0.350902	0.243461
5	0.358814	0.217225	0.141588
6	0.201643	0.134249	0.067394
7	0.107265	0.085267	0.021997
8	0.056489	0.057895	0.001405
9	0.033083	0.043883	0.010799
10	0.025442	0.038030	0.012587
11	0.026156	0.037162	0.011006
12	0.030933	0.039386	0.008452
13	0.037519	0.043588	0.006068
14	0.044867	0.049123	0.004255
15	0.052575	0.055620	0.003044
16	0.060551	0.062870	0.002318
17	0.068820	0.070754	0.001933
18	0.077441	0.079206	0.001764
19	0.086468	0.088189	0.001721
20	0.095938	0.097684	0.001746
21	0.105876	0.107681	0.001804
22	0.116292	0.118172	0.001879
23	0.127193	0.129154	0.001961
24	0.138582	0.140627	0.002045
25	0.150458	0.152589	0.002131
26	0.162822	0.165040	0.002217
27	0.175673	0.177979	0.002305
28	0.189012	0.191406	0.002394
29	0.202837	0.205322	0.002484
30	0.217150	0.219727	0.002576
31	0.231950	0.234619	0.002669
32	0.247237	0.250000	0.002763
33	0.263011	0.265869	0.002858
34	0.279272	0.282227	0.002954
35	0.296019	0.299072	0.003052
36	0.313254	0.316406	0.003152
37	0.330976	0.334229	0.003252
38	0.349185	0.352539	0.003354
39	0.367881	0.371338	0.003457
40	0.387064	0.390625	0.003561
41	0.406734	0.410400	0.003666
42	0.426891	0.430664	0.003773
43	0.447535	0.451416	0.003881
44	0.468666	0.472656	0.003990
45	0.490284	0.494385	0.004101
46	0.512389	0.516602	0.004212
47	0.534981	0.539307	0.004325
48	0.558060	0.562500	0.004439
49	0.581626	0.586182	0.004555
50	0.605680	0.610352	0.004671
51	0.630220	0.635010	0.004789
52	0.655248	0.660156	0.004908
53	0.680762	0.685791	0.005028
54	0.706764	0.711914	0.005150
55	0.733253	0.738525	0.005272
56	0.760228	0.765625	0.005396
57	0.787691	0.793213	0.005521
58	0.815641	0.821289	0.005648
59	0.844078	0.849854	0.005775
60	0.873002	0.878906	0.005904
61	0.902413	0.908447	0.006033
62	0.932312	0.938477	0.006164
63	0.962697	0.968994	0.006297
64	0.993569	1.000000	0.006430

Çizelge 6.5. $N = 2^6$, $\varepsilon = 2^{-6}$ için düğüm noktalarındaki fonksiyon değerleri

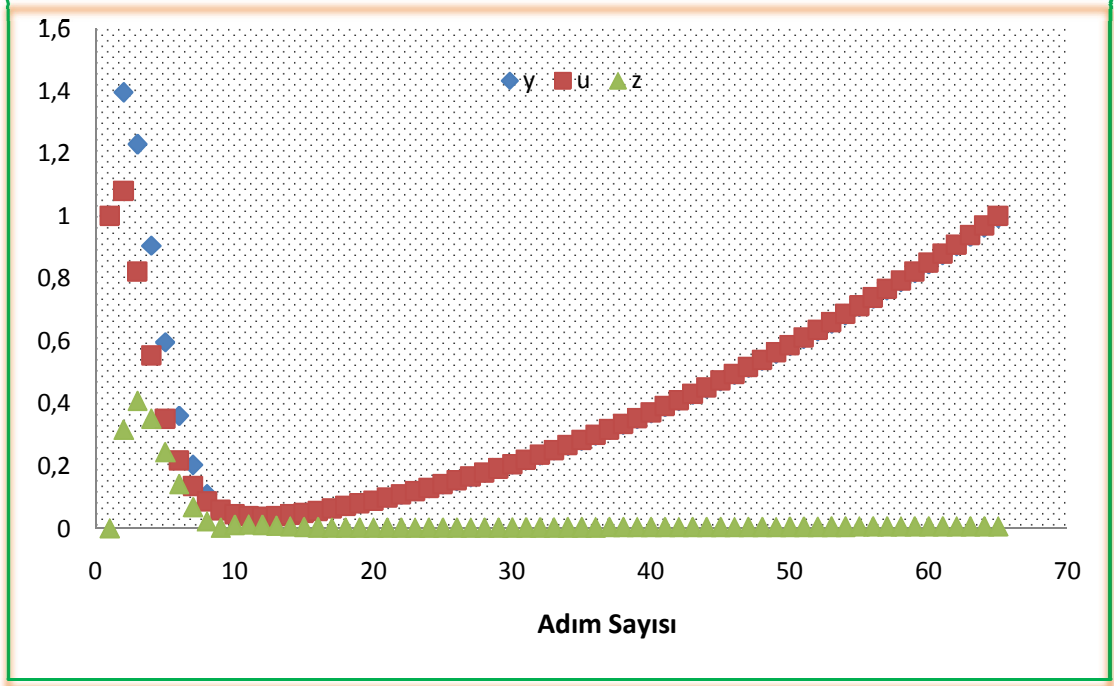
j	y_j	u_j	z_j
0	1.000000	1.000000	0.000000
1	1.634140	0.826730	0.807405
2	0.958059	0.358987	0.599072
3	0.374833	0.136796	0.238036
4	0.092645	0.051804	0.040841
5	0.002525	0.022656	0.020130
6	-0.00866	0.014393	0.023054
7	0.000652	0.013827	0.013175
8	0.010530	0.016235	0.005704
9	0.017626	0.019972	0.002345
10	0.023078	0.024476	0.001397
11	0.028183	0.029560	0.001376
12	0.033585	0.035162	0.001576
13	0.039486	0.041261	0.001775
14	0.045908	0.047852	0.001943
15	0.052837	0.054931	0.002094
16	0.060259	0.062500	0.002240
17	0.068168	0.070556	0.002388
18	0.076562	0.079101	0.002539
19	0.085442	0.088134	0.002692
20	0.094808	0.097656	0.002847
21	0.104660	0.107666	0.003005
22	0.114999	0.118164	0.003165
23	0.125823	0.129150	0.003327
24	0.137133	0.140625	0.003491
25	0.148930	0.152588	0.003657
26	0.161213	0.165039	0.003826
27	0.173981	0.177979	0.003997
28	0.187237	0.191406	0.004169
29	0.200978	0.205322	0.004344
30	0.215205	0.219727	0.004521
31	0.229919	0.234619	0.004700
32	0.245119	0.250000	0.004881
33	0.260805	0.265869	0.005064
34	0.276977	0.282227	0.005249
35	0.293636	0.299072	0.005436
36	0.310780	0.316406	0.005625
37	0.328411	0.334229	0.005817
38	0.346529	0.352539	0.006010
39	0.365132	0.371338	0.006205
40	0.384222	0.390625	0.006402
41	0.403799	0.410400	0.006601
42	0.423861	0.430664	0.006802
43	0.444410	0.451416	0.007006
44	0.465445	0.472656	0.007211
45	0.486967	0.494385	0.007417
46	0.508975	0.516602	0.007626
47	0.531469	0.539307	0.007837
48	0.554450	0.562500	0.008050
49	0.577917	0.586182	0.008264
50	0.60187	0.610352	0.008481
51	0.62631	0.635010	0.008699
52	0.651236	0.660156	0.008919
53	0.676649	0.685791	0.009142
54	0.702548	0.711914	0.009365
55	0.728934	0.738525	0.009591
56	0.755806	0.765625	0.009819
57	0.783164	0.793213	0.010048
58	0.811009	0.821289	0.010279
59	0.839341	0.849854	0.010512
60	0.868159	0.878906	0.010747
61	0.897463	0.908447	0.010984
62	0.927254	0.938477	0.011222
63	0.957532	0.968994	0.011462
64	0.988296	1.000000	0.011704



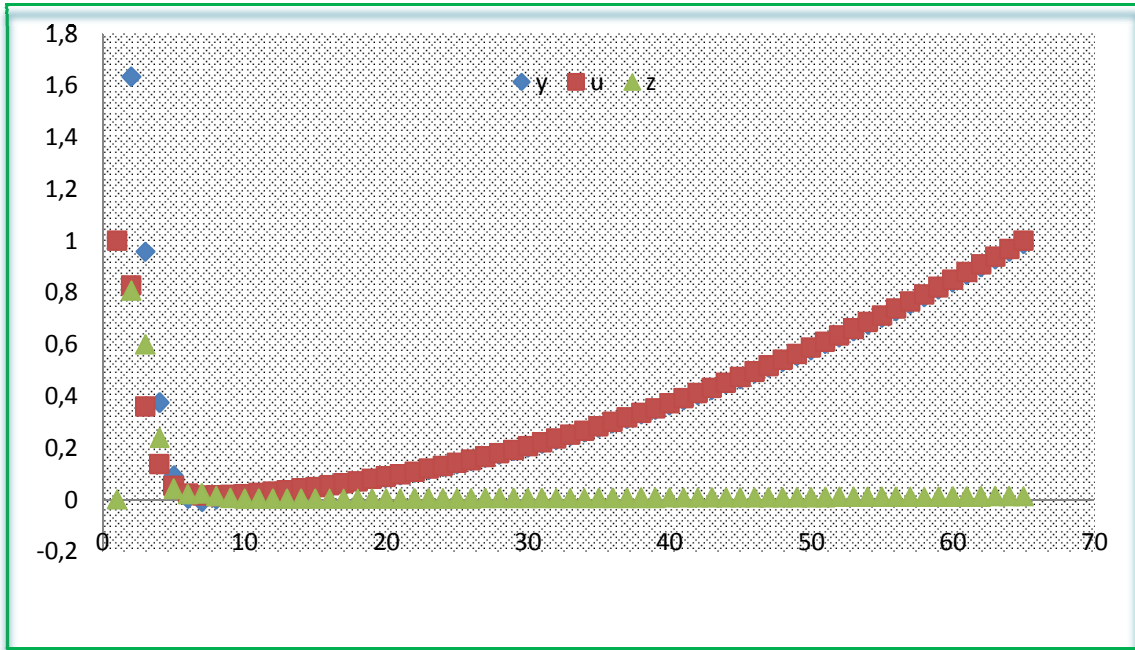
Şekil 6.1. $\varepsilon = 2^{-3}$, $N = 64$ için kesin ve nümerik çözümün davranışı.



Şekil 6.2. $\varepsilon = 2^{-4}$, $N = 64$ için kesin ve nümerik çözümün davranışı.



Şekil 6.3. $\varepsilon = 2^{-5}$, $N = 64$ için kesin ve nümerik çözümün davranışı.



Şekil 6.4 $\varepsilon = 2^{-6}$, $N = 64$ için kesin ve nümerik çözümün davranışı.

7. TARTIŞMA ve SONUÇ

Singüler pertürbe olmuş diferansiyel denklemler, yüksek türevleri içeren terimlerin katsayılarının pozitif küçük parametre olduğu problemler olarak tanımlanır. Bu problemler parametrenin küçük değerlerinde sınır katı da denilen tanım bölgesinin bazı küçük aralıklarında ani değişkenlik gösterirken tanım bölgesinin diğer kısımlarında ise değişim düzenli ve yavaştır. Haliyle sınır katını da dahil edeceğimiz genel bir çözümü, kararsızlıktan dolayı klasik metotlarla elde edemeyiz. Daha objektif sonuçlar için singüler pertürbe özellikli problemlerin çözümünü üstel katsayılı fark şemalarının kurulması metodu kullanılarak yakınsaklık analiziyle uygunluğu ispatlanmıştır.

Singüler pertürbe özellikli problemler parametreye bağlı değişkenlik gösterdiğinden atıflarıyla beraber giriş ve literatür bildirişlerinde belirtildiği üzere bir çok doğa olayını modellemek üzere kullanılır.

Bu çalışmada, pozitif küçük bir parametreye bağlı singüler pertürbe özellikli ikinci mertebeden başlangıç değer problemi için üstel katsayılı fark seması kurularak yaklaşık çözüm oluşturuldu. Yakınsaklık analizi yapılarak, yaklaşık çözümün kesin çözüme düzgün yakınsak olduğu gösterildi.

Bu çalışma sonunda bir örnek verilerek kesin çözüm ile yaklaşık çözümler arasındaki ilişki matematica programlama dilinde denetlenerek tablo üzerinden sonuçlar kritize edilmiştir. Sonuçların uygunluğu gözlemlenmiştir.

KAYNAKLAR

- Amiraliyev, G.M., 1990. Difference method for the solution of one problem of the theory of dispersive waves. **Differential Equations.**, **26**: 2146-2154.
- Amiraliyev, G.M., 1991. On difference schemes for problems of the theory of dispersive waves. **Soviet Math Dokl.**, **42**: 235-238.
- Amiraliyev, G.M., 1998. Difference method for a singularly perturbed initial value problem. **Tr. J. of Mathematics.**, **22**: 283-294.
- Amiraliyev, G. M., Memmedov, Y. D., 1995. Difference schemes on the uniform mesh for singular perturbed pseudo-parabolic equations. **Turkish J. of Math.**, **19**, 207-222
- Amiraliyev, G.M., Duru, H., 2002. **Nümerik Analiz**. Pegema Yayıncılık, Ankara.
- Amiraliyev, G.M., Çakır, M., 2000. A uniformly convergent difference scheme for singularly perturbed problem with convective term and zeroth order reduced equation. **International Journal of Applied Mathematics.**, **2**, **12**, 1407-1419.
- Bakhvalov, N. S., 1969. On optimization of methods for solving boundary-value problems in the presence of a boundary layer. The use of special transformations in the numerical solution of boundary-layer problems. **Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.**, **9**, **4**, 841-859.
- Cziegis, R., 1988. The numerical solution of singularly perturbed nonlocal problem. **Lietuvos Matem. Rink. (in Russian)**, **28**: 144-152.
- Cziegis, R., 1991. The difference schemes for problems with nonlocal conditions. **Informatica (Lietuva)**, **2**: 155-170.
- Doolan, E. P., Miller, J. J. H., Schilders, W. H. A., 1980. **Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers**. Boole Press, Dublin.
- Farrell, P. A., Hegarty, A. F., Miller, J. J. H., O'Riordan, E., Shishkin, G. I., 2000. **Robust Computational Techniques or Boundary Layers**. Chapman- Hall/CRC, New York, USA.
- Friedrichs, K. O. and Wasow, W. R., 1946. 'Singular perturbations of nonlinear oscillations'. **Duke Math. J.** **13**: 367—381
- Kadalbajoo, M., K., Reddy, Y., N., 1989, Asymptotic and numerical analysis of singular perturbation problems, **A Survey, Appl. Math. and Comput.**, 223-259
- Lange, C., Miura, R.M., 1982 Singular perturbation analysis of boundary value problems for differential-difference equations. **SIAM J. Appl. Math.**, **42** (3): 502-531

- Memmedov, Y. C.,1980. *Esitsizlikler hakkında teoremler*. İlim, Aşkabat.
- Miller, J.J., Farrel, P.A., Hegarty, A.F., O’Riordan E., Shishkin G.I., 2000. **Robust Computational Techniques For Boundary Layers**. Washington, 254
- Nayfeh, A.H.,1973. **Perturbation Methods**, Wiley.
- O’Malley R.E., 1974. **Introduction to singular perturbations**,Academic Pres.
- O’Malley R.E., 1991. **Singular perturbation methods for ordinary differetial equations**, Springer Verlag.
- Roos, H.G.,Stynes, M., Tobiska, L., 1996. **Numerical methods for singularly perturbed differential Equation: Convection –Diffusion and Flow Problems**. Springer-Verlag, Berlin, 448.
- Samarskii, A. A., 2001. **The Theory of Difference Schemes** . Marrel Dekker, inc, New York, USA.

ÖZGEÇMİŞ

Adem DUMAN, 1987 yılında Ağrı'nın Doğubayazıt ilçesinde doğdu. İlköğretimi sırasıyla Kazım Karabekir ve Atatürk İlköğretim Okulunda, ardından lise öğrenimini 2004 yılında Doğubayazıt Lisesi'nde tamamladı. Aynı yıl Öğrenci Seçme ve Yerleştirme sınavından Yüzüncü Yıl Üniversitesi Matematik Bölümünü (N.Ö) kazandı. 2008 yılında matematik bölümünden normal ve ikinci öğretimlerde bölüm birinciliği ile mezun olmuştur. 2008 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik ABD' nda yüksek lisans programına başladı.

Mezun olduğu 2008 yılından bu yana Ağrı İl Özel İdaresi'nde İstatistikçi (Matematik Yan Alan TH) olarak görev yapmaktadır.