

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İHTİMALİYET DAĞILIM FONKSİYONLARI İÇİN YENİ BİR YAKLAŞIM:
PERTÜRBE İHTİMALİYET DAĞILIM FONKSİYONLARI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Mücahit YILMAZ**

**Anabilim Dalı : Fizik Bölümü
Programı : Nükleer Fizik**

Danışman: Doç. Dr. Fatih KÜLAHCI

Temmuz-2011

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İHTİMALİYET DAĞILIM FONKSİYONLARI İÇİN YENİ BİR YAKLAŞIM:
PERTÜRBE İHTİMALİYET DAĞILIM FONKSİYONLARI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Mücahit YILMAZ
(091114101)**

**Anabilim Dalı : Fizik Bölümü
Programı : Nükleer Fizik**

Danışman : Doç. Dr. Fatih KÜLAHCI

Temmuz-2011

ÖNSÖZ

Tüm laboratuvar ölçümlerinde hatta günlük yaşantımızda dahi birçok belirsizlik ve hata kaynaklarıyla iç içeyiz. Herhangi bir deney sonucunda elde ettiğimiz verileri yorumlamak için kolları sıvadığımızda, verilerin içinde bulunduğu belirsizliği hesaplamadıysak, yaptığımız deneyin hiçbir anlamı yoktur.

Bu tez çalışmasında belirsizlikler, hata şeklinde beliren ve çoğu kez ihmal edilen, küçük zaman aralıklarında beklenmeyen tesirleri de hesaba katarak bilimsel olarak incelenmektedir. Elde ettiğimiz bu sonuçların, benzer bütün ihtimaliyet dağılım fonksiyonlarına uygulanabilirliği konusunda yeni düşünceler elde edileceğini ummaktayım.

Bu çalışmada, birçok eserinden faydalandığım Prof. Dr. Zekâi ŞEN hocama, tecrübelerinden ve birikiminden yararlandığım danışman hocam Doç. Dr. Fatih KÜLAHCI' ya teşekkür ederim.

Çalışmalarım süresince karşılaştığım gerek matematiksel gerek istatistiksel birçok problemin çözümünde eserlerinden büyük haz duyarak yararlandığım ilim adamlarına şükranlarımı sunarım.

Teorik çalışmaların olmazsa olmazı programlama konusunda, bilgilerinden faydalandığım Prof. Dr. Hasan ALLİ ve Doç. Dr. Soner ÖZGEN hocalarıma teşekkür ederim.

Mücahit YILMAZ
ELAZIĞ - 2011

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	V
SUMMARY	VI
ŞEKİLLER LİSTESİ	VII
TABLolar LİSTESİ	VIII
KISALTMALAR LİSTESİ	IX
SEMBOLLER LİSTESİ.....	X
1. GİRİŞ	1
2. RADYOAKTİVİTE	2
2.1 Radyoaktif Işıma Türleri	2
2.1.1 Alfa Işıması	3
2.1.2 Beta Işıması	3
2.1.3 Gama Işıması	4
2.2 Radyoaktif Bozunma Kanunu	5
3. MATERYAL ve METOT	8
3.1 Pertürbasyon Metodu	8
3.1.1 Pertürbasyon Terimi Özellikleri	9
3.1.2 Pertürbasyon Metodunun Temelleri.....	10
3.2 Temel İstatiksel Kavramlar	12
3.2.1 Rastgele Değişken	13
3.2.1.1 Kesikli Rastgele Değişken	13
3.2.1.2 Sürekli Rastgele Değişken	13
3.2.2 Örnek Uzay	13
3.2.3 Aritmetik Ortalama	13
3.2.4 Varyans	14
3.2.5 Standart Sapma	15
3.2.6 Kovaryans	15
3.2.7 Korelasyon Katsayısı	17

4.	NÜKLEER SAYIM İSTATİSTİĞİ	18
4.1	Radyoaktif Bozunmanın İstatistiksel Doğası	18
4.2	İhtimaliyet Dağılım Fonksiyonları	19
4.2.1	Binom Dağılımı	20
4.2.2	Poisson Dağılımı	22
4.2.3	Gauss (Normal) Dağılımı	26
5.	PERTÜRBE İHTİMALİYET DAĞILIM FONKSİYONLARI	29
5.1	Pertürbe Binom Dağılımı	29
5.2	Pertürbe Poisson Dağılımı	32
5.3	Pertürbe Gauss Dağılımı	33
6.	KLASİK VE PERTÜRBE İHTİMALİYET DAĞILIM FONKSİYONLARININ KARŞILAŞTIRILMASI	35
6.1	Klasik Binom ve Pertürbe Binom İhtimaliyet Dağılım Fonksiyonlarının Karşılaştırılması.....	35
6.2	Klasik Poisson ve Pertürbe Poisson İhtimaliyet Dağılım Fonksiyonlarının Karşılaştırılması.....	37
6.3	Klasik Gauss ve Pertürbe Gauss İhtimaliyet Dağılım Fonksiyonlarının Karşılaştırılması.....	38
7.	SONUÇLAR VE TARTIŞMA	39
	KAYNAKLAR	41
	ÖZGEÇMİŞ	45

ÖZET

Bu çalışmada, Pertürbe Binom, Poisson ve Normal (Gauss) olasılık dağılım fonksiyonları nükleer sayım istatistiği için önerildi. Temel olarak, Pertürbe İhtimaliyet Dağılım Fonksiyonları (PIDF) “İlgili niceliğin aritmetik ortalaması” + “pertürbe terimler” den oluşur. Pertürbe terimler, klasik denklemlere eklenir ve böylece, PIDF ler elde edilir. PIDF ler nükleer sayım istatistiği açısından büyük bir öneme sahiptir. Bu çalışmada önerilen metodoloji nükleer fiziğin diğer kısımlarına da uygulanabilir.

Anahtar Kelimeler: Nükleer sayım istatistiği, İhtimal, İhtimal Dağılım Fonksiyonları, İhtimal Frekans Fonksiyonları, Normal (Gauss) Dağılımı, Binom Dağılımı, Poisson Dağılımı.

SUMMARY

A New Approach for Probability Distribution Functions: Perturbe Probability Distribution Functions

In this study, Perturbed Binomial, Poisson and Normal (Gauss) probability distribution functions are proposed for the nuclear counting statistic. Basically, Perturbed Probability Distribution Functions (PPDFs) consist of “*the arithmetic average of the quantity concerned*” + “*the perturbed terms*”. The perturbed terms are added to the classical equations, and so PPDFs are obtained. PPDFs have a great significance in terms of the nuclear counting statistics. The suggested methodology in this study can also be applied to other parts of nuclear physics.

Key Words: Nuclear Counting Statistics, Probability, Probability Distribution Functions, Probability Frequency Functions, Normal (Gauss) Distribution, Binomial Distribution, Poisson Distribution.

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1. Manyetik ve elektrik alanda alfa, beta ve gama ışınları	3
Şekil 2.2. Çeşitli radyasyonların farklı malzemelerce durdurulması	5
Şekil 2.3. Radyoaktivitenin değişimleri (a) Lineer eksen (b) Yarılogaritmik eksen.....	6
Şekil 3.1. Ortalama değer ve ortalamadan sapmalar (Çalkantı terimleri)	9
Şekil 4.1. Binom ve Poisson dağılımlarının karşılaştırılması	24
Şekil 4.2. Aynı N , farklı p değerleri için Binom ve Poisson dağılımlarının karşılaştırılması	25
Şekil 4.3. Gauss dağılımı eğrisinin standart sapmaya göre değişimi	27
Şekil 4.4. Binom, Poisson, Gauss dağılımlarının $\bar{n}=25$ için karşılaştırılmaları.....	27
Şekil 4.5. Aynı ortalama ve standart sapmaya sahip Binom (histogram) ve Gauss (kalın çizgi) dağılımlarının karşılaştırılması	28

TABLolar LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 4.1. Herhangi bir sistemde istenilen durumun gerçekleşme ihtimali	21
Tablo 6.1. Klasik Binom ve Pertürbe Binom dağılımına göre t=5 s bozunma zamanında ^{222}Ra 'nin bozunumunun istatıksel değişimi	36

KISALTMALAR LİSTESİ

ChPT	: Chiral pertürbasyon teorisi
KKD	: Kuantum Kromodinamiği
eV	: Elektron Volt
PİDF	: Pertürbe İhtimaliyet Dağılım Fonksiyonu

SEMBOLLER LİSTESİ

A	: Atom ağırlığı
Al	: Alüminyum
e_x	: Pertürbe (çalkantı) terimi (x herhangi bir değişken)
N	: Nötron sayısı
Ra	: Radyum
Rn	: Radon
ε	: Elektron Yakalama
β^+	: Pozitron Bozunumu
β^-	: Negatron Bozunumu
α	: Alfa Parçacığı
γ	: Gama Işınması
σ	: Standart sapma
σ^2	: Varyans
ρ	: Korelasyon katsayısı
Z	: Atom numarası
$E(X)$: Tahmin operatörü
I	: Foton şiddeti

1. GİRİŞ

Radyoaktif maddeler; kendisini oluşturan atomların çekirdeklerinin bozularak başka bir çekirdeğe dönüşen ve bu sırada da radyasyon yayımlayan maddelerdir. Radyoaktif bozunum rastgele (gelişigüzel) bir olay olduğundan ancak istatistiksel yöntemler çerçevesinde incelenebilir. Nükleer bozunumda radyasyon yayılımı üzerine gözleme dayalı herhangi bir ölçüm, bir dereceye kadar istatistiksel dalgalanmalar gösterir. Bu doğal dalgalanmalar tüm nükleer ölçümlerde kaçınılmaz bir şekilde hata veya belirsizliğe neden olur.

Tüm laboratuvar ölçümleri, ölçme sisteminden ve radyoaktif bozunumun kendisinden kaynaklanan belirsizlik veya hata kaynakları içerir. Radyoaktif bozunumun kendisi istatistiksel değişim işlemidir ve oluşumu tamamen rastgeledir. Bu nedenle tek bir ölçümün sonucu bundan sonraki ölçümleri doğrulukla kestiremez ve tek bir ölçüm gerçek değerden çok uzaktır. Dolayısıyla nükleer sayım istatistiğinde tek bir değerden ziyade içinde N tane radyoaktif çekirdek bulunan bir numunenin, belli bir zaman aralığında n tanesinin bozunma olasılığı $P(n)$ dağılım fonksiyonlarıyla incelenir.

Nükleer sayım istatistiği iki genel kategoriye ayrılır: Birincisi, nükleer sayım cihazlarının çalışmasını kontrol etmek için imkân sağlamaktadır. Deneylede, olası tüm şartlar mümkün olduğunca sabit tutulur. Buna rağmen, istatistiksel dalgalanmanın etkisinden dolayı bu ölçümler, tamamen aynı olmayacaktır. Bu dalgalanmanın değeri ölçülebilir ve istatistiksel modellerin tahminleriyle kıyaslanabilir. Gözlenen dalgalanmanın değeri tahminlerle uyumlu değilse, sayım sisteminde bazı sapmaların olduğunu söyleyebiliriz. İkinci uygulama, genelde daha faydalıdır ve sadece tek ölçümün alındığı durum ile ilgilidir. İstatistiksel belirsizliği tahmin etmek için, sayma istatistiğini kullanabiliriz ve böylece tahmindeki hassasiyet (kesinlik) tek ölçümle ilişkilendirilebilir.

2. RADYOAKTİVİTE

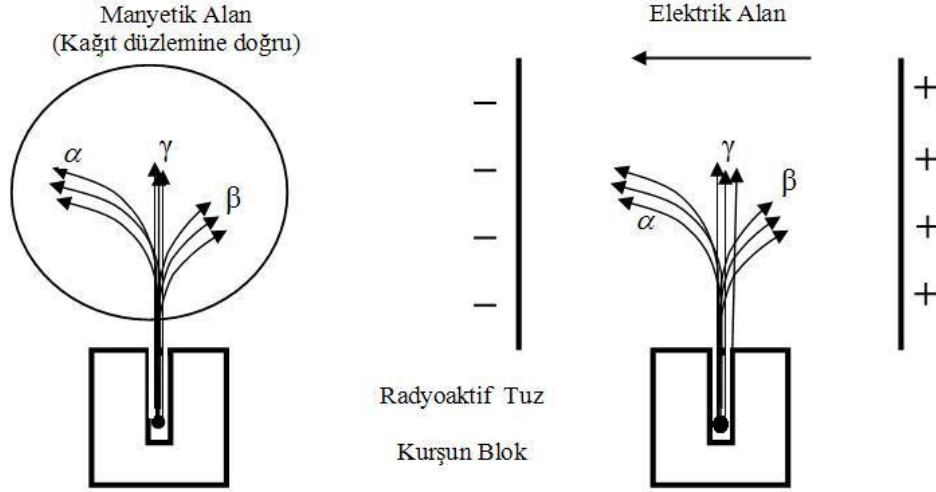
Atom ve çekirdeği hakkında fiziki bilgiler 1896'da Henry Becquerel'in radyoaktiviteyi keşfiyle başlamaktadır. Becquerel kalın bir kağıda sarılmış uranyum ve potasyum sülfattan ibaret numuneyi karanlık bir odada tesadüfen fotoğraf levhalarının yanına bıraktı. Levhalar banyo edildiklerinde ışığa karşı tamamen korunmuş olmalarına rağmen ışıktaki kalmış gibi karardıklarını gördü. Becquerel fotoğraf levhalarını etkileyen bazı tür radyasyonların uranyum tuzundan yayıldığı neticesine vardı. Daha sonra uranyum tuzundan başka bazı maddelerin de radyasyon yayınladıkları fark edildi. Bu olay "radyoaktivite" ve bu şekilde radyasyon yayınlayan elementlere de "radyoaktif elementler" adı verildi (Lapp vd., 1972).

Radyoaktivite; atom çekirdeğinin, tanecikler veya ışınlar yayarak kendiliğinden parçalanmasıdır. Bir numunenin radyoaktifliği (veya aktifliği) fiziksel ve kimyasal değişimlerden etkilenmemektedir. Yani; basınç, hacim, sıcaklık ve kimyasal yapıdaki değişimler radyasyon yayınlama hızını değiştirmez (Buttlar, 1968).

2.1. Radyoaktif Işıma Türleri

Kararsız çekirdekler kararlı hale geçmek için ya elektromanyetik radyasyon (γ) yayarak ya da parçacık radyasyonu yayarak (α, β) yayınlayarak kararlı hale geçerler. Radyoaktif bozunma daha çok β bozunumu şeklinde olmaktadır (Krane, 2001).

Şekil 2.1'de gösterildiği gibi, bir radyoaktif kaynaktan yayılan radyasyonların doğrultusuna ve kağıt düzlemine dik olan bir manyetik alan varsa alfa ve beta ışınları saparlar, fakat gama ışınları hiç etkilenmezler. Kağıt düzlemi içinde olmak üzere bir elektrik alan uygulanırsa benzer sapmalar görülür. Elektrik ve manyetik alanlara göre sapmaların doğrultularında alfa ışınlarının pozitif yük, beta ışınlarının negatif yük taşıdıkları ve gama ışınlarının ise, elektrik yükü taşımadıkları görülür. Bu ışınlar saydam olmayan cisimlerden geçebilirler ve havayı iletken hâle getirebilirler (Yaramış, 1985).

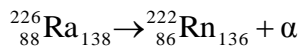


Şekil 2.1. Manyetik ve elektrik alanda alfa, beta ve gama ışınları

2.1.1. Alfa Işınması

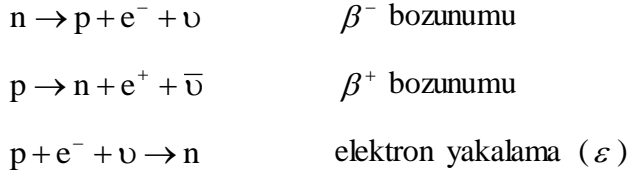
Uranyum, toryum ve radyum gibi ağır elementlerin yaydığı pozitif yüklü parçacıklardır. Madde içerisinde geçerken elektrik yükleri nedeniyle yolları üzerinde iyonlaşma meydana getirerek enerjilerini hızla kaybettikleri için bir kağıt parçasıyla tamamen durdurulabilirler.

Alfa ışınması sırasında çekirdekten bir ${}^4_2\text{He}$ çekirdeği yayılır ve ışın yapan çekirdeğin atom numarası 2; kütle numarası 4 azalır.



2.1.2. Beta Işınması

Beta ışınması da alfa ışınması gibi, bir çekirdeğin Z/N oranını değiştirerek daha kararlı durumun meydana gelmesini sağlar. Bir elementin çekirdeğindeki proton ya da nötron fazlalığından dolayı çekirdeğin yayınladığı yüksek enerjili elektronlardır ve birkaç mm kalınlıkta Al levha ile tamamen durdurulabilmektedir. Bu işlem üç farklı yolla gerçekleşebilir:

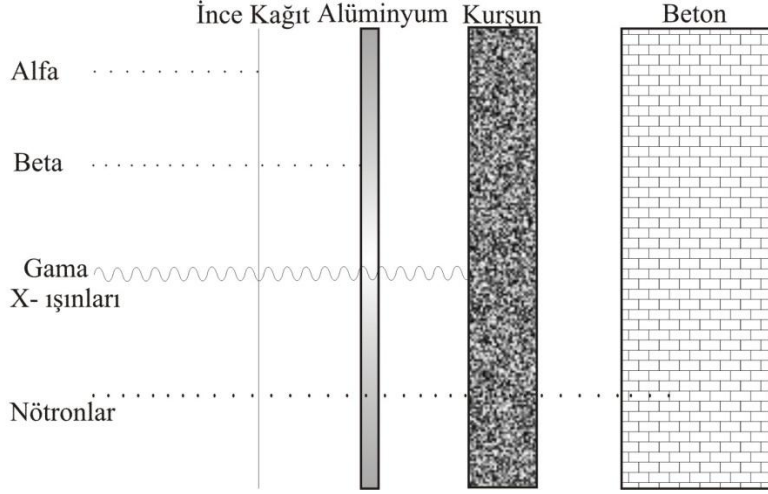


İlk işlem β^- veya negatron ışıması olarak, ikincisi β^+ veya pozitron ışıması, üçüncü işlemde çekirdeğe çok yakın olan elektron, çekirdek tarafından yakalanır ve bir proton bir nötrona dönüşür. Bu üç olayın hepsinde de nötrino adı verilen bir diğer parçacık yayınlanır. Nötrinonun elektrik yükü olmadığından, varlığı diğer son parçacıkların kimliğini etkilemez (Krane, 2001).

Elektron veya pozitron bozunmadan önce çekirdek içerisinde bulunmaz. Alfa ışımasında durum bunun tam tersidir; yayınlanan nükleonlar bozunmadan çekirdeğin içindedir. Beta ışımasında Z ve N bir birim değişirken $Z+N$ toplam kütle sayısı değişmemektedir (Krane, 2001).

2.1.3. Gama Işıması

Radyoaktif gama yayınlanması, optik veya X-ışını geçişleri gibi atomik radyasyon yayınlanmasına benzer. Uyarılmış bir durumdan daha düşük bir uyarılmış duruma (veya taban duruma), nükleer durumlar arasındaki farka eşit bir enerjiyle, bir γ -ışını yayınlamakla geçer. Beta ışımasından farklı olarak Z ve N sayıları değişmez, atom uyarılmış durumda kalmaktadır. Gama ışınları enerjisine bağlı olarak yoğunluğu fazla olan kalın malzemelerle durdurulabilir (Krane, 2001). Şekil 2.2'de alfa, beta, gama ve X-ışınlarının ve nötronların giricilikleri gösterilmektedir.



Şekil 2.2. Çeşitli radyasyonların farklı malzemelerce durdurulması

2.2. Radyoaktif Bozunma Kanunu

Kararsız bir çekirdeğin bozunması tamamiyle rastgele bir işlemdir ve bir atomun ne zaman bozunacağını kesin olarak tahmin etmek imkansızdır. Bununla birlikte herhangi bir zamanda bozunması eşit derecede muhtemeldir. Bu nedenle bir radyoizotop örneğinde küçük bir dt zaman aralığında gerçekleşmesi beklenen bozunma olaylarının sayısı $-dN$, mevcut atom sayısıyla orantılıdır. N atomların sayısı ise bu durumda bozunma olasılığı $(-dN/N) dt$ ile orantılıdır;

$$\lambda = -\frac{(dN/dt)}{N} \quad (2.1)$$

Burada λ , bozunma veya parçalanma sabitidir. Bozunma sabiti radyoaktif elementin bir karakteristiğidir. Denklem sağ tarafı bir atomun birim zamanda bozunma ihtimalidir. Bu ihtimaliyet, atomun yaşı ne olursa olsun sabit olup radyoaktif bozunmanın istatistiksel teorisinin temel varsayımdır. Burada t artarken N azaldığından, denkleme eksi işaretini koymak gerekir. Denklem 2.1'in integrali alınır;

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (2.2)$$

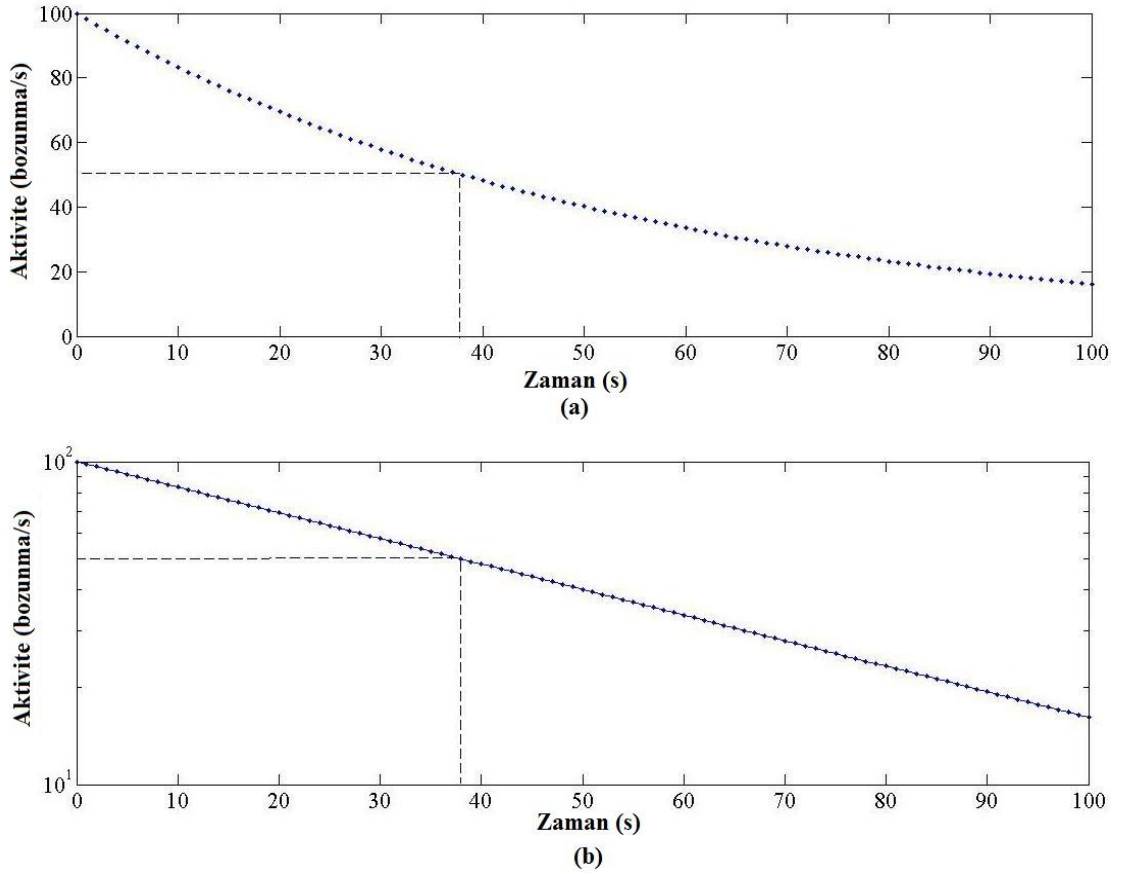
üstel radyoaktif bozunma kanunu elde edilir. Burada N_0 integrasyon sabiti, $t=0$ 'da henüz bozunmamış çekirdeklerin sayısıdır (Leo, 1987).

Bir radyoaktif numunenin aktifiği yani birim zamandaki bozunma sayısı (bozunma hızı);

$$Aktivite = -\frac{dN}{dt} = \lambda N \quad (2.3)$$

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t} \quad (2.4)$$

şeklinde yazılabilir. Örneğin başlangıç aktivitesi 100 bozunum/s olan Ra-222 ($t_{1/2} = 38 s$) radyoaktif elementin aktivitesinin zamanla değişimi Şekil 2.3'de gösterilmiştir.



Şekil 2.3. Radyoaktivitenin (a) Lineer eksenle (b) Yarlogaritmik eksenleki değişimleri

Çekirdeklerin yarısının bozunması için geçen zamana yarı ömür denir. Denklem 2.2'de $N(t)$ yerine $N = N_0/2$ yazılırsa;

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (2.5)$$

bulunur. τ ortalama ömür (veya ömür) ise çekirdeğin bozununcaya kadar geçen ortalama süre olarak tanımlanmaktadır.

$$\tau = \frac{\int_0^{\infty} t |dN/dt| dt}{\int_0^{\infty} |dN/dt| dt} \quad (2.6)$$

Denklem 2.6'da paydadaki terim toplam bozunma sayısıdır. Bu ifadenin integrali alındığında;

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad (2.7)$$

olarak bulunur. Basit olarak ortalama ömür bozunma sabitinin tersi olarak da gösterilebilir (Turner, 2007).

3. MATERYAL ve METOT

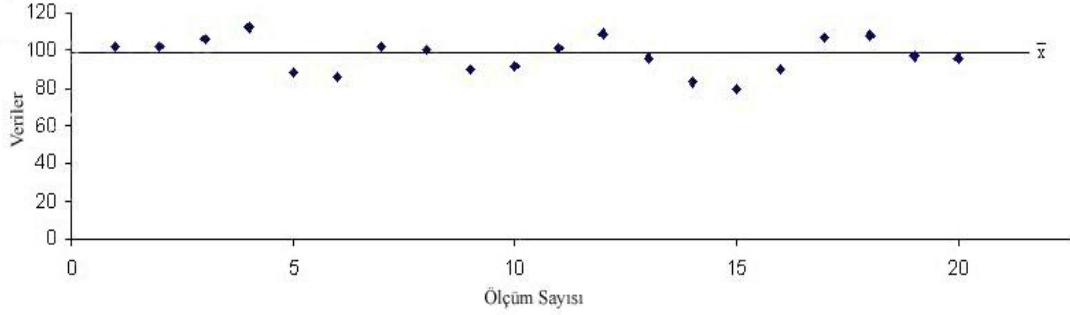
3.1. Pertürbasyon Metodu

Herhangi bir fiziksel niceliğin ölçümünde, ölçüm sisteminden veya insan kaynaklı birçok belirsizlik ile karşılaşılabilir. Fiziksel teorilerdeki böylesi bir karmaşayı ortadan kaldırmak ve ölçüm hassasiyetini arttırmak için pertürbasyon metodu kullanılabilir. Pertürbasyon metodu yapısal özelliklerdeki küçük istatistiksel değişimleri ele alarak problemin çözümüne gitmektedir. Çok geniş uygulama alanına sahip olan bu yöntemde, söz konusu probleme öncelikle yaklaşık bir yanıt verilir, daha sonra bu yanıt, ayrıntıların üzerine gidilerek iyileştirilmeye çalışılır. Örneğin; Chiral pertürbasyon teorisi (ChPT), Kuantum kromodinamiği (KKD)'nin düşük enerjili dinamiklerini incelemeye olanak veren bir teori olup KKD'nin pertürbasyon uygulamalarında kullanılır (Nebreda ve Peláez, 2010). Birçok atom altı parçacığın davranışları pertürbasyon teorisi kapsamında çalışılabilir (Beane vd., 1995). Friar ve Reis (1987) pertürbasyon teorisini, yoğun düşük frekanslı elektromanyetik dalgalar ile nükleer bozunumun geliştirilmesi için kullandı. Nükleer yapılar, kuantum mekaniği, kütle çekim kuvveti ve hatta kozmolojik araştırmalarda bile pertürbasyon teorisi ve uygulamaları sıklıkla kullanılmıştır (Multamäki vd. , 2010).

Akışkanlar mekaniğinin bazı uygulamaları bu metot kapsamında incelenebilir. Atmosfer ve okyanuslarda gözlenen hava ve su akımlarının düzgün olmayıp rastgele karakterler içerdiği ve böylece türbülans denilen önceden kestirilemeyen olayların ortaya çıktığı anlaşılmıştır. En küçük ölçeklerde bile, değişen bu olayların çözümü yoktur. Sonuçların tek çözüm halinde bulunması mümkün olmamakla birlikte sorunun çözümü için seçilen hemen her ölçekte rastgele salınımlar bulunur. Pratikte birçok kere sonlu zaman ve uzayın göz önünde tutulması veya verilerin sağlıklı ölçülmemesi sebebiyle ölçümler daima bir kısma kadar rastgeleliği, kalan kısmı ile de yine bir dereceye kadar belirginliği ihtiva eder. İstatistiksel olarak ölçüm sonuçlarının yorumlanmasında; biri belirgin kısım olan ortalama kısım, diğeri ise bu ortalamalardan sapma miktarı olmak üzere herhangi bir değişken Denklem 3.1'de gösterildiği gibi yazılabilir (Landau vd., 1987; Şen, 2002).

$$m = \bar{m} + e_m \quad (3.1)$$

Bu ifadenin yazılabilmesi için pertürbe (çalkantı) teriminin, ortalama kısımdan çok çok küçük olması gerekir ($e_m \ll \bar{m}$). Rastgele ve belirsizlik içeren incelemelerde Şekil 3.1’de görüldüğü gibi sadece aritmetik ortalama değil onun etrafında ne kadarlık salınımların olduğunu gösteren pertürbasyon terimi bulunur. Her türlü fizik olayında bu iki kısım vardır. Atmosfer bilimlerinde, yer bilimlerinde, su mühendisliğinde, elektronik mühendisliğinde, işletme, iktisat ve ekonomide, sosyal bilimler, tıp, fizik, kimya ve hatta günlük hayatta bile bu ifade ile karşılaşmaktayız.



Şekil 3.1. Ortalama değer ve ortalamadan sapmalar (Çalkantı terimleri)

3.1.1. Pertürbasyon Terimi Özellikleri

Pertürbasyon metoduyla yapılacak çalışmalarda, istatistik özellikleri göz önünde tutmak için aşağıdaki noktaların esas alınması gereklidir (Şen, 2002):

- Çalkantı bileşenine değişik konularda değişik isimler verilir. İstatistikte ortalamadan sapma olarak adlandırılır. Meteorolojide bu terim hava olaylarına, elektronik devrelerde ise parazitlere (gürültülere) karşılık gelir. Buna belirli olmayan rastgele kısım, ihtimali kısım, stokastik kısım gibi isimlerde verilir. Ortalama değer ise, atmosfer bilimleri ve meteorolojide iklim bileşeni olarak adlandırılır. Genel anlamda buna, ölçülen değer “belirgin” yani “deterministik” kısmı da denilir.
- Çalkantı bileşeninin aritmetik ortalaması sıfırdır ($\bar{e}_t = 0$). Bunun birimi ölçülen değişkenin biriminin aynısıdır.

- c) Çalkantı bileşenin dağılımının doğal olaylarda tamamen normal dağılıma uyduğu kabulü yapılır. Zaten birçok doğal olayda bunun dağılımı gerçektende normaldir.
- d) Çalkantı bileşeni, kendi içinde tamamen rastgele olduğundan, bir içsel bağımlılığa sahip değildir.
- e) Çalkantı bileşeni normal dağılıma uyduğundan, tam olarak tanımlanması için aritmetik ortalamadan başka varyans veya standart sapmasının bilinmesi yeterlidir.
- f) Çalkantı teriminin karesinin ortalaması varyansı, küpünün ortalaması çarpıklık katsayısını verir (Şen, 2002).

3.1.2. Pertürbasyon Metodunun Temelleri

Madde ile etkileşen fotonların hareketinde daima dalga tipi salınımlar vardır. Bu dalgalanmalar dinamik denklemlerin doğrusal olmamasına neden olur. “Doğrusal dalga teoremi pertürbasyon yöntemi” böyle problemlerin çözümü için kullanılan tekniklerden biridir. Tekniği, fotonu ele alarak aşağıdaki temel başlıklar halinde sıralayabiliriz (Kulahcı ve Şen; 2008):

- a) Eğer “ I ” foton şiddeti göz önüne alınırsa, bunun bir “ortalama” kısmı birde “pertürbe” olmak üzere iki kısımdan oluştuğu kabul edilir.

$$I = \bar{I} + e_I \quad (3.2)$$

Burada e_I tamamen rastgele özellik gösteren pertürbe terimini temsil etmektedir.

- b) Pertürbe ve ortalama değerlerin aynı dinamik denklemleri sağladığı kabul edilir.

- c) Böylece $\frac{e_I}{\bar{I}} \ll 1$ kabulüde yapılarak tüm temel denklemlerde çalkantı teriminin kare

ve daha büyük terimleri ihmal edilebilir. Burada çarpımlı terimler çalkantının aritmetik ortalamasının sıfır olması, kareli terimler ise birinci mertebeden yaklaşım dolayısıyla sıfır olarak alınır.

u ve v herhangi iki değişken olmak üzere değişkenlerin Reynolds şeklinde “ortalama” ve “çalkantı” kısımları düşünülerek yazılması halinde şu ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + e_u \\ v &= \bar{v} + e_v \end{aligned} \quad (3.3)$$

Genel olarak, u ve v gibi iki farklı değişkenin ortalamalarına ait gerçekler ve bunların, değişik aritmetik ve matematik işlemlerden sonra alabileceği durumlar aşağıda verilmiştir (Şen, 2002; Reiff, 1965):

- a) İki değişkenin toplamlarının ortalaması, ortalamalarının toplamına eşittir.

$$\overline{u + v} = \bar{u} + \bar{v} \quad (3.4)$$

- b) Bir sabitin ortalaması kendisine eşittir ($\bar{c} = c$). Bir değişkenin bir sabit ile çarpılmasının ortalaması, o sabit ile değişkenin ortalamasının çarpımına eşittir:

$$\overline{cu} = c\bar{u} \quad (3.5)$$

- c) Bir değişkenin diferansiyelinin ortalaması o değişkenin ortalamasının diferansiyeline eşittir. Burada x yerine herhangi bir uzay referans veya zaman değişkeni gelebilir. Bu sebeple, u çalkantılı, x çalkantsız değişkenler olmak üzere;

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad (3.6)$$

- d) Bir değişkenin ortalamasının başka bir değişkenle çarpımının ortalaması, iki değişkenin ortalamalarının çarpımına eşittir.

$$\overline{\bar{u}v} = \bar{u}\bar{v} \quad (3.7)$$

- e) İki değişkenin, birbiriyle çarpıldıktan sonra aritmetik ortalamalarının alınmasıyla:

$$\overline{uv} = \bar{u}\bar{v} + \overline{e_u e_v} \quad (3.8)$$

ifadesi elde edilir. Burada ek olarak pertürbe terimlerinin çarpımının ortalaması hesaplamalara girecektir. Doğrusal olmayan son terimin;

$$\overline{u e_v} \neq 0 \quad (3.9)$$

$$\overline{e_u e_v} \neq 0 \quad (3.10)$$

$$\overline{e_u^2 e_v^2} \neq 0 \quad (3.11)$$

denklem 3.9, 3.10 ve 3.11’de gösterildiği gibi her zaman sifıra eşit olması söz konusu değildir (Landau vd., 1987; Şen, 2002).

Bu gibi terimlerin gerek istatistikte veri işlem sırasında ve gerekse dinamik denklemlerin çözümünde ayrı ayrı fiziksel anlamları vardır (Şen, 2002).

Radyoaktif bir bozunmanın ne zaman meydana geleceği rastgele bir olay olup ancak istatistiksel yasalar çerçevesinde incelenebilir (Leo, 1987). Böylece, bazı temel istatistiksel kavramlar ve pertürbasyon metoduyla ilişkilerine aşağıdaki gibi değinilmiştir.

3.2. Temel İstatistiksel Kavramlar

Doğa bilimlerinde karşılaştığımız problemlerin birçoğunda olaydaki değişkenlerin değerleri bilindiğinde probleme kesin ve tek bir çözüm bulunabilir. Örneğin bir direncin uçlarındaki gerilim ve üzerinden geçen akım bilindiğinde direncin değerini, aynı şekilde bir kondansatörün sığası ve uçlarındaki gerilim biliniyorsa da, kondansatörün tuttuğu yükü hesaplayabiliriz. Bu gibi olaylarda fizik yasaları deterministik anlamda bilinmektedir. Buna karşılık öyle olaylar vardır ki, sonuçlarını önceden bilmek mümkün değildir. Basit bir örnek olarak, bir zar atışında zarın hangi yüzünün geleceğini önceden kestiremeyiz. Rastgele karakterdeki olayları inceleyen istatistik bilimleri, gözlemler sonucunda elde edilen verilerin matematik modellere uydurulmasını ve böylece rastgele büyüklük hakkında genel yargılara varılmasını konu alır (Bayazıt, 1994). Bununla birlikte, belli bir konu ile ilgili verileri derlemek, düzenlemek, özetlemek, sunmak ve analiz ederek bu verilerden bir sonuca varmak için kullanılan yöntemler bütününe “istatistik” adı verilir (Karagöz, 2009).

3.2.1. Rastgele Değişken

Gözlemden gözleme değişik değerler alabilen nesnelere, özelliklere veya durumlara değişken denir. Rastgele değişken, örnek uzayındaki örnek noktalarının (elemanların) her birine gerçek bir sayı veren fonksiyon olarak tanımlanır (Gürsakaç, 2001). Ayrıca, rastgele değişken; gelecekteki bir gözlemden alacağı değeri önceden kesinlikle bilinmeyen bir değişkendir.

3.2.1.1. Kesikli Rastgele Değişken

x rastgele bir değişken ise x 'in alabileceği değerlerin sayısı sonlu veya sayılabilir sonsuzluktaysa x 'e kesikli rastgele değişken denir.

3.2.1.2. Sürekli Rastgele Değişken

x rastgele bir değişken olsun. x bir aralıkta yada birden çok aralıkta her değeri alabiliyorsa x 'e sürekli rastgele değişken denir. Örneğin, belli bir bileşimin içindeki alkol yüzdesi belli bir aralıktaki her gerçek değeri alabileceği için sürekli rastgele değişkendir.

3.2.2. Örnek Uzay

Bir rastgele değişkenin gözlemlerde alabileceği değerlerin tümünden oluşan küme o değişkenin örnek uzayını oluşturur. Bu uzayın her bir noktası (elemanı), o rastgele değişkenin bir gözlemden alabileceği örnek noktası olup rastgele bir olaya karşılık gelir. Zar atma probleminde rastgele değişkenin örnek uzayı; $Z=\{1,2,3,4,5,6\}$ kümesidir (Bayazit, 1994).

3.2.3. Aritmetik Ortalama

Rastgele bir deneyin karşılaşılabilecek tüm sonuçları yerine, tek bir gösterge gerektiğinde yaygın olarak kullanılan bir parametredir (Kara, 1983). Bir dizi ölçümün ya da gözlem sonucunun ortalaması, dizideki ölçümlerin toplanıp, sonucun ölçüm sayısına bölünmesi ile elde edilir. Dolayısıyla ne kadar fazla ölçüm sonucu elde edilirse, ortalama o kadar fazla

güvenilir olur. Bir deney sonucunda alınan n tane ölçümün değerleri $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ise aritmetik ortalama Denklem 3.12 ile verilir:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

veya

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (3.12)$$

3.2.4. Varyans

Rastgele değişkenin sadece beklenen değer (aritmetik ortalama) ile temsili düşünülürse, bu ortalamadan meydana gelen sapmaların büyüklükleri hakkında bilgi edinemeyiz. Varyans, dağılımın genişliğinin bir ölçüsüdür, verilerdeki iç dalgalanmanın miktarıdır (Knoll, 1988).

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad (3.13)$$

$x = \bar{x} + e_x$ olduğundan;

$$\sigma^2 = \overline{e_x^2} \quad (3.14)$$

olur.

Pertürbe teriminin karesinin ortalaması da varyans değerini vermektedir (Şen, 2002). Burada farklarının karelerinin alınmasının sebebi, sapmaların artı ve eksi olanlarının birbirini götürerek varyansın sıfır çıkmasını önlemek içindir. Sadece belirgin olayların varyansı sıfırdır. Varyansın sıfırdan farklı olması durumunda değişkenin rastgele olduğuna karar verilebilir (Şen, 2002). Varyans için ölçme birimi, orijinal değişkenin biriminin karesi olup, $Var(x)$ veya σ^2 notasyonu ile gösterilebilir.

3.2.5. Standart Sapma

Standart sapma bir serideki değerlerin ortalamadan sapmaların karelerinin kareköküdür. Varyans değerinin karekökü standart sapmayı vermektedir. Bir serideki değerler aynı oranda azaltılıp, arttırıldığında; ortalama veya beklenen değer değişirken, varyans ve standart sapma değişmemektedir (Arıcı, 2001). Standart sapma ifadesi,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad (3.15)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Standart sapmanın ölçü birimi, ilgili rastgele değişkenin birimiyle aynı olup, S veya σ notasyonu ile gösterilebilir.

3.2.6. Kovaryans

Ortak değişim anlamına gelen kovaryans, iki serinin aritmetik ortalamalarının farklarının çarpımının aritmetik ortalaması olarak tanımlanır (Denklem 3.16). Olasılık teorisi ve istatistikte, kovaryans iki değişkenin ne kadar birlikte değiştiklerinin ölçüsüdür (Karagöz, 2006). Bulunan kovaryans değeri $-\infty$ ile $+\infty$ arasında herhangi bir değer olabilir ($-\infty \leq Cov(XY) \leq \infty$). Kovaryansın pertürbe değerleri cinsinden tanımı Denklem 3.17'de verildiği gibidir.

$$Cov(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n} \quad (3.16)$$

$$Cov(X, Y) = e_x e_y \quad (3.17)$$

Kovaryans pozitif ise değişkenlerden ikisinde ortalamanın aynı yönünde (ikisinde + veya ikisinde -), şayet kovaryans negatif değerler alıyorsa değişkenler farklı yönlerde yer alıyor demektir. Bu durumda değişkenler bağımsız olmayıp, aralarında bir bağımlılık vardır. X ile Y arasındaki kovaryans negatif ise ilişki ters yönlü, pozitif ise doğru yönlü ilişki vardır (Freedman vd., 2007).

Değişkenlerin birbirinden bağımsız olması halinde kovaryans sıfır çıkmaktadır. X 'in beklenen değeri $E(X) = \mu$ ve Y 'nin beklenen değeri $E(Y) = \nu$ olarak tanımlanırsa;

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \quad (3.18)$$

$$Cov(X, Y) = E[X.Y - \mu Y - \nu X + \mu\nu] \quad (3.19)$$

$$Cov(X, Y) = E(X.Y) - \mu E(Y) - \nu E(X) + \mu\nu \quad (3.20)$$

$$Cov(X, Y) = E(X.Y) - \mu\nu \quad (3.21)$$

olur. Eğer X ve Y bağımsız değişkenler ise;

$$f(X, Y) = f(X).f(Y) \quad (3.22)$$

Benzer şekilde;

$$E(X, Y) = E(X).E(Y) \quad (3.23)$$

yazılabilir. Böylece,

$$Cov(X, Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) \quad (3.24)$$

$$Cov(X, Y) = 0 \quad (3.25)$$

olur.

Kovaryans ve korelasyon hesabı için her iki veri kümesinin aynı (n) sayıda terime ve en az iki değişkene ihtiyacı vardır. İlişki ölçüsü olarak kovaryansın bir kusuru, kovaryans serilerinin ölçme biriminden etkileniyor olmasıdır. Eğer serilerden biri kilogram cinsinden ağırlık değerlerini ifade ediyorsa, buradan elde edilen kovaryans değeri ile aynı ağırlıkları gram olarak ifade ettikten sonraki kovaryans değeri farklı çıkacaktır (Karagöz, 2006). Kovaryansın boyutu X ve Y değişkenlerinin boyutlarının çarpımı şeklinde olduğundan boyutsuz bir katsayı elde etmek için kovaryans X ve Y 'nin standart sapmalarının çarpımına bölünerek korelasyon katsayısı elde edilir (Bayazıt, 1994).

3.2.7. Korelasyon Katsayısı

Korelasyon katsayısı; iki değişken arasındaki bağıntının (ilişkinin) ne kadar kuvvetli olduğunu belirlemek için gerekli bir bağımlılık katsayısıdır. Boyutsuz bir katsayı elde etmek için kovaryans X ve Y 'nin standart sapmalarının çarpımına bölünerek korelasyon katsayısı Denklem 3.26'daki gibi tanımlanır.

$$\rho_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (3.26)$$

$$\rho_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N \sigma_x \sigma_y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} \quad (3.27)$$

ρ_{XY} 'nin pertürbe terimleri cinsinden tanımı, Denklem 3.28 gibi olur.

$$\rho_{XY} = \frac{\overline{e_x e_y}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (3.28)$$

Bu katsayının değeri -1 ile +1 arasında değişir. Korelasyon katsayısının mutlak değerinin 1'e yaklaşması, X ile Y arasındaki doğrusal bağımlılığın kuvvetlenmesini ifade eder. Dolayısıyla, kovaryans, değişkenlerin birlikte değişkenliğini gösterirken, korelasyon değişkenlerin birbirleriyle olan ilişkilerini (bağımlılığını) ifade eder (Kara, 1983).

4. NÜKLEER SAYIM İSTATİSTİĞİ

Bir olay hakkında, ölçme sonuçlarını gösteren verilerden, rastgele bir sistemin davranışlarını anlama, açıklama ve yorumlama sürecinde, akıl yürüterek karşılaşılabılır tüm durumları (örnek uzayı) göz önüne alıp, ilgilenilen olayın ortaya çıkışının ihtimalini bulmak, karşılaştırmalar yapmak, böylece belirsizlikten kurtulmaya uğraşmak, çoğu kez zor, zaman alıcı ve hatta bazen mümkün değildir. Ele alınan rastgele sistemle ilgili tüm olası göstergeleri kolaylıkla bulabilmek için, sistemin matematiksel modelini geliştirmek gerekli ve yeterlidir. Bu nedenle veriler gruplandırılarak dağılımları incelenir (Feller, 1967; Şen, 2002).

Nükleer sayım istatistiği, radyoaktif bozunum sürecini yorumlamakta işlerimizi kolaylaştırmaktadır. Örneğin; 1 MeV'lik proton atomik elektronlarla çarpışmasında ne kadar enerji kaybedeceği, 400 keV enerjili bir foton, 2 mm kalınlığındaki kurşun zırhla etkileşimsiz nüfuz edip edemeyeceği, verilen herhangi bir radyoaktif kaynaktan bir sonraki zaman dilimi boyunca ne kadar bozunma meydana geleceği gibi sorular ancak istatistiksel terimler ile kolayca cevaplanabilmektedir. Radyoaktif bir kaynağın aktivitesini ölçtüğümüzde veya orantılı bir sayaçta üretilen elektronların miktarında, istatistiksel dalgalanmalardan dolayı kaçınılmaz bir biçimde belirsizlik vardır (Turner, 2007).

4.1. Radyoaktif Bozunmanın İstatistiksel Doğası

Radyoaktif bir çekirdek geliş güzel bozduğundan, nükleer sayımlarda ortalama bir değer ve bu değer etrafında meydana gelen istatistiksel bir dağılımdan bahsedilebilir. Bir numunedeki uzun ömürlü radyoçekirdeğin aktivitesini belirlemek için numune, belli bir süre sayılmalıdır. Sayım işlemleri birçok kez tekrarlanırsa, gerçek aktiviteyi en iyi gösteren ortalama değer dağılımdan bulunacaktır. Ortalama değer etrafında dağılımın yayılmasıyla da ölçüm belirsizliği tespit edilir (Turner, 2007).

Başlangıçta mevcut olan λ bozunum sabitli N atomlu radyoçekirdek, t süresi boyunca meydana gelen bozunum sayısı için ihtimaliyetin hesaplanması gerekmektedir. Burada önemli olan temel nokta, çekirdeğin yarı ömrü gözlem süresinden uzun olmasıdır. Atomlar özdeş ve bağımsızsa her bir atom için bozunma ihtimaliyeti, kendiliğinden ve gelişigüzel

gerçekleşmektedir. t süresince bozunmaksızın kalan atom sayısını, eksponansiyel bozunma ile yorumlayabiliriz. Sayım istatistiğinde verileri açıklamak ve yorumlamak için veriler gruplandırılarak dağılımları incelenir.

4.2. İhtimaliyet Dağılım Fonksiyonları

Bir numunedeki N tane radyoaktif çekirdeğin davranışını ayrı ayrı izlemek veya yorumlamaya çalışmak yerine numunedeki tüm çekirdekleri ortak paydalarıyla temsil ederek onları anlamak ve karakterize etmek çok daha uygun ve kolay olmaktadır. Bu durum, numunedeki radyoaktif çekirdeklerin dağılım fonksiyonu olarak isimlendirilmektedir. Burada söz edilen dağılım fonksiyonun, numunedeki radyoaktif çekirdeklerin birbirleriyle etkileşimlerini içermesi gerektiği de göz önüne alınırsa; sistemi oluşturan parçacık sayısının milyonların üzerinde rakamlara ulaştığı ve boyutların çok daha küçük olduğu sistemleri düşünersek, dağılım fonksiyonlarının ne derece kritik uygulamaları olacağını görmek mümkündür. Böylece bir bütünü oluşturan parçaların davranışlarını anlamak için kullanılan dağılımların, kullanıldıkları sistemlere ve koşullara göre değişimi, böyle karmaşık sistemleri anlamayı kolaylaştırmaktadır.

Rastgele değişkenin durumuna göre ihtimaliyet dağılımları sürekli ve süreksiz olmak iki kısımda incelenmektedir. Binom ve Poisson dağılımları süreksiz (kesikli), Normal (Gauss) dağılım ise sürekli dağılım fonksiyonudur. Bir olayın meydana gelmesi veya gelmemesi söz konusu olduğu durumlarda Binom (iki terimli) dağılımı kullanılmaktadır. Binom dağılımının özel bir hali olan Poisson dağılımı, gerçekleşme ihtimali çok zayıf olan olayları açıklamakta ve deneme sayısı olan N çok büyük, olayın meydana gelme ihtimali olan p çok küçük olduğunda Binom dağılımı yerine Poisson dağılımı kullanımı söz konusu olmaktadır (Bulmer, 1979). Olasılık dağılımları arasında en önemlisi ve en çok söz edileni normal (Gauss) dağılımdır. Normal dağılımın bu kadar önemli oluşunun temel nedeni; doğada yapılan pek çok gözlem sonucunun normal dağılıma uyması ve ayrıca birçok olayın normal dağılımla açıklanabilmesidir (Freund ve Walpole, 1980). Normal dağılıma uymayan gözlem sonuçları ise, bazı dönüşümler ile (karekök, logaritma gibi) normal dağılım haline dönüştürülebilmektedir (Lapp ve Andrews, 1972). Bu dağılım gözlem hatalarını gayet iyi temsil ettiğinden dolayı hata eğrisi olarak ta adlandırılmaktadır.

4.2.1. Binom Dağılımı

$t = 0$ ile t süresi arasında n sayıda atomun bozunma ihtimaliyeti $0 \leq n \leq N$ aralığında herhangi bir değer olabilir. t süresi boyunca her atom bozunmuş (başarılı) veya bozunmamış (başarısız) deneme olarak adlandırılabilir. $t=0$ 'dan t süresine kadar bir grup N atomunun gözlemi;

- 1) Radyoaktif elementin, bir atomunun bozunması sadece ihtimaliyet kanunlarına tabidir. Her deneme iki olaydan biriyle sonuçlanır: Başarılı (bozunma) veya Başarısız (bozunmama).
- 2) Bir atomun belirli bir Δt zaman aralığında bozunma ihtimaliyeti, bu atomun önceki durumundan bağımsızdır.
- 3) Δt zaman aralığında bozunma ihtimaliyeti aynı cins atomlar için aynıdır.

Bernolli denemeleri olarak adlandırılan N denemeden başarılı durumların sayısı n rastgele Binom değişkenidir ve bu kesikli rastgele değişkenin olasılık dağılımı Binom dağılımı olarak adlandırılmaktadır. Bir dizi özdeş N radyoaktif atomu için, bir t süresince gözlemlenirse, her bir takımdan bozulan atomların sayısı Binom dağılımına uygunluk göstermesi beklenir (Turner; 2007).

Radyoaktif bozunum ve herhangi bir özdeş radyoaktif N atomu için geliştirilmiş Denklem 4.1, Bernolli işlemlerinin özetidir. t süresince n tanesinin tamamen bozunma ihtimali;

$$P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \quad (4.1)$$

şeklindedir. Burada N ve n sırasıyla numunedeki radyoaktif çekirdek sayısı ve bozulan çekirdek sayısı, $P(n)$ n tane çekirdeğin bozunma ihtimali, p ve q sırasıyla

$$p = \text{Bozunma ihtimaliyeti} = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$q = \text{Bozunmama ihtimali} = e^{-\lambda t}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. t süresince verilen bir atom için iki alternatif vardır ve bunların toplamları 1'e eşittir ($p + q = 1$). Daha genel ifadeyle,

$$\sum_{n=0}^N P_n = (p + q)^N = 1 \quad (4.2)$$

şeklinde ifade edilebilir. Denklem 4.1 tarafından tanımlanan fonksiyon Binom dağılımı olarak adlandırılır ve herhangi bir Bernolli işlemleri içinde geçerlidir (Turner, 2007). Tablo 4.1’de verilen bir deneme sayısında başarılı durumların sayısı, nükleer sayım istatistiğinde bir ölçümün “sayımı” olarak tanımlanır. Burada başarı ihtimaliyeti tüm denemeler için sabit kabul edilmektedir.

Tablo 4.1. Herhangi bir sistemde istenilen durumun gerçekleşme ihtimali (Knoll, 1988).

Deneme	Başarı durumu	Başarma olasılığı (p)
Bozuk para atışı	Tura	1/2
Zar atışı	6	1/6
t süresinde radyoaktif çekirdek gözleme	Gözlem boyunca çekirdek bozunur	$1 - e^{-\lambda t}$

Radyoaktif bozunmada her zaman çok büyük sayılar için içerisine girdiğinden, sayısal olarak Binom dağılımı kullanışsız kalmaktadır ve nükleer uygulamalarda nadiren kullanılmaktadır. Binom dağılımına bir örnek vermek gerekirse, yüksek sayım verimiyle çok kısa yarı ömürlü radyoizotoplar sayılarak edinilen verilerin incelenmesinde kullanılmaktadır (Knoll, 1988). Radyoaktif bozunumun yanı sıra Binom dağılımının diğer benzer örnekleri, bir para N kez atıldığında tura veya yazı gelme ihtimalinin belirlenmesinde, endüstriyel uygulamalarda kalite kontrol ve ürün seçmede de yaygın olarak kullanılmaktadır (Turner, 2007).

t süresince gerçekleşecek bozunma sayısının beklenen değeri veya ortalaması \bar{n} ile verilmektedir (Knoll, 1988).

$$\bar{n} \equiv \sum_{n=0}^N n P(n) = \sum_{n=0}^N n p^n q^{N-n}$$

$$\bar{n} = N p \quad (4.3)$$

Böylece ortalama, çekirdek başına bozunma ihtimaliyle çekirdeklerin toplam bozunma sayısının çarpımıdır. Dağılımın varyansı,

$$\sigma^2 = \sum_{n=0}^N (n - \bar{n})^2 P(n) = \bar{n}(1 - p) \quad (4.4)$$

ile verilmektedir (Knoll, 1988). Bir radyoçekirdeğin bozunumu, deneydeki bozunumlardan kaydedilen sayıların sayısına uygulanabilir. Sayıcının verimi %100 olmadıkça, sayıların sayısı bozunumların sayısından daha az olacaktır (Turner, 2007).

4.2.2. Poisson Dağılımı

Bu model küçük başarılı p ihtimali olan şartlar altında, Binom dağılımının matematiksel olarak sadeleşmesidir. Pratik açıdan seçilmiş gözlem süresi, kaynağın yarı ömrüyle kıyaslandığında küçüktür veya algılama verimliliği küçüktür. Eğer herhangi bir radyoaktif çekirdeği ayırdığımızda, gözlem süresindeki kaydedilen sayım ile sonuçlanan ihtimaliyet çok küçük olacaktır ve Poisson dağılımı uygulanabilecektir. Bütün bunlara rağmen Poisson dağılımı, küçük sayıların kanunu veya nadir olayların kanunu olarak bilinmektedir. Bunlar Poisson dağılımının temel işlevinin kavranmasına zarar veren yanlış adlandırmalardır (Feller, 1967).

Binom dağılımı N ve p (yada q) olmak üzere iki bağımsız parametre ile tanımlanırken, Poisson dağılımı bir tek \bar{n} parametresine bağlıdır. Radyoaktif bozunma için hesaplamalar, Poisson istatistikleri göz önüne alındığında önemli ölçüde basitleştirilebilir (Knoll, 1988):

1. Herhangi bir zaman aralığında başarı (bozunma) sayısı, başka bir zaman aralığındaki başarı (bozunma) sayıdan bağımsızdır.
2. Çok kısa zaman aralıklarında tek bir başarı (bozunma) ihtimali, uzun aralıklardaki ile orantılıdır.
3. Çok kısa zaman aralıklarında meydana gelecek birden fazla başarı (bozunma) ihtimali ihmal edilebilir.

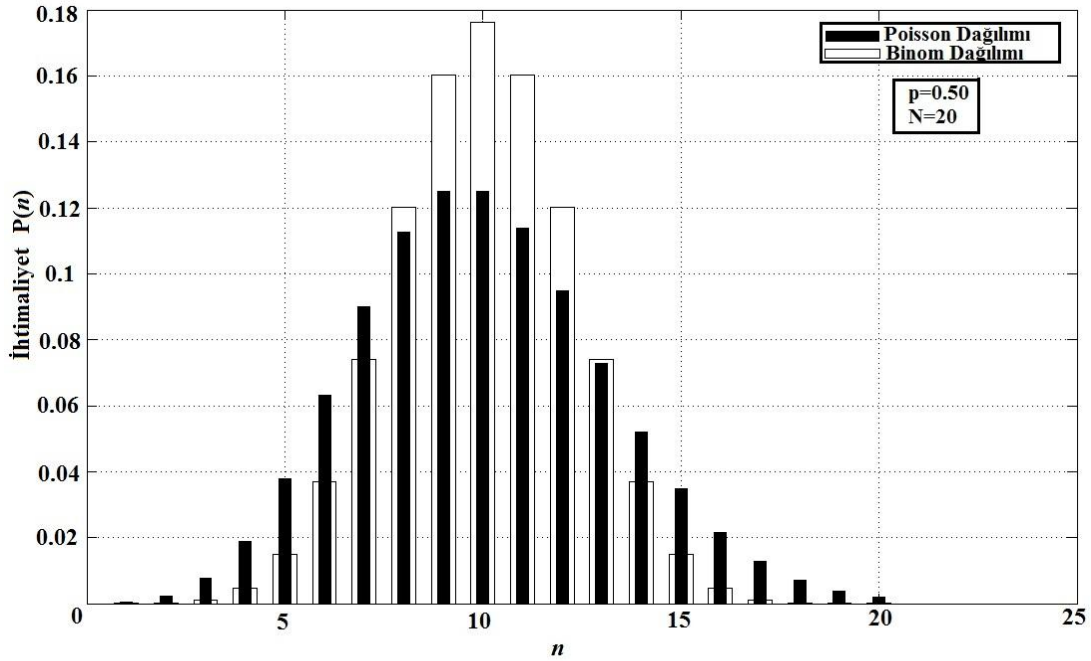
$$P(n) = \frac{(\bar{n})^n e^{-\bar{n}}}{n!} \quad (4.5)$$

Burada n ve \bar{n} sırasıyla, bozunan çekirdek sayısı ve verilen bir zaman aralığında bozunmaya uğrayan ortalama çekirdek sayısıdır. Binom dağılımında olduğu gibi Poisson dağılımının ortalaması $\bar{n} = Np$ dir. Poisson dağılımının standart sapması, ortalamanın karekökü olarak verilir (Knoll, 1988; Tuncer, 1980).

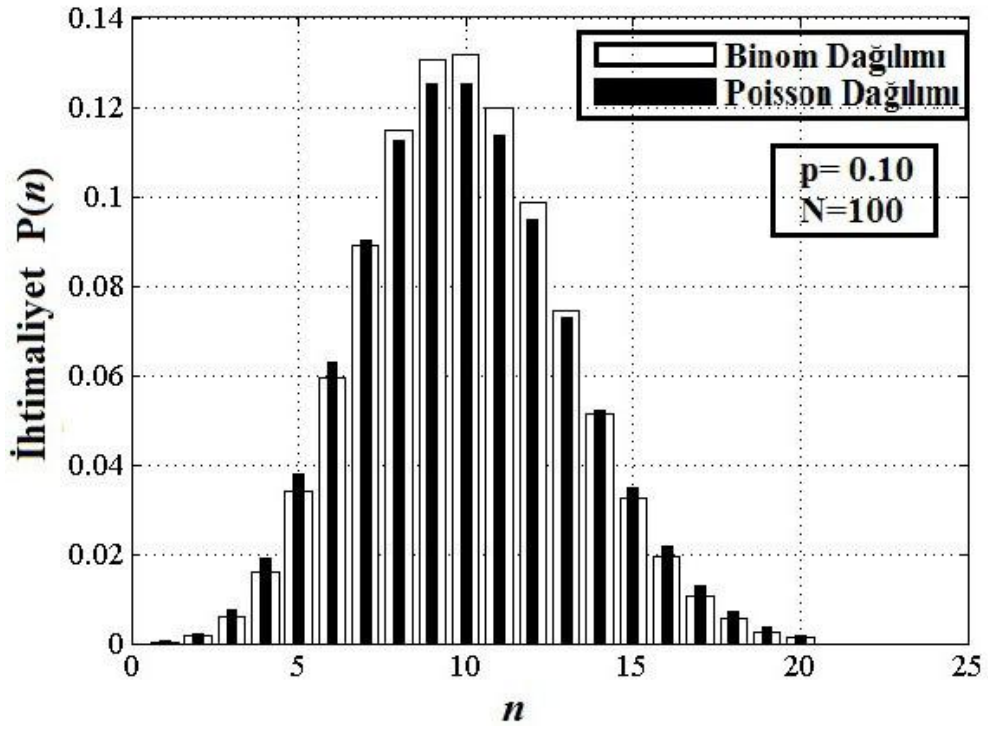
$$\sigma = \sqrt{\bar{n}} \quad (4.6)$$

Poisson süreçleri, belirli bir şehirde Ağustos ayı boyunca meydana gelen trafik kazaları sayısı, tavukların bir günlük bıraktıkları yumurta sayısı ve bir sayıcıdaki saatlik kaydedilmiş kozmik ışınların sayısı gibi çeşitli olaylara örnek olarak verilebilir. Rastgele ancak beklenen ortalama bir değerde meydana gelen olaylardır. Poisson dağılımı, genellikle küçük ($p \ll 1$) ve sabit ihtimaliyetli herhangi bir rastgele olay için başarıların sayısını tanımlamaktadır.

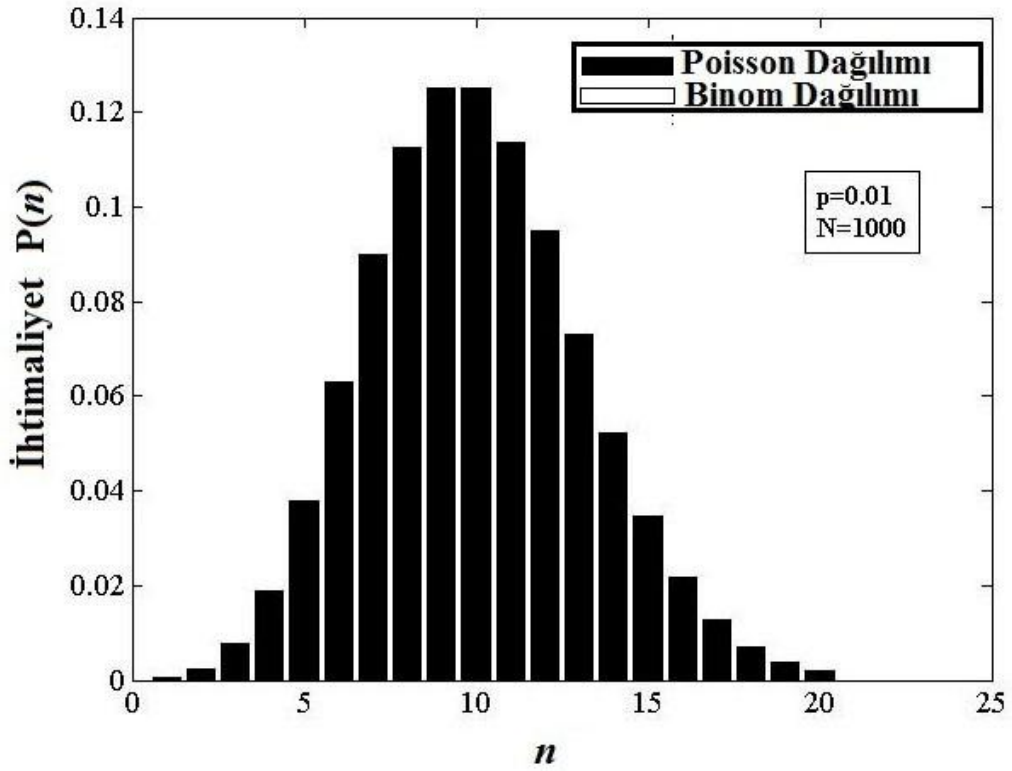
Şekil 4.1'de Binom ve Poisson dağılımlarının karşılaştırılması gösterilmiştir. Tüm sütunlarda, her iki dağılımın ortalaması $\bar{n} = 10$ 'dur ve sabit tutulmuştur, p başarı ihtimaliyeti ve N örnek büyüklüğü şekiller arasında değişmiştir. Ortalama aynı olduğu sürece Poisson dağılımı sütun boyunca aynıdır. $n \leq \bar{n}$ değerlerinde her iki dağılımda asimetrikdir. Binom dağılımında $n > N$ olduğunda $P_n = 0$ olmasına rağmen, Poisson dağılımında P_n tamamen sıfır olmaz (Knoll, 1988).



(a)



(b)

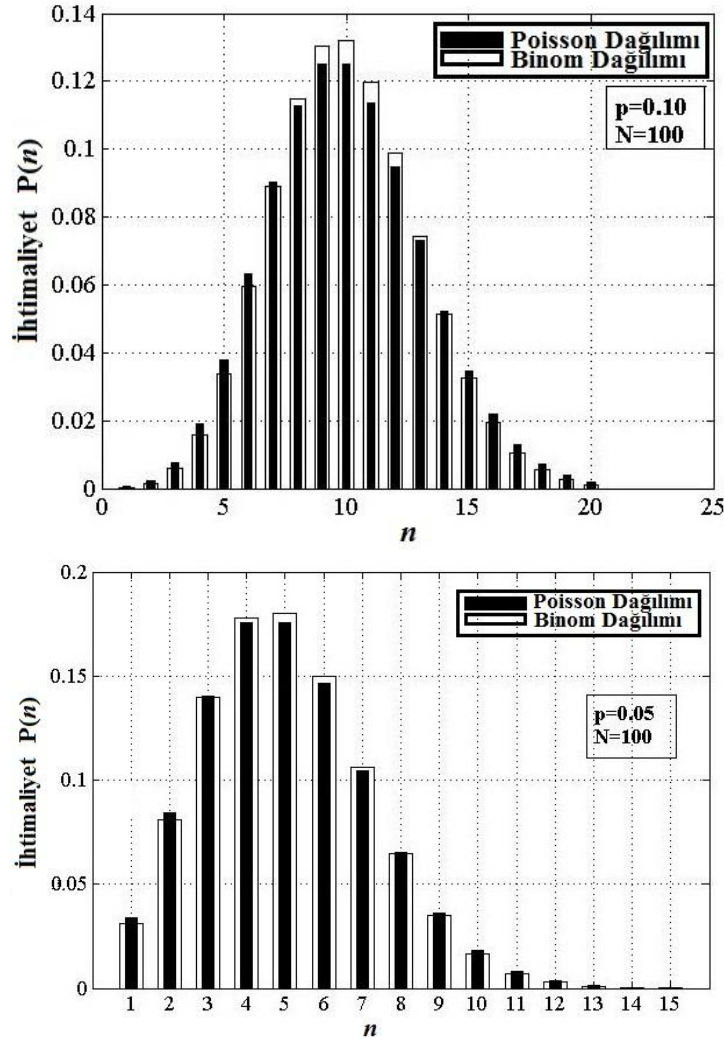


(c)

Şekil 4.1. Binom ve Poisson dağılımlarının karşılaştırılması. Tüm sütunlarda dağılımların ortalaması 10'dur

Şekilde 4.1’de görüldüğü gibi p değeri küçüldükçe Poisson dağılımı, Binom dağılımına yaklaşmaktadır. Tipik bir radyoaktif sayımda, tümünün yerine Poisson dağılımı kullanılabilir, ama çoğu zaman kullanımı zor olan Binom dağılımını kullanmak daha elverişlidir. Bununla birlikte, bir genelleştirme yapmak gerekirse $p \ll 1$ ve $N \gg 1$ değerlerine bağlı olarak dönüşüm yapılabilir (Turner, 2007; Donnelly, 2007).

Şekil 4.2’ de Binom ve Poisson dağılımlarının karşılaştırılması yapılmıştır. Burada N değeri sabit ($N=100$) ve p değeri ise sabit değildir. Üst sütunda gösterilen diyagram ($p=0.10$) Şekil 4.1 ile aynıdır. Şekil 4.2’de iki sütunda de her iki dağılım için ortalama değer aynıdır, ancak p değeri giderek küçülmektedir. Küçük p değerleri için Binom ve Poisson dağılımları ayırt edilemez ölçüde benzerdir.



Şekil 4.2. Aynı N , farklı p değerleri için Binom ve Poisson dağılımlarının karşılaştırılması

4.2.3. Gauss (Normal) Dağılımı

Üçüncü önemli dağılım, ortalama sayısının nispeten büyük (20 veya 30'dan daha fazla) olduğu örnekleme olayları için kullanılan Gauss (Normal) dağılımıdır. Bu durumda ölçüm sırasında birkaç sayının birikimi olduğunda herhangi bir durum için uygulanabilmektedir. Gauss modeli çoğu kez sayım istatistiklerinde birçok problemde yaygın olarak kullanılmaktadır (Turner, 2007).

Poisson dağılımı $p \ll 1$ sınırındaki Binom dağılımının matematiksel sadeleşmesi olarak kabul edilmektedir. Ek olarak eğer, dağılımın ortalama değeri büyükse (20'den daha büyük), ek sadeleşmeler Gauss dağılımının bulunmasına neden olur.

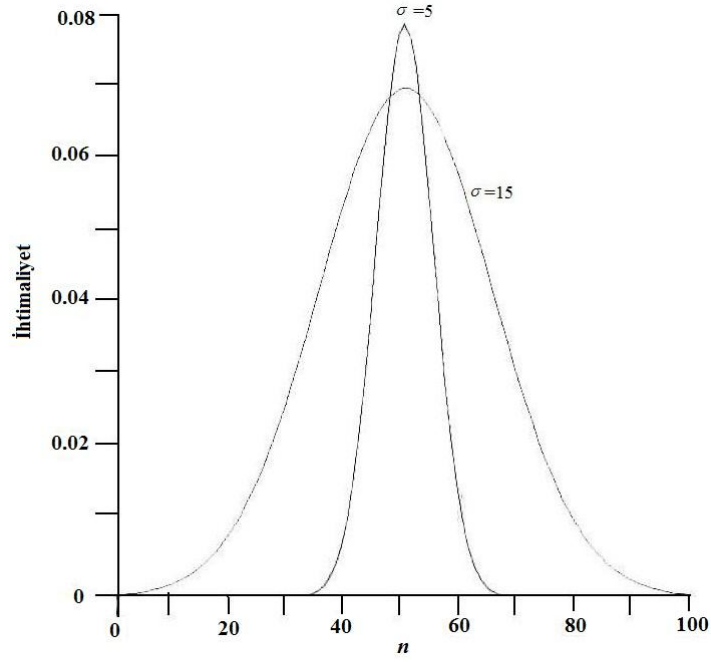
Gauss dağılımı Denklem 4.7'deki gibidir.

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} e^{-(n-\bar{n})^2/2\bar{n}} \quad (4.7)$$

Bu fonksiyonun önemli özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir:

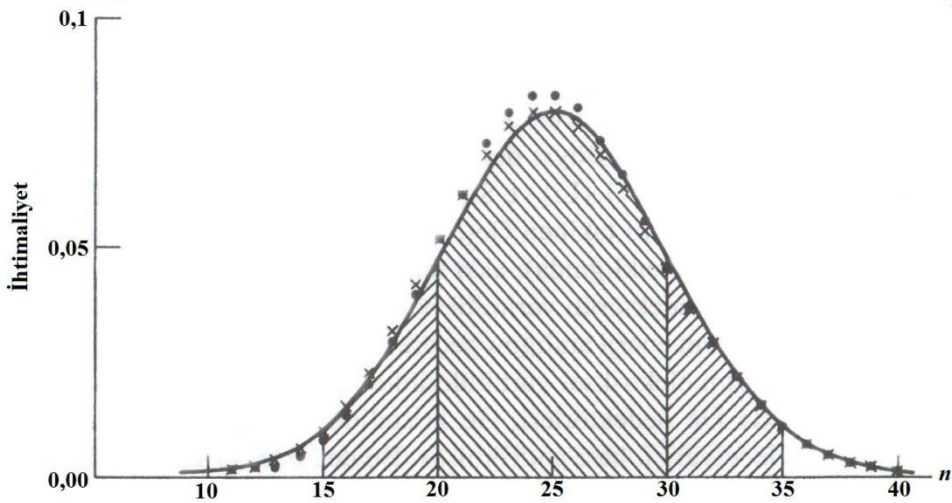
1. Dağılım fonksiyonu normalize edilebilir: $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1$
2. Dağılım tek parametre olan \bar{n} tarafından karakterize edilir ($\bar{n} = N p$).
3. Ortalamanın karekökü, dağılımın standart sapmasını vermektedir $\sigma = \sqrt{\bar{n}}$.

Şekil 4.3'de görüldüğü gibi Gauss dağılımı eğrisinin şekli, σ (standart sapma)'ya bağlıdır. σ küçük ise eğrinin tepe noktası daha keskindir. Ölçümde o derece duyarlı olmaktadır.



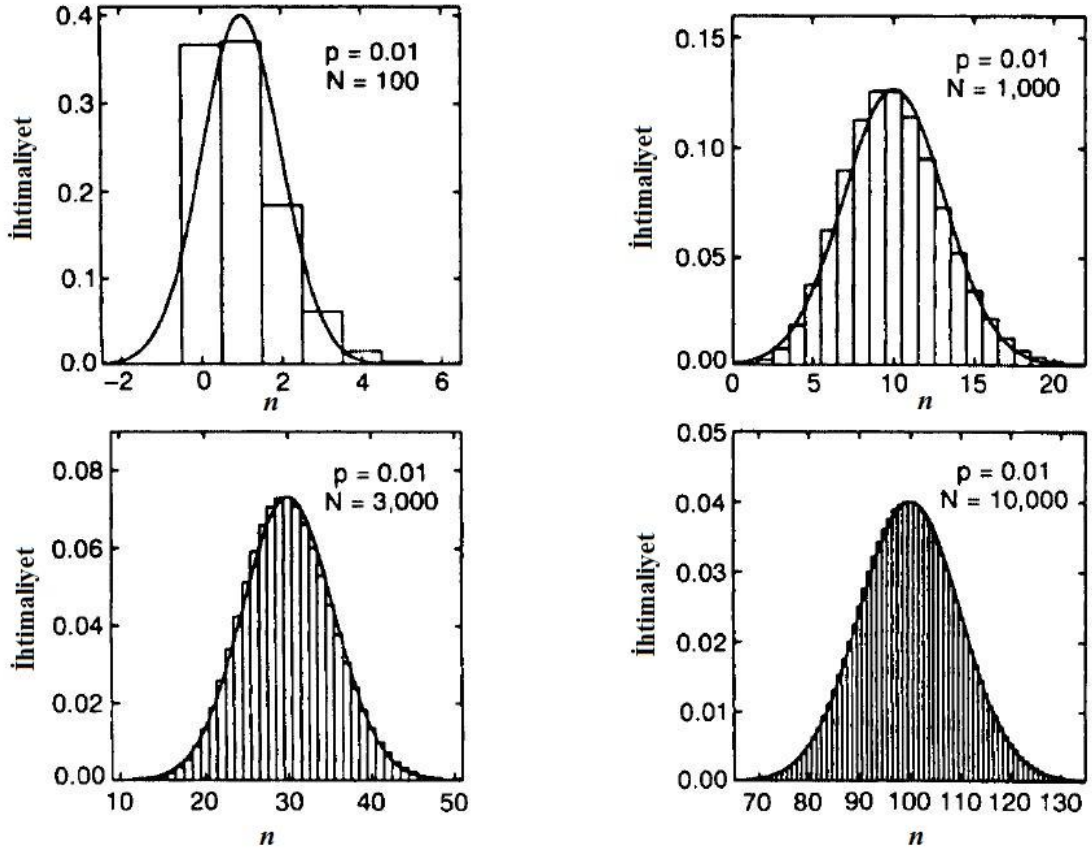
Şekil 4.3. Gauss dağılımı eğrisinin standart sapmaya göre değişimi

Bir numunenin radyoaktif özellikleri incelendiğinde, içerisinde 40 radyoaktif çekirdek olduğu ve ortalama bozunan çekirdek sayısı 25 ise bozunma ihtimaliyeti Binom, Poisson ve Gauss dağılımına göre hesaplandığında, bu üç dağılımın karşılaştırılması Şekil 4.4’ de gösterilmektedir. \bar{n} artarken Gauss dağılımı kullanılarak yapılan yaklaşım daha iyi olmaktadır (Krane, 2001).



Şekil 4.4. (●) Binom, (x) Poisson, (-) Gauss dağılımlarının $\bar{n}=25$ için karşılaştırılmaları (Krane, 2001).

Şekil 4.1’de Binom ve Poisson dağılımlarının benzer olduğunu gösterir ve küçük p ve büyük N değerlerinde dağılım Gauss eğrisine benzemektedir. Şekil 4.5’de aynı standart sapmaya ve ortalamaya sahip olan Gauss ve Binom dağılımlarının karşılaştırılması yapılmıştır.



Şekil 4.5. Aynı ortalama ve standart sapmaya sahip Binom (histogram) ve Gauss (kalın çizgi) dağılımlarının karşılaştırılması (Turner, 2007).

5. PERTÜRBE İHTİMALİYET DAĞILIM FONKSİYONLARI

İhtimaliyet dağılım fonksiyonlarının klasik ifadelerinde değişkenler, sadece ortalama kısımlarının değil de, ortalamadan olan sapmalarında (çalkantı terimler) denkleme eklenmesiyle pertürbe ihtimaliyet dağılım fonksiyonları elde edilir. Elde edilen yeni çözümde, değişkenlerin yayılma ölçüsü (varyans) ve birbirleriyle olan ilişkilerinin ölçüsü (korelasyon katsayısı) gibi istatistiksel terimleri de içerdiğinden daha ayrıntılı çözüme ulaşılır. Binom, Poisson ve Gauss dağılımının pertürbeli halleri düşünülerek yeniden düzenlenmesiyle aşağıdaki ifadeler elde edilir.

5.1. Pertürbe Binom Dağılımı

Denklem 4.1'de yazılan Binom dağılımı ifadesinde q yerine $1-p$ yazıldığında denklem 5.1 ifadesi elde edilir.

$$P(x) = \frac{N!}{n! (N-n)!} p^n (1-p)^{(N-n)} \quad (5.1)$$

Faktöriyelli terimler pertürbasyon yönteminin uygulanması sırasında problem çıkartacağından, Denklem 5.1'deki faktöriyel içeren terimler Stirling eşitliğine göre şu şekilde yazılabilir (Feller, 1967; Temme, 1996).

$$\begin{aligned} N! &\approx \sqrt{2\pi} \sqrt{N} N^N e^{-N} \\ n! &\approx \sqrt{2\pi} \sqrt{n} n^n e^{-n} \\ (N-n)! &\approx \sqrt{2\pi} \sqrt{N-n} (N-n)^{N-n} e^{-N+n} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Denklem 5.2' deki eşitlikler Denklem 5.1'de yerine yazılırsa, 5.3 eşitliği elde edilir.

$$P(n) = \frac{\sqrt{2\pi} \sqrt{N} N^N e^{-N}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{n} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi} \sqrt{N-n} (N-n)^{N-n} e^{-N+n}} p^n (1-p)^{N-n} \quad (5.3)$$

Denklem 5.3' deki terimler daha açık şekilde yazılırsa;

$$P(n) = \frac{\sqrt{2\pi} \sqrt{N} N^N e^{-N}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{n} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi} \left[\sqrt{N} \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{1/2} \right] \frac{(N-n)^N}{(N-n)^n} e^{-N} e^n} p^n (1-p)^{N-n} \quad (5.4)$$

ifadesi elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında denklem 5.5 elde edilir.

$$P(n) = \frac{N^n \left(1 - \frac{n}{N}\right)^n}{\sqrt{n} n^n \sqrt{2\pi} \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{n}{N}\right)^n} p^n (1-p)^{N-n} \quad (5.5)$$

Maclourein serisine göre, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ şeklinde yazılabilir (Davis, 1964). O halde,

$\left(1 - \frac{n}{N}\right)^N$, $\left(1 - \frac{n}{N}\right)^n$ ve $\left(1 - \frac{n}{N}\right)^{1/2}$ ifadelerini de “e” türünden yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{n}{N}\right)^N &= e^{-n} \\ \left(1 - \frac{n}{N}\right)^n &= e^{-n^2/N} \\ \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{1/2} &= e^{-n/2N} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Bu açılımlar denklem 5.5'te yerine yazılırsa,

$$P(n) = \frac{N^n}{\sqrt{n} n^n \sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{e}\right)^{n/N} \left(e^n\right)^{-n/N} e^n p^n (1-p)^{N-n} \quad (5.7)$$

ve

$$P(n) = \frac{N^n}{\sqrt{n} n^n \sqrt{2\pi}} (\sqrt{e})^{n/N} (e^n)^{1-\frac{n}{N}} p^n (1-p)^{N-n} \quad (5.8)$$

olur. Burada $(e^n)^{1-\frac{n}{N}}$ terimi Taylor serisine açılırsa;

$$(e^n)^{1-\frac{n}{N}} = (1+n)^{1-\frac{n}{N}} \quad (5.9)$$

olur. Denklem 5.8'de yazılırsa,

$$P(n) = \frac{N^n}{\sqrt{n} N^n \sqrt{2\pi}} (\sqrt{e})^{n/N} (1+n)^{1-\frac{n}{N}} p^n (1-p)^{N-n} \quad (5.10)$$

olur. Değişkenler, ortalamalar ve ortalama etrafında meydana gelen çalkantılar birlikte düşünülerek yazılırsa;

$$n = \bar{n} + e_n$$

$$N = \bar{N} + e_N$$

$$P(\bar{n} + e_n) = \frac{(\bar{N} + e_N)^{\bar{n} + e_n}}{\sqrt{(\bar{n} + e_n)} (\bar{n} + e_n)^{\bar{n} + e_n} \sqrt{2\pi}} (\sqrt{e})^{\frac{(\bar{n} + e_n)}{\bar{N} + e_N}} \frac{(1 + \bar{n} + e_n)}{(1 + \bar{n} + e_n)^{\frac{\bar{n} + e_n}{\bar{N} + e_N}}} p^{\bar{n} + e_n} q^{\bar{N} + e_N - \bar{n} - e_n} \quad (5.11)$$

olur. Denklem 5.11'de her iki tarafın ortalamaları alındığında,

$$P(\bar{n}) = \frac{\bar{N}^{\bar{n}}}{\sqrt{\bar{n}} \bar{n}^{\bar{n}} \sqrt{2\pi}} \sqrt{e^{\frac{\bar{n}}{\bar{N}} \left(1 - \frac{\sigma_n \sigma_N}{\bar{n} \bar{N}} \rho_{n,N}\right)}} \frac{(1 + \bar{n})}{(1 + \bar{n})^{\frac{\bar{n}}{\bar{N}} \left(1 - \frac{\sigma_n \sigma_N}{\bar{n} \bar{N}} \rho_{n,N}\right)}} p^{\bar{n} + e_n} q^{\bar{N} + e_N - \bar{n} - e_n} \quad (5.12)$$

elde edilir.

5.2. Pertürbe Poisson Dağılımı

Denklem 4.5’de verilen Poisson dağılımı ifadesinde, faktöriyel içeren terim Stirling eşitliğine göre yazılıp, Denklem 4.5’te yerine yazılmasıyla,

$$P(n) = \frac{(\bar{n})^n e^{-\bar{n}}}{\sqrt{2\pi n n^n e^{-n}}} \quad (5.13)$$

elde edilir.

Denklem 5.13’de n yerine ortalamalar ve pertürbe teriminin toplamının ($n = \bar{n} + e_n$) yazılmasıyla,

$$P(n) = \frac{(\bar{n})^{\bar{n}+e_n} e^{-\bar{n}}}{\sqrt{2\pi(\bar{n}+e_n)}(\bar{n}+e_n)^{\bar{n}+e_n} e^{-(\bar{n}+e_n)}} \quad (5.14)$$

$$P(n) = \frac{\bar{n}^{\bar{n}} \bar{n}^{e_n} e^{-\bar{n}}}{\sqrt{2\pi(\bar{n}+e_n)}(\bar{n}+e_n)^{\bar{n}} (\bar{n}+e_n)^{e_n} e^{-\bar{n}} e^{-e_n}} \quad (5.15)$$

Denklem 5.24’te ifade edilen Taylor serisine göre eksponansiyel ifadeler açılırsa,

$$P(n) = \frac{\bar{n}^{\bar{n}} \bar{n}^{e_n} (1-\bar{n})}{\sqrt{2\pi(\bar{n}+e_n)}(\bar{n}+e_n)^{\bar{n}} (\bar{n}+e_n)^{e_n} (1-\bar{n}) (1-e_n)} \quad (5.16)$$

elde edilir.

Her iki tarafın ortalamaları alındığında,

$$\overline{P(\bar{n}+e_n)} = \frac{\overline{\bar{n}^{\bar{n}} \bar{n}^{e_n} (1-\bar{n})}}{\sqrt{2\pi(\bar{n}+e_n)}(\bar{n}+e_n)^{\bar{n}} (\bar{n}+e_n)^{e_n} (1-\bar{n}) (1-e_n)} \quad (5.17)$$

olur.

Aşağıda belirtilen işlemlerden dolayı denklem 5.17, denklem 5.18’deki gibi sadeleştirilebilir:

- Birinci dereceden yaklaşım yapıldığından $\left(\frac{e_n}{\bar{n}} \ll 1\right)$ terimi ihmâl edilebilir (Kulahcı ve Şen, 1998).
- Pertürbe teriminin ortalaması $(\overline{e_n})$ sıfırdır.

$$P(\bar{n}) = \frac{\bar{n}^{\bar{n}} (1 - \bar{n})}{\sqrt{2\pi\bar{n}} \bar{n}^{\bar{n}} (1 - \bar{n})} \quad (5.18)$$

ve benzer ifadeler sadeleştirildiğinde,

$$P(\bar{n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} \quad (5.19)$$

olur.

5.3. Pertürbe Gauss Dağılımı

Denklem 4.7’de belirtilen Gauss dağılımı ifadesinde, n değişkenini $n = \bar{n} + e_n$ şeklinde yazılırsa;

$$P(\bar{n} + e_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} \exp\left[-\frac{(\bar{n} + e_n - \bar{n})^2}{2\bar{n}}\right] \quad (5.20)$$

ve

$$P(\bar{n} + e_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} \exp\left[-\frac{e_n^2}{2\bar{n}}\right] \quad (5.21)$$

elde edilir. Taylor serisine göre e^x , Denklem 5.22’deki gibi yazılabilir (Davis, 1964).

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \Lambda\right] \quad (5.22)$$

İlk iki terimin alınmasıyla;

$$e^x = 1 + x \quad (5.23)$$

olur. Aynı şekilde;

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \left[1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \Lambda \right] \text{ ve dolayısıyla,}$$

$$e^{-x} = 1 - x \quad (5.24)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem 5.21 eşitliğindeki eksponansiyel ifade 5.24 ifadesindeki gibi yazılıp düzenlenirse, Denklem 5.25 elde edilir.

$$P(\bar{n} + e_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} \left(1 - \frac{e_n^2}{2\bar{n}} \right) \quad (5.25)$$

Bu eşitlikte her iki tarafın ortalaması alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$P(\overline{\bar{n} + e_n}) = \frac{\bar{1}}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} \left(\bar{1} - \frac{\overline{e_n^2}}{2\bar{n}} \right) \quad (5.26)$$

ve son olarak

$$P(\bar{n}) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\bar{n}}} \quad (5.27)$$

elde edilir.

6. KLASİK VE PERTÜRBELİ DURUMLARIN KARŞILAŞTIRILMASI

Klasik durumlarda ihtimaliyet fonksiyonlarındaki N ve n değişkenleri; sırasıyla, çekirdek sayısını ve bozunan çekirdek sayısını göstermektedir.

Bu çalışmada önerilen $PIDF$ metodunda n değişkeni, önerdiğimiz denklemlerde \bar{n} olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu durum, pertürbe denklemlerin doğasından ileri gelir (Külahcı ve Şen; 2008). Bunları göz önüne alarak yaptığımız karşılaştırmalar aşağıdaki kısımlarda tartışılmıştır.

6.1. Klasik Binom ve Pertürbe Binom İhtimaliyet Dağılım Fonksiyonlarının Karşılaştırılması

Klasik ve pertürbe ihtimaliyet dağılım fonksiyonlarının karşılaştırılmasında; N çekirdek sayısı ve n ise, bozunan çekirdek sayısıdır. Dolayısıyla, N ve n nicelikleri $1, 2, 3, \dots, +\infty$ aralığında olacaktır. Burada N ve n niceliklerinin değerleri seçilen uygulama tipine göre değişebilir. ^{222}Ra ($t_{1/2} = 38\text{ s}$) radyoaktif elementi için, " N " çekirdek sayısını $1, 2, 3, \dots, 100$ aralığında alalım. Radyoaktif çekirdeklerin bozunması için geçen sürenin ilk $t = 5$ saniyelik süresi içerisinde bozunan çekirdek sayısının $1, 2, 3, \dots, 30$ olma ihtimaliyeti, Klasik Binom dağılımına (Denklemler 4.1) ve Pertürbe Binom dağılımına (Denklemler 5.12) göre hesaplanırsa, sonuçlar Tablo 6.1'deki gibi olur.

Tablo 6.1. Klasik Binom ve Pertürbe Binom dağılımına göre $t=5$ s bozunma zamanında ^{222}Ra 'nin bozunumunun istatistiksel değişimi

Ra-222	$t_{1/2}$ (s)	38.00
	t (s)	5.00
	λ (s^{-1})	0.01
	p	0.08
	q	0.92
N	\bar{N}	50.50
	σ_N	29.01
n	\bar{n}	15.50
	σ_n	8.80
P(n)	1.06×10^{-10}	
$\overline{P(n)}$	0.51×10^{-10}	
$\rho_{N,n}$	1.00	

Yüzde bağıl fark R_e ;

$$R_e = \frac{|P(\bar{n}) - P(n)|}{P(\bar{n})} \times 100 \quad (6.1)$$

$$R_e = \%109$$

olarak bulundu. Bu fark, klasik ve pertürbe durumlar arasındaki relatif hata olarak görülmemelidir (Külahcı ve Şen; 2008). Kısım 6.2 ve 6.3'tede görüleceği üzere, bağıl farklar %19.5 ve %48.3 olarak bulunmuştur. Gözlemcinin bakış açısı ve bulunduğu referans sistemine göre yapılan fiziksel işlemler ve sonuçları, klasik uygulamalara göre çok farklı çıkmaktadır. Nitekim benzer durumlar, Klasik-Relativistik Fizik ve Klasik-Kuantum Fiziği arasında da gözlenmektedir. Bu örnekleri çoğaltmak mümkündür (Gluck and Agmon, 2009; Ohlsson, 2011; Vedral, 2010; Bohm, 1989). Lineer olmayan fiziğin kapsamına giren pertürbasyon metodu ve uygulamaları içinde aynı durum söz konusudur. Yine aynı şekilde pertürbasyon metodunun farklı uygulamaları ve yöntemlerinden olan "Kaos" ve "Kompleks" te, yukarıda değindiğimiz Klasik-Relativistik Fizik veya Klasik-Kuantum Fiziğine benzer değişimler görmek mümkündür (Gharajedaghi, 2011; Hilborn, 2001; Johnson, 2009). Çok basit olarak klasik meteorolojik denklemlerin, kaotik yazılımları; klasik sonuçları o kadar farklı yerlere götürmektedir ki, sonuçlar alışıla gelen sonuçlardan oldukça farklı çıkmakta ve böylece yeni fiziksel yaklaşımlar elde edilmektedir

(Schwenk, 1996; Kautz, 2010). Bu çalışmalar ciddi olarak, literatürde ancak 20 yıllık bir zaman dilimi süresince çalışılmaktadır ve artık fiziğin yeni bir dalı olarak görülmektedir. Kuantum Kaos bu yeni araştırma alanlarından sadece birisidir (Stewart, 2002; Garfield, 2009; Schroeder, 2009; Robert and Koudelka, 2008; Sheldrake and McKenna, 2001).

6.2. Klasik Poisson ve Pertürbe Poisson İhtimaliyet Dağılım Fonksiyonlarının Karşılaştırılması

Ortalama bozunan çekirdek sayısının 15 olduğu bir radyoaktif kaynaktan 12 sayım elde etme ihtimaliyetini Denklem 4.5' teki klasik Poisson eşitliği ile çözersek,

$$P(n) = \frac{15^{12} e^{-15}}{12!} \quad (6.2)$$

$$P(n) = 0.0829$$

elde edilir.

Aynı problemi Denklem 5.19'ta önerdiğimiz Pertürbe Poisson dağılımına göre çözersek,

$$P(\bar{n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 15}} \quad (6.3)$$

$$P(\bar{n}) = 0.1030$$

elde edilir. Klasik denklem ile pertürbe edilmiş denklem arasındaki bağıl fark Denklem 6.1'e göre hesaplanırsa,

$$R_e = \frac{|0.1030 - 0.0829|}{0.1030} \times 100 \quad (6.4)$$

$$R_e = \%19.5$$

olur.

6.3. Klasik Gauss ve Pertürbe Gauss İhtimaliyet Dağılım Fonksiyonlarının Karşılaştırılması

Bir önceki kısımdaki örneği Klasik Gauss ve Pertürbe Gauss İhtimaliyet Dağılım Fonksiyonuna uygularsak; Klasik Gauss dağılımı için ihtimaliyet,

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(15)}} e^{-(12-15)^2 / 2(15)} \quad (6.5)$$

$$P(n) = 0.0764$$

şeklinde elde edilir. Pertürbe Gauss dağılımına göre ise ihtimaliyet,

$$P(\bar{n}) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\bar{n}}} \quad (6.6)$$

$$P(\bar{n}) = 0.0515$$

şeklinde olur. Klasik denklem ile pertürbe edilmiş denklem arasındaki yüzde bağıl fark,

$$R_e = \frac{|0.0515 - 0.0764|}{0.0515} \times 100 \quad (6.7)$$

$$R_e = \%48.3$$

olur.

7. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, daha önceden literatürde bulunmayan "pertürbe ihtimaliyet dağılım fonksiyonları (PİDF)" elde edilmiştir. Elde edilen bu yeni denklemlerin uygulamalarının nükleer fizik veya ilgili diğer herhangi bir bilim dalı için geliştirilmeye çok açık olacağını düşünmekteyiz.

Laboratuvar ölçümlerini ne kadar hassas bir şekilde tekrarlırsak tekrarlayalım, yine de her ölçüm sonucunda farklı sonuçlar elde ederiz. Verilerin ortalaması alınarak çözüme devam edilmesi, incelenen olayın ayrıntılarının bir tarafa bırakılması anlamına gelir. Bu nedenle, rastgelelik veya belirsizlik içeren uygulamalarda sadece aritmetik ortalama değil onun etrafında ne ölçüde salınımlar olduğunu belirlemek içinde bazı ölçütlerin geliştirilmesi gereklidir.

Her ne kadar fiziksel sistemler hassas bir şekilde hesaplınsa da, güvenilirlik ve kesinlikten uzaktır. Bu nedenle pertürbe terimi eklenerek bu dezavantajların üstesinden gelinir ve daha hassas ve güvenilir sonuçlar elde edilir. Böylece, Pertürbasyon yöntemiyle elde edilen sonuç, gerçek çözüme çok daha yakın olur. Bu durumu kaotik sistemlerde de görmek mümkündür (Schwenk, 1996; Kautz, 2010). Diğer taraftan benzer durumlara fiziğin diğer alanlarında da rastlamak mümkündür. Örneğin klasik fiziğin yetersiz kaldığı atom altı parçacıkların hareketi ile ilgili durumlar ve belli bir bölgede bulunma ihtimaliyetleri günümüzde Kuantum Fiziği ile açıklanmaktadır.

En az iki değişken içeren denklemlerde, Pertürbasyon teorisi ve metotlarının uygulamasıyla elde edilen pertürbe edilmiş eşitlikler, basit işlemler ile klasik duruma dönüşür. Eğer değişkenler arasında korelasyon (ilişki) yok ise, o zaman bunlar arasındaki korelasyon katsayısı sıfıra eşit olur ve sonuç olarak pertürbe edilmiş denklem klasik haline dönüşür. Aynı şekilde standart sapmalar sıfıra eşit olduğunda da denklem ilk haline dönüşür. Binom dağılımında N ve n olmak üzere iki değişken olduğundan, Binom dağılımı için bu durum söz konusudur. Ancak Poisson ve Gauss dağılımları tek değişken (n) içerdiğinden bu durumdan söz edilemez. Bu tür yaklaşımların hepsinde amaç, nihai sonuca ulaşmakta genel yaklaşımlar elde etmektir.

Gerek radyoaktif bozunma gerekse atmosfer ve okyanuslar da gerçekleşen birçok fiziksel olaylarda alınan ölçümlerde dalga türünden salınımlar (çalkantılar) mevcuttur. Bunlardan bazılarının tam olarak gözlenmesi, bugünün teknolojiyle bile mümkün

olmamasına rağmen, mevcut verilerden faydalanarak, bunlar hakkında tahminler yürütmek mümkündür. Bu dalgalanmaların tümü dinamik denklemlerin doğrusal olmayışına sebep olur. Doğrusal Dalga Teoremi Çalkantı Yöntemi adı verilen teknik “doğrusallaştırma” işlemine dayandığı için yaygın olarak kullanılmaktadır.

Pertürbasyon metodunun ihtimaliyet dağılım fonksiyonlarına uygulanması sırasında ortaya çıkan faktöriyel ve eksponansiyel gibi ifadelerin yazımını kolaylaştırmak için Stirling eşitliği, Taylor serisi gibi açılımlardan faydalanarak, ifadeler doğrusallaştırılmıştır. Stirling eşitliğine göre ifade yeniden yazıldığında, faktöriyeli ifadeler yaklaşık olarak bulunur. Ancak, denklemin pertürbe etmekteki temel amaç; ortalama değer etrafında meydana gelen dalgalanmaları da hesaba katarak, daha hassas çözümler elde etmektir. Büyük N veya n değerlerinde Binom ve Poisson dağılımındaki faktöriyeli terimler, yöntemin uygulanabilirliğini zorlaştırdığından, bu tür açılımları kullanmak şarttır.

7. KAYNAKLAR

- Arıcı, H.**, 2001. İstatistik Yöntemler ve Uygulamalar, Hacettepe Üniversitesi Basımevi, Ankara.
- Bayazıt, M., ve Oğuz, B.**, 1994. Mühendisler İçin İstatistik, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- Bohm D.**, 1989. Quantum Theory, Dover Publications, New York.
- Bulmer, M.G.**, 1979, Principles of Statistics, Dover Publications, New York.
- Buttlar, H. V.**, 1968. Nuclear Physics An Introduction, Academic Press, London.
- Davis, P. J.**, 1964. Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, U. S. Government Printing Office, Washington.
- Donnelly, R.A.**, 2007. The Complete Idiot's Guide to Statistics, 2nd Edition, New York.
- Feller, W.**, 1967. An Introduction to Probability Theory and Its Applications Volume 1, John Wiley & Sons, Inc. , New York.
- Freedman, D., Pisani, R. and Purves, R.**, 2007, Statistics, 4th Edition, New York.
- Freund, J, E. and Walpole R. E.**, 1980. Mathematical Statistics, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Friar, J.L. and Reiss, H.R.**, 1987. Modification of nuclear β decay by intense low-frequency electromagnetic waves, *Phys. Rev. C*, **36**, 283-297.
- Garfield, B.**, 2009. The Chaos Scenario ,Stielstra Publishing, USA.
- Gharajedaghi, J.**, 2011. Systems Thinking, Third Edition: Managing Chaos and Complexity: A Platform for Designing Business Architecture, Morgan Kaufmann Publisher, USA.
- Gluck, P. and Agmon, D.**, 2009. Classical and Relativistic Mechanics, World Scientific Publications, New York.

- Gürsakal, N.**, 2001. Bilgisayar Uygulamalı İstatistik 1, Alfa Yayınları, İstanbul.
- Hilborn, R.**, 2001. Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers, Oxford University Press, USA.
- Johnson, N. F.**, 2009. Simply Complexity: A Clear Guide to Complexity Theory, Oneworld; Reprint edition, England.
- Kara, İ.**, 1983. Olasılık, Bilim Teknik Yayınevi, Eskişehir.
- Karagöz, M.**, 2009. İstatistik Yöntemleri, Ekin Yayınevi, Bursa.
- Kautz, R.**, 2010. Chaos: The Science of Predictable Random Motion, Oxford University Press Publishing, USA.
- Knoll, G. F.**, 1988. Radiation Detection and Measurement, John Wiley & Sons, New York.
- Krane, K. S.**, 2001. Introductory to Nuclear Physics, John Wiley&Sons, New York.
- Külahcı, F. and Şen, Z.**, 2008. Perturbation Distribution Coefficient Definition, *FEB.*, **3**, 326-330.
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. M.**, 1987. Fluid mechanics, Course of Theoretical Physics, 6 (2nd revised ed.), Pergamon Press, Canada.
- Lapp, R. E. and Andrews, H. L.**, 1972. Nuclear Radiation Physics, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.
- Leo, W. R.**, 1987. Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments, Springer-Verlag, New York.
- Multamäki, T., Vainio, J. and Vilja, I.**, 2010. Hamiltonian Perturbation Theory in $f(r)$ Gravity, *Phys. Rev. D*, **81**.

- Nebreda, J. and Peláez, J.R.**, 2010. Strange And Nonstrange Quark Mass Dependence of Elastic Light Resonances from SU(3) Unitarized Chiral Perturbation Theory to One Loop. http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1001/1001.5237v2.pdf, 9 Aralık 2010
- Ohlsson T.**, 2011. Relativistic Quantum Physics: From Advanced Quantum Mechanics to Introductory Quantum Field Theory, Cambridge University Press, United States.
- Reif, F.**, 1965. Statistical Physics, Berkeley Physics Course, California.
- Robert, D., and Koudelka, J.**, 2008. Chaos, Phaidon Press, London.
- Schroeder, M.**, 2009. Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise, Dover Publications, New York.
- Schwenk, T.**, 1996. Sensitive Chaos: The Creation of Flowing Forms in Water and Air, Rudolf Steiner Press Publishing, United Kingdom.
- Sheldrake, R. and McKenna, T.**, 2001. Chaos, Creativity, and Cosmic Consciousness, Park Street Press Publishing, France.
- Stewart, I.**, 2002. Does God Play Dice? The New Mathematics of Chaos, Wiley-Blackwell Publishing, USA.
- Şen, Z.**, 2002. Bilimsel Düşünce ve Matematik Modelleme İlkeleri, Su Vakfi Yayınları, İstanbul.
- Şen, Z.**, 2002. İhtimaller Hesabı Prensipleri (Mühendislik ve Sosyal Bilimler), Bilge Kültür Sanat Yayınları, İstanbul.
- Şen, Z.**, 2002. İstatistik Veri İşleme Yöntemleri (Hidroloji ve Meteorolojide), Su Vakfi Yayınları, İstanbul.
- Temme, N. M.**, 1996. Special Functions An Introduction to The Classical Functions of Mathematical Physics, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Tuncer, Y., 1980. A Course in Multivariate Statistics: Distributions, Middle East Technical University, Ankara.

Turner, E. J., 2007. Atoms, Radiation, and Radiation Protection, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim.

Vedral V., 2010. Introductory Quantum Physics and Relativity, World Scientific Publishing, New York.

Yaramış, B., 1984. Nükleer Fizik, İstanbul Teknik Üniversitesi Yayınları, İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Elazığ'da doğdum. İlköğretimi Elazığ Yücel ilköğretim okulunda, lise eğitimimi Elazığ Balakgazi lisesinde tamamladım. 2004'te Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümüne girdim. 2009' da Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Nükleer Fizik anabilim dalında yüksek lisans eğitimine başladım. 2010 Kasım ayında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü, Nükleer Fizik anabilim dalına araştırma görevlisi olarak atandım. Hâlen bu göreve devam etmekteyim.