



**T.C.**  
**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI ÖZEL SAYI DİZİLERİNİN GRAFLAR  
YARDIMIYLA TEMSİLİ**

**Fadime ÖZKAN**  
**YÜKSEK LİSANS**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Temmuz-2012**  
**KONYA**  
**Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL VE ONAYI

Fadime ÖZKAN tarafından hazırlanan "Bazı Özel Sayı Dizilerinin Graflar Yardımıyla Temsili" adlı tez çalışması 19/07/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

#### Başkan

Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

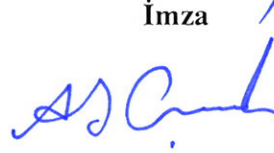
#### Danışman

Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA

#### Üye

Doç. Dr. Hakan Kasım AKMAZ

### İmza



Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Aşır GENÇ  
FBE Müdürü

## TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

### DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.



Fadime ÖZKAN

Tarih: 19.07.2012

# ÖZET

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

### BAZI ÖZEL SAYI DİZİLERİNİN GRAFLAR YARDIMIYLA TEMSİLİ

**Fadime ÖZKAN**

**Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı**

**Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA**

**2012, 126 Sayfa**

**Jüri**

**Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA  
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK  
Doç. Dr. Hakan Kasım AKMAZ**

Bu tezde, graflar ve grafların Fibonacci sayıları ile ilişkisi üzerine detaylı bir çalışma sunulmaktadır. Bu çalışmada temel düşünce, literatürde olan bu ilişkileri ele almaktır. Bazı graflarda bağımsız küme sayısı Fibonacci sayılarını vermektedir. Bu bağlamda, Fibonacci sayısının hesaplanmasında etkili bir yöntem olan köşe ve kenar indirgeme formülleri verilmiştir. Daha sonra da, adı geçen bu yöntem kullanılarak unicyclic, dicyclic grafların ağaçların ve kuvvet graflarının Fibonacci sayılarının hesaplanmasına ilişkin çalışmalar incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Bağımsız küme sayısı, Fibonacci sayıları, graflar

**ABSTRACT**

**MS THESIS**

**THE REPRESENTATION OF SOME KINDS OF SPECIAL NUMBER  
SEQUENCES VIA GRAPHS**

**Fadime ÖZKAN**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF  
SELÇUK UNIVERSITY  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

**Advisor: Asistant Prof. Dr. Necati TAŞKARA**

**2012, 126 Pages**

**Jury**

**Asst. Prof. Dr. Necati TASKARA**

**Prof. Dr. Ahmet Sinan Cevik**

**Assoc. Prof. Dr. Hakan Kasım AKMAZ**

In this thesis, a detailed survey on the relations between graphs and Fibonacci numbers is presented. The main idea of our study is to review such relations. The number of independent sets in some kinds of graphs give the Fibonacci numbers. In this sense, the vertex and edge reduction formulas, which are efficient methods evaluating the Fibonacci number of a graph, are introduced. Then, studies on the evaluation of the Fibonacci numbers of unicyclic graphs, dicyclic graphs, trees, power graphs are investigated by using the aforementioned method.

**Keywords:** Fibonacci numbers, graphs, number of independent sets

## ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Ana Bilim Dalı Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışmada beni yönlendiren ve desteklerini esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA'ya ve desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Bu günlere gelmemde en büyük paya sahip olan ailem ile uğradığım her hayal kırıklığında beni hoşgörü ve sabırla dinleyen, cesaretlendiren ve tekrar amacıma yönelten canım yol arkadaşım Esmâ BARAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Fadime ÖZKAN  
KONYA-2012

# İÇİNDEKİLER

<b>ÖZET</b> .....	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>v</b>
<b>ÖNSÖZ</b> .....	<b>vi</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	<b>vii</b>
<b>SİMGELER VE KISALTMALAR</b> .....	<b>viii</b>
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
<b>2. KAYNAK ARAŞTIRMASI</b> .....	<b>5</b>
<b>3. GRAFLAR ve TEMEL ÖZELLİKLERİ</b> .....	<b>6</b>
3.1. Temel Kavramlar .....	6
3.1.1. Graflarda İzomorfizm.....	8
3.1.2. Alt Graflar .....	13
3.1.3. Bir Köşenin Derecesi .....	19
3.1.4. Regüler Graflar .....	21
3.1.5. İki Parçalı Graflar .....	22
3.1.6. Yol, Patika ve İz.....	23
3.1.7. Graflar Üzerinde İşlemler.....	26
3.2. Euler ve Hamilton Grafları.....	30
3.3. Yönlendirilmiş Graflar (Digraflar) .....	36
3.3.1. Digraflarda İzomorfizm.....	38
3.3.2. Alt Digraflar .....	39
3.3.3. Euler ve Hamilton Digrafları.....	42
3.4. Grafların Matrisler Yardımıyla Temsili.....	43
3.5. Ağaçlar .....	55
<b>4. GRAFLARDA FİBONACCİ SAYI DİZİSİ</b> .....	<b>57</b>
4.1. Bir veya İki Döngü İçeren Grafların Fibonacci Sayısı .....	68
4.2. Ağaçlarda Fibonacci Sayısı.....	88
4.3. Kuvvet Grafları.....	98
4.4. Grafların Fibonacci Polinomu .....	108
4.5. Grafların Bağımsız Kenar Kümeleri.....	114
<b>5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER</b> .....	<b>124</b>
<b>KAYNAKLAR</b> .....	<b>125</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	<b>126</b>

## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

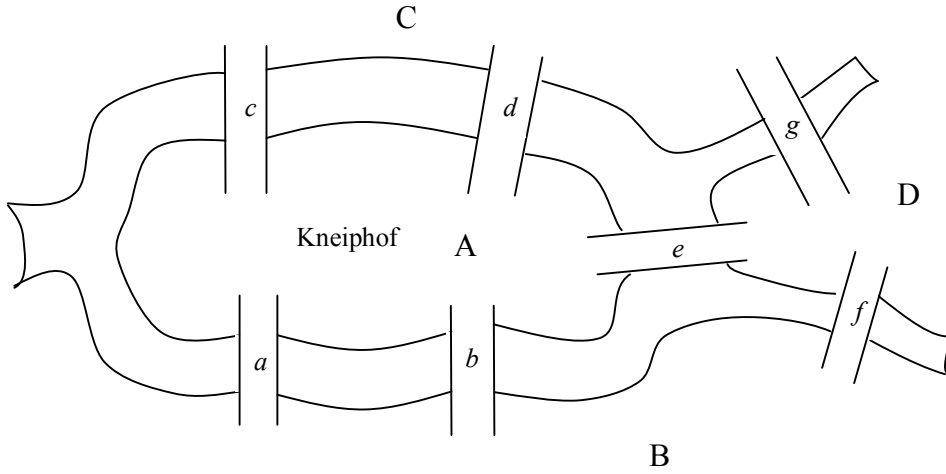
$G = (V, E)$	: Graf
$N(v)$	: $v$ köşesinin açık komşuluğu
$d(v)$	: $v$ köşesinin derecesi
$N[v]$	: $v$ köşesinin kapalı komşuluğu
$G_1[G_2]$	: $G_1$ ve $G_2$ graflarının bileşkesi
$G_1 \cup G_2$	: $G_1$ ve $G_2$ graflarının birleşimi
$G_1 \oplus G_2$	: $G_1$ ve $G_2$ graflarının halka toplamı
$G_1 \cap G_2$	: $G_1$ ve $G_2$ graflarının kesişimi
$G_1 + G_2$	: $G_1$ ve $G_2$ graflarının toplamı
$d^+(v)$	: $D$ digrafına ait $v$ köşesinin dış derecesi
$d^-(v)$	: $D$ digrafına ait $v$ köşesinin iç derecesi
$D(V, E)$	: Digraf (yönlendirilmiş graf)
$d_G(v)$	: $G$ grafına ait $v$ köşesinin derecesi
$G - e$	: $G$ grafından $e$ kenarının kaldırılması ile elde edilen alt graf
$G - v$	: $G$ grafından $v$ köşesinin kaldırılması ile elde edilen alt graf
$G[F]$	: $G$ grafının $F \subseteq E(G)$ kenarlar kümesine indirgenmiş alt grafı
$G[U]$	: $G$ grafının $U \subseteq V(G)$ köşeler kümesine indirgenmiş alt grafı
$M \subseteq E(G)$	: $G$ grafının bağımsız kenar kümesi
$S$	: $G$ grafının bağımsız köşe kümesi
$\overline{G}$	: $G$ grafının tamamlayıcısı
$L(G)$	: $G$ grafının çizgi grafı
$f(G)$	: $G$ grafının Fibonacci sayısı
$M(G)$	: $G$ grafının incidence matrisi
$F_k(G)$	: $G$ grafının $k$ -elemanlı tüm bağımsız kümelerinin sayısı
$E(G)$	: $G$ grafının kenarlar kümesi
$A(G)$	: $G$ grafının komşuluk matrisi

$V(G)$	: $G$ grafinin köşeler kümesi
$w(G)$	: $G$ grafinin tüm bileşenlerinin sayısı
$f_v(G)$	: $G$ grafinin $v$ köşesini içeren tüm bağımsız kümelerinin sayısı
$f_{-v}(G)$	: $G$ grafinin $v$ köşesini içermeyen tüm bağımsız kümelerinin sayısı
$K_{r,s}$	: İki parçalı tam graf
$C_n$	: $n$ köşeli döngü
$K_n$	: $n$ köşeli tam graf
$P_n$	: $n$ köşeli tam graf
$S_n$	: $n$ köşeli yıldız
$F_n$	: $n$ . Fibonacci sayısı
$T$	: Ağaç
$B_{n,d,k}$	: Süpürge graf
$d(v_1, v_2)$	: $v_1$ ve $v_2$ köşeleri arasındaki uzaklık
$ G $	: $G$ grafinin mertebesi
$\ G\ $	: $G$ grafinin boyutu
$\text{çap}(G)$	: $G$ grafinin çapı
$L_n$	: $n$ . Lucas sayısı
$f_G(x)$	: $G$ grafinin Fibonacci polinomu
$G(n, k)$	: $n$ köşeli $G$ grafinin $k$ . kuvveti

## 1. GİRİŞ

Graf Teori, 1736 yılında Leonhard Euler'in (1707-1783) Königsberg köprü problemini ele almasıyla yeni bir bilim dalı olarak ortaya çıkmıştır. Königsberg köprü problemi ve Euler'in bu probleme yaklaşımı aşağıda anlatıldığı gibidir:

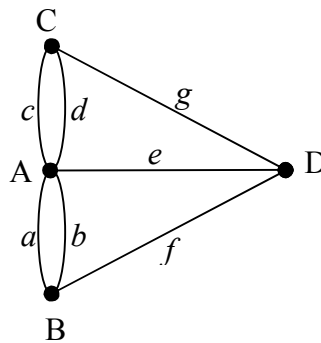
18. yy.ın başlarında Königsberg şehrinin ortasında Pregel nehri ile çevrelenmiş Kneiphof adası vardır. Şehir aşağıda gösterildiği gibi dört kara parçasına (A, B, C, D) ayrılmıştır ve bu kara parçaları arasındaki ulaşım 7 köprü ( $a, b, c, d, e, f, g$ ) ile sağlanmaktadır.



Şekil 1.1. Königsberg şehri

Königsberg halkının şehirleri ile ilgili bir oyun bulduğu söylenir. Bu oyun, tüm köprülerden sadece bir kez geçmek şartı ile başlangıç noktasına geri dönecek şekilde bir rota belirlemektedir. Ama ne var ki halk ne kadar uğraşsa da böyle bir yol bulamaz.

Euler 1736 yılında Königsberg köprü problemini çizdiği şekiller yardımıyla inceler. Buna göre kara parçalarını noktalar ile, bu kara parçalarını birbirine bağlayan köprüleri de kara parçalarının karşılık geldiği noktaları birleştiren çizgilerle gösterir. Bu durumda şehir aşağıdaki diyagramda gösterildiği gibi olur.



Şekil 1.2.

Şehrin bir parçasına geçildiğinde o parçayı farklı bir köprü ile terk etme imkanı varsa yukarıdaki şartları sağlayan yol bulunabilir. Bunun için de herhangi iki kara parçasını birbirine bağlayan köprü sayısı çift olmalıdır. Königsberg şehri ise bu şartı sağlamadığından istenilen özellikte bir yol mevcut değildir.

Bu şekilde nesnelerin noktalarla, nesnelere arasındaki ilişkilerin de çizgilerle temsil edildiği diyagrama *graf* denir. Grafi oluşturan noktalara *köşe*, çizgilere de *kenar* denir.

Euler'in bu çalışmasının ardından araştırmacılar problemlerini Euler gibi şekillere aktararak incelemişlerdir. Öyle ki Graf Teorisi, matematiğin yanı sıra Kimya, Ekoloji, Arkeoloji, Bilgisayar, Mühendislik, Kodlama Teorisi ve Oyun Teorisi gibi birçok bilim dalında geniş uygulama alanı bulmuştur. Örneğin, kimyasalların tehlikeli reaksiyonlarını önleyecek şekilde kimyasalları depolama biçiminde, bir haritanın dört renk ile boyanabileceğini göstermede, tüm yüzleri dört farklı renge boyanmış küplerin her yönden bakıldığında tüm renklerin görülebileceği dizilişi bulmada, bir postacının tüm mektuplarını dağıtabileceği en kısa yol güzergahını belirlemede çoğunlukla tercih edilen Graf Teori'dir.

$$F_0 = 0 \text{ ve } F_1 = 1 \text{ olmak üzere}$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

şeklinde tanımlanan sayı dizisine Fibonacci dizisi denir. Bazı Fibonacci sayıları aşağıdaki tablo ile verilmiştir.

**Tablo 1.1.**

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$F_n$	0	1	1	2	3	5	8	13	...

$$x^2 - x - 1 = 0 \text{ denkleminin kökleri } \alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \text{ ve } \beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \text{ olmak}$$

üzere  $n \in \mathbb{Z}^+$  için

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

dir. Bu durumda

$$F_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$$

olup bu formüle *Binet Fibonacci formülü* denir.

$$L_0 = 2, L_1 = 1 \text{ olmak üzere}$$

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

şeklinde tanımlanan sayı dizisine Lucas dizisi denir. Bazı Lucas sayıları aşağıdaki tablo ile verilmiştir.

**Tablo 1.2.**

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$L_n$	2	1	3	4	7	11	18	29	...

Fibonacci ve Lucas sayıları arasında  $n \geq 2$  olmak üzere

$$L_n = F_n + F_{n-2}$$

bağıntısı mevcuttur.

Bu tez graflar ve grafların Fibonacci sayı dizileri ile ilişkisi üzerine yapılan çalışmaların bir derlemesi olup, 5 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş, ikinci bölüm kaynak araştırmasına ayrılmıştır.

Üçüncü bölümde graflara ilişkin temel kavramlar ve teoremler verilerek Euler ve Hamilton grafları, Yönlendirilmiş graflar, ağaçlar ve grafların matrisler yardımıyla temsili kapsamlı olarak sunulmuştur.

Dördüncü bölümde öncelikle grafların Fibonacci sayı dizileri ile ilişkileri incelenmiştir. Bu amaçla literatürde iyi bilinen bir grafin Fibonacci sayısı kavramı verilmiştir. Bu sayının hesaplanmasında iyi bir yöntem olan köşe ve kenar indirgeme formülleri verilerek bu yöntemle unicyclic, dicyclic grafların ağaçların ve kuvvet graflarının Fibonacci sayılarını hesaplamaya ilişkin çalışmalar incelenmiştir. Daha sonra bir graf için  $k$ -elemanlı bağımsız küme kavramı verilmiştir ve graflardan elde edilen bu

sayılar ile oluşturulan Fibonacci tanımı sunulmuştur. Son olarak bağımsız kenar küme tanımı verilmiştir ve genelleştirilmiş Fibonacci sayılarını bazı özel tipteki grafların matching sayısı olarak temsil eden bazı çalışmalar incelenmiştir. Son bölümde sonuç ve öneriler sunulmuştur.

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

**Chism L. M. (2009)** Bu çalışmada izomorf olmayan, fakat aynı bağımsızlık polinomuna sahip graflar için bağımsızlık denkliği kavramı tanımlanarak bu özelliği sağlayan graflar bulunmuştur. Ayrıca  $2 \times n$  latis, silindir ve Möbius ladder graflarının bağımsızlık polinomları elde edilmiştir.

**Startek M., Wloch A., Wloch I. (2009)** Bu çalışmada bazı bir ve iki döngü içeren graflar tanımlanarak bu grafların Fibonacci sayıları hesaplanmıştır. Ayrıca  $n$  köşeli iki döngü içeren grafların Fibonacci sayıları için alt ve üst sınır elde edilmiştir.

**Wingard G. C. (1995)** Bu çalışmada bazı özel graflar ve graflar üzerinde işlemlerle elde edilen yeni graflar için grafların Fibonacci polinomlarının hesaplanmasında kullanılan köşe ve kenar indirgeme formülleri elde edilmiştir.

**Hopkins G., Staton W. (1984)** Bu çalışmada herhangi bir grafin Fibonacci polinomu kavramı tanımlanmıştır. Ayrıca patika ve döngü grafların Fibonacci polinomu aracılığı ile bazı eşitlikler elde edilmiştir.

**Horton L. B. M. (2007)** Bu çalışmada bir grafin kuvvet grafi tanımlanarak patika ve döngü graflarının  $n$ . kuvvet grafları için bağımsız küme sayısını veren genel bir formül elde edilmiştir.

**Pedersen A. S., Vestergaard P.D. (2004)** Bu çalışmada Broom grafi tanımlanarak bağımsız küme sayısı ile ilgili bazı özellikler elde edilmiştir. Ayrıca herhangi bir ağacın bağımsız küme sayısı için Broom grafinin bağımsız küme sayısı cinsinden bir üst sınır elde edilmiştir.

**Prodinger H., Tichy R.F. (1982)** Bu çalışmada herhangi bir  $G$  grafi için bağımsız küme tanımı kullanılarak patika ve döngü grafları için bağımsız küme sayılarının sırasıyla Fibonacci ve Lucas sayıları olduğu tespit edilmiştir.

**Levit V. E., Mandrescu E. (2005)** Bu çalışmada graflara ait Fibonacci polinomlarına ilişkin çalışmaların genel bir incelemesi yapılmıştır.

**Holliday S., Krop E. (2011)** Bu çalışmada patika-tipi graflar tanımlanıp bu grafların tüm bağımsız kenar kümelerinin sayımı sonucu genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizileri elde edilmiştir.

**Zhao H., Li X. (2006)** Bu çalışmada iki tip ağaç tanımlanarak bu ağaçlar Fibonacci sayılarına göre sıralanmıştır.

**Chen G., Zhu Z. (2012)** Bu çalışmada tek döngü içeren grafların bağımsız köşe ve kenar kümelerinin sayıları hesaplanmıştır.

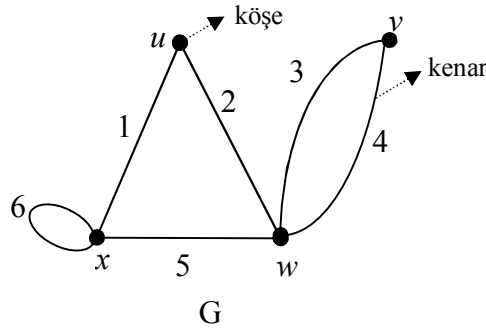
### 3. GRAFLAR ve TEMEL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde graflar için temel kavramlar ve graf çeşitleri ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir.

Bu bölümde kullandığımız temel tanım, teorem, örnek ve şekiller Aldous ve Wilson (2003); West (2000); Koshy (2003); Clark ve Holton (1991), Vasudev (2006) kaynaklarından alınmıştır.

#### 3.1. Temel Kavramlar

**Tanım 3.1.1.** Bir graf, köşe ve kenar kümelerinden oluşur. Bu kümeler  $V(G)$  şeklinde gösterilen köşeler kümesi ile  $E(G)$  şeklinde gösterilen ve elemanları  $V(G)$ 'nin sırasız eleman çiftleri olan kenarlar kümesidir. Bir  $G$  grafi,  $G = (V, E)$  veya  $G = (V(G), E(G))$  şeklinde gösterilir. Buradan da anlaşılacağı gibi her bir kenar iki köşeyi birleştirir. Örneğin;



Şekil 3.1.

Yukarıda gösterilen grafın köşelerinin kümesi  $V(G) = \{u, v, x, w\}$  ve kenarlarının kümesi de  $E(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  dir. 1 kenarı  $u$  ve  $x$  köşelerini, 2 kenarı  $u$  ve  $w$  köşelerini, 3 kenarı  $v$  ve  $w$  köşelerini, 4 kenarı  $v$  ve  $w$  köşelerini ve 5 kenarı  $x$  ve  $w$  köşelerini birleştirirken, 6 kenarı  $x$  köşesini kendisi ile birleştirir.

Graflarda bir kenar genelde iki köşesi belirtilerek gösterilir. Örneğin, 1 kenarı  $xu$  veya  $ux$  şeklinde, 3,4 kenarları  $vw$  veya  $wv$  şeklinde ve 6 kenarı  $xx$  şeklinde gösterilir.

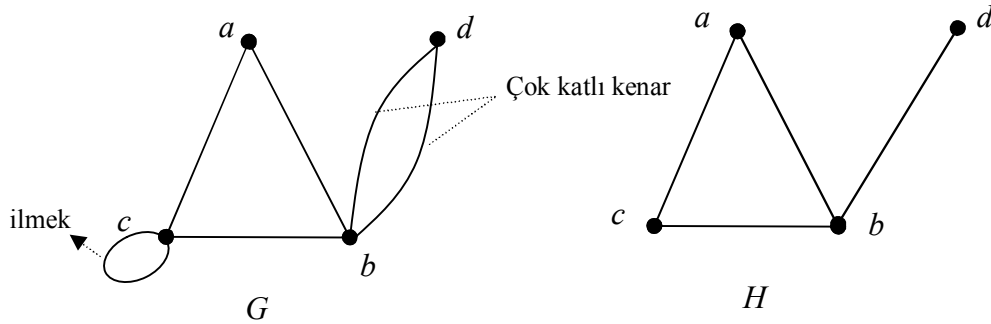
**Tanım 3.1.2.**  $G = (V, E)$  grafi verilsin.  $G$  grafinın tüm köşelerinin sayısına grafin *mertebesi* denir ve  $|G|$  şeklinde gösterilir.  $G$  grafinın tüm kenarlarının sayısına da grafin *boyutu* denir ve  $\|G\|$  şeklinde gösterilir. Örneğin, yukarıda Şekil 3.1. ile verilen  $G$  grafi için  $|G| = 4$  ve  $\|G\| = 6$ 'dır.

**Tanım 3.1.3.** Bir grafta aynı köşe çiftini birleştiren birden fazla kenar varsa bu kenarlara *çok katlı kenar (multiple edges)* veya *paralel kenar (paralel)* denir.

Bir grafta bir köşeyi kendisi ile birleştiren kenara *ilmek (loop)* denir.

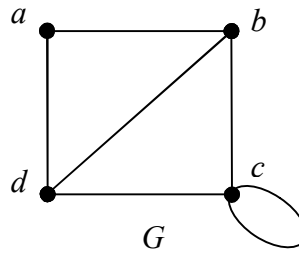
Çokkatlı kenarı ve ilmeği olmayan grafa *basit graf (simple graph)* denir.

Aşağıda basit  $H$  grafi ve basit olmayan  $G$  grafına birer örnek verilmiştir.



Şekil 3.2.

**Örnek 3.1.1.** Köşeler kümesi  $V(G) = \{a, b, c, d\}$  ve kenarlar kümesi  $E(G) = \{ab, ad, bd, bc, cd, cc\}$  olan  $G$  grafi Şekil 3.3.'deki gibi çizilebilir.



Şekil 3.3.

Dikkat edilirse  $G$  grafinın  $c$  köşesinde ilmeği olduğundan  $G$ , basit graf değildir.

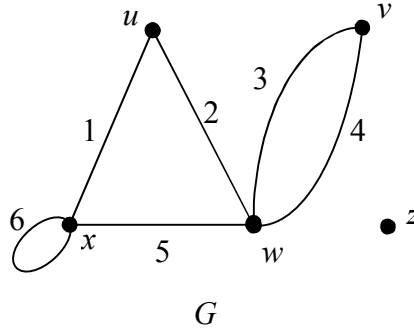
**Tanım 3.1.4.**  $e$  herhangi bir  $G$  grafinın bir kenarı olsun. O zaman  $G$  grafinın  $e$  kenarının bağlı olduğu köşelere  $e$ 'nin *uç köşeleri (endpoints)* denir.

$G$  grafinın hiçbir kenarın uç köşesi olmayan köşeye *izole köşe (isolated vertex)* denir.

Herhangi bir  $G$  grafinın bir kenar ile bağlı olan köşelere *komşu (adjacent)* köşeler denir. Komşu  $v$  ve  $w$  köşeleri  $v \sim w$  şeklinde gösterilir.

$G$  grafında sabit bir  $v$  köşesinin tüm komşularının kümesine  $v$ 'nin *açık komşuluğu* (*neighbourhood*) ya da kısaca komşuluğu denir ve  $N(v)$  şeklinde gösterilir.  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$  kümesine de  $v$ 'nin *kapalı komşuluğu* (*closed neighbourhood*) denir.

**Örnek 3.1.2.** Aşağıdaki  $G$  grafını göz önüne alalım.



Şekil 3.4.

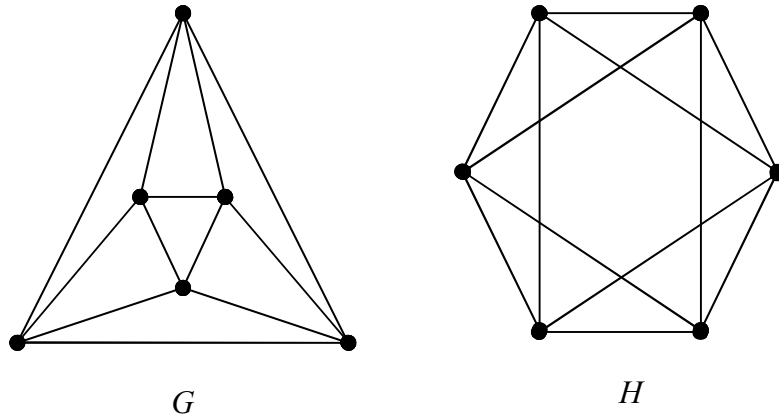
$G$  grafında  $z$  köşesi izole köşe ve 3 ile 4 kenarları paralel kenarlardır. Ayrıca  $u$  köşesinin açık ve kapalı komşulukları sırasıyla;

$$N(u) = \{x, w\}$$

$$N[u] = \{x, w, u\}$$

şeklindedir.

**Tanım 3.1.5.** Köşeleri isimlendirilmemiş graflara *etiketsiz* (*unlabelled*) graf denir.

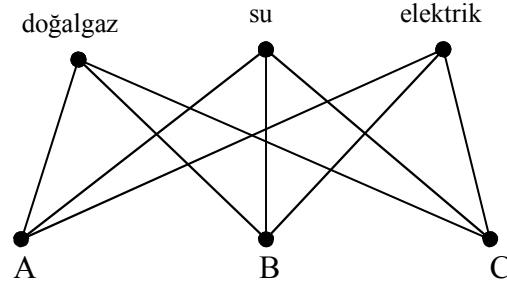


Şekil 3.5.

### 3.1.1. Graflarda İzomorfizm

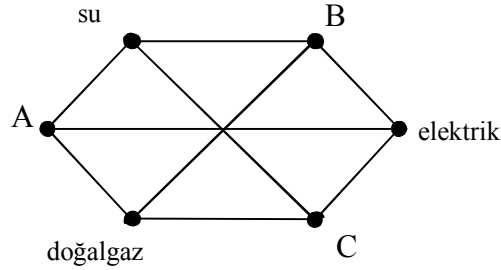
Graflarda izomorfizm kavramının daha iyi anlaşılabilmesi için öncelikle iyi bilinen aşağıdaki basit örneği verelim.

Birbirleriyle geçinemeyen üç komşu evlerine elektrik, su ve doğalgaz tesisatı döşetmek istiyorlar. Bu üç komşunun aralarında bağlantı kurmaması şartıyla söz konusu olan tesisatların döşenmesini temsil eden graflardan ikisi



Şekil 3.6.

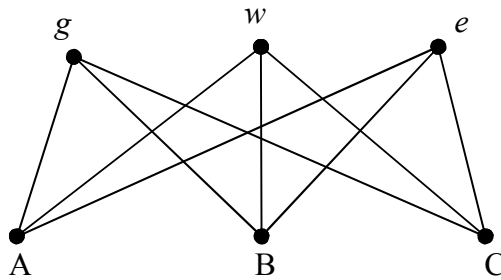
veya



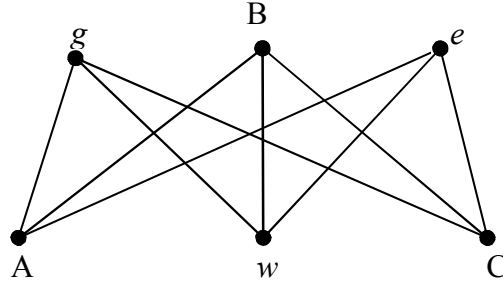
Şekil 3.7.

şeklinde çizilebilir.

Bir grafi çizmek için köşelerini ve kenarlarını bilmemiz yeterlidir. Yukarıdaki örnekte de gördüğümüz gibi bir graf birden çok yolla çizilebilir. Her iki graf da 6 köşe ve 9 kenardan oluşur. Sonuçta nesnelerin ilişkilendirilme biçimleri görsel olarak farklılık gösterse de yapılan iş aynıdır. Yani, her türlü durumda aynı evlere aynı tesisatlar döşenmiştir. Diğer taraftan iki diagram benzer gözükebilirken, farklı grafları ifade edebilirler. Örneğin;



Şekil 3.8.



Şekil 3.9.

diyagramları benzerdir, ancak aynı graflar değildirler. Çünkü birinci grafta AB kenarı yok iken ikinci grafta vardır. Böyle bir benzerlik (veya farklılık) graflarda izomorfizm kavramı ile ifade edilir.

**Tanım 3.1.1.1.**  $G_1 = (V_1, E_1)$  ve  $G_2 = (V_2, E_2)$  grafları verilsin. Eğer  $f: V_1 \rightarrow V_2$  dönüşümü 1-1, örten ve  $\forall u_1, v_1 \in V_1$  için  $u_1 v_1$ 'in,  $E_1$ 'de bir kenar olması için gerek ve yeter şart  $f(u_1) f(v_1)$ 'in de  $E_2$ 'de bir kenar olması ise  $G_1$  ve  $G_2$  graflarına *izomorf graflar* denir ve  $G_1 \cong G_2$  şeklinde gösterilir. Böyle bir  $f$  dönüşümüne de *izomorfizm* denir.

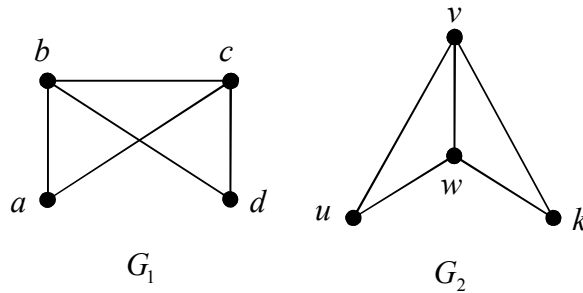
Başka bir deyişle  $G_1$  ve  $G_2$  graflarının izomorf olmaları için aşağıdaki şartlar sağlanmalıdır.

i)  $|V_1| = |V_2|$

ii)  $|E_1| = |E_2|$

iii)  $f: V_1 \rightarrow V_2$  1-1, örten dönüşümü komşulukları korumalıdır. Yani;  $u_1 v_1$ 'in  $E_1$ 'de bir kenar olması için gerek ve yeter şart  $f(u_1) f(v_1)$  de  $E_2$ 'de bir kenar olmasıdır.

**Örnek 3.1.1.1.** Aşağıda verilen  $G_1$  ve  $G_2$  graflarının izomorf olup olmadıklarını inceleyelim.



Şekil 3.10.

- i)  $|V(G_1)| = |V(G_2)| = 4$ ,
- ii)  $|E(G_1)| = |E(G_2)| = 5$ ,
- iii)  $f : V_1 \rightarrow V_2$  dönüşümü için,  $f(a) = u$ ,  $f(b) = v$ ,  $f(c) = w$ ,  $f(d) = k$

şeklinde tanımladığımız dönüşüm i) ve ii) den 1-1 ve örten olup, şimdi de komşulukları koruyup korumadığını inceleyelim.

**Tablo 3.1.**

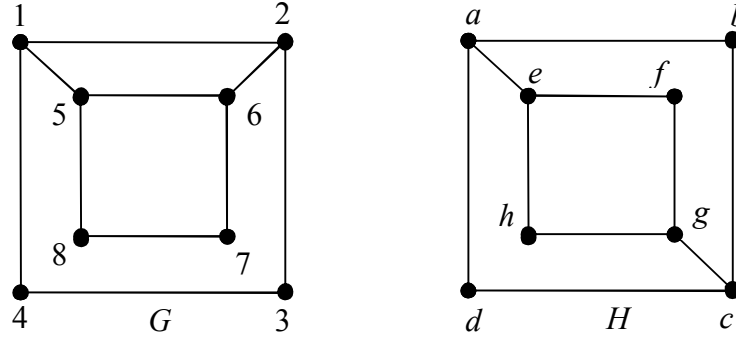
$\{x, y\} \in E_1$	$\{f(x), f(y)\}$	$\{f(x), f(y)\}$ , $E_2$ 'de kenar mı?
$\{a, b\}$	$\{f(a), f(b)\} = \{u, v\}$	Evet
$\{a, c\}$	$\{f(a), f(c)\} = \{u, w\}$	Evet
$\{b, c\}$	$\{f(b), f(c)\} = \{v, w\}$	Evet
$\{b, d\}$	$\{f(b), f(d)\} = \{v, k\}$	Evet
$\{c, d\}$	$\{f(c), f(d)\} = \{w, k\}$	Evet

Tablodan da görüldüğü gibi  $f$  dönüşümü komşulukları korur. Böylece  $G_1$  ve  $G_2$  grafları izomorftur.

İki grafin izomorf olup olmadığı grafa ait temel elemanları kullanarak da incelenebilir. Yani, graflardan birinin köşelerini yeniden etiketliyerek diğerini elde edip edilemediği araştırılır. Bunun için;

- i) İki grafin köşe ve kenar sayısına bakılır,
- ii) Graflardan birinin sahip olduğu bir özelliğin diğer grafta da olup olmadığı incelenir. (Çokkatlı kenar, ilmek veya bir köşeyi bağlayan kenar sayısı gibi...)

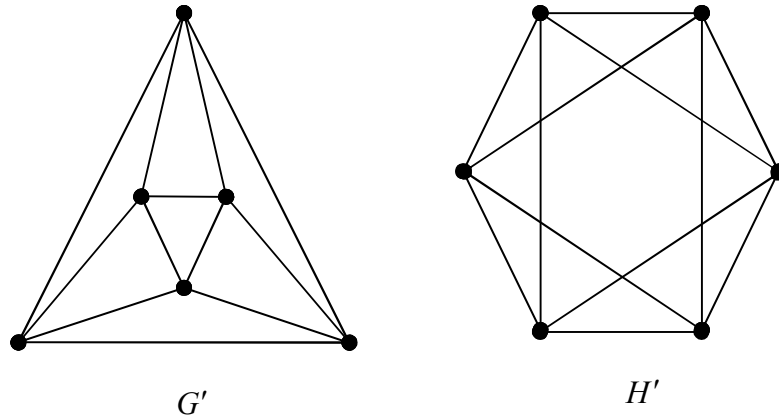
**Örnek 3.1.1.2.** Aşağıda verilen  $G$  ve  $H$  graflarının izomorf olup olmadıklarını inceleyelim.



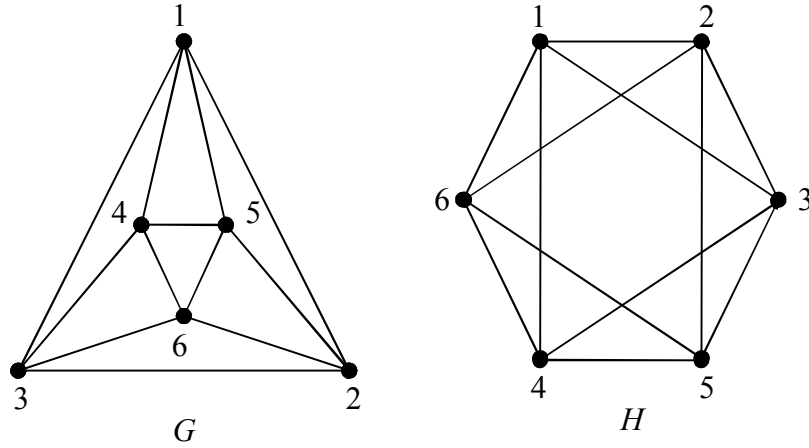
Şekil 3.11.

- i) Her iki graf da eşit sayıda kenar ve köşeye sahiptir.
- ii)  $G$  grafında iki kenar ile bağlı olan köşeler kümesi  $\{3,4,7,8\}$  ve  $H$  grafında iki kenar ile bağlı olan köşeler kümesi de  $\{b,d,h,f\}$  olur. Yani iki graf da eşit sayıda iki kenar ile bağlı olan köşeye sahiptir. Ancak;  $G$  grafında iki kenar ile bağlı köşelerden 3 ile 4 ve 7 ile 8 komşu köşeler iken  $H$  grafında iki kenar ile bağlı olan  $\{b,d,h,f\}$  köşelerinden hiçbirisi komşu değildir. Bu yüzden  $V(G)$  ile  $V(H)$  arasında komşulukları koruyan 1-1 ve örten bir dönüşüm tanımlanamayacağından  $G$  ve  $H$  grafları izomorf değildirler.

**Tanım 3.1.1.2.** İzomorf olacak şekilde köşelerin uygun bir etiketlenmesine sahip iki etiketsiz graf izomorftur. Örneğin; aşağıda verilen etiketsiz iki grafın köşelerinin uygun bir etiketlemesi ile izomorf olduklarını göstereyim.



Şekil 3.12.

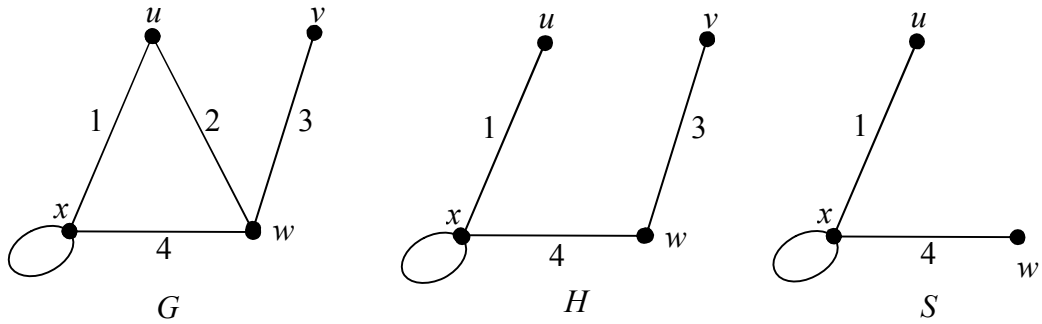


Şekil 3.13.

Böylece yapılan bu etiketlendirme sonucu  $G$  ve  $H$  grafları izomorftur. Dolayısıyla etiketsiz olan  $G'$  ve  $H'$  grafları da izomorf olur.

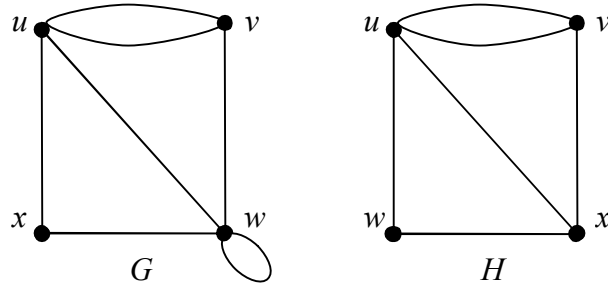
### 3.1.2. Alt Graflar

**Tanım 3.1.2.1.**  $G = (V(G), E(G))$  grafi ve  $H = (V(H), E(H))$  grafi verilsin. Eğer  $V(H) \subseteq V(G)$  ve  $E(H) \subseteq E(G)$  ise  $H$  grafına  $G$  grafının *alt grafi* (*subgraph*) denir. Örneğin, aşağıda bir  $G$  grafi ve bu grafa ait  $H$  ve  $S$  alt grafları verilmiştir.



Şekil 3.14.

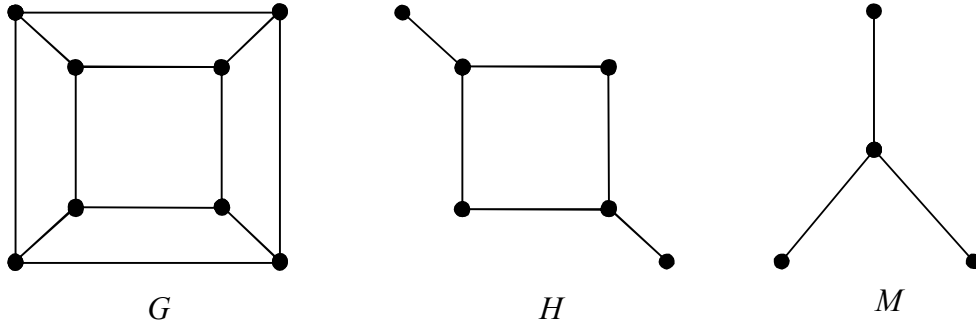
**Örnek 3.1.2.1.** Aşağıda verilen  $H$  grafının  $G$ 'nin alt grafi olup olmadığını inceleyelim.



Şekil 3.15.

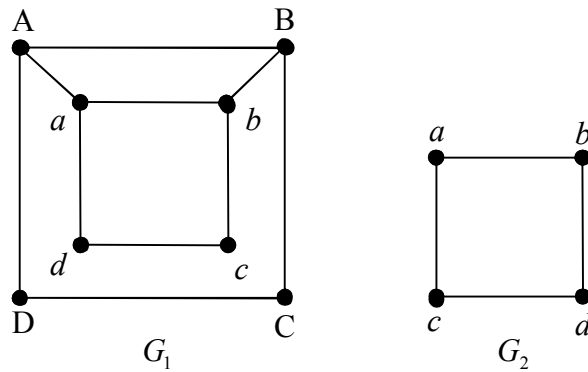
$H$  grafiındaki  $vx$  kenarı  $G$ 'ye ait olmadığından  $H$  grafi,  $G$  grafiinin alt grafi değildir.

Alt graflar etiketsiz graflar için genelleştirilebilir. Örneğin, aşağıda etiketsiz bir  $G$  grafi ve bu grafa ait  $H$  ve  $M$  alt grafları verilmiştir.



Şekil 3.16.

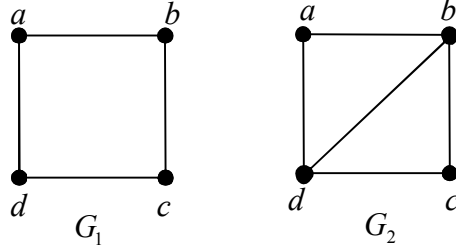
**Tanım 3.1.2.2.**  $G$  ve  $H$  grafları verilsin. Eğer  $H$  grafi  $G$ 'nin  $V(H) \neq V(G)$  veya  $E(H) \neq E(G)$  olacak şekildeki bir alt grafi ise bu durumda  $H$  grafiına  $G$ 'nin *düzgün* (*proper*) alt grafi denir. Örneğin, aşağıda Şekil 3.17. ile gösterilen  $G_1$  ve  $G_2$  graflarından  $G_2$  grafi,  $G_1$  grafiinin alt grafiidir. Ayrıca  $V(G_1) \neq V(G_2)$  olduğundan  $G_2$  grafi  $G_1$  grafiinin düzgün alt grafiidir.



Şekil 3.17.

**Tanım 3.1.2.3.**  $G$  ve  $H$  grafları verilsin. Eğer  $H$  grafi  $G$ 'nin  $V(H) = V(G)$  olacak şekilde bir alt grafi ise  $H$  grafına  $G$ 'nin *kapsayıcı alt grafi* (*spanning subgraph*) denir.

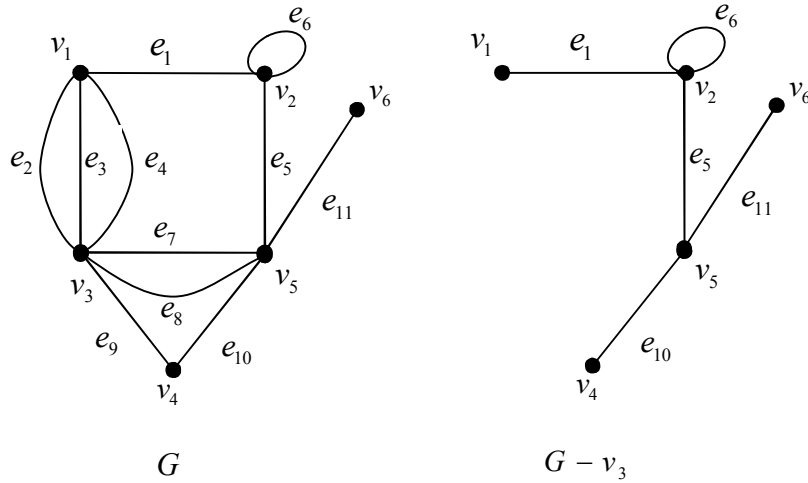
**Örnek 3.1.2.2.** Aşağıda verilen  $G_1$  ve  $G_2$  graflarını inceleyelim.



Şekil 3.18.

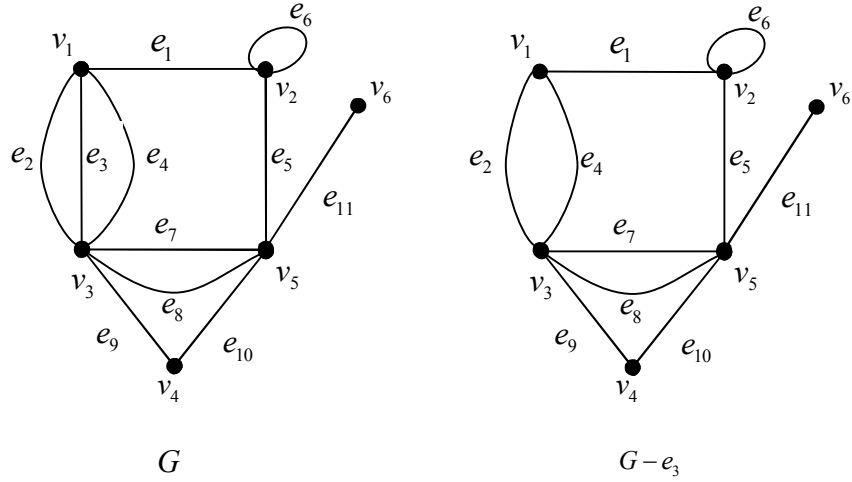
$G_1$  grafi  $G_2$  grafinin alt grafidir. Ayrıca  $V(G_1) = V(G_2)$  olduğundan  $G_1$  grafi  $G_2$  grafinin kapsayıcı alt grafidir. Diğer taraftan  $E(G_1) \neq E(G_2)$  olduğundan  $G_2$  grafi ayrıca  $G_1$  grafinin düzgün alt grafidir.

**Tanım 3.1.2.4.**  $G = (V, E)$  grafi en az iki köşeli bir graf olmak üzere  $G$ 'nin herhangi bir  $v \in V$  köşesinin ve bu  $v$  köşesini uç köşe kabul eden tüm kenarların silinmesiyle elde edilen  $G$ 'nin alt grafi  $G - v$  şeklinde gösterilir. Örneğin, aşağıda  $G$  grafi ve  $G - v_3$  alt grafi gösterilmiştir.



Şekil 3.19.

**Tanım 3.1.2.5.**  $G = (V, E)$  grafi verilsin.  $G$  grafi ile aynı  $V$  köşe kümesine ve  $e \in E$  için  $E - e$  kenar kümesine sahip  $G$ 'nin alt grafi  $G - e$  şeklinde gösterilir. Örneğin aşağıda  $G$  grafi ve  $G - e_3$  alt grafi çizilmiştir.

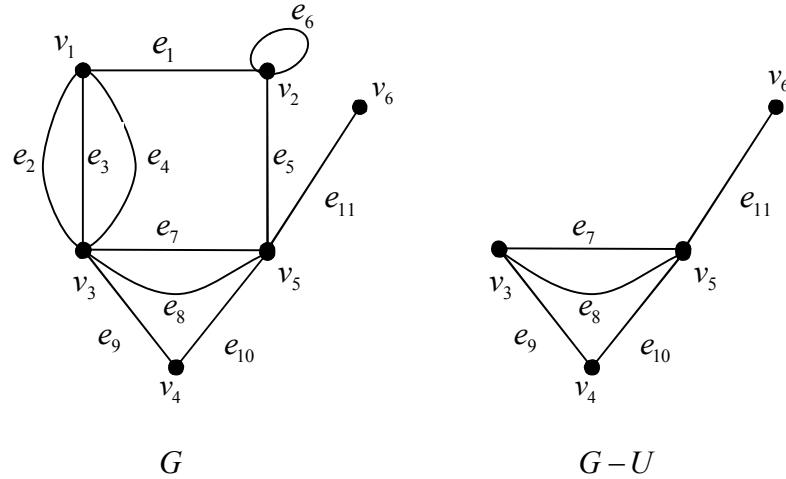


Şekil 3.20.

Yukarıdaki tanımları birçok köşenin ve kenarların silinmesi şeklinde genelleştirebiliriz.

**Tanım 3.1.2.6.**  $G=(V,E)$  grafi ve  $U \subset V$  alt kümesi verilsin.  $G$  grafindan  $U$ 'nun elemanı olan köşelerin (dolayısıyla bu köşeler ile uç köşelerinden en az biri  $U$ 'da olan kenarlar da silinecektir.) silinmesi ile elde edilen alt graf  $G-U$  şeklinde gösterilir.

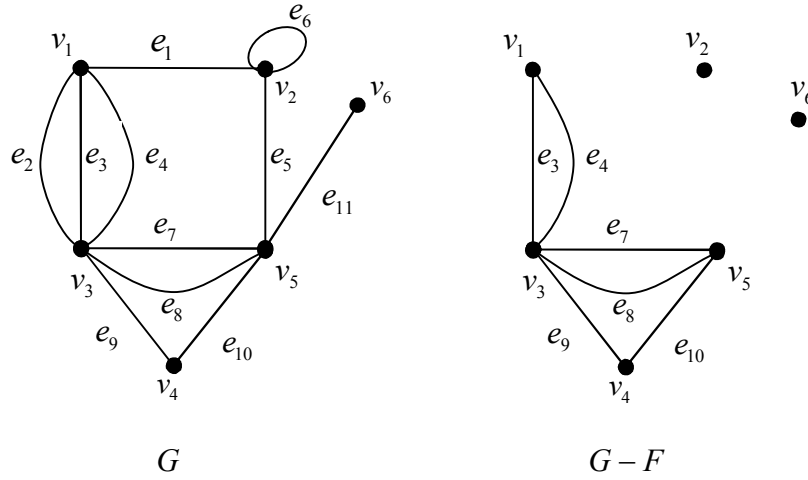
**Örnek 3.1.2.3.** Aşağıda  $G$  grafi ve  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ ,  $U = \{v_1, v_2\}$  için  $G-U$  alt grafi gösterilmiştir.



Şekil 3.21.

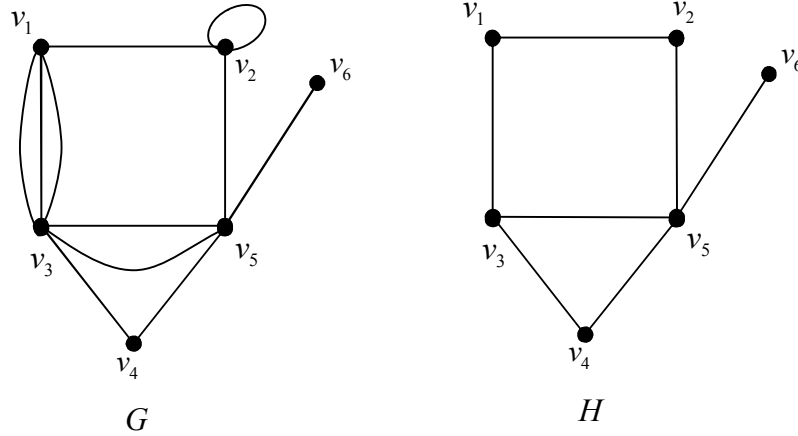
**Tanım 3.1.2.7.**  $G=(V,E)$  grafi ve  $F \subset E$  alt kümesi verilsin.  $G$  grafindan  $F$ 'nin elemanı olan kenarların silinmesi ile elde edilen alt graf  $G-F$  şeklinde gösterilir. Aşağıdaki örnekte de görüleceği gibi,  $G-F$  alt grafi  $G$  grafi ile aynı  $V$  köşe kümesine sahiptir.

**Örnek 3.1.2.4.** Aşağıda  $G$  grafi ve  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}\}$ ,  $F = \{e_1, e_2, e_3, e_6, e_{11}\}$  için  $G - F$  alt grafi gösterilmiştir.



Şekil 3.22.

**Tanım 3.1.2.8.**  $G$  grafindan tüm ilmeklerin kaldırılması ve paralel kenarlardan sadece biri kalacak şekilde diğerlerinin silinmesi ile elde edilen alt grafa  $G$ 'nin kapsadığı basit alt graf (*underlying simple graph*) denir. Örneğin, aşağıda  $G$  grafi ve bu grafin kapsadığı basit  $H$  alt grafi gösterilmiştir.

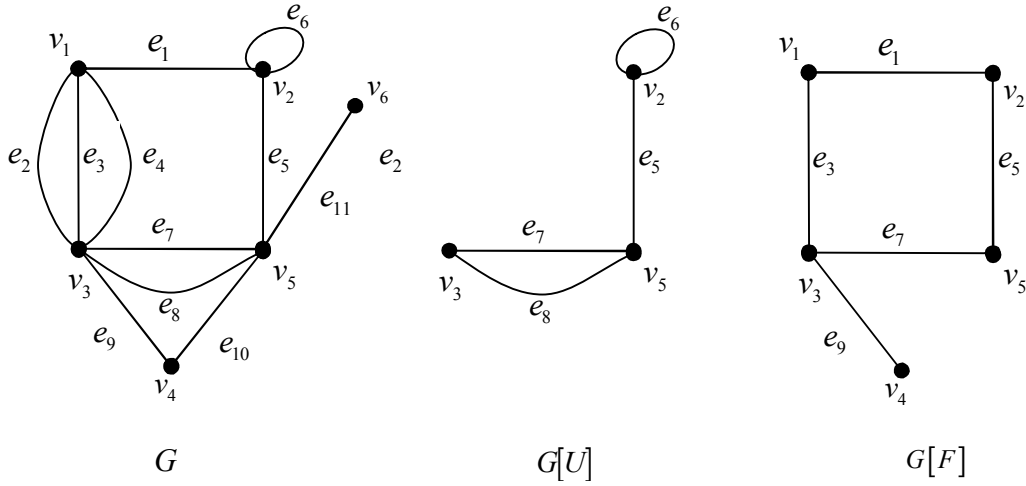


Şekil 3.23

**Tanım 3.1.2.9.**  $G = (V, E)$  grafi ve  $U \subset V$  alt kümesi verilsin. Köşeleri  $U$ 'nun elemanlarından, kenarları da  $G$ 'nin her iki uç köşesi de  $U$ 'da olan kenarlarından oluşan alt grafa  $G$ 'nin  $U$ 'ya indirgenmiş alt grafi (*induced subgraph*) denir.  $G$ 'nin  $U$ 'ya indirgenmiş alt grafi  $G[U]$  şeklinde gösterilir.

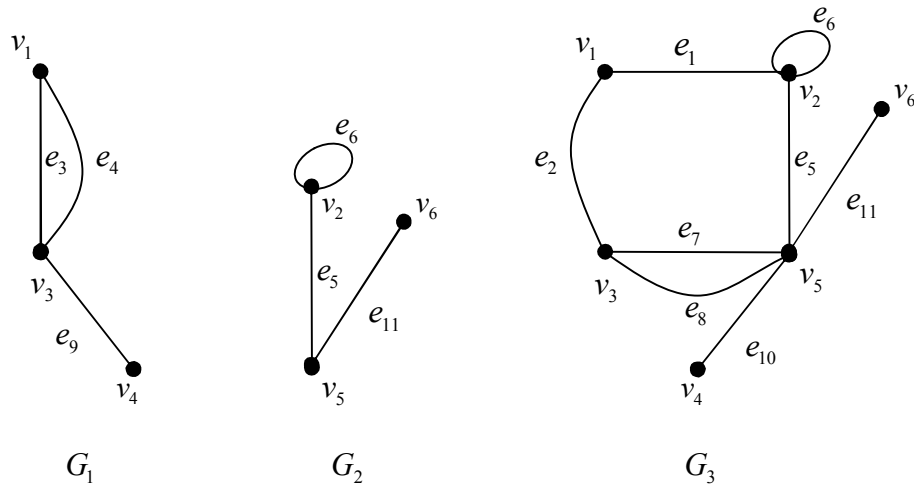
Benzer şekilde  $F \subseteq E$  alt kümesi için de kenarları  $F$ 'nin elemanları ve köşeleri de  $F$ 'deki kenarların uç köşeleri olan alt grafa  $G$ 'nin  $F$ 'ye indirgenmiş alt grafi denir.  $G$ 'nin  $F$ 'ye indirgenmiş alt grafi  $G[F]$  şeklinde gösterilir.

**Örnek 3.1.2.5.** Aşağıda bir  $G$  grafi ve bu  $G$  grafinin  $U = \{v_2, v_3, v_5\}$  köşeler kümesine ve  $F = \{e_1, e_3, e_5, e_7, e_9\}$  kenarlar kümesine indirgenmiş alt grafları verilmiştir.



Şekil 3.24.

**Tanım 3.1.2.10.**  $G = (V, E)$  grafi ve  $G$ 'nin  $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$  alt grafları verilsin. Eğer  $G_1$  ve  $G_2$  alt grafları ortak köşe içermiyorsa yani;  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  ise  $G_1$  ve  $G_2$  graflarına *ayrık (disjoint)*; ortak kenar içermiyorsa da yani;  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$  ise  $G_1$  ve  $G_2$  graflarına *kenar ayrık (edge disjoint)* graflar denir. Örneğin; aşağıda Şekil 3.25. ile verilen graflardan  $G_1$  ve  $G_2$  grafları ayrık,  $G_1$  ve  $G_3$  grafları da kenar ayrık graflardır.



Şekil 3.25.

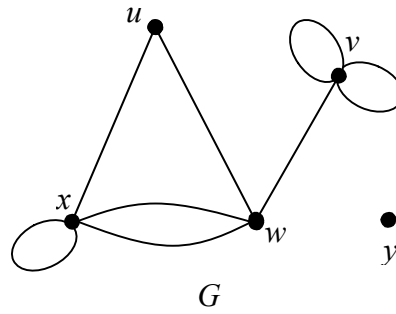
### 3.1.3. Bir Köşenin Derecesi

Graf Teorisi'nde birçok uygulamada bir köşenin bağlı olduğu kenar sayısına ihtiyaç duyarız. Örneğin bir kavşakta birleşen yolların sayısını belirlemede, bir elektrik devresinin uç birimlerinde birleşen kabloların sayısını bulmada veya kimyada incelenen bir atomun komşuları ile yaptığı bağ sayılarını belirtmede kullanılan hep bir köşenin derecesidir.

**Tanım 3.1.3.1.**  $G = (V, E)$  grafi verilsin.  $G$  grafında  $v$  köşesinin bağlı olduğu kenar sayısına  $v \in V$  köşesinin *derecesi* (*degree*) denir. Derece belirlenirken her bir ilmek iki kere sayılır.  $v$  köşesinin derecesi  $der(v)$ ,  $der_G(v)$  veya  $d(v)$  şeklinde gösterilir.

Herhangi bir  $G$  grafının her bir köşesinin derecelerinin küçükten büyüğe gerektiğinde tekrarlanarak listelenmesine  $G$ 'nin *derece dizisi* (*degree sequence*) denir.

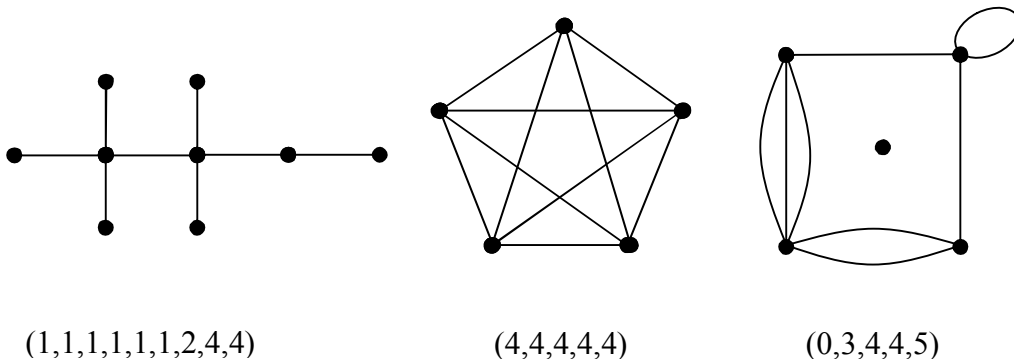
**Örnek 3.1.3.1.** Aşağıdaki  $G$  grafi için



Şekil 3.26.

$der(u) = 2$ ,  $der(x) = 5$ ,  $der(w) = 4$ ,  $der(v) = 5$ ,  $der(y) = 0$  dır. Dolayısıyla  $G$  grafının derece dizisi  $(0,2,4,5,5)$ 'dir.

**Örnek 3.1.3.2.** Aşağıda etiketlenilmemiş graflar ve bu graflara ait derece dizileri verilmiştir.



$(1,1,1,1,1,1,2,4,4)$

$(4,4,4,4,4)$

$(0,3,4,4,5)$

Şekil 3.27.

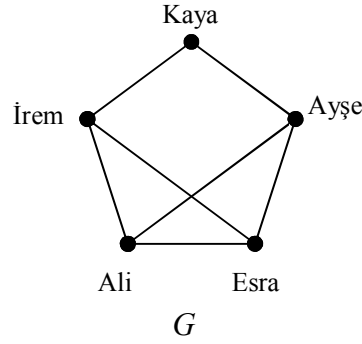
**Teorem 3.1.3.1. (Tokalaşma Teoremi)**  $G = (V, E)$  grafi için  $|V| = n$ ,  $|E| = e$  olsun. Bu durumda  $G$  grafında köşelerin derecelerinin toplamı, kenarların sayısının iki katıdır. Yani;

$$\sum_{i=1}^n \text{der}_G(v_i) = 2e$$

dir.

**İspat.** Her bir kenarın iki uç köşesi olduğundan köşe derecelerine 2 kat etki eder.  $\square$

Tokalaşma Teoremi, ismini belli bir grupta tokalaşan insanları temsil eden graftan alır. Örneğin, aşağıda köşeleri bir gruptaki insanları, kenarları da bu grupta tokalaşan insan çiftlerini temsil eden  $G$  grafi verilmiştir.



**Şekil 3.28.**

Bir grafın köşesi, derecesinin tek ya da çift olmasına bağlı olarak tek ya da çift şeklinde isimlendirilir.

**Sonuç 3.1.3.1.** Herhangi bir  $G = (V, E)$  grafi için  $|V| = n$ ,  $|E| = e$  olmak üzere tek köşelerin sayısı çifttir.

**İspat**  $W$ ,  $G$  grafının tek köşelerinin kümesi;  $U$  da  $G$  grafının çift köşelerinin kümesi olsun. Bu takdirde  $u \in U$  için  $d(u)$  çift olduğundan  $\sum_{u \in U} d(u)$  çift olur. Teorem

3.1.3.1.'den

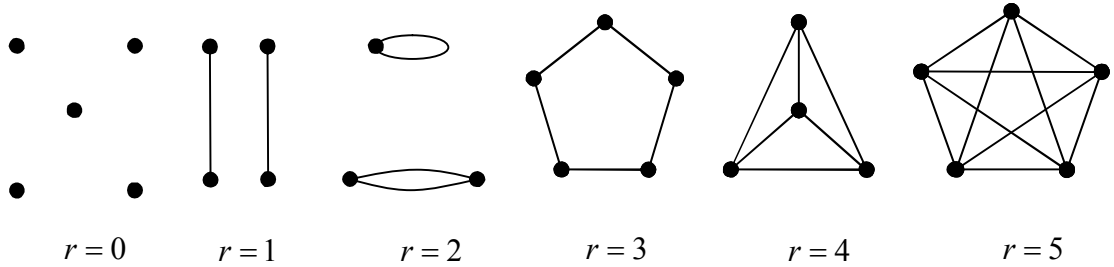
$$\begin{aligned} \sum_{u \in U} d(u) + \sum_{w \in W} d(w) &= \sum_{v \in V} d(v) = 2e \\ \sum_{w \in W} d(w) &= 2e - \sum_{u \in U} d(u) \end{aligned}$$

olur. Son eşitliğin sağ tarafı çift ve  $\sum_{w \in V} d(w)$  toplamındaki tüm terimler tek olduğundan

$\sum_{w \in V} d(w)$  değerinin çift olması için terim sayısı çift olmalıdır.  $\square$

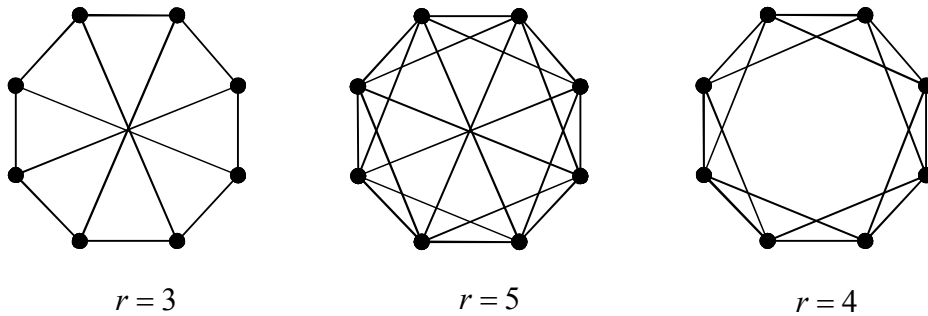
### 3.1.4. Regüler Graflar

**Tanım 3.1.4.1.** Tüm köşelerinin derecesi aynı olan graflara *regüler (regular) graf* denir. Özel olarak tüm köşelerinin derecesi  $r$  olan regüler grafa  *$r$ -regüler*;  $r$  değerine de grafın *regülerlik derecesi* denir. Örneğin, aşağıda farklı  $r$  değerleri için bazı  $r$ -regüler graflar çizilmiştir.



Şekil 3.29.

**Örnek 3.1.4.1.** Aşağıda  $r = 3, 4, 5$  değerleri için 8 köşeli regüler graflar çizilmiştir.



Şekil 3.30.

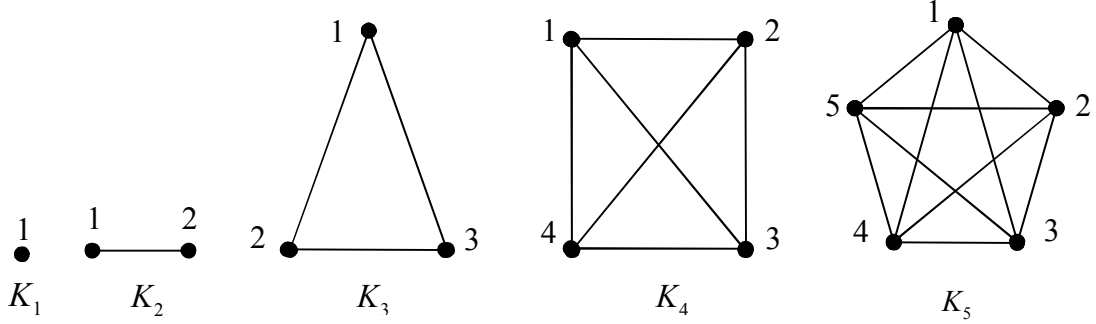
**Lemma 3.1.4.1.**  $G$ ,  $n$  köşeli  $r$ -regüler graf ise bu takdirde  $G$ 'nin kenar sayısı  $\frac{nr}{2}$ 'dir.

**İspat** Teorem 3.1.3.1.'e göre kenarların sayısı tüm köşelerin derecelerinin toplamının yarısı kadar olduğundan  $G$ 'nin kenar sayısı  $\frac{nr}{2}$  olur.  $\square$

**Tanım 3.1.4.2.** Her köşesi diğer tüm köşeler ile komşu olan grafa *tam (complete) graf* denir.  $n$  köşeli tam graf  $K_n$  ile gösterilir.

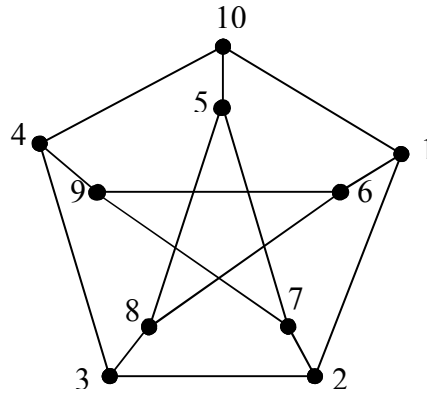
$K_n$  grafının regürlük derecesi  $n-1$ 'dir. Dolayısıyla Teorem 3.1.3.1.'den de kenar sayısı  $\frac{n(n-1)}{2}$ 'dir.

**Örnek 3.1.4.2.** Aşağıda 5. mertebeye kadar tüm  $K_n$  grafları gösterilmiştir.



Şekil 3.31.

**Tanım 3.1.4.3.** 10 köşeli, 15 kenarlı 3-regüler grafa *Petersen grafı* denir.

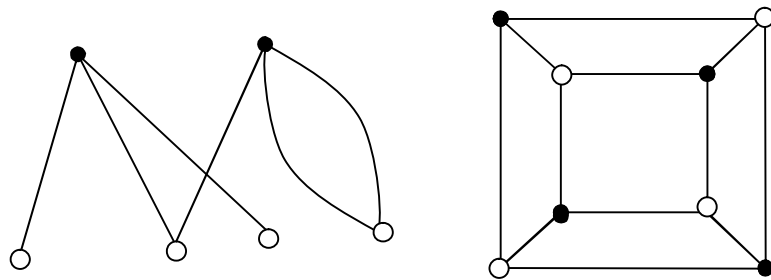


Şekil 3.32.

### 3.1.5. İki Parçalı Graflar

**Tanım 3.1.5.1.** Bir grafın köşeleri iki ayrı kümeden oluşuyor ve her bir kenar farklı kümelerden iki ayrı köşeyi birbirine bağlıyor ise bu tür graflara *iki parçalı (bipartite) graf* denir.

**Örnek 3.1.5.1.**

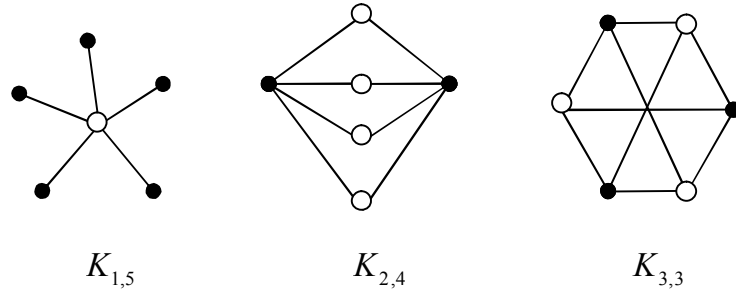


Şekil 3.33.

Yukarıdaki şekilden de görüldüğü gibi iki parçalı grafta bir kenarın uç köşeleri farklı kümelere aittir.

Şekil 3.6. ile verilen grafın köşeleri evler ve tesisatlar olarak iki küme belirttiğinden ve her bir kenar, bir ev ile bir tesisatı bağladığından graf iki parçalı graftır.

**Tanım 3.1.5.2.** Köşeler kümesi A ve B olan iki parçalı grafta A'ya ait her bir köşe B'nin her bir köşesiyle sadece bir kenarla komşu ise bu takdirde bu grafa *iki parçalı tam graf (complete bipartite graph)* denir.  $r$  elemanlı A kümesi ve  $s$  elemanlı B kümesi ile elde edilen iki parçalı tam graf  $K_{r,s}$  veya  $K_{s,r}$  şeklinde gösterilir. Örneğin, aşağıda farklı iki parçalı tam graflar çizilmiştir.

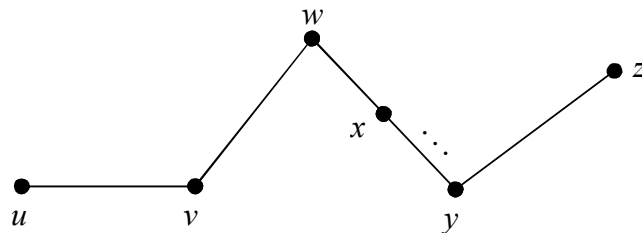


Şekil 3.34.

### 3.1.6. Yol, Patika ve İz

**Tanım 3.1.6.1.** Bir  $G$  grafında  $uv, vw, wx, \dots, yz$  şeklinde  $k$  tane ardışık komşu kenarlar dizisine  $k$  uzunluğundaki yol veya  $u$  ile  $z$  arasında bir yol (*walk*) denir.

**Örnek 3.1.6.1.** Aşağıda verilen graf üzerinde  $u$ 'dan  $v$ 'ye,  $v$ 'den  $w$ 'ye,  $w$ 'den  $x$ 'e,  $x$ 'den  $y$ 'ye ve  $y$ 'den de  $z$ 'ye tanımlanan yol, kısaca  $uvwx\dots yz$  şeklinde gösterilir. Ayrıca incelediğimiz graf yönlendirilmemiş olduğundan aynı yol;  $zy\dots xwvu$  olarak da gösterilebilir.

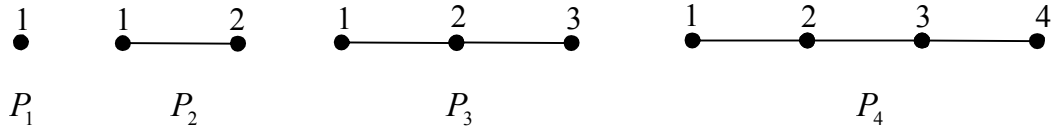


Şekil 3.35.

**Tanım 3.1.6.2.** Farklı kenarların takip edildiği yola *iz (trail)* denir.

Hem farklı kenarların hem de farklı köşelerin takip edildiği yola ise *patika (path)* denir.  $n$  köşeli bir patika  $P_n$  ile gösterilir.

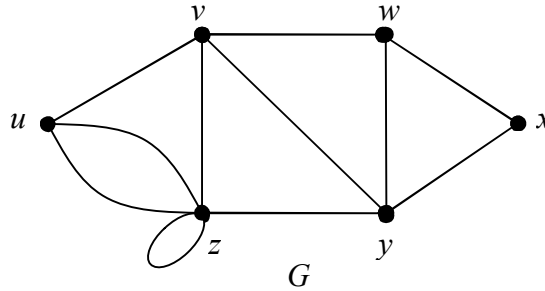
**Örnek 3.1.6.2.**  $P_i, i = 1, 2, 3, 4$  grafları verilsin.



Şekil 3.36.

Görüldüğü gibi bu graflar patika graflardır.

**Örnek 3.1.6.3.** Aşağıda verilen  $G$  grafini ele alalım.



Şekil 3.37.

$vzzywxy$  yolunda her kenar bir kez kullanıldığından bu yol izdir. Fakat  $y$  ve  $z$  köşeleri ikiye kez kullanıldığından patika değildir.

$xyzzvy$  yolu; uzunluğu 5 olan  $x$  köşesi ile  $y$  köşesi arasında bir izdir. Fakat  $z$  köşesi iki kez kullanıldığından patika değildir.

$uvyz$  yolu, uzunluğu 3 olan  $u$  köşesi ile  $z$  köşesi arasında bir iz olup, ayrıca patikadır.

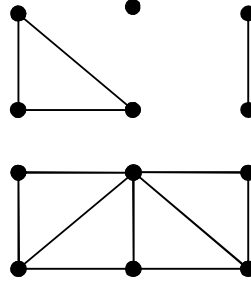
**Tanım 3.1.6.3.**  $G = (V, E)$  grafi verilsin.  $G$  grafında  $x, y \in V(G)$  köşeleri arasındaki en kısa patika yolunun uzunluğuna  $x$  ve  $y$  köşeleri arasındaki uzaklık denir ve  $d(x, y)$  şeklinde gösterilir. Eğer böyle bir patika yolu mevcut değilse  $d(x, y) = \infty$  olur.

**Tanım 3.1.6.4.**  $G$  grafında herhangi iki köşe ile oluşturulabilecek en büyük uzaklığa  $G$ 'nin çapı (*diameter*) denir ve  $\text{çap}(G)$  ile gösterilir.

**Tanım 3.1.6.5.** Bir grafın her köşe çifti arasında bir patika varsa bu grafa *bağlantılı (connected)*, aksi takdirde *bağlantısız (unconnected)* denir.

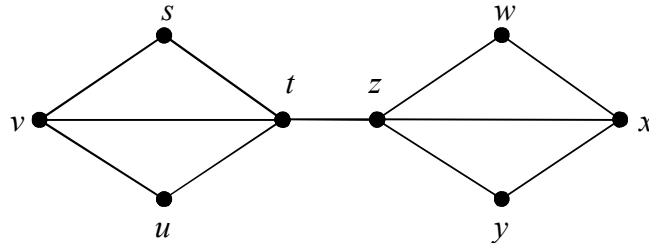
Her bağlantısız graf bağlantılı alt graflara ayrılabilir. Bu alt graflara *bileşen (component)* denir. Bir graftaki tüm bileşenlerin sayısı  $w(G)$  ile gösterilir.

**Örnek 3.1.6.4.** Aşağıda verilen grafta her köşe çifti arasında bir patika yolu mevcut olmadığından bağlantılı değildir. Fakat bağlantılı dört alt grafa bölünebileceğinden bileşen sayısı dördür. Yani  $w(G) = 4$  olur.



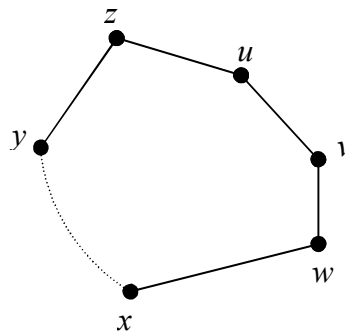
Şekil 3.38.

**Tanım 3.1.6.6.** Bağlantılı bir  $G = (V, E)$  grafi ve  $e \in E$  kenarı verilsin. Eğer  $G$  grafindan  $e$  kenarının kaldırılması ile elde edilen  $G - e$  alt grafi bağlantısız oluyorsa bu durumda  $e$  kenarına *köprü (bridge)* denir. Örneğin, aşağıdaki grafta  $tz$  kenarı kaldırıldığında graf, bağlantısız olacağından  $tz$  kenarı köprüdür.



Şekil 3.39.

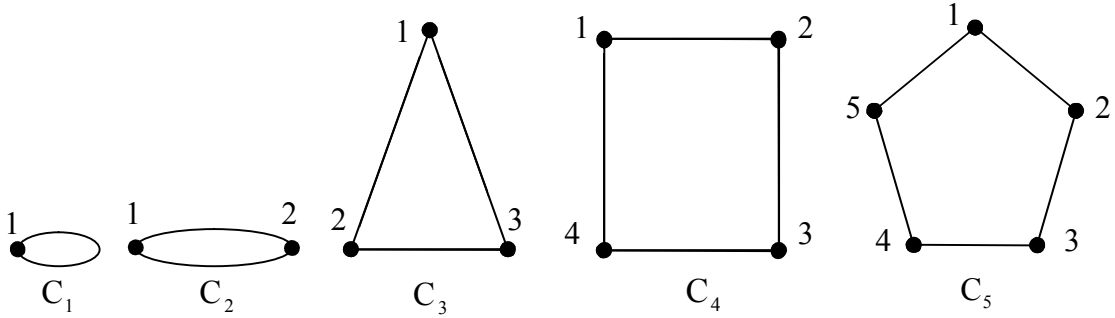
**Tanım 3.1.6.7.** Bir grafta aynı köşe ile başlayıp aynı köşe ile biten  $uv, vw, wx, \dots, yz, zu$  ardışık komşu kenarlar dizisine *kapalı yol (closed walk)* denir. Aksi takdirde *açık yol (open walk)* denir.



Şekil 3.40.

**Tanım 3.1.6.8.** Tüm kenarları farklı olan kapalı yola *kapalı iz (closed trail)* denir.

Tüm kenarları ve ortadaki tüm köşeleri farklı olan kapalı yola ise *döngü (cycle)* denir.  $n$  köşeli döngü  $C_n$  şeklinde gösterilir. Uzunluğu 3 olan döngüye özel olarak *üçgen (triangle)* denir.

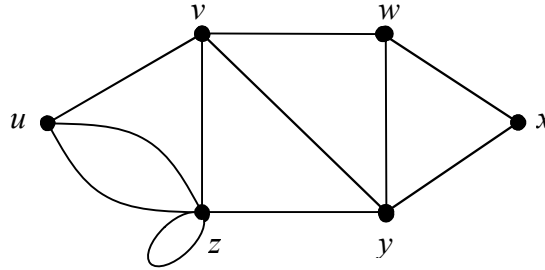


Şekil 3.41.

Yukarıdaki şekillerden de anlaşılacağı gibi bağlantılı ve 2-regüler olan graflar döngüdür.

$C_n$  döngüsünden bir kenar kaldırılması ile elde edilen graf,  $n$  köşeli  $P_n$  patikasındır.

**Örnek 3.1.6.5.**



Şekil 3.42.

ile verilen  $G$  grafında;

$vywxyzv$  kapalı yolunda takip edilen her kenar birbirinden farklı olduğundan  $vywxyzv$  yolu kapalı izdir. Fakat  $y$  köşesinden iki kez geçildiğinden döngü değildir.

$zz, vwxyzv$  ve  $vwxyzv$  yolları döngü,  $vwyv$  ve  $wxyw$  yolları ise üçgendir.

### 3.1.7. Graflar Üzerinde İşlemler

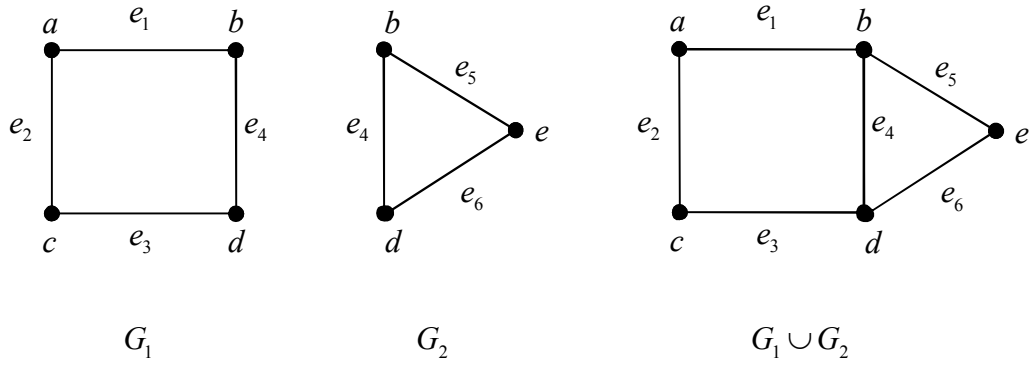
**Tanım 3.1.7.1.**  $G_1$  ve  $G_2$  grafları verilsin.  $G_1$  ve  $G_2$  graflarının birleşim grafi  $G_1 \cup G_2$

şeklinde gösterilir. Bu durumda  $G_1 \cup G_2 = (V(G_1 \cup G_2), E(G_1 \cup G_2))$  olup bu birleşim grafinin köşe ve kenar kümeleri,

$$V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$$

$$E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$$

biçiminde oluşturulur. Örneğin aşağıda  $G_1$  ve  $G_2$  graflarının birleşimi gösterilmiştir.



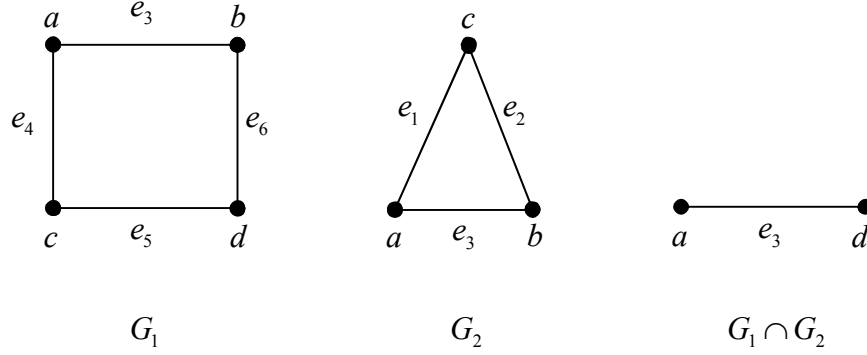
Şekil 3.43.

**Tanım 3.1.7.2.**  $G_1$  ve  $G_2$  grafları, en az bir köşeleri ortak olan iki graf olsun.  $G_1$  ve  $G_2$  graflarının kesişim grafi  $G_1 \cap G_2$  şeklinde gösterilir. Bu durumda  $G_1 \cap G_2 = (V(G_1 \cap G_2), E(G_1 \cap G_2))$  olup bu kesişim grafinin köşe ve kenar kümeleri

$$V(G_1 \cap G_2) = V(G_1) \cap V(G_2)$$

$$E(G_1 \cap G_2) = E(G_1) \cap E(G_2)$$

biçiminde oluşturulur. Örneğin aşağıda herhangi  $G_1$  ve  $G_2$  grafları ile bu grafların kesişim grafi gösterilmiştir.



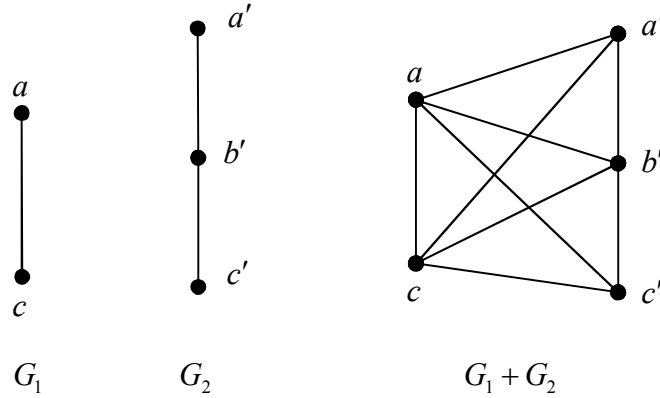
Şekil 3.44.

**Tanım 3.1.7.3.**  $G_1$  ve  $G_2$  grafları kesişimleri boş küme olan iki graf olsun. Bu durumda  $G_1 + G_2$  toplam grafi olup köşe ve kenar kümeleri

$$V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$$

$$E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{x_1x_2 : x_1 \in V(G_1), x_2 \in V(G_2)\}$$

biçiminde oluşturulur. Aşağıda iki grafın toplamı gösterilmiştir.



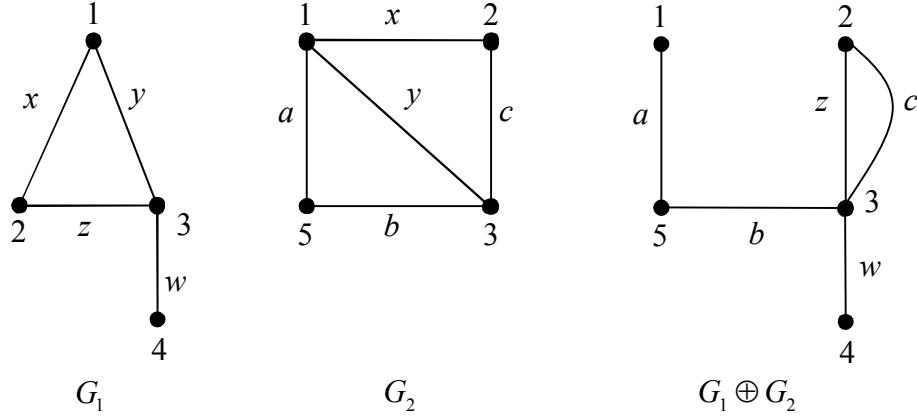
Şekil 3.45.

**Tanım 3.1.7.4.**  $G_1(V_1, E_1)$  ve  $G_2(V_2, E_2)$  grafları verilsin.  $G_1$  ve  $G_2$  graflarının halka toplamı  $G_1 \oplus G_2$  şeklinde gösterilir. Bu durumda  $G_1 \oplus G_2 = (V(G_1 \oplus G_2), E(G_1 \oplus G_2))$  olup bu grafın köşe ve kenar kümeleri,

$$V(G_1 \oplus G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$$

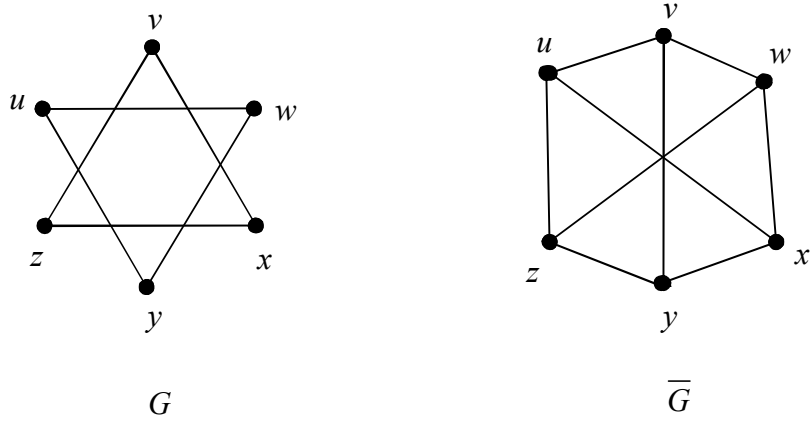
$$E(G_1 \oplus G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) - E(G_1) \cap E(G_2)$$

biçiminde oluşturulur.



Şekil 3.46.

**Tanım 3.1.7.5.**  $G = (V, E)$  grafi verilsin.  $G$  grafında komşu olmayan köşelerin komşu yapılması ve komşu köşelerin de bağlı oldukları kenarların kaldırılması ile elde edilen basit  $\bar{G}$  grafına  $G$  grafının *tamamlayıcısı* (*complement*) denir.



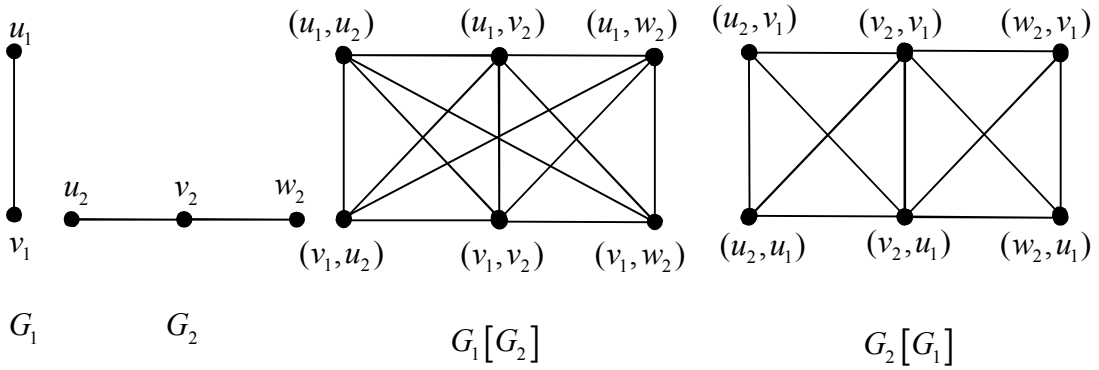
Şekil 3.47.

**Tanım 3.1.7.6.**  $G_1 = (V_1, E_1)$  ve  $G_2 = (V_2, E_2)$  grafları verilsin. Bu durumda  $G_1[G_2]$  bileşke grafının köşeleri ve kenarları

$$V(G_1[G_2]) = V_1 \times V_2$$

$$E(G_1[G_2]) = \{uv : u = (u_1, u_2) \text{ ve } v = (v_1, v_2) \text{ için } u_1 \sim v_1 \text{ veya } [u_1 = v_1 \text{ ve } u_2 \sim v_2]\}$$

biçiminde oluşturulur. Örneğin aşağıda iki graf ve bu grafların bileşkeleri gösterilmiştir.



Şekil 3.48.

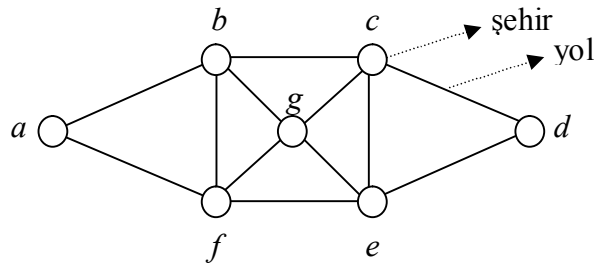
### 3.2. Euler ve Hamilton Grafları

Bu kısımda herhangi bir yol haritasındaki yol ve şehirlerle ilgili iki tip problemin çözümünü inceleyeceğiz. Bu problemler aşağıdaki gibidir:

*Kâşif Problemi:* Bir kâşif, çıkacağı turda tüm yollardan sadece bir kez geçip böylelikle her yolu görmek ve turun sonunda tura başladığı yere geri dönmek ister. Bu isteğe uygun bir tur düzenlenebilir mi?

*Gezgin Problemi:* Bir turist, turunu tüm şehirlerden sadece bir kez geçip her şehri görecektir ve turunu başlangıç noktasına geri dönecek şekilde düzenleyebilir mi?

#### Örnek 3.2.1.



Şekil 3.49.

Bir kâşif turunu, tüm yollardan bir kez geçecek ve tura başladığı şehre geri dönecek biçimde  $abcdefbgcegfa$  veya  $afgcedgcbcefb$  olarak planlayabilir. Bir turist de tüm şehirleri görecektir ve tura başladığı şehirde turunu sonlandıracak şekilde  $abcdegfa$  veya  $afedcgba$  olarak turunu düzenleyebilir.

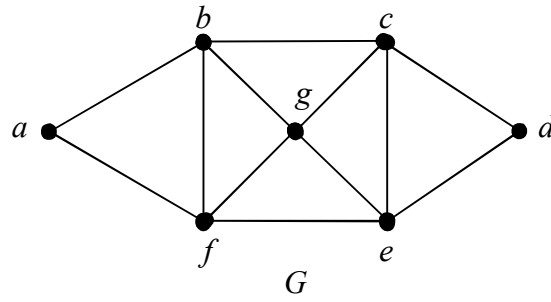
Görüldüğü gibi kâşif her yoldan tam bir kez geçerken bazı şehirlerden birden fazla geçebilir. Öte yandan turist de her şehirden tam bir kez geçerken bazı yollardan hiç geçmeyebilir.

Haritadaki şehirlerin köşeler ile, şehirleri bağlayan yolların da kenarlar ile temsil edildiği grafi göz önüne alalım. Bu takdirde kâşif problemi, grafın her kenarını içeren kapalı bir iz bulma iken, gezgin problemi de grafın her köşesini içeren bir döngü bulma problemidir.

**Tanım 3.2.1.** Her kenarı içerecek şekildeki bir kapalı izi kapsayan bağlantılı grafa *Euler graf* denir. Böyle bir ize de *Euler izi* denir.

Her köşeyi içerecek şekildeki bir döngüyü kapsayan bağlantılı grafa ise *Hamilton graf* denir. Böyle bir döngüye de da *Hamilton döngüsü* denir.

**Örnek 3.2.2.** Aşağıda verilen  $G$  grafının Euler graf ve Hamilton graf olup olmadığını inceleyelim.

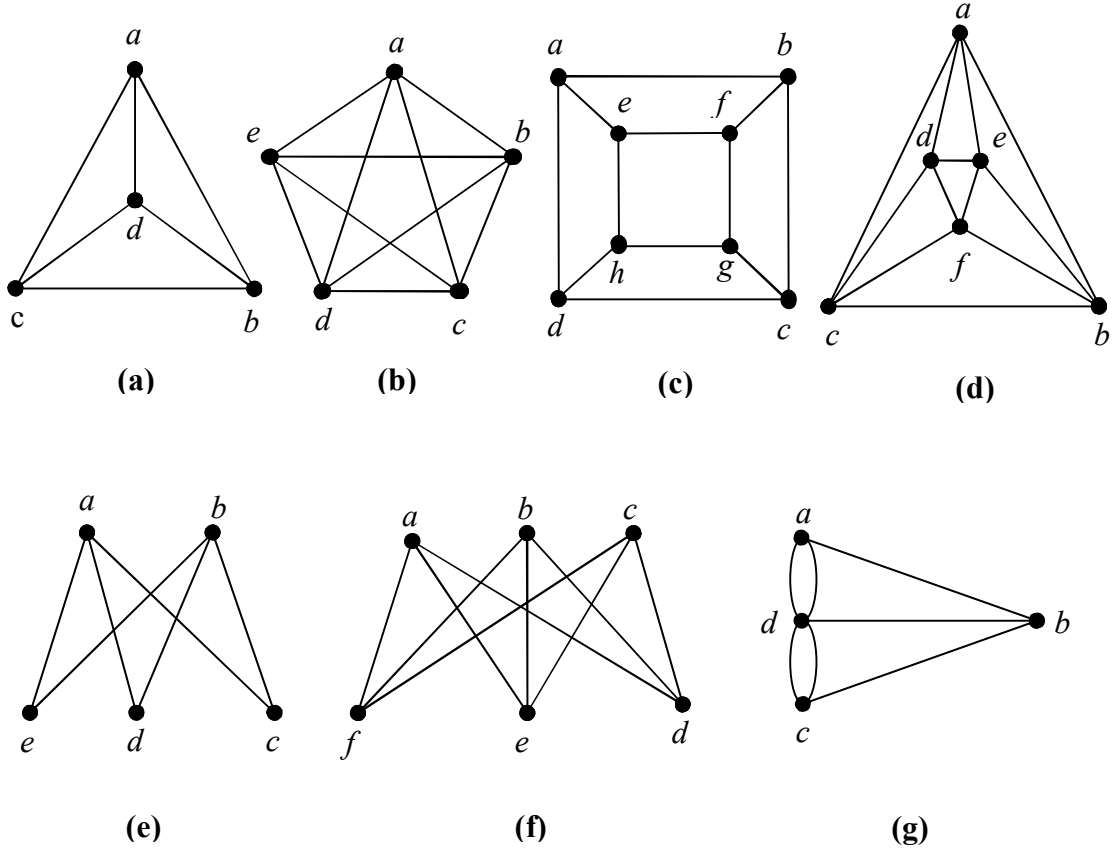


Şekil 3.50.

$G$  grafında  $abfgcbgedcefa$  şeklinde her kenarı içeren bir kapalı iz olduğundan  $G$  grafi Euler graftır.

$abcdefga$  yolu her köşeyi içeren bir döngü olduğundan  $G$  grafi ayrıca Hamilton graftır.

**Örnek 3.2.3.** Aşağıda verilen grafların Euler graf ve Hamilton graf olup olmadığını inceleyelim.



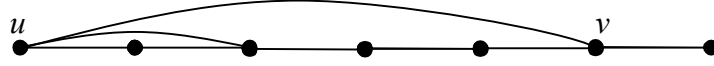
Şekil 3.51.

Tablo 3.2.

Graf	Euler	Euler izi	Hamilton	Hamilton döngüsü
(a)	Hayır	Yok	Evet	$abdca$
(b)	Evet	$abecadbcdea$	Evet	$abcdea$
(c)	Hayır	Yok	Evet	$abcdhgfea$
(d)	Evet	$acdfcbfebaeda$	Evet	$abefdca$
(e)	Hayır	Yok	Hayır	Yok
(f)	Hayır	Yok	Evet	$cdafbec$
(g)	Hayır	Yok	Evet	$badcb$

**Lemma 3.2.1.1.**  $G$  grafi verilsin. Eğer  $G$ 'nin her köşesinin derecesi en az 2 ise bu durumda  $G$ , bir döngü kapsar.

**İspat**  $P$ ,  $G$  grafindaki bir maksimal patikayı ve  $u$  da bu  $P$  patikanın uç köşesini gösterebiliriz.  $P$ , maksimal patika olduğundan uzatılamayacağı için  $u$ 'nun tüm komşu köşeleri  $P$ 'ye ait olmak zorundadır.



Şekil 3.52.

Ayrıca  $u$ 'nun derecesi  $G$ 'deki diğer tüm köşeler gibi en az 2 olduğundan ve  $P$  patikası maksimal olduğundan  $u$  köşesini yukarıda da gösterildiği gibi bir  $v$  köşesi ile komşu yapan en az bir kenar vardır. Bu takdirde  $uv$  kenarı  $P$  patikasının  $u$ 'dan  $v$ 'ye olan parçası ile bir döngü oluşturur.  $\square$

**Teorem 3.2.1.** Bir  $G$  grafinin Euler graf olması için gerek ve yeter şart  $G$ 'nin tüm köşelerinin derecelerinin çift olmasıdır.

**İspat.**

$G$  grafi Euler graf olsun. Bu durumda  $G$ 'de her kenarı içeren kapalı bir iz vardır. Bu izde her kenar sadece bir kez kullanıldığından geçtiği her köşenin derecesi 2'nin katı yani çift olacaktır.

$G$ , tüm köşelerinin dereceleri çift olan bir graf olsun.  $G$ 'nin Euler grafi olduğunu  $m$  kenar sayısı üzerinden tümevarımla gösterelim.

$m = 0$  için  $G$ , tek köşeli kapalı iz olduğundan Euler grafidir.

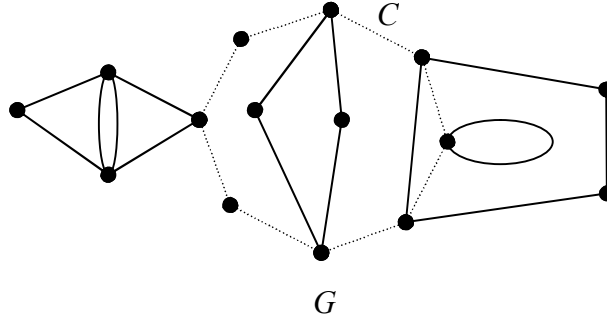
$m$ 'den az kenarlı tüm  $G$  grafları Euler graf olsun.

Hipotezden  $G$ 'nin tüm köşelerinin dereceleri çift olduğundan bu dereceler en az 2'dir. Bu takdirde Lemma 3.2.1.1.'den  $G$ , bir  $C$  döngüsü kapsar.  $G$  grafindan bu  $C$  döngüsünün  $E(C)$  kenarlarının silinmesi ile elde edilen grafi  $G'$  şeklinde gösterelim.  $C$  döngüsünde her köşede iki kenar olduğundan ve  $G$ 'nin tüm köşelerinin dereceleri çift olduğundan  $G'$  grafinin bütün bileşenlerindeki tüm köşe dereceleri çifttir. Dolayısıyla  $G'$  grafinin bütün bileşenleri,  $m$ 'den az kenarlı ve her bir bileşenin tüm köşeleri çift dereceli olduğundan hipotez gereği tüm bileşenler Euler graf olur.  $G$ 'nin her kenarını içeren kapalı izini oluşturmak için ise aşağıdaki adımlar izlenir.

- i)  $C$  döngüsü üzerinde herhangi bir  $v$  köşesi ile yola başlanır.
- ii)  $C$  döngüsü üzerinde her kenardan bir kez geçecek şekilde  $G'$  grafinin herhangi bir bileşenine ait döngü ile karşılaşıncaya kadar yola devam edilir.
- iii)  $G'$  grafinin bileşenindeki döngüye ait köşeye gelince bileşene ait döngü takip edilerek yolun başladığı  $C$  döngüsüne ait köşeye gelinir.

Gerektiği durumlarda iii) adımı uygulanarak  $C$  döngüsünün tüm kenarları takip edilecek şekilde oluşturulan kapalı Euler izi  $G$  grafinin Euler olduğunu gösterir ki istenendir.  $\square$

Bu teoremin bir uygulaması olarak aşağıdaki  $G$  grafi verilebilir.



Şekil 3.53.

**Örnek 3.2.4.**  $K_8$  tam grafinde her köşenin derecesi 7, yani tek olduğundan  $K_8$  grafi Euler graf değildir.

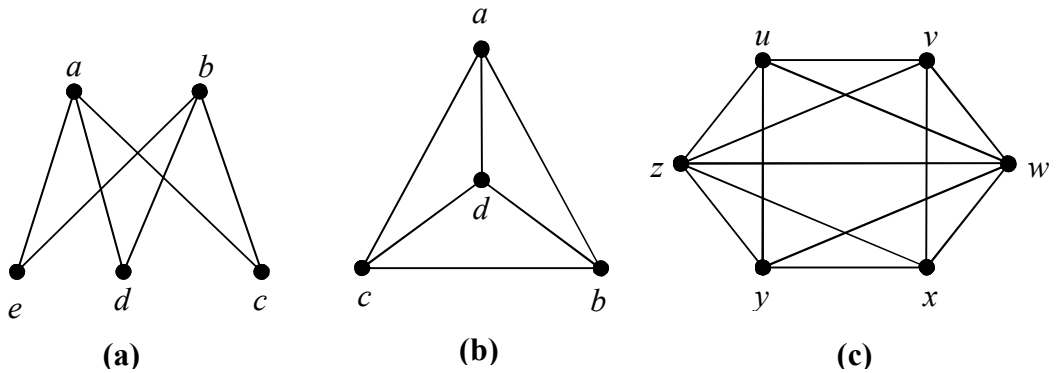
$K_{8,8}$  iki parçalı tam grafi 8. dereceden regüler olduğundan, yani tüm köşe dereceleri çift olduğundan Euler graftır.

$C_8$  döngüsünün tüm köşe dereceleri 2, yani çift olduğundan  $C_8$ , Euler graftır.

**Tanım 3.2.2.** Euler graf olması için sadece yola başladığı köşede yolunu bitirme şartını sağlamayan yani, her kenardan sadece bir kez geçecek şekilde kapalı değil de açık ize sahip olan grafa *yarı-Euler graf* denir. Böyle bir ize de *yarı-Euler izi* denir.

**Teorem 3.2.2.**  $G$  bağlantılı grafinin yarı-Euler graf olması için gerek ve yeter şart tek dereceli 2 köşeye sahip olmasıdır.

**Örnek 3.2.5.** Aşağıdaki grafların yarı-Euler graf olup olmadıkları, eğer yarı-Euler graf iseler yarı-Euler izleri verilmiştir.



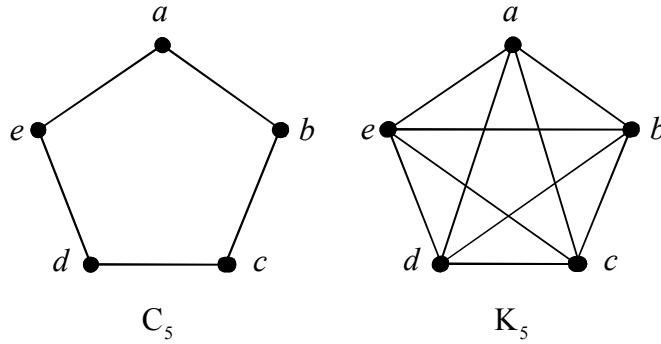
Şekil 3.54.

(a) grafinda tek dereceli olan köşe sayısı 2 (a ve b köşeleri) olduğundan (a), yarı-Euler graftır. Yarı-Euler izlerinden biri  $aebdacb$  açık izidir.

(b) grafinda tek dereceli olan köşe sayısı  $4 \neq 2$  olduğundan (b) grafi yarı-Euler graf değildir.

(c) grafinda tek dereceli olan köşe sayısı 2 (z ve w) olduğundan (c) grafi yarı-Euler graftır.  $wxyzvuyzuwxyz$  şeklinde yarı-Euler izi bulunabilir.

Her köşesinden geçecek şekilde bir döngüye sahip olan grafları Hamilton graf olarak tanımlamıştık. İlk bakışta verilen bir grafın Hamilton olup olmadığını Euler graflardaki gibi bir kriter yardımıyla belirlenebileceği düşünülebilir. Fakat böyle bir kriter Hamilton graflar için mevcut değildir. Örneğin;  $n$ 'in her değeri için  $C_n$  döngüsü,  $n \geq 3$  için  $K_n$  tam grafi Hamilton graftır.



Şekil 3.55.

**Teorem 3.2.3. (Ore's Teorem)**  $n \geq 3$  olmak üzere  $G$ ,  $n$  köşeli basit bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde komşu olmayan her  $u$  ve  $v$  köşeleri için

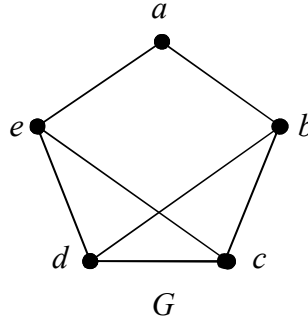
$$\text{der}(u) + \text{der}(v) \geq n$$

ise  $G$  grafi Hamilton graftır.

**Örnek 3.2.6.** Aşağıda Şekil 3.56. ile verilen grafta komşu olmayan herhangi iki köşe göz önüne alınırsa

$$\text{der}(u) + \text{der}(v) \geq 5$$

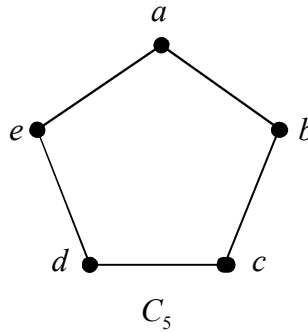
olduğundan Ore Teoremi gereği  $G$  grafi Hamilton graftır.



Şekil 3.56.

Teorem 3.2.3.'ün tersi doğru değildir. Yani her Hamilton graf Ore Teoremi'ni sağlamak zorunda değildir.

**Örnek 3.2.7.**  $C_5$  döngüsü Hamilton graftır. Fakat  $C_5$ 'de komşu olmayan her iki köşenin dereceleri toplamı 4, yani toplam köşe sayısından küçüktür. Dolayısıyla  $C_5$  grafinin Hamilton graf olması Ore Teoremi'ni sağlamasını gerektirmez.



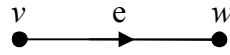
Şekil 3.57.

### 3.3. Yönlendirilmiş Graflar (Digraflar)

**Tanım 3.3.1.** Köşeler kümesi ile elemanları sıralı köşe çifti olan kenarlar kümesinden oluşan grafa *yönlendirilmiş graf (directed graph)* ya da kısaca *digraf* denir. Kenarlar, sıralı köşe çifti ile oluşturulduğundan yönlü olurlar.

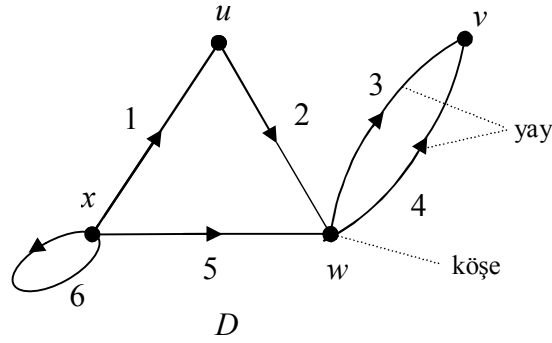
Herhangi bir digrafta yer alan yönlü kenarlara *yay (arc)* denir. Yay oluşturulan köşe çiftleri yayın *uç noktaları (endpoints)* olarak adlandırılır. Bu uç noktalardan ilkinine yayın *kuyruğu* veya *başlangıcı*, ikincisine ise yayın *başı* veya *bitişi* adı verilir.

Bir yay ile bağlı iki köşeye *komşu köşeler (adjacent vertices)* denir. Örneğin; Şekil 3.58.'de verilen graf için  $v$  ve  $w$  köşeleri komşu köşelerdir.



Şekil 3.58.

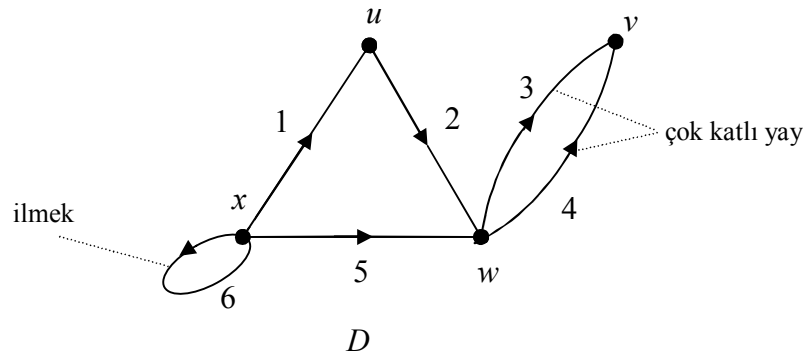
**Örnek 3.3.1.** Aşağıda köşeler kümesi  $\{u, v, w, x\}$  ve yaylar kümesi  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  olan  $D$  digrafı verilmiştir.



Şekil 3.59

Herhangi bir digraftaki yaylar, yönlerine göre köşe çiftleri ile de gösterilebilirler. Buna göre yukarıdaki  $D$  digrafında 1 yayı  $xu$ , 2 yayı  $uw$ , 3 ve 4 yayları  $wv$ , 5 yayı  $xw$  ve 6 yayı  $xx$  şeklinde gösterilir.

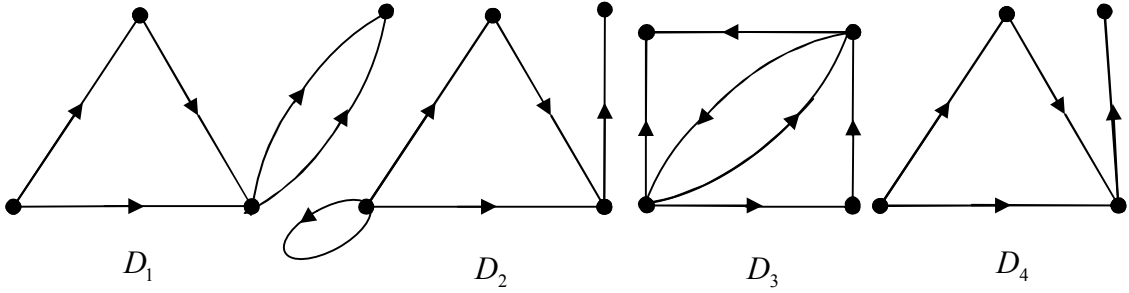
**Tanım 3.3.2.** Bir digrafta iki veya daha fazla yay, aynı iki köşeye aynı yön ile bağlı ise bu yaylara *çok katlı yay (multiple arcs)* denir. Başlangıcı ve bitişi aynı olan yaylara ise *ilmek(loop)* denir. Örneğin, aşağıda hem çok katlı yay hem de ilmek içeren bir  $D$  digrafı gösterilmiştir.



Şekil 3.60

**Tanım 3.3.3.** Çok katlı yaylara ve ilmeğe sahip olmayan digraflara *basit digraf (simple digraph)* denir.

**Örnek 3.3.2.** Aşağıda Şekil 3.61. ile verilen digrafların basit olup olmadıklarını inceleyelim.



Şekil 3.61.

$D_1$  digrafı çok katlı yay içerdiğinden  $D_2$  digrafı da ilmek içerdiğinden basit digraf değildir.  $D_3$  ve  $D_4$  digrafları ne çok katlı kenar ne de ilmek içerdiklerinden basit digraflardır.

### 3.3.1. Digraflarda İzomorfizm

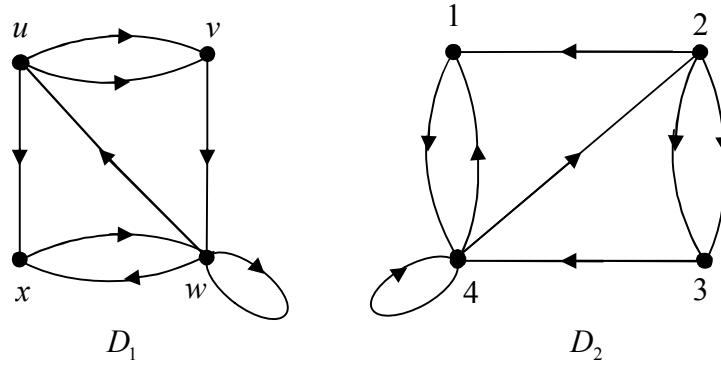
**Tanım 3.3.1.1.**  $D_1$  ve  $D_2$  digrafları verilsin. Eğer  $D_1$  ve  $D_2$  aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu digraflara *izomorf digraflar* denir.

i)  $|V(D_1)| = |V(D_2)|$

ii)  $|E(D_1)| = |E(D_2)|$

iii)  $f : V(D_1) \rightarrow V(D_2)$  dönüşümü komşulukları koruyacak şekilde 1-1 ve örten bir dönüşüm olmalıdır. Yani;  $e = u_1v_1$ 'in  $D_1$  digrafında  $u_1$ 'den  $v_1$ 'e bağlı bir yay olması için gerek ve yeter şart  $f(u_1)f(v_1)$ 'nin de  $D_2$  digrafında  $f(u_1)$ 'den  $f(v_1)$ 'ye bir yay olmasıdır.

**Örnek 3.3.1.1.** Aşağıda birbirine izomorf  $D_1$  ve  $D_2$  digrafları verilmiştir.

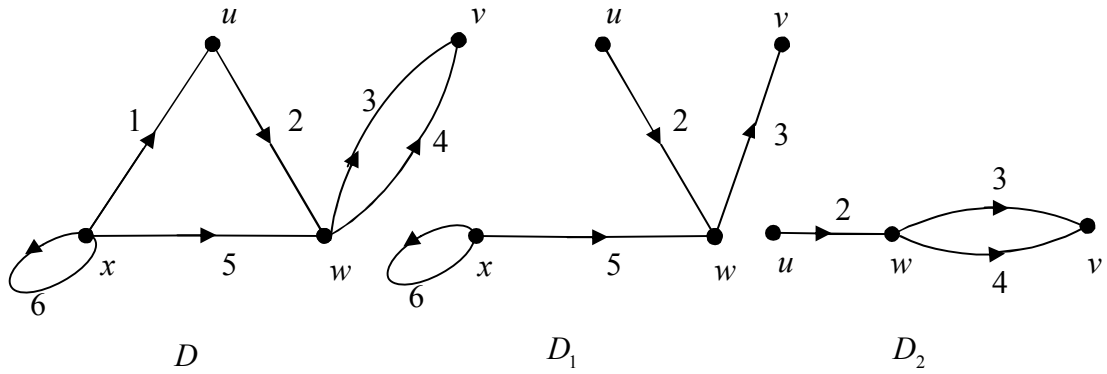


Şekil 3.62.

### 3.3.2. Alt Digraflar

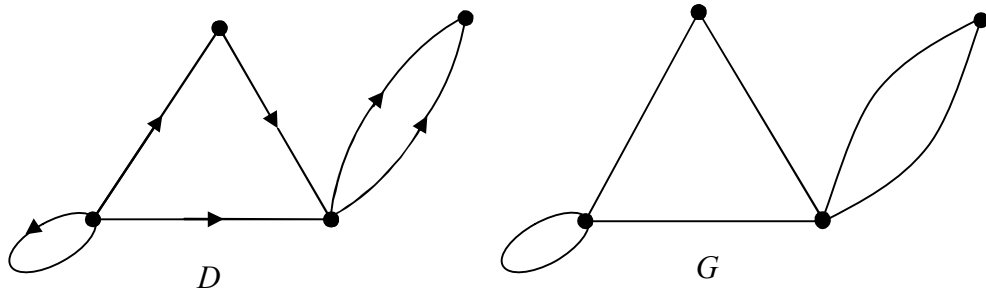
**Tanım 3.3.2.1.** Bir  $G$  digrafının bazı köşeleri ve bazı yayları kullanılarak oluşturulan digrafa  $G$ 'nin *alt digrafı* (*subdigraph*) denir.

Örneğin; aşağıda bir  $D$  digrafı ve bu digrafın iki farklı alt digrafı verilmiştir.



Şekil 3.63.

**Tanım 3.3.2.2.** Bir digraftaki yayların oklarının kaldırılması ile elde edilen yeni grafa digrafın *kapsadığı graf* (*underlying graph*) denir.

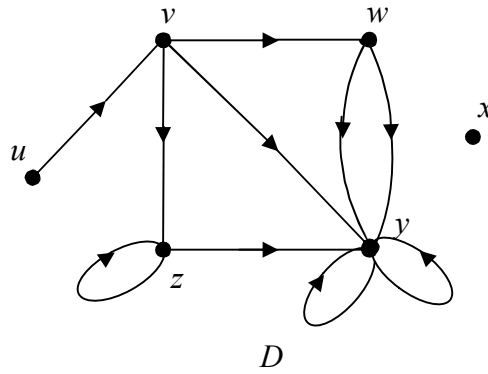


Şekil 3.64.

**Tanım 3.3.2.3.**  $D$  digrafı ve  $v \in V(D)$  köşesi verilsin.  $v$  köşesinden bağlı (yani  $v$  köşesinin kuyruk olduğu) yayların sayısına  $v$ 'nin *dış-derecesi* (*outdegree*);  $v$ 'ye bağlı (yani  $v$  köşesinin baş olduğu) yayların sayısına da  $v$ 'nin *iç-derecesi* (*indegree*) denir.  $v$  köşesinin dış-derecesi  $d^+(v)$  ile iç-derecesi ise  $d^-(v)$  ile gösterilir.

Bir digrafta her bir ilmek karşılık geldiği köşe için 1 tane iç-derece ve 1 tane dış-derece olarak sayılır.

**Örnek 3.3.2.1.** Aşağıdaki  $D$  digrafında her bir köşenin iç ve dış derecelerini bulalım.



Şekil 3.65.

$$\begin{aligned} d^+(u) &= 1 & d^+(v) &= 3 & d^+(w) &= 2 & d^+(x) &= 0 & d^+(y) &= 2 & d^+(z) &= 2 \\ d^-(u) &= 0 & d^-(v) &= 1 & d^-(w) &= 1 & d^-(x) &= 0 & d^-(y) &= 6 & d^-(z) &= 2 \end{aligned}$$

şeklinde olur. Ayrıca  $D$  digrafı için

$$\text{Dış-derece dizisi} = (0, 1, 2, 2, 2, 3), \text{ İç-derece dizisi} = (0, 0, 1, 1, 2, 6)$$

olur.  $D$  digrafının toplam yay sayısı 10, dış-dereceler toplamı 10 ve iç-dereceler toplamı 10'dur.

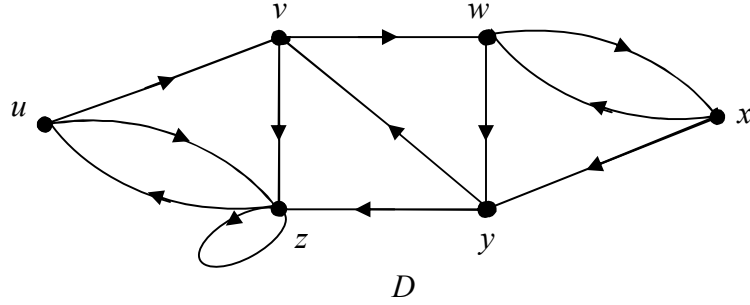
**Teorem 3.3.2.1.** Herhangi bir  $n$  köşeli,  $q$  tane yaylı ve köşeler kümesi  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  olan digrafta dış-dereceler veya iç-dereceler toplamı, digrafın toplam yay sayısına eşittir. Yani;

$$\sum_{i=1}^n d^-(v_i) = \sum_{i=1}^n d^+(v_i) = q$$

dır.

**Tanım 3.3.2.4.** Bir digrafta  $uv, vw, wx, \dots, yz$  şeklinde  $k$  tane yayların dizisine  $k$  uzunluğunda bir yol denir. Tüm yayların farklı olduğu yola *iz (trail)* denir. Hem tüm yayların hem de tüm köşelerin farklı olduğu yola ise *patika (path)* denir.

**Örnek 3.3.2.2.** Aşağıda verilen  $D$  digrafını göz önüne alalım.



Şekil 3.66.

$vwxyvwyzzu$  yolu,  $v$ 'den  $u$ 'ya uzunluğu 9 olan bir yoldur.

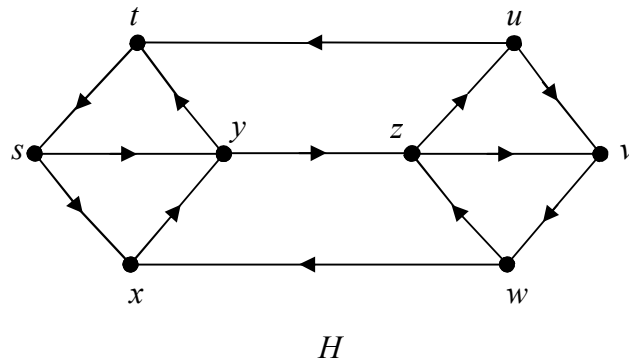
$uvwxyz$  yolunda her bir yay bir kez kullanıldığından bu yol izdir.

$vwxyz$  yolunda her bir yay ve köşe bir kez kullanıldığından bu yol patikadır.

**Tanım 3.3.2.5.** Bir digrafta başlangıç ve bitiş köşeleri aynı olan yola *kapalı yol*, tüm yayların farklı olduğu kapalı yola *kapalı iz (closed trail)*, uç köşeleri hariç ortadaki tüm köşelerin farklı olduğu kapalı ize ise *döngü (cycle)* denir.

Yukarıdaki Örnek 3.3.2.2. ile verilen  $D$  digrafında  $uvwyzvu$  yolu iz,  $uvwxyzu$  yolu da döngüdür.

**Örnek 3.3.2.3.**



Şekil 3.67.

$H$  digrafında  $t$  köşesinden  $w$  köşesine tüm patikalar;

$tsxyzuvw, tsxyzw, tsyzuvw, tsyzvw$

dir.  $w$  köşesinden  $t$  köşesine olan tüm patikalar ise;

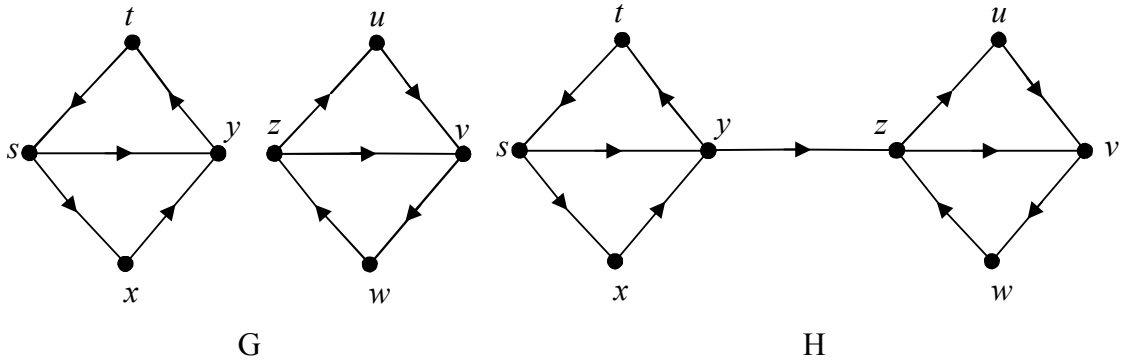
$wxyt$ ,  $wzut$ ,  $wxyzut$

şeklinindedir. Fakat  $t$  ve  $w$  köşelerini kapsayan bir döngü yoktur.

**Tanım 3.3.2.6.** Bir digrafın kapsadığı graf bağlantılı ise digrafa *zayıf bağlantılı* (*weakly connected*) ya da kısaca *bağlantılı* denir. Aksi halde *bağlantısız* (*unconnected*) denir.

Bir digrafta her bir köşe çifti arasında en az bir patika mevcut ise bu digrafa *kuvvetli bağlantılı* (*strongly connected*) denir.

**Örnek 3.3.2.4.** Aşağıdaki digrafların bağlantılılığını ve kuvvetli bağlantılılığını inceleyelim.



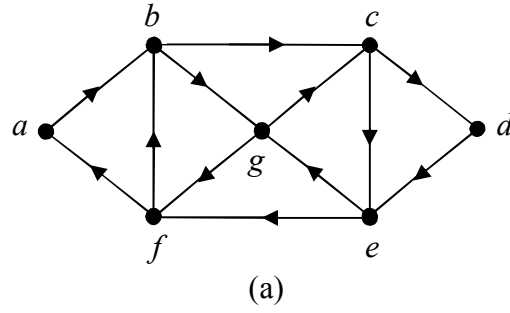
Şekil 3.68.

$G$  digrafının kapsadığı graf bağlantısız olduğundan  $G$  digrafı da bağlantısızdır.  $H$  digrafının kapsadığı graf bağlantılı olduğundan  $H$ , bağlantılıdır; fakat kuvvetli bağlantılı değildir. Çünkü örneğin  $z$ 'den  $y$ 'ye bir patika mevcut değildir. Öte yandan Örnek 3.3.2.3. ile verilen  $H$  digrafının her bir köşe çifti arasında bir patika olduğundan  $H$ , kuvvetli bağlantılıdır.

### 3.3.3. Euler ve Hamilton Digrafları

**Tanım 3.3.3.1.** Bir  $G$  digrafında grafın her bir yayını içeren kapalı bir iz varsa  $G$  digrafına *Euler digraf* denir. Böyle bir iz de *Euler izi* denir.

Bir  $G$  digrafında grafın her köşesini içeren döngü varsa  $G$  digrafına *Hamilton digraf* denir. Böyle bir döngüye de *Hamilton döngüsü* denir.

**Örnek 3.3.3.1.****Şekil 3.69.**

(a) digrafında  $abgfbcegcdefa$  şeklinde her yayı içeren kapalı bir yol bulunabildiğinden (a) digrafı Euler digraftır. Ayrıca (a) digrafında  $abcdegfa$  yolu her köşeyi içeren bir döngü olduğundan (a) Hamilton digraftır.

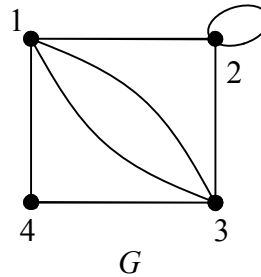
**Teorem 3.3.3.1.**  $G$  bağlantılı digrafının Euler digraf olması için gerek ve yeter şart  $G$ 'nin her köşesinin iç-derecesi ile dış-derecesinin eşit olmasıdır.

**Teorem 3.3.3.2.**  $G$  Euler digrafı, herhangi iki yayı ortak olmayan döngülere ayrılabilir.

**3.4. Grafların Matrisler Yardımıyla Temsili**

**Tanım 3.4.1.**  $G$ , köşeleri  $1,2,3,\dots,n$  ile etiketlenirilmiş bir graf olsun. Bu durumda  $i$ . satır  $j$ . sütun elemanı,  $G$  grafında  $i$ . köşe ile  $j$ . köşeyi bağlayan kenarların sayısı olarak tanımlanan  $n \times n$  matrise  $G$  grafının *komşuluk matrisi* (*adjacency matrix*) denir ve bu matris  $A(G)$  şeklinde gösterilir.

**Örnek 3.4.1.** Aşağıda Şekil 3.70. ile verilen grafın komşuluk matrisini oluşturalım.

**Şekil 3.70.**

1 ve 2 köşeleri bir kenar ile bağlı olduğundan komşuluk matrisinin  $a_{1,2}$  ve  $a_{2,1}$  elemanları 1'dir.

1 ve 3 köşeleri iki kenar ile bağlı olduğundan matrisin  $a_{1,3}$  ve  $a_{3,1}$  elemanları 2'dir.

1 ve 4 köşeleri bir kenar ile bağlı olduğundan matrisin  $a_{1,4}$  ve  $a_{4,1}$  elemanları 1'dir.

2 köşesi kendisine bir kenar ile bağlı olduğundan matrisin  $a_{2,2}$  elemanı 1'dir.

2 ve 4 köşelerini bağlayan kenar olmadığından matrisin  $a_{2,4}$  ve  $a_{4,2}$  elemanları 0'dır.

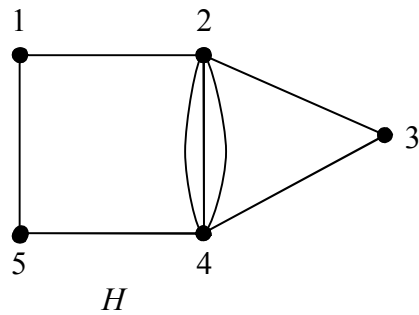
3 ve 4 köşelerini bağlayan bir kenar olduğundan matrisin  $a_{3,4}$  ve  $a_{4,3}$  elemanları 1'dir.

1,3 ve 4 köşelerini kendilerine bağlayan kenar olmadığından  $a_{1,1}$ ,  $a_{3,3}$  ve  $a_{4,4}$  elemanları 0'dır. Sonuç olarak  $G$  grafının komşuluk matrisi;

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

**Örnek 3.4.2.** Aşağıda  $H$  grafı ve  $H$  grafına karşılık gelen  $A(H)$  komşuluk matrisi verilmiştir.

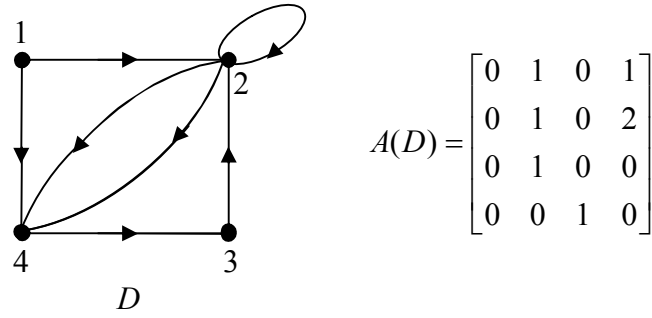


$$A(H) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Şekil 3.71.

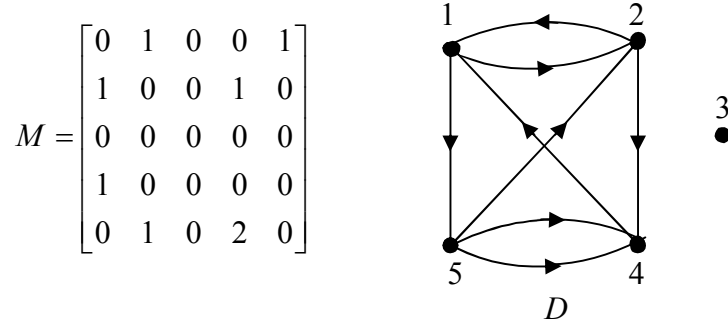
Komşuluk matrisinden yararlanılarak graflar oluşturulabilir. Örneğin,





Şekil 3.73.

Graflardakine benzer şekilde digraflar için de verilen herhangi bir  $M$  matrisini komşuluk matris kabul eden  $D$  digrafı çizilebilir. Örneğin,



Şekil 3.74.

olur.

Digraflara ait komşuluk matrisleri aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) Herhangi bir digrafta komşuluk matrisi esas köşegene göre simetrik olmak zorunda değildir.

ii) İlmek içermeyen herhangi bir digrafın komşuluk matrisinde esas köşegen elemanları sıfırdır.

iii) Bir digrafa ait komşuluk matrisinde herhangi bir satırın elemanları toplamı, bu satıra karşılık gelen köşenin dış-derecesine; herhangi bir sütunun elemanları toplamı da bu sütuna karşılık gelen köşenin iç-derecesine eşittir. Yukarıdaki Örnek 3.4.3.'deki  $D$  digrafı için

$$d^+(2) = \sum 2. \text{ satır elemanları}, \quad d^-(2) = \sum 2. \text{ sütun elemanları}$$

olarak bulunur.

Bir grafta ya da digrafta komşuluk matrisi yardımıyla yolların varlığını ve uzunluğunu gösterebiliriz.

**Teorem 3.4.1.**  $D$ , köşeleri  $1, 2, 3, \dots, n$  şeklinde etiketlenmiş bir digraf,  $k \in \mathbb{Z}^+$  ve  $A$  da  $D$  digrafına karşılık gelen komşuluk matrisi olsun. Bu durumda digrafın  $i$  köşesinden  $j$  köşesine uzunluğu  $k$  olan tüm yolların sayısı,  $A^k$  matrisinin  $i$ . satır  $j$ . sütunda yer alan elemana karşılık gelir.

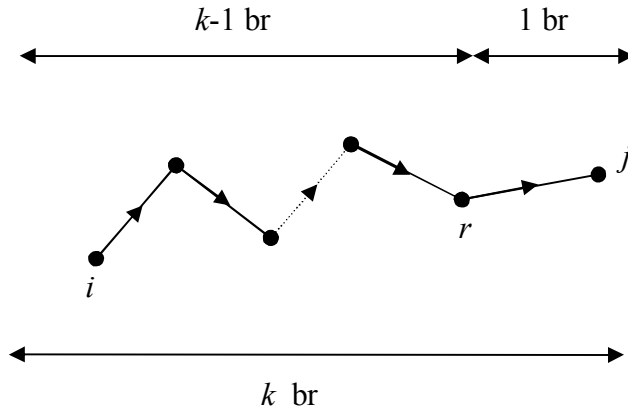
**İspat** İspatı  $n$  yol uzunluğu üzerinden tümevarımla yapalım.

$n = 1$  için digrafın  $i$  köşesinden  $j$  köşesine uzunluğu 1 olan yolların sayısı,  $A$  komşuluk matrisinin  $i$ . satır ve  $j$ . sütun elemanına eşittir.

$n = k - 1$  için digrafın  $i$  köşesinden  $j$  köşesine uzunluğu  $k - 1$  olan tüm yolların sayısı,  $A^{k-1}$  matrisinin  $i$ . satır  $j$ . sütununda yer alan elemana eşit olsun.

$n = k$  için teoremin ifadesinin doğruluğunu gösterelim.

$i$  köşesinden  $j$  köşesine uzunluğu  $k$  olan herhangi bir yol alalım. Öyle ki  $i$  köşesi,  $j$  köşesine komşu ve  $j$ 'nin 1 kenar uzaklığındaki  $r$  köşesine uzunluğu  $k - 1$  olan yol ile bağlansın.



Şekil 3.75.

Hipotezden  $i$  köşesinden  $r$  köşesine uzunluğu  $k - 1$  olan yolların sayısı,  $A^{k-1}$  matrisinin  $i$ . satır  $r$ . sütun elemanı kadardır. Bu yolların sayısını  $a_{ir}^{k-1}$  şeklinde gösterelim. Ayrıca benzer düşünce ile  $r$  köşesinden  $j$  köşesine uzunluğu 1 olan yolların sayısı  $a_{rj}$  kadar olur. Dolayısıyla  $r$  köşesinden geçecek şekilde  $i$ 'den  $j$ 'ye uzunluğu  $k$  olan yolların sayısı  $a_{ir}^{k-1} a_{rj}$  kadar olur. Sonuç olarak  $i$ 'den  $j$ 'ye uzunluğu  $k$  olan tüm yolların sayısı;

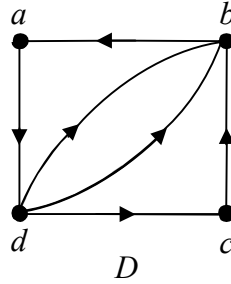
$$\begin{aligned} \text{Toplam yol} &= \sum_{i=1}^n (v_i \text{ köşesinden geçen tüm yolların sayısı}) \\ &= a_{i_1}^{k-1} a_{1j} + a_{i_2}^{k-1} a_{2j} + \dots + a_{i_r}^{k-1} a_{rj} + \dots + a_{i_n}^{k-1} a_{nj} \end{aligned}$$

olur. Matrislerin çarpımı tanımından bu toplam  $A^{k-1}A = A^k$  olur. Gerçekten;

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_1}^{k-1} & a_{i_2}^{k-1} & \dots & a_{i_r}^{k-1} & \dots & a_{i_n}^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{rj} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{ij}^k & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

olur.  $\square$

**Örnek 3.4.4.** Aşağıdaki  $D$  digrafını inceleyelim.



Şekil 3.76.

$D$  digrafında, her bir köşe çifti arasında uzunluğu 1 olan yolların sayısını bulalım.

$a$  köşesinden  $b$  ve  $c$  köşelerine uzunluğu 1 olan yol sayısı 0 iken  $d$  köşesine ise 1'dir.  $b$  köşesinden  $a$  köşesine söz konusu sayı 1 iken  $c$  ve  $d$  köşelerine 0'dır.  $c$ 'den  $b$ 'ye 1 tane uzunluğu 1 olan yol varken diğer köşelere giden böyle bir yol yoktur. Son olarak  $d$  köşesi için  $d$ 'den  $b$ 'ye 2 tane,  $c$ 'ye 1 tane yol varken  $a$ 'ya giden böyle bir yol yoktur. Ayrıca  $D$  digrafı ilmek içermediğinden tüm köşeler için kendilerine giden söz konusu yol sayısı 0'dır. Tüm değerleri aşağıdaki gibi gösterirsek;

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde  $D$  digrafına karşılık gelen  $A$  komşuluk matrisi elde edilir.

Benzer inceleme ile  $D$  digrafında bu kez her bir köşe çifti arasında uzunluğu 2 olan yolların sayısını bulalım. O zaman

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde  $D$  digrafına karşılık gelen  $A^2$  komşuluk matrisi elde edilir. Buradan yukarıdaki teoreme göre;

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Bu durumda elemanları, uzunluğu üç olan yolların sayısını gösteren matris de;

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilebilir.

Herhangi bir digrafın komşuluk matrisi yardımıyla kuvvetli bağlantılı olup olmadığı belirlenebilir.

**Teorem 3.4.2.** Köşeleri  $1, 2, 3, \dots, n$  şeklinde etiketlenmiş  $D$  digrafına karşılık gelen  $A$  komşuluk matrisi ve  $B = A + A^2 + \dots + A^{n-1}$  matrisi verilsin. Bu takdirde  $D$  digrafının

kuvvetli bağlantılı olması için gerek ve yeter şart  $B$  matrisinin köşegen olmayan elemanlarının pozitif (yani  $i \neq j$  için  $b_{ij} > 0$ ) olmasıdır.

### İspat

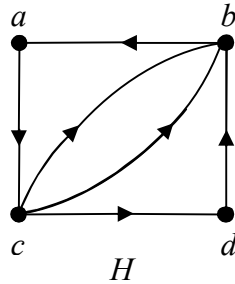
Kuvvetli bağlantılı  $D$  digrafı verilsin.  $D$ , kuvvetli bağlantılı olduğu için her bir köşesinden farklı her bir köşeye en az bir patika vardır. Öte yandan  $D$ ,  $n$  köşeli olduğundan böyle bir patika en fazla  $n-1$  uzunluğundadır. Ayrıca  $D$ 'nin kuvvetli bağlantılılığı en az bir  $k \leq n-1$  uzunluğu için farklı  $i$  ve  $j$  köşeleri arasında bir patika olmasını gerektirir. Bu yolların sayısı;  $A^k$  matrisinin  $a_{ij}^k$  elemanına karşılık geldiğinden  $a_{ij}^k > 0$ 'dır. Bu takdirde;

$$B = A + A^2 + \dots + A^k + \dots + A^{n-1}$$

matrisi için  $b_{ij} > 0$  ( $i \neq j$ ) olur ki istenendir.

$B$  matrisinin köşegen olmayan her bir elemanı pozitif olsun. Bu takdirde  $B = A + A^2 + \dots + A^k + \dots + A^{n-1}$  olduğundan en az bir  $k \leq n-1$  için  $a_{ij}^k > 0$ 'dır. Dolayısıyla  $i \neq j$  için  $i$  köşesinden  $j$  köşesine en fazla  $n-1$  uzunluğunda yol olduğundan  $D$  digrafı kuvvetli bağlantılıdır.  $\square$

**Örnek 3.4.5.** Aşağıdaki  $H$  digrafının kuvvetli bağlantılı olup olmadığını inceleyelim.



Şekil 3.77.

Digraflarda tanımlanan komşuluk matrisi bulma metoduna göre; verilen  $H$  digrafının  $A$  komşuluk matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu matris yardımıyla yardımıyla  $H$  digrafında 1,2 ve 3 uzunluğundaki patikaları gösteren  $A, A^2$  ve  $A^3$  matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Digrafta birbirinden farklı her  $i, j$  köşe çifti, matrislerin köşegen üzerinde olmayan elemanlarına karşılık gelmektedir. Matrislerin en az birinde bu  $i, j$  köşe çiftinin arasındaki yol sayısını temsil eden eleman sıfırdan farklı ise verilen digraf kuvvetli bağlantılı olur.

Sonuç olarak  $H$  digrafı bu şartı sağladığından kuvvetli bağlantılıdır. Yani;

$$B = A + A^2 + A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinin köşegen üzerinde olmayan her elemanı pozitif olduğundan  $H$  digrafı kuvvetli bağlantılıdır.

### Örnek 3.4.6.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisini komşuluk matrisi kabul eden digrafın kuvvetli bağlantılı olup olmadığını inceleyelim.

Matris  $5 \times 5$  tipinde olduğundan digraf 5 köşelidir. Dolayısıyla maksimum 4 uzunluğunda patika vardır. O halde elemanları digrafın farklı iki köşe çifti arasındaki yolların sayısını (uzunluğu sırasıyla 2,3 ve 4 olan) temsil eden  $A^2, A^3$  ve  $A^4$  matrisleri

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Bu takdirde  $B = A + A^2 + A^3 + A^4$  matrisi de

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

olur.  $B$  matrisinin köşegen üzerinde olmayan tüm elemanları sıfırdan büyük olduğundan komşuluk matrisinin karşılık geldiği digraf kuvvetli bağlantılıdır.

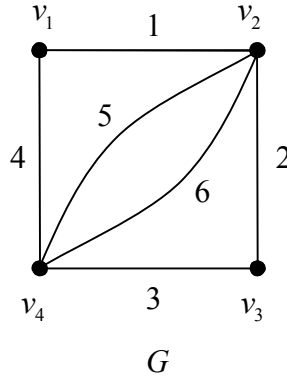
Bir grafın (digrafın) komşuluk matrisi, köşelerin komşuluk ilişkilerinden elde edilirken, incidence matrisi ise köşelerin kenarlarla (veya yaylarla) olan ilişkisinden elde edilir.

**Tanım 3.4.3.**  $G$  grafı, köşeleri  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  ile kenarları ise  $1, 2, 3, \dots, m$  ile etiketlenmiş ve ilmek içermeyen bir graf olsun. O zaman bu şekilde tanımlanan  $G$  grafına ait  $M = [m_{ij}]$  matrisinin  $i$ . satır ve  $j$ . sütun elemanı

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & i. \text{ köşe } j. \text{ kenar ile bağlı ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $M(G)$  matrisine  $G$  grafının *incidence matrisi* denir.

**Örnek 3.4.7.** Aşağıda 4 köşeli ve 6 kenarlı  $G$  grafını



**Şekil 3.78.**

göz önüne alalım.  $v_1$  köşesi 4 kenarı ile bağlı olduğundan matrisin 1. satır 4. sütun elemanı 1'dir.  $v_2$  köşesi 4 kenarı ile bağlı olmadığından matrisin 2. satır 4. sütun elemanı 0'dır. Benzer şekilde tüm köşe ve kenar bağlantıları incelenirse  $G$  grafının incidence matrisi,

$$M(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

**Sonuç 3.4.1.**

i) Grafta bir kenar, iki köşe ile bağlı olduğundan incidence matrisin her bir sütununda iki tane 1 vardır.

ii) Incidence matriste bir satırın toplamı, o satırın karşılık geldiği köşenin derecesini verir.

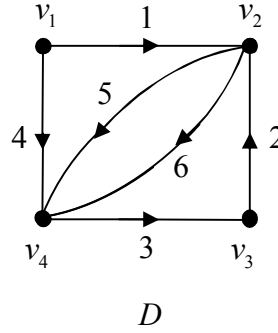
Yönlendirilmiş graflar için incidence matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır.

**Tanım 3.4.5.**  $D$  digrafı ilmek içermeyen, köşeleri  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  ile kenarları ise  $1, 2, 3, \dots, m$  ile etiketlenmiş bir digraf olsun. O zaman bu şekilde tanımlanan  $G$  digrafına ait  $M = [m_{ij}]$  matrisinin  $i$ . satır ve  $j$ . sütun elemanı

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & j \text{ yayı } i \text{ köşesinden bağlı ise} \\ -1, & j \text{ yayı } i \text{ köşesine bağlı ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $M(D)$  matrisine  $D$  digrafının *incidence matrisi* denir.

**Örnek 3.4.7.** Aşağıda verilen  $D$  digrafını göz önüne alalım.



**Şekil 3.79.**

4 yayı  $v_1$  köşesinden bağlı olduğundan matrisin 1. satır 4. sütun elemanı 1'dir. 1 yayı  $v_2$  köşesine bağlı olduğundan matrisin 2. satır 1. sütun elemanı -1'dir. 1 yayı  $v_3$  köşesine bağlı olmadığından 3. satır 1. sütun elemanı 0 olur. Benzer şekilde devam edilirse tüm köşe ve kenar bağlılıkları incelendiğinde  $D$  digrafının incidence matrisi;

$$M(D) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

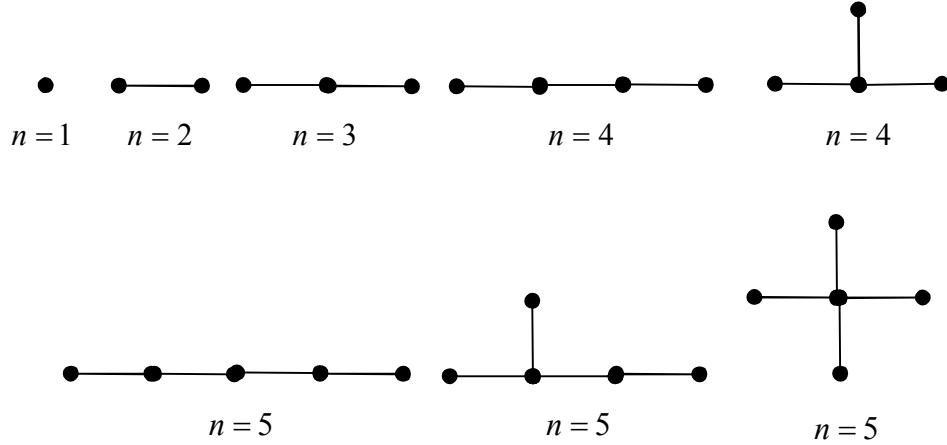
**Sonuç 3.4.2.** İlmek içermeyen bir digrafa ait incidence matrisi aşağıdaki özellikleri sağlar:

- i) Her bir sütununda bir tane 1 ve bir tane -1 vardır. Çünkü her bir yay bir köşeden diğerine bağlıdır.
- ii) Herhangi bir satırındaki "1"lerin toplam sayısı, o satıra karşılık gelen köşenin dış-derecesini verir.
- iii) Herhangi bir satırındaki "-1"lerin toplam sayısı, o satıra karşılık gelen köşenin iç-derecesini verir.

### 3.5. Ağaçlar

**Tanım 3.5.1.** Döngü içermeyen graflara *orman (forest)* denir. Hem döngü içermeyen hem de bağlantılı olan graflara ise *ağaç (tree)* denir ve  $T$  ile gösterilir.

Aşağıda maksimum 5 köşeli (birbirine izomorf olmayan) ağaçlar gösterilmiştir.



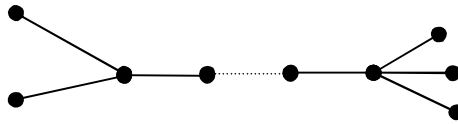
Şekil 3.80.

**Tanım 3.5.2.** Bir ağaçta derecesi 1 olan köşeye *yaprak (leaf)* denir.

**Teorem 3.5.1.**  $G = (V, E)$  bağlantılı grafi verilsin.  $G$  grafının ağaç olması için gerek ve yeter şart  $G$ 'nin her kenarının köprü olmasıdır. (Yani her  $e \in E(G)$  için  $G - e$  grafi iki bileşenli olmalıdır.)

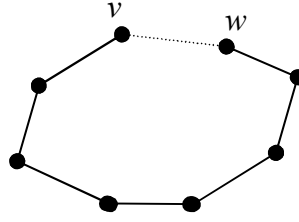
$n$  köşeli her ağaç  $n - 1$  kenara sahiptir.

Bir ağaçta herhangi iki köşe arasında sadece 1 tane patika vardır ki bu patika komşu köşeleri birbirine bağlayan kenardır. Bu kenar kaldırılırsa köşeler arasında patika olmaz.



Şekil 3.81.

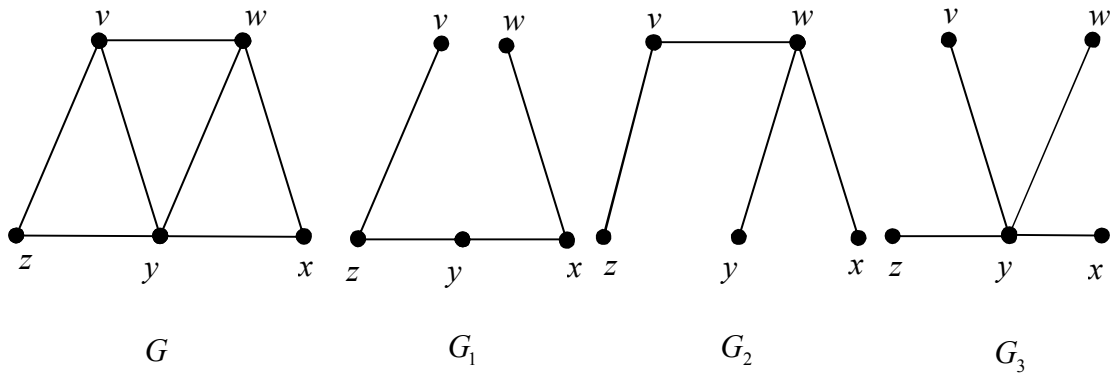
Bir  $G = (V, E)$  ağacında herhangi iki  $v, w \in V(G)$  köşeleri arasında sadece 1 tane patika vardır. Bu ağaca  $vw$  kenarı eklenirse bir döngü elde edilmiş olur.



Şekil 3.82.

**Tanım 3.5.3.**  $G$  bağlantılı grafi verilsin.  $G$ 'nin her köşesini içeren ve ayrıca ağaç olan alt grafına  $G$ 'nin *kapsayıcı ağacı* (*spanning tree*) denir.

Aşağıda bir  $G$  grafi ve bu grafın üç farklı kapsayıcı ağacı gösterilmiştir.



Şekil 3.83.

**Teorem 3.5.2.**  $G$  grafi verilsin.  $G$ 'nin bağlantılı bir graf olması için gerek ve yeter şart kapsayıcı bir ağaca sahip olmasıdır.

#### 4. GRAFLARDA FİBONACCİ SAYI DİZİSİ

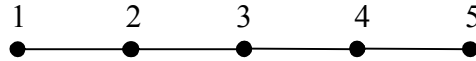
Bu bölümde grafların Fibonacci sayı dizileri ile ilişkileri incelenmiştir.. Bu bölümdeki tanım, teorem, lemma, sonuç ve şekiller Prodinger ve Tichy (1982); Wingard (1995); Hopkins ve Staton (1984); Chism (2009); Horton (2007); Pedersen ve Vestergaard (2004); Chen ve Zhu (2012); Levit ve Mandrescu (2005); Startek ve ark. (2009); Zhao ve Li (2006); Holliday ve Krop (2011) adlı çalışmalardan alınmıştır.

**Tanım 4.1.**  $G = (V, E)$  grafi ve  $S \subseteq V(G)$  alt kümesi verilsin. Eğer  $S$  kümesine ait herhangi iki eleman (yani köşe)  $G$  grafında komşu olmuyorsa bu durumda  $S$  kümesine *bağımsız küme (independent set)* denir. 0-elemanlı ve 1-elemanlı  $S$  kümeleri bağımsız küme kabul edilir.

$G$  grafında  $S$ 'i alt küme kabul eden farklı bir bağımsız küme yok ise bu durumda  $S$ 'e *maksimal bağımsız küme* denir.

Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ile grafların bağımsız küme sayıları arasındaki ilişki oldukça ilginçtir. Özellikle patika ve döngü graflarında bu sayı dizileri ve bağımsız küme sayıları çakışmaktadır. Yani,  $n$  köşeli  $P_n$  patikasındaki tüm bağımsız kümelerin sayısı  $F_{n+1}$ 'dir. Ayrıca  $n$  köşeli  $C_n$  döngüsündeki tüm bağımsız kümelerin sayısı da  $L_n$ 'dir.

**Örnek 4.1.**  $P_5$  patikasını göz önüne alalım.



Şekil 4.1.

$P_5$  patikasının bağımsız kümelerini eleman sayılarına göre düzenleyelim.

Tablo 4.1.

0-elemanlı bağımsız kümeler	$\emptyset$
1-elemanlı bağımsız kümeler	$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$
2-elemanlı bağımsız kümeler	$\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}$
3-elemanlı bağımsız kümeler	$\{1, 3, 5\}$

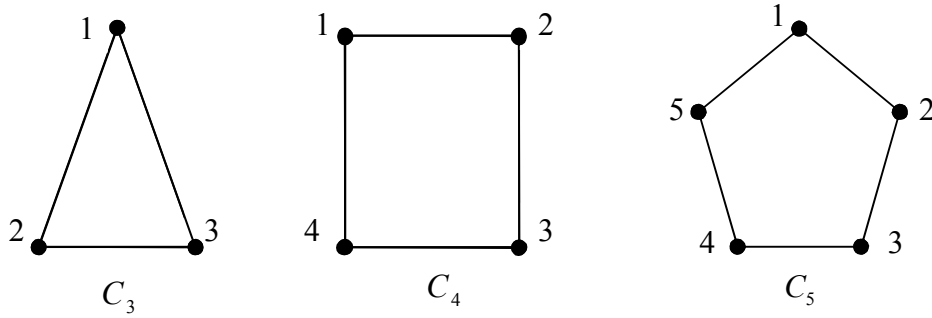
Tablodan da görüldüğü gibi  $P_5$  grafının bağımsız kümelerinin sayısı  $13 = F_6$ 'dır.

$n$  köşeli  $P_n$  grafında tüm bağımsız kümelerin sayısının  $(n+1)$ . Fibonacci sayısını vermesi sebebiyle, bu sayım aşağıdaki tanımda verildiği gibi özel olarak isimlendirilmiştir.

**Tanım 4.2.**  $G$  grafının tüm bağımsız kümelerinin sayısına  $G$  grafının *Fibonacci sayısı* denir ve  $f(G)$  ile gösterilir.

Benzer şekilde  $n$  köşeli  $C_n$  döngüsünün Fibonacci sayısı  $f(C_n) = L_n$  dir.

**Örnek 4.2.**  $C_3, C_4$  ve  $C_5$  döngülerini inceleyelim.



**Şekil 4.2.**

$C_3, C_4$  ve  $C_5$  döngülerinin tüm bağımsız kümeleri ve Fibonacci sayıları aşağıdaki tabloda gösterildiği gibidir.

**Tablo 4.2.**

$C_n$ grafları	0-elemanlı bağımsız küme	1-elemanlı bağımsız kümeler	2-elemanlı bağımsız kümeler	Fibonacci Sayısı
$C_3$	$\emptyset$	$\{1\}, \{2\}, \{3\}$	-	$4 = L_3$
$C_4$	$\emptyset$	$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$	$\{1,3\}, \{2,4\}$	$7 = L_4$
$C_5$	$\emptyset$	$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$	$\{1,3\}, \{1,4\}, \{2,5\}, \{2,4\}, \{3,5\}$	$11 = L_5$

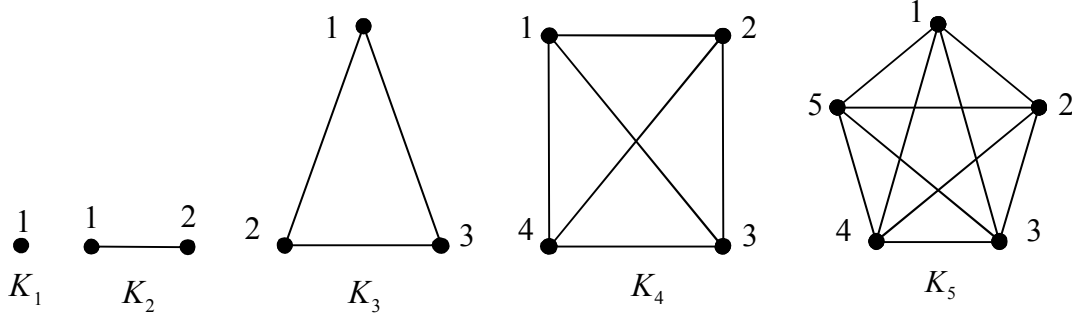
**Lemma 4.1.**  $n$  köşeli  $K_n$  tam grafın Fibonacci sayısı;

$$f(K_n) = n + 1$$

dir.

**İspat.** Tam grafa her köşe diğer tüm köşeler ile komşu olduğundan 2 veya daha fazla elemanlı bağımsız küme oluşturulamaz. Dolayısıyla tüm bağımsız kümeler ya 0-elemanlı ya da 1-elemanlıdır. Bu durumda  $n$  köşeli tam grafin Fibonacci sayısı  $n+1$  olur.  $\square$

**Örnek 4.3.**



Şekil 4.3.

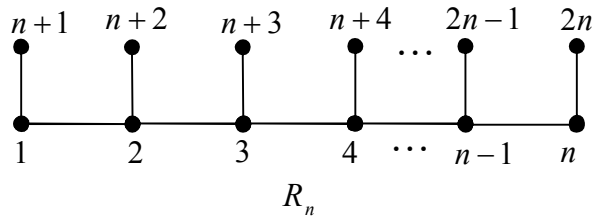
Yukarıda verilen  $K_1, K_2, K_3, K_4$  ve  $K_5$  tam grafların Fibonacci sayıları sırasıyla 2,3,4,5 ve 6'dır.

**Örnek 4.4.**  $n$  grafin köşe sayısını göstermek üzere  $f(\bar{K}_n) = 2^n$  dir.

Tablo 4.3.

1 ● $\bar{K}_1$	1      2 ●      ● $\bar{K}_2$	1 ● 2      3 ●      ● $\bar{K}_3$	1      2 ●      ● 3      4 ●      ● $\bar{K}_4$	1 ● 2      5 ●      ● 3      4 ●      ● $\bar{K}_5$
-----------------------	-------------------------------------	---	---	---

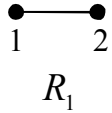
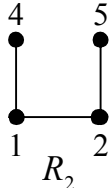
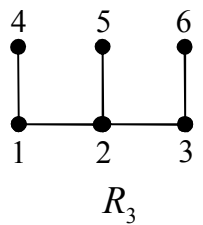
**Örnek 4.5.**  $R_n$ , aşağıda gösterildiği gibi  $2n$  köşeli bir graf olsun.



Şekil 4.4.

$R_n$  grafının Fibonacci sayısı iterasyon metodu yardımıyla hesaplanırsa, üç adım ilerleyerek elde edilen veriler Tablo 4.4. ile gösterildiği gibidir.

Tablo 4.4.

$n$	$R_n$ grafi	0-elemanlı bağımsız küme	1-elemanlı bağımsız kümeler	2-elemanlı bağımsız kümeler	3-elemanlı bağımsız kümeler	$f(R_n)$
1	 $R_1$	$\emptyset$	$\{1\}, \{2\}$	-	-	3
2	 $R_2$	$\emptyset$	$\{1\}, \{2\},$ $\{3\}, \{4\}$	$\{1,4\}, \{2,3\},$ $\{3,4\}$	-	8
3	 $R_3$	$\emptyset$	$\{1\}, \{2\},$ $\{3\}, \{4\},$ $\{5\}, \{6\}$	$\{1,5\}, \{1,6\},$ $\{1,3\}, \{2,4\},$ $\{2,6\}, \{3,4\},$ $\{3,5\}, \{4,5\},$ $\{4,6\}, \{5,6\},$	$\{4,2,6\},$ $\{4,3,5\},$ $\{1,5,3\},$ $\{1,5,6\}$	22

Tablodan kolayca görülebileceği gibi

$$f(R_3) = 2f(R_2) + 2f(R_1)$$

$$f(R_4) = 2f(R_3) + 2f(R_2)$$

dir. Buradan iterasyona devam edilirse

$$f(R_n) = 2f(R_{n-1}) + 2f(R_{n-2})$$

olur. Böylece

$$f(R_n) - 2f(R_{n-1}) - 2f(R_{n-2}) = 0$$

$$f(R_1) = 3, f(R_2) = 8$$

rekürans bağıntısına ulaşılır. Bu rekürans bağıntısı çözülerek

$$f(R_n) = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^n$$

elde edilir. (Binet benzeri formül)

**Tanım 4.3.**  $G = (V, E)$  bir graf ve  $v \in V(G)$  olmak üzere  $G$ 'nin  $v$  köşesini içermeyen bağımsız kümelerinin sayısı,  $f_{-v}(G)$  ile ve  $v$  köşesini içeren bağımsız kümelerinin sayısı da  $f_v(G)$  ile gösterilir.

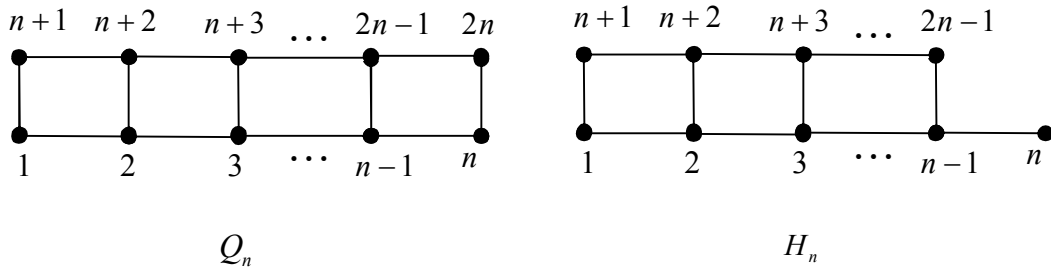
**Tanım 4.4.**  $G = (V, E)$  bir graf ve  $v$ ,  $G$ 'nin herhangi bir köşesi olmak üzere  $G$ 'nin tüm bağımsız kümelerinin sayısı (Fibonacci sayısı),  $v$  köşesini içermeyen bağımsız küme sayısı ile  $v$  köşesini içeren bağımsız küme sayısının toplamı kadardır. Yani;

$$f(G) = f_{-v}(G) + f_v(G)$$

$$= f(G-v) + f(G-N[v]) \quad (4.1)$$

dir. Bu formüle  $G$ 'nin  $v$  köşesi üzerinden indirgeme formülü denir.

**Örnek 4.6.** Aşağıda gösterilen  $2n$  köşeli  $Q_n$  grafını ve  $2n-1$  köşeli  $H_n$  grafını göz önüne alalım.



Şekil 4.5.

$Q_n$  grafının Fibonacci sayısı,  $2n$  köşesini içeren ve içermeyen bağımsız küme sayılarının toplamı şeklinde hesaplanabilir. O zaman (4.1) den

$$\begin{aligned} f(Q_n) &= f(Q_n - 2n) + f(Q_n - N[2n]) \\ &= f(H_n) + f(H_{n-1}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

olur. Benzer şekilde  $H_n$  grafının Fibonacci sayısı da  $n$  köşesini içeren ve içermeyen bağımsız küme sayılarının toplamı şeklinde hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} f(H_n) &= f(H_n - n) + f(H_n - N[n]) \\ &= f(Q_{n-1}) + f(H_{n-1}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

olur ki (4.2) ve (4.3) denklemlerinden

$$f(H_{n-1}) = f(Q_{n-2}) + f(H_{n-2}) \quad (4.4)$$

elde edilir. (4.3) ve (4.4) denklemleri toplanarak

$$\begin{aligned} f(H_{n-1}) + f(H_n) &= f(Q_{n-1}) + f(Q_{n-2}) + f(H_{n-1}) + f(H_{n-2}) \\ f(Q_n) &= 2f(Q_{n-1}) + f(Q_{n-2}) \end{aligned}$$

rekürans bağıntısı elde edilir.  $Q_n$  grafında  $n=1$  ve  $n=2$  için Fibonacci sayıları sırasıyla  $f(Q_1)=3$  ve  $f(Q_2)=7$ 'dir. Bu değerler göz önünde bulundurularak rekürans bağıntısı çözümlerse,

$$f(Q_n) = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{2}\right)^{n+1} + \left(1 - \sqrt{2}\right)^{n+1}$$

olarak elde edilir.

**Tanım 4.5.**  $G = (V, E)$  grafi ve  $M \subseteq E(G)$  alt kümesi verilsin. Eğer  $M$  kümesine ait herhangi iki kenar  $G$  grafında komşu olmuyorsa, yani ortak köşe ile bağlı değilse bu durumda  $M$  kümesine bağımsız kenar kümesi (*matching*) denir.

**Tanım 4.6.**  $G = (V, E)$  grafi ve  $e \in E(G)$  kenarı verilsin. Bu durumda  $G$  grafinin Fibonacci sayısı,

$$f(G) = f(G - e) - f(G - N(e))$$

şeklinde hesaplanabilir. Bu formüle  $G$  grafinin  $e$  kenarı üzerinden indirgeme formülü denir.

**Lemma 4.2.**  $G = (V, E)$  bağlantılı bir graf ve  $x \in V(G)$  olsun. O zaman

$$f(G) < 2f(G - x)$$

dir.

**İspat.**  $x$ ,  $G$ 'nin herhangi bir köşesi ve  $y$  de  $x$ 'in komşusu olsun.  $A$ ,  $x$ 'i içeren bağımsız kümelerin kümesini ve  $B$  de  $x$ 'i içermeyen bağımsız kümelerin kümesini göstermek üzere tüm bağımsız kümelerin kümesi,

$$S = A \cup B$$

şeklinde yazılabilir. Dikkat edilirse  $G - x$  alt grafinin bağımsız kümelerinin kümesi  $B$ 'ye eşittir.

Her  $A - \{x\} \in A$  kümesi ayrıca  $B$ 'nin de elemanı olduğundan  $|A| \leq |B|$ 'dir. Fakat  $\exists \{y\} \in B$ 'ye  $A - \{x\} \in A$  kümesinde hiçbir küme karşılık gelmez. Çünkü  $G$  bağlantılı olduğundan  $x$ 'in komşu olduğu en az bir  $y$  köşesi vardır ki bu köşe  $G$ 'nin  $x$ 'i içermeyen bağımsız kümelerinde yer alır. Yani,  $x$  ile  $y$  köşeleri komşu olduğundan asla aynı bağımsız kümenin elemanı olamazlar. Bu yüzden  $\{y\} \in B$  bağımsız kümesi  $A - \{x\}$  şeklinde elde edilemeyeceğinden  $|A| < |B|$  olup  $S = A \cup B$  olduğundan

$$f(G) = |A| + |B| < |B| + |B| = 2|B| = 2f(G - x)$$

elde edilir.  $\square$

**Tanım 4.7.**  $k$  negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere  $G$  grafının  $k$ -elemanlı bağımsız kümelerinin sayısı  $F_k(G)$  ile gösterilir. Bu durumda  $G$  grafının Fibonacci sayısının

$$f(G) = \sum_{k \geq 0} F_k(G)$$

olduğu açıktır.

**Tanım 4.8.**  $G = (V, E)$  bir graf ve  $v \in V$  olmak üzere  $G$  grafının  $k$ -elemanlı bağımsız küme sayısı için  $v$  köşesi üzerinden indirgeme formülü

$$F_k(G) = F_k(G - v) + F_{k-1}(G - N[v])$$

şeklindedir.

**Lemma 4.3.**  $P_n$ ,  $n$  köşeli bir patikayı göstermek üzere,

i)  $F_0(P_n) = 1$

ii)  $F_1(P_n) = n$

iii)  $F_k(P_{n+1}) = F_k(P_n) + F_{k-1}(P_{n-1}); \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor$

iv)  $F_k(P_n) = \binom{n-k+1}{k}; \quad 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$

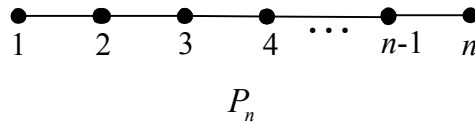
dir.

**İspat.**

i)  $P_n$  grafının 0-elemanlı bağımsız kümesi sadece  $\emptyset$  olduğundan

$F_0(P_n) = 1$  olur.

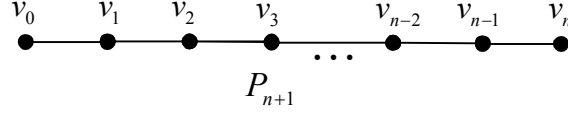
ii)



Şekil 4.6.

$P_n$  grafının 1-elemanlı bağımsız kümeleri  $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots, \{n\}$  olduğundan  $F_1(P_n) = n$  olur.

iii)



Şekil 4.7.

$P_{n+1}$  grafının  $k$ -elemanlı bağımsız kümelerinin sayısı,  $v_0$  köşesini içermeyen ve içeren  $k$ -elemanlı bağımsız küme sayılarının toplamı şeklinde hesaplanabilir. O halde

$$F_k(P_{n+1}) = F_k(P_n) + F_{k-1}(P_{n-1})$$

olur. Burada  $P_{n+1}$  grafının  $v_0$  köşesini içeren bağımsız küme sayısını hesaplariken,  $v_1 \sim v_0$  olduğundan  $v_1$  köşesi,  $v_0$  köşesini içeren bağımsız kümelerin elemanı olamaz. Bu yüzden bu köşelerin silinmesi ile  $P_{n-1}$  elde edilir. Ayrıca  $v_0$  köşesini içeren bağımsız kümelerin  $v_0$  hariç geriye  $k-1$  elemanı olacağından,  $v_0$ 'ı içeren bağımsız küme sayısı  $P_{n-1}$  grafının  $k-1$  elemanlı bağımsız küme sayısı  $F_{k-1}(P_{n-1})$  kadar olur. Diğer taraftan  $v_0$  köşesini içermeyen  $k$ -elemanlı bağımsız kümelerin sayısı  $P_{n+1} - v_0 \cong P_n$  grafının  $k$ -elemanlı Fibonacci sayısına eşittir.

iv) İspatı  $n$  köşe sayısı üzerinden tümevarımla yapalım.

$$n = 0 \text{ için } F_k(P_0) = \binom{0-k+1}{k} = 0 \text{ dir.}$$

$$n = m \text{ için } F_k(P_m) = \binom{m-k+1}{k}; \quad 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \text{ olsun.}$$

$$n = m+1 \text{ için } F_k(P_{m+1}) = \binom{m-k+2}{k} \text{ olduğunu göstermeliyiz. iii) den}$$

$$\begin{aligned}
F_k(P_{m+1}) &= F_k(P_m) + F_{k-1}(P_{m-1}) \\
&= \binom{m-k+1}{k} + \binom{m-1-(k-1)+1}{k-1} \\
&= \binom{m-k+1}{k} + \binom{m-k+1}{k-1} \\
&= \binom{m-k+2}{k}
\end{aligned}$$

elde edilir.  $\square$

**Sonuç 4.1.**  $P_n$  grafının Fibonacci sayısı için

$$f(P_n) = \sum F_k(P_n)$$

olduğundan

$$F_{n+1} = \sum_{k \geq 0} \binom{n-k+1}{k}$$

dir.

**Lemma 4.4.**  $C_n$ ,  $n$  köşeli bir döngü olmak üzere

- i)  $F_0(C_n) = 1$
- ii)  $F_1(C_n) = n$
- iii)  $F_k(C_n) = F_k(P_{n-1}) + F_{k-1}(P_{n-3}); \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad \text{ve} \quad n \geq 3$
- iv)  $F_k(C_n) = \frac{n}{k} \binom{n-k-1}{k-1}; \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad \text{ve} \quad n \geq 3$

dir.

**İspat.**

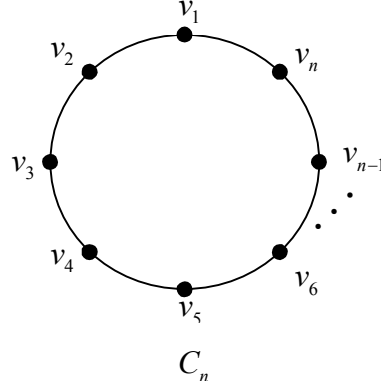
- i)  $C_n$  grafının 0-elemanlı bağımsız kümesi sadece  $\emptyset$  olduğundan

$F_0(C_n) = 1$  'dir.

ii)  $C_n$  grafinin 1-elemanlı bağımsız kümeleri  $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots, \{n\}$

olduğundan  $F_1(C_n) = n$  olur.

iii)  $C_n$  grafinin  $k$ -elemanlı bağımsız kümelerinin sayısını, sabit bir  $v_1$  köşesini içermeyen ve içeren bağımsız küme sayılarının toplamı şeklinde yazabiliriz.



Şekil 4.8.

$C_n$  grafinde  $v_1$  köşesi,  $v_2$  ve  $v_n$  köşeleri ile komşu olduğundan bu köşeler  $v_1$  köşesini içeren bağımsız kümelerin elemanı olamazlar. Bu yüzden  $C_n$  grafindan  $v_1, v_2$  ve  $v_3$  köşelerinin silinmesiyle  $P_{n-3}$  grafi elde edilir. Ayrıca  $v_1$  köşesini içeren bağımsız kümelerin  $v_1$  hariç geriye  $k-1$  elemanı olacağından,  $v_1$  köşesini içeren bağımsız küme sayısı  $P_{n-3}$  grafinin  $k-1$  elemanlı bağımsız küme sayısı  $F_{k-1}(P_{n-3})$  kadar olur. Diğer taraftan  $C_n$  grafinin  $v_1$  köşesini içermeyen  $k$ -elemanlı bağımsız kümelerinin sayısı  $C_n - v_1$  alt grafinin  $k$ -elemanlı bağımsız küme sayısı ile aynı olup  $C_n - v_1 \cong P_{n-1}$  olduğundan bu sayı  $F_k(P_{n-1})$  dir. Sonuç olarak

$$F_k(C_n) = F_k(P_{n-1}) + F_{k-1}(P_{n-3})$$

dir.

iv)

$$\begin{aligned}
F_k(C_n) &= F_k(P_{n-1}) + F_{k-1}(P_{n-3}) \\
&= \binom{n-1-k+1}{k} + \binom{n-3-(k-1)+1}{k-1} \\
&= \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \\
&= \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} + \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!} \\
&= \frac{(n-k)(n-k-1)!}{k(k-1)!(n-2k)!} + \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!} \\
&= \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!} \frac{n}{k} \\
&= \frac{n}{k} \binom{n-k-1}{k-1}
\end{aligned}$$

elde edilir.  $\square$ **Lemma 4.5.**  $n \geq 3$  için

$$1 + \sum_{k \geq 1} F_k(C_n) = L_n$$

dir.

**İspat.**

$$\begin{aligned}
f(C_n) &= \sum_{k \geq 0} F_k(C_n) \\
&= 1 + \sum_{k \geq 1} F_k(C_n)
\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca  $C_n$  grafinin Fibonacci sayısı,  $f(C_n) = L_n$  olduğundan bu iki eşitlik birleştirilirse istenilen elde edilmiş olur.  $\square$

#### 4.1. Bir veya İki Döngü İçeren Grafların Fibonacci Sayısı

**Tanım 4.1.1.** Sadece bir tane döngü içeren bağlantılı  $G$  grafına *unicyclic* denir.

**Tanım 4.1.2.**  $|V(G)| \geq 3$  şeklindeki bir  $G$  grafinin  $x$  köşesinin  $G \rightarrow ad_{H(x,y)}G$  dönüşümü ile sabit bir  $y \in V(H)$  köşesi ile tutturulmasıyla (yani  $x$  köşesine  $H$  grafinin eklenmesi ile) elde edilen grafa  $H$ -toplam grafi denir ve  $ad_H$  şeklinde gösterilir.

**Teorem 4.1.1.**  $T$ ,  $n$  köşeli bir orman olmak üzere

$$F_{n+1} \leq f(T) \leq 2^n$$

dir. ( $T \simeq P_n$  için  $f(T) = F_{n+1}$ ,  $T \simeq \overline{K_n}$  için  $f(T) = 2^n$  olur.)

**Tanım 4.1.3.**  $n$  köşeli  $L_{n,k}$  grafi,

$$ad_{P_{n-k+1}(x,y)}(C_k)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $y \in V(P_{n-k+1})$  ve  $x \in C_k$  dir.

**Tanım 4.1.4.**  $n \geq d + 1$  mertebeli  $P_{n,d}$  grafi,

$$P_{n,d} = ad_{K_{1,n-d}}(P_d)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $x \in V(P_d)$  ve  $y \in K_{1,n-d}$  'dir ( $y$  merkez köşe).

**Tanım 4.1.5.**  $n \geq 6$ ,  $k \geq 3$ ,  $l \geq 3$  ve  $k + l \leq n$  olmak üzere  $n$  mertebeli  $R_{n,k,l}$  grafi

$$R_{n,k,l} = ad_{C_l(x,y)}(L_{n-l+1,k})$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $x \in V(L_{n-l+1,k})$  ve  $y \in V(C_l)$  'dir.

**Tanım 4.1.6.**  $n \geq 5$  ve  $k \geq 3$  olmak üzere  $n$  mertebeli  $C_{n,k}$  grafi;

$$C_{n,k} = ad_{C_k(x,y)}(C_{n-k+1})$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $x \in V(C_{n-k+1})$  ve  $y \in V(C_k)$  'dir.

**Teorem 4.1.2.**  $T$ ,  $n$ . mertebeden bir ağaç ve  $\text{çap}(T) \geq d$  ise

$$f(T) \leq F_{d-1} + 2^{n-d} F_d$$

dir. ( $T \simeq P_{n,d}$  için  $f(T) = F_{d-1} + 2^{n-d} F_d$  olur.)

**Teorem 4.1.3.**  $G$ ,  $n \geq 3$  mertebeli grafi unicyclic ise  $f(G) \geq L_n$  'dir.  $G \simeq C_n$  veya  $G \simeq L_{n,3}$  durumunda  $f(G) = L_n$  olur.

**Teorem 4.1.4.**  $G$ ,  $n \geq 3$  mertebeli ve bir tane döngü içeren herhangi bir graf ise  $f(G) \geq L_n$  dir.

**İspat.** Eğer  $G$  grafi bağlantılı ise unicyclic olur. Bu durumda Teorem 4.1.3.'den  $f(G) \geq L_n$  olur ki istenendir.

$G$  grafi bir tane döngü içeren bağlantısız bir graf ise grafa kenarlar ekleyerek bağlantılı hale getirebiliriz. Bu durumda  $G$ , unicyclic olur ve  $G$ 'nin önceki duruma göre bağlantısız küme sayısı azalır. Teorem 4.1.3.'den  $f(G) \geq L_n$  olur ki istenendir.  $\square$

Şimdi iki döngü içeren grafların Fibonacci sayısını inceleyelim.

**Lemma 4.1.1.**  $k \geq 3$  olmak üzere

- i)  $f(R_{n,3,3}) = 5F_{n-3}$ ,  $n \geq 6$
- ii)  $f(R_{n,k,3}) = (F_{n-k-3} + F_{n-k-1})F_{k-2} + (F_{n-k-2} + F_{n-k})F_k$ ,  $n \geq k + 3$
- iii)  $f(R_{n,k,n-k}) = F_{n-k}F_{k-2} + (F_{n-k-2} + F_{n-k})F_k$ ,  $n \geq k + 3$
- iv)  $f(C_{n,k}) = F_{n-k-1}F_{k-2} + F_{n-k+1}F_k$ ,  $n \geq k + 2$ .

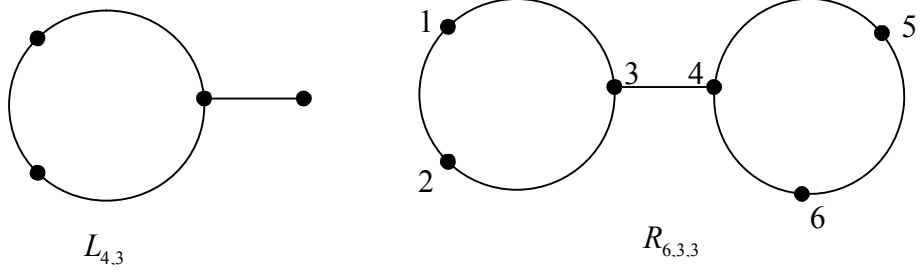
**İspat.**

i) Öncelikle  $n = 6$  için doğruluğunu gösterelim.  $R_{6,3,3}$  grafi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$R_{6,3,3} = ad_{C_3(x,y)}(L_{4,3})$$

$$L_{4,3} = ad_{P_2(x,y)}(C_3)$$

olur.



Şekil 4.9.

$R_{6,3,3}$  grafının tüm bağımsız kümelerinin kümesi

$$S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,5\}, \{3,6\}\}$$

olup, Fibonacci sayısı

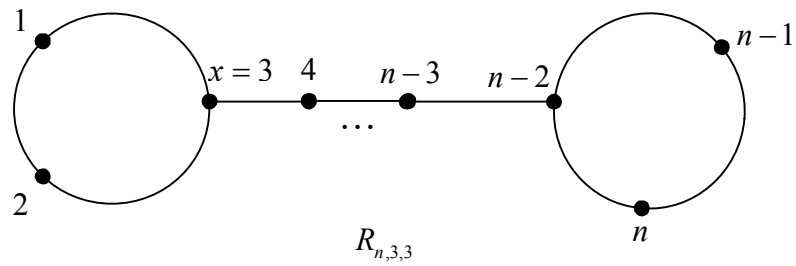
$$f(R_{6,3,3}) = |S| = 15 = 5F_3$$

olarak elde edilir.

$n \geq 7$  için verilen ifadenin doğruluğunu gösterelim.

$$R_{n,3,3} = ad_{C_3(x,y)}(L_{n-2,3}) \text{ ve } L_{n-2,3} = ad_{P_{n-4}(x,y)}(C_3)$$

olup

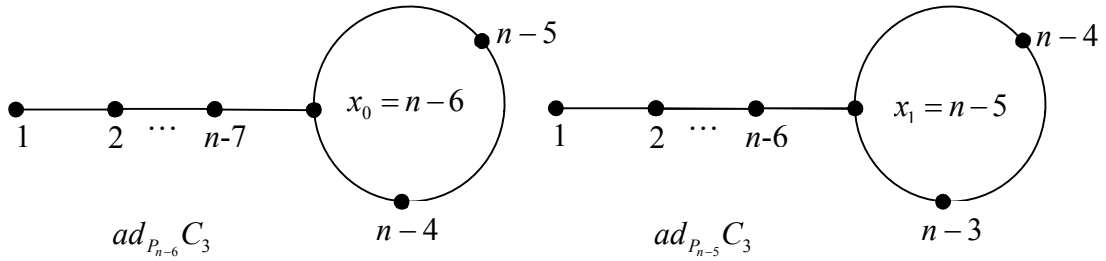


Şekil 4.10.

$R_{6,3,3}$  grafının  $x$  köşesi üzerinden indirgeme yaparak Fibonacci sayısını hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
f(R_{n,3,3}) &= f_x(R_{n,3,3}) + f_{-x}(R_{n,3,3}) \\
&= f(L_{n-4,3}) + f(P_2)f(L_{n-3,3}) \\
&= f(ad_{P_{n-6}}C_3) + 3f(ad_{P_{n-5}}C_3)
\end{aligned}$$

olup aşağıdaki gösterilen  $ad_{P_{n-6}}C_3$  grafinin  $x_0$  köşesinde  $ad_{P_{n-5}}C_3$  grafinin da  $x_1$  köşesinde indirgeme yapılırsa



Şekil 4.11.

$$\begin{aligned}
f(R_{n,3,3}) &= f_{x_0}(ad_{P_{n-6}}C_3) + f_{-x_0}(ad_{P_{n-6}}C_3) + 3(f_{x_1}(ad_{P_{n-5}}C_3) + f_{-x_1}(ad_{P_{n-5}}C_3)) \\
&= f(P_{n-8}) + 3f(P_{n-7}) + 3(f(P_{n-7}) + 3f(P_{n-6})) \\
&= F_{n-7} + 6F_{n-6} + 9F_{n-5} \\
&= 10F_{n-5} + 5F_{n-6} \\
&= 5F_{n-4} + 5F_{n-5} \\
&= 5F_{n-3}
\end{aligned}$$

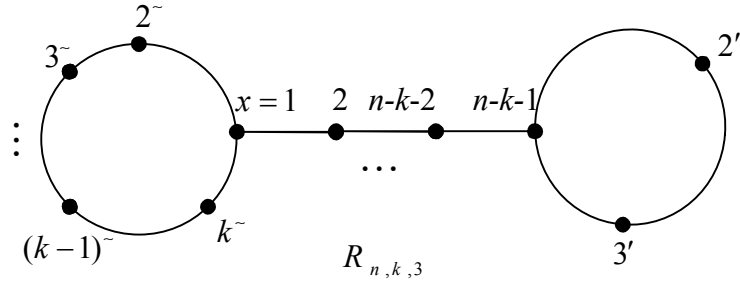
olur ki elde edilmek istenendir.

ii)  $R_{n,k,3}$  ve  $L_{n-2,k}$  grafları

$$R_{n,k,3} = ad_{C_3}(L_{n-2,k}),$$

$$L_{n-2,k} = ad_{P_{n-k-1}}(C_k)$$

şeklinde tanımlıdırlar.

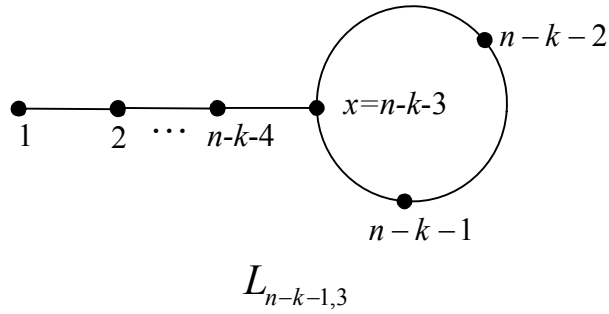


Şekil 4.12.

$R_{n,k,3}$  grafında  $x$  köşesi üzerinden indirgeme yapılarak Fibonacci sayısı hesaplanırsa

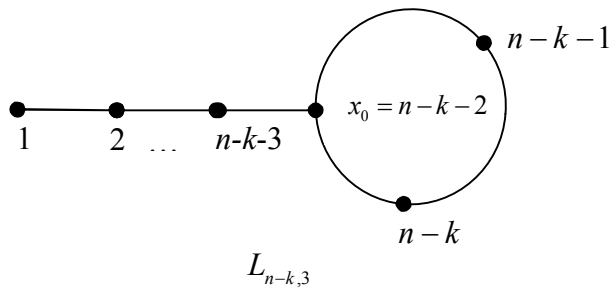
$$\begin{aligned} f(R_{n,k,3}) &= f_x(R_{n,k,3}) + f_{-x}(R_{n,k,3}) \\ &= f(P_{k-3})f(L_{n-k-1,3}) + f(P_{k-1})f(L_{n-k,3}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

olur. Burada  $L_{n-k-1,3}$  ve  $L_{n-k,3}$  grafları göz önüne alınarak Fibonacci sayıları



Şekil 4.13.

$$\begin{aligned} f(L_{n-k-1,3}) &= f_x(L_{n-k-1,3}) + f_{-x}(L_{n-k-1,3}) \\ &= f(P_{n-k-5}) + 3f(P_{n-k-4}) \end{aligned}$$



Şekil 4.14.

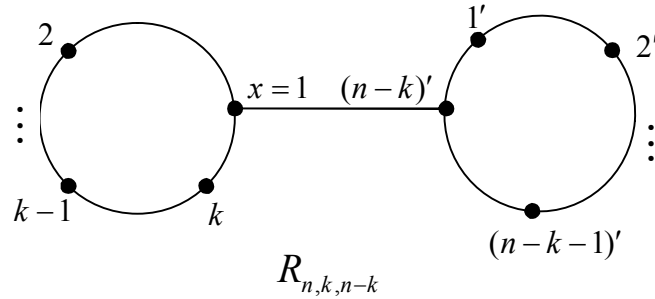
$$\begin{aligned} f(L_{n-k,3}) &= f_{x_0}(L_{n-k,3}) + f_{-x_0}(L_{n-k,3}) \\ &= f(P_{n-k-4}) + 3f(P_{n-k-3}) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu değerler (4.5) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} f(R_{n,k,3}) &= f(P_{k-3})(f(P_{n-k-5}) + 3f(P_{n-k-4})) + f(P_{k-1})(f(P_{n-k-4}) + 3f(P_{n-k-3})) \\ &= F_{k-2}(F_{n-k-4} + 3F_{n-k-3}) + F_k(F_{n-k-3} + 3F_{n-k-2}) \\ &= F_{k-2}(F_{n-k-2} + F_{n-k-3} + F_{n-k-3}) + F_k(F_{n-k-1} + F_{n-k-2} + F_{n-k-2}) \\ &= F_{k-2}(F_{n-k-1} + F_{n-k-3}) + F_k(F_{n-k} + F_{n-k-2}) \end{aligned}$$

olur.

iii)  $R_{n,k,n-k}$  grafının tanımından  $R_{n,k,n-k} = ad_{C_{n-k}}(L_{k+1,k})$  olur. Buradaki  $L_{k+1,k}$  grafi da  $L_{k+1,k} = ad_{P_2}(C_k)$  olarak tanımlıdır. Bu durumda  $R_{n,k,n-k}$  grafi aşağıda gösterildiği gibidir.  $R_{n,k,n-k}$  grafının Fibonacci sayısı  $x$  köşesi üzerinden indirgeme yaparak hesaplanırsa

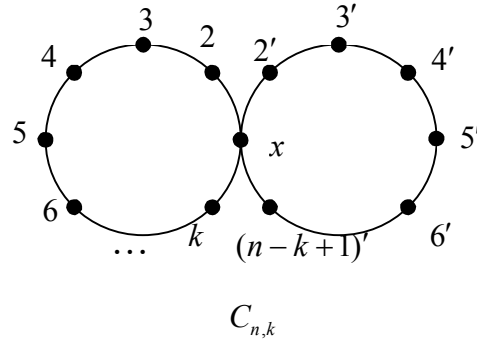


Şekil 4.15.

$$\begin{aligned} f(R_{n,k,n-k}) &= f_x(R_{n,k,n-k}) + f_{-x}(R_{n,k,n-k}) \\ &= f(P_{k-3})f(P_{n-k-1}) + f(P_{k-1})f(C_{n-k}) \\ &= F_{k-2}F_{n-k} + F_kL_{n-k} \\ &= F_{k-2}F_{n-k} + (F_{n-k} + F_{n-k-2})F_k \end{aligned}$$

olur.

iv)  $C_{n,k}$  grafının tanımından  $C_{n,k} = ad_{C_k}(C_{n-k+1})$  olup aşağıdaki graf verilebilir.



Şekil 4.16.

$C_{n,k}$  grafında  $x$  köşesi üzerinden indirgeme yapılarak Fibonacci sayısı hesaplanırsa

$$\begin{aligned} f(C_{n,k}) &= f_x(C_{n,k}) + f_{-x}(C_{n,k}) \\ &= f(P_{k-3})f(P_{n-k-2}) + f(P_{k-1})f(P_{n-k}) \\ &= F_{k-2}F_{n-k-1} + F_kF_{n-k+1} \end{aligned}$$

olur.  $\square$

**Sonuç 4.1.1.**  $k \geq 3$ ,  $n \geq k + 3$  için  $f(R_{n,k,3}) \leq f(R_{n,k,n-k}) < f(C_{n,k})$ 'dir.

**İspat.**  $n > k + 3$  için

$$\begin{aligned} F_{n-k-3} &< F_{n-k-2} \\ F_{n-k-1} + F_{n-k-3} &< F_{n-k-1} + F_{n-k-2} \\ F_{n-k-1} + F_{n-k-3} &< F_{n-k} \\ (F_{n-k-1} + F_{n-k-3})F_{k-2} &< F_{n-k}F_{k-2} \\ (F_{n-k-1} + F_{n-k-3}) + (F_{n-k-2} + F_{n-k})F_k &< F_{n-k}F_{k-2} + (F_{n-k-2} + F_{n-k})F_k \\ f(R_{n,k,3}) &< f(R_{n,k,n-k}) \end{aligned}$$

olur.  $n = k + 3$  için de eşitlik gerçekleşir. Öte yandan

$$\begin{aligned}
f(C_{n,k}) &= F_{n-k-1}F_{k-2} + F_{n-k+1}F_k \\
&= (F_{n-k} - F_{n-k-2})F_{k-2} + (F_{n-k} + F_{n-k-1})F_k \\
&= F_{n-k}F_{k-2} + (F_{n-k} + F_{n-k-2})F_k - F_{n-k-2}F_{k-2} + F_{n-k-3}F_k \\
&= f(R_{n,k,n-k}) - (F_{n-k-3} + F_{n-k-4})(F_k - F_{k-1}) + F_{n-k-3}F_k \\
&= f(R_{n,k,n-k}) + F_{n-k-3}F_{k-1} - F_{n-k-4}(F_{k-1} + F_{k-2}) + F_{n-k-4}F_{k-1} \\
&= f(R_{n,k,n-k}) + F_{n-k-3}F_{k-1} - F_{n-k-4}F_{k-2}
\end{aligned}$$

olup

$$f(C_{n,k}) - f(R_{n,k,n-k}) = F_{n-k-3}F_{k-1} - F_{n-k-4}F_{k-2} > 0$$

olur. Tüm bu eşitsizlikler birleştirilirse

$$f(R_{n,k,3}) \leq f(R_{n,k,n-k}) < f(C_{n,k})$$

olur ki istenendir.  $\square$

**Lemma 4.1.2.**  $n \geq 6$ ,  $k \geq 3$ ,  $l \geq 3$  ve  $k + l \leq n$  olmak üzere

$$f(R_{n,k,l}) \geq f(R_{n,3,3}) = 5F_{n-3}$$

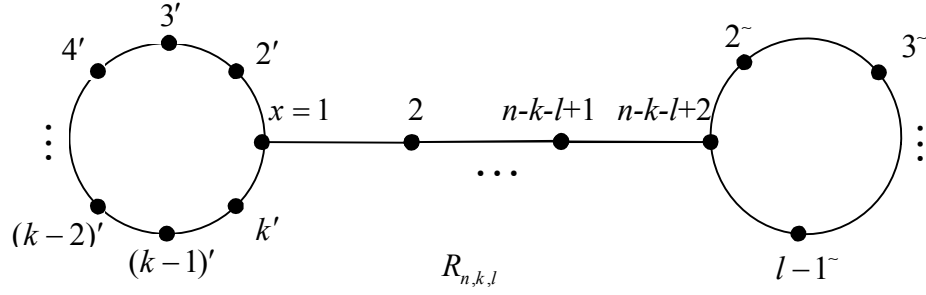
dir. ( $k = l = 3$  durumunda eşitlik gerçekleşir.)

**İspat.**

Öncelikle  $n \geq k + l + 1$  durumunu göz önüne alalım.  $R_{n,k,l}$  grafi,

$$R_{n,k,l} = ad_{C_l(x,y)}(L_{n-l+1,k})$$

şeklinde elde edilir.

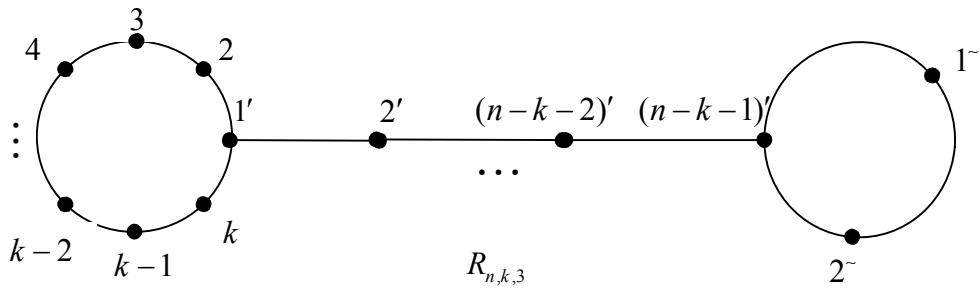


Şekil 4.17.

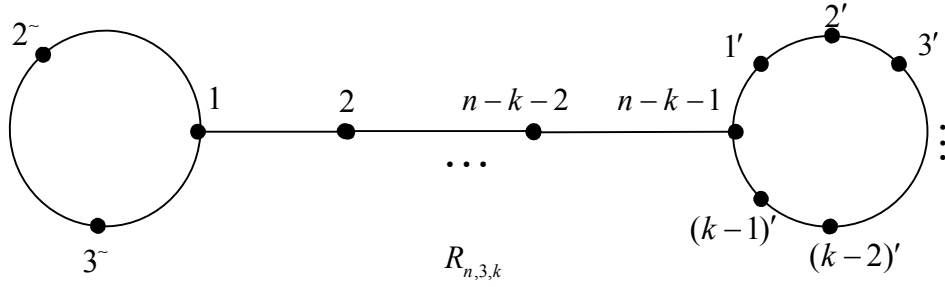
olup Fibonacci sayısı

$$\begin{aligned} f(R_{n,k,l}) &= f_x(R_{n,k,l}) + f_{-x}(R_{n,k,l}) \\ &= f(P_{k-3})f(L_{n-k-1,l}) + f(P_{k-1})f(L_{n-k,l}) \end{aligned}$$

olur.  $L_{n-k-1,l}$  ve  $L_{n-k,l}$  grafları unicyclic graflardır. Bu durumda Teorem 4.1.3.'den  $f(L_{n-k-1,l})$ , en küçük değerini  $L_{n-k-1,l} \simeq C_{n-k-1}$  veya  $L_{n-k-1,l} \simeq L_{n-k-1,3}$  olması durumunda alır. Bunun için  $l = n - k - 1$  veya  $l = 3$  olmalıdır. Benzer şekilde  $f(L_{n-k,l})$  en küçük değeri  $L_{n-k,l} \simeq C_{n-k}$  veya  $L_{n-k,l} \simeq L_{n-k,3}$  durumunda elde edilir. Bunun için  $l = n - k$  veya  $l = 3$  olmalıdır. Sonuç olarak  $f(R_{n,k,l})$  değerinin en küçük olması için  $l = 3$  olmalıdır. Yani,  $f(R_{n,k,3})$  minimum değer olur. Ayrıca  $l = 3$  için  $R_{n,k,3} \simeq R_{n,3,k}$  dir. Aşağıdaki şekillerden bu izomorfizm kolaylıkla görülebilir.



Şekil 4.18.



Şekil 4.19.

Benzer düşünce ile  $f(R_{n,3,k})$  değeri de  $k = 3$  için minimum olur. Lemma 4.1.1.

i) den  $f(R_{n,3,3}) \geq 5F_{n-3}$  idi. Bu durumda

$$f(R_{n,3,k}) \geq 5F_{n-3}$$

olur. Ayrıca  $R_{n,k,3} \approx R_{n,3,k}$  olduğundan

$$f(R_{n,k,3}) = f(R_{n,3,k}) \geq 5F_{n-3}$$

olur.  $f(R_{n,k,3})$  değeri  $f(R_{n,k,l})$  için minimum değer olduğundan

$$f(R_{n,k,l}) \geq f(R_{n,k,3}) = f(R_{n,3,k}) = 5F_{n-3}$$

olur. Şimdi de  $n = k + l$  durumunu göz önüne alalım.  $k = l = 3$  ise Lemma 4.1.1. i) den

$$f(R_{n,k,l}) = f(R_{n,3,3}) = 5F_{n-3}$$

olur.

$k > 3$  ve  $l > 3$  ise  $n \geq k + 4$  olup Sonuç 4.1.1. den

$$f(R_{n,k,l}) = f(R_{n,k,n-k}) > f(R_{n,k,3}) \geq f(R_{n,3,3}) = 5F_{n-3}$$

olur.  $\square$

**Teorem 4.1.5.**  $G$ ,  $n$ . mertebeden ( $n \geq 6$ ) iki ayrı döngü içeren keyfi bir graf olsun. Bu takdirde

$$f(G) \geq 5F_{n-3}$$

dir. ( $G \simeq R_{n,3,3}$  için  $f(G) = 5F_{n-3}$  olur.)

**İspat.** İspatı  $G$  grafının  $R_{n,k,l}$  grafına izomorf olup olmaması durumuna göre inceleyelim.

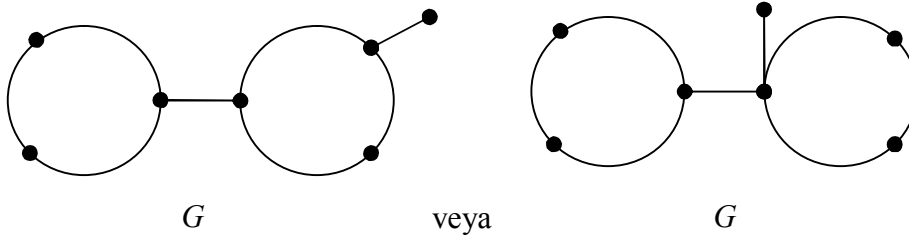
**1. Durum :**  $G \simeq R_{n,k,l}$  ise Lemma 4.1.2.'den

$$f(G) = f(R_{n,k,l}) \geq 5F_{n-3}$$

olur.

**2. Durum:**  $G \not\simeq R_{n,k,l}$  için ispatı  $n$  köşe sayısı üzerinden tümevarımla yapalım.

$G \not\simeq R_{n,k,l}$  olduğundan  $n \geq 7$  dir.  $n = 7$  mertebeli ve ayrık iki döngü içeren  $G$  grafi ( $G \not\simeq R_{n,k,l}$ ) aşağıdaki graflardan birine izomorf olmak zorundadır.



Şekil 4.20.

$G$ 'nin her iki durumu için de gerekli incelemeler yapılarak  $f(G) \geq 5F_4$  olduğu görülür.

$m$  mertebeli ayrık iki döngü içeren keyfi bir  $H$  grafi için  $f(H) = 5F_{m-3}$  olsun.

$G \not\simeq R_{n,k,l}$  olduğundan  $der_G(x) = 1$  olacak şekilde  $x \in V(G)$  köşesi vardır. Bu durumda

$$f(G) = f_x(G) + f_{-x}(G)$$

dir.

$S$ ,  $G$  grafından elde edilen herhangi bir bağımsız küme ve  $S^*$  da  $G-x$  grafından elde edilen herhangi bir bağımsız küme olmak üzere  $x \notin S$  ise  $x \in S^*$  olacak şekilde en az bir  $S^*$  bağımsız kümesi vardır.

$G-x$  grafi  $n-1$  mertebeli olduğundan hipotez gereği

$$f(G-x) = f_{-x}(G) \geq 5F_{(n-1)-3} = 5F_{n-4}$$

olur.

$S'$ ,  $G-N[x]$  grafından elde edilen herhangi bir bağımsız küme olmak üzere  $x \in S$  ise  $S = S' \cup \{x\}$  olacak şekilde en az bir  $S'$  bağımsız kümesi vardır.

$x$ , yaprak olduğundan  $|N[x]| = 2$  olur. Bu takdirde  $G-N[x]$  grafi  $n-2$  mertebeli ve en az bir döngü içeren graftır. Bu durumda  $G-N[x]$  grafının içerdiği döngü sayısına göre  $G$  grafının Fibonacci sayısını inceleyelim.

**1. Durum:** Eğer  $G-N[x]$  grafi iki döngü içeriyorsa, hipotezden

$$f(G-N[x]) = f_x(G) \geq 5F_{(n-2)-3} = 5F_{n-5}$$

olur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} f(G) &= f_x(G) + f_{-x}(G) \\ &\geq 5F_{n-5} + 5F_{n-4} = 5F_{n-3} \end{aligned}$$

olur ki istenendir.

**2. Durum:** Eğer  $G-N[x]$  grafi tek döngü içeriyorsa Teorem 4.1.4'ten

$$f_x(G) \geq L_{n-2}$$

olur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
f(G) &= f_x(G) + f_{-x}(G) \\
&\geq L_{n-2} + 5F_{n-4} \\
&\geq F_{n-2} + F_{n-4} + 5F_{n-4} \\
&\geq 5F_{n-3}
\end{aligned}$$

olur ki istenendir.  $\square$

**Lemma 4.1.3.**  $n \geq 5$ ,  $3 \leq k \leq n-2$  olmak üzere

$$f(C_{n,k}) \geq f(C_{n,3}) = F_{n-4} + 3F_{n-2} \geq 5F_{n-3}$$

dir. Ayrıca

$$\text{i) } f(C_{n,k}) = f(C_{n,3}) \text{ olması için gerek ve yeter şart } k=3 \text{ veya } k=n-2$$

olmasıdır.

$$\text{ii) } f(C_{n,3}) = 5F_{n-3} \text{ olması için gerek ve yeter şart } n=5 \text{ olmasıdır.}$$

**Teorem 4.1.6.**  $G$ ,  $n$ . mertebeden ( $n \geq 5$ ) iki döngü içeren keyfi bir graf olsun. Eğer  $G$ 'deki döngüler bir ortak köşe içeriyorsa bu durumda

$$f(G) \geq 3F_{n-2} + F_{n-4}$$

dir. ( $G \simeq C_{n,3}$  için  $f(G) = 3F_{n-2} + F_{n-4}$  olur.

**İspat.**

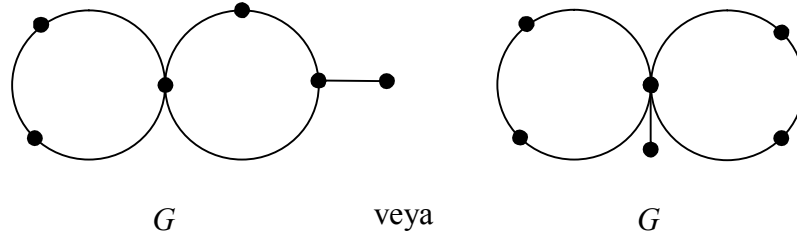
$$\text{i) } G \simeq C_{n,k} \text{ ise Lemma 4.1.3.'den}$$

$$f(C_{n,k}) \geq f(C_{n,3}) = 3F_{n-2} + F_{n-4}$$

olup ispat tamamlanır.

**ii)**  $G \not\simeq C_{n,k}$  için ispatı  $n$  üzerinden tümevarımla yapalım.  $G \not\simeq C_{n,k}$  ise bu takdirde  $n \geq 6$  dır.

$n = 6$  için  $G$  grafi aşağıdaki graflardan birine izomorf olmak zorundadır.



Şekil 4.21.

Her iki grafda da gerekli incelemeler yapılarak

$$f(G) \geq 3F_4 + F_2$$

olduğu görülür.

$m$ . mertebeden ve tek bir ortak köşesi olacak şekilde iki döngü içeren herhangi bir  $H$  grafi için

$$f(H) \geq 3F_{m-2} + F_{m-4}$$

olsun.

$G \not\cong C_{n,k}$  olduğundan  $\text{der}_G(x) = 1$  olacak şekilde  $x \in V(G)$  vardır. Bu durumda

$$f(G) = f_{-x}(G) + f_x(G)$$

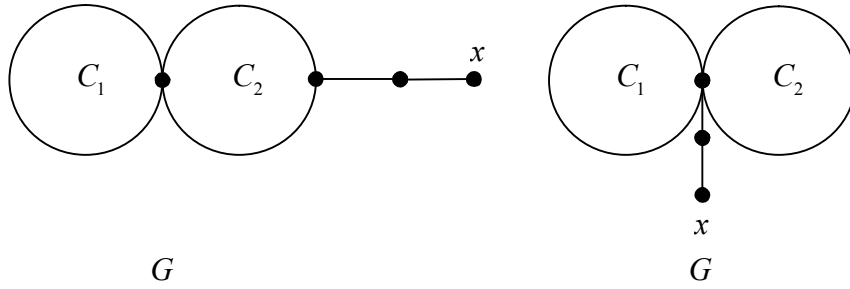
dir.  $S$ ,  $G$  grafindan elde edilen herhangi bir bağımsız küme ve  $S^*$  da  $n-1$  mertebeli ve ortak bir köşesi olacak şekilde iki döngü içeren graf olan  $G-x$  grafindan elde edilen herhangi bir bağımsız küme olmak üzere  $x \notin S$  ise  $x \in S^*$  olacak şekilde en az bir  $S^*$  bağımsız kümesi vardır.

$G-x$  grafi  $n-1$  mertebeli olduğundan hipotezden

$$f_{-x}(G) \geq 3F_{(n-1)-2} + F_{(n-1)-4} = 3F_{n-3} + F_{n-5}$$

olur.  $S'$ ,  $G - N[x]$  grafından elde edilen herhangi bir bağımsız küme olmak üzere  $x \in S$  ise  $S = S' \cup \{x\}$  olacak şekilde en az bir  $S'$  bağımsız kümesi vardır. Diğer taraftan  $x$ , izole köşe olduğundan  $|N[x]| = 2$  dir. Burada  $G - N[x]$  grafi için 3 farklı durum söz konusudur.

**1. Durum:** Eğer  $G - N[x]$  grafi iki elemanter döngü içeriyorsa, yani  $G$  grafi



Şekil 4.22.

şeklinde ise o zaman  $G - N[x]$  grafi  $n - 2$  mertebeli olduğundan hipotezden

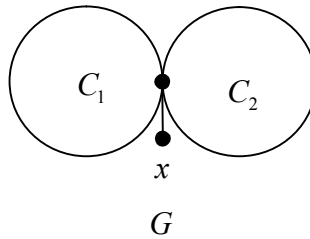
$$f_x(G) \geq 3F_{(n-2)-2} + F_{(n-2)-4} = 3F_{n-4} + F_{n-6}$$

olup,

$$\begin{aligned} f(G) &= f_x(G) + f_{-x}(G) \\ &\geq 3F_{n-4} + F_{n-6} + 3F_{n-3} + F_{n-5} \\ &\geq 3F_{n-2} + F_{n-4} \end{aligned}$$

dir.

**2. Durum:** Eğer  $G - N[x]$  grafi hiç elemanter döngü içermiyorsa, yani  $G$  grafi



Şekil 4.23.

şeklinde ise o zaman  $G - N[x]$ ,  $n - 2$  köşeli bir ağaç olur. Teorem 4.1.1.'den

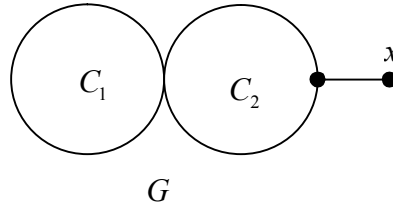
$$f_x(G) \geq F_{(n-2)+1} = F_{n-1}$$

olup

$$\begin{aligned} f(G) &= f_x(G) + f_{-x}(G) \\ &\geq F_{n-1} + 3F_{n-3} + F_{n-5} > 3F_{n-2} + F_{n-4} \end{aligned}$$

olur.

**3. Durum:** Eğer  $G - N[x]$  grafi sadece bir tane döngü içeriyorsa, yani  $G$  grafi



Şekil 4.24.

şeklinde ise Teorem 4.1.4.'ten

$$f_x(G) \geq L_{n-2}$$

olup

$$\begin{aligned} f(G) &= f_x(G) + f_{-x}(G) \\ &\geq L_{n-2} + 3F_{n-3} + F_{n-5} > 3F_{n-2} + F_{n-4} \end{aligned}$$

dir.  $\square$

**Tanım 4.1.7.**  $K_{1,n-1}$  yıldızına ayrık iki 3-döngü içerecek şekilde iki kenar eklenmesi ile elde edilen  $n \geq 5$  mertebeli grafi,  $H_{n,3,3}$  şeklinde gösterilir.

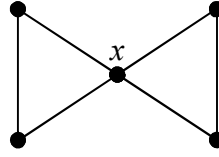
**Teorem 4.1.7.**  $G$ ,  $n \geq 5$  mertebeli ve iki döngü içeren bağlantılı herhangi bir graf olsun.

Bu takdirde

$$f(G) \leq 1 + 9 \cdot 2^{n-5}$$

dir. ( $G \simeq H_{n,3,3}$  için  $f(G) = 1 + 9 \cdot 2^{n-5}$  dir.)

**İspat.**  $n = 5$  için doğruluğunu gösterelim.



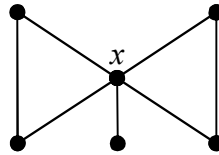
$H_{5,3,3}$

Şekil 4.25.

grafını göz önüne alalım. O zaman  $x$  köşesi üzerinden indirgeme yapılırsa

$$\begin{aligned} f(H_{5,3,3}) &= f_x(H_{5,3,3}) + f_{-x}(H_{5,3,3}) \\ &= 1 + f(P_2)f(P_2) \\ &= 1 + F_3F_3 \\ &= 1 + 3 \cdot 3 = 10 \leq 1 + 9 \cdot 2^{5-5} = 10 \end{aligned}$$

olur.  $n = 6$  için doğruluğunu gösterelim.



$H_{6,3,3}$

Şekil 4.26.

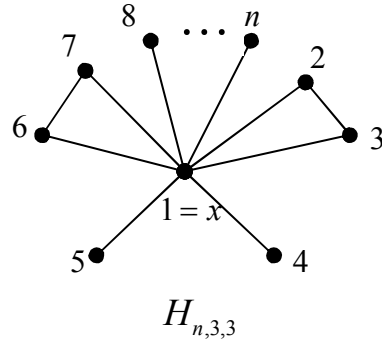
$$\begin{aligned} f(H_{6,3,3}) &= f_x(H_{6,3,3}) + f_{-x}(H_{6,3,3}) \\ &= 1 + 2f(P_2)f(P_2) \\ &= 1 + 2F_3F_3 \\ &= 1 + 2 \cdot 3 \cdot 3 = 19 \leq 1 + 9 \cdot 2^{6-5} = 19 \end{aligned}$$

olur.

$n \geq 7$  için üç durum söz konusudur.

**1. Durum:**  $G \simeq H_{n,3,3}$  ise

$x$ ,  $H_{n,3,3}$  grafında maksimum dereceli köşe olsun. Bu takdirde



Şekil 4.27.

$$\begin{aligned}
 f(H_{n,3,3}) &= f_x(H_{n,3,3}) + f_{-x}(H_{n,3,3}) \\
 &= 1 + f(P_2)f(P_2)f(K_{n-5}) \\
 &= 1 + 9 \cdot 2^{n-5}
 \end{aligned}$$

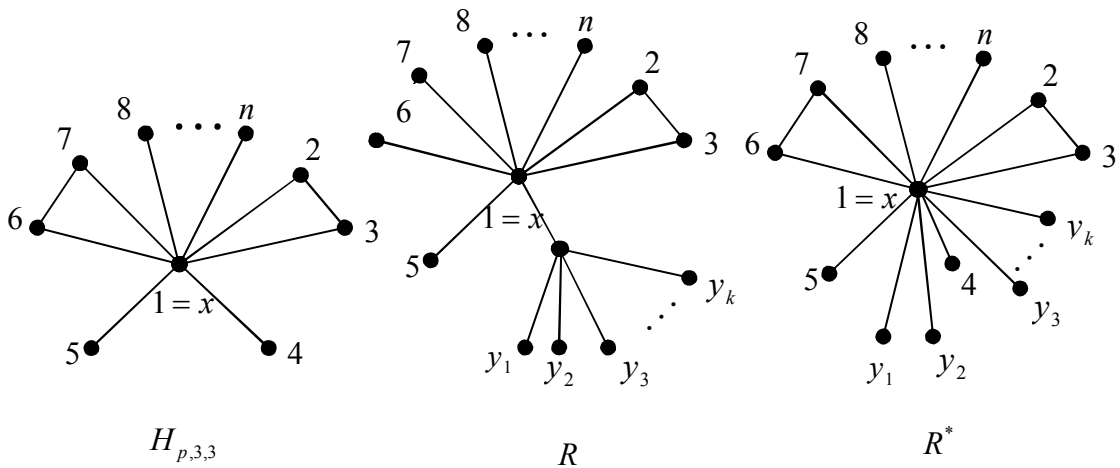
olur ki istenendir.

**2. Durum:**  $G \simeq R$  ise

$R$ ,  $6 \leq p \leq n$  olmak üzere  $H_{p,3,3}$  grafının en az bir yaprağına en az bir yaprak eklenmesi ile elde edilen bir graf olsun.  $y \in V(H_{p,3,3})$  yaprağına eklenen  $R$  grafındaki yapraklar  $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$  ( $k \geq 1$ ) şeklinde gösterilsin. Ayrıca

$$V(R^*) = V(R) \text{ ve } E(R^*) = [E(R) \setminus \{yy_1, yy_2, \dots, yy_k\} \cup \{xy_1, xy_2, \dots, xy_k\}]$$

şeklinde elde edilen graf  $R^*$  ile gösterilsin.



Şekil 4.28.

$R$  ve  $R^*$  grafları için

$$f(R^*) > f(R)$$

dir. Gerçekten  $R_x$ ,  $R - xy$  grafinin  $x$ 'i içeren bileşeni olmak üzere

$$\begin{aligned} f(R) &= f_x(R) + f_{-x}(R) \\ &= f_x(R_x)2^k + f_{-x}(R_x)(1 + 2^k) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(R^*) &= f_x(R^*) + f_{-x}(R^*) \\ &= f_x(R_x)2^k + f_{-x}(R_x)2^{k+1} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} f(R^*) - f(R) &= f_x(R_x)2^k + f_{-x}(R_x)2^{k+1} - [f_x(R_x)2^k + f_{-x}(R_x)(1 + 2^k)] \\ &= (1 - 2^k)f_x(R_x) + (2^k - 1)f_{-x}(R_x) \\ &= (2^k - 1)(f_{-x}(R_x) - f_x(R_x)) \end{aligned}$$

olup  $f_{-x}(R) > f_x(R)$  olduğundan  $f(R^*) > f(R)$  dir. Benzer şekilde  $p$  ile iteratif olarak

$$R^* \simeq H_{n,3,3}$$

elde edilir. Bu durumda

$$f(R^*) = f(H_{n,3,3}) > f(R)$$

olup 1. durumdaki sonuç kullanılarak

$$1 + 9 \cdot 2^{n-5} = f(H_{n,3,3}) > f(R)$$

olur.

**3. Durum:**  $G \neq H_{n,3,3}$  ve  $G \neq R$  ise  $G$  grafında  $\text{çap}(T) \geq 5$  olacak şekilde bir kapsayıcı ağaç vardır. Teorem 4.1.2.'den

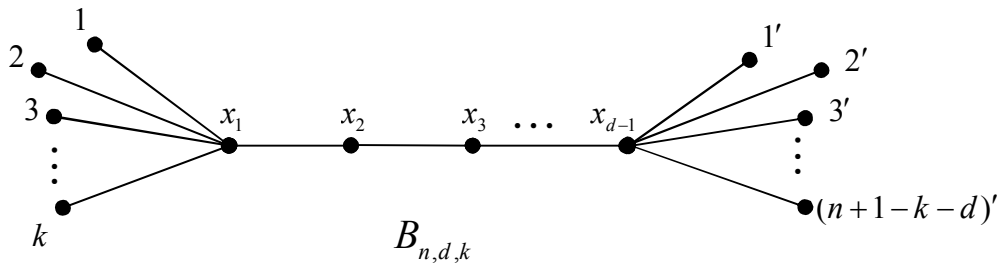
$$f(G) < f(T) \leq F_{5-1} + 2^{n-5} F_5 = F_4 + 2^{n-5} F_5 = 5 + 8 \cdot 2^{n-5} \leq 9 \cdot 2^{n-5} + 1$$

olur ki istenendir.  $\square$

## 4.2. Ağaçlarda Fibonacci Sayısı

Bu kısımda bazı özel ağaçların Fibonacci sayıları ile ilişkileri verilmiştir. Öncelikle Broom grafları tanımlanarak, bu graflar üzerindeki incelemeler sonucu ağaçların Fibonacci sayıları için bir üst sınır elde edilmiştir. Ardından  $P_{n,v_k,G}$  ve  $T_{n_1,n_2,n_3}$  ağaçları tanımlanarak, Fibonacci sayılarına göre bu ağaçlar sıralanmıştır.

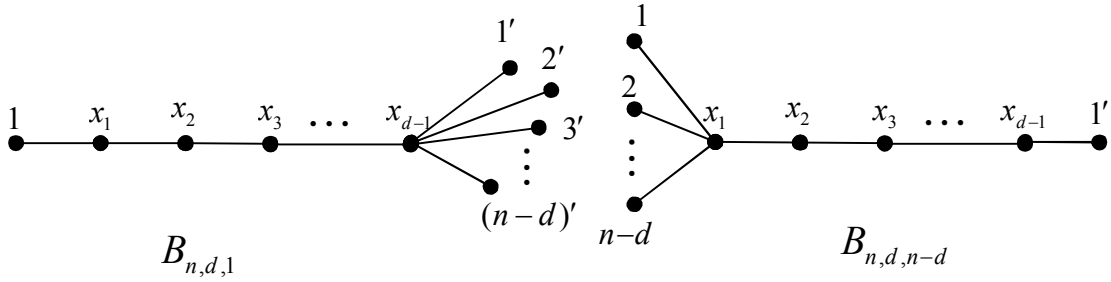
**Tanım 4.2.1.**  $d \geq 3$ ,  $n \geq d+1$  ve  $1 \leq k \leq n-d$  olmak üzere  $(n,d,k)$  tamsayı üçlüsü verilsin.  $P_{d-1} : x_1 \dots x_{d-1}$  patikasında  $x_1$  köşesine  $k$  tane ve  $x_{d-1}$  köşesine de  $n+1-k-d$  tane yaprak eklenmesi ile elde edilen grafa *süpürge (broom) graf* denir ve  $B_{n,d,k}$  şeklinde gösterilir.



Şekil 4.29.

$B_{n,d,k}$  süpürge grafi  $n$ . mertebeden  $d$  çaplı bir ağaçtır.  $x_1$  ve  $x_{d-1}$  köşeleri bu ağacın iki kökünü oluşturur. Ayrıca  $x_1$  ve  $x_{d-1}$  köklerine sırasıyla  $k$  ve  $n+1-k-d$  tane yaprak bağlıdır.

$B_{n,d,1}$  ve  $B_{n,d,n-d}$  süpürge graflarına *basit süpürge* denir. Aşağıdaki şekilden de anlaşılacağı gibi bu graflar izomorf graflardır.



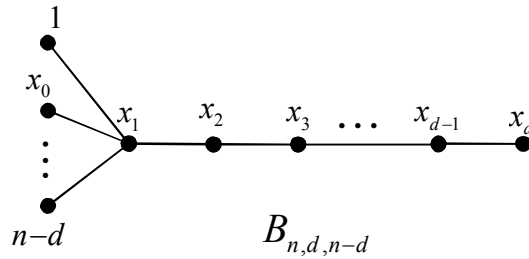
Şekil 4.30.

**Lemma 4.2.1.**  $d \geq 3$  ve  $n \geq d + 1$  olmak üzere  $(n, d)$  ikilisi verilsin. Bu durumda

$$f(B_{n,d,1}) = f(B_{n,d,n-d}) = F_d + 2^{n-d} F_{d+1}$$

dir.

**İspat.**  $B_{n,d,1}$  ve  $B_{n,d,n-d}$  grafları izomorf graflardır. Dolayısıyla Fibonacci sayıları eşit olacağından sadece birini göz önüne alalım.



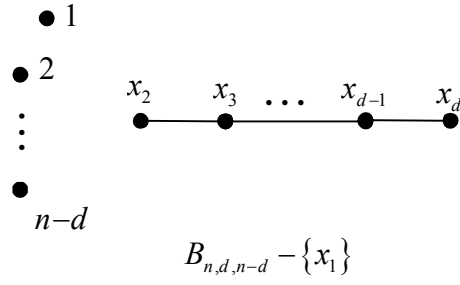
Şekil 4.31.

$P_{d+1} : x_0 x_1 \dots x_d$  patikası  $B_{n,d,n-d}$  grafinin çapını belirleyen patikayı gösterebiliriz.  $B_{n,d,n-d}$  grafinin Fibonacci sayısını, grafin  $x_1$  köşesi üzerinden indirgeme formülü ile hesaplayabiliriz. Yani

$$f(B_{n,d,n-d}) = f_{x_1}(B_{n,d,n-d}) + f_{-x_1}(B_{n,d,n-d})$$

olur. Aşağıdaki graftan da kolayca görülebileceği gibi  $f_{-x_1}(B_{n,d,n-d}) = f(B_{n,d,n-d} - \{x_1\})$

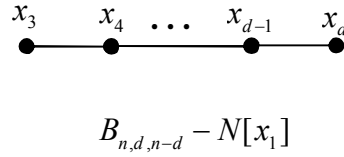
olup



Şekil 4.32.

$$\begin{aligned} f(B_{n,d,n-d} - \{x_1\}) &= f(\overline{K_{n-d}}) f(P_{d-1}) \\ &= 2^{n-d} F_d \end{aligned}$$

olur. Öte yandan  $f_{x_1}(B_{n,d,n-d}) = f(B_{n,d,n-d} - N[x_1])$  olduğundan ve yine aşağıdaki graftan da kolayca anlaşılabilceği gibi  $B_{n,d,n-d} - N[x_1] \cong P_{d-2}$  olduğundan



Şekil 4.33.

$$f_{x_1}(B_{n,d,n-d}) = f(B_{n,d,n-d} - N[x_1]) = f(P_{d-2}) = F_{d-1}$$

olur. Sonuç olarak  $B_{n,d,n-d}$  grafinin Fibonacci sayısı

$$\begin{aligned} f(B_{n,d,n-d}) &= f_{x_1}(B_{n,d,n-d}) + f_{-x_1}(B_{n,d,n-d}) \\ &= f(B_{n,d,n-d} - N[x_1]) + f(B_{n,d,n-d} - \{x_1\}) \\ &= F_{d-1} + 2^{n-d} F_d \end{aligned}$$

dir.  $\square$

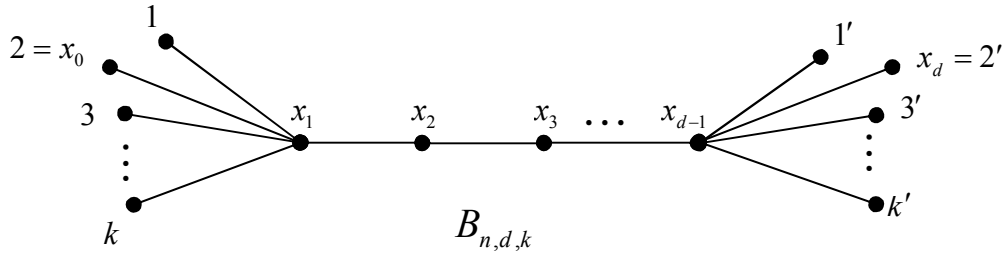
**Teorem 4.2.1.**  $d \geq 3$ ,  $n \geq d+1$  ve  $1 \leq k \leq n-d$  olmak üzere  $(n, d, k)$  üçlüsü verilsin.

O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır:

- i)  $f(B_{n,d,k}) = F_{d-3} + (2^k + 2^{k'})F_{d-2} + 2^{n-d+1}F_{d-1}$  ( $k' = n - k - d + 1$ )
- ii)  $f(B_{n,d,k}) \leq F_d + 2^{n-d}F_{d+1}$ .

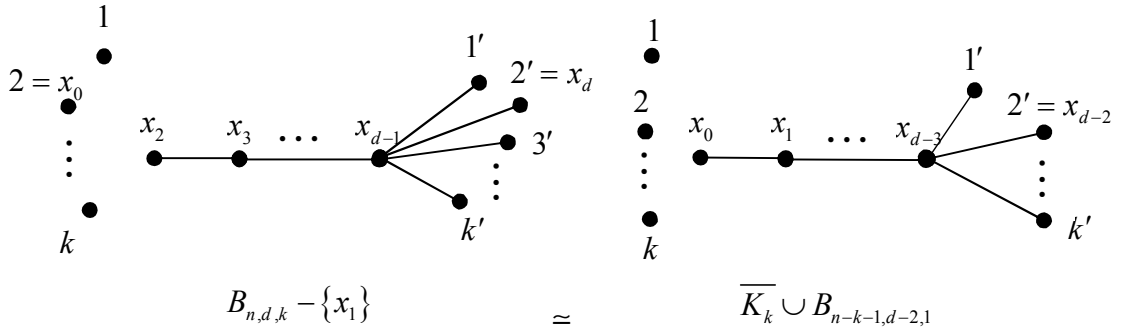
### İspat.

i) Öncelikle  $B_{n,d,k}$  süpürge grafindeki bağımsız kümeleri sayalım.  $P_{d+1} : x_0x_1 \dots x_d$  patikası,  $B_{n,d,k}$  grafinin kapsadığı maksimum uzunluklu patika olsun.  $x_1$ , grafin  $k$  tane yaprağının bağlı olduğu kök ve  $x_{d-1}$  de  $k' = n - d + 1 - k$  tane yaprağının bağlı olduğu diğer kök olsun.



Şekil 4.34.

$B_{n,d,k}$  grafinin Fibonacci sayısını  $x_1$  köşesi üzerinden indirgeme formülü ile hesaplayalım.



Şekil 4.35.

şekilden de görüldüğü gibi

$$B_{n,d,k} - \{x_1\} \cong \overline{K}_k \cup B_{n-k-1,d-2,1}$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
f(B_{n,d,k} - \{x_1\}) &= f(\overline{K_k} \cup B_{n-k-1,d-2,1}) \\
&= f(\overline{K_k})f(B_{n-k-1,d-2,1}) \\
&= 2^k (F_{d-2} + 2^{n-k-d+1} F_{d-1})
\end{aligned}$$

dir. Öte yandan

$$B_{n,d,k} - N[x_1] \simeq B_{n-k-2,d-3,1}$$

olup

$$\begin{aligned}
f(B_{n,d,k} - N[x_1]) &= f(B_{n-k-2,d-3,1}) \\
&= F_{d-3} + 2^{n-k-d+1} F_{d-2}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Sonuç olarak  $B_{n,d,k}$  grafının Fibonacci sayısı

$$\begin{aligned}
f(B_{n,d,k}) &= f_{-x_1}(B_{n,d,k}) + f_{x_1}(B_{n,d,k}) \\
&= f(B_{n,d,k} - \{x_1\}) + f(B_{n,d,k} - N[x_1]) \\
&= 2^k (F_{d-2} + 2^{n-k-d+1} F_{d-1}) + F_{d-3} + 2^{n-k-d+1} F_{d-2} \\
&= 2^k (F_{d-2} + 2^{k'} F_{d-1}) + F_{d-3} + 2^{k'} F_{d-2} \\
&= F_{d-3} + F_{d-2} (2^k + 2^{k'}) + 2^{n-d+1} F_{d-1}
\end{aligned}$$

olur ki istenendir.

**ii)**  $B_{n,d,k}$  grafının Fibonacci sayısı formülünde (yani i) de  $k = 1$  alınarak

$$\begin{aligned}
f(B_{n,d,1}) &= F_{d-3} + (2 + 2^{n-d}) F_{d-2} + 2^{n-d+1} F_{d-1} \\
&= F_{d-1} + F_{d-2} + 2^{n-d} (F_d + F_{d-1}) \\
&= F_d + 2^{n-d} F_{d+1}
\end{aligned}$$

olur.  $k = n - d$  için de benzer şekilde hesaplama yapılır.

$1 < k < n - d$  için

$$f(B_{n,d,k}) < F_d + 2^{n-d} F_{d+1}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için

$$2^k + 2^{n-d+1-k} < 2 + 2^{n-d}$$

olduğunu göstermeliyiz.  $\alpha = n - d$  olsun.

$$k < n - d$$

$$k < \alpha$$

$$2^k < 2^\alpha$$

$$2^{k+1} < 2^{\alpha+1}$$

$$(2^{k-1} - 1)2^{k+1} < (2^{k-1} - 1)2^{\alpha+1}$$

$$2^{2k} + 2^{\alpha+1} < 2^{\alpha+k} + 2^{k+1}$$

$$2^k + 2^{n-d+1-k} < 2^{n-d} + 2$$

olup

$$F_{d-3} + (2^k + 2^{n-d+1-k})F_{d-2} + 2^{n-d+1}F_{d-1} < F_{d-3} + (2 + 2^{n-d})F_{d-2} + 2^{n-d+1}F_{d-1}$$

$$f(B_{n,d,k}) < F_d + 2^{n-d} F_{d+1}$$

olur.  $\square$

**Sonuç 4.2.1.**  $1 \leq d \leq 3$  olmak üzere  $d$  çaplı  $n$ . mertebeden bir ağaç için

$$f(T) \leq F_d + 2^{n-d} F_{d+1}$$

dir. Ayrıca

i)  $d = 1$  için  $T \simeq K_2$  olup  $f(T) = F_d + 2^{n-d} F_{d+1}$  olur.

ii)  $d = 2$  için  $T \simeq K_{1,n-1}$  olup

$$f(T) = F_d + 2^{n-d} F_{d+1}$$

olur.

iii)  $d = 3$  için  $T \approx B_{n,3,k}$  olup  $1 \leq k \leq n - 3$  olmak üzere

$$f(T) \leq F_d + 2^{n-d} F_{d+1}$$

olur. ( $k \in \{1, n - 3\}$  için eşitlik elde edilir.)

**Sonuç 4.2.2.**  $d \geq 3$  ve  $n \geq d + 1$  için

$$f(B_{n,d,1}) < f(B_{n,d-1,1})$$

dir.

**İspat.**

$$1 < 2^{n-d}$$

$$F_{d-2} < 2^{n-d} F_{d-2}$$

$$F_d - F_{d-1} < 2^{n-d} (2F_d - F_{d+1})$$

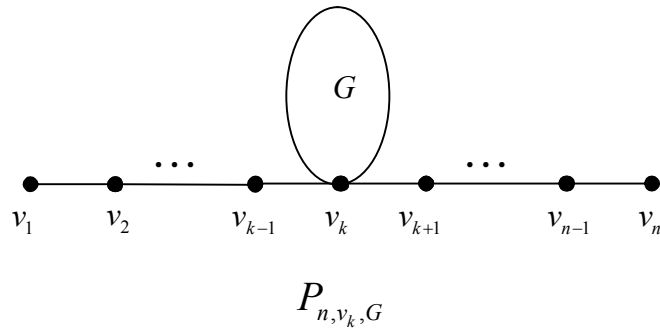
$$F_d + 2^{n-d} F_{d+1} < F_{d-1} + 2^{n-(d-1)} F_d$$

$$f(B_{n,d,1}) < f(B_{n,d-1,1})$$

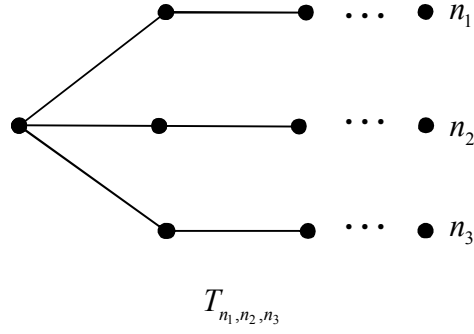
olur ki istenendir.  $\square$

**Tanım 4.2.2.**  $G$  herhangi bir ağaç ve  $v_1, v_2, \dots, v_n$  bir patika olmak üzere  $P_{n,v_k,G}$  ve

$T_{n_1, n_2, n_3}$  ağaçları aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi tanımlanır.



**Şekil 4.36.**



Şekil 4.37.

**Tanım 4.2.3.**  $G$  ve  $H$  grafları verilsin. Eğer  $f(G) \geq f(H)$  ise  $G \geq H$  şeklinde sıralanırlar.  $f(G) > f(H)$  oluyorsa  $G > H$  şeklinde sıralanır.

**Teorem 4.2.2.**  $n = 4m + i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  ve  $m \geq 2$  olmak üzere

$$P_{n, v_2, G} > P_{n, v_4, G} > \dots > P_{n, v_{2m+2p}, G} > P_{n, v_{2m+1}, G} > \dots > P_{n, v_3, G} > P_{n, v_1, G}$$

dir. Ayrıca  $i = 1$  veya  $i = 2$  ise  $p = 0$ ,  $i = 3$  veya  $i = 4$  ise  $p = 1$  olur.

**İspat.**  $P_{n, v_k, G}$  grafinin  $v_k$  köşesi üzerinden indirgeme yaparak Fibonacci sayısını hesaplayalım.  $f(G - v_k) = A$  ve  $f(G - N[v_k]) = B$  olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} f(P_{n, v_k, G}) &= f_{v_k}(P_{n, v_k, G}) + f_{-v_k}(P_{n, v_k, G}) \\ &= f(P_{v_{k-2}})f(G - N[v_k])f(P_{v_{n-k-1}}) + f(P_{v_{k-1}})f(G - v_k)f(P_{v_{n-k}}) \\ &= BF_k F_{n-k+1} + AF_{k+1} F_{n-k+2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

olur. Ayrıca

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{5}$$

ve

$$F_a F_b = \frac{L_{a+b} - (-1)^a L_{b-a}}{5}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
 F_a F_b &= \frac{\alpha^{a+b} + \beta^{a+b} - (\alpha\beta)^a \beta^{b-a} - (\alpha\beta)^a \alpha^{b-a}}{5} \\
 &= \frac{\alpha^{a+b} + \beta^{a+b} - (-1)^a (\alpha^{b-a} + \beta^{b-a})}{5} \\
 &= \frac{L_{a+b} - (-1)^a L_{b-a}}{5}
 \end{aligned}$$

olup bu eşitlik kullanılarak (4.6) denklemi yeniden düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
 f(P_{n,v_k,G}) &= AF_{k+1}F_{n-k+2} + BF_k F_{n-k+1} \\
 &= A \left[ \frac{L_{n+3} - (-1)^{k+1} L_{n-2k+1}}{5} \right] + B \left[ \frac{L_{n+1} - (-1)^k L_{n-2k+1}}{5} \right] \quad (4.7) \\
 &= \frac{1}{5} (AL_{n+3} + BL_{n+1} + (-1)^k L_{n-2k+1} (A - B))
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$G - N[v_k]$  grafının her bir bağımsız kümesi aynı zamanda  $G - v_k$  grafının da bağımsız kümesi olduğundan  $B < A$  dır. Ayrıca  $P_{n,v_k,G} \simeq P_{n,v_{n-k+1},G}$  dir. (4.7) eşitliği kullanılarak  $i \in \{1, 2\}$  için

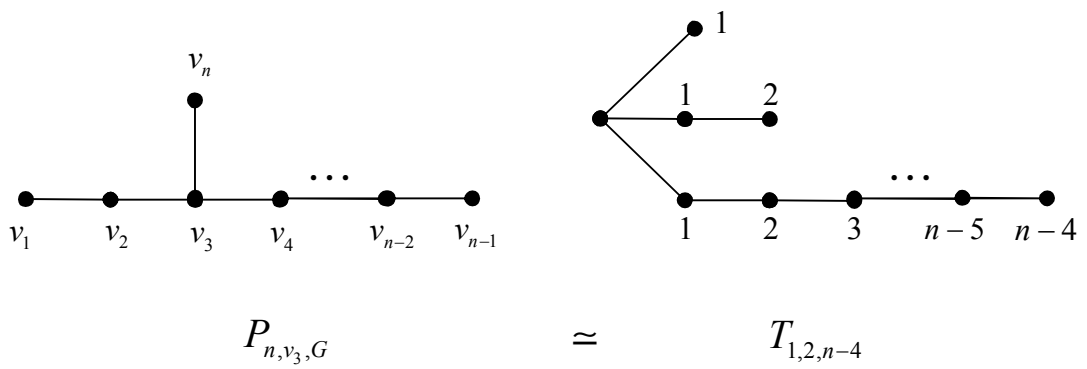
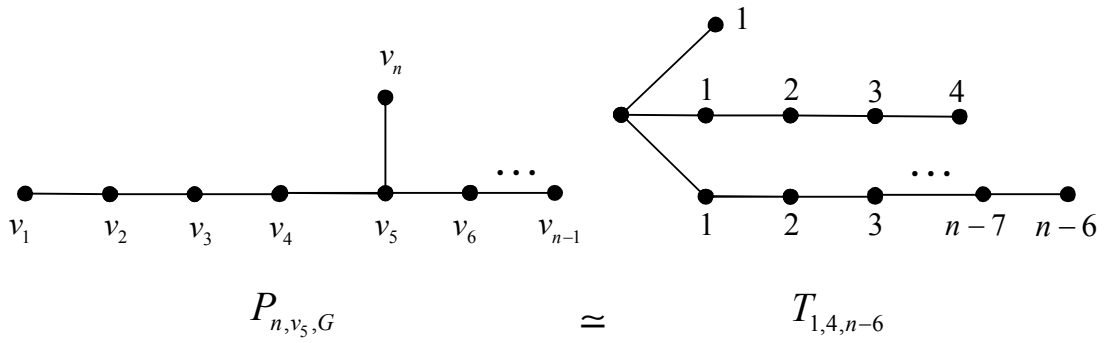
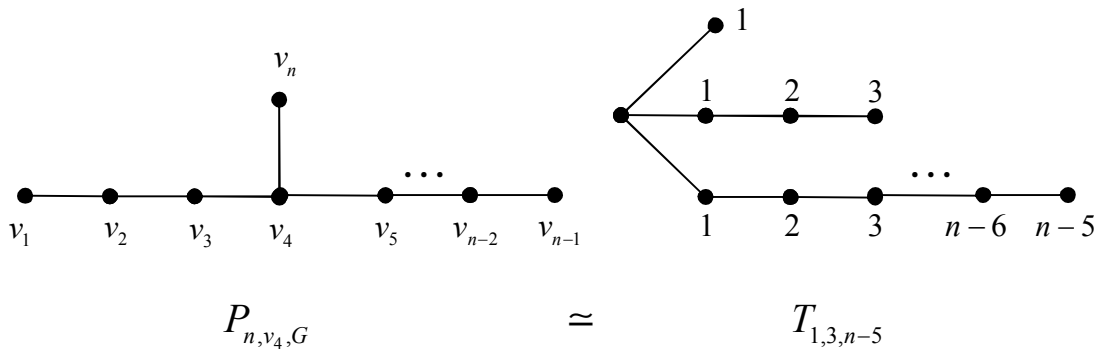
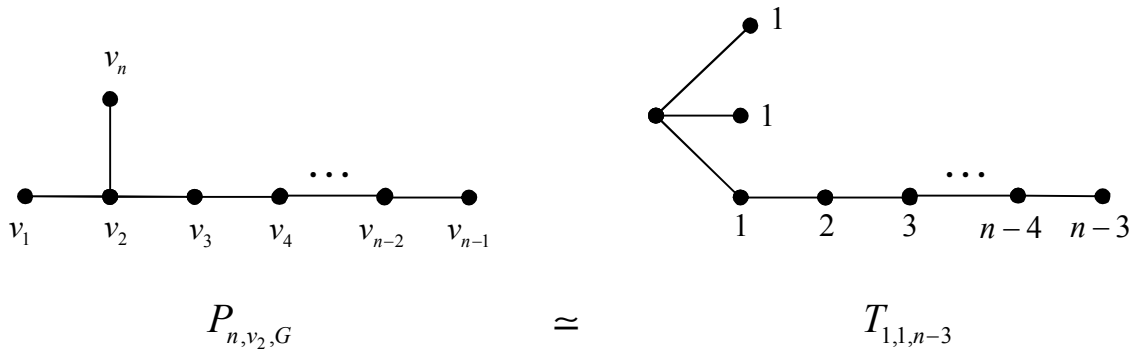
$$P_{n,v_2,G} > P_{n,v_4,G} > \dots > P_{n,v_{2m},G} > P_{n,v_{2m+1},G} > \dots > P_{n,v_3,G} > P_{n,v_1,G}$$

$i \in \{3, 4\}$  için

$$P_{n,v_2,G} > P_{n,v_4,G} > \dots > P_{n,v_{2m+2},G} > P_{n,v_{2m+1},G} > \dots > P_{n,v_3,G} > P_{n,v_1,G}$$

olur.  $\square$

**Sonuç 4.2.3.**  $G \simeq P_2$  alınarak aşağıdaki izomorf graflar elde edilir.



Şekil 4.38.

grafları göz önüne alınarak ve Teorem 4.2.2. kullanılarak

$$T_{1,1,n-3} \succ T_{1,3,n-5} \succ \dots \succ T_{1,4,n-6} \succ T_{1,2,n-4}$$

elde edilir. Benzer şekilde  $G \approx P_3$  alınıp, Teorem 4.2.2.'den

$$T_{2,1,n-4} \succ T_{2,3,n-6} \succ \dots \succ T_{2,4,n-7} \succ T_{2,2,n-5}$$

elde edilir. Ayrıca  $T_{1,2,n-4} \approx T_{2,1,n-4}$  olduğundan yukarıdaki sıralamalar birleştirilirse

$$T_{1,1,n-3} \succ T_{1,3,n-5} \succ \dots \succ T_{1,4,n-6} \succ T_{1,2,n-4} \succ T_{2,3,n-6} \succ \dots \succ T_{2,4,n-7} \succ T_{2,2,n-5}$$

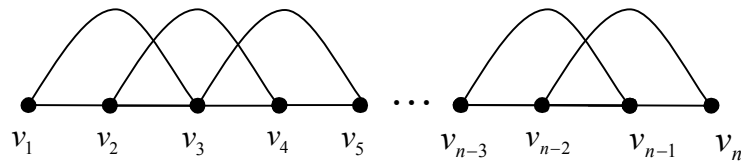
olarak elde edilir.

### 4.3. Kuvvet Grafları

**Tanım 4.3.1.**  $G$ ,  $n$  köşeli herhangi bir graf olmak üzere  $G$ 'de aralarında maksimum  $k$  uzaklık bulunan köşelerin bir kenar ile bağlanması sonucu elde edilen grafa  $G$  grafının  $k$ . kuvvet grafi denir ve  $G(n, k)$  veya  $G_n^k$  şeklinde gösterilir.

$G$  grafi ile  $G(n, k)$  kuvvet grafi aynı köşe kümesine sahiptirler.

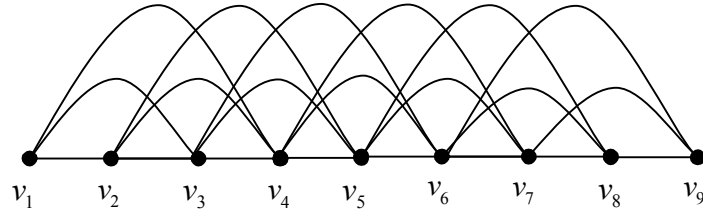
**Örnek 4.3.1.**  $P_n$  patika grafının 2. kuvvet grafi aşağıda gösterildiği gibidir.



$$P_n^2 = P(n, 2)$$

Şekil 4.39.

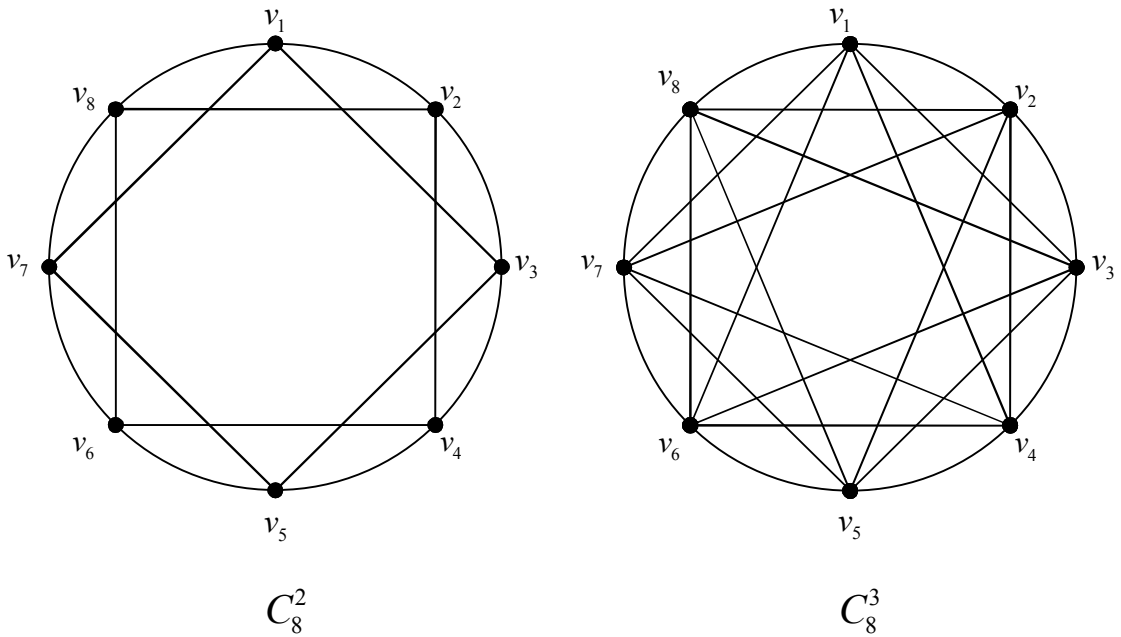
**Örnek 4.3.2.**  $P_n$  patika grafının küp grafi  $G = P_9^3 = P(9, 3)$  aşağıdaki gibidir.



$$P_9^3 = P(9,3)$$

Şekil 4.40.

**Örnek 4.3.3.**  $C_8$  ve  $C_{13}$  döngülerinin kare grafları aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.41.

**Sonuç 4.3.1.** Herhangi bir  $G$  grafi için

- i)  $G(n,0)$ , kenar içermeyen  $n$  köşeli bir graftır.
- ii)  $G(n,1) = G$  dir.
- iii) Eğer  $G$  bağlantılı bir graf ise  $r \geq n-1$  için  $G(n,r) = K_n$  olur.

**Sonuç 4.3.2.**  $G(n,0)$  grafının  $k$ -elemanlı bağımsız kümelerinin sayısı ve Fibonacci sayısı;

$$F_k(G(n,0)) = \binom{n}{k}, \quad f(G(n,0)) = 2^n$$

dir.

Şimdi  $P(n, r)$  kuvvet grafinin Fibonacci sayısını hesaplayalım.

$r = 1$  için  $P(n, 1) = P_n$  grafinin Fibonacci sayıları

$$F_k(P(n, 1)) = \binom{n+1-k}{k}$$

$$f(P(n, 1)) = F_{n+1}$$

dir.  $r \geq 2$  için  $F_k(P(n, r))$  ve  $f(P(n, r))$  değerleri aşağıdaki lemma ile verilmiştir.

**Lemma 4.3.1.**  $n \geq 1$ ,  $r \geq 0$  ve  $0 \leq k \leq n$  için

$$F_k(P(n, r)) = F_k(P(n-1, r)) + F_{k-1}(P(n-1-r, r))$$

dir.

**İspat.**  $G = P(n, r)$  grafinde  $v_0$  uç köşe olmak üzere

$$G - v_0 = P(n-1, r)$$

$$G - N[v_0] = P(n-r-1, r)$$

olduğu görülür. Bu uç köşe üzerinden indirgeme yapıldığında

$$F_k(G) = F_k(G - v_0) + F_{k-1}(G - N[v_0])$$

$$F_k(P(n, r)) = F_k(P(n-1, r)) + F_{k-1}(P(n-1-r, r))$$

elde edilir.  $\square$

**Teorem 4.3.1.**  $r \geq 0$  ve  $0 \leq k \leq n$  olmak üzere

$$F_k(P(n, r)) = \binom{n+r-rk}{k}$$

dir.

**İspat.** Öncelikle  $n \leq r+1$  durumunu göz önüne alalım. Bu durumda  $P(n, r) = K_n$  olur.

Bu yüzden

$$F_0(P(n, r)) = F_0(K_n) = 1 = \binom{n+r-r \cdot 0}{0}$$

$$F_1(P(n, r)) = F_1(K_n) = n = \binom{n+r-r \cdot 1}{1}$$

$$F_k(P(n, r)) = F_k(K_n) = 0 = \binom{1}{k} \geq \binom{n-r}{k} \geq \binom{n+r-r \cdot k}{k} \quad (k \geq 2)$$

olur ki teoremin ifadesi doğrudur.

$n \geq r+2$  için ispatı  $n$  köşe sayısı üzerinden tümevarımla yapalım.  $n$ 'den küçük tüm değerler için teoremin ifadesi doğru olsun. Bu durumda

$$F_k(P(n, r)) = \binom{n+r-r \cdot k}{k}$$

olduğunu gösterelim. Lemma 4.3.1.'den

$$\begin{aligned} F_k(P(n, r)) &= F_k(P(n-1, r)) + F_{k-1}(P(n-1-r, r)) \\ &= \binom{(n-1)+r-rk}{k} + \binom{(n-r-1)+r-r(k-1)}{k-1} \\ &= \binom{n-1+r-rk}{k} + \binom{n-1+r-rk}{k-1} \\ &= \binom{n+r-rk}{k} \end{aligned}$$

olur.  $\square$

**Teorem 4.3.2.**  $n \geq r+2$  için

$$f(P(n, r)) = f(P(n-1, r)) + f(P(n-r-1, r))$$

dir.

**İspat.** Lemma 4.3.1. ve

$$f(P(n,r)) = \sum_k F_k(P(n,r))$$

den istenilen sonuç elde edilir.

Şimdi de  $C(n,r)$  kuvvet grafinin Fibonacci sayısını hesaplayalım.

$r = 1$  için  $C(n,1) = C_n$  grafinin tüm  $k$ -elemanlı bağımsız kümelerinin sayısı ve Fibonacci sayısı

$$F_k(C_n) = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ \frac{n}{k} \binom{n-k-1}{k-1} & , 1 \leq k \leq \frac{n}{2} \end{cases}$$

$$f(C_n) = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{n}{k} \binom{n-k-1}{k-1} = L_n$$

dir.  $\square$

$r = 2$  için  $C(n,2)$  grafinin tüm  $k$ -elemanlı bağımsız kümelerinin sayısı aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

**Teorem 4.3.3.**  $n \geq 6$  ve  $0 \leq k \leq n$  için

$$\text{i) } F_k(C(n,2)) = F_k(P(n-2,2)) + 2F_{k-1}(P(n-5,2))$$

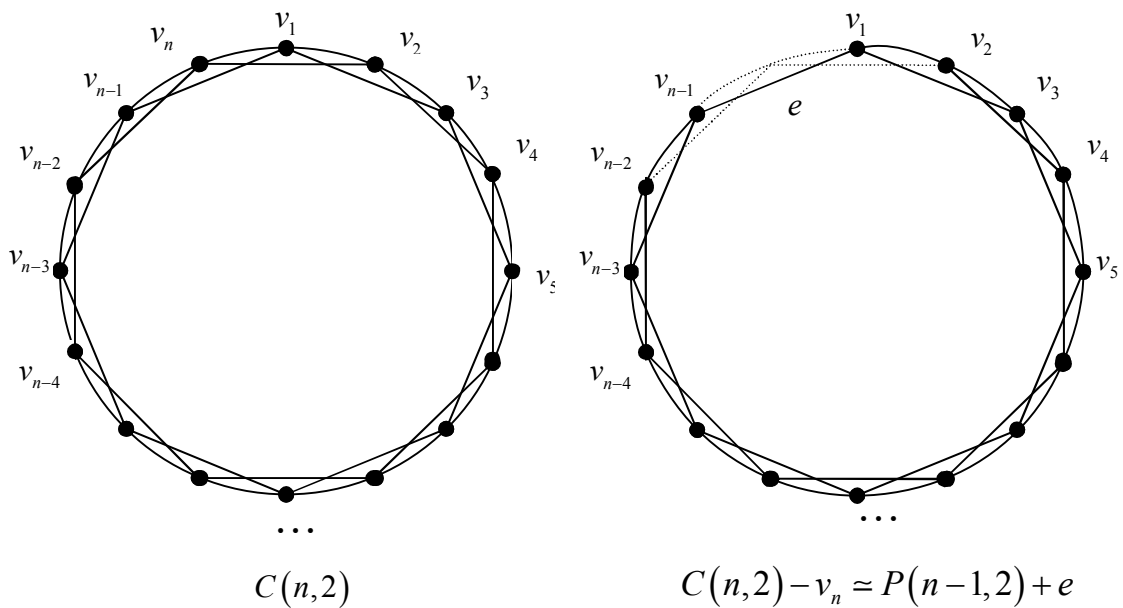
$$\text{ii) } f(C(n,2)) = f(P(n-2,2)) + 2f(P(n-5,2))$$

olur.

**İspat.**  $C(n,2)$  grafinin  $v_n$  köşesi üzerinden köşe indirgeme formülünden

$$\begin{aligned} f(C(n,2)) &= f(C_n - v_n) + f(C_n - N[v_n]) \\ F_k(C(n,2)) &= F_k(C_n - v_n) + F_k(C_n - N[v_n]) \end{aligned} \tag{4.8}$$

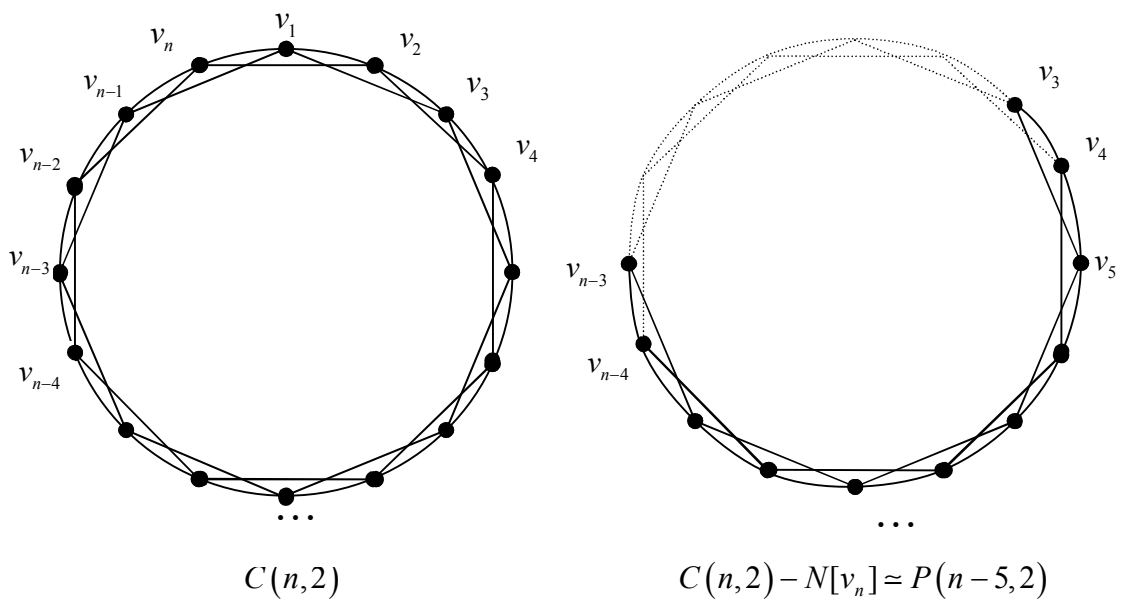
şeklindedir. Aşağıdaki şekillerden de kolayca görülebileceği gibi



Şekil 4.42.

$$\begin{aligned}
 f(C_n - v_n) &= f(P(n-1,2) + e), \\
 F_k(C_n - v_n) &= F_k(P(n-1,2) + e)
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

ve



Şekil 4.43.

$$\begin{aligned}
 f(C_n - N[v_n]) &= f(P(n-5,2)), \\
 F_k(C_n - N[v_n]) &= F_{k-1}(P(n-5,2))
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

olur. (4.9) ve (4.10) değerleri (4.8) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} f(C(n,2)) &= f(P(n-1,2)+e) + f(P(n-5,2)), \\ F_k(C(n,2)) &= F_k(P(n-1,2)+e) + F_{k-1}(P(n-5,2)) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.  $P(n-1,2)+e$  grafında  $e$  kenarının  $v_1$  uç köşesi üzerinden indirgeme yapılırsa

$$\begin{aligned} (P(n-1,2)+e)-v_1 &= P(n-2,2), \\ (P(n-1,2)+e)-N[v_1] &= P(n-5,2) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} f((P(n-1,2)+e)) &= f(P(n-2,2)) + f(P(n-5,2)), \\ F_k((P(n-1,2)+e)) &= F_k(P(n-2,2)) + F_{k-1}(P(n-5,2)) \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned} f(C(n,2)) &= f(P(n-2,2)) + 2f(P(n-5,2)), \\ F_k(C(n,2)) &= F_k(P(n-2,2)) + 2F_{k-1}(P(n-5,2)) \end{aligned}$$

elde edilir.  $\square$

**Teorem 4.3.4.**  $n \geq 6$  ve  $0 \leq k \leq n$  için

$$F_k(C(n,2)) = \binom{n-2k}{k} + 2 \binom{n-1-2k}{k-1}$$

dir.

**İspat.** Teorem 4.3.3.'den

$$F_k(C(n,2)) = F_k(P(n-2,2)) + 2F_{k-1}(P(n-5,2))$$

ve  $P(n, r)$  kuvvet grafının  $k$ -elemanlı bağımsız kümelerinin sayısı

$$F_k(P_{n,r}) = \binom{n+r-rk}{k}$$

olup

$$\begin{aligned} F_k(C(n, 2)) &= F_k(P(n-2, 2)) + 2F_{k-1}(P(n-5, 2)) \\ &= \binom{n-2+2-2k}{k} + 2 \binom{n-5+2-2(k-1)}{k-1} \\ &= \binom{n-2k}{k} + 2 \binom{n-1-2k}{k-1} \end{aligned}$$

olur.  $\square$

**Teorem 4.3.5.**  $r \geq 0$ ,  $n \geq 2r + 2$  olmak üzere  $k \geq 1$  için

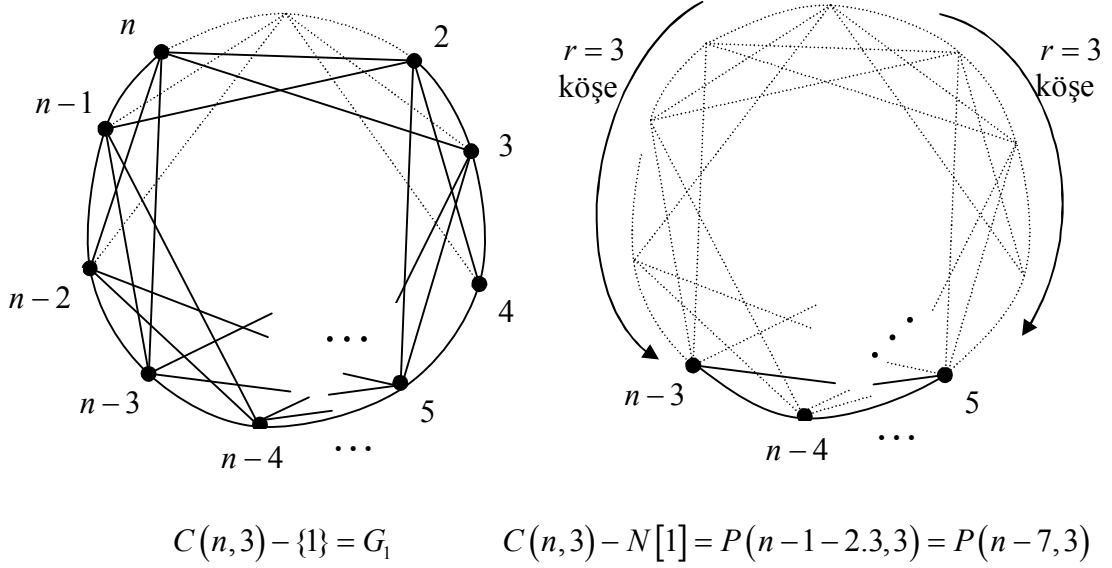
$$\begin{aligned} f(C(n, r)) &= f(P(n-r, r)) + r[f(P(n-1-2r, r))], \\ F_k(C(n, r)) &= F_k(P(n-r, r)) + r[F_{k-1}(P(n-1-2r, r))] \end{aligned}$$

dir.

**İspat.**  $C(n, r)$  grafının köşeleri  $1, 2, \dots, n$  şeklinde etiketlenir ve sırasıyla  $1, 2, \dots, r$  köşeleri üzerinde indirgeme yapılırsa

$$\begin{aligned} f(C(n, r)) &= f(G_1) + f(P(n-1-2r, r)), \\ F_k(C(n, r)) &= F_k(G_1) + F_{k-1}(P(n-1-2r, r)) \end{aligned}$$

olur.  $G_1$ , 1 köşesinin kaldırılması ile elde edilen graftır. 1 köşesi ve bu köşenin komşularının kaldırılması ile elde edilen graf ise  $P(n-1-2r, r)$  kuvvet grafıdır. Fakat  $G_1$ , ne bir patika grafın ne de döngü grafın kuvvetidir. Bulunan bu eşitliklerin daha kolay anlaşılabilmesi için aşağıdaki  $C(n, 3)$  örneği verilmiştir.



Şekil 4.44.

$G_1$  grafında  $\{2\}$  köşesi üzerinden indirgeme yapılırsa

$$f(G_1) = f(G_2) + f(P(n-1-2r, r))$$

olup, buradan

$$f(C(n, r)) = f(G_2) + 2f(P(n-1-2r, r)),$$

$$F_k(C(n, r)) = F_k(G_1) + 2F_{k-1}(P(n-1-2r, r))$$

olur. Bu şekilde adım adım indirgeme yapıp  $i$ . köşe kaldırılırsa

$$f(C(n, r)) = f(G_i) + i[f(P(n-1-2r, r))],$$

$$F_k(C(n, r)) = F_k(G_i) + i[F_{k-1}(P(n-1-2r, r))]$$

elde edilir. Son olarak  $(i+1)$ . köşe kaldırıldığında  $(i+1)$ . köşenin bir tarafında  $r$  tane diğer tarafında da  $(r-i)$  tane komşusu kaldırılacağından

$$\begin{aligned} G_i - N[i] &= P(n - (i+1) - r - (r-i), r) \\ &= P(n - 2r - 1, r) \end{aligned}$$

olur ve

$$f(G_i) = f(G_{i+1}) + f(P(n - 2r - 1, r))$$

elde edilir. Böylece

$$f(C(n, r)) = f(G_i) + (i+1)f(P(n-1-2r, r))$$

olur. Sonuç olarak  $1 \leq i \leq r$  için

$$\begin{aligned} f(C(n, r)) &= f(G_i) + i[f(P(n-1-2r, r))] \\ F_k(C(n, r)) &= F_k(G_i) + i[F_{k-1}(P(n-1-2r, r))] \end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak  $i = r$  için  $G_r \simeq P(n-r, r)$  olur ki bu durumda

$$\begin{aligned} f(C(n, r)) &= f(P(n-r, r)) + r[f(P(n-1-2r, r))], \\ F_k(C(n, r)) &= F_k(P(n-r, r)) + r[F_{k-1}(P(n-1-2r, r))] \end{aligned}$$

olur.  $\square$

**Teorem 4.3.6.**  $n \geq 2r + 2$ ,  $r \geq 0$  ve  $0 \leq k \leq n$  için

$$F_k(C(n, r)) = \binom{n-rk}{k} + r \binom{n-1-rk}{k-1}$$

dir.

**İspat.** Teorem 4.3.1.'den

$$F_k(P(n, r)) = \binom{n+r-rk}{k}$$

dir. Ayrıca Teorem 4.3.6. da kullanılarak

$$\begin{aligned} F_k(C(n, r)) &= F_k(P(n-r, r)) + r[F_{k-1}(P(n-1-2r, r))] \\ &= \binom{(n-r)+r-rk}{k} + r \binom{n-1-2r+r-r(k-1)}{k-1} \\ &= \binom{n-rk}{k} + r \binom{n-1-rk}{k-1} \end{aligned}$$

elde edilir.

#### 4.4. Grafların Fibonacci Polinomu

**Tanım 4.4.1.**  $G$  grafi verilsin.  $k$  pozitif bir tamsayı olmak üzere,  $G$ 'nin  $k$ -elemanlı bağımsız kümelerinin sayısı  $F_k(G)$  ile gösterilsin. Bu durumda

$$\sum F_k(G) x^k$$

şeklinde elde edilen polinoma  $G$  grafinin Fibonacci polinomu denir ve  $f_G(x)$  veya  $f(G)(x)$  şeklinde gösterilir.

**Lemma 4.4.1.**  $G = (V, E)$  grafi verilsin.  $G$  grafına ait herhangi bir  $v \in V$  köşesi için

$$\begin{aligned} f_{G-v}(x) &= \sum_{k \geq 0} a_k x^k \\ f_{G-N[v]}(x) &= \sum_{k \geq 0} b_k x^k \end{aligned}$$

ise  $k \geq 1$  için  $G$  grafinin  $k$ -elemanlı bağımsız kümesi

$$f_k = a_k + b_{k-1}$$

dir.

**Teorem 4.4.1.**  $v$ ,  $G = (V, E)$  grafının herhangi bir köşesi olmak üzere

$$f_G(x) = f_{G-v}(x) + xf_{G-N[v]}(x)$$

dir.

**İspat.** Lemma 4.4.1. kullanılarak eşitliğin sağ tarafı düzenlenirse,

$$\begin{aligned} f_{G-v}(x) + xf_{G-N[v]}(x) &= \sum_{k \geq 0} a_k x^k + x \sum_{k \geq 0} b_k x^k \\ &= \sum_{k \geq 0} a_k x^k + \sum_{k \geq 1} b_{k-1} x^k \\ &= a_0 + \sum_{k \geq 1} (a_k + b_{k-1}) x^k \\ &= 1 + \sum_{k \geq 1} f_k x^k \\ &= f_G(x) \end{aligned}$$

elde edilir.  $\square$

**Lemma 4.4.2.**  $e$ , uç köşeleri  $v_1$  ve  $v_2$  olan  $G = (V, E)$  grafına ait bir kenar olmak üzere

$$\begin{aligned} f_{G-e}(x) &= \sum_{k \geq 0} a_k x^k \\ f_{G-N[e]}(x) &= \sum_{k \geq 0} b_k x^k \end{aligned}$$

ise  $k \geq 2$  için  $f_k = a_k - b_{k-2}$  dir.

**Teorem 4.4.2.**  $e$ ,  $G = (V, E)$  grafına ait bir kenar olmak üzere

$$f_G(x) = f_{G-e}(x) - x^2 f_{G-N[e]}(x)$$

dir.

**İspat.** Lemma 4.4.2. kullanılarak eşitliğin sağ tarafı düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
 f_{G-e}(x) - x^2 f_{G-N[e]}(x) &= \sum_{k \geq 0} a_k x^k - x^2 \sum_{k \geq 0} b_k x^k \\
 &= \sum_{k \geq 0} a_k x^k - \sum_{k \geq 2} b_{k-2} x^k \\
 &= a_0 + a_1 x + \sum_{k \geq 2} (a_k - b_{k-2}) x^k \\
 &= 1 + f_1 x + \sum_{k \geq 2} f_k x^k \\
 &= \sum_{k \geq 0} f_k x^k \\
 &= f_G(x)
 \end{aligned}$$

elde edilir.  $\square$

**Lemma 4.4.3.**  $G_1, G_2, \dots, G_n$  'ler  $G$  grafına ait bileşenler olmak üzere  $G$  grafının  $k$ -elemanlı bağımsız kümelerinin sayısı

$$F_k(G) = \sum F_{j_1}(G_1) F_{j_2}(G_2) \dots F_{j_n}(G_n)$$

dir.

**İspat.**  $n = 2$  için ispat yapalım. Benzer şekilde ispat genelleştirilebilir.  $G$  grafının  $k$ -elemanlı bağımsız kümelerinin  $j$ -elemanlı bağımsız kümesi  $G_1$  bileşenine,  $k - j$ -elemanlı bağımsız kümesi  $G_2$  bileşenine ait olsun. Bu durumda  $G$  grafının  $k$ -elemanlı bağımsız kümelerinin sayısı

$$F_k(G) = \sum_{j=0}^k F_j(G_1) F_{k-j}(G_2)$$

şeklinde hesaplanır.  $\square$

**Teorem 4.4.3.**  $G_1, G_2, \dots, G_n$   $G$  grafına ait bileşenler olmak üzere

$$f_G(x) = f_{G_1}(x) f_{G_2}(x) \dots f_{G_n}(x)$$

dir.

**İspat.**  $n = 2$  için ispat yapalım. Benzer şekilde ispat genelleştirilebilir.

$$\begin{aligned}
 f_{G_1}(x) f_{G_2}(x) &= \sum_{k \geq 0} g_k x^k \sum_{k \geq 0} h_k x^k \\
 &= \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} (g_l(G_1))(h_{k-l}(G_2)) x^k \\
 &= \sum_{k \geq 0} f_k(G) x^k \\
 &= f_G(x)
 \end{aligned}$$

olur.  $\square$

**Lemma 4.4.4.**  $G_1, G_2, \dots, G_n$  graflarının toplamı  $G$  olsun. Bu durumda

$$f_G(x) = f_{G_1}(x) + f_{G_2}(x) + \dots + f_{G_n}(x) - (n-1)$$

dir.

**İspat.**  $n = 2$  için hesaplayalım. Benzer şekilde ispat genelleştirilebilir. Eşitliğin sağ tarafı açılırsa

$$\begin{aligned}
 f_{G_1}(x) + f_{G_2}(x) - 1 &= 1 + \sum_{k \geq 1} f_{1_k} x^k + 1 + \sum_{k \geq 1} f_{2_k} x^k - 1 \\
 &= 1 + \sum_{k \geq 1} (f_{1_k} + f_{2_k}) x^k \\
 &= \sum_{k \geq 0} f_k x^k \\
 &= f_G(x)
 \end{aligned}$$

olur.  $\square$

**Lemma 4.4.5.**  $G$ ,  $m$  köşeli bir graf olmak üzere

$$f_G(x) - 1 = x \left[ f_{G-N[v_1]}(x) + f_{G-N[v_2]}(x) + \dots + f_{G-N[v_m]}(x) \right]$$

dir.

**İspat.**  $G$  grafında herhangi bir  $v_i$  köşesi üzerinden indirgeme yapılırsa

$$f_G(x) = f_{G-v_1}(x) + xf_{G-N[v_1]}(x) \quad (4.11)$$

olur.  $G - v_1$  grafında  $v_2$  köşesi üzerinden indirgeme yapılırsa

$$f_{G-v_1}(x) = f_{G-v_1-v_2}(x) + xf_{G-v_1-N[v_2]}(x)$$

olur. Bu değer (4.11) de yerine yazılırsa

$$f_G(x) = f_{G-v_1-v_2}(x) + x[f_{G-N[v_1]}(x) + f_{G-v_1-N[v_2]}(x)]$$

olur. Bu şekilde köşe indirgemeye devam edilerek  $m$  köşenin sırasıyla hepsi kaldırılırsa

$$\begin{aligned} f_G(x) &= f_{G-v_1-v_2-\dots-v_m}(x) + x[f_{G-N[v_1]}(x) + f_{G-v_1-N[v_2]}(x) + \dots + f_{G-v_1-v_2-\dots-v_{m-1}-N[v_m]}(x)] \\ &= f_{\emptyset}(x) + x[f_{G-N[v_1]}(x) + f_{G-v_1-N[v_2]}(x) + \dots + f_{G-v_1-v_2-\dots-v_{m-1}-N[v_m]}(x)] \end{aligned}$$

olup

$$f_G(x) - 1 = x[f_{G-N[v_1]}(x) + f_{G-v_1-N[v_2]}(x) + \dots + f_{G-v_1-v_2-\dots-v_{m-1}-N[v_m]}(x)]$$

olur.  $\square$

**Teorem 4.4.4.**  $K_n$  tam grafının Fibonacci polinomu

$$f_{K_n}(x) = 1 + nx$$

dir.

**İspat.**  $K_n$  grafında 0-elemanlı bağımsız küme sadece  $\emptyset$  olduğundan  $F_0(K_n) = 1$ 'dir. 1-elemanlı bağımsız küme sayısı  $F_1(K_n) = n$ 'dir.  $K_n$  grafında tüm köşeler komşu olduğundan  $i \geq 2$  için  $F_i(K_n) = 0$  olur. Bu takdirde,

$$f_{K_n}(x) = \sum_{k \geq 0} F_k x^k = 1 + nx$$

olarak elde edilir.  $\square$

**Lemma 4.4.6.** Herhangi bir  $G$  grafi ve bu grafa ait  $f_G(x)$  Fibonacci polinomu verilsin.

Bu durumda  $x = 1$  için

$$f_G(1) = f(G)$$

dir.

**İspat.**  $f_G(1) = \sum_{k \geq 0} F_k(G) = f(G)$  olur.  $\square$

**Tanım 4.4.2.**  $G_1$  ve  $G_2$  grafları verilsin. Eğer

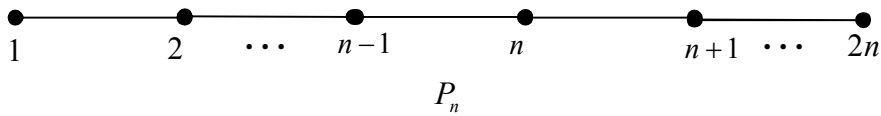
$$f_{G_1}(x) = f_{G_2}(x)$$

oluyorsa  $G_1$  ve  $G_2$  graflarına *bağımsız denk graflar* denir.

**Sonuç 4.4.1.**  $G_1$  ve  $G_2$  grafları bağımsız denk graflar ise her  $k \geq 0$  için

$$F_k(G_1) = F_k(G_2) \text{ dir.}$$

**Teorem 4.4.5.**  $n \geq 2$  olmak üzere  $P_{2n}$  patikası ile  $G = P_{n-1} \cup C_{n+1}$  birleşim grafi bağımsız denktir.



**Şekil 4.45.**

$P_n$  grafinin  $n$ . köşesi üzerinden köşe indirgeme formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned} f_{P_{2n}}(x) &= f_{P_{2n-\{n\}}}(x) + x f_{P_{2n-N[n]}}(x) \\ &= f_{P_{n-1}}(x) + x f_{P_{n-2}}(x) f_{P_{n-1}}(x) \end{aligned} \quad (4.12)$$

olur.  $G$ ,  $P_{n-1}$  ve  $C_{n+1}$  graflarının birleşimi olduğundan

$$f_G(x) = f_{P_{n-1}}(x) f_{C_{n+1}}(x) \quad (4.13)$$

olur.  $C_{n+1}$  grafinin herhangi bir köşesi üzerinden indirgeme yapılırsa

$$f_{C_{n+1}}(x) = f_{P_n}(x) + x f_{P_{n-2}}(x)$$

olup bu değer (4.13) de yerine yazılırsa

$$f_G(x) = f_{P_{n-1}}(x) f_{P_n}(x) + x f_{P_{n-2}}(x) f_{P_{n-1}}(x) \quad (4.14)$$

olur ki (4.12) ve (4.14) değerleri eşit olduğundan  $P_{2n}$  ve  $G$  grafları bağımsız denktir.  $\square$

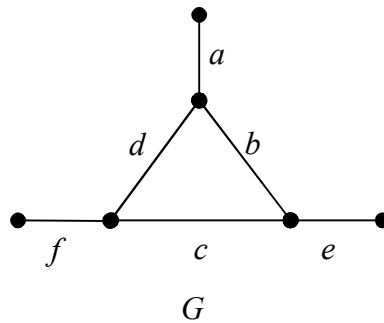
#### 4.5. Grafların Bağımsız Kenar Kümeleri

Önceki kısımda bağımsız köşe kümesini tanımlamıştık. Bu kısımda ise bağımsız kenar kümesi kullanılarak genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizileri elde edilecektir.

$G = (V, E)$  grafi ve  $M \subseteq E(G)$  alt kümesi verilsin. Eğer  $M$  kümesine ait herhangi iki kenar  $G$  grafinde komşu olmuyorsa, yani ortak köşe ile bağlı değilse bu durumda  $M$  kümesini bağımsız kenar kümesi (matching) olarak tanımlamıştık.  $G$  grafinin tüm bağımsız kenar kümelerinin sayısı  $|M(G)|$  şeklinde gösterilir.

$\emptyset$  ve 1 elemanlı kümeler bağımsız kenar kümesi kabul edilirler.

**Örnek 4.5.1.** Aşağıda verilen  $G$  grafini göz önüne alalım.



Şekil 4.46.

$G$  grafinın tüm bağımsız kenar kümelerinin kümesi

$$M(G) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{a,c\}, \{a,e\}, \{a,f\}, \{b,f\}, \{d,e\}, \{e,f\}, \{a,e,f\}\}$$

olup  $|M(G)| = 14$ 'tür.

**Lemma 4.5.1.**  $G = (V, E)$  grafi verilsin. Bu takdirde

- i)  $|M(G)| = |M(G - uv)| + |M(G - \{u, v\})|$
- ii)  $|M(G)| = |M(G - v)| + \sum_{u \in N(v)} |M(G - \{u, v\})|$

dir.

**İspat.**

i)  $uv \in E(G)$  için  $G$  grafinın tüm bağımsız kenar kümelerinin sayısı,  $G$ 'nin  $uv$  kenarını içeren ve içermeyen bağımsız kenar küme sayılarının toplamı şeklinde hesaplanabilir.

$G$  grafinın  $uv$  kenarını içermeyen bağımsız kenar kümelerinin sayısı  $G$  grafindan  $uv$  kenarının silinmesi ile elde edilen  $G - uv$  alt grafinın bağımsız kenar küme sayısı kadardır.

$G$  grafinın  $uv$  kenarını içeren bağımsız kenar kümelerinde,  $u$  ve  $v$  köşelerini uç köşe kabul eden kenarlar yer almayacaktır. Bu yüzden  $G$  grafinın  $uv$  kenarını içeren bağımsız kenar kümelerinin sayısı  $G$  grafindan  $u$  ve  $v$  köşelerinin silinmesi ile elde edilen  $G - \{u, v\}$  alt grafinın bağımsız kenar küme sayısına eşit olur. Sonuç olarak

$$|M(G)| = |M(G - uv)| + |M(G - \{u, v\})|$$

dir.

ii)  $v \in V(G)$  için  $G$  grafinın tüm bağımsız kenar kümelerinin sayısı,  $G$ 'nin  $v$  köşesini içeren ve içermeyen bağımsız kenar küme sayılarının toplamı şeklinde hesaplanabilir.

$G$  grafinın  $v$  köşesini içermeyen bağımsız kenar kümelerinin sayısı,  $G$  grafindan  $v$  köşesinin silinmesi ile elde edilen  $G - v$  alt grafinın bağımsız kenar küme sayısına eşittir.

$v$  köşesi kendisi ile komşu olan köşeler ile bir kenar oluşturacağından  $G$  grafinın  $v$  köşesini içeren bağımsız kenar kümelerinin sayısı,  $G$ 'nin ayrı ayrı  $v$  ile oluşturulan kenarlarını içeren bağımsız kenar küme sayılarının toplamı kadar olur. Sonuç olarak

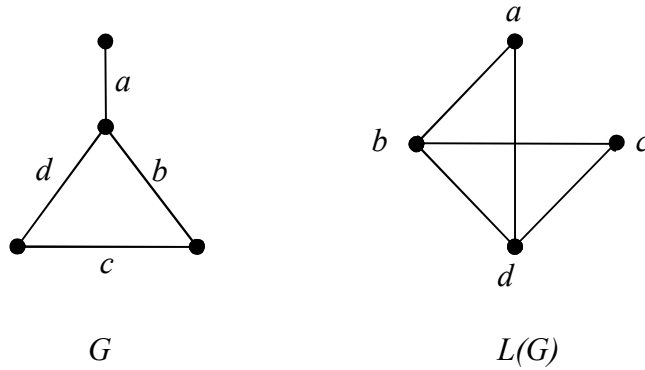
$$|M(G)| = |M(G - v)| + \sum_{u \in N(v)} |M(G - \{u, v\})|$$

dir.  $\square$

**Tanım 4.5.1.**  $G$  grafi verilsin. Aşağıdaki iki adım yardımıyla elde edilen  $L(G)$  grafinın  $G$  grafinın çizgi grafi (*line grafi*) denir.

- i)  $G$  grafinın kenarları  $L(G)$  grafinın köşelerini oluşturur.
- ii)  $G$  grafindaki kenarların ortak köşe içermeleri durumunda  $L(G)$  grafinın bu kenarlara karşılık gelen köşeler bir kenar ile bağlanır.

**Örnek 4.5.2.** Aşağıda bir  $G$  grafi ve bu  $G$  grafinın ait  $L(G)$  çizgi grafi verilmiştir.



Şekil 4.47.

**Teorem 4.5.1.** Bir  $G$  grafinın tüm bağımsız kenar kümelerinin sayısı,  $G$ 'nin çizgi grafinın Fibonacci sayısına eşittir. Yani

$$|M(G)| = f(L(G))$$

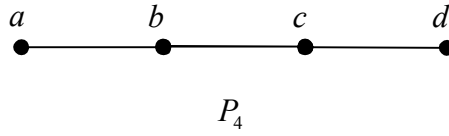
dir.

**Tanım 4.5.2.**  $n$  tane köşe ve  $n-1$  tane paralel kenar kümelerinden oluşan grafa *patika tipi* (*path-type*) *graf* denir.

**Teorem 4.5.2.**  $n$  köşeli bir patikanın toplam bağımsız kenar sayısı  $F_n$  'dir.

$$(F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_0 = 1, F_1 = 1)$$

**Örnek 4.5.3.** Aşağıda verilen  $P_4$  patikasının toplam bağımsız kenar sayısını bulalım.



Şekil 4.48.

$$M(P_4) = \{\emptyset, \{ab\}, \{bc\}, \{cd\}, \{\{ab\}, \{cd\}\}\}$$

olup  $|M(P_4)| = 5 = F_4$  'tür.

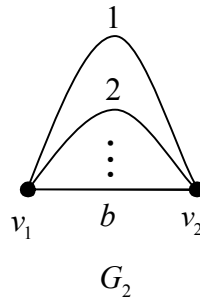
**Lemma 4.5.2.**  $n$  ( $n \geq 2$ ) köşeli ve her bir  $v_i, v_{i+1}$  köşeleri arasında  $b$  tane paralel kenar bulunan patika tipi grafin tüm bağımsız kenar kümelerinin sayısı

$$F_n = F_{n-1} + bF_{n-2} \quad F_0 = 1, F_1 = 1$$

şeklinde olan  $n$ . genelleştirilmiş Fibonacci sayısıdır.

**İspat.**  $n$  köşe sayısı üzerinden tümevarım yöntemi ile yapalım.

$n = 2$  için patika tipi graf aşağıda gösterildiği gibidir.



Şekil 4.49.

$G_2$  grafinin tüm bağımsız kenar kümeleri

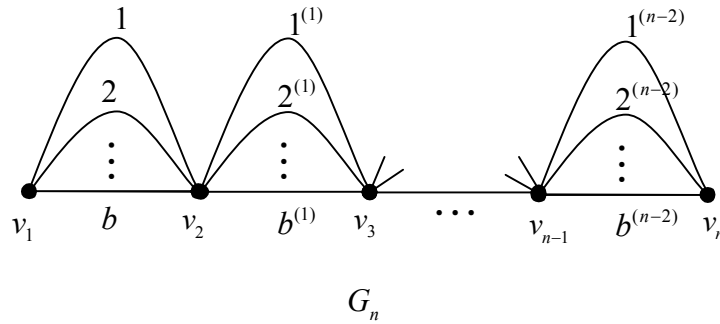
$$M(G_2) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{b\}\}$$

olup,

$$|M(G_2)| = b + 1 = F_1 + bF_0 = F_2$$

dir.

$n$ 'den az köşeli tüm  $G_m$  grafları için  $|M(G_m)| = F_m$  olsun. O zaman  $n$  köşeli  $G_n$  grafları için gösterelim.



Şekil 4.50.

$G_n$  grafinda  $v_n$  köşesi üzerinde indirgeme yapılırsa

$$\begin{aligned} |M(G_n)| &= |M(G_n - v_n)| + b|M(G_n - \{v_n, v_{n-1}\})| \\ &= |M(G_{n-1})| + b|M(G_{n-2})| \\ &= F_{n-1} + bF_{n-2} \\ &= F_n \end{aligned}$$

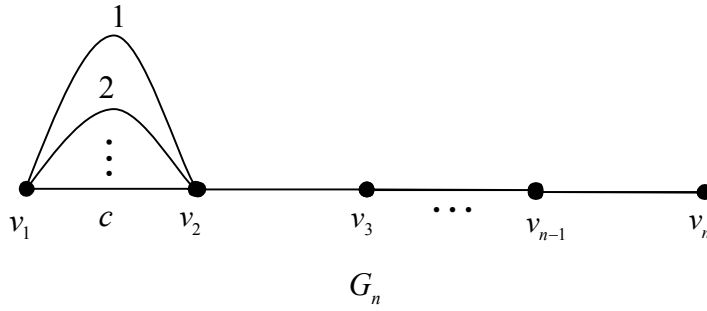
olur.  $\square$

**Lemma 4.5.3.**  $n$ , ( $n \geq 2$ ) köşeli ve sadece ilk kenarı ( $e_1 = v_1v_2$ )  $c$  tane paralel kenar ile kopyalanmış patika tipi grafin tüm bağımsız kenar kümelerinin sayısı

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad F_0 = c, \quad F_1 = 1$$

şeklinde olan  $n$ . genelleştirilmiş Fibonacci sayısıdır.

**İspat.** Tanımlanan patika tipi graf aşağıda gösterildiği gibi olup Lemma 4.5.2'deki incelemelere paralel incelemeler yapılarak ispatlanır.



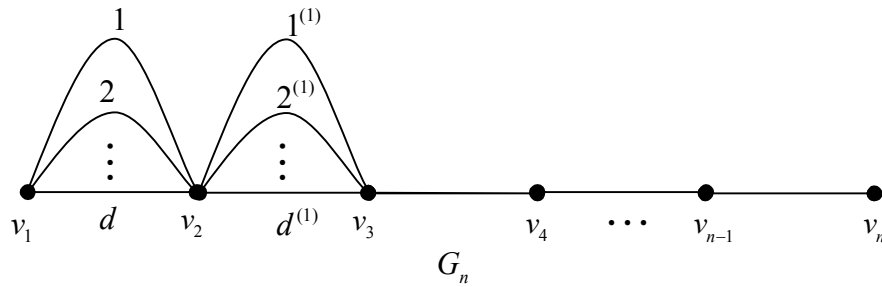
Şekil 4.51.

**Lemma 4.5.4.**  $n$ , ( $n \geq 2$ ) köşeli ve ilk kenarı ( $e_1 = v_1v_2$ ) ile ikinci kenarı ( $e_2 = v_2v_3$ )  $d$  tane paralel kenar ile kopyalanmış patika tipi grafın tüm bağımsız kenar kümelerinin sayısı

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad F_0 = 1, \quad F_1 = d$$

şeklinde olan  $n$ . genelleştirilmiş Fibonacci sayısıdır.

**İspat.** Tanımlanan patika tipi graf aşağıda gösterildiği gibi olup Lemma 4.5.2'deki incelemelere paralel incelemeler yapılarak ispatlanır.



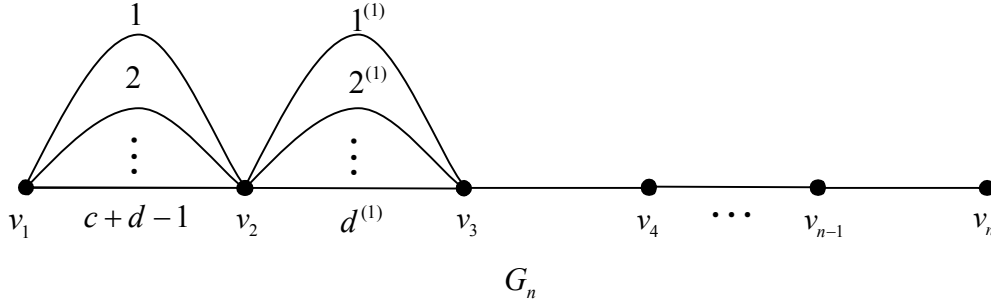
Şekil 4.52.

**Lemma 4.5.5.**  $n$ , ( $n \geq 2$ ) köşeli ve ilk kenarı ( $e_1 = v_1v_2$ )  $d + c - 1$  tane, ikinci kenarı ( $e_2 = v_2v_3$ ) da  $d$  tane paralel kenar ile kopyalanmış patika tipi grafın tüm bağımsız kenar kümelerinin sayısı

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad F_0 = c, \quad F_1 = d$$

şeklinde olan  $n$ . genelleştirilmiş Fibonacci sayısıdır.

**İspat.** Tanımlanan patika tipi graf aşağıda gösterildiği gibi olup Lemma 4.5.2'deki incelemelere paralel incelemeler yapılarak ispatlanır.



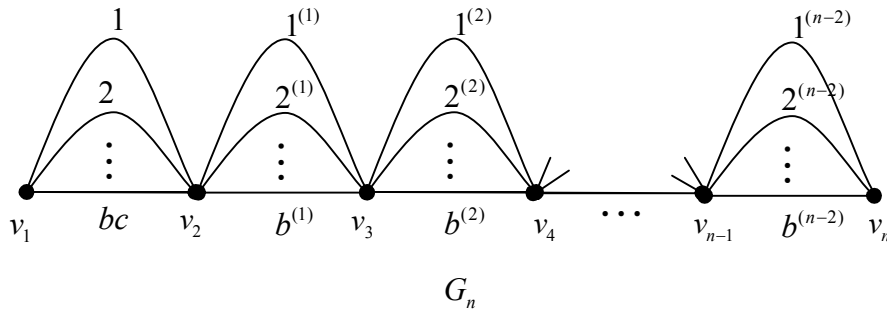
Şekil 4.53.

**Lemma 4.5.6.**  $n$ , ( $n \geq 2$ ) köşeli ve ilk kenarı ( $e_1 = v_1v_2$ )  $bc$  tane, diğer kenarları da ( $e_i = v_iv_{i+1}$   $i > 1$ )  $b$  tane paralel kenar ile kopyalanmış patika tipi grafın tüm bağımsız kenar kümelerinin sayısı

$$F_n = F_{n-1} + bF_{n-2} \quad F_0 = c, \quad F_1 = 1$$

şeklinde olan  $n$ . genelleştirilmiş Fibonacci sayısıdır.

**İspat.** Tanımlanan patika tipi graf aşağıdaki şekil ile gösterildiği gibi olup Lemma 4.5.2'deki incelemelere paralel incelemeler yapılarak ispatlanır.



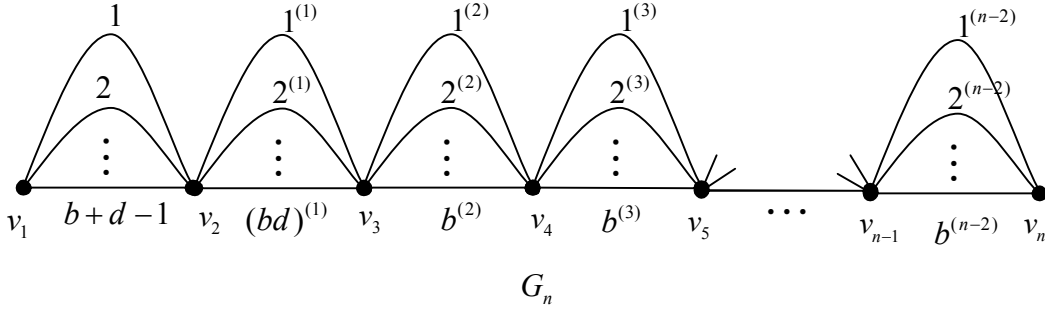
Şekil 4.54.

**Lemma 4.5.7.**  $n$ , ( $n \geq 2$ ) köşeli ve ilk kenarı ( $e_1 = v_1v_2$ )  $b+d-1$  tane, ikinci kenarı ( $e_2 = v_2v_3$ )  $bd$  tane ve diğer kenarları da ( $e_i = v_iv_{i+1}$   $i > 2$ ) da  $b$  tane paralel kenar ile kopyalanmış patika tipi grafın tüm bağımsız kenar kümelerinin sayısı

$$F_n = F_{n-1} + bF_{n-2} \quad F_0 = 1, \quad F_1 = d$$

şeklinde olan  $n$ . genelleştirilmiş Fibonacci sayıdır.

**İspat.** Tanımlanan patika tipi graf aşağıdaki şekil ile gösterildiği gibi olup Lemma 4.5.2'deki incelemelere paralel incelemeler yapılarak ispatlanır.



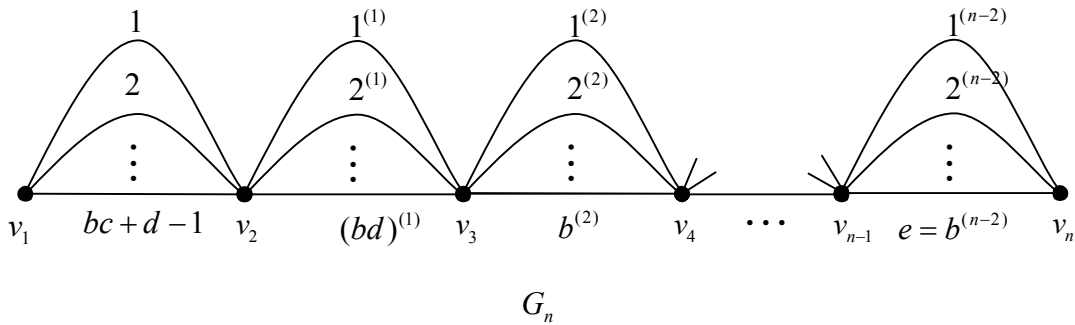
Şekil 4.55.

**Teorem 4.5.3.**  $n$ , ( $n \geq 2$ ) köşeli ve ilk kenarı ( $e_1 = v_1v_2$ )  $bc + d - 1$  tane, ikinci kenarı ( $e_2 = v_2v_3$ )  $bd$  tane ve diğer kenarları da ( $e_i = v_iv_{i+1}$   $i > 2$ )  $b$  tane paralel kenar ile kopyalanmış patika tipi grafın tüm bağımsız kenar kümelerinin sayısı

$$F_n = F_{n-1} + bF_{n-2} \quad F_0 = c, \quad F_1 = d$$

şeklinde olan  $n$ . genelleştirilmiş Fibonacci sayıdır.

**İspat.** Tanımlanan patika tipi graf aşağıda gösterildiği gibi olup Lemma 4.5.2'deki incelemelere paralel incelemeler yapılarak ispatlanır.



Şekil 4.56.

**Teorem 4.5.4.**  $a > 1$  ve  $n \geq 4$  için tüm bağımsız kenar küme sayılarının toplamı

$$F_n = aF_{n-1} + bF_{n-2}; F_0 = c, F_1 = d$$

olacak şekilde bir patika tipi graf mevcut değildir.

**İspat.** Verilen tipteki en basit grafın  $a > 1$  için

$$F_n = aF_{n-1} + F_{n-2} \quad F_0 = 1, F_1 = 1$$

şeklinde bağımsız kenar küme sayısına sahip olup olmadığını inceleyelim.

Bağımsız kenar küme sayısı  $F_2 = a + 1$  olan graf 2 köşeli olacaktır. Bu yüzden  $e_1 = v_1v_2$  kenarı  $a$  tane paralel kenar ile kopyalanmalıdır. Bu grafa bir köşe ekleyerek elde edilen patika tipi graf da  $a^2 + a + 1$  tane bağımsız kenar kümesi üretmelidir. İlk kenar  $a$  tane bağımsız kenar kümesi ürettiğinden ikinci kenar ( $e_2 = v_2v_3$ )  $a^2$  tane paralel kenar ile kopyalanmalıdır. 4 köşeli patika tipi grafın ise  $a^3 + a^2 + 2a + 1$  tane bağımsız kenar üretmesi için  $e_3 = v_3v_4$  kenarının kaç tane kenar ile kopyalı olduğu incelenirse;

$$a^3 + a^2 + 2a + 1 = 1 + (a + 1) + a^2 + (ax) + x$$

$$x = \frac{a(a^2 + 1)}{a + 1}$$

olur ki  $x$  tamsayı olmadığından tüm bağımsız kenar küme sayısı  $F_n$  ( $F_n = aF_{n-1} + F_{n-2}$ ;  $F_0 = 1, F_1 = 1$ ) olacak şekilde bir patika tipi graf mevcut değildir.

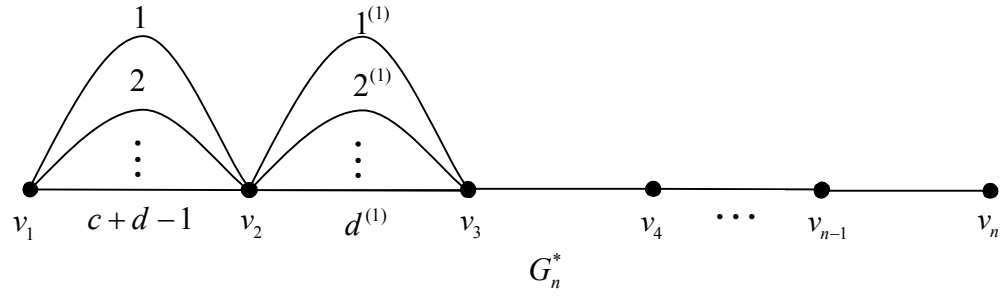
Benzer incelemeler ile tüm bağımsız kenar küme sayısı  $F_n$  ( $F_n = aF_{n-1} + bF_{n-2}$ ;  $F_0 = c, F_1 = d$ ) olacak şekilde de bir patika tipi grafın olmadığı kolayca görülür.

**Lemma 4.5.8.**  $n, (n \geq 2)$  köşeli ve ilk kenarı ( $e_1 = v_1v_2$ )  $c + d - 1$  tane, ikinci kenarı ( $e_2 = v_2v_3$ ) da  $d$  tane paralel kenar ile kopyalanmış patika tipi grafın tüm bağımsız kenar kümelerinin sayısı

$$dF_{n-1} + cF_{n-2}$$

olur. Burada  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ,  $F_0 = 1$ ,  $F_1 = 1$  dir.

**İspat.** Tanımlanan patika tipi graf aşağıdaki şekil ile gösterildiği gibi olup Lemma 4.5.2'deki incelemelere paralel incelemeler yapılarak ispatlanır.



Şekil 4.57.

## 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada grafların Fibonacci sayı dizileri ile ilişkileri üzerine detaylı bir araştırma yapılmıştır. Bazı özel graflarda bağımsız köşe kümelerinin sayısı ve bağımsız kenar kümelerinin sayısı gibi graflara ait temel kavramlar Fibonacci sayılarını vermektedir. Bu durum Fibonacci sayı dizilerinin graflar yardımıyla bir temsilini oluşturur. Benzer düşüncelerle farklı sayı dizilerinin graflar yardımıyla temsili araştırılabilir.

**KAYNAKLAR**

- Aldous, J. M., Wilson, R. J., 2003, *Graphs and Applications An Introductory Approach*, Springer, Great Britain.
- Chen G., Zhu Z., 2012, The number of independent sets of unicyclic graphs with given matching number, *Discrete Applied Mathematics*, 160(1-2), 108-115.
- Chism L. M., 2009, *On Independence Polynomials and Independence Equivalence in Graphs*, Doctoral Dissertation, University of Mississippi.
- Clark, J., Holton, D. A., 1991, *A First Look at Graph Theory*, Allied Publishers Ltd., New Delhi-India.
- Holliday S., Krop E., 2011, Sequences of Matchings in Path-Type Graphs, *Congressus Numerantium*, accepted.
- Hopkins G., Staton W., 1984, Some Identities Arising from the Fibonacci Numbers of Certain Graphs, *Fibonacci Quarterly*, 22(3), 255-258.
- Horton L. B. M., 2007, *Enumeration of Independent Sets in Graphs*, Doctoral Dissertation, University of Mississippi.
- Koshy, T., 2003, *Discrete Mathematics with Applications*, Elsevier Academic Press, USA.
- Levit V. E., Mandrescu E., 2005, The independence polynomial of a graph-a survey, *Proceedings of the 1st International Conference on Algebraic Informatics*, Thessaloniki-Greece, 233-254.
- Pedersen A. S., Vestergaard P.D., 2004, An Upper Bound on the Number of Independent Sets in a Tree, *Ars Combinatoria*.
- Prodinger H., Tichy R.F., 1982, Fibonacci Numbers of Graphs, *Fibonacci Quarterly*, 20, 16-21.
- Startek M., Wloch A., Wloch I., 2009, Fibonacci Numbers and Lucas Numbers in Graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 157(4), 1175-1187.
- Vasudev C., 2006, *Graph Theory with Applications*, New Age International Publishers Ltd., New Delhi-India.
- West, D. B., 2000, *Introduction to Graph Theory*, Pearson Education (Singapore) Pte. Ltd., Delhi-India.
- Wingard G. C., 1995, *Properties and Applications of the Fibonacci Polynomial of a Graph*, Doctoral Dissertation, University of Mississippi.
- Zhao H., Li X., 2006, On The Fibonacci Numbers of Trees, *Fibonacci Quarterly*, 44(1), 32-37.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Fadime ÖZKAN  
**Uyruğu** : T.C.  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : Kadınhanı-09.06.1987  
**Telefon** : (+90) 0506 216 69 84  
**Faks** :  
**e-mail** : [fozkan@selcuk.edu.tr](mailto:fozkan@selcuk.edu.tr)

### EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Meram Konya Lisesi (YDA)	2006
Üniversite	: Selçuk Üniversitesi	2010
Yüksek Lisans	: Selçuk Üniversitesi	
Doktora	:	

### İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2010	Çankırı Karatekin Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2011	Selçuk Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

### YABANCI DİLLER

İngilizce