

ÖRGÜLÜ 2-ÇAPRAZLANMIŞ

MODÜLLER

Çağrı ATASEVEN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2011

ÖRGÜLÜ 2-ÇAPRAZLANMIŞ

MODÜLLER

Çağrı ATASEVEN

Dumlupınar Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca

Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Doç. Dr. Erdal ULUALAN

Haziran-2011

KABUL VE ONAY SAYFASI

Çağrı ATASEVEN 'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “ÖRGÜLÜ 2-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER” başlıklı bu çalışma, jürimizce Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

... / ... / 2011

(Sınav Tarihi)

Üye :

Üye :

Üye :

Fen Bilimleri Enstitüsünün Yönetim Kurulu'nun ... / ... / 2011 gün ve ... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Atalay KÜÇÜKBURSA

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖRGÜLÜ 2-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Çağrı ATASEVEN

Matematik, Yüksek Lisans Tezi, 2011

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Erdal ULUALAN

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. 1. Bölümde tezin içerisinde kullanılacak olan, çaprazlanmış modüller, whiskered grupoidler gibi temel kavramların yanı sıra kategori teorisi ile ilgili kullanacağımız bazı temel bilgiler verilmiştir.

2. Bölümde 2-çaprazlanmış modüller üzerinde örgü dönüşümü tanımlandı ve simplisel gruplar, $F_{\alpha,\beta}$ dönüşümleri hakkında kısa bir ön bilgi verildikten sonra bu dönüşümlerin görüntülerinden yararlanarak Moore kompleksinin boyutu ≤ 3 olan indirgenmiş simplisel gruplar kategorisinden örgülü 2-çaprazlanmış modüller kategorisine bir fonktor oluşturuldu. Daha sonrada ters fonktor tanımlanarak ilgili kategorilerin denk oldukları gösterildi.

3. Bölümde ise örgülü 2-çaprazlanmış modüllerin bazı özel halleri incelendi. Bu yapılar ile bilinen bazı cebirsel modellerin arasındaki ilişki verildi.

Son olarak 4. Bölümde R-cebiroidler üzerinde whiskering dönüşümlerini tanımlandı ve bu whiskered R-cebiroidler ile değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modüllerin ilişkisi verildi. Ayrıca değişmeli cebirler üzerindeki 2-çaprazlanmış modüller üzerinde örgü dönüşümü tanımlanıp simplisel cebirlerle olan ilişkisi verildi.

Anahtar Kelimeler: Çaprazlanmış Modül, Moore Kompleks, Örgü Dönüşümü. Simplisel Grup.

BRAIDED 2-CROSSED MODULES

Çağrı ATASEVEN

Mathematics, M. S. Thesis, 2011

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Erdal ULUALAN

SUMMARY

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, it is given that the basic concepts as crossed modules, whiskered grupoids as well as some basic information that will be used in the thesis about category theory.

In the second chapter, braiding map on 2-crossed modules is defined and after brief prior knowledge is given about the simplicial groups and $F_{\alpha,\beta}$ maps, by using the images of these maps, a functor is constructed in the category of 2-crossed modules from the category of reduced simplicial groups with Moore complex of length ≤ 3 . Afterward, by defining the reverse functor, it is obtained an equivalence of the related categories.

In the third chapter, some special conditions of braided 2-crossed modules are examined. It is also given in this chapter that the relations among these structures and some known algebraic models.

Finally, in the fourth chapter, whiskering maps for R-algebroids are defined and the relationship between these whiskered R-algebroids and crossed modules of commutative algebras is proved. In addition, the braiding map on 2-crossed modules of commutative algebras is defined and its relationship with simplicial algebras is given.

Key Words: Braiding Map, Crossed Modules, Moore Complex, Simplicial Groups.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmamı yöneten ve bu tezin hazırlanması sırasında, her an bana yardımcı olan ve büyük emek harcayan, değerli zamanını aldığım çok sevdiğim kıymetli Danışman Hocam Sayın

Doç. Dr. Erdal ULUALAN'a,

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Beni gönülden destekleyen anneme, babama, kız kardeşime ve her zaman yanımda olan ev arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Çağrı ATASEVEN

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI	iii
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	viii
1. BÖLÜM	1
1.1. Ön Bilgiler.....	1
1.2. Çaprazlanmış Modüller	3
1.3. Whiskered Kategoriler	5
1.4. Çaprazlanmış Modüller ve Whiskered Grupoidler	5
2. BÖLÜM	13
2.1. 2-Çaprazlanmış Modüller Üzerinde Örgü Dönüşümü	13
2.2. Örgülü 2-Çaprazlanmış Modüller	14
2.3. Simplisel Grup ve Moore Kompleks.....	18
2.4. Hiper Çaprazlanmış Kompleks Çiftleri.....	23
3. BÖLÜM	41
3.1. Örgülü 2-Çaprazlanmış Modüllerin Bazı Özel Halleri	41
4.BÖLÜM	45
4.1. Simplisel Cebirler ve Örgülü 2-çaprazlanmış Modüller	45
4.2. Whiskered R-Cebiroidler	46
4.3. Değişmeli Cebirler Üzerinde Örgülü 2-Çaprazlanmış Modül	51
4.4. Simplisel Cebirler	54
KAYNAKLAR DİZİNİ	56

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklamalar</u>
$Ob(\mathbf{C})$	$\mathbf{C}$ kategorisinin objeler sınıfı
$Mor(x, y)$	x 'ten y 'ye tanımlı olan morfizmler sınıfı
∂	çaprazlanmış modül
$XMod$	çaprazlanmış modüller kategorisi
X_2Mod	2-çaprazlanmış modüller kategorisi
$(\mathbf{C}, m)$	whiskered kategori
WGr	whiskered grupoidler kategorisi
∂_1	ön-çaprazlanmış modül
$\{-, -\}$	peiffer lifting
BX_2Mod	örgülenmiş 2-çaprazlanmış modül
$\Delta[n]$	objeleri n -simpleksler olan kategori
Grp	gruplar kategorisi
$SimpGrp_{\leq n}$	moore kompleksinin boyutu $\leq n$ olan simplisel gruplar kategorisi
$m_{i,j}$	whiskering operatörü
$ReSimpGrp$	indirgenmiş simplisel gruplar kategorisi
d_i, s_j	yüz ve dejenere operatörleri
S_1XMod	simetrik çaprazlanmış modüller kategorisi
Ceb	değişmeli cebirler kategorisi
E	simplisel cebir
∂_n	sınır homomorfizmleri

1. BÖLÜM

1.1. Ön Bilgiler

Öncelikle kategori teorisi ile ilgili bazı temel kavramları verelim.

1.1.1. Tanım: Bir kategori oluşturabilmek için

- a) Obje olarak adlandıracağımız öğelere,
- b) Morfizm olarak adlandıracağımız objeler arasındaki yapı koruyan dönüşümlere, ki bu dönüşümlerin kümesini

$$\text{Mor}(x, y) = \{ f : x \rightarrow y \text{ morfizm} \}$$

İle göstereceğiz.

- c) Morfizmler arasında bileşkenin tanımlı olması

$$\text{Mor}(x, y) \times \text{Mor}(y, z) \rightarrow \text{Mor}(x, z)$$

$$(f, g) \rightarrow g \circ f$$

verilerine ihtiyaç vardır. Bu verilerin ışığı altında aşağıdaki şartların sağlanması gerekir.

1. x, y, z ve w objeleri için

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{h \circ (g \circ f)} & w \\ f \downarrow & & \uparrow h \\ y & \xrightarrow{g} & z \end{array}$$

diyagramını komütatif yani $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$ dir.

2. x, y ve z objeleri için

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{f} & y & & \\ & \searrow f & \downarrow id_y & \searrow g & \\ & & y & \xrightarrow{g} & z \end{array}$$

diyagramı komütatiftir. Yani $g \circ id_y = g$ ve $id_y \circ f = f$ olmalıdır.

Bu iki şart sağlanırsa bu sisteme bir kategori denir ve $\mathbf{C}$ ile gösterilir

Burada verilenler:

- ✓ Obje kümesi
- ✓ Morfizmler
- ✓ Kompozisyonudur.

İstenenler:

- ✓ Kompozisyonun asosyatif olması
- ✓ Her x objesi için $id_x : x \rightarrow x$ birim dönüşüm var ve $id \circ f = f$ ve $f \circ id = f$ olmalıdır.

1.1.2. Tanım: $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ iki kategori olsun $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ ile gösterilen bir fonktor aşağıdaki özellikleri sağlar

- a) Her $A \in Ob(\mathbf{C})$ objesi için $F(A) \in Ob(\mathbf{D})$ dir.
- b) $f : A \rightarrow B$, $\mathbf{C}$ de bir morfizm ise

$$F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$$

$\mathbf{D}$ de bir morfizm olmak üzere

- 1) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$
- 2) $F(id_x) = id_{F(x)}$

özellikleri sağlanır. Bu veriler sağlanırsa F ye $\mathbf{C}$ den $\mathbf{D}$ ye bir fonktor denir.

1.1.3. Tanım: $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ iki kategori olmak üzere $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ iki fonktor $A, B \in Ob(\mathbf{C})$ ve $f : A \rightarrow B$ $\mathbf{C}$, de bir morfizm olsun. Bu $Ff : FA \rightarrow FB$, $Gf : GA \rightarrow GB$ olduğunu biliyoruz. Bir $t : F \rightarrow G$ morfizmi, $t = (t_A, t_B)$ morfizm çiftlerinden oluşsun.

$$t_A : FA \rightarrow GA \text{ ve } t_B : FB \rightarrow GB$$

$\mathbf{D}$ de morfizmler olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{t_A} & G(A) \\ \downarrow Ff & & \downarrow Gf \\ F(B) & \xrightarrow{t_B} & G(B) \end{array}$$

diyagramı her A, B objeleri için değişmeli ise t ye F ve G fonktorları arasındaki doğal transformasyon denir.

1.1.4. Tanım: $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ iki kategori ve $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}, G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ fonktorlar olmak üzere $F \circ G$ fonktoru ile $I_{\mathbf{D}}$ fonktoru arasında bir doğal transformasyon, $G \circ F$ fonktoru ile $I_{\mathbf{C}}$ arasında bir doğal transformasyon varsa $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ kategorilerine denk kategoriler denir.

1.2. Çaprazlanmış Modüller

Çaprazlanmış modüller ilk olarak Whitehead [32] tarafından homotopi tipi 2-tip olan topolojik uzaylara karşılık gelen cebirsel bir model olarak 1950 de tanımlanmıştır.

Çaprazlanmış modül tanımını vermeden önce bir grubun diğer bir grup üzerine etkisinin tanımını verelim. Aşağıdaki tanımları [2] da daha detaylı olarak bulabilirsiniz.

Grup etkisi: M ve P iki grup olsun.

$$M \times P \rightarrow M, (m, p) \rightarrow m^p$$

ile gösterilen bir dönüşüm var olsun. Eğer bu dönüşüm aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, P grubu M grubu üzerine sağdan etki ediyor denir. Benzer şekilde sol etkide tanımlanabilir. Bu durumda $P \times M \rightarrow M; (p, m) \rightarrow {}^p m$ ile gösterilen bir dönüşüm vardır ve her dönüşüm için sağ etkide kullanılan koşullar sadece etkinin yerini değiştirerek yani sola alınarak sağlanır.

1. Her $m, m' \in M$ ve $p \in P$ için

$$(m, m')^p = m^p \cdot m'^p$$

2. Her $m \in M$ ve $p, p' \in P$ için

$$(m^p)^{p'} = m^{pp'}$$

3. $1_p \in P$ için $m^{1_p} = m$ ve $(1_m)^p = 1_m$ dir.

M ve P iki grup ve $\partial: M \rightarrow P$ bir grup homomorfizması olsun P nin M üzerine sağdan bir grup etkisinin var olduğunu kabul edelim. Bu etki $p \in P$ ve $m \in M$ olmak üzere m^p gösterilecektir.

Eğer,

CM1) Her $m \in M$ ve $p \in P$ için

$$\partial(m^p) = p^{-1} \partial(m) p$$

özelligi sağlanıyorsa ∂ ya bir ön-çaprazlanmış modül denir.

Eğer $\partial: M \rightarrow P$ bir ön-çaprazlanmış modül ve

CM2) Her $m, m' \in M$ için

$$m^{\partial(m')} = (m')^{-1} m m'$$

şartı sağlanıyorsa ∂ ya çaprazlanmış modül denir.

Benzer şekilde sol etkiye göre de çaprazlanmış modül tanımı verilebilir. Bu durumda P nin M üzerine etkisi Pm ile gösterilebilir ve çaprazlanmış modül aksiyomları aşağıdaki gibi olur.

CM1) Her $m \in M$ ve $p \in P$ için

$$\partial({}^Pm) = p\partial(m)p^{-1}$$

ve

CM2) Her $m, m' \in M$ için

$$\partial m' m = m' m (\partial m')^{-1}$$

dir.

Şimdi objeleri $\partial : M \rightarrow P$ şeklindeki çaprazlanmış modüller olan morfizmleri aşağıdaki gibi tanımlanan çaprazlanmış modüllerin kategorisini tanımlayacağız. Bu kategorinin morfizmleri ise $\partial : M \rightarrow P$ den $\partial' : M' \rightarrow P'$ e giden ve $(\alpha, \beta) : \partial \rightarrow \partial'$ aşağıdaki diyagramı komütatif yapan homomorfizm çiftidir.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\partial} & P \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ M' & \xrightarrow{\partial'} & P' \end{array}$$

Yani $\beta\partial = \partial'\alpha$ olmalıdır. Ayrıca her $p \in P$ ve $m \in M$ için

$$\alpha(m^p) = \alpha(m)^{\beta(p)}$$

olmalıdır.

Böyle çaprazlanmış modüllerin kategorisini **XMod** şeklinde göstererek tanımlamış oluruz.

Şimdi ilk olarak R. Brown [11] tarafından 2010 yılında tanımlanmış olan bir kategori üzerindeki whiskering dönüşümlerinden bahsedeceğiz.

1.3. Whiskered Kategoriler

$\mathbf{C} = (C_1, C_0)$, objeler kümesi C_0 ve morfizmler kümesi C_1 olan bir küçük kategori olsun. $0 \leq i, j \leq 1$ ve $i + j \leq 1$ olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan $m_{i,j} : C_i \times C_j \rightarrow C_{i+j}$ dönüşümleri varsa bu dönüşümlere $\mathbf{C}$ kategorisi üzerindeki whiskering dönüşümleri, $(\mathbf{C}, \mathbf{m})$ ikilisine ise whiskered kategori denir.

1. $m_{0,0} : C_0 \times C_0 \rightarrow C_0$, C_0 kümesi üzerinde bir ikili işlem belirtir ve $(C_0, m_{0,0})$ ikilisi bir monoid yapısı oluşturur.

2. $x \in C_0$ ve $a : u \rightarrow v$ C_1 de bir morfizm olmak üzere

$$m_{0,1}(x, a) : m_{0,0}(x, u) \rightarrow m_{0,0}(x, v)$$

dir. Yani $m_{0,1}(x, a) \in C_1$, $m_{0,0}(x, u)$ dan $m_{0,0}(x, v)$ ye tanımlı bir morfizm olmalıdır. Ayrıca

$$m_{0,1}(m_{0,0}(x, y), a) = m_{0,1}(x, m_{0,1}(y, a))$$

$$m_{0,1}(x, a \circ b) = m_{0,1}(x, a) \circ m_{0,1}(x, b)$$

$$m_{0,1}(1, a) = a, m_{0,1}(x, 1_y) = 1_{xy}$$

dir.

3. Yukarda $m_{0,1} : C_0 \times C_1 \rightarrow C_1$ dönüşümü için verilen özellikleri $m_{1,0} : C_1 \times C_0 \rightarrow C_1$ dönüşümünde sağlaması gerekir.

4. $x, y \in C_0, a \in C_1$ olmak üzere

$$m_{0,1}(x, m_{1,0}(a, y)) = m_{1,0}(m_{0,1}(x, a), y)$$

olmalıdır.

1.4. Çaprazlanmış Modüller ve Whiskered Grupoidler

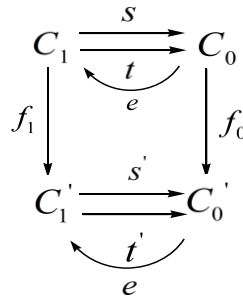
(C_1, C_0) bir küçük kategori olsun. Her morfizmi bir izomorfizm olan küçük kategoriye grupoid denir. Şimdi bu tanımlı Brown-Gilbert [10] den, daha detaylı olarak aşağıdaki gibi verelim.

(C_1, C_0) bir küçük kategori olsun. $x, y \in C_0$ olmak üzere $C_1(x, y) = \{a \in C_1 : a : x \rightarrow y\}$ şeklinde x den y ye giden bir morfizmlerin kümesi olsun.

Burada x e a nın kaynağı denir ve $s(a)$ ile gösterilir, y ye a nın hedefi denir ve $t(a)$ ile gösterilir. $x \xrightarrow{a} y \xrightarrow{b} z$ iki morfizmin kompozisyonu ise, $t(a) = s(b) = y$ olmak üzere $b \circ a$ ile gösterilir ve $s(b \circ a) = x = s(a)$, $t(b \circ a) = z = t(b)$ olur. Bu $\circ : C_1 \times C_1 \rightarrow C_1$ kompozisyon işlemi asosyatiftir ve birimlik özelliğini sağlar. Her $x \in C_0$ için $e(x) = 1_x : x \rightarrow x$ birim morfizmi vardır ve $s(e(x)) = x = t(e(x))$ olur. Tüm bu verilere göre her $a : x \rightarrow y$ morfizminin $a^{-1} : y \rightarrow x$ ters morfizmi vardır ve $a^{-1} \circ a = e_x$, $a \circ a^{-1} = e_y$ özellikleri sağlanırsa (C_1, C_0, s, t, e) yapısına C_0 obje kümeli bir grupoid denir.

Ayrıca bu grupoid üzerinde $m_{i,j} : C_i \times C_j \rightarrow C_{i+j}$, $i + j \leq 1$ olacak şekilde whiskering dönüşümleri varsa (C_1, C_0) grupoidine whiskered grupoid denir.

Objeleri (C_1, C_0, m) şeklindeki whiskered grupoidler olan kategoriyi düşünelim. Bu kategorinin morfizmleri



diyagramında ki $(f_1 f_0)$ çiftleridir. Ancak f_0 bir monoid morfizmi olup; f_1 bir dönüşüm ve $a \in C_1, a : x \rightarrow y, u \in C_0$ olmak üzere

1. $t' f_1(a) = f_0 t(a)$
2. $f_1(m_{0,1}(u, a)) = m'_{0,1}(f_0(u), f_1(a))$
3. $f_1(m_{1,0}(a, u)) = m'_{1,0}(f_1(a), f_0(u))$
4. $f_0(x, y) = f_0(x), f_0(y), x, y \in C_0$

özelliklerini sağlar. Oluşturmuş olduğumuz bu kategoriyi **WGr** ile göstereceğiz. Şimdi Ulualan ve Pak [31] tarafından verilen çaprazlanmış modüller ve whiskered grupoidler arasındaki ilişkiyi aşağıda vereceğiz.

1.4.1. Önerme[31]: Çaprazlanmış modüller kategorisinden whiskered grupoidler kategorisine bir fonktor oluşturulabilir.

İspat: $\partial: M \rightarrow P$ bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda P nin M grubu üzerine sağdan grup etkisi var olduğuna göre $M \rtimes P$ şeklindeki yarı direkt çarpım grubunu oluşturabiliriz $M \rtimes P$ deki işlem;

$$(m, p).(m', p') = (mm'^p, pp')$$

şeklindedir.

$$C_0 = P \text{ ve } C_1 = M \rtimes P$$

diyelim.

Şimdi (C_1, C_0) da ki s, t, e ve " $\circ$ " işlemini tanımlamalıyız.

$$s(m, p) = p, \quad t(m, p) = (\partial m).p, \quad e(p) = (1, p)$$

olsun.

$$s(m', p') = p' = \partial m(p) = t(m, p)$$

olmak üzere (m', p') ve (m, p) morfizmlerinin kompozisyonu

$$(m', p') \circ (m, p) = (m'm, p)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu tanımlamaya göre

$$s((m', p') \circ (m, p)) = s(m'm, p)$$

$$= p$$

$$= s(m, p)$$

ve

$$t((m', p') \circ (m, p)) = t(m'm, p)$$

$$= \partial(m')\partial(m)p$$

$$= \partial(m')p' \quad (\because \partial(m)p = p')$$

$$= t(m', p')$$

elde edilir. Ayrıca

$$e : P \rightarrow M \rtimes P; \quad e(p) = (1, p)$$

olduğundan;

$$se(p) = s(1, p) = p \text{ olup } se = id : C_0 \rightarrow C_0,$$

$$te(p) = t(1, p) = \partial(1).p = p \text{ olup } te = id : C_0 \rightarrow C_0$$

bulunur. Ayrıca ;

$$(m, p) : p \rightarrow \partial(m)p$$

morfizminin tersi;

$$(m^{-1}, \partial(m)p) : \partial(m)p \rightarrow p$$

şeklindedir. Dolayısıyla (C_1, C_0, s, t, e) gibi bir grupoid elde etmiş oluruz. Şimdi P nin M üzerine soldan (veya sağdan) olan etkisine göre whiskering dönüşümlerini tanımlayacağız.

$$\begin{aligned} m_{0,1} : C_0 \times C_1 &\longrightarrow C_1 \\ (p, (m, p')) &\longrightarrow ({}^p m, pp') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{1,0} : C_1 \times C_0 &\longrightarrow C_1 \\ ((m, p'), p) &\longrightarrow (m, p'p) \end{aligned}$$

ve $m_{0,0}$ ise P nin grup işlemi olsun.

Şimdi bu verilen dönüşümlerin whiskering şartlarını sağladığını göstermeye çalışalım.

1. $m_{0,0}$, P nin grup işlemi ve her grup bir monoid olduğundan $m_{0,0}$ aynı zamanda $C_0 = P$ üzerinde monoid yapısı olacaktır.

2. $m_{0,1}$ için sağlatalım: $p, p' \in C_0$ ve $(m, p') \in C_1$ olmak üzere;

$$m_{0,1}(p, (m, p')) = ({}^p m, pp')$$

olup,

$$s(p_m, pp') = pp' = m_{0,0}(pp')$$

$$= m_{0,0}(p, s(m, p'))$$

ve

$$\begin{aligned}
t(p_m, pp') &= \partial(p_m)pp' \\
&= p\partial mp^{-1}pp' \quad (\because \partial \text{ çaprazlanmış modül}) \\
&= p\partial mp' \\
&= p((\partial m)p') \\
&= m_{0,0}(p, t(m, p'))
\end{aligned}$$

olup;

$$m_{0,1}(p, (m, p')) : m_{0,0}(p, s(m, p')) \longrightarrow m_{0,0}(p, t(m, p'))$$

dür diyebiliriz.

$$\begin{aligned}
a &= (m', p'), \quad b = (m, p) \text{ ve} \\
a \circ b &= (m', p') \circ (m, p) = (m'm, p)
\end{aligned}$$

olup $u \in C_0$ olmak üzere

$$m_{0,1}(u, a \circ b) = m_{0,1}(u, a) \circ m_{0,1}(u, b)$$

olmalıdır.

$$\begin{aligned}
m_{0,1}(u, a \circ b) &= m_{0,1}(u, (m'm, p)) \\
&= ({}^u m'm, up) \\
&= ({}^u m' {}^u m, up) \\
&= ({}^u m', up) \circ ({}^u m, up) \\
&= m_{0,1}(u, (m', p')) \circ m_{0,1}(u, (m, p)) \\
&= m_{0,1}(u, a) \circ m_{0,1}(u, b)
\end{aligned}$$

bulunur.

3. 2 de yapılan benzer işlemler $m_{1,0} : C_1 \times C_0 \longrightarrow C_0$ dönüşümü içinde yapılabilir. Bu aksiyomları alıştırma olarak okuyucuya bırakıyoruz.

4. $x, y \in P = C_0$ ve $a \in C_1 = M \rtimes P$ için $a = (m, p)$ olmak üzere

$$m_{0,1}(x, m_{1,0}(a, y)) = m_{1,0}(m_{0,1}(x, a), y)$$

olmalıdır.

$$m_{1,0}(a, y) = (m, py)$$

ve

$$m_{0,1}(x, (m, py)) = (x_m, x(py))$$

$$= (xm, (xp)y) \quad (\because C_0 \text{ bir monoid})$$

$$= (m_{1,0}(xm, xp), y)$$

$$= m_{1,0}(m_{0,1}(x, (m, p)), y)$$

olup istenilen eşitlik sağlanmış olur. Bu durumda,

$$F : \mathbf{XMod} \longrightarrow \mathbf{WGr}$$

$$F(\partial : M \rightarrow P) = (M \times P \xrightleftharpoons[t]{s} P, m_{0,0}, m_{0,1}, m_{1,0})$$

Şeklinde çaprazlanmış modüller kategorisinden whiskered grupoidler kategorisine bir fonktor oluşturmuş oluruz. Böylece önermenin ispatı bitmiş olur.

1.4.2. Uyarı: Tahmin edildiğinin aksine whiskered grupoidler kategorisinden çaprazlanmış modüller kategorisine yukarıda verilen fonktorun tersi yani denk kategoriler yapacak şekilde sol adjoint fonktoru yoktur. Whiskered grupoidler kategorisinden çaprazlanmış modüller kategorisine bir fonktor tanımlamak için bazı ek şartlara ihtiyacımız vardır. Bunu aşağıda verilen önermede belirteceğiz.

1.4.3. Önerme: [31] $(C_1, C_0, m_{i,j})$ bir whiskered grupoid olsun. Eğer obje kümesi olan C_0 , $m_{0,0} : C_0 \times C_0 \longrightarrow C_0$ işlemine göre bir grup ise

(i) $K = \{a \in C_1 : t(a) = 1\}$ kümesi $a, b \in K$ için

$$ab = b \circ m_{1,0}(a, s(b))$$

işlemine göre bir gruptur

(ii) $s : K \rightarrow C_0$ kaynak dönüşümü bir grup homomorfizmidir.

(iii) $p \in C_0$ ve $a \in K$ olmak üzere p nin a üzerindeki grup etkisi

$${}^p a = m_{0,1}(p, m_{1,0}(a, p^{-1}))$$

veya

$${}^p a = m_{1,0}(m_{0,1}(p, a), p^{-1})$$

ile verilir.

(iv) s homomorfizmi bu etkilere göre bir çaprazlanmış modül olur.

İspat: Bu önermenin uzun ispatını [31] bulabiliriz. Ancak tezimizin bazı kısımlarında kullanacağımız bazı şıkların ispatını burada vereceğiz.

(iii) $p_1, p_2 \in C_0$ ve $a \in K$ için

$$\begin{aligned} {}^{p_2}({}^{p_1}a) &= p_1(m_{1,0}(p_2, m_{1,0}(a, p^{-1}))) \\ &= m_{0,1}(p_1, m_{1,0}(m_{0,1}(p_2, m_{1,0}(a, p_2^{-1})), p_1^{-1})) \\ &= m_{0,1}(p_1, m_{0,1}(p_2, m_{1,0}(m_{1,0}(a, p_2^{-1}), p_1^{-1}))) \quad (4. \text{aksiyomdan}) \\ &= m_{0,1}(p_1, m_{0,1}(p_2, m_{1,0}(a, p_2^{-1} p_1^{-1}))) \quad (2. \text{aksiyomdan}) \\ &= m_{0,1}(p_1 p_2, m_{1,0}(a, p_2^{-1} p_1^{-1})) \\ &= {}^{p_1 p_2} a \end{aligned}$$

olur. Böylece grup etkisinin 1. aksiyomu sağlanmış olur.

$a, b \in K$ ve $p \in C_0$ için ${}^p(ab) = {}^p a \cdot {}^p b$ olmalıdır. Buna göre

$$\begin{aligned} {}^p(ab) &= m_{0,1}(p, m_{1,0}(ab, p^{-1})) \\ &= m_{0,1}(p, m_{1,0}(b \circ m_{1,0}(a, s(b)), p^{-1})) \quad (2. \text{aksiyomdan}) \\ &= m_{0,1}(p, m_{1,0}(b, p^{-1})) \circ m_{0,1}(p, m_{1,0}(m_{1,0}(a, s(b)), p^{-1})) \quad (4. \text{aksiyomdan}) \\ &= m_{0,1}(p, m_{1,0}(b, p^{-1})) \circ m_{1,0}(m_{0,1}(p, m_{1,0}(a, p^{-1})), ps(b)p^{-1}) \\ &= m_{0,1}(p, m_{1,0}(a, p^{-1})) \cdot m_{0,1}(p, m_{1,0}(b, p^{-1})) \\ &= ({}^p a) \cdot ({}^p b) \end{aligned}$$

olup grup etkisinin diğ er bir aksiyomuda gösterilmiş olur. Önermede verilen diğ er şıkların ispatı için [31]a bakınız.

2. BÖLÜM

2.1. 2-Çaprazlanmış Modüller Üzerinde Örgü Dönüşümü

2-Çaprazlanmış modüller, Whitehead'ın [32] çalışmasını genişleterek Conduche [14,15] tarafından homotopi tipi 3-tip olan topolojik uzaylara karşılık gelen cebirsel bir model olarak tanımlanmıştır. 2- çaprazlanmış modül tanımını Conduche'den aşağıdaki gibi verebiliriz

$$K \xrightarrow{\partial_2} L \xrightarrow{\partial_1} M$$

grupların bir kompleksi yani $\partial_1 \partial_2 = 1$ olsun. M nin L ve K üzerine bir grup etkisi vardır ve bu etkiye göre $\partial_1 : L \rightarrow M$ bir ön-çaprazlanmış modüldür. Ayrıca Peiffer Lifting dönüşümü diye adlandırılan

$$\{-, -\} : L \times L \rightarrow K$$

şeklinde tanımlı ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir dönüşüm mevcuttur. Bu şart şunlardır:

PL1. Her $l, l' \in L$ için

$$\partial_2 \{l, l'\} = l^{-1} (l')^{-1} l (l')^{\partial_1(l)} \text{ dir.}$$

PL2. Her $l \in L$ ve $k \in K$ için

$$\{\partial_2 k, l\} = k^{-1} k^l$$

ve

$$\{l, \partial_2 k\} = (k^{-1})^l k^{\partial_1(l)} \text{ dir.}$$

PL3. Her $g, h, k \in L$ için

$$\{g, hk\} = \{g, k\} \cdot \{g, h\}^{\partial_1 g} \text{ dir.}$$

PL4. Her $g, h, k \in L$ için

$$\{gh, k\} = \{g, k\}^h \cdot \{h, k\}^{\partial_1 g} \text{ dir.}$$

PL5. Her $m \in M$ ve $g, h \in L$ için

$$\{g, h\}^m = \{g^m, k^m\} \text{ dir.}$$

Yukarda tanımlanan dönüşüm ile birlikte $K \xrightarrow{\partial_2} L \xrightarrow{\partial_1} M$ kompleksi bir 2-çaprazlanmış modül olur

Şimdi objeleri $K \xrightarrow{\partial_2} L \xrightarrow{\partial_1} M$ şeklindeki 2-çaprazlanmış modüller olan kategoriyi tanımlayacağız. Bu kategorinin morfizmleri

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{\partial_2} & L & \xrightarrow{\partial_1} & M \\ \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \\ K & \xrightarrow{\partial'_2} & L' & \xrightarrow{\partial'_1} & M' \end{array}$$

diyagramını komütatif yapan (f_0, f_1, f_2) homomorfizmleridir ve ayrıca M nin etkisini korurlar.

Yani her $m \in M, l \in L$ ve $k \in K$ için

$$f_1(l^m) = f_1(l)^{f_0(m)}$$

ve

$$f_2(k^m) = f_2(k)^{f_0(m)} \text{ olur.}$$

Ayrıca $\{-, -\} : L \times L \rightarrow K$ ve $\{-, -\}' : L' \times L' \rightarrow K'$ Peiffer Lifting dönüşümleri için

$$f_2\{x, y\} = \{f_1(x), f_1(y)\}'$$

her $x, y \in L$ için sağlanmalıdır. 2-çaprazlanmış modüllerin kategorisini $\mathbf{X}_2\mathbf{Mod}$ ile gösterelim.

2.2. Örgülü 2-Çaprazlanmış Modüller

Literatüre göre örgülü 2-çaprazlanmış modüller ilk olarak Carrasco'nun doktora tezinde [12] incelenmiş daha sonra B .Noohi [25] 2010 yaptığı bir çalışmada bu yapının temel özelliklerini daha açık olarak vermiştir. B.Noohi [25] bu çalışmasında örgülü 2-çaprazlanmış modül tanımını aşağıdaki gibi düzenlemiştir. Şimdi örgülü 2-çaprazlanmış modül tanımını verelim.

2.2.1. Tanım: $C : K \xrightarrow{\partial_2} L \xrightarrow{\partial_1} M$ aşağıdaki ek özelliklerle birlikte bir 2-çaprazlanmış modül olsun.

1. M nin K üzerine etkisi birim etkidir.

2. $\{-, -\} : L \times L \rightarrow K$ olan Peiffer Lifting dönüşümü simetriktir. Yani her $g, h \in L$ için

$$\{g, h\}\{h, g\} = 1$$

dir.

Ayrıca $\{-, -\}' : M \times M \rightarrow L$ aşağıdaki şartları sağlayan bir dönüşüm varsa $\mathbf{C}$ ye örgülü 2-çaprazlanmış modül denir.

B1. Her $x, y \in M$ için

$$\partial_1 \{x, y\}' = x^{-1}y^{-1}xy = [x, y] \text{ dir.}$$

B2. Her $x \in M$ ve $l \in L$ için

$$\{\partial_1 l, x\}' = l^{-1}l^x \text{ dir.}$$

B3. Her $x \in M$ ve $l \in L$ için

$$\{x, \partial_1 l\}' = (l^{-1})^x l \text{ dir.}$$

Objeleri örgülü 2-çaprazlanmış modüller olan kategoriye oluşturalım. Bu kategorinin morfizmleri öncelikle

$$\mathbf{C} : K \rightarrow L \rightarrow M$$

ve

$$\mathbf{C}' : K' \rightarrow L' \rightarrow M'$$

olmak üzere $f_0 : M \rightarrow M'$, $f_1 : L \rightarrow L'$ ve $f_2 : K \rightarrow K'$ birer 2-çaprazlanmış modül morfizmidir. Ayrıca her $x, y \in M$ için

$$f_1 \{x, y\}' = \{f_0(x), f_0(y)\}'$$

şartınıda sağlamalıdır. Bu kategoriye **BX₂Mod** ile gösterelim.

Bu bölümde tezin ana konusu olan örgülü 2-çaprazlanmış modüller kategorisi ile Moore kompleksinin boyutu ≤ 3 olan indirgenmiş simplisel gruplar kategorisinin denk olduğunu göstereceğiz. Aslında bir örgülü 2-çaprazlanmış modül [8] de tanımlanan 3-çaprazlanmış modülün indirgenmiş halidir. Bu denkliği kurarken $F_{\alpha, \beta}$ yapılarını kullanacağız. Böylece $F_{\alpha, \beta}$ fonksiyonlarının bir uygulamanı vermiş olmakla birlikte, örgülü 2-çaprazlanmış modüllerin bir cebirsel model olduğunu kanıtlamış olacağız. Çünkü simplisel gruplar herhangi bir homotopi

tipine karşılık gelen yapılara birer cebirsel model olarak düşünülebilirler. Şimdi daha detaylı olarak 1. Bölümde de verdiğimiz whiskering dönüşümlerini kullanarak bir 2-çaprazlanmış modül üzerindeki whiskering dönüşümlerinin nasıl olacağını verelim. Bunu grupların bir kompleksini kullanarak aşağıdaki tanımla açıkça vereceğiz. Bu tanımın daha değişik fakat aşağıdaki tanıma denk olan halini Noohi [25] de bulabilirsiniz.

2.2.2 Tanım:

$$C_3 \xrightarrow{\delta_3} C_2 \xrightarrow{\delta_2} C_1$$

grupların bir kompleksi ve $\delta_2(C_2)$ nin C_3 üzerine etkisi birim etki ve C_1 in C_2 ve C_3 üzerine grup etkisi var olsun. $\delta_2 : C_2 \rightarrow C_1$ homomrfizmi C_1 in C_2 üzerine olan etkisiyle birlikte bir ön çaprazlanmış modül olsun. Aynı zamanda $i, j \geq 0$ ve $i + j \leq 3$ olmak üzere $m_{i,j} : C_i \times C_j \rightarrow C_{i+j}$ aşağıdaki özellikleri sağlayan whiskering operatörleri var olsun. Bu operatörler aşağıdaki özellikleri sağlamalıdır.

W1. Her $c_1, c_1' \in C_1$ $c_2 \in C_2$ için

$$\bullet m_{1,2}(c_1 c_1', c_2) = m_{1,2}(c_1', c_2) \cdot m_{1,2}(c_1, c_2)^{c_1'}$$

$$\bullet m_{2,1}(c_2, c_1 c_1') = m_{2,1}(c_2, c_1)^{c_1'} \cdot m_{2,1}(c_2, c_1')$$

W2. Her $c_1 \in C_1$ ve $c_2 \in C_2$ için

$$\bullet \delta_3 m_{2,1}(c_2, c_1) = c_2^{-1} c_2^{c_1} \cdot m_{1,1}(\delta_2 c_2, c_1)$$

$$\bullet \delta_3(m_{1,2}(c_1, c_2)) = m_{1,2}(c_1, \delta_2 c_2)^{-1} \cdot c_2^{-1} \cdot c_2^{c_1}$$

W3. Her $c_1 \in C_1$ ve $c_3 \in C_3$ için

$$\bullet m_{2,1}(\delta_3(c_3), c_1) = (c_3^{-1})^{c_1} c_3$$

$$m_{2,1}(\delta_3(c_3), c_1) \cdot m_{1,2}(c_1, \delta_3(c_3)) = 1$$

$$\bullet m_{1,2}(c_1, \delta_3(c_3)) = c_3^{-1} \cdot c_3^{c_1}$$

olmalıdır.

W4. Her $c_1, d_1 \in C_1$ için

$$\bullet \delta_2(m_{1,1}(c_1, d_1)) = [d_1, c_1]$$

dir.

Bu $m_{1,1} : C_1 \times C_1 \rightarrow C_2, m_{1,2} : C_1 \times C_2 \rightarrow C_3, m_{2,1} : C_2 \times C_1 \rightarrow C_3$ operatörleri ile birlikte $C_3 \xrightarrow{\delta_3} C_2 \xrightarrow{\delta_2} C_1$ kompleksine whiskered çaprazlanmış modül adını vereceğiz. Bu whiskered çaprazlanmış modül üzerindeki örgü dönüşümü ise

$$\{-, -\} : C_2 \times C_2 \rightarrow C_3$$

şeklin de bir dönüşüm olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

B1. Her $c_2, c_2', d_2, d_2' \in C_2$ için

$$\bullet \{c_2, d_2 d_2'\} = \{c_2, d_2\}^{d_2'} \{c_2, d_2'\}$$

$$\bullet \{c_2 c_2', d_2\} = \{c_2', d_2\} \{c_2, d_2\}^{c_2'}$$

B2. Her $c_2, d_2 \in C_2$ için

$$\bullet \delta_3 \{c_2, d_2\} = [d_2, c_2]$$

B3. Her $c_2 \in C_2$ ve $c_3 \in C_3$ için

$$\bullet \{c_2, \delta_3 c_3\} = c_3^{-1} c_3^{c_2}$$

B4. Her $c_2 \in C_2$ ve $c_3 \in C_3$ için

$$\bullet \{\delta_3 c_3, c_2\} = (c_3^{c_2})^{-1} c_3$$

dir.

Burada dikkat edilirse $C_3 \xrightarrow{\delta_3} C_2 \xrightarrow{\delta_2} C_1$ kompleksi $\{-, -\} : C_2 \times C_2 \rightarrow C_3$ dönüşümü ile birlikte $\delta_2(C_2)$ nin C_3 üzerine etkisi birim olması farkıyla bir 2-çaprazlanmış modül olur. Bu yapıya $\{-, -\}$ dönüşümü ile birlikte örgülü 2-çaprazlanmış modül veya whiskered 2-çaprazlanmış modül diyeceğiz.

Görülüyor ki bir örgülü 2-çaprazlanmış modül aşağıdaki gibi daha açık verilebilir.

Veriler:

1. $C_3 \xrightarrow{\delta_3} C_2 \xrightarrow{\delta_2} C_1$ bir C_i -grupların kompleksini oluştursunlar. Yani C_1 in C_i üzerine $1 \leq i \leq 3$ olmak üzere etkileri vardır ve C_1 in kendi üzerine etkisi eşlenik etkidir.

2. C_2 nin C_3 üzerine bir etkisi vardır ve $\delta_2(C_2)$, C_3 üzerine birim etki ile etki eder.

3. $i, j \geq 0$ ve $i + j \leq 3$ olmak üzere W1-W4 özelliklerini sağlayan $m_{i,j} : C_i \times C_j \rightarrow C_{i+j}$ whiskering operatörleri mevcuttur.

4. $C_3 \xrightarrow{\delta_3} C_2 \xrightarrow{\delta_2} C_1$ yapısı üzerinde $\{-, -\} : C_2 \times C_2 \rightarrow C_3$ örgü dönüşümü olarak adlandırılan dönüşüm vardır ve B1-B4 özelliklerin sağlarlar. Ayrıca bu dönüşüm ile birlikte

$$C_3 \xrightarrow{\delta_3} C_2 \xrightarrow{\delta_2} C_1$$

kompleksi $\delta_2(C_2)$ nin C_3 üzerine etkisi birim olan özel bir 2-çaprazlanmış modüldür.

Şimdi Moore kompleksinin boyutu ≤ 3 olan indirgenmiş simplisel gruplardan örgülü 2-çaprazlanmış modüllere giden fonktör oluşturalım. Bundan önce bazı temel bilgileri verelim.

2.3. Simplisel Grup ve Moore Kompleks**2.3.1. Tanım:**

$[n] = \{0 < 1 < 2 \cdots < n\}$ sıralı kümesini yani n -simplekslerin oluşturduğu kümeler sınıfını göz önüne alalım. Bu sınıfın bir kategori oluşturduğunu göstereceğiz. Bu kategorinin objeleri $[n]$ şeklindeki n -simpleksler morfizimleri ise $f : [n] \rightarrow [m]$ şeklinde sıra koruyan monoton fonksiyonlardır. Yani $i \leq j$ ise $f(i) \leq f(j)$ şeklinde tanımlıdır. Böyle f dönüşümlerine operatör denir. Detaylı bilgi için [14], [15] ve [16] ya bakınız.

2.3.2. İki özel operatör:

Şimdi $f : [n] \rightarrow [m]$ şeklinde sıra koruyan fonksiyonları oluşturan operatörlerin özelliklerini inceleyelim. İlk olarak $\delta_i^n : [n-1] \rightarrow [n]$, $0 \leq i \leq n$ olmak üzere

$$\delta_i^n \begin{cases} x; & x < i \\ x+1; & x \geq i \end{cases} \text{şeklin de tanımlayalım.}$$

Bu durumda

$$\begin{array}{ccccc}
 & \xrightarrow{\delta_0^1} & & \xrightarrow{\delta_0^2} & \\
 [0] & \xrightarrow{\delta_1^1} & [1] & \xrightarrow{\delta_1^2} & [2] \dots \\
 & \xrightarrow{\delta_2^1} & & \xrightarrow{\delta_2^2} &
 \end{array}$$

olacağı açıktır. Bu δ_i^n dönüşümleri 1-1 olup değer kümesinde i . ögeyi boş bırakırlar. Yani örten değildirler. Örneğin $\delta_i^2 : [1] \rightarrow [2]$, $0 \leq i \leq 2$ olmak üzere δ_0^2, δ_1^2 ve δ_2^2 operatörlerinin karakterlerini inceleyelim.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc} [1]: & 0 & 1 \\ \delta_0^2 \downarrow & \searrow & \searrow \\ [2]: & 0 & 1 & 2 \end{array} &
 \begin{array}{ccc} [1]: & 0 & 1 \\ \delta_1^2 \downarrow & \downarrow & \searrow \\ [2]: & 0 & 1 & 2 \end{array} &
 \begin{array}{ccc} [1]: & 0 & 1 \\ \delta_2^2 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ [2]: & 0 & 1 & 2 \end{array}
 \end{array}$$

olur. İkinci özel operatör ise $\sigma_j^n : [n+1] \rightarrow [n]$, $0 \leq j \leq n$ olmak üzere

$$\sigma_j^n(x) = \begin{cases} x; & x \leq j \\ x-1; & x > j \end{cases} \text{ ile tanımlı örten dönüşümlerdir.}$$

Bu durumda

$$\begin{array}{ccccc}
 & \xleftarrow{\sigma_0^0} & & \xleftarrow{\sigma_0^1} & \\
 [0] & \xleftarrow{\sigma_1^0} & [1] & \xleftarrow{\sigma_1^1} & [2] \dots \\
 & & & \xleftarrow{\sigma_2^1} &
 \end{array}$$

olacağı açıktır. Bu σ_j^n dönüşümleri örten olup değer kümesinde j . elemanına iki farklı elemanı getirir. Örneğin $\sigma_i^2 : [3] \rightarrow [2]$, $0 \leq i \leq 2$ olmak üzere σ_0^2, σ_1^2 ve σ_2^2 operatörlerinin karakterlerini inceleyelim.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{cccc} [3]: & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \sigma_0^2 \downarrow & \downarrow & \searrow & \searrow & \searrow \\ [2]: & 0 & 1 & 2 \end{array} &
 \begin{array}{cccc} [3]: & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \sigma_0^2 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \searrow & \searrow \\ [2]: & 0 & 1 & 2 \end{array} &
 \begin{array}{cccc} [3]: & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \sigma_0^2 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \searrow \\ [2]: & 0 & 1 & 2 \end{array}
 \end{array}$$

olur.

2.3.3. Tanım:

Objeleri $[n]$ şeklindeki küçük kategoriler morfizmleri ise yukarda karakterlerini incelediğimiz özel operatörler tarafından üretilen operatörler olan kategori oluşturabiliriz:

a) Objeler ; $[n]$ küçük kategorileri veya n-simpleksler ,

b) Morfizimleri $f : [n] \rightarrow [m]$ şeklindeki sıra koruyan operatörler

c) Kompozisyon;

$$Mor([n], [m]) \times Mor([m], [k]) \rightarrow Mor([n], [k])$$

$$(f, g) \rightarrow g \circ f$$

özellikleriyle $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$ ve $id_m \circ f = f$, $g \circ id_n = g$ sağlanır. Böylece objeleri küçük kategoriler yani n-simpleksler, morfizimleri ise $f : [n] \rightarrow [m]$ operatörleri olmak üzere bir kategori oluşturmuş oluyoruz. Bu kategoriye $\Delta[n]$ ile göstereceğiz. Böylece $\Delta[n]$ kategorisinin oppozit kategorisinden söz edebiliriz.

2.3.4. Tanım: Objeleri $\Delta[n]$ kategorisinin objeleri olan n-simpleksler morfizimleri ise $\Delta[n]$ kategorisinin sıra koruyan f operatörlerinin ters yönlü hali ve kompozisyon olarakta yeni haldeki durumu göz önüne alırsak, $\Delta[n]$ kategorisinin oppozit kategorisini oluşturmuş oluruz. Bu kategoriye $\Delta^{op}[n]$ kategorisi denir.

$$\Delta^{op}[n]: \dots \quad [2] \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_0^2} \\ \xrightarrow{\delta_1^2} \\ \xrightarrow{\delta_2^2} \\ \xleftarrow{\sigma_0^1} \\ \xleftarrow{\sigma_1^1} \end{array} \quad [1] \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_0^1} \\ \xrightarrow{\delta_1^1} \\ \xleftarrow{\sigma_0^0} \end{array} \quad [0]$$

Yukarda tanımladığımız δ_i^n ve σ_j^n özel operatörler, $m > i_1 > \dots > i_k \geq 0$, 0 sıra koruyan fonksiyonlar için bir taban teşkil ederler yani bu fonksiyonlar δ_i^n ve σ_j^n operatörleri cinsinden yazılabilirler. Şimdi bu durumu aşağıdaki önermede açıklayalım.

2.3.5. Önerme: $\Delta[n]$ kategorisinde herhangi bir $f : [n] \rightarrow [m]$ operatörü

$$m > i_1 > \dots > i_k \geq 0, \quad 0 \leq j_1 < \dots < j_k < n$$

ve h, k doğal sayılar olmak üzere $n - h + k = m$ olacak şekilde n ve m tam sayıları için

$$f = \delta_{i_1} \circ \delta_{i_2} \circ \dots \circ \delta_{i_k} \circ \sigma_{j_1} \circ \sigma_{j_2} \circ \dots \circ \sigma_{j_h}$$

şeklinde yazılabilir.

Burad $i_1, i_2, i_3, \dots, i_k$ lar $f([n])$ görüntü kümesinde olmayan elemanlar, $j_1, j_2, j_3, \dots, j_h$ lar ise $f(j) = f(j+1)$ özelliğindeki j lerdir.

2.3.6. Örnek: $f : [2] \rightarrow [2]$ operatörü $f(0) = 1, f(1) = 2$ ve $f(2) = 2$ olsun. f operatörünü δ_i^n ve σ_j^n operatörleri cinsinden yazalım.

Değer kümesinde bir tek 0 olmadığından $i = 0$ olur. $f(1) = f(2) = 2$ olduğundan $j = 1$ olur. O halde;

$$f : [2] \xrightarrow{\sigma_1^1} [1] \xrightarrow{\delta_0^2} [2] \text{ olup } f = \delta_0^2 \circ \sigma_1^1 \text{ olur.}$$

Gerçektende,

$$f(0) = \delta_i^{n+1} \circ \delta_j^n = \delta(0) = 1$$

$$f(1) = \delta_0^2 \circ \sigma_1^1(1) = \delta_0^2(1) = 2$$

$$f(2) = \delta_0^2 \circ \sigma_1^1(2) = \delta_0^2(1) = 2$$

olur.

2.3.7. Simplisel özdeşlikler

Burada δ_i^n ve σ_j^n operatörlerinin ikili bileşenlerinin sağladığı bazı özdeşlikleri vereceğiz. Bu özdeşliklere simplisel özdeşlikler adı verilir. Bu özdeşlikler aşağıdaki gibi verilebilir.

1. $i \leq j$ için $\delta_i^{n+1} \circ \delta_j^n = \delta_{j+1}^{n+1} \circ \delta_i^n$
2. $i \leq j$ için $\sigma_j^n \circ \sigma_i^{n+1} = \sigma_i^n \circ \sigma_{j+1}^{n+1}$
3. $\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1} = id_{[n]}$ $i = j$ veya $i = j+1$ ise
4. $\sigma_j^n \circ \delta_i^n = \delta_i^n \circ \sigma_{j-1}^{n-1}$ $i < j$
5. $\sigma_j^n \circ \delta_i^n = \delta_{i-1}^n \circ \sigma_j^{n-1}$ $i > j+1$

dir.

2.3.8. Tanım: Bir simplisel grup $\mathbf{G}, \Delta^{op}[n]$ kategorisinden $\mathbf{Grp}$, gruplar kategorisine tanımlı bir fonktörün görüntüsü olarak tanımlanabilir.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \xrightarrow{\delta_0^2} & & \xrightarrow{\delta_0^1} & & \\
& & \xrightarrow{\delta_1^2} & & \xrightarrow{\delta_1^1} & & \\
\Delta^{op}[n]: \dots & [2] & \xrightarrow{\delta_2^2} & [1] & \xrightarrow{\delta_1^1} & [0] & \\
& & \xleftarrow{\sigma_0^1} & & \xleftarrow{\sigma_0^0} & & \\
& & \xleftarrow{\sigma_1^1} & & & & \\
\downarrow G & & & & & & \downarrow \\
& & \xrightarrow{d_0} & & \xrightarrow{d_0} & & \\
& & \xrightarrow{d_1} & & & & \\
\mathbf{Grp} & \dots & G_2 & \xrightarrow{d_2} & G_1 & \xrightarrow{d_1} & G_0 \\
& & \xleftarrow{s_0} & & \xleftarrow{s_0} & & \\
& & \xleftarrow{s_1} & & & &
\end{array}$$

Böylece bir simplisel $\mathbf{G}$ grubunu grupların bir koleksiyonu $\{G_n\}_{n \geq 0}$ ve;
 $d_i^n : G_n \rightarrow G_{n-1} \quad 0 \leq i \leq n; s_j^n : G_n \rightarrow G_{n+1} \quad 0 \leq j \leq n$ operatörleri (homomorfizmleri) ile
birlikte

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \xrightarrow{d_0} & & \xrightarrow{d_0} & & \\
& & \xrightarrow{d_1} & & \xrightarrow{d_1} & & \\
\mathbf{G}: \dots & G_2 & \xrightarrow{d_2} & G_1 & \xrightarrow{d_1} & G_0 & \\
& & \xleftarrow{s_0} & & \xleftarrow{s_0} & & \\
& & \xleftarrow{s_1} & & & &
\end{array}$$

diyagramını kullanarak temin edebiliriz. Bura da δ_i^n ve σ_j^n operatörleri simlisel özdeşlikleri sağladıklarından $\mathbf{G}(\delta_i) = d_i$ ve $\mathbf{G}(\sigma_j) = s_j$ olup $\mathbf{G}$ bir fonktor olduğundan d_i ve s_j homomorfizimlerde aşağıdaki simplisel özdeşlikleri sağlarlar.

1. $d_i^{n-1} d_j^n = d_{j-1}^{n-1} d_i^n \quad (0 \leq i < j \leq n)$
2. $s_i^{n+1} s_j^n = s_{j+1}^{n+1} s_i^n \quad (0 \leq i \leq j \leq n)$
3. $d_j^{n+1} s_j^n = s_{j-1}^{n-1} d_i^n \quad (0 \leq i \leq j \leq n)$
4. $d_i^{n+1} s_j^n = id \quad i = j \text{ veya } i = j+1 \text{ ise}$
5. $d_i^{n+1} s_j^n = s_j^{n-1} d_{i-1}^n \quad (0 \leq j \leq i-1 \leq n)$

2.3.9. Moore kompleks

$NG_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \text{Çek} d_i^n$ ve $\partial_n : NG_n \rightarrow NG_{n-1}$ 'e d_n^n operatörünün kısıtlanması olarak

$$(NG, \partial) : \cdots \rightarrow NG_2 \xrightarrow{\partial_2} NG_1 \xrightarrow{\partial_1} NG_0$$

şeklindeki grupların bir zincir kompleksini elde ederiz. Bu komplekse **G** simplisel grubunun Moore komplkesi denir. Eğer bir $n \in \mathbf{N}$ için $k > n$ olduğunda $NG_k = \{1\}$ oluyorsa, bu **G** simplisel grubuna Moore kompleksinin boyu $\leq n$ olan simplisel grup denir. Bu tür objelerin oluşturduğu kategoriye **SimpGrp** _{$\leq n$} ile göstereceğiz.

2.4. Hiper Çaprazlanmış Kompleks Çiftleri

Dold-Kan teoremine göre simplisel abelyen gruplar kategorisi ile grupların zincir kompleksinden oluşan kategori denk kategorilerdir. Carrasco ve Cegerra [13] da Dold-Kan teoreminin non-Abelian versiyonunu ispat etmek için hiper çaprazlanmış kompleks çiftlerini tanımlamışlardır. Arvasi [1] doktora tezinde bu çiftleri simplisel cebirlere uygulamış ve bunların görüntülerin nasıl bir kümeye eşit olduğunu araştırmış ve bazı uygulamalarını vermiştir.

Mutlu ve Porter [24] doktora tezinde ise bunların bir simplisel grubun Moore kompleksindeki Peiffer elemanlarını ele alarak görüntülerini incelemiş ve nasıl bir kümeye eşit olduğunu araştırmıştır. Daha sonra bu çiftlere $F_{\alpha, \beta}$ diyerek bu fonksiyonların 2-çaprazlanmış modüllerle ve çaprazlanmış karelerle olan ilişkisini vermiştir. Tezimizde kısaca Carrasco ve Cegerra [13] tarafından verilen hiper çaprazlanmış kompleks çiftlerinden bahsedip bu yapıları örgülü 2-çaprazlanmış modüller ile simplisel gruplar arasındaki ilişkiyi incelerken kullanacağız.

n pozitif bir tam sayı olmak üzere $0 \leq k \leq n$ için $[n]$ den $[n-k]$ ye giden bir f morfizminin $\sigma_j^n : [n+1] \rightarrow [n]$ şeklindeki örten sıra koruyan operatörler cinsinden yazıldığını biliyoruz. Burada $\sigma_j^n : [n+1] \rightarrow [n]$, $0 \leq j \leq n$ olmak üzere

$$\sigma_j^n(x) = \begin{cases} x; & x \leq j \\ x-1; & x > j \end{cases}$$

şeklindedir. $s(n, n-k)$ ile $[n]$ den $[n-k]$ ye giden mümkün olan tüm f morfizmlerin σ_j ler cinsinden yazıldığında alt indislerinin kümesini gösterelim. Yani;

$$f : [n] \rightarrow [n-k]; \quad f = \sigma_{j_1} \circ \sigma_{j_2} \circ \dots \circ \sigma_{j_s}$$

olduğundan; $(j_s, j_{s-1}, \dots, j_1) \in s(n, n-k)$ dır diyeceğiz. $n \in \mathbf{N}$ için

$$s(n) = s(n, n) \cup s(n, n-1) \cup \dots \cup s(n, 1) \cup s(n, 0)$$

olur. Örneğin

$$s(2) = \{\emptyset_2, (0), (1), (1, 0)\}$$

şeklindedir.

Burada $s(2, 0)$ demekle şunu kastediyoruz.

$$\begin{array}{ccc} f : [2] & \longrightarrow & [0] \\ 0 & \longrightarrow & 0 \\ 1 & \longrightarrow & \\ 2 & \longrightarrow & \end{array}$$

$f(0) = f(1)$ olduğundan; $j_1 = 0$ ve $j_2 = 1$ olup; $f = \sigma_0 \circ \sigma_1$ şeklinde olur. Alt indisler tersine sıralandığında $\alpha = (1, 0) \in s(2, 0)$ tek elemanlıdır. Bu şekilde yaparsak

$$s(2) = \{\emptyset_2, (0), (1), (1, 0)\}$$

kümesini elde etmiş oluruz. Burada $\emptyset_2 \in s(2, 2)$ ve $(0), (1) \in s(2, 1)$ dir.

$$\alpha = (i_r, \dots, i_1) < \beta(j_s, \dots, j_1) \in s(n)$$

olması için gerek ve yeter şart

$$\text{ya } i_1 = j_1, \dots, i_k = j_k \text{ fakat } k \geq 0 \quad i_{k+1} > j_{k+1} \text{ olmalı yada } i_1 = j_1, \dots, i_r = j_r \text{ ve } r < s$$

olmalıdır. Bu sıralama ile $s(n)$ kümesi sıralı bir kümedir.

Mutlu, Arvasi ve Porter'in [3, 24] hesaplamalarına göre;

$$s(3) = \{\emptyset_3 < (2) < (1) < (2, 1) < (0) < (2, 0) < (1, 0) < (2, 1, 0)\}$$

olduğu da gösterilir.

$$P(n) = \{(\alpha, \beta) : \alpha \cap \beta = \emptyset, \alpha, \beta \in s(n) \text{ ve } \alpha < \beta\}$$

kümesini oluşturalım. $\# \alpha$, α nın eleman sayısı olmak üzere

$$F_{\alpha, \beta}(x, y) = p\mu(s_\alpha, s_\beta)(x, y)$$

şeklinde tanımlı hiper çaprazlanmış kompleks çiftleri aşağıdaki değişmeli diyagramdan elde edilir.

$$\begin{array}{ccc}
 NG_{n-\#\alpha} \times NG_{n-\#\beta} & \xrightarrow{F_{\alpha,\beta}} & NG_n \\
 (s_\alpha, s_\beta) \downarrow & & \uparrow P \\
 G_n \times G_n & \xrightarrow{\mu} & G_n
 \end{array}$$

Burada;

$p = p_{n-1}p_{n-2} \cdots p_0$ olup; $0 \leq i \leq n-1$ için $p_i(x) = x^{-1}s_i d_i x$ ile tanımlı dönüşümlerin bileşkesi; $\mu: G_n \times G_n \rightarrow G_n$ komütatör dönüşüm yani

$$\mu(a, b) = [a, b] = a^{-1}b^{-1}ab, \quad s_\alpha = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}, \quad s_\beta = s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_s}$$

dir. $\alpha = (i_r, \dots, i_1)$ ve $\beta = (j_s, \dots, j_1)$ olmak üzere $F_{\alpha,\beta}(x, y) = p\mu(s_\alpha, s_\beta)(x, y)$ ile tanımlıdır.

Bu tanımlamaya göre $n = 2$ ve $n = 3$ için $F_{\alpha,\beta}$ operatörlerinin ayrıntılı incelenmesi için Arvasi-Porter[3] ve Mutlu-Porter [24]'a bakınız. Biz burada kısaca bu operatörlerin nasıl olduğunu vereceğiz.

2.4.1. Örnek: $n = 2$ için mümkün olan tek operatör

$$F_{(0),(1)}(x, y) = [s_0 x, s_1 y][s_1 y, s]$$

olup $x, y \in NG_1$ için

$$F_{(1,0),(2)}(x_1, y_2) = [s_1 s_0 x_1, s_2 y_2][s_2 y_2, s_2 s_0 x_1] \text{ dir.}$$

$n = 3$ için $x_1 \in NG_1, y_2 \in NG_2$ olmak üzere

$$F_{(1,0),(2)}(x_1, y_2) = [s_1 s_0 x_1, s_2 y_2][s_2 y_2, s_2 s_0 x_1]$$

$$F_{(2,0),(1)}(x_1, y_2) = [s_2 s_0 x_1, s_1 y_2][s_1 y_2, s_2 s_1 x_1][s_2 s_1 x_1, s_2 y_2][s_2 y_2, s_2 s_0 x_1]$$

ve $x_2 \in NG_2, y_1 \in NG_1$ için

$$F_{(0),(2,1)}(x_2, y_1) = [s_0 x_2, s_2 s_1 y_1][s_2 s_1 y_1, s_1 x_2][s_2 x_2, s_2 y_2]$$

ve son olarak $x_2, y_2 \in NG_2$ için

$$F_{(0),(1)}(x_2, y_2) = [s_0 x_2, s_1 y_2][s_1 y_2, s_1 x_2][s_2 x_2, s_2 y_2]$$

$$F_{(0),(2)}(x_2, y_2) = [s_0 x_2, s_2 y_2]$$

$$F_{(1),(2)}(x_2, y_2) = [s_1 x_2, s_2 y_2][s_2 y_2, s_2 x_2]$$

olur. Mutlu ve Porter bu elemanların görüntülerini ∂_n operatörleri altında incelemiş $n = 2$ için

$$\partial_2(NG_2 \cap D_2) = [\zeta k d_0, \zeta k d_1]$$

olduğunu göstermişlerdir. Detaylı bilgi için [3] ve [24] 'a bakınız. Burada D_n genel olarak G_n grubu içerisinde dejenere elemanlar tarafından üretilen bir alt gruptur. Yani $x \in D_n$ ise $x = s_i(y)$ olacak şekilde $y \in G_{n-1}$ vardır.

Şimdi bu $F_{\alpha,\beta}$ operatörleri yardımıyla simplisel gruplar ile örgülü 2-çaprazlanmış modüller arasındaki ilişkiyi kuralım. Bilindiği gibi bir indirgenmiş simplisel grup ilk bileşeni birim grup olan bir özel simplisel gruptur. G bir indirgenmiş simplisel grup olsun. Bu durumda $NG_0 = \{1\}$ birim grup olacaktır. d_0^1 ve d_1^1 operatörleri ise birim homomorfizm olacağından $\zeta k d_0' = G_1 = NG_1$ olur.

$$C_1 = G_1 \text{ olsun. } C_2 = NG_2 = \zeta k d_0^2 \cap \zeta k d_1^2 \text{ alalım. } C_3 = NG_3 / \partial_4(NG_4 \cap D_4) \text{ olsun.}$$

Bura da δ_2 ve δ_3 operatörlerini d_n^n nin NG_n ye kısıtlanmış olan operatörler yardımıyla elde ederiz. Burada C_2 in C_3 üzerine olan etkisi $x \in C_2$ ve $a \in C_3$ için

$$a^x = s_2 x a s_2 x^{-1}$$

şeklin de tanımlıdır. C_1 in C_2 ve C_3 üzerine etkisi ise $x \in C_1, a \in C_2$ ve $y \in C_3$ için

$$a^x = s_1 x a s_1 x^{-1}$$

$$y^x = \overline{s_1 s_0 x y s_1 s_0 x^{-1}} = s_1 s_0 x y s_1 s_0 x^{-1} \partial_4(NG_4 \cap D_4)$$

Şeklinde verilebilir. Bunlar birer grup etkisidir.

Bu etkilere göre önce $\delta_2(C_2)$ nin C_3 üzerine etkisinin birim olduğunu gösterelim.

Bir $c_2 \in C_2$ ve $c_3 \in C_3$ alalım

$$\overline{(c_3)}^{\delta_2(c_2)} = s_1 s_0 d_2 c_2 c_3 s_1 s_0 d_2 c_2^{-1} \partial_4(NG_4 \cap D_4)$$

dür. $F_{\alpha,\beta}$ operatörleri yardımıyla bu etkimin birim olduğunu gösterelim.

$c_2 \in NG_2$ ve $c_3 \in NG_3$ için

$$\partial_4(F_{(1,0)(3)}(c_2, c_3)) = [s_1 s_0 d_2 c_2, c_3] \in \partial_4(NG_4 \cap D_4)$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$\begin{aligned} \overline{(c_3)}^{\delta_2(c_2)} &= (s_1 s_0 d_2 c_2) c_3 (s_1 s_0 d_2 c_2^{-1}) \partial_4(NG_4 \cap D_4) \\ &= (s_1 s_0 d_2 c_2) c_3 (s_1 s_0 d_2 c_2^{-1}) c_3^{-1} c_3 \partial_4(NG_4 \cap D_4) \\ &= [s_1 s_0 d_2 c_2, c_3] c_3 \partial_4(NG_4 \cap D_4) \\ &= c_3 \partial_4(NG_4 \cap D_4) \\ &= \overline{c_3} \end{aligned}$$

olur.

Şimdi $m_{i,j}$ whiskering operatörünü tanımlayalım.

$m_{2,1} : C_2 \times C_1 \rightarrow C_3$ operatörünü $c_1 \in C_1$ ve $c_2 \in C_2$ için

$$m_{2,1}(c_2, c_1) = [s_2 c_1, s_2 s_1 c_1] [s_2 s_1 c_1, s_0 c_2^{-1} s_1 c_1] \partial_4(NG_4 \cap D_4)$$

şeklinde tanımlayalım

$m_{1,2} : C_1 \times C_2 \rightarrow C_3$ operatörünü $c_1 \in C_1$ ve $c_2 \in C_2$ için

$$m_{1,2}(c_1, c_2) = [s_2 s_0 c_1^{-1} s_2 s_1 c_1, s_1 c_2] \cdot [s_2 c_2, s_2 s_0 c_1^{-1} s_2 s_1 c_1] \partial_4(NG_4 \cap D_4)$$

şeklinde tanımlayalım. Son olarak

$m_{1,1} : C_1 \times C_1 \rightarrow C_2$ operatörünü ise $c_1, d_1 \in C_1$ için

$$m_{1,1}(c_1, d_1) = s_1 d_1^{-1} s_1 c_1^{-1} s_0 c_1 s_1 d_1 s_0 c_1^{-1} s_1 c_1 \in NG_3 \cap D_3$$

şeklinde tanımlayalım.

Şimdi geriye bir tek $\{-, -\} : C_2 \times C_2 \rightarrow C_3$ örgü dönüşümünü tanımlamak kaldı. Bu örgü dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$c_2, d_2 \in C_2$ olmak üzere

$$\{c_2, d_2\} = [s_2 d_2, s_2 c_2] \partial_4 (NG_4 \cap D_4)$$

olarak alalım.

Şimdi yukarda tanımladığımız $m_{1,1}, m_{1,2}, m_{2,1}$ operatörlerinin W1-W4 şartlarını sağladığını gösterelim.

Örneğin $c_1 \in C_1$ ve $c_2 \in C_2$ için

$$\delta_3(m_{2,1}(c_2, c_1)) = c_2^{-1}, c_2^{c_1} m_{1,1}(\delta_2 c_2, c_1)$$

olmalıdır.

$$\begin{aligned} \delta_3(m_{2,1}(c_2, c_1)) &= \delta_3([s_2 c_2, s_2 s_1 c_1] \cdot [s_2 s_1 c_1, s_0 c_2^{-1} s_1 c_2] \partial_4 (NG_4 \cap D_4)) \\ &= c_2^{-1} s_1 c_1^{-1} c_2 s_1 c_1 s_1 c_1^{-1} s_1 d_2 c_2^{-1} s_0 d_2 c_2 s_1 c_1 s_0 d_2 c_2^{-1} s_1 d_2 c_2 \\ &= c_2^{-1} c_2^{c_1} (s_1 c_1^{-1} s_1 d_2 c_2^{-1} s_0 d_2 c_2 s_1 c_1 s_0 d_2 c_2^{-1} s_1 d_2 c_2) \\ &= c_2^{-1} c_2^{c_1} m_{1,1}(\delta_2 c_2, c_1) \end{aligned}$$

Bulunur. Bu aksiyom ise W2 nin ek aksiyomudur.

Şimdi $\delta_3(m_{1,2}(c_1, c_2)) = m_{1,1}(c_1, \delta_2 c_2)^{-1} \cdot c_2^{-1} c_2^{c_1}$ olduğunu gösterelim. $c_1 \in C_1$ ve $c_2 \in C_2$ için

$$\begin{aligned} \delta_3(m_{1,2}(c_1, c_2)) &= \delta_3([s_2 s_0 c_1^{-1} s_2 s_1 c_1, s_1 c_2] \cdot [s_2 c_2, s_2 s_0 c_1^{-1} s_2 s_1 c_1] \partial_4 (NG_4 \cap D_4)) \\ &= [s_0 c_1^{-1} s_1 c_1, s_1 d_2 c_2] \cdot [c_2, s_0 c_1^{-1} s_1 c_1] \\ &= (s_1^{-1} c_1 s_0 c_1 s_1 d_2 c_2^{-1} s_0 c_1^{-1} s_1 c_1) c_2^{-1} s_1 c_1^{-1} s_0 c_1 c_2 s_0 c_1^{-1} s_1 c_1 \\ &= m_{1,1}(c_1, \delta_2 c_2)^{-1} \cdot c_2^{-1} s_1 c_1^{-1} s_1 s_0 d_1 c_1 c_2 s_1 s_0 d_1 c_1^{-1} s_1 c_1 \because (s_0 c_1 = s_1 s_0 d_1 c_1) \\ &= m_{1,1}(c_1, \delta_2 c_2)^{-1} \cdot c_2^{-1} s_1 c_1^{-1} c_2 s_1 c_1 \because (d_1 = \text{brim dönüşüm}) \\ &= m_{1,1}(c_1, \delta_2 c_2)^{-1} \cdot c_2^{-1} c_2^{c_1} \end{aligned}$$

olur.

W3. Her $c_3 \in C_3$ ve $c_1 \in C_1$ için

$$m_{2,1}(\delta_3(c_3), c_1) = c_3^{c_1} c_3^{-1} \text{ olmalıdır.}$$

$$m_{2,1}(c_2, c_1) = [s_2 c_1, s_2 s_1 c_1] [s_2 s_1 c_1, s_0 c_2^{-1} s_1 c_1] \partial_4 (NG_4 \cap D_4) \text{ olup:}$$

$$m_{2,1}(c_2, c_1) = ((F_{(0)(2,1)}(c_2^{-1}, c_1))^{-1})^{c_2} \in NG_3$$

$$m_{1,2}(c_1, c_2) = (F_{(2,0)(1)}(c_1^{-1}, c_2))^{c_1^{-1}}$$

dir. Burada $c_2 \in NG_2$ dir.

$$\begin{aligned} m_{2,1}(c_2, c_1) &= (([s_0 c_2^{-1}, s_2 s_1 c_1] [s_2 s_1 c_1, s_1 c_2^{-1}] [s_2 c_2^{-1}, s_2 s_1 c_1])^{-1})^{c_2} \\ &= ([s_2 s_1 c_1, s_2 c_2^{-1}] [s_1 c_2^{-1}, s_2 s_1 c_1] [s_2 s_1 c_1, s_0 c_2^{-1}])^{c_2} \end{aligned}$$

olup:

$$m_{2,1}(\delta_3 c_3, c_1) = ([s_2 s_1 c_1, s_2 d_3 c_3^{-1}] [s_1 d_3 c_3^{-1}, s_2 s_1 c_1] [s_2 s_1 c_1, s_0 d_3 c_3^{-1}])^{d_3 c_3} (\partial_4 (NG_4 \cap D_4))$$

olup:

$$((d_4 F_{(0)(3,2,1)}(c_3^{-1}, c_1))^{-1})^{d_3 c_3} = ([c_3^{-1}, s_2 s_1 c_1] [s_2 s_1 c_1, s_2 d_3 c_3^{-1}] [s_1 d_3 c_3^{-1}, s_2 s_1 c_1] [s_2 s_1 c_1, s_0 d_3 c_3^{-1}])^{d_3 c_3} \in (\partial_4 (NG_4 \cap D_4))$$

olduğundan;

$$m_{2,1}(\delta_3(c_3), c_1) = ([s_2 s_1 c_1, s_2 d_3 c_3^{-1}] [s_1 d_3 c_3^{-1}, s_2 s_1 c_1] [s_2 s_1 c_1, s_0 d_3 c_3^{-1}])^{d_3 c_3} (\partial_4 (NG_4 \cap D_4))$$

$$\equiv [c_3^{-1}, s_2 s_1 c_1]^{d_3 c_3} \text{ mod}(\partial_4 (NG_4 \cap D_4))$$

$$= c_3^{-1} [c_3^{-1}, s_2 s_1 c_1] \cdot c_3$$

$$= c_3^{-1} (c_3 s_2 s_1 c_1^{-1} c_3^{-1} s_2 s_1 c_1) c_3$$

$$= (c_3^{-1})^{c_1} c_3$$

bulunur.

• $m_{1,2}(c_1, c_2) = (F_{(2,0)(1)}(c_1^{-1}, c_2))^{c_1^{-1}}$ dir. Buna göre;

$$m_{1,2}(c_1, c_2) = ([s_2 s_0 c_1^{-1}, s_1 c_1] [s_1 c_2, s_2 s_1 c_1^{-1}] [s_2 s_1 c_1^{-1}, s_2 c_2] [s_2 c_2, s_2 s_0 c_1^{-1}])^{c_1^{-1}} \text{ olup:}$$

$$m_{1,2}(c_1, \delta_3 c_3) = ([s_2 s_0 c_1^{-1}, s_1 d_3 c_3] [s_1 d_3 c_3, s_2 s_1 c_1^{-1}] [s_2 d_3 c_3, s_2 s_0 c_1^{-1}] [s_2 s_1 c_1^{-1}, s_2 d_3 c_3])^{c_1^{-1}} \text{ dir.}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned} d_4(F_{(3,2,0)(1)}(c_1^{-1}, c_3))^{c_1^{-1}} \\ = ([s_2 s_0 c_1^{-1}, s_1 d_3 c_3] [s_1 d_3 c_3, s_2 s_1 c_1^{-1}] [s_2 s_1 c_1^{-1}, s_2 d_3 c_3] [s_2 d_3 c_3, s_2 s_0 c_1^{-1}] [s_2 s_0 c_1^{-1}, c_3] [c_3, s_2 s_1 c_1^{-1}])^{c_1^{-1}} \in (\partial_4(NG_4 \cap D_4)) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} m_{1,2}(c_1, \delta_3 c_3) &\equiv ([s_2 s_1 c_1^{-1}, c_3] [c_3, s_2 s_0 c_1^{-1}]) \text{ mod}(\partial_4(NG_4 \cap D_4)) \\ &= s_2 s_1 c_1^{-1} [s_2 s_1 c_1^{-1}, c_3] [c_3, s_2 s_0 c_1^{-1}] s_2 s_1 c_1 \\ &= s_2 s_1 c_1^{-1} ((s_2 s_1 c_1) c_3^{-1} (s_2 s_1 c_1^{-1}) c_3) (c_3^{-1} s_2 s_0 c_1 \cdot c_3 s_2 s_0 c_1^{-1}) s_2 s_1 c_1 \\ &= c_3^{-1} s_2 s_1 c_1^{-1} (s_2 s_0 c_1 c_3 s_2 s_0 c_1^{-1}) s_2 s_1 c_1 \\ &= c_3^{-1} (s_2 s_1 c_1^{-1} (s_2 (s_1 s_0 d_1 c_1) c_3 s_2 (s_1 s_0 d_1 c_2^{-1}))) s_2 s_1 c_1 \\ &= c_3^{-1} (s_2 s_1 c_1^{-1} c_3 s_2 s_1 c_1) \\ &= c_3^{-1} (c_3)^{c_1} \end{aligned}$$

bulunur.

W4. Her $c_1, d_1 \in C_1$ için

$$\delta_2 m_{1,1}(c_1, d_1) = [d_1, c_1]$$

olmalıdır.

$$m_{1,1}(c_1, d_1) = s_1 d_1^{-1} s_1 c_1^{-1} s_0 c_1 s_1 d_1 s_0 c_1^{-1} s_1 c_1$$

olup:

$$\begin{aligned}
\delta_2(m_{1,1}(c_1, d_1)) &= d_2(s_1(d_1^{-1})s_1c_1^{-1}s_0c_1s_1d_1s_0c_1^{-1}s_1c_1) \\
&= d_1^{-1}c_1^{-1}s_0(d_1c_1)(d_1)s_0(d_1c_1^{-1})c_1 \\
&= d_1^{-1}c_1^{-1}d_1c_1 \\
&= [d_1, c_1]
\end{aligned}$$

dir. Böylece W2, W3 ve W4 aksiyomlarını göstermiş oluruz. (W1 aksiyomu ise okuyucuya bırakılmıştır).

Şimdi örgü aksiyomlarını sağlatmaya çalışalım. Önce

$$\{-, -\} : C_2 \times C_2 \rightarrow C_3$$

örgü dönüşümünü tanımlayalım.

$c_2, d_2 \in C_2$ için

$$\{c_2, d_2\} = [s_2d_2, s_2c_2] \partial_4(NG_4 \cap D_4)$$

olarak alalım Bu tanımlamaya göre

B1.

$c_2, d_2, d_2' \in C_2$ için

$$\{c_2, d_2d_2'\} = \{c_2d_2\}^{d_2'} \{c_2d_2'\}$$

olmalıdır.

$$\begin{aligned}
\{c_2d_2\}^{d_2'} &= [s_2d_2, s_2c_2]^{d_2'} \partial_4(NG_4 \cap D_4) \\
&= s_2(d_2')^{-1} [s_2d_2, s_2c_2] s_2d_2' \\
&= s_2(d_2')^{-1} s_2d_2^{-1} s_2c_2^{-1} s_2d_2s_2c_2s_2d_2'
\end{aligned}$$

ve

$$\{c_2 d_2'\} = [s_2 d_2', s_2 c_2]$$

$$= s_2 (d_2')^{-1} s_2 c_2^{-1} s_2 d_2' s_2 c_2$$

olup:

$$\{c_2 d_2'\}^{d_2'} \{c_2 d_2'\} = s_2 (d_2')^{-1} s_2 d_2'^{-1} s_2 c_2^{-1} s_2 d_2 s_2 c_2 s_2 d_2' s_2 (d_2')^{-1} s_2 c_2^{-1} s_2 d_2' s_2 c_2$$

$$= s_2 (d_2')^{-1} s_2 d_2'^{-1} s_2 c_2^{-1} s_2 d_2 s_2 d_2' s_2 c_2$$

$$= s_2 (d_2 d_2')^{-1} s_2 c_2^{-1} s_2 (d_2 d_2') s_2 c_2$$

$$= [s_2 (d_2 d_2'), s_2 c_2]$$

$$= \{c_2, d_2 d_2'\}$$

olur. Benzer şekilde

$$\{c_2 c_2' d_2'\} = \{c_2' d_2'\}^{d_2'} \{c_2 d_2'\}^{c_2'}$$

olmalıdır.

$$\{c_2' d_2'\} = [s_2 d_2', s_2 c_2'] = s_2 d_2'^{-1} s_2 (c_2')^{-1} s_2 d_2 s_2 c_2'$$

ve

$$\{c_2 d_2'\}^{c_2'} = [s_2 d_2', s_2 c_2']^{c_2'} = s_2 (c_2')^{-1} (s_2 d_2'^{-1} s_2 c_2'^{-1} s_2 d_2 s_2 c_2') s_2 c_2'$$

olup;

$$\{c_2' d_2'\} \{c_2 d_2'\}^{c_2'} = s_2 (d_2')^{-1} s_2 (c_2')^{-1} s_2 d_2 s_2 c_2' s_2 (c_2')^{-1} s_2 (d_2')^{-1} s_2 c_2'^{-1} s_2 d_2 s_2 c_2 s_2 c_2'$$

$$= s_2 (d_2')^{-1} s_2 (c_2 c_2')^{-1} s_2 d_2 s_2 (c_2 c_2')$$

$$= [s_2 (d_2, s_2 (c_2 c_2'))]$$

$$= \{c_2 c_2', d_2\}$$

bulunur.

B2.

$$\begin{aligned}\delta_3 \{c_2 d_2\} &= d_3 [s_2 d_2, s_2 c_2] \\ &= [d_2, c_2] \quad (\because \text{simplisel özdeşliklerden})\end{aligned}$$

olur.

B3.

$c_2 \in C_2$ ve $c_3 \in C_3$ için

$$\{c_2, \delta_3 c_3\} = c_3^{-1} c_3^{c_2}$$

olmalıdır. Buna göre;

$$\{c_2, \delta_3 c_3\} = [s_2 d_3 c_3, s_2 c_2] \partial_4 (NG_4 \cap D_4)$$

olur.

$x_3, y_3 \in NG_3$ olmak üzere

$$d_4(F_{(2)(3)}(x_3, y_3)) = [s_2 d_3 x_3, y_3] [x_3, y_3] \in \partial_4 (NG_4 \cap D_4)$$

olduğunu biliyoruz. Burada;

$$x_3 = c_3 \text{ ve } y_3 = s_2(c_2)$$

alınırsa ;

$$d_4(F_{(2)(3)}(c_3, s_2 c_2)) = [s_2 d_3 c_3, s_2 c_2] [s_2 c_2, c_3] \in \partial_4 (NG_4 \cap D_4)$$

olur. Buna göre;

$$\begin{aligned}\{c_2, \delta_3 c_3\} &= [s_2 d_3 c_3, s_2 c_2] \partial_4 (NG_4 \cap D_4) \\ &\equiv [c_3, s_2 c_2] \text{mod}(\partial_4 (NG_4 \cap D_4)) \\ &= c_3^{-1} s_1 c_2^{-1} c_3 s_2 c_2 \\ &= c_3^{-1} (c_3^{c_2})\end{aligned}$$

olur.

B4.

$c_2 \in C_2$ ve $c_3 \in C_3$ için

$$\{\delta_3 c_3, c_2\} = (c_3^{c_2})^{-1} c_3$$

olmalıdır.

$$\{\delta_3 c_3, c_2\} = [s_2 c_2, s_2 d_3 c_3] \partial_4 (NG_4 \cap D_4)$$

dür.

Benzer düşünceyle $x_3, y_3 \in NG_3$ olmak üzere

$$d_4(F_{(2)(3)}(x_3, y_3)) = [s_2 d_3 x_3, y_3] [x_3, y_3] \in \partial_4 (NG_4 \cap D_4)$$

eşitliğinde $x_3 = c_3$ ve $y_3 = s_2(c_2)$ alınırsa;

$$d_4(F_{(2)(3)}(c_3, s_2 c_2)) = [s_2 d_3 c_3, s_2 c_2] [s_2 c_2, c_3] \in \partial_4 (NG_4 \cap D_4)$$

olur.

$$\begin{aligned} \{\delta_3 c_3, c_2\} &= [s_2 c_2, s_2 d_3 c_3] \partial_4 (NG_4 \cap D_4) \\ &\equiv [s_2 c_2, c_3] \text{mod}(\partial_4 (NG_4 \cap D_4)) \\ &= s_2 c_2^{-1} c_3^{-1} s_2 c_2 c_3 \\ &= (c_3^{-1})^{c_2} c_3 \\ &= (c_3^{c_2})^{-1} c_3 \end{aligned}$$

bulunur.

Böylece tüm aksiyomları göstermiş olduk. Sonuç olarak

$$NG_3 / \partial_4 (NG_4 \cap D_4) \xrightarrow{\partial_3} NG_2 \xrightarrow{\partial_2} NG_1 \rightarrow \{1\}$$

yapısı yukarda ki tanımlamalarla birlikte bir örgülü whiskered 2-çaprazlanmış modül olur. Böylece indirgenmiş simplisel gruplardan örgülü 2-çaprazlanmış modüllere bir fonktor tanımlamış oluruz. Böylece bu bölümün temel sonuçlarından aşağıdaki teoremi verebiliriz.

2.4.2. Teorem: Örgülü 2-çaprazlanmış modüller kategorisi ile Moore kompleksinin boyutu ≤ 3 olan indirgenmiş simplisel gruplar kategorisi denktir.

İspat: Yukarda indirgenmiş simlisel gruplardan örgülü 2-çaprazlanmış modüllere

$$F : \mathbf{ReSimpGrp} \rightarrow \mathbf{BX}_2\mathbf{Mod}$$

şeklinde bir funktor tanımladık. Eğer G Moore kompleksinin boyutu ≤ 3 olan bir indirgenmiş simplisel grup ise $NG_4 = \{1\}$ olduğundan $NG_4 \cap D_4 = \{1\}$ ve buradan $\partial_4(NG_4 \cap D_4)$ ise NG_3 grubunun birim elemanı olur. O halde :

$$C_3 = \frac{NG_3}{\partial_4(NG_4 \cap D_4)} \cong \frac{NG_3}{\{1\}} \cong NG_3$$

olup; yukarda gösterdiğimiz aksiyomlarda " $\equiv$ " işareti yerine $\partial_4(NG_4 \cap D_4) = \{1\}$ olduğundan " $=$ " işareti kullanılabilir. Bu ise Moore kompleksinin boyutu ≤ 3 olan indirgenmiş simplisel gruplardan örgülü 2-çaprazlanmış modüller kategorisine

$$F : \mathbf{ReSimpGrp} \rightarrow \mathbf{BX}_2\mathbf{Mod}$$

şeklinde bir funktor tanımlanacağı anlamına gelir.

Şimdi tersine

$$F' : \mathbf{BX}_2\mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{ReSimpGrp} \leq 3$$

şeklinde bir funktor tanımlayalım.

$$K \xrightarrow{\partial_3} L \xrightarrow{\partial_2} M \rightarrow \{1\}$$

yapısı

$$m_{1,1} : M \times M \rightarrow L, m_{1,2} : M \times L \rightarrow K, m_{2,1} : L \times M \rightarrow K \text{ ve } \{-, -\} : L \times L \rightarrow K$$

dönüşümleri ile birlikte bir örgülü 2-çaprazlanmış modül olsun. Bu yapıdan

$$\begin{array}{ccccccc} & \xrightarrow{d_0, d_1, d_2, d_3} & & \xrightarrow{d_0, d_1, d_2} & & \xrightarrow{d_0, d_1} & \\ & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \\ & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \\ \cdots \{1\} \rightarrow G_3 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & G_2 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & G_1 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & G_0 = \{1\} \\ & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & \\ & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & \\ & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & \\ & \xleftarrow{s_0, s_1, s_2} & \xleftarrow{s_0, s_1} & \xleftarrow{s_0} & & & \end{array}$$

şeklinde Moore kompleksinin boyutu ≤ 3 olan indirgenmiş bir simplisel grup elde ederiz

$G_0 = \{1\}$ ve $G_1 = M$ olsun. d_0^1, d_1^1 ve s_0^0 operatörleri birim dönüşümlerdir. Yani her elemanı

birime götüren homorfizmler olsun. M nin L üzerine etkisini kullanarak $G_2 = (L \rtimes M) \rtimes M$ yarı direkt çarpım grubunu elde ederiz. Şimdi G_2 ve G_1 arasındaki simplisel dönüşümleri tanımlayalım.

$$l \in L, m, m' \in M \text{ için}$$

$$d_0 = (l, m, m') = m'$$

$$d_1 = (l, m, m') = m.m'$$

$$d_2 = (l, m, m') = (\partial_2 l)m$$

$$s_0(m') = (1_l, 1_m, m')$$

$$s_1(m') = (1_l, m', 1_m)$$

şeklinde tanımlanabilirler.

Burada $K \xrightarrow{\partial_3} L \xrightarrow{\partial_2} M$ yapısı bir 2-çaprazlanmış modül olduğundan; l nin $k \in K$ üzerine etksi

$${}^l k = \{\partial_3 k, l\} k^{-1}$$

şekinde tanımlanabilir. Bu etkiyi kullanarak $(K \rtimes L)$ direkt çarpım grubunu tanımlayabiliriz.

Ayrıca $(l, m) \in L \rtimes M$ nin $(k, l') \in K \rtimes L$ üzerine olan grup etkisi

$${}^{(1, m)}(k, l') = (m_k, m_{l'})$$

$${}^{(l, 1)}(k, l') = (\partial_2 {}^l k \{l, \partial_3 k\}, l l'^{-1})$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu etkiye göre

$$G_3 = (K \rtimes L) \rtimes ((L \rtimes M) \rtimes M)$$

yarı direkt çarpım grubunu oluşturabiliriz. Şimdi G_3 ve G_2 arasındaki yüz ve dejenere operatörlerini tanımlayalım.

$$d_0 = (k, l, l', m, m') = (l', m, m')$$

$$d_1 = (k, l, l', m, m') = (l, m, m')$$

$$d_2 = (k, l, l', m, m') = (ll', m, m')$$

$$d_3 = (k, l, l', m, m') = (\partial_3 kl, \partial_2 l' m, m')$$

$$s_0 = (l, m, m') = (1, l, 1, m, m')$$

$$s_1(l, m, m') = (1, 1, l, m, m')$$

$$s_2(l, m, m') = (1, l, 1, m, m')$$

olur. Bu dönüşümlerin bir grup homomorfizmi olduğu açıktır. Ayrıca bu operatörler simplisel özdeşlikleri sağlarlar.

Şimdi simplisel özdeşliklerin bazılarını göstermeye çalışalım.

$$\begin{aligned} d_3 s_2(l, m, m') &= d_3(1, l, 1, m, m') \\ &= (\partial_3(1)l, \partial_2(1)m, m') \\ &= (l, m, m') \end{aligned}$$

olup $d_3 s_2 = id$ olur.

$$\begin{aligned} d_2 s_1(l, m, m') &= d_2(1, 1, l, m, m') \\ &= (l, m, m') \end{aligned}$$

olup $d_2 s_1 = id$ olur.

Diğer simplisel özdeşlikleri sağladığı benzer şekilde gösterilir. Böylece 3-parçalanmış simplisel grubu $G = \{G_3, G_2, G_1, G_0\}$ elde ederiz.

Şimdi elde ettiğimiz bu simplisel grubun Moore kompleksine bakalım. $G_0 = \{1\}$ olduğundan $NG_0 = \{1\}$ dir. d_0^1, d_1^1 homorfizmleri sıfır homorfizm olduğundan $NG_1 = \text{Çek}d_0^1 = G_1 \cong M$ olur. $NG_2 = \text{Çek}d_0^2 \cap \text{Çek}d_1^2$ olduğunu biliyoruz. Bir $(l, m, m') \in G_2$ 'nin $\text{Çek}d_0^2$ de olması için

$$d_0(l, m, m') = m' = 1$$

yani $m' = 1$ olmalıdır. Aynı elemanın $\text{Çek}d_1^2$ de olması için

$$d_1(l, m, m') = mm' = 1$$

olması gerekir. Her ikisinin de olması için hem $m=1$ hem de $m' = 1$ olmalıdır. O halde;

$$NG_2 = \text{Çek}d_0^2 \cap \text{Çek}d_1^2 = \{(l, m, m') : m = m' = 1\}$$

$$= \{(l, 1, 1) : l \in L\}$$

$$\cong L$$

olur.

Şimdi NG_3 'ü araştıralım.

$$NG_3 = \text{Çek}d_0^3 \cap \text{Çek}d_1^3 \cap \text{Çek}d_2^3$$

olur.

Bir $(k, l, l', m, m') \in G_3$ 'ün $\text{Çek}d_0^3$ de olması için $d_0(k, l, l', m, m') = (l, m, m') = (1, 1, 1)$ yani $l' = 1, m = 1, m' = 1$ olmalıdır. Aynı elemanın $\text{Çek}d_1^3$ de olması için

$$d_1(k, l, l', m, m') = (l, m, m') = (1, 1, 1)$$

yani $l = 1, m = 1, m' = 1$ olması gerekir. Benzer olarak $\text{Çek}d_2^3$ de olması için

$$d_2(k, l, l', m, m') = (ll', m, m') = (1, 1, 1)$$

yani $ll' = 1, m = 1, m' = 1$ olması gerekir. O halde (k, l, l', m, m') 'nün NG_3 de olması için

$l = l' = m = m' = 1$ olması gerekir. Yani

$$NG_3 = \{(k, 1, 1, 1, 1) : k \in K\}$$

$$\cong K$$

bulunur.

Yani $NG_0 = \{1\}, NG_1 \cong M, NG_2 \cong L, NG_3 \cong K$ bulunur.

Şimdi $NG_4 \cong \{1\}$ olduğunu göstermeye çalışalım. $\partial_4(NG_4 \cap D_4)$ ün [24] den bazı komütatörlerin çarpımı şeklinde yazılabildiğini biliyoruz. Yukarda ki yüz ve dejenere operatörleri yardımıyla bu çarpımın birim olduğunu gösterebiliriz.

Örneğin

$$\left. \begin{array}{l} x_3 = (k, 1, 1, 1, 1) \\ y_3 = (k', 1, 1, 1, 1) \end{array} \right\} \in NG_3$$

için

$$d_4(F_{(1)(3)}(x_3, y_3)) = [s_1 d_3 x_3, y_3]$$

olduğunu Mutlu and Porter [24] dan biliyoruz. Burada;

$$s_1 d_3(x_3) = s_1 d_3(k, 1, 1, 1, 1) = s_1(\partial_3 k, 1, 1)$$

$$= (1, 1, \partial_3 k, 1, 1)$$

olup ;

$$[s_1 d_3 x_3, y_3] = s_1 d_3 x_3^{-1} y_3^{-1} s_1 d_3 x_3 y_3$$

$$= (1, 1, \partial_3 k, 1, 1)^{-1} \cdot (k', 1, 1, 1, 1)^{-1} \cdot (1, 1, \partial_3 k, 1, 1) \cdot (k', 1, 1, 1, 1)$$

$$= (1, 1, \partial_3 k^{-1}, 1, 1) \cdot (k'^{-1}, 1, 1, 1, 1) \cdot (1, 1, \partial_3 k, 1, 1) \cdot (k', 1, 1, 1, 1)$$

$$= (1, 1, 1, 1, 1)$$

olur.

Benzer şekilde $x_3 \in NG_3, y_1 \in NG_1$ için

$$\begin{aligned}
d_4(F_{(0)(3,2,1)}(x_3, y_1)) &= [s_0 d_3 x_3, s_2 s_1 y_1] [s_2 s_1 y_1, s_1 d_3 x_3] \\
&= [s_2 d_3 x_3, s_2 s_1 y_1] [s_2 s_1 y_1, x_3] \\
&= 1
\end{aligned}$$

ve diğerlerinin her birinin görüntülerinin 1 olduğu göstertilebilir. Sonuç olarak

$$d_4(NG_4 \cap D_4) = \{1\}$$

olduğu gösterilmiş olur. Yani elde edilen indirgenmiş simplisel grupların Moore kompleksinin boyutu ≤ 3 olduğu gösterilmiş olur. Böylece aşağıdaki sonucu ispatlamış oluruz.

2.4.3. Sonuç: Moore kompleksinin boyutu ≤ 3 olan indirgenmiş simplisel gruplar kategorisi ile örgülü 2-çaprazlanmış modüller kategorisi denk kategoriler olup bu yapıların homotopi grupları birbirine izomorf olur ve dolayısıyla aynı homotopi tipinden iki cebirsel model elde etmiş oluruz.

3. BÖLÜM

3.1. Örgülü 2-Çaprazlanmış Modüllerin Bazı Özel Halleri

3.1.1. Birinci özel hal

Brown ve Gilbert [10] de daha öncede bahsettiğimiz gibi cebirsel model olarak 3-tip yapılara karşılık gelen 2-çaprazlanmış modüllere denk olan örgülü regüler çaprazlanmış modülleri tanımlamışlardır. Bu yapının indirgenmiş haline özel olarak örgülü çaprazlanmış modül denir. Şimdi bu tanımı verelim.

3.1.2. Tanım: $\partial: L \rightarrow M$ bir çaprazlanmış modül olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\{-, -\}: M \times M \rightarrow L$ örgü dönüşümü varsa bu yapıya örgülü çaprazlanmış modül denir.

1. $\{a, bb'\} = \{a, b\}^{b'} \{a, b'\}$
2. $\{aa', b\} = \{a', b\} \{a, b\}^{a'}$
3. $\partial\{a, b\} = [b, a]$
4. $\{a, \partial y\} = y^{-1}y^a$
5. $\{\partial x, b\} = (x^{-1})^b x$

burada $x, y \in L$ $a, a', b, b' \in M$ dir. Eğer ek olarak her $a, b \in M$ için $\{a, b\}\{b, a\} = 1$ oluyorsa bu yapıya simetrik çaprazlanmış modül denir.

Arvasi-Koçak ve Ulualan [2] da örgülü çaprazlanmış modüller ve simplisel gruplar arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. Önceki bölümde bahsettiğimiz $F_{\alpha, \beta}$ fonksiyonlarını kullanarak örgülü çaprazlanmış modüller kategorisi ile Moore kompleksinin boyutu ≤ 2 olan indirgenmiş simplisel gruplar kategorisinin denk kategoriler olduğunu göstermişlerdir.

Şimdi simetrik çaprazlanmış modüller ile örgülü 2-çaprazlanmış modüller arasındaki ilişkiyi verelim. $\partial_1: L \rightarrow M$ bir simetrik çaprazlanmış modül olmak üzere

$$\{1\} \xrightarrow{\partial_2} L \xrightarrow{\partial_1} M$$

grupların bir dizisini göz önüne alalım. Özel olarak; Objeleri bu şekildeki diziler olan kategori oluşturulabilir. Morfizmler

$$\begin{array}{ccccc}
 \{1\} & \xrightarrow{\partial_2} & L & \xrightarrow{\partial_1} & M \\
 \downarrow id & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \\
 \{1\} & \xrightarrow{\partial_2'} & L' & \xrightarrow{\partial_1'} & M'
 \end{array}$$

diagramını komütatif yapacak şekilde (f_0, f_1, id) morfizmlerinden oluşur. Ayrıca burada $(f_0, f_1); L \rightarrow M$ ve $L' \rightarrow M'$ simetrik çaprazlanmış modülleri arasındaki morfizmdir. Bu kategori $\mathbf{S_1XMod}$ ile gösterelim. Burada (f_0, f_1) simetrik çaprazlanmış modüller kategorisinde morfizm olduğundan

$$\begin{array}{ccc}
 M \times M & \xrightarrow{\{-, -\}} & L \\
 (f_0, f_0) \downarrow & & \downarrow f_1 \\
 M' \times M' & \xrightarrow{\{-, -\}'} & L'
 \end{array}$$

diagramı değişmelidir.

Burada $\{1\} \xrightarrow{\partial_2} L \xrightarrow{\partial_1} M$ de; $1, L$ grubunun birim elemanıdır ve $\partial_2(1_L) = 1_L$ şeklinde tanımlı homomorfizmadır. Kabul edelim ki

$$\{1\} \xrightarrow{\partial_2} L \xrightarrow{\partial_1} M$$

bir $\mathbf{S_1XMod}$ kategorisinde obje olsun. Bu yapı ile

$$C_2 \xrightarrow{\bar{\partial}_2} C_1 \xrightarrow{\bar{\partial}_1} C_0$$

şeklinde örgülü 2-çaprazlanmış modül arasındaki ilişkiyi kuralım. $C_0 = M, C_1 = L$ ve $C_2 = \{1_L\}$ alınırsa; $C_0 \times C_0$ dan C_1 e tanımlı dönüşüm $M \times M$ den L ye alınan dönüşüm olur. $C_1 \times C_1$ den C_2 ye olan dönüşümü $L \times L \rightarrow \{1_L\}$; $\{l, l'\} = 1_L$ olan dönüşüm olarak alırsak

1. C_0 ın C_2 üzerine etkisi birim etki olacağı açıktır.

2. $\{-, -\} : C_1 \times C_1 \rightarrow C_2$ olan Peiffer Lifting dönüşümü simetrik olur. Çünkü $\{l, l'\} \{l', l\} = 1_L \cdot 1_L = 1_L$ olur.

3. $C_0 \times C_0$ dan C_1 e tanımlı olan $\{-, -\}'$ dönüşümü $L \rightarrow M$ simetrik çaprazlanmış modülün $\{-, -\} : M \times M \rightarrow L$ olan örgü dönüşümü olarak alınabilir. Örneğin ; $\overline{\partial}_1 \{l, l'\}' = \partial_1 \{l, l'\} = [l', l]$ olduğunu örgü aksiyomlarının 3. özelliğinden yazabiliriz.

O halde $\{1\} \xrightarrow{\partial_2} L \xrightarrow{\partial_1} M$ özel bir örgülü 2-çaprazlanmış modül olur. Böylece aşağıdaki önermeyi ispat etmiş oluruz.

3.1.3. Önerme: $S_1\mathbf{XMod}$ kategorisi örgülü 2-çaprazlanmış modüller kategorisinin bir alt kategorisidir.

Tersine $K \xrightarrow{\partial_2} L \xrightarrow{\partial_1} M$ bir örgülü 2-çaprazlanmış modül olsun. $K = \{1\}$ alarak yeni bir örgülü 2-çaprazlanmış modül elde ederiz. Bu tür objelerin oluşturduğu kategoriyi $\mathbf{RBX}_2\mathbf{Mod}$ şeklinde gösterebiliriz. Bu kategoriden aldığımız her objenin bir simetrik çaprazlanmış modül olduğunu görebiliriz. Gerçektende $\{1\} \xrightarrow{\partial_2} L \xrightarrow{\partial_1} M$ şeklinde bir yapı elde ederiz ki burada; $M \times M \rightarrow L$ lifting dönüşümü ile bir simetrik çaprazlanmış modül elde etmiş oluruz.

Sonuç olarak aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

3.1.4. Önerme: $S_1\mathbf{XMod}$ ile $\mathbf{RBX}_2\mathbf{Mod}$ kategorileri denk kategorilerdir.

3.1.5. İkinci özel hal

Şimdi

$$\mathbf{C} : K \xrightarrow{\partial_2} L \xrightarrow{\partial_1} M, \{-, -\}' : M \times M \rightarrow L \text{ ve } \{-, -\} : L \times L \rightarrow K$$

dönüşümleri ile birlikte bir örgülü 2-çaprazlanmış modül olsun. Eğer bu yapıda $M = \{1\}$ gibi bir birim grup alırsak;

$$K \xrightarrow{\partial_2} L \xrightarrow{\partial_1} \{1\}$$

yapısında; $\{-, -\}'$ dönüşümü birim dönüşüm ve ∂_1 ise birim homomorfizm olur. Buna göre;

1. B_1, B_2 ve B_3 aksiyomları birim haline dönüştürler.
2. $\{-, -\} : L \times L \rightarrow K$ Peiffer lifting dönüşümü bir 2-çaprazlanmış modül dönüşümü olduğu için aşağıdaki özellikleri buluruz.

1. $a, b \in L$ için

$$\partial_2 \{a, b\} = a^{-1}b^{-1}ab^{\partial_1(a)}$$

ve ∂_1 birim dönüşüm olduğundan $\partial_1 a = 1$ olup;

$$\partial_2 \{a, b\} = a^{-1}b^{-1}ab = [a, b]$$

bulunur. Bu ise örgülü çaprazlanmış modülün 3. aksiyomudur.

2. $a \in L$ ve $x \in K$ için

$$\{\partial_2 x, a\} = x^{-1}x^a$$

ve

$$\{a, \partial_2 x\} = (x^{-1})^a x^{\partial_1 a}$$

bulunur. Yine $\partial_1 a = 1$ olduğundan

$$\{\partial_2 x, a\} = x^{-1}x^a \text{ ve } \{a, \partial_2 x\} = (x^{-1})^a x$$

olur ki bunlar örgülü çaprazlanmış modülün 4. ve 5. aksiyomlarıdır. 1. ve 2. aksiyomları da

benzer şekilde gösterilebilir. Özetle şunu diyebiliriz: $M = \{1\}$ olduğunda $\partial_1 = 1$ olduğu için

$$K \xrightarrow{\partial_2} L \xrightarrow{\partial_1} \{1\}$$

örgülü 2-çaprazlanmış modülünde

$$(\partial_2 : K \rightarrow L, \{-, -\})$$

yapısı bir örgülü çaprazlanmış modül olur.

Tersine $K \xrightarrow{\partial_2} L$ bir örgülü çaprazlanmış modül olsun. $\{1\}$, L nin birim alt grubu ve $\partial_1 : L \rightarrow \{1\}$ birim homomorfizm olarak

$$K \xrightarrow{\partial_2} L \xrightarrow{\partial_1} \{1\}$$

Şeklinde özel bir örgülü 2-çaprazlanmış modül elde ederiz. Burada $\{-, -\}$ dönüşümü birim dönüşüm; $L \times L \rightarrow K$ dönüşümü ise örgülü çaprazlanmış modüllerin örgü dönüşümüdür. Böylece aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

3.1.6. Önerme: Örgülü çaprazlanmış modüller kategorisi, örgülü 2-çaprazlanmış modüller kategorisinin bir alt kategorisidir.

4.BÖLÜM

4.1. Simplisel Cebirler ve Örgülü 2-çaprazlanmış Modüller

Bu bölümde tezin önceki bölümlerinde gruplar üzerine yapılan bazı sonuçları değişmeli cebirler üzerine uygulayacağız. Her şeyden önce bir R -cebir tanımını verelim.

R birimli ve değişmeli halka ve $(A, \oplus)$ da bir Abelyen grup olsun. Eğer $R \times A \rightarrow A$; $(r, a) \rightarrow r.a$ ile gösterilen ve aşağıdaki şartları sağlayan bir dönüşüm varsa A bir R -modül denir.

- $r.(a \oplus b) = r.a \oplus r.b$
- $(r + s).a = r.a + s.a$
- $(r.s).a = r.(s.a)$

dur. Burada $r, s \in R$ ve $a, b \in A$ dir. Böyle durumlarda genelde A bir sol R -modüldür denir. Eğer çarpma sağdan olsaydı sağ R -modül olurdu.

Şimdi R bir birimli değişmeli halka ve A da hem sağ hem de sol R -modül olsun . A üzerinde $\otimes: A \times A \rightarrow A$ çarpma işlemi tanımlayalım. Bu işlem A üzerinde bir ikili işlem olsun. Eğer her $a, b, c \in A$ için

1. $a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c$
2. $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$
3. $r \in R$ için $r.(a \otimes b) = (r.a) \otimes b = a \otimes (r.b)$

oluyorsa A ya bir R -cebir denir.

Tezin bu kısmından sonra $\oplus$ ve $\otimes$ işlemlerini bilinen $+$ ve $\cdot$ ile göstereceğiz.

Çaprazlanmış modüllerin değişmeli cebirler üzerindeki tanımı T. Porter [27,28] tarafından verilmiştir.

Önce değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül tanımını verelim. L ve M iki R -cebir ve M nin L üzerine cebir etkisi var olsun. Yani $M \times L \rightarrow L$ şeklinde tanımlı aşağıdaki özellikleri sağlayan ve $m \in M$ ve $l \in L$ için $m.l \in L$ ile gösterilen bir dönüşüm var olsun.

1. $m, m' \in M$ ve $l \in L$ için

$$(m + m') \cdot l = m \cdot l + m' \cdot l$$

2. $m \in M$ ve $l, l' \in L$ için

$$m \cdot (l + l') = m \cdot l + m \cdot l'$$

3. $m \in M$ ve $l, l' \in L$ için

$$m \cdot (l \cdot l') = (m \cdot l) \cdot l'$$

4. $m, m' \in M$ ve $l \in L$ için

$$(mm') \cdot l = m \cdot (m' \cdot l)$$

5. $r \in R, m \in M, l \in L$ için

$$m \cdot (rl) = r(m \cdot l)$$

dir.

$\partial : L \rightarrow M$ bir R -cebir homomorfizmi olsun. Eğer her $m \in M$ ve $l \in L$ için $\partial(m \cdot l) = m \partial l$ oluyorsa ∂ ya ön çaprazlanmış modül denir. ∂ bir ön çaprazlanmış modül iken her $l, l' \in L$ için $\partial(l \cdot l') = l \partial l'$ oluyorsa ∂ ya bir çaprazlanmış modül adı verilir. Her $l, l' \in L$ için $ll' - \partial(l) \cdot l'$ elemanına ise L de Peiffer elemanı adı verilir.

4.2. Whiskered R-Cebiroidler

R -cebiroid tanımı için Mosa [23] ya ve Mitchell [21,22] ye bakınız. Burada kısaca aşağıda tanımı özetleyeceğiz.

$$C = C_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow[t]{e} \end{array} C_0$$

yapısı bir küçük R -kategori olsun.. Bu durumda her $x, y \in C_0$ için $C_1(x, y)$ kümeleri birer R -modül yapısına sahiptir. Bu $m_{i,j} : C_i \times C_j \rightarrow C_{i+j}$ $i + j \leq 1$ üzerindeki whiskering $m_{i,j} : C_i \times C_j \rightarrow C_{i+j}$ $i + j \leq 1$ özelliğinde aşağıdakileri sağlayan dönüşümlerden oluşur.

W1. a ve a' , C de aynı başlangıç ve bitişe sahip iki morfizm $x \in C_0, r \in R$ olmak üzere

$$x \bullet (ra + a') = r(x \bullet a) + x \bullet a'$$

ve

$$(ra + a') \bullet x = r(a \bullet x) + a' \bullet x$$

olur. Yani;

$$\bullet m_{0,1}(x, ra + a') = rm_{0,1}(x, a) + m_{0,1}(x, a')$$

$$\bullet m_{1,0}(ra + a', x) = rm_{1,0}(a, x) + m_{1,0}(a', x)$$

olacaktır.

W2. $m_{0,0} : C_0 \times C_0 \rightarrow C_0$ yapısı C_0 üzerinde bir monoid belirtir.

W3. $x \in C_0, a : u \rightarrow v \in C_1$ de bir morfizm olmak üzere $x \bullet a : xu \rightarrow xv$ yani

$$(x \bullet y) \bullet a = x \bullet (y \bullet a), \quad x \bullet 1_y = 1_{xy} \text{ ve } x \bullet (a \circ b) = x \bullet a \circ x \bullet b, \quad x \bullet 1_y = 1_{xy}$$

sağlanır.

W4. Aynı şeyler sağ etki içinde benzer şekilde gösterilebilir.

W5. Eğer $x, y, u, v \in C_0, a, b \in C_1$

ise

$$x \bullet (a \bullet y) = (x \bullet a) \bullet y$$

dir.

Şimdi $\partial : R \rightarrow S$ dönüşümünün bir değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül olduğunda bu yapıdan bir whiskered cebroid elde etmeye çalışalım. Burada Brown-Spencer [7] teoreminden yararlanarak bir denklik kuracağız. Bu teoremin değişmeli cebirler versiyonu T. Porter [29] tarafından yapılmıştır. Burada [29] daki sonucu kullanacağız. S nin R üzerindeki cebir etkisini kullanarak

$$C_1 = R \rtimes S$$

şeklinde yarı-direkt çarpım cebirini tanımlayalım. Bu cebir üzerindeki işlemler

$$(r_1, s_1) \cdot (r_2, s_2) = (r_1 \cdot r_2 + s_1 \cdot s_2 + r_1 \cdot s_2, s_1 s_2)$$

ve

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, r_1 \cdot s_2)$$

şeklindedir.

$$s(r_1, s_1) = \partial_1 r_1 + s_1 \text{ ve } t(b) = s(a) \text{ (yani } b \text{ nin bitiş noktası } a \text{ nın başlangıç noktasına eşit)}$$

$$s(r_1, s_1) = \partial_1 r_1 + s_1 \text{ ise}$$

$$t(b) = t(r_1, s_1) = s_1 = \partial_1 r_2 + s_2 = s(a)$$

olur. Ayrıca $s(a \circ b) = s(b)$ ve $t(a \circ b) = t(a)$ olmalıdır. Gerçektende;

$$s(a \circ b) = s(r_1 + r_2, s_2) = \partial_1 r_1 + \partial_1 r_2 + s_2 = \partial_1 r_1 + s_1 = s(b)$$

ve

$$t(a \circ b) = t(r_1 + r_2, s_2) = s_2 = t(a)$$

bulunur. Yani

$$t(a \circ b) = t(r_1, s_2) = s_1 = \partial_1 r_2 + s_2 = s(r_2, s_2)$$

olmak üzere

$$\underbrace{(r_2, s_2)}_a \circ \underbrace{(r_1, s_1)}_b = (r_1 + r_2, s_2)$$

olur. Bu yapıya göre bir R -cebiroid elde etmiş oluruz.

Şimdi $m_{0,0}, m_{0,1}, m_{1,0}$ operatörlerini tanımlamaya çalışalım.

W1:

$$m_{0,0} : S \times S \rightarrow S$$

operatörü S cebirinin ikinci işlemi yani çarpma işlemi olarak alınabilir. Bu işleme göre $(S, \bullet)$ cebirsel yapısının bir monoid olacağı açıktır. Diğer operatörler ise aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$m_{0,1} : S \times (R \rtimes S) \rightarrow R \rtimes S$$

$$(s, (r_1, s_1)) = (s \bullet r_1, ss_1)$$

$$m_{1,0} : (R \rtimes S) \times S \rightarrow R \rtimes S$$

$$((r_1, s_1), s) = (r_1 \bullet s, s_1 s)$$

olarak alalım.

$$\mathbf{W2:} \quad x \in S, \quad a : u \rightarrow v \text{ ve } a = (r, s) : \partial r + s \rightarrow s$$

$$s(x \bullet a) = s(x \bullet r, xs)$$

$$= \partial(x \bullet r) + sx$$

$$= x\partial r + xs$$

$$= x(\partial r + s)$$

$$= xu$$

$$t(x \bullet a) = t(x \bullet r, xs) = xs = xv$$

olup $xa : xu \rightarrow xv$ olur.

W3:

- $a = (r, s); \quad x, y \in C_0 = S$ olsun

$$xy \bullet a = xy \bullet (r, s)$$

$$= ((xy) \bullet r, (xy)s)$$

$$= (x \bullet (y \bullet r), x(ys))$$

$$= x \bullet (y \bullet r, ys)$$

$$= x \bullet (y \bullet (r, s))$$

$$= x \bullet (y \bullet a)$$

olur.

- $x \bullet (a \circ b)$ ifadesinin neye eşit olduğunu gösterelim.

$a = (r_2, s_2), b = (r_1, s_1), \quad t(b) = s_1 = \partial_1 r_2 + s_2 = s(a)$ olmak üzere;

$$x \bullet (a \circ b) = x \bullet ((r_2, s_2) \circ (r_1, s_1))$$

$$= x \bullet (r_2 + r_1, s_2)$$

$$= (x \bullet (r_2 + r_1), xs_2)$$

$$= (x \bullet r_2 + x \bullet r_1, xs_2)$$

$$= (x \bullet r_2, xs_2) \circ (xr_1, x, s_1)$$

$$= x \bullet a \circ x \bullet b$$

bulunur.

- $1_y = (0, y) : y \rightarrow y$ dir

$$x \bullet 1_y = x \bullet (0, y) = (0, xy) = 1_{xy}$$

olur.

W4: Aynı şeylerin $m_{1,0}$, yani sağdan etki içinde sağladığı açıktır.

W5: $a = (r, s)$ alalım

$$\begin{aligned}
 x \bullet (a \bullet y) &= x \bullet ((r, s) \bullet y) = x \bullet ((r \bullet y), sy) \\
 &= (x \bullet (r \bullet y), x(sy)) \\
 &= ((x \bullet r) \bullet y, (xs)y) \\
 &= (x \bullet r, xs) \bullet y \\
 &= (x \bullet (r, s)) \bullet y \\
 &= (x \bullet a) \bullet y
 \end{aligned}$$

bulunur.

W6: $a = (r, s) : u \rightarrow v$ $a' = (r', s') : u \rightarrow v$ yani

$$\partial(r) + s = \partial(r') + s'$$

$$s = s' \text{ ve } \partial(r) = \partial(r')$$

olacak şekilde iki morfizm olmak üzere

$$a + a' = (r, s) + (r', s') = (r + r', s + s')$$

dir. Buna göre;

$k \in K$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
x \bullet (ka + a') &= x \bullet (k(r, s) + (r', s')) \\
&= x \bullet ((kr, ks) + (r', s')) \\
&= x \bullet (kr + r', ks + s') \\
&= (x \bullet (kr)) + x \bullet r', x(ks + s')) \\
&= (k(x \bullet r) + x \bullet r', k(xs + xs')) \\
&= (k(x \bullet r), k(xs)) + (x \bullet r', xs') \\
&= k(x \bullet r, xs) + (x \bullet r', xs') = k(x \bullet a) + x \bullet a'
\end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde $(ka + a') \bullet x = k(a \bullet x) + a' \bullet x$ olduğu gösterilebilir.

Sonuç olarak $\partial: R \rightarrow S$ bir çaprazlanmış modül olduğunda $(R \rtimes S, s, t, S)$ yapısı bir whiskered R-cebiroid olur.

Böylece çaprazlanmış modüller kategorisinden whiskered R-cebiroidler kategorisine bir fonktor tanımlanmış oluruz. Ancak tersi yoktur. Böyle bir fonktoru tanımlayabilmek için bazı özel şartlara ihtiyaç vardır. Bunlardan biri (C_1, C_0) bir R-cebiroid olması yerine R-cebirler kategorisinde bir kategoriksel obje veya (C_1, C_0) in bir kategoriksel cebir olması gerekir. Bunlarla birlikte 1. Bölüm de whiskered grupoidler için verilen önermenin R-cebiroidler versiyonu kolayca verilebilir. Biz tezimizde daha fazla cebiroidler teorisine girmeyeceğiz

4.3. Değişmeli Cebirler Üzerinde Örgülü 2-Çaprazlanmış Modül

Önceki bölümlerden bildiğimiz gibi 2-çaprazlanmış modüller gruplar üzerinde Conduche tarafından tanımlanmıştır. Değişmeli cebirler üzerinde 2-çaprazlanmış modül kavramı Grandjean ve Vale[18] tarafından verilmiştir. Arvasi ve Porter[4] simplisel cebirler ve 2-çaprazlanmış modüller arasındaki ilişkiyi vermişlerdir. Bu bölümde değişmeli cebirler için tanımlanan bir 2-çaprazlanmış modül yapısı üzerine örgü dönüşümü tanımlayacağız. Simplisel cebirlerle olan ilişkisini inceleyeceğiz. Önce değişmeli cebirler üzerinde 2-çaprazlanmış modül

tanımını Arvasi [1,5] den verelim. Değişmeli cebirler üzerinde diğer bazı cebirsel modellerin tanımlamalarını [17] ve [30] da bulabilirsiniz.

4.3.1. Tanım: $L \xrightarrow{\partial_1} M$ bir ön çaprazlanmış modül ve $K \xrightarrow{\partial_2} L$ de bir çaprazlanmış modül olmak üzere R -cebirlerin

$$K \xrightarrow{\partial_2} L \xrightarrow{\partial_1} M \cdots (1)$$

şeklindeki bir kompleksini göz önüne alalım. Yani $\partial_1 \partial_2 = 0$ veya $\text{Im}(\partial_2) \subseteq \text{Çek}(\partial_1)$ olsun. Peiffer Lifting dönüşümü olarak adlandırılan $\{\otimes\}: L \otimes L \rightarrow K$ bir R -bilineer dönüşüm var ve aşağıdaki şartları sağlıyorsa (1) kompleksine 2-çaprazlanmış modül denir.

PL1. Her $l, l' \in L$ için

$$\partial_2(l \otimes l') = ll' - l \cdot \partial_1(l')$$

dir.

PL2. Her $k, k' \in K$ için

$$\{\partial_2 k \otimes \partial_2 k'\} = kk'$$

dir.

PL3. $l_1, l_2, l_3 \in L$ için

$$\{l_1 \otimes l_2 l_3\} = \{l_1 l_2 \otimes l_3\} + \partial_1(l_3) \cdot \{l_1 \otimes l_2\}$$

dir.

PL4. A) $k \in K$ ve $l \in L$ için

$$\{\partial_2 k \otimes l\} = l \cdot k - \partial_1(l) \cdot k$$

dir.

B) $\{l \otimes \partial_2 k\} = l \cdot k$ dir.

PL5. $m \in M$ ve $l, l' \in L$ için

$$m \cdot \{l \otimes l'\} = \{m \cdot l \otimes l'\} = \{l \otimes m \cdot l'\}$$

dir.

Şimdi $C_3 \xrightarrow{\partial_2} C_2 \xrightarrow{\partial_1} C_1$ yapısı cebirler üzerinde bir 2-çaprazlanmış olduğunda bu 2-çaprazlanmış üzerindeki whiskering dönüşümlerini tanımlayalım.

$$C_3 \xrightarrow{\partial_2} C_2 \xrightarrow{\partial_1} C_1$$

k -cebirlerin bir kompleksi olsun. $\partial_2(C_2)$ nin C_3 üzerine etkisi sıfır etki ve C_1 in C_2 ve C_3 üzerine bir k -cebir etkisi var olsun. $\partial_2 : C_2 \rightarrow C_1$ homomorfizmi C_1 in C_2 üzerine olan etkisiyle birlikte bir ön çaprazlanmış modül olsun. $i, j \geq 0$ ve $i + j \leq 3$ olmak üzere bu kompleks üzerindeki whiskering dönüşümleri $m_{i,j} : C_i \times C_j \rightarrow C_{i+j}$ şeklindeki dönüşümlerdir ve aşağıdaki özellikleri sağlarlar.

W1. Her $c_1, c_1' \in C_1$ ve $c_2 \in C_2$ için $m_{1,2}$ ve $m_{2,1}, m_{1,1}$ dönüşümleri k -bilineer dönüşümlerdir. Yani,

$$m_{i,j}(c_i + c_i', c_j) = m_{i,j}(c_i, c_j) + m_{i,j}(c_i', c_j)$$

dür. Ayrıca $k \in K$ için

$$m_{i,j}(kc_i, c_j) = k.m_{i,j}(c_i, c_j)$$

dir.

W2.

$$\delta_3 m_{2,1}(c_2, c_1) = c_1 \cdot c_2 + m_{1,1}(\delta_2 c_2, c_1)$$

$$\delta_3 m_{1,2}(c_1, c_2) = -c_1 \cdot c_2 + m_{1,1}(c_1, \delta_2 c_2)$$

W3. Her $c_3 \in C_3$ ve $c_1 \in C_1$ için

$$m_{2,1}(\delta_3 c_3, c_1) = -(c_1 \cdot c_3)$$

ve

$$m_{1,2}(c_1, \delta_3 c_3) = c_1 \cdot c_3$$

dolayısıyla $m_{2,1}(\delta_3 c_3, c_1) + m_{1,2}(c_1, \delta_3 c_3) = 0$ olur.

W4. Her $c_1, c_1' \in C_1$ için

$$\delta_2(m_{1,1}(c_1, c_1')) = c_1 \cdot c_1'$$

olur. Burada bu $m_{i,j}$ operatörleri ile birlikte

$$C_3 \xrightarrow{\delta_3} C_2 \xrightarrow{\delta_2} C_1$$

yapısı, $\{-\otimes-\}: C_2 \otimes C_2 \rightarrow C_3$ Peiffer Lifting dönüşümü ile bir 2-çaprazlanmış modül ise bu yapıya örgülü 2-çaprazlanmış modül denir.

Görülüyor ki cebirler üzerinde bir örgülü 2-çaprazlanmış modül tanımı aşağıdaki gibi daha net verilebilir.

$$1. \quad C_3 \xrightarrow{\delta_3} C_2 \xrightarrow{\delta_2} C_1 \quad k\text{-cebirlerin bir 2-çaprazlanmış modülüdür.}$$

Ayrıca $\delta_2(C_2)$ nin C_3 üzerine etkisi sıfır etkidir.

$$2. \quad i, j \geq 0 \text{ ve } i + j \leq 3 \text{ olmak üzere yukarda ki gibi verilen W1-W4 özelliklerini sağlayan } m_{i,j} : C_i \times C_j \rightarrow C_{i+j} \text{ whiskering dönüşümleri vardır.}$$

4.4. Simplisel Cebirler

Ceb değişmeli cebirlerin kategrisi olmak üzere $\Delta^{\text{op}}[n]$ kategorisinden **Ceb** kategorisine tanımlı bir **E** fonktörüne simplisel cebir denir. Yani $n \geq 0$ olmak üzere değişmeli R-cebirlerin bir $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ailesi var ve $0 \leq i \leq n$ için $d_i^n : E_n \rightarrow E_{n-1}$ ve $s_j^n : E_n \rightarrow E_{n+1}$; $i \neq j$ olmak üzere simplisel özdeşlikleri sağlayan homomorfizmler vardır. Moore kompleks ise yine benzer şekilde tanımlanır.

$$\partial_n : NE_n \rightarrow NE_{n-1} \text{ sınır homomorfizmleri olmak üzere}$$

$$NE_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \text{Çek} d_i^n \text{ ve } \partial_n \text{ ler ise } d_n^n \text{ operatörleridir.}$$

Arrvasi $[1]$ de $S(n)$ sıralı kümesinden alınan (α, β) çiftlerini kullanarak;

$$C_{\alpha, \beta} : NE_{n-\#\alpha} \times NE_{n-\#\beta} \rightarrow NE_n$$

hiper çaprazlanmış kompleks çiftlerinin ∂_n operatörleri altındaki görüntülerini incelemiştir. $n = 2$ durumunda

$$\partial_2(C_{(0),(1)}(x, y)) \in \text{Çek} d_0. \text{Çek} d_1$$

olduğunu göstermiştir. Burada

$$C_{(0),(1)}(x, y) = s_1(x). (s_1 y - s_0 y)$$

şeklindedir ve $x, y \in NE_1 = \text{Çek} d_0$ dir.

Şimdi bu operatörler yardımıyla kısaca aşağıdaki teoremi verebiliriz.

4.4.1. Teorem: $\mathbf{E}$ bir indirgenmiş simplisel cebir olsun. Bu durumda

$$NE_3 \xrightarrow{\hat{c}_3} NE_2 \xrightarrow{\hat{c}_2} NE_1$$

yapısı eğer $NE_4 \setminus \{0\}$ ise değişmeli cebirler üzerinde bir örgülü 2-çaprazlanmış modül olur.

Bu teoremin ispatı Arvasi [1] de kullanılan metoda ve bu tezin 2. Bölümün de gruplar üzerinde kullanılan metoda benzer bir şekilde yapılabilir. Biz burada sadece whiskering dönüşümlerini vereceğiz.

$C_1 = NE_1, C_2 = NE_2$ ve $C_3 = NE_3$ olmak üzere

$$m_{1,1} : NE_1 \times NE_1 \rightarrow NE_2; \quad m_{1,1}(x, y) = s_1 x (s_1 y - s_0 y)$$

$$m_{1,2} : NE_1 \times NE_2 \rightarrow NE_3; \quad m_{1,2}(c_1, c_2) = (s_2 s_0 c_1 - s_2 s_1 c_1) \cdot s_1 c_2 + s_2 c_2 \cdot (s_2 s_1 c_1 - s_2 s_0 c_1)$$

$$m_{2,1}(c_2, c_1) = s_2 c_1 \cdot s_2 s_1 c_1 + s_2 s_1 c_1 \cdot (s_2 c_1 - s_0 c_2)$$

şeklindedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- [1] Arvasi, Z., 1994, Applications in commutative algebra of the Moore complexes of a simplicial algebra, Ph.D. Thesis, University of Wales, Bangor.
- [2] Arvasi, Z., Koçak, M. ve Ulualan, E., 2005, Braided crossed modules and reduced simplicial groups, Taiwanese Journal of Mathematics, 9, 477-488.
- [3] Arvasi, Z. ve Porter, T., 1997, Higher dimensional peiffer elements in simplicial commutative algebras, , Theory and Applications of Categories, 3, 1-23.
- [4] Arvasi, Z. ve Porter, T., 1996, Simplicial and crossed resolutions of commutative algebras, Journal of Algebra, 181, 426-448.
- [5] Arvasi, Z. ve Porter, T., 1998, Freeness conditions for 2-crossed modules of commutative algebras, Applied Categorical Structures, 6, 455-471.
- [6] Arvasi, Z., Kuspınarı, T.S. ve Uslu, E. Ö., 2009, Three crossed modules, Homology, Homotopy and Applications, 11, 2, 161-187.
- [7] Brown, R. ve Spencer, C. B., 1976, G-grupoids, crossed modules and the fundamental grupoid of a topological group, Proc. Konink. Neder. Akad. Van Wetenschappen Amsterdam, 79, 4.
- [8] Brown, R., 1987, From groups to grupoids, Bull. London Math. Soc., 19, 113-134.
- [9] Brown, R. ve Loday, J. L., 1987, Van Kampen theorems for diagram of spaces, Topology, 26, 311-315.
- [10] Brown, R. ve Gilbert, N. D., 1989, Algebraic models of 3-types and automorfizm structures for crossed modules, Proc. London Math. Soc., 59, 3, 51-73.
- [11] Brown, R., 2010, Possible connections between whiskered categories and groupoids leibniz algebras automorphism structures and local-to-global questions, J. Homotopy and Related Structures, 5, 1, 308-318.
- [12] Carraso, P., 1987, Complejos hipercruzados chomologia extensiones, Ph. D. Thesis, Universidad de Granada.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- [13] Carraso, P. ve Cegarra, A. M., 1991, Grup-theoretic algebraic models for homotopy types, Journal Pure Applied Algebra, 75, 195-235.
- [14] Conduché, D., 1984, Modules croises generalises de longueur 2, Journal Pure and Applied Algebra, 34, 155-178.
- [15] Conduché, D., 2003, Simplicial crossed modules and mapping cones, Georgian Mathematical Journal, 10, 4, 623-636.
- [16] Duskin, J., 1975, Simplicial methods and the interpretation of triple cohomology, Memoirs A. M. S. 3, 163 s.
- [17] Ellis, G. J., 1984, Crossed modules and their higher dimensional analogues, Ph. D. Thesis, U. C. N. W.
- [18] Grandjean, A. R. ve Vale, M. J. 2-modules cruzados an la chomologia de Andre-Quillen, Memorias de la Reai academia de Ciencias, 22.
- [19] Gun,D.-Walery, and Loday, J.L., 1981, à l'excision en K-theories algebrique, İn:Friedlander, E.M.Stein, M.R.(eds) Evanston conf. on algebraic K-Theory 1980.(Lect. Notes Math.,854, 179-216) Berlin Heidelberg New York: Springer(1981).
- [20] Loday, J. L., 1982, Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups, Journal Pure and Applied Algebra, 24, 179-202.
- [21] Mitchell, B., 1972, Rings with several objects, Advanced Mathematics, 8, 1-161.
- [22] Mitchell, B., 1978, Some applications of module theory to functor categories, Bull. Amer. Math. Soc., 84, 867-885.
- [23] Mosa, G.H., 1986, Higher dimensional algebrods and crossed complexes, Ph.D.Thesis, University of Wales.
- [24] Mutlu, A. ve Porter, T., 1998, Applications of peiffer pairings in the moore complex of a simplicial group, Theory and Applications of Categories, 4, 148-173.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- [25] Noohi, B., Group cohomology with coefficients in a crossed module, J. Inst. Math. Jussieu, (to appear).
- [26] Porter, T., 1993, n Type of simplicial groups and crossed n-cubes, Topology 32, 5-24.
- [27] Porter, T., 1987, Some categorical results in the theory of crossed modules in commutative algebras, J. Algebra, 109, 415-429.
- [28] Porter, T., 1986, Homology of commutative algebras and an invariant of simis and vasconceles, J. Algebra, 99, 458-465.
- [29] Porter, T., 1985, Crossed modules in cat and a Brown-Spencer Theorem for 2-categories, Chaiers Topologie Geom. Differentielle Categoriues, 26, 381-388.
- [30] Ulualan, E., 2004, Değişmeli Cebirler Üzerinde Kuadratik Modüller, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bil. Enst, Matematik A.B.D, Doktora Tezi.
- [31] Ulualan, E. ve Pak, S., 2010, Braiding for internal categories in the category of whiskered groupoids and simplicial groups, preprint.
- [32] Whitehead, J.H.C., 1949, Combinatorial homotopy II, Bull. Amer. Math. Soc., 55, 453-496.