

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAHN ÖZELLİKLİ DİZİ UZAYLARI

Emel SAVKU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2010**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HAHN ÖZELLİKLİ DİZİ UZAYLARI

Emel SAVKU

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Cihan ORHAN

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, toplanabilme teorisinin ve topolojik vektör uzayları teorisinin bazı temel kavramlarına yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, öncelikle Hahn özelliği tanımlanıp bu özelliğin fonksiyonel analitik gösterimi ve Hahn uzaylarının temel özellikleri ifade edilmiştir. Daha sonra, l^∞ uzayının Hahn özelliğine sahip büyük altuzaylarının yapıları incelenmiş ve bazı örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, matris Hahn özelliği ve ayrılabilir Hahn özelliği tanıtılmış ve bu kavramların temel özellikleri incelenmiştir. Bu kavramların, Hahn özelliği ile aynı felsefeye sahip olmalarına karşın daha geniş bir uygulama alanına sahip oldukları gösterilmiştir.

Son bölümde ise, Hahn-tipi özelliklerin uygulamaları verilmiştir.

2010, 59 sayfa

Anahtar Kelimeler : FK uzayları, dizi uzayları, Hahn özelliği, ayrılabilir Hahn özelliği, matris Hahn özelliği.

ABSTRACT

Master Thesis

SEQUENCE SPACES WITH HAHN PROPERTY

Emel SAVKU

Ankara University

Graduate School of Natural And Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Cihan ORHAN

This thesis consists of five chapters.

The first chapter has been devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic concepts of summability theory and topological vector spaces theory have been recalled.

In the third chapter, firstly the Hahn property has been defined and its functional analytic interpretation and basic properties have been explained. Subsequently the structure of big subspaces of l^∞ with the Hahn property has been investigated and some examples have been given.

In the fourth chapter, the concepts of matrix Hahn property and seperable Hahn property have been explained and their basic properties have been investigated. Although these concepts and the Hahn property share the same philosophy, it has been shown that these properties are more widely applicable.

In the final chapter, applications of the Hahn-type properties have been given.

2010, 59 pages

Key Words: FK spaces, sequence spaces, Hahn property, seperable Hahn property, matrix Hahn property

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve değerli bilgilerini benden hiç bir zaman esirgemeyen danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Cihan Orhan (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'a teşekkür ederim. Çalışmalarımız sırasında edindiğim tecrübe tüm kariyerim boyunca bana ışık tutacaktır.

Yüksek lisansa başladığım günden beri desteğini her zaman hissettiğim hocam, Sayın Prof. Dr. Öner Çakar'a teşekkürü borç bilirim.

Hayatımın tüm aşamalarında beni yalnız bırakmayan, zor kararlarımda beni destekleyen, gücümü ve azmimi bana duydukları güvenlerinden ve sevgilerinden aldığım aileme en içten minnet duygularıyla teşekkür ederim.

Bu tez "TÜBİTAK-2228 Yüksek Lisans Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. TÜBİTAK'na teşekkürlerimi sunarım.

Emel SAVKU

Ankara, Temmuz 2010.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1 Topolojik Vektör Uzayları	2
2.2 FK Uzayları	3
2.3 Toplanabilirlik Alanları	5
3. HAHN UZAYLARI	8
3.1 Tanımlar ve İlk Sonuçlar	8
3.2 Büyük Hahn Uzayları	15
4. ZAYIF HAHN TİPİ ÖZELLİKLER	29
5. ÖRNEKLER	36
5.1 Cesàro Toplanabilme	36
5.2 Bazı Dizi Uzaylarının Yapısı	37
5.3 Hemen Hemen Yakınsak Dizi Uzayları	37
5.4 Kuvvetli Konservatif Matrisler	39
5.5 Kuvvetli Hemen Hemen Yakınsaklık	42
5.6 Kuvvetli Toplanabilirlik	43
5.7 Alışılmış Toplanabilme	46
5.8 Tuhaf Bir Toplanabilme Metodu	47
5.9 Yakınsak Altseriler	48
5.10 $bs + c_0$ Uzayı	49
5.11 Riesz ve Nörlund Matrislerinin Sınırlı Toplanabilirlik Alanları ..	51
KAYNAKLAR	56
ÖZGEÇMİŞ	59

SİMGELER DİZİNİ

$\chi(E)$	E dizi uzayında terimleri 0 ve 1 olan dizilerin kümesinin gerdiği uzay
$\sigma(X, Y)$	X uzayı üzerinde tanımlı zayıf topoloji
χ_S	S kümesinin karakteristik fonksiyonu
$\{(Ax)_n\}$	x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi
ω_A	$\{(Ax)_n\}$ dizisi mevcut olan diziler uzayı
ac	Hemen hemen yakınsak diziler uzayı
$ ac _0$	Sıfıra kuvvetli hemen hemen yakınsak diziler uzayı
η_δ^0	Sıfır yoğunluğa sahip kümelerin sınıfı
Λ	Lacunary kümelerin sınıfı
η_u^0	Düzgün sıfır yoğunluğa sahip kümelerin sınıfı
c_A	A matrisinin toplanabilirlik alanı
$(c_o)_A$	A matrisinin sıfıra toplanabilirlik alanı
C_1	Cesàro matrisi
R_p	Riesz matrisi
N_p	Nörlund matrisi
$\ \cdot\ _\infty$	ℓ_∞ uzayının alışılmış supremum normu
KP	Tüm potent ve konsevatif matris metodlarının kümesi
ω	Reel terimli tüm diziler uzayı
$\omega(A)$	A -kuvvetli toplanabilen diziler uzayı
ℓ_∞	Sınırlı diziler uzayı
bs	Sınırlı seriler uzayı
l^p ($p \geq 1$)	p -yinci kuvvetten mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı
c	Yakınsak diziler uzayı
c_0	Sıfıra yakınsak diziler uzayı
$\mathcal{T}$	İnce dizilerin gerdiği uzay
φ	Sonlu diziler uzayı
x^β	$(Sp\{x\})^\beta$

1. GİRİŞ

Keyfi bir E dizi uzayı verildiğinde, E tarafından içerilen ve terimleri 0 ve 1 olan dizilerin kümesinin gerdiği uzay $\chi(E)$ ile gösterilirse ve de $\chi(E) \subseteq F$ olacak biçimde keyfi bir F FK uzayı verildiğinde $E \subseteq F$ elde edebilirsek E dizi uzayı Hahn özelliğidir veya Hahn uzayıdır denir (Bennett 1995 ve Bennett, Boos ve Leiger 2002).

E dizi uzayı keyfi bir FK uzayı olarak verildiğinde, E uzayının Hahn özellikli olması için gerek ve yeter şart $\chi(E)$ uzayının E uzayının yoğun ve fıçılı bir altuzayı olmasıdır (Bennett ve Kalton 1972). Bu teoremin bir sonucu olarak Hahn uzaylarının fonksiyonel analiz açısından bir karakterizasyonu Bennett (1995) tarafından verildi. Ancak uygulaması oldukça güç olan bu teoremin tek uygulaması l^∞ dizi uzayının Hahn özellikli olmasıdır. Aslında bu teoremin uygulamasındaki zorluk, $\chi(E)$ uzayının E uzayında fıçılı olduğunu göstermektir. $E = l^\infty$ olarak alındığında bu sorun, *Nikodym özelliği* sayesinde aşılmıştır (Wilansky 1978). Diğer yandan; Bennett, Boos ve Leiger (2002) Hahn özelliği ile aynı prensibe dayanan fakat Hahn özelliği için verilmiş olan fonksiyonel analitik gösterime sahip olmayan ayrılabilir Hahn özelliğini ve matris Hahn özelliğini tanımladı. Çalışmamızda bu kavramlar da incelenmiş ve örnekler verilmiştir.

Bu yüksek lisans tezinin amacı, keyfi bir dizi uzayı verildiğinde bu uzay tarafından içerilen ve terimleri 0 ve 1 olan dizilerin kümesinin gerdiği uzayın, verilen bu dizi uzayını ne ölçüde belirlediğini ortaya koymaktır. Bu amaç doğrultusunda Hahn özelliği ve bu özelliğe sahip olan dizi uzayları çalışmamızda detaylıca incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde toplanabilme teorisinin ve topolojik vektör uzayları teorisinin çalışmamızda faydalanacağımız bazı temel kavramları verilecektir. Bu yüksek lisans tezinde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ doğal sayılar kümesini gösterecektir.

2.1 Topolojik Vektör Uzayları

Bu kısımda topolojik vektör uzayları ile ilgili olarak çalışmamızda faydalanacağımız temel kavramları hatırlatacağız.

Tanım 2.1.1 Keyfi X vektör uzayı, vektör işlemleri sürekli olan bir topolojik uzay ise X uzayına *topolojik vektör uzayı* denir (Wilansky 1978).

Tanım 2.1.2 X keyfi bir vektör uzayı olmak üzere $A \subset X$ olsun.

A kümesinin *konveks* olması için gerek ve yeter şart $0 \leq t \leq 1$ ve $s + t = 1$ olmak üzere,

$$sA + tA \subset A$$

olmasıdır. Bir *lokal konveks uzay*, sıfırın her bir komşuluğu sıfırın konveks bir komşuluğunu içeren topolojik vektör uzayıdır.

A kümesinin *yutan* olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ için, $|t| < \varepsilon$ olmak üzere $tx \in A$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ bulunmasıdır (Wilansky 1978).

Tanım 2.1.3 Bir topolojik vektör uzayında konveks, yutan ve kapalı kümelere *fıçı* denir. Her fıçısı sıfırın komşuluğu olan lokal konveks uzaylara *fıçılı uzay* denir (Wilansky 1978).

Tanım 2.1.4 X ve Y dizi uzayları olmak üzere, $\varphi \subset Y \subset X^\beta$ olsun. Her bir

$y = (y_k) \in Y$ için, X üzerinde p_y yarı normu

$$p_y(x) = \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| \quad (\text{ her } x = (x_k) \in X \text{ için})$$

olacak biçimde tanımlanır ve $P_y = (p_y | y \in Y)$, X üzerinde τ_{P_y} lokal konveks topolojisini oluşturur. (X, Y) bir dual çifti olsun. Her bir $y \in Y$ için,

$$p_y : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$p_y(x) = |\langle x, y \rangle|$ olmak üzere $P_y := (p_y | y \in Y)$ yarı normlar ailesi X üzerinde $\sigma(X, Y)$ ile gösterilen *zayıf topolojiyi* oluşturur. $(X, \sigma(X, Y))$ uzayı Hausdorff uzayıdır (Boos 2000). (X^β tanımı için *Tanım 2.2.3'e* bakınız.)

Tanım 2.1.5 (X, Y) bir dual çifti olsun. $\emptyset \neq M \subset Y$ olmak üzere M kümesinin lokal konveks $(Y, \sigma(Y, X))$ uzayında sınırlı olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ için,

$$\sup_{y \in M} |\langle x, y \rangle| < \infty$$

olmasıdır (Boos 2000).

2.2 FK Uzayları

Bu kısımda FK uzayları tanımlanacak ve bu özelliğe sahip olan dizi uzaylarına örnekler verilecektir.

Tanım 2.2.1 ω ile reel terimli tüm dizilerin uzayı gösterilmek üzere, ω' nın her bir altvektör uzayı dizi uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.2 FK uzayları; tam, metrikleşebilir, lokal konveks topolojiyle donatılmış ve bu topoloji altında sürekli koordinatlara sahip yani,

$$x \rightarrow x_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

sürekli olan dizi uzaylarıdır.

Alışılmış bazı FK uzayları;

$$\|x\|_{\infty} = \sup_n |x_n|$$

normuyla sınırlı diziler uzayı l^{∞} , onun kapalı altuzayı olan yakınsak diziler uzayı c ve sıfıra yakınsak diziler uzayı c_0 uzaylarıdır. Dahası $p \geq 1$ olmak üzere,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuyla l^p uzayı,

$$p_n(x) = |x_n|, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

yarı normuyla ω uzayı ve

$$\|x\|_{bs} = \sup_n \left| \sum_{k=1}^n x_k \right|$$

normu ile verilen sınırlı seriler uzayı bs uzayı da alışılmış FK uzaylarıdır.

Bu dizi uzaylarının dışında örneğin φ sonlu diziler uzayı FK topolojisiyle donatılmaz (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

Tanım 2.2.3 Keyfi bir X dizi uzayının α, β ve γ - dualleri sırasıyla,

$$\begin{aligned} X^{\alpha} & : = \left\{ y \in \omega : \forall x \in X, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| < \infty \right\} \\ X^{\beta} & : = \left\{ y \in \omega : \forall x \in X, \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \text{ serisi yakınsak} \right\} \\ X^{\gamma} & : = \left\{ y \in \omega : \forall x \in X, \sup_n \left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| < \infty \right\} \end{aligned}$$

olacak biçimde tanımlanır (Boos 2000). X bir boyutlu bir dizi uzayı ise;

$$X = Sp\{x\}$$

diyelim, bu durumda $(Sp\{x\})^\beta$ gösterimi yerine x^β gösterimini kullanmayı tercih edeceğiz. Diğer yandan x^β uzayı,

$$y \rightarrow |y_k|, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad \text{ve} \quad y \rightarrow \sup_n \left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right|$$

yarı normlarıyla bir FK uzayıdır (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

Tanım 2.2.4 $X \supset \varphi$ ve X bir FK uzayı olmak üzere, X uzayının f -duali,

$$X^f := \left\{ (f(\delta^k)) : f \in X' \right\}$$

olacak şekilde tanımlanır (Wilansky 1984). Burada, $\delta^k := (\delta_j^k)$ olup her $j, k \in \mathbb{N}$ için,

$$\delta_j^k = \begin{cases} 1, & k = j \text{ için} \\ 0, & k \neq j \text{ için} \end{cases}$$

olacak biçimde tanımlıdır.

Dahası, X ve Y dizi uzayları için η ile bu uzayların α, β, γ veya f -duali gösterilmek üzere

$$Y \subset X \Rightarrow X^\eta \subset Y^\eta$$

gerçeklenir (Wilansky 1984).

2.3 Toplanabilirlik Alanları

Bu kısımda keyfi bir $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisinin toplanabilirlik alanlarını tanımlayacağız.

Tanım 2.3.1 $A = (a_{nk})$ reel veya kompleks terimli sonsuz matris ve $x = (x_k)$ keyfi bir dizi olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serisi yakınsak ise

$$(Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$$

olmak üzere $Ax = \{(Ax)_n\}$ dizisine x dizisinin A dönüştürme dizisi denir (Maddox 1970).

$$\omega_A := \{x \in \omega : Ax \text{ mevcut}\}$$

ve

$$c_A := \left\{x \in \omega_A : \lim_n (Ax)_n \text{ mevcut}\right\}$$

uzaylarını tanımlayalım. Eğer $f : c_A \rightarrow \mathbb{K}$ fonksiyoneli

$$f(x) = \lim_n (Ax)_n$$

şeklinde tanımlarsak f bir toplanabilme metodudur. Eğer $\lim_n (Ax)_n = L$ ise x dizisi L değerine A – toplanabilirdir denir. Hatta bu durumda bazen, $\lim_A x = L$ yazılır. Diğer yandan c_A uzayı,

$$x \rightarrow |x_k|, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$x \rightarrow \sup_m \left| \sum_{k=1}^m a_{nk}x_k \right|, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$x \rightarrow \sup_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k \right|$$

yarı normları altında bir FK uzayıdır ve dahası bu topolojide ayrılabilirdir (Wilansky, 1984).

A matrisinin sıfıra toplanabilirlik alanı,

$$(c_0)_A := \{x \in c_A : Ax \in c_0\}$$

ve kuvvetli toplanabilirlik alanı,

$$\omega(A) := \left\{ x \in \omega : \text{bir } L \text{ için } \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| |x_k - L| = 0 \right\}$$

olacak biçimde tanımlanır (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

Teorem 2.3.1 (Silverman-Toeplitz Teoremi) Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler

olması için gerek ve yeter koşul;

$$(i) \|A\| = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0 \quad (\text{her } k \in \mathbb{N} \text{ için})$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$$

olmasıdır (Boos 2000)

Örneğin,

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 1 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

olacak biçimde tanımlı C_1 Cesàro matrisi regülerdir.

3. HAHN ÖZELLİĞİ

Bu bölümde, öncelikle Hahn özelliği ifade edilecek ve bu özelliğe sahip olan dizi uzaylarının yapısı ile ilgili temel sonuçlar incelenecektir. Hatta bazı dizi uzaylarının yeterince büyük olması ile Hahn özelliğine sahip olması arasındaki ilişki gösterilerek, ele aldığımız örneklerle de bu özelliğin daha iyi anlaşılması sağlanacaktır.

3.1 Tanımlar ve İlk Sonuçlar

Bu kısımda Hahn özelliği tanımlanacak ve fonksiyonel analitik gösterimi *Teorem 3.1.1'* de ifade edilerek, bu teoremin tek uygulaması *Sonuç 3.1.1'* de incelenecektir. Dahası; Hahn uzaylarının sahip olduğu temel özellikler incelenecek, özellikle Hahn özellikli herhangi bir FK uzayının ayrılabilir olmadığı gösterilecektir.

Tanım 3.1.1 E bir dizi uzayı olmak üzere, E tarafından içerilen ve terimleri 0 ve 1'lerden oluşan dizilerin kümesinin gerdiği uzayı $\chi(E)$ ile gösterelim. Keyfi bir F FK uzayı için,

$$\chi(E) \subseteq F \Rightarrow E \subseteq F \quad (3.1.1)$$

gerçekleniyorsa, E dizi uzayı *Hahn özelliklidir* veya *Hahn uzayıdır* denir. Eğer Hahn özellikli E dizi uzayı bir FK uzayı ise (3.1.1) gereğince E , $\chi(E)$ uzayını kapsayan en küçük FK uzayıdır (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

Teorem 3.1.1 E bir FK uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir.

- (i) E , Hahn özelliklidir.
- (ii) $\chi(E)$, E dizi uzayının yoğun ve fıçılı bir altuzayıdır (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

Ancak bu teoremin literatürde tek bir uygulaması vardır.

Sonuç 3.1.1 l^∞ , Hahn uzayıdır (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

Öncelikle ispatımız için gerekli olan bir dizi hatırlatmada bulunalım.

Hatırlatma 3.1.1

1) $l^\infty = \chi(l^\infty) + bs$ formunda ifade edilebilir. Dahası; her $x \in l^\infty$ ve her $\varepsilon > 0$ için, $x = y + z$ ve $\|z\|_\infty < \varepsilon$ olacak biçimde bir $y \in \chi(l^\infty)$ ve bir $z \in bs$ vardır (Boos 2000).

2) $bfa(\mathbb{N})$ ile doğal sayıların tüm altkümeleri üzerinde tanımlı, sınırlı, sonlu toplamsal kompleks değerli μ küme fonksiyonlarının uzayını gösterelim. Sonlu toplamsal küme fonksiyonu,

$$(i) \mu(\emptyset) = 0$$

$$(ii) S, T \subset \mathbb{N} \text{ ve } S \cap T = \emptyset \text{ olmak üzere,}$$

$$\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T)$$

özelliklerini gerçekler. Dahası,

$$\|\mu\| := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\mu(E_i)| : \mathbb{N} = \cup E_i, \quad i \neq j \text{ için } E_i \cap E_j = \emptyset \right\}$$

olmak üzere $bfa(\mathbb{N})$ normlu bir uzaydır.

Her bir $f \in (l^\infty)'$, $E \subset \mathbb{N}$ ve x , E üzerinde tanımlı karakteristik fonksiyon olmak üzere

$$f(x) = \int_{\mathbb{N}} x d\mu = \mu(E)$$

formunda ifade edilir ve $(l^\infty)' = bfa(\mathbb{N})$ gerçekleşir (Wilansky 1978).

3) $\mathcal{A}$, H kümesinin altkümelerinin bir σ cebiri olmak üzere, $B \subset bfa(H, \mathcal{A})$ ve her bir $E \in \mathcal{A}$ ve her $\mu \in B$ için $|\mu(E)| < K_E$ olacak biçimde bir K_E mevcut olsun. Bu durumda B , $bfa(H, \mathcal{A})$ normlu uzayında sınırlı bir kümedir (Wilansky 1978).

4) X fıçılı bir uzay ve S , X uzayının yoğun bir altkümesi olsun. S kümesinin fıçılı olması için gerek ve yeter şart X' de $\sigma(X', S)$ sınırlı olan her kümenin $\sigma(X', X)$ sınırlı olmasıdır (Wilansky 1978).

İspat (Sonuç 3.1.1). *Teorem 3.1.1'* in koşullarının gerçekleştiğini gösterelim.

Öncelikle $\chi(l^\infty)$ uzayının, l^∞ uzayının yoğun bir altuzayı olduğunu gösterelim. *Hatırlatma 3.1.1(1)* gereğince keyfi $x \in l^\infty$ ve her $\varepsilon > 0$ için $x = y + z$ ve $\|z\|_\infty < \varepsilon$ olacak biçimde bir $y \in \chi(l^\infty)$ ve bir $z \in bs$ vardır. $x = y + z$ olduğundan $x - y = z$ ve dolayısıyla $\|x - y\|_\infty = \|z\|_\infty < \varepsilon$ elde edilir.

Yani keyfi $x \in l^\infty$ ve her $\varepsilon > 0$ için, $\|x - y\|_\infty < \varepsilon$ olacak biçimde bir $y \in \chi(l^\infty)$ bulunabildiğinden $\chi(l^\infty)$ uzayı, l^∞ uzayının yoğun bir altuzayıdır.

Şimdi $\chi(l^\infty)$ uzayının l^∞ uzayının fıçılı bir altuzayı olduğunu gösterelim. Bunun için *Hatırlatma 3.1.1(4)* ifadesinden faydalanalım.

l^∞ bir FK uzayıdır dolayısıyla tamdır ve böylece ikinci kategoridendir. O halde l^∞ uzayı fıçılıdır (Wilansky, 1978). $\chi(l^\infty)$ uzayının, l^∞ uzayının yoğun bir altuzayı olduğunu yukarıda göstermiştik. O halde $\chi(l^\infty)$ uzayının fıçılı olması için gerek ve yeter şart $(l^\infty)'$ da $\sigma[(l^\infty)', \chi(l^\infty)]$ sınırlı olan her kümenin $\sigma[(l^\infty)', l^\infty]$ sınırlı olmasıdır. O halde keyfi $B \subset (l^\infty)'$ olmak üzere, B kümesi $\sigma[(l^\infty)', \chi(l^\infty)]$ sınırlı olsun. Bu durumda, her $y \in \chi(l^\infty)$ için,

$$\sup_{f \in B} |\langle y, f \rangle| = \sup_{f \in B} |f(y)| < \infty \quad (3.1.2)$$

gerçeklenir.

$E \subseteq \mathbb{N}$ ve x , E üzerinde tanımlı karakteristik fonksiyon olsun. O halde $x \in \chi(l^\infty)$ elde edilir. *Hatırlatma 3.1.1(2)* gereğince $B \subset bfa(\mathbb{N})$ diyebiliriz ve her bir $\mu \in B$ fonksiyonuna karşılık gelen $f \in (l^\infty)'$ için

$$f(x) = \int_{\mathbb{N}} x d\mu = \mu(E)$$

gerçeklenir. (3.1.2) gereğince her bir $E \subseteq \mathbb{N}$ için,

$$\sup_{\mu \in B} |\mu(E)| < \infty$$

gerçeklenir. Yani, her bir $E \subseteq \mathbb{N}$ ve her $\mu \in B$ için $|\mu(E)| < K_E$ olacak biçimde bir K_E vardır. *Hatırlatma 3.1.1(3)* gereğince B , $bfa(\mathbb{N}) = (l^\infty)'$ normlu uzayında sınırlı bir kümedir. O halde,

$$\sup_{f \in B} \|f\| < \infty$$

elde edilir. Bu durumda, her $x \in l^\infty$ için

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\|_\infty$$

elde edilir. Böylece her $x \in l^\infty$ için,

$$\sup_{f \in B} |f(x)| \leq \sup_{f \in B} \|f\| \|x\|_\infty$$

bulunur. Yani, her $x \in l^\infty$ için

$$\sup_{f \in B} |f(x)| < \infty$$

gerçeklenir. Böylece $(l^\infty)'$ da keyfi seçilen B kümesi $\sigma[(l^\infty)', l^\infty]$ sınırlıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Önerme 3.1.1 Bir $\mathcal{A}$ indeks kümesinin her bir α elemanı için E_α Hahn uzayı ise $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} E_\alpha$ Hahn uzayıdır (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

Önerme 3.1.2 E bir Hahn uzayı ise $E \subseteq l^\infty$ ve $\chi(E)$, sup norm topolojisine göre E uzayında yoğundur (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

İspat. $\chi(E)$ uzayı, tanım gereğince l^∞ uzayının bir altuzayıdır. E dizi uzayı Hahn özellikli olduğundan (3.1.1) ifadesinde F FK uzayını l^∞ dizi uzayı olarak seçersek, $E \subseteq l^\infty$ gerçekleşir.

Şimdi de $\chi(E)$ uzayının sup norm topolojisine göre E uzayında yoğun olduğunu gösterelim.

$\chi(E) \subseteq E$ olduğundan $\overline{\chi(E)} \subseteq E$ elde edilir.

$\overline{\chi(E)}$, l^∞ uzayının kapalı bir altuzayıdır. O halde, $\overline{\chi(E)}$ sup norm topolojisine göre bir FK uzayıdır ve hipotez gereğince E bir Hahn uzayı olduğundan (3.1.1)' den,

$$\chi(E) \subseteq \overline{\chi(E)} \Rightarrow E \subseteq \overline{\chi(E)}$$

elde edilir. Böylece, elde ettiğimiz bu iki ifade birlikte düşünüldüğünde $\chi(E)$ uza-

yının sup norm topolojisine göre E uzayında yoğun olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar.

Önerme 3.1.3 E bir Hahn uzayı ise $\chi(E)^\beta = E^\beta$ gerçekleşir (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

İspat. E bir Hahn uzayı ve $\chi(E)^\beta \neq E^\beta$ olsun.

$\chi(E) \subset E$ olduğundan $E^\beta \subset \chi(E)^\beta$ elde edilir, bu durumda kabulümüz gereğince bir $x \in \chi(E)^\beta \setminus E^\beta$ seçebiliriz. Yani, $x \in \chi(E)^\beta$ ve $x \notin E^\beta$ olduğunu kabul edelim. $x \in \chi(E)^\beta$ olduğundan her $y \in \chi(E)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ serisi yakınsaktır. O halde her $y \in \chi(E)$ için $y \in x^\beta$, yani

$$\chi(E) \subset x^\beta$$

elde edilir.

x^β bir FK uzayı ve hipotez gereğince E bir Hahn uzayı olduğundan (3.1.1)' den $E \subset x^\beta$ olmalıdır. Kabulümüz gereğince $x \notin E^\beta$, yani bir $z \in E$ için $\sum_{k=1}^{\infty} x_k z_k$ serisi yakınsak değildir. O halde $z \notin x^\beta$ olur ki bu durumda $E \not\subset x^\beta$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.1.1 $F \supseteq \varphi$ ve F , dizilerin sayılabilir bir kümesinin gerdiği uzay olsun. Bu durumda F , FK uzaylarının arakesiti olarak yazılabilir (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

İspat. $F \supseteq \varphi$ olduğundan,

$$a_k^{(n)} = \begin{cases} 0, & k < n \\ 1 & k = n \end{cases}$$

olmak üzere $F = Sp \{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, \dots\}$ formunda ifade edilebilir.

$A = (a_{nk})$ matrisini, $a_{nk} = a_n^{(k)}$ yardımıyla sıfır olmayan köşegene sahip alt üçgensel

matris olarak tanımlayalım.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & & 1 & 0 & 0 & \dots \\ & & & 1 & 0 & \dots \\ & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Böylece A nın tersi olan A^{-1} tek olarak mevcuttur.

Diğer yandan öncelikle,

$$\varphi = \omega^\beta = \bigcap \{x^\beta : x \in \omega\}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için keyfi bir $x \in \varphi$ alalım. Her $y \in \omega$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

elde edilir. Toplam sonlu olduğundan açık olarak bu seri yakınsaktır ve bu yüzden $x \in \omega^\beta$ gerçekleşir.

Şimdi, $\omega^\beta \subset \varphi$ olduğunu görelim. $x \in \omega^\beta$ ve $x \notin \varphi$ olsun. $x \notin \varphi$ olduğundan,

$$i = 1, 2, 3, \dots \text{ ve } k(1) < k(2) < k(3) < \dots < k(i) < \dots$$

olmak üzere, sonsuz çoklukta $k(i)$ için $x_{k(i)} \neq 0$ elde edilir. Diğer yandan; kabulümüz gereğince $x \in \omega^\beta$ olduğundan, her $y \in \omega$ için $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ serisi yakınsaktır.

Şimdi bir y dizisini,

$$y_k = \begin{cases} \frac{1}{k(i)}, & k = k(i) \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

olacak biçimde tanımlayalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k &= \sum_{i=1}^{\infty} x_{k(i)} \frac{1}{x_{k(i)}} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} 1 \end{aligned}$$

ıraksak serisi elde edilir. Bu ise kabülümüzle çelişir. Dolayısıyla $\omega^\beta \subset \varphi$ elde edilir. Yani,

$$\varphi = \omega^\beta$$

gerçeklenir. A^{-1} mevcut olduğundan A birebirdir, böylece

$$\begin{aligned} F &= A(\varphi) \\ &= A\left(\bigcap_{x \in \omega} x^\beta\right) \\ &= \bigcap_{x \in \omega} A(x^\beta) \end{aligned}$$

formunda yazılabilir. x^β , FK uzayıdır ve FK uzayları arasında tanımlı matris dönüşümleri sürekli olduğundan F , FK uzaylarının arakesiti olarak yazılmış olur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.2 E , bir FK uzayı ve $E \supset \varphi$ olsun. E Hahn özellikli ise ayrılabilir değildir (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

İspat. E Hahn özellikli olduğundan, *Önerme 3.1.2* gereğince $E \subseteq l^\infty$ gerçekleşir. Diğer yandan E uzayının topolojisi, l^∞ dizi uzayından E üzerine indirgenen topolojiden daha geniştir. Bu durumda, E uzayının sup norm topolojisine göre ayrılabilir olmadığını göstermek yeterlidir.

E ayrılabilir olsun. O halde E , sayılabilir çoklukta terimleri 0 ve 1 olan dizi içerir. Diyelim ki bu diziler sayılamaz çoklukta olsun. Terimleri 0 ve 1 olan bu dizilerin sup norm topolojisine göre aralarındaki uzaklık bir birimdir. Bu dizilerin her birinin $\frac{1}{3}$ yarıçaplı yuvarların merkezi olduklarını kabul edersek, bu durumda yuvarlar sayılamaz çoklukta ve ayrık olur. Kabülümüz gereğince E ayrılabilir olduğundan sayılabilir ve yoğun bir M altkütmesi vardır. Yani keyfi $x \in E$ ve her $\varepsilon > 0$ için, $d(x, y) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $y \in M$ bulabiliriz. O halde, M kümesinin her bir elemanı yarıçapı $\frac{1}{3}$ olan bu açık yuvarlarda bulunur. Diğer yandan bu yuvarlar ayrık ve sayılamaz çoklukta olduğundan M sayılamaz çoklukta eleman içerir. Bu ise M kümesinin sayılabilir bir küme olmasıyla çelişir. O halde E uzayı sayılabilir çoklukta 0, 1 dizisi içerir.

O halde; tanım gereğince $\chi(E)$, sayılabilir çoklukta dizinin gerdiği bir uzaydır ve *Lemma 3.1.1* gereğince FK uzaylarının arakesiti olarak yazılabilir.

$\mathcal{A}$ indeks kümesinin her bir α elemanı için F_α keyfi bir FK uzayı olmak üzere,

$$\chi(E) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha$$

elde edilir. Hipotez gereğince E Hahn özellikli olduğundan (3.1.1)' den, her $\alpha \in \mathcal{A}$ için $\chi(E) \subseteq F_\alpha$ gerçekleşir. Öyleyse her $\alpha \in \mathcal{A}$ için $E \subseteq F_\alpha$ elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} E &\subseteq \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha \\ \Rightarrow E &= \chi(E) \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} \chi(E) &\subseteq \chi(l^\infty) \cap E \\ &= \{x \in E : x \text{ in görüntü kümesi sonlu}\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E : x \text{ in görüntü kümesi } n \text{ elemanlı}\} \end{aligned}$$

gerçekleşir. İfade ettiğimiz bu son küme birinci kategoridendir (Wilansky 1978). Oysa ki E FK uzayı olduğundan tamdır ve ikinci kategoridendir. Dolayısıyla, (3.1.3) gereğince $\chi(E)$ uzayı da ikinci kategoriden olmalıdır ve bu nedenle birinci kategoriden olan bir uzayın altuzayı olamaz. Elde ettiğimiz bu son çelişkiden dolayı E uzayı ayrılabilir değildir. Bu da ispatı tamamlar.

3.2 Büyük Hahn Uzayları

Bu kısımda l^∞ dizi uzayının Hahn özelliğine sahip olan büyük altuzaylarını inceleyeceğiz. Büyüklüğün, Hahn uzayı olmayı gerektirip gerektirmediğine ilişkin araştırmamıza *Teorem 3.2.1* aydınlatıcı bir cevap vermektedir.

Önerme 3.2.1 e ile $(1, 1, 1, \dots)$ birim dizisi gösterilmek üzere E dizi uzayı

$$bs + Sp\{e\} \subseteq E \subseteq l^\infty \quad (3.2.1)$$

ifadesini gerçeklerse, $E = bs + \chi(E)$ formunda yazılabilir (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

İspat. Keyfi bir $x \in E$ alalım ve $y \in \chi(E)$ dizisini $x - y = z \in bs$ olacak biçimde inşa edelim. x dizisine uygun bir sabit ekleyerek ve aynı işlemi y dizisi için de uygulayarak her $k = 1, 2, 3, \dots$ için $x_k \geq 0$ elde edebiliriz. Dahası x dizisini ve tabii ki y ve z dizilerini de uygun bir skalar ile çarparak $k = 1, 2, 3, \dots$ için $0 \leq x_k < 1$ elde ederiz.

$y_1 = 0$ alalım ve $z_1, y_2, z_2, y_3, \dots$ terimlerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$z_k = x_k - y_k \quad \text{ve} \quad y_{k+1} = \begin{cases} 1, & \sum_{j=1}^k y_j < \sum_{j=1}^k x_j \quad \text{için} \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

olsun. $k = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere $y_k = 0$ veya 1 gerçekleşir ve $0 \leq x_k < 1$ olduğundan,

$$\|z\|_{bs} = \sup_n \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sup_n \left| \sum_{k=1}^n (x_k - y_k) \right| \leq 1$$

elde edilir. O halde $z \in bs$ gerçekleşir. $y = x - z \in E + bs$ ve (3.2.1) gereğince $bs \subseteq E$ olduğundan $y \in \chi(E)$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Aşağıdaki lemmayı ispatsız olarak vereceğiz.

Lemma 3.2.1 E, bs uzayını içeren bir dizi uzayı ve $x \in E$ dizisinin görüntü kümesi yalnızca $\{0, 1, 2, \dots, N\}$ değerlerinden oluşuyorsa, $x \in \chi(E)$ gerçekleşir (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

Şimdi, $\sum$ ile kısmi toplamlar operatörünü gösterelim. O halde keyfi bir x dizisi için,

$$\sum x := (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \dots)$$

olacak biçimde tanımlanır. Açık olarak, E bir FK uzayı ise $\sum(E)$ bir FK uzayıdır.

Lemma 3.2.2 $\chi(l^\infty) \subseteq \sum[\chi(bs + Sp\{e\})]$ gerçekleşir (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

İspat. $x = (x_k)$, terimleri 0 ve 1 olan keyfi bir dizi olsun. y dizisini,

$$y = \sum^{-1} x = (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots)$$

yardımla tanımlayalım. Bu durumda y , terimleri $-1, 0, 1$ olan bir dizidir ve $y \in bs$ gerçekleşir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \|y\|_{bs} &= \sup_n \left| \sum_{k=1}^n y_k \right| \\ &= \sup_n |x_1 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \dots + x_n - x_{n-1}| \\ &= \sup_n |x_n| \end{aligned}$$

elde edilir. Her $k = 1, 2, 3, \dots$ için $x_k \in \{0, 1\}$ olacak biçimde seçtiğimizden $\|y\|_{bs} \leq 1$ elde edilir. *Lemma 3.2.1'* den

$$y + e \in \chi(bs + Sp\{e\})$$

elde edilir. $u = y + e$ diyelim. O halde u ve $e \in \chi(bs + Sp\{e\})$ olduğundan vektör uzay aksiyomları gereğince

$$y = u - e \in \chi(bs + Sp\{e\})$$

elde edilir. Böylece,

$$\sum y = \sum \sum^{-1} x = x \in \sum[\chi(bs + Sp\{e\})]$$

bulunur. x keyfi olarak seçildiğinden

$$\chi(l^\infty) \subseteq \sum [\chi(bs + Sp\{e\})]$$

elde edilir.

Teorem 3.2.1 E bir dizi uzayı olsun. Eğer,

$$bs + Sp\{e\} \subseteq E \subseteq l^\infty$$

gerçekleniyorsa, E Hahn özelliklidir (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

İspat. *Önerme 3.2.1'* den

$$E = bs + \chi(E)$$

formunda yazılabilir ve hipotezden $Sp\{e\} \subset E$ olduğundan,

$$E = bs + \chi(E) + Sp\{e\}$$

gerçeklenir. $\chi(E)$ ve $bs + Sp\{e\}$ uzaylarını ayrı ayrı ele alarak *Önerme 3.1.1'* den faydalanalım.

Tanımı gereğince $\chi(\chi(E)) = \chi(E)$ olduğundan $\chi(\chi(E))$ uzayını kapsayan her F FK uzayı $\chi(E)$ uzayını da kapsar. Bu durumda (3.1.1) gereğince $\chi(E)$ Hahn uzayıdır.

Diğer yandan, $\chi(bs + Sp\{e\})$ uzayını kapsayan her F FK uzayının $bs + Sp\{e\}$ uzayını kapsadığını göstermeliyiz.

Her $i \in \mathbb{N}$ için $u^{(i)}$, $bs + Sp\{e\}$ uzayı tarafından içerilen ve terimleri 0 ve 1 olan keyfi dizi olsun. $y^{(i)} \in bs$ olmak üzere $u^{(i)} = y^{(i)} + e$ formundadır. O halde keyfi β_i skaları için,

$$\begin{aligned} z &= \sum_{i=1}^n u^{(i)} \beta_i \\ &= \sum_{i=1}^n (y^{(i)} + e) \beta_i \\ &= \sum_{i=1}^n y^{(i)} \beta_i + \sum_{i=1}^n \beta_i \end{aligned}$$

olmak üzere $z \in \chi(bs + Sp\{e\})$ olur. $\alpha = \sum_{i=1}^n \beta_i$ olmak üzere her i için β_i keyfi olduğundan α keyfi bir skaldır, böylece $\alpha \in Sp\{e\}$ elde edilir. Bu durumda kabulümüz gereğince $Sp\{e\} \subseteq F$ gerçekenir.

Son olarak $bs \subseteq F$ olduğunu gösterelim. Bunun için öncelikle $\sum(bs) = l^\infty$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} \sum(bs) &= \{\sum x : x \in bs\} \\ &= \left\{ \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) : x \in bs \right\} \subset l^\infty \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

elde edilir. Diğer yandan, $x \in \sum^{-1}(l^\infty)$ olsun. O halde $\sum x \in l^\infty$ gerçekenir. Böylece $x \in bs$ elde edilir. Yani,

$$\sum^{-1}(l^\infty) \subset bs \Rightarrow l^\infty \subset \sum(bs) \quad (3.2.3)$$

gerçekenir. (3.2.2) ve (3.2.3) birlikte düşünıldüğünde $l^\infty = \sum(bs)$ bulunur.

Kabulümüz gereğince, $\chi(bs + Sp\{e\}) \subseteq F$ olduğundan $\sum[\chi(bs + Sp\{e\})] \subseteq \sum(F)$ elde edilir. *Lemma 3.2.2* ve *Sonuç 3.1.1* gereğince,

$$\chi(l^\infty) \subseteq \sum[\chi(bs + Sp\{e\})] \subseteq \sum(F)$$

olup,

$$l^\infty \subseteq \sum(F)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.2.1 Keyfi bir E FK uzayı için,

$$bs + Sp\{e\} \subseteq E \subseteq l^\infty$$

gerçeklensin. Bu durumda $\chi(E)$ uzayı, E uzayında yoğun ve fiçilidir (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

Sonuç 3.2.1, *Teorem 3.1.1* ve *Teorem 3.2.1*' den kolaylıkla elde edilir.

Teorem 3.2.1' in bir sonucu olarak Cesàro toplanabilir sınırlı diziler uzayının Hahn özellikli olduğu kolayca görülür. Bu uzayı,

$$E_1 := \left\{ x \in l^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \text{ mevcut} \right\}$$

ile gösterelim.

Her $x = (x_k) \in Sp\{e\}$ için, $k = 1, 2, 3, \dots$ ve α keyfi bir skalar olmak üzere $x_k = \alpha$ gerçekleşir. O halde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (n\alpha) = \alpha \quad (3.2.4)$$

elde edilir. Öyleyse $x \in E_1$, yani $Sp\{e\} \subseteq E_1$ gerçekleşir.

Diğer yandan, keyfi bir $y \in bs$ için $M > 0$ olmak üzere $\sup_n \left| \sum_{k=1}^n y_k \right| = M < \infty$ gerçekleşir. O halde,

$$0 \leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n y_k \right| \leq \frac{1}{n} M \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.2.5)$$

elde edilir. Böylece $y \in E_1$, yani $bs \subseteq E_1$ gerçekleşir.

(3.2.4) ve (3.2.5) gereğince $bs + Sp\{e\} \subseteq E_1$ elde edilir. E_1 uzayının tanımından $E_1 \subseteq l^\infty$ olduğundan,

$$bs + Sp\{e\} \subseteq E_1 \subseteq l^\infty$$

elde edilir. Böylece *Teorem 3.2.1'* den E_1 Hahn özelliklidir.

E_1 uzayına ait terimleri 0 ve 1 olan diziler, pozitif tamsayıların doğal yoğunluğa sahip altkümeleri yardımıyla karakterize edilebilen önemli bir sınıf oluştururlar. Şöyle ki, $A \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere A kümesinin asimptotik yoğunluğu d olsun. Şimdi bir s dizisini her $k \in \mathbb{N}$ için,

$$s_k = \begin{cases} 1, & k \in A \\ 0, & k \notin A \end{cases} \quad (3.2.6)$$

olacak biçimde tanımlayalım.

O halde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_A(k) = d$$

elde edilir. Bu durumda $s \in E_1$ elde edilir.

Diğer yandan s , E_1 uzayından alınan ve terimleri 0 ve 1 olan keyfi bir dizi olsun. $A \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere s dizisini (3.2.6) yardımıyla tanımlayalım.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_A(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k$$

gerçeklenir. Bu limit mevcut olduğundan A kümesi doğal yoğunluğa sahiptir.

E_1 , Hahn uzayı olduğundan (3.1.1) gereğince bu sınıfı kapsayan en küçük FK uzayıdır.

Şimdi Sıfıra Cesàro toplanabilir sınırlı diziler uzayı olan,

$$E_2 := \left\{ x \in l^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = 0 \right\}$$

uzayını ele alalım. $Sp\{e\} \not\subseteq E_2$ olduğundan *Teorem 3.2.1* gerçekleşmez ve gerçekten E_2 Hahn özellikli de değildir. Bunu görebilmek için,

$$F := \left\{ x \in l^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| = 0 \right\}$$

olacak biçimde tanımlanan sıfıra kuvvetli Cesàro toplanabilir sınırlı diziler uzayını ele alalım. Bu uzay, $\chi(E_2)$ uzayını kapsadığı halde E_2 uzayını kapsamayan bir FK uzayıdır.

Örneğin; $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{(-1)^k\} = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ dizisini gözönüne alalım.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k = 0$$

olduğundan $\{(-1)^k\} \in E_2$ gerçekleşir fakat;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |(-1)^k| = 1$$

olduğundan $\{(-1)^k\} \notin F$ elde edilir. Böylece (3.1.1) gereğince E_2 bir Hahn uzayı değildir.

E_1 ve E_2 uzayları arasındaki bu fark e dizisinden kaynaklanmaktadır. Bu da *Teorem 3.2.1'* in ne kadar hassas olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.2 E bir dizi uzayı olmak üzere,

$$E = l^\infty \cdot \chi(E) + c_0 \quad (3.2.7)$$

olsun. Bu durumda E dizi uzayının Hahn özellikli olması için gerek ve yeter şart $\chi(E)^\beta = l_1$ olmasıdır (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

İspat. Öncelikle gerek şartın gerçekleştiğini gösterelim. E Hahn özellikli olduğundan *Önerme 3.1.3* gereğince $\chi(E)^\beta = E^\beta$ olduğunu biliyoruz. Diğer yandan hipotezden $E = l^\infty \cdot \chi(E) + c_0$ olduğundan

$$E^\beta = (l^\infty \cdot \chi(E) + c_0)^\beta$$

olup,

$$E^\beta = (l^\infty \cdot \chi(E))^\beta \cap (c_0)^\beta$$

gerçeklenir. Böylece,

$$E^\beta = (l^\infty \cdot \chi(E))^\beta \cap l_1 \quad (3.2.8)$$

elde edilir. $l^\infty \cdot \chi(E) \subset l^\infty$ gerçekleşir. Gerçekten, keyfi $x \in l^\infty \cdot \chi(E)$, $y \in l^\infty$ ve $z \in \chi(E)$ olmak üzere $x = yz$ formunda yazılabilir. O halde,

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &= \sup_n |x_n| \\ &= \sup_n |y_n z_n| \\ &\leq \sup_n |y_n| \sup_n |z_n| \\ &= \|y\|_\infty \|z\|_\infty < \infty \end{aligned}$$

gerçeklenir. Bu durumda $x \in l^\infty$, yani $l^\infty \cdot \chi(E) \subset l^\infty$ elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} l^\infty \cdot \chi(E) \subset l^\infty &\Rightarrow (l^\infty)^\beta \subset (l^\infty \cdot \chi(E))^\beta \\ &\Rightarrow l_1 \subset (l^\infty \cdot \chi(E))^\beta \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

elde edilir. (3.2.8) ve (3.2.9) ifadelerini birlikte düşünersek,

$$E^\beta = (l^\infty \cdot \chi(E))^\beta \cap l_1 = l_1$$

yani,

$$\chi(E)^\beta = l_1$$

elde edilir.

Şimdi yeter şartın gerçeklendiğini gösterelim. $\chi(E)^\beta = l_1$ olsun.

$$\chi(E) \subseteq F \tag{3.2.10}$$

olacak biçimde keyfi F FK uzayı için,

$$E \subseteq F \tag{3.2.11}$$

olduğunu gösterelim.

Bunun için $l^\infty \cdot \chi(E)$ ve c_0 uzaylarını ayrı ayrı ele alarak *Önerme 3.1.1'* den faydalanalım ve (3.2.11) ifadesinin gerçeklendiğini gösterelim.

(3.2.7) ve (3.2.10) ifadeleri gereğince $\chi(l^\infty \cdot \chi(E)) \subseteq F$ gerçekenir. O halde,

$$l^\infty \cdot \chi(E) \subseteq F \tag{3.2.12}$$

olduğunu göstermeliyiz.

Toplam, E tarafından içerilen ve terimleri 0 ve 1 olan diziler üzerinden alınmak ve $x \in \chi(E)$ olmak üzere

$$l^\infty \cdot \chi(E) = \sum l^\infty x$$

formunda yazılabilir. Her bir $l^\infty x$ uzayı *Sonuç 3.1.1* gereğince Hahn uzayıdır ve dolayısıyla *Önerme 3.1.1'* den $l^\infty \cdot \chi(E)$ Hahn özelliklidir.

Şimdi $c_0 \subseteq F$ olduğunu gösterelim. Bunu görebilmek için öncelikle

$$c_0 \subseteq F \Leftrightarrow F^f \subseteq c_0^f = l_1$$

olduğunu hatırlatalım (Wilansky, 1984). Yani her $k \in \mathbb{N}$ için,

$$\text{her } f \in F' \text{ için } (f(\delta^k)) \in l_1 \quad (3.2.13)$$

ifadesinin gerçekleştiğini göstermemiz yeterlidir. Burada, $\delta^k := (\delta_j^k)$ olup her $j, k \in \mathbb{N}$ için,

$$\delta_j^k = \begin{cases} 1, & k = j \text{ için} \\ 0, & k \neq j \text{ için} \end{cases}$$

olacak biçimde tanımlıdır.

Her bir $y \in \chi(E)$ için $l^\infty y$, l^∞ uzayının kapalı bir altuzayıdır. Gerçekten, $y \in \chi(E)$ olmak üzere

$$T_y : l^\infty \rightarrow l^\infty$$

$$u \rightarrow T_y(u) = uy$$

olacak biçimde lineer T_y operatörünü tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \|T_y(u)\|_\infty &= \|uy\|_\infty \\ &\leq \sup_n |u_n| \sup_n |y_n| \\ &= \|u\|_\infty \|y\|_\infty < \infty \end{aligned}$$

gerçeklendiğinden T_y operatörü süreklidir. $l^\infty y \subseteq l^\infty$ olduğundan $T_{y|l^\infty y} = T$ operatörü süreklidir.

$$T : l^\infty y \rightarrow l^\infty$$

$$u \rightarrow T(u) = uy$$

olmak üzere $T^{-1}(l^\infty) = l^\infty y$ gerçekleşir ve l^∞ kapalı olduğundan T operatörü altında ters görüntüsü de kapalıdır.

$l^\infty y$, l^∞ dizi uzayının kapalı bir altuzayı olduğundan l^∞ uzayından indirgenen $\sup$ norm topolojisine göre bir FK uzayıdır. (3.2.12) gereğince, $l^\infty y \subseteq F$ gerçekleşir. O halde, keyfi $f \in F'$ fonksiyoneli $l^\infty y$ uzayına kısıtladığımızda bu fonksiyonel $\sup$

norm topolojisine göre de süreklidir.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \pm y_k f(\delta^k) \right| &= \left| f \left(\pm y_1, \pm y_2, \dots, \pm y_n, 0, 0, \dots \right) \right| \\ &\leq \|f\|_{l^\infty y} \|y\|_\infty \end{aligned}$$

elde edilir. Üst sınır işaretten ve n değerinden bağımsız olduğundan,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k f(\delta^k)| < \infty$$

gerçeklenir. Mutlak yakınsak her seri yakınsak olduğundan ve β -dual tanımından, $(f(\delta^k)) \in \chi(E)^\beta = l_1$ elde edilir. (3.2.13) ifadesi gerçekleşmiş olduğundan $c_0 \subseteq F$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi klasik toplanabilme teorisinden bildiğimiz iki teoremden faydalananarak sıfıra kuvvetli Cesàro toplanabilir sınırlı diziler uzayının Hahn özellikli olduğunu göstere-
lim. Bunun için aşağıdaki iki teoremi ispatsız olarak verelim.

Teorem 3.2.3 (Agnew Teoremi) $\frac{k}{n_k} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) iken $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ gerçekleşir (Agnew 1947).

Teorem 3.2.4 $A = (a_{nk})$ regüler bir matris olmak üzere sınırlı $x = (x_k)$ dizisinin a değerine kuvvetli A -toplanabilir olması için gerek ve yeter şart $\chi_{\mathbb{N} \setminus Z}$ dizisinin sıfıra kuvvetli A -toplanabilir ve $\lim_{n \in Z} x_n = a$ olacak şekilde bir $Z \subseteq \mathbb{N}$ bulunmasıdır (Hill ve Sledd 1968).

Sonuç 3.2.2 Sıfıra kuvvetli Cesàro toplanabilir sınırlı diziler uzayı

$$F := \left\{ x \in l^\infty : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| = 0 \right\}$$

Hahn özelliklidir (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

İspat. F uzayının Hahn özellikli olduğunu gösterebilmek için Teorem 3.2.2' den

faýdalanalım. Bunun için öncelikle her bir $x \in F$,

$$x = x \cdot \chi_{\mathbb{N} \setminus Z} + x \cdot \chi_Z$$

formunda ifade edilebilir. Şimdi

$$\chi_Z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$$

dönüşümünü,

$$\chi_Z(n) = \begin{cases} 1, & n \in Z \\ 0, & n \notin Z \end{cases}$$

olacak biçimde tanımlayalım. Bu durumda, bu dönüşüm terimleri 0 ve 1 olan bir dizi belirtir.

Keyfi bir $x \in F$ alalım. *Teorem 3.2.4'* den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \chi_Z(n)) = \lim_{n \in Z} x_n = 0$$

gerçeklenir. Yani,

$$x \cdot \chi_Z \in c_0 \tag{3.2.14}$$

elde edilir. Diğer yandan, *Teorem 3.2.4* gereğince $\chi_{\mathbb{N} \setminus Z}$ dizisi sıfıra kuvvetli C_1 toplanabilirdir. Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\chi_{\mathbb{N} \setminus Z}(k)| = 0$$

gerçeklenir. Aslında bu ifade terimleri 0 ve 1 olan $\chi_{\mathbb{N} \setminus Z}$ dizisinin $\chi(F)$ uzayına ait olduğunu gösterir ve $x \in l^\infty$ olduğundan,

$$x \cdot \chi_{\mathbb{N} \setminus Z} \in l^\infty \cdot \chi(F) \tag{3.2.15}$$

elde edilir. O halde (3.2.14) ve (3.2.15) ifadeleri gereğince her $x \in F$ için $x \in l^\infty \cdot \chi(F) + c_0$ gerçekleşir. Yani,

$$F \subset l^\infty \cdot \chi(F) + c_0 \tag{3.2.16}$$

elde edilir.

Şimdi, $l^\infty \cdot \chi(F) + c_0 \subset F$ olduğunu görelim. Keyfi $y \in l^\infty \cdot \chi(F) + c_0$ alalım. $x \in l^\infty$, $z \in \chi(F)$ ve $v \in c_0$ olmak üzere $y = xz + v$ formunda yazılabilir. $v \in c_0$ ve C_1 regüler olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |v_k| = 0$$

gerçeklenir. Böylece $v \in F$ elde edilir. Diğer yandan; $x \in l^\infty$ ve $\chi(F) \subset F$ olduğundan,

$$0 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k z_k| \leq \|x\|_\infty \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |z_k| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Yani $xz \in F$ gerçekleşir.

Bu durumda vektör uzay aksiyomlarından $xz + v \in F$ olduğundan,

$$l^\infty \cdot \chi(F) + c_0 \subset F \quad (3.2.17)$$

gerçeklenir. O halde (3.2.16) ve (3.2.17) uyarınca,

$$F = l^\infty \cdot \chi(F) + c_0$$

formundadır.

Şimdi, $\chi(F)^\beta = l_1$ olduğunu göstermeliyiz. Keyfi $x \in \chi(F)^\beta$ alalım. β -dualin tanımından, her bir $y \in \chi(F)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ serisi yakınsaktır. O halde $\chi(F)$ uzayında

bulunan ve terimleri 0 ve 1 olan diziler için de $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ serisi yakınsaktır.

F uzayının tanımı gereğince bu diziler doğal sayıların sıfır yoğunluklu altkümeleri tarafından karakterize edilebilirler. O halde *Agnew Teoremi* gereğince, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$ gerçekleşir. O halde,

$$\chi(F)^\beta \subset l_1 \quad (3.2.18)$$

elde edilir.

Keyfi bir $y \in l_1$ alalım. Her $x \in F$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \|x\|_\infty \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| = \|x\|_\infty \|y\|_1 < \infty$$

ve mutlak yakınsak her seri yakınsak olduğundan $y \in \chi(F)^\beta$ gerçekleşir. O halde,

$$l_1 \subset \chi(F)^\beta \tag{3.2.19}$$

elde edilir.

(3.2.18) ve (3.2.19) ifadeleri birlikte düşünüldüğünde $\chi(F)^\beta = l_1$ elde edilir. $F = l^\infty.\chi(F) + c_0$ olmak üzere $\chi(F)^\beta = l_1$ olduğundan *Teorem 3.2.2* gereğince F Hahn özelliğlidir.

4. ZAYIF HAHN TİPİ ÖZELLİKLER

Bu bölümde, Hahn özelliği ile aynı prensibe sahip olan fakat; Hahn özelliği için *Teorem 3.1.1'* de vermiş olduğumuz gibi bir fonksiyonel analitik gösterime sahip olmayan ayrılabilir Hahn özelliğini ve matris Hahn özelliğini tanımlayacağız. Bunun yanı sıra, bu iki özelliğin Hahn özelliğinden çok daha geniş bir uygulama alanına sahip olduğunu göreceğiz.

Tanım 4.1 E dizi uzayının ayrılabilir Hahn özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart F keyfi bir ayrılabilir FK uzayı olmak üzere (3.1.1) ifadesinin gerçekleşmesidir (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

$A = (a_{nk})$ keyfi sonsuz matris olmak üzere *Tanım 2.3.1* uyarınca, c_A uzayının ayrılabilir FK uzayı olduğunu biliyoruz. Bu hatırlatmadan sonra artık matris Hahn özelliğini tanımlayalım.

Tanım 4.2 E dizi uzayının matris Hahn özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart her $A = (a_{nk})$ matrisi için,

$$\chi(E) \subseteq c_A \Rightarrow E \subseteq c_A \quad (4.1)$$

ifadesinin gerçekleşmesidir (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

Tanım 4.1 ve *Tanım 4.2* ifadelerinin ışığı altında keyfi bir E dizi uzayı Hahn özellikli ise ayrılabilir Hahn özellikli ve böylece E dizi uzayı matris Hahn özelliklidir. Ayrıca, *Önerme 3.1.1* her üç Hahn özelliği için de gerçekleşir.

Aşağıda vereceğimiz *Teorem 4.1* ise $\chi(E)$ uzayının E uzayında yoğun olması dışında *Bölüm 3.1'* de Hahn uzayları için ifade ettiğimiz tüm özelliklerin, ayrılabilir Hahn uzayları ve matris Hahn uzayları için de gerçekleştiğini göstermektedir.

Teorem 4.1 E bir matris Hahn uzayı ise $E \subseteq l^\infty$ ve $\chi(E)^\beta = E^\beta$ gerçekleşir.

Dahası E dizi uzayı φ uzayını kapsayan bir FK uzayı ise bu durumda E ayrılabilir değildir (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

İspat. E bir matris Hahn uzayı olsun. l^∞ uzayı, $\chi(l^\infty)$ uzayını kapsayan toplanabilirlik alnlarının arakesiti olarak yazılabilir (Bennett, Leiger ve Zeltser, 2006). Yani; $\mathcal{B}$ yukarıda belirttiğimiz özelliğe sahip sonsuz matrislerin bir kümesi olmak üzere,

$$\chi(E) \subseteq l^\infty = \bigcap_{A \in \mathcal{B}} c_A$$

gerçeklenir. O halde, her $A \in \mathcal{B}$ için $\chi(E) \subseteq c_A$ elde edilir. Hipotezden E uzayı matris Hahn özellikli olduğundan (4.1)' den her $A \in \mathcal{B}$ için $E \subseteq c_A$ gerçekleşir.

Bu durumda,

$$E \subseteq l^\infty = \bigcap_{A \in \mathcal{B}} c_A$$

elde edilir.

Şimdi, $\chi(E)^\beta = E^\beta$ olduğunu gösterelim.

Tanımı gereğince $\chi(E) \subseteq E$ olduğundan $E^\beta \subseteq \chi(E)^\beta$ elde edilir.

Diğer yandan $\chi(E)^\beta \not\subseteq E^\beta$ olduğunu kabul edelim. Bir $x \in \chi(E)^\beta \setminus E^\beta$ alalım. O halde *Önerme 3.1.3'* de takip ettiğimiz ispata paralel olacak biçimde ilerlediğimizde,

$$\chi(E) \subseteq x^\beta$$

elde edilir.

$$B(x) := \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & \dots & \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 & \dots & \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & \dots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \end{bmatrix}$$

olmak üzere $x^\beta = c_{B(x)}$ olsun. Bu eşitliğin gerçekleştiğini kolayca görebiliriz. Şöyle

ki,

$$\begin{aligned} c_{B(x)} &: = \left\{ y \in \omega : \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right) \in c \right\} \\ &: = \left\{ y \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \text{ serisi yakınsak} \right\} \\ &: = x^\beta \end{aligned}$$

elde edilir. E uzayı matris Hahn özellikli olduğundan,

$$\chi(E) \subseteq c_{B(x)} \Rightarrow E \subseteq c_{B(x)} \quad (4.2)$$

olmalıdır.

Oysa ki; kabulümüz gereğince $x \notin E^\beta$ olduğundan, bir $z \in E$ için $\sum_{k=1}^{\infty} x_k z_k$ yakınsak değildir. Yani $z \notin x^\beta = c_{B(x)}$ olduğu sonucu ortaya çıkar. Bu ise (4.2) ifadesi ile çelişir. Yani,

$$\chi(E)^\beta \subseteq E^\beta$$

elde edilir. Böylece, $\chi(E)^\beta = E^\beta$ elde edilir.

Teoremimizin son parçasının ispatı için *Lemma 3.1.1'* de elde ettiğimiz

$$F = \bigcap_{x \in \omega} A(x^\beta)$$

eşitliğinden faydalanalım. Diğer yandan; A ve $B(x)$ matrisleri üçgen matrisler olduğundan,

$$A(x^\beta) = A(c_{B(x)}) = c_{B(x)A^{-1}}$$

olmak üzere

$$F = \bigcap_{x \in \omega} c_{B(x)A^{-1}}$$

olarak toplanabilirlik alanlarının arakesiti şeklinde ifade edilir. İspatımıza *Teorem 3.1.2'* dekine benzer biçimde devam edersek E uzayının ayrılabilir olmadığını görürüz.

Şimdi, *Teorem 4.3'* ü ispatlayabilmemiz için gerekli olan bazı hatırlatmalarda bulu-

nalım.

Tanım 4.3 Keyfi bir E dizi uzayı için $l^\infty.E \subseteq E$ ifadesi gerçekleşiyorsa E uzayı katıdır denir. E uzayının katı olması için gerek ve yeter şart

$$\{(u_k) \in \omega : \exists (x_k) \in E, \forall k \in \mathbb{N}, |u_k| \leq |x_k|\} \subset E$$

ifadesinin gerçekleşmesidir (Boos 2000).

Tanım 4.4 Keyfi bir E dizi uzayının monoton olması için gerek ve yeter şart $\chi(l^\infty).E \subseteq E$ olmasıdır (Boos 2000).

Örneğin; $p \geq 1$ olmak üzere l^p uzayı katıdır. Yani, $p \geq 1$ olmak üzere $l^\infty.l^p \subseteq l^p$ gerçekleşir. Şöyle ki; keyfi $z \in l^\infty.l^p$ için, $x = (x_k) \in l^\infty$ ve $y = (y_k) \in l^p$ olmak üzere $z = xy$ formundadır.

$$\begin{aligned} \|z\|_p &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left\{ \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sup_k |x_k| \right)^p |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\ &= (\|x\|_\infty^p)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|x\|_\infty \|y\|_p < \infty \end{aligned}$$

olduğundan $z \in l^p$ gerçekleşir.

Verdiğimiz tanımları gözönüne alırsak $\chi(l^\infty) \subseteq l^\infty$ olduğundan her katı dizi uzayının monoton olduğu açıkça görülür. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Örneğin $\chi(l^\infty)$ uzayı monoton olduğu halde katı değildir. Bu durum,

$$\chi(l^\infty) := \{x \in \omega : \{x_k : k \in \mathbb{N}\} \text{ sonlu bir küme}\} \quad (Boos 2000)$$

tanımı uyarınca açıktır.

Teorem 4.2 X dizi uzayı katı ise $X^\alpha = X^\beta = X^\gamma$ gerçekenir (Boos 2000).

İspat. X katı bir dizi uzayı olsun. *Tanım 2.2.3* uyarınca

$$X^\alpha \subset X^\beta \subset X^\gamma$$

olduğu açıktır. O halde sadece $X^\gamma \subset X^\alpha$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

Keyfi $y = (y_k) \in X^\gamma$ alalım. Her $x = (x_k) \in X$ için,

$$\sup_n \left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| < \infty$$

gerçekenir. Keyfi $x = (x_k) \in X$ için $z = (z_k)$ dizisini $z_k = x_k \operatorname{sgn}(y_k x_k)$ olacak biçimde tanımlayalım. X katı ve her $k \in \mathbb{N}$ için $|z_k| \leq |x_k|$ olduğundan *Tanım 4.3* gereğince $z \in X$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x_k y_k| &= \sum_{k=1}^n x_k y_k \operatorname{sgn}(x_k y_k) \\ &= \left| \sum_{k=1}^n z_k y_k \right| \\ &\leq \sup_n \left| \sum_{k=1}^n z_k y_k \right| < \infty \quad (z \in X \text{ ve } y \in X^\gamma) \end{aligned}$$

olup $\sum_{k=1}^n |x_k y_k|$ dizisi monoton ve sınırlı olduğundan yakınsaktır. O halde $xy \in l_1$, yani $y \in X^\alpha$ elde edilir.

Tüm bu hatırlatmalardan sonra artık *Teorem 4.3'* ü ispatlayabiliriz.

Teorem 4.3 $s = (s_n)$ pozitif tam sayıların bir dizisi olmak üzere $s_1 = 1$ ve $(s_{n+1} - s_n)$ sınırsız olsun.

$$E := \left\{ x \in \omega : \|x\|_E = \sup_n \sum_{k=s_n}^{s_{n+1}-1} |x_k| < \infty \right\}$$

uzayı ayrılabilir Hahn özelliklidir; fakat Hahn özellikli değildir (Bennett, Boos ve

Leiger 2002).

İspat. E , φ sonlu diziler uzayını kapsayan katı bir dizi uzayıdır ve $\chi(E)^\beta = E^\beta$ gerçekleşir. Gerçekten,

$$\chi(E)^\beta = E^\beta = F := \left\{ y \in \omega : \sum_n \max_{s_n \leq k < s_{n+1}} |y_k| < \infty \right\} \quad (4.3)$$

elde edilir. Bu eşitliği elde edebilmek için $F \subset E^\beta$ ve $\chi(E)^\beta \subset F$ durumlarını inceleyelim.

Öncelikle $F \subset E^\beta$ olduğunu gösterelim. Keyfi bir $y \in F$ alalım. Her bir $x \in E$ için,

$$\sum_k |x_k y_k| \leq \sum_k \max_{s_k \leq i < s_{k+1}} |y_i| \sum_{i=s_k}^{s_{k+1}-1} |x_i| \leq \|y\|_F \|x\|_E < \infty$$

elde edilir. O halde $y \in E^\alpha$ elde edilir, böylece *Teorem 4.2* uyarınca $y \in E^\beta$ elde edilir.

Şimdi $\chi(E)^\beta \subset F$ olduğunu gösterelim. Keyfi $y \in \chi(E)^\beta$ olmak üzere ξ_k ile $s_k \leq i_0 < s_{k+1}$ ve $|y_{i_0}| = \max\{|y_i| : s_k \leq i < s_{k+1}\}$ ($k \in \mathbb{N}$) olacak biçimde en küçük indis olan i_0 'ı gösterelim. Eğer, x dizisini $x_{\xi_k} = \text{sgn } y_{\xi_k}$ ve $i \notin \{\xi_k : k \in \mathbb{N}\}$ için $x_i = 0$ olacak biçimde tanımlarsak,

$$\|x\|_E = \sup_n \sum_{i=s_n}^{s_{n+1}-1} |x_i| \leq 1$$

elde edilir. E uzayı monoton olduğundan $\chi(E) = E \cap \chi(l^\infty)$ gerçekleşir (Bennett 1995), dolayısıyla $x \in \chi(E)$ olur. Diğer yandan $y \in \chi(E)^\beta$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \sum_k y_k x_k &= \sum_k y_{\xi_k} \text{sgn } y_{\xi_k} \\ &= \sum_k |y_{\xi_k}| \\ &= \sum_k \max_{s_k \leq i < s_{k+1}} |y_i| < \infty \end{aligned}$$

gerçeklenir. O halde $y \in F$ elde edilir. Böylece E , ayrılabilir Hahn uzayıdır (Boos ve Leiger, 2007).

Şimdi E dizi uzayının Hahn özellikli olmadığını gösterelim. Öncelikle E , hipotezde belirtilen normla bir FK uzayıdır (Bennett 1974). O halde, $\chi(E)$ uzayının E uza-

yında yoğun olmadığını gösterirsek *Teorem 3.1.1* gereğince E uzayının Hahn özellikli olmadığı sonucuna da ulaşmış oluruz.

$x = (x_k)$ dizisini,

$$x_k = \frac{1}{s_{n+1} - s_n} , \quad s_n \leq k < s_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

olacak biçimde tanımlayalım.

$$\|x\|_E = \sup_n \sum_{k=s_n}^{s_{n+1}-1} |x_k| = \sup_n \left\{ (s_{n+1} - s_n) \frac{1}{s_{n+1} - s_n} \right\} = 1$$

olduğundan $x \in E$ elde edilir. $y \in \chi(E)$ olmak üzere,

$$y = 0 \quad \text{iken} \quad \|x - y\|_E = 1$$

ve eğer $y \neq 0$ ise öyle büyük bir n seçelim ki,

$$\alpha = \min_{y_k \neq 0} |y_k|$$

olmak üzere $s_{n+1} - s_n > \frac{1}{\alpha}$ olsun. Öyleyse bir $\delta > 0$ için $\alpha \geq \frac{1}{s_{n+1} - s_n} + \delta$ diyebiliriz.

Şimdi, $s_n \leq k < s_{n+1}$ olmak üzere

$$|x_k - y_k| \begin{cases} = |x_k| = \frac{1}{s_{n+1} - s_n} & , \quad y_k = 0 \text{ için} \\ \geq |y_k| - |x_k| \geq \frac{1}{s_{n+1} - s_n} & , \quad y_k \neq 0 \text{ için} \end{cases}$$

elde edilir. O halde,

$$\|x - y\|_E = \sup_n \sum_{k=s_n}^{s_{n+1}-1} |x_k - y_k| \geq \sum_{k=s_n}^{s_{n+1}-1} |x_k - y_k| \geq 1$$

elde edilir ki bu keyfi $\varepsilon > 0$ olmak üzere her $x \in E$ için $\|x - y\|_E < \varepsilon$ olacak biçimde bir $y \in \chi(E)$ elemanının var olmadığını gösterir. Böylece $\chi(E)$ uzayı E uzayında yoğun değildir. Bu da ispatı tamamlar.

5. ÖRNEKLER

Bu bölümde Hahn tipi özelliklerin bazı uygulamalarını inceleyeceğiz.

Teorem 5.1 (Hahn Teoremi) Keyfi bir $A = (a_{nk})$ matrisi için,

$$\chi(l^\infty) \subseteq c_A \Rightarrow l^\infty \subseteq c_A$$

gerçeklenir (Hahn 1922).

Hahn tarafından verilmiş olan bu teorem, aslında l^∞ uzayının matris Hahn özellikli olduğunu gösterir. Oysa ki *Sonuç 3.1.1'* de l^∞ uzayının Hahn özellikli olduğunu göstermiştik, dolayısıyla l^∞ uzayı matris Hahn özelliğini de taşır.

Hahn uzayları, vermiş olduğumuz bu teorem dolayısıyla Hahn'ın onuruna kendisinin ismiyle adlandırılmıştır.

5.1 Cesàro Toplanabilme

Cesàro toplanabilir sınırlı diziler uzayının matris Hahn özelliğini taşıdığını Kuttner ve Maddox (1981) gösterdiler. Bunu anlayabilmek için öncelikle ilgili teoremi ifade edelim.

Teorem 5.1.1 $r > 0$ olsun. Keyfi $A = (a_{nk})$ matrisi için, $A \in (l^\infty \cap (C, r), c)$ olması için gerek ve yeter şart doğal yoğunluğa sahip her bir $E \subseteq \mathbb{N}$ kümesi için $\left(\sum_{k \in E} a_{nk} \right)_n \in c$ olmasıdır (Kuttner ve Maddox 1981).

Şimdi keyfi bir $A = (a_{nk})$ matrisi için,

$$\chi(C_1 \cap l^\infty) \subseteq c_A \Rightarrow C_1 \cap l^\infty \subseteq c_A$$

ifadesinin gerçekleştiğini *Teorem 5.1.1'* den faydalananarak gösterelim.

$r = 1$ olacak biçimde seçelim. $C_1 \cap l^\infty$ uzayından 0 ve 1'lerin keyfi bir s dizisini

alalım. Bu dizi doğal yoğunluğa sahip $E \subseteq \mathbb{N}$ yardımıyla,

$$s_k = \begin{cases} 1, & k \in E \\ 0, & k \notin E \end{cases}$$

olacak biçimde tanımlanır (*bkz. Bölüm 3.2*). Açıkça $s \in \chi(C_1 \cap l^\infty)$ olur. O halde kabulümüz gereğince $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}s_k\right)_n \in c$ ve böylece $\left(\sum_{k \in E} a_{nk}\right)_n \in c$ elde edilir. *Teorem 5.1.1* gereğince $A \in (l^\infty \cap (C, 1), c)$ gerçekleşir. Yani,

$$C_1 \cap l^\infty \subseteq c_A$$

bulunur.

Diğer yandan; çalışmamızda *Teorem 3.2.1* gereğince $C_1 \cap l^\infty$ uzayının Hahn özellikli olduğunu belirlemiştik dolayısıyla, $C_1 \cap l^\infty$ uzayının matris Hahn özellikli olduğu açıktır.

5.2 Bazı Dizi Uzaylarının Yapısı

Önerme 3.2.1 uyarınca; l^∞ uzayı terimleri 0 ve 1 olan dizilerin sonlu lineer kombinasyonlarının uzayı ve bs uzayı yardımıyla ifade edilebilir. Şöyle ki,

$$l^\infty = \chi(l^\infty) + bs$$

formundadır. Aslında *Önerme 3.2.1*, Hahn uzayı çalışmalarında bs uzayının ne kadar önemli olduğunu gösteren ilk işarettir.

5.3 Hemen Hemen Yakınsak Diziler

Hemen hemen yakınsak diziler uzayı ac ile gösterilir ve

$$ac := \left\{ x : \limsup_n \frac{1}{m} \sum_{k=m}^{m+n-1} x_k \text{ mevcut} \right\}$$

olacak biçimde tanımlanır (Lorentz 1948). Bu durumda $F - \lim x = L$ yazılır (Boos

2000).

ac uzayı,

$$bs + Sp\{e\} \subseteq ac \subseteq l^\infty$$

ifadesini gerçeklediğinden *Teorem 3.2.1* uyarınca Hahn özelliklidir (Bennett, Boos ve Leiger, 2002).

Bunu görebilmek için öncelikle keyfi bir $x \in Sp\{e\}$ alalım. Her $k = 1, 2, 3, \dots$ için $x_k = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{K}$) olur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_m \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_m \frac{1}{n} (n\alpha) = \alpha \quad (5.3.1)$$

gerçeklenir. Böylece $x \in ac$ elde edilir.

Şimdi, keyfi bir $x \in bs$ alalım. $\sup_r \left| \sum_{k=1}^r x_k \right| = M < \infty$ gerçekleşir. Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$0 \leq \sup_m \frac{1}{n} \left| \sum_{k=m}^{m+n-1} x_k \right| = \sup_m \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{m+n-1} x_k - \sum_{k=1}^{m-1} x_k \right| \leq \sup_m \frac{1}{n} 2M \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olup

$$\sup_m \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} x_k \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (5.3.2)$$

yani, $x \in ac$ elde edilir.

(5.3.1) ve (5.3.2) ifadeleri uyarınca,

$$bs + Sp\{e\} \subseteq ac \quad (5.3.3)$$

gerçeklenir.

Şimdi $ac \subset l^\infty$ olduğunu gösterelim. Keyfi bir $x \in ac$ alalım, $a \in \mathbb{K}$ olmak üzere $F - \lim x = a$ olsun. Bu durumda, keyfi $\varepsilon > 0$ olmak üzere her $n \geq n_0$ ve her m için,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} x_k - a \right| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir n_0 bulabiliriz. $\varepsilon = 1$ alalım. $a \in \mathbb{K}$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\frac{1}{n} \left| \sum_{k=m}^{m+n-1} (x_k - a) \right| \leq 1 \quad (n \geq n_0 \text{ ve her } m \in \mathbb{N} \text{ için})$$

gerçeklenir. Her bir $m \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} |x_m| &= \left| \sum_{k=m}^{m+n_0} x_k - \sum_{k=m+1}^{m+n_0} x_k \right| \\ &= \left| \sum_{k=m}^{m+n_0} (x_k - a) - \sum_{k=m+1}^{m+n_0} (x_k - a) + a \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=m}^{m+n_0} (x_k - a) \right| + \left| \sum_{k=m+1}^{m+n_0} (x_k - a) \right| + |a| \\ &\leq n_0 + 1 + n_0 + |a| \\ &= 2n_0 + 1 + |a| \end{aligned}$$

gerçeklenir. O halde,

$$\sup_m |x_m| < \infty$$

olur ve $x \in l^\infty$ elde edilir. Böylece,

$$ac \subset l^\infty \tag{5.3.4}$$

gerçeklenir.

Sonunda, (5.3.3) ve (5.3.4) uyarınca,

$$bs + Sp\{e\} \subseteq ac \subseteq l^\infty$$

elde edilir.

5.4 Kuvvetli Konservatif Matrisler

$A = (a_{nk})$ matrisinin kuvvetli konservatif olması için gerek ve yeter şart $ac \subset c_A$ olmasıdır (Boos 2000). Bennett (1995), Kuttner ve Parameswaran (1994) tarafından kuvvetli konservatif bir matrisin sınırlı toplanabilirlik alanının matris Hahn özellikli olduğu gösterildi. Bunu anlayabilmek için öncelikle potent matris tanımını verelim.

Tanım 5.4.1 Her bir $B = (b_{nk})$ matrisi için,

$$\chi(c_A) \subset c_B \Rightarrow c_A \cap l^\infty \subset c_B$$

ifadesi gerçekleşiyorsa $A = (a_{nk})$ matris metoduna potent matris denir. KP ile tüm konservatif ve potent matris metodlarının kümesi gösterilir (Boos 2000).

Keyfi bir A matrisinin potent olması için gerek ve yeter şart $c_A \cap l^\infty$ uzayının matris Hahn özellikli olmasıdır. Her kuvvetli konservatif matris potent olduğundan (Boos, 2000) açıkça, kuvvetli konservatif bir matrisin sınırlı toplanabilirlik alanı matris Hahn özelliklidir. Bu şu anlama gelir; keyfi bir $B = (b_{nk})$ matrisi için,

$$ac \subset c_A \text{ olmak üzere } \chi(c_A) \subseteq c_B \Rightarrow c_A \cap l^\infty \subseteq c_B \quad (5.4.1)$$

gerçeklenir. Şimdi ac uzayının özelliklerinden faydalananarak koşulları zayıflatıp sonucu güçlendirebiliriz.

Teorem 5.4.1 Kuvvetli konservatif bir matrisin sınırlı toplanabilirlik alanı Hahn özelliklidir (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

İspat. $ac \subset c_A$ olduğundan $bs \subset c_A$ ve $e \in c_A$ elde edilir. Böylece *Teorem 3.2.1* gereğince $c_A \cap l^\infty$ uzayı Hahn özelliklidir. Yani $A = (a_{nk})$ kuvvetli konservatif bir matris olmak üzere $\chi(c_A \cap l^\infty) \subseteq F$ olacak biçimde keyfi bir F FK uzayı verildiğinde $c_A \cap l^\infty \subseteq F$ gerçekleşir. (5.4.1) ifadesinde ayrılabilir bir FK uzayı olan c_A uzayından yararlandığımıza dikkat edelim.

Teorem 5.4.2 (Sınırlı Tutarlılık Teoremi) $A = (a_{nk})$ ve $B = (b_{nk})$ regüler matrisler olmak üzere, $c_A \cap l^\infty \subseteq c_B$ ise her $x \in c_A \cap l^\infty$ için $\lim_A x = \lim_B x$ gerçekleşir (Boos 2000).

Tanım 5.4.2 $A = (a_{nk})$ matrisinin kuvvetli regüler olması için gerek ve yeter şart $ac \subset c_A$ ve $L \in \mathbb{K}$ olmak üzere keyfi $x = (x_k)$ dizisi için $F - \lim x = L$ iken $\lim_A x = L$ olmasıdır (Boos 2000).

Şimdi *0-1 Tutarlılık Teoremini* ispatlayabilmemiz için gerekli olan bir hatırlatmada bulunalım.

Hatırlatma 5.4.1 $c \subset ac \subset l^\infty$ ve $F - \lim|_c = \lim$ gerçekleşir (Boos 2000).

Teorem 5.4.3 (0-1 Tutarlılık Teoremi) $A = (a_{nk})$ kuvvetli regüler bir matris olmak ve $B = (b_{nk})$ matrisi, A matrisi ile $A - \text{limitlenebilir}$ 0, 1 dizileri üzerinde tutarlı ise $c_A \cap l^\infty \subseteq c_B$ ve her $x \in c_A \cap l^\infty$ için A ve B matrisleri tutarlıdır (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

İspat. A kuvvetli regüler bir matris ise regülerdir. Gerçekten, $c \subset ac \subset c_A$ olduğundan $A \in (c, c)$ ve her $x \in c$ için *Hatırlatma 5.4.1* uyarınca

$$\lim x = F - \lim x$$

gerçeklenir. Diğer yandan A kuvvetli regüler olduğundan $F - \lim x = \lim_A x$ elde edilir. O halde, her $x \in c$ için $\lim x = \lim_A x$ olur ve böylece A matrisi regülerdir. Diğer yandan hipotezden

$$\chi(c_A) \subseteq c_B \text{ ve her } x \in \chi(c_A) \text{ için } \lim_A x = \lim_B x \quad (5.4.2)$$

elde edilir. A kuvvetli regüler olduğundan kuvvetli konservatiftir, dolayısıyla $c_A \cap l^\infty$ uzayı matris Hahn uzayıdır. Böylece,

$$\chi(c_A) = \chi(c_A \cap l^\infty) \subseteq c_B$$

olduğundan,

$$c_A \cap l^\infty \subseteq c_B$$

elde edilir. Diğer yandan, $ac \subset c_A$ ve $ac \subset l^\infty$ olacağından $ac \subset c_A \cap l^\infty \subseteq c_B$ bulunur. O halde B kuvvetli konservatif, dolayısıyla konservatiftir. Bu durumda, $\|B\| < \infty$ gerçekleşir ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_B \delta^k$ ve $\lim_B e$ mevcuttur. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\delta^k \in \chi(c_A)$ olduğundan ve A regüler olduğundan ve (5.4.2)' den,

$$\lim_A \delta^k = \lim_B \delta^k = 0$$

elde edilir. Diğer yandan $bs \subset ac \subset c_A$ olduğundan *Lemma 3.2.1'* den $e \in \chi(c_A)$

elde edilir. Dolayısıyla (5.4.2)'den,

$$\lim_A e = \lim_B e = 1$$

gerçeklenir. *Silverman-Toeplitz Teoremi* uyarınca B matrisi regülerdir. Dolayısıyla *sınırlı tutarlılık teoreminden*, her $x \in c_A \cap l^\infty$ için A ve B tutarlıdır.

5.5 Kuvvetli Hemen Hemen Yakınsaklık

Sıfıra kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı olan,

$$|ac|_0 := \left\{ x \in \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_m \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} |x_k| = 0 \right\}$$

uzayı matris Hahn özelliğidir (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

Bunu anlayabilmek için öncelikle bazı hatırlatmalarda bulunalım.

Tanım 5.5.1 Pozitif tam sayıların keyfi bir S altkümresi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_m \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} \chi_S(k) = 0$$

ise S , *düzgün sıfır yoğunluğa* sahiptir denir. Düzgün sıfır yoğunluğa sahip kümelerin sınıfı η_u^0 ile gösterilir (Freedman ve Sember 1981).

$S \in \eta_u^0$ olmak üzere $|ac|_0$ uzayında, terimleri 0 ve 1 olan keyfi bir $y = (y_k)$ dizisi,

$$y_k = \begin{cases} 1, & k \in S \\ 0, & k \notin S \end{cases} \quad (5.5.1)$$

formunda gösterime sahiptir. Gerçekten, $S \in \eta_u^0$ olmak üzere keyfi bir 0, 1 dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_m \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} |y_k| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_m \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n-1} \chi_S(k) = 0$$

elde edilir. Böylece $y \in |ac|_0$ gerçekleşir.

Diğer yandan, S pozitif tam sayıların keyfi bir altkümresi olmak üzere $|ac|_0$ uzayından

alınan y , 0 ve 1 dizisinin (5.5.1) formunda bir gösterime sahip olduğu benzer şekilde gösterilir.

Teorem 5.5.1. $A = (a_{nk})$ sonsuz matris olsun. $c_A \supseteq |ac|_0$ olması için gerek ve yeter şart keyfi $S \in \eta_u^0$ için $\lim_n \sum_{k \in S} a_{nk}$ mevcut olmasıdır (Freedman ve Sember 1981).

Şimdi $|ac|_0$ uzayının matris Hahn özellikli olduğunu gösterelim.

$\chi(|ac|_0) \subseteq c_B$ olacak biçimde keyfi bir $B = (b_{nk})$ matrisi alalım. $y \in \chi(|ac|_0)$ olmak üzere y , 0 ve 1 dizisi B – toplanabilir. Tanım 5.5.1 ve (5.5.1) gereğince,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} y_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} \chi_S(k) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in S} b_{nk} \end{aligned}$$

elde edilir ve bu limit mevcut olduğundan Teorem 5.5.1 uyarınca,

$$|ac|_0 \subseteq c_B$$

gerçeklenir. Bu da ispatı tamamlar.

5.6 Kuvvetli Toplanabilirlik

Freedman ve Sember (1981), sıfıra kuvvetli Cesàro toplanabilir sınırlı diziler uzayının

$$\left\{ x \in l^\infty : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \right\},$$

matris Hahn özellikli olduğunu gösterdi. Oysa ki, bu uzayın daha güçlü bir özellik olan Hahn özelliğine sahip olduğunu biliyoruz.

Teorem 5.6.1 $A = (a_{nk})$ pozitif terimli kuvvetli regüler bir matris olsun. O halde,

$$|A|_0 := \left\{ x \in l^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k a_{nk} |x_k| = 0 \right\}$$

ve

$$|A| := \left\{ x \in l^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k a_{nk} |x_k - l| = 0 \right\}$$

uzayları Hahn özelliklidir (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

İspat. $E = |A|_0$ diyelim. Öncelikle E dizi uzayının katı olduğunu gösterelim. Keyfi bir $x \in l^\infty.E$ alalım. $y \in l^\infty$ ve $z \in E$ olmak üzere $x = yz$ formundadır. Bu durumda,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k a_{nk} |x_k| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k a_{nk} |y_k z_k| \leq \|y\|_\infty \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k a_{nk} |z_k| = 0 \quad (5.6.1)$$

elde edilir. Bu da $x \in E$ olmasını gerektirir. $l^\infty.E \subseteq E$ olduğundan E uzayı katıdır ve böylece keyfi bir $x \in E$ için, $Z \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x = x.\chi_Z + x.\chi_{\mathbb{N} \setminus Z}$$

formunda bir gösterime sahiptir. *Teorem 3.2.4* uyarınca,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k \chi_Z(k)) = \lim_{k \in Z} x_k = 0$$

gerçeklenir, yani

$$x.\chi_Z \in c_0 \quad (5.6.2)$$

elde edilir.

Diğer yandan, yine *Teorem 3.2.4* gereğince $\chi_{\mathbb{N} \setminus Z}$ dizisi sıfıra kuvvetli A -toplantılardır, yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k a_{nk} \left| \chi_{\mathbb{N} \setminus Z}(k) \right| = 0 \quad (5.6.3)$$

gerçeklenir. Aslında (5.6.3) ifadesi terimleri 0 ve 1 olan $\chi_{\mathbb{N} \setminus Z}$ dizisinin $\chi(E)$ uzayına ait olduğunu gösterir ve $x \in l^\infty$ olduğundan,

$$x.\chi_{\mathbb{N} \setminus Z} \in l^\infty.\chi(E) \quad (5.6.4)$$

elde edilir.

(5.6.2) ve (5.6.3) ifadeleri birlikte düřtündüğünde,

$$E \subset l^\infty \cdot \chi(E) + c_0 \quad (5.6.5)$$

elde edilir.

Diğeryandan, keyfi bir $y \in c_0$ alalım. $y_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) olduğundan $|y_k| \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) gerçekenir ve A regüler olduğundan $y \in E$ elde edilir. Ayrıca $\chi(E) \subseteq E$ olduğundan (5.6.1) uyarınca,

$$l^\infty \cdot \chi(E) \subseteq E$$

elde edilir. Böylece,

$$l^\infty \cdot \chi(E) + c_0 \subseteq E \quad (5.6.6)$$

bulunur.

(5.6.5) ve (5.6.6) uyarınca,

$$E = l^\infty \cdot \chi(E) + c_0 \quad (5.6.7)$$

formundadır.

şimdi, $\chi(E)^\beta = l_1$ olduğunu gösterdiğimizizde *Teorem 3.2.2'* den faydalananarak E uzayının Hahn özellikli olduğunu ispatlamış olacağız.

O halde, keyfi bir $x \in l_1$ alalım. Her $y \in \chi(E)$ için,

$$\sum_k |x_k y_k| \leq \|y\|_\infty \sum_k |x_k| = \|y\|_\infty \|x\|_1 < \infty$$

olup, $x \in \chi(E)^\beta$ elde edilir. Böylece

$$l_1 \subset \chi(E)^\beta \quad (5.6.8)$$

gerçekenir. A kuvvetli regüler bir matris olduğundan $|ac|_0 \subseteq E$ elde edilir. O halde, $\chi(|ac|_0) \subseteq \chi(E)$ gerçekenir ve böylece $\chi(E)^\beta \subseteq \chi(|ac|_0)^\beta$ bulunur.

Diğeryandan; $\chi(|ac|_0)^\beta = l_1$ gerçekenir. Gerçekten, keyfi $x \in \chi(|ac|_0)^\beta$ alalım. Her $y \in \chi(|ac|_0)$ için, $\sum_k x_k y_k$ serisi yakınsaktır. $y = (y_k)$ dizisini (5.5.1) formunda tanımlarsak $S \in \eta_u^0$ olmak üzere $\sum_k x_k \chi_S(k)$ serisi yakınsaktır yani, $\sum_{k \in S} x_k$ serisi

yakınsaktır. O halde,

$$\sum_k |x_k| < \infty$$

elde edilir (Freedman ve Sember, 1981). Böylece $x \in l_1$ elde edilir, yani

$$\chi(|ac|_0)^\beta \subset l_1$$

gerçeklenir. Diğer yandan

$$l_1 \subset \chi(|ac|_0)^\beta$$

olduğu açıktır. O halde,

$$\chi(|ac|_0)^\beta = l_1$$

elde edilmiş olur. Bunu ve (5.6.8) ifadesini de gözönüne aldığımızda,

$$\chi(E)^\beta = l_1$$

olduğu görülür. Böylece *Teorem 3.2.2* uyarınca E , Hahn uzayıdır.

Şimdi, $|A|$ uzayının Hahn özellikli olduğunu gösterelim.

$$|A| = |A|_0 + Sp\{e\}$$

formundadır. Böylece $|A|$ uzayının Hahn özellikli olduğu *Önerme 3.1.1* gereğince açıktır.

5.7 Alışılmış Toplanabilme

Zeller (1953) gösterdi ki;

Kuvvetli C_1 toplanabilme verildiğinde, l^∞ uzayı üzerinde kuvvetli C_1 toplanabilmeyle denk olacak şekilde regüler bir A matrisi vardır.

O halde *Teorem 5.6.1'* de kuvvetli regülerlik şartı kaldırılabilir. Bu özellik dikkate alındığında *Teorem 5.6.1* uyarınca böyle bir regüler matrisin sınırlı toplanabilirlik

alanı Hahn özelliklidir (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

5.8 Tuhaf Bir Toplanabilme Metodu

Regüler bir $A = (a_{nk})$ matrisi ya sınırlı ıraksak dizi limitlemez, yani $c_A \cap l^\infty = c$ gerçekleşir ya da $c_A \cap l^\infty$ uzayı l^∞ uzayının ayrılabilir olmayan bir altuzayıdır.

Bu özellik ve **5.7** başlığı altında incelediğimiz durum birlikte değerlendirildiğinde $c_A \cap l^\infty \neq c$ olmak üzere $c_A \cap l^\infty$ uzayı yeterince büyük bir dizi uzayıysa Hahn özellikli olabilir (Bennett, Boos ve Leiger, 2002).

Şimdi tuhaf bir matris metodunu inceleyelim.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{bmatrix}$$

matrisini ele alalım. Açık olarak, *Silverman-Toeplitz Teoremi* gereğince A matrisi regülerdir.

$$x = (1, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 2, 1, 0, 0, \dots)$$

ıraksak dizisini ele alalım. $Ax = e$ olduğundan ve $\chi(l^\infty)$ uzayının tanımından,

$$x \in c_A \cap \chi(l^\infty)$$

elde edilir.

Oysa ki, A matrisi hiç bir ıraksak 0, 1 dizisini limitlemez. $y = (y_k)$ böyle bir dizi olsun. O halde y dizisi sonsuz çoklukta 01 ve 10 modelinde terime sahiptir. Bu

durumda y sonsuz çoklukta

$$(010 \text{ veya } 101) \quad \text{ve} \quad (100 \text{ veya } 101)$$

modelinde terim içerir. Öyleyse, Ay dönüşüm dizisi sonsuz çoklukta,

$$(-1 \text{ veya } 0) \quad \text{ve} \quad (1 \text{ veya } 2)$$

içerir. Böylece $Ay \notin c$, yani $y \notin c_A$ elde edilir (Bennett, Boos ve Leiger, 2002).

5.9 Yakınsak Alt Seriler

$a = (a_n)$ pozitif terimli bir dizi olmak üzere

$$\sum_n a_n = \infty \quad \text{ve} \quad a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (5.9.1)$$

olsun. Pozitif tam sayıların $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ koşulunu sağlayan n_k indisleri yardımıyla yukarıdaki serinin yakınsak altserilerini $\sum_k a_{n_k}$ olacak biçimde gösterelim. (Bu altseriler $cs(a)$ ile gösterilir.) Şimdi bir serinin yakınsaklığı ile altserilerinin yakınsaklığı arasındaki ilişkiyi anlamamıza yardımcı olacak bazı koşulları inceleyelim.

$$\frac{k}{n_k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \quad \text{için} \quad \sum_k a_{n_k} < \infty \text{ ise } \sum_k a_n < \infty$$

gerçeklenir ve bir adım daha ileriye gidersek,

$$n_{k+1} - n_k \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty) \quad \text{için} \quad \sum_k a_{n_k} < \infty \text{ ise } \sum_k a_n < \infty$$

gerçeklenir (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

Aşağıdaki önermeyi ispatsız olarak vereceğiz.

Önerme 5.9.1 (5.9.1) ifadesi gerçeklensin ve $b = (b_n)$ keyfi bir dizi olsun. Bu

durumda, $\sum_k a_{n_k} < \infty$ iken $\sum_k b_{n_k} < \infty$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$b \in l_1 + l^\infty . a$$

olmasıdır (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

Aşağıdaki teoremi ispatsız olarak vereceğiz.

Teorem 5.9.1 $l^\infty \cap x^\alpha := \left\{ y \in l^\infty : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| < \infty \right\}$ uzayı için aşağıdaki özellikler denktir.

- (i) $l^\infty \cap x^\alpha$ Hahn özelliklidir $\Leftrightarrow x \in l_1$
- (ii) $l^\infty \cap x^\alpha$ ayrılabilir Hahn özelliklidir $\Leftrightarrow x \in c_0$
- (iii) $l^\infty \cap x^\alpha$ matris Hahn özelliklidir $\Leftrightarrow x \in c_0$ (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

5.10 $bs + c_0$ Uzayı

$bs + c_0$ uzayı hiç bir Hahn tipi özelliği taşımaz. İlk bakışta şaşırtıcı bir sonuçtur; çünkü $bs + c$ uzayı,

$$bs + Sp\{e\} \subseteq bs + c \subseteq l^\infty$$

ifadesini gerçekleştirdiğinden *Teorem 3.2.1* uyarınca Hahn özelliklidir (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

Oysa ki, $bs + c_0$ uzayı hiç bir Hahn tipi özelliği taşımaz. Bunu görebilmek için öncelikle bazı hatırlatmalarda bulunalım (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

Tanım 5.10.1 n_k bir indis dizisi olmak üzere

$$n_{k+1} - n_k \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty)$$

olsun. Terimleri 0 ve 1 olan ıraksak bir $x = (x_n)$ dizisi,

$$x_n = \begin{cases} 1, & n = n_k \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

koşullarını gerçekliyorsu x bir ince dizi olarak adlandırılır ve ince dizilerin gerdiği uzay $\mathcal{T}$ ile gösterilir (Boos 2000).

Aşağıdaki önermeyi ispatsız olarak vereceğiz.

Önerme 5.10.1 $\chi(bs + c_0) = \mathcal{T}$ gerçekleşir (Bennett, Boos ve Leiger 2002).

Şimdi, $bs + c_0$ uzayının matris Hahn özelliğine sahip olmadığını gösterelim. Λ , lacunary kümelerin sınıfı olmak üzere

$$\Lambda \subseteq \eta_u^0 \subseteq \eta_\delta^0$$

gerçeklenir (Freedman ve Sember, 1981). $n_{k+1} - n_k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$) olmak üzere $S = \{n_k\}$ olsun. Bu durumda,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \sum_{n=1}^j |\chi_s(n)| = 0$$

elde edilir. Böylece sıfıra kuvvetli C_1 - *toplanabilir* sınırlı diziler uzayı, $\mathcal{T}$ uzayını yani $\chi(bs + c_0)$ uzayını kapsar fakat; bs uzayını kapsamaz. Örneğin, $\{(-1)^n\}$ dizisi için, $\sup \left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq 1$ olup $\{(-1)^n\} \in bs$ olur. Oysa ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |(-1)^k| = 1$$

olup, $\{(-1)^n\}$ dizisi sıfıra kuvvetli C_1 - *toplanabilir* değildir.

Böylece $bs + c_0$ uzayı matris Hahn özelliğini, dolayısıyla hiç bir Hahn tipi özelliği taşımaz.

5.11 Riesz ve Nörlund Matrislerinin Sınırlı Toplanabilirlik Alanları

(p_k) reel terimli bir dizi olmak üzere,

$$p_1 > 0 \text{ ve } p_k \geq 0 \quad (k \in \mathbb{N}) \text{ için } P_n = \sum_{k=1}^n p_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

olsun.

Riesz matrisi, $R_p = (r_{nk})$,

$$r_{nk} = \begin{cases} \frac{p_k}{P_n} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases} \quad (n, k \in \mathbb{N})$$

olacak biçimde tanımlanır.

Nörlund matrisi, $N_p = (p_{nk})$,

$$p_{nk} = \begin{cases} \frac{p_{n-k+1}}{P_n} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases} \quad (n, k \in \mathbb{N})$$

olacak biçimde tanımlanır (Boos ve Zeltser 2003).

Şimdi, Riesz ve Nörlund matrislerinin çalışmalarımız için gerekli olan bazı özelliklerini hatırlayalım.

Hatırlatma 5.11.1

(i) R_p matrisi konservatiftir ayrıca ya regülerdir ya da $l^\infty \subset c_{R_p}$ gerçekleşir.

(ii) $A = (a_{nk})$ keyfi matris olsun. KG ile, $\chi(c_A) \subset c_B$ ifadesini gerçekleyen her bir $B = (b_{nk})$ matrisi konservatif olacak biçimde tüm A matrislerinin kümesi gösterilir. Açıkça, $KP \subset KG$ gerçekleşir. Şöyle ki,

$A \in KP$ alalım.

$$\chi(c_A) \subset c_B$$

olacak biçimde keyfi bir B matrisi verilsin. A potent olduğundan, $c_A \cap l^\infty \subset c_B$ ve A konservatif olduğundan $c \subset c_A$ elde edilir. Böylece $c \subset c_B$ elde edilir, yani B konservatiftir. O halde $A \in KG$ elde edilir.

(iii) $p = (p_n)$ olmak üzere, $P_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) olsun. O halde aşağıdaki koşullar denktir.

a) R_p metodu potenttir.

$$b) \left(\frac{p_n}{P_n} \right) \in c_0.$$

$$c) R_p \in KG.$$

(iv) N_P metodunun konservatif olması için gerek ve yeter şart $\left(\frac{p_n}{P_n} \right) \in c$ olmasıdır.

(v) N_p metodunun regüler olması için gerek ve yeter şart $\left(\frac{p_n}{P_n} \right) \in c_0$ olmasıdır.

(vi) R_p metodunun regüler olması için gerek ve yeter şart $P_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) olmasıdır (Boos ve Zeltser 2003).

Tanım 5.11.1 $I \subseteq \mathbb{N}$ ve $I \neq \emptyset$ olsun. I , sonsuz elemanlı ise $I = \mathbb{N}$ ve $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere r elemanlı ise $I = \mathbb{N}_r$ olarak gösterilir.

$$\bigcup_{i \in I} N_i = \mathbb{N}, \quad N_i \cap N_j = \emptyset \quad (i, j \in I \text{ ve } i \neq j) \quad (5.11.1)$$

olmak üzere,

$$N_i := \{n_{ij} \in \mathbb{N} : j \in \mathbb{N}\}, \quad (i \in I)$$

sonsuz sıralı kümeler olsun. $N = (N_i : i \in I)$, doğal sayıların sonsuz kümeler için bir parçalanması olsun. Bu durumda,

$$bs(N) := \left\{ x \in \omega : \|x\|_{bs(N)} = \sup_j \left\| (x_k)_{k \in N_j} \right\|_{bs} < \infty \right\}$$

olarak tanımlanır (Boos ve Zeltser 2003).

Teorem 5.11.1' i, *Teorem 5.11.2'* yi ve *Teorem 5.11.3'* ü ispatsız olarak verip, bu teoremlerin sonuçlarını inceleyelim.

Teorem 5.11.1 Doğal sayıların en az bir parçalanması için keyfi bir E dizi uzayı,

$$bs(N) + Sp\{e\} \subseteq E \subseteq l^\infty$$

ifadesini gerçekleştiriyorsa, E uzayı Hahn özelliklidir (Boos ve Zeltser 2003).

Teorem 5.11.2 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $p = (p_n) \in l_1$ ise Nörlund metodu N_p regülerdir ancak potent değildir (Boos ve Zeltser 2003).

Teorem 5.11.3 $p \notin l_1$ ve R_p potent matris ise doğal sayıların (5.11.1)'i gerçekleyen bir $N = (N_i : i \in I)$ parçalanması vardır ve $bs(N) \subset l^\infty \cap c_{R_p} \cap c_{N_p}$ gerçekleşir. Özellikle, $l^\infty \cap c_{N_p}$, $l^\infty \cap c_{R_p}$ ve $l^\infty \cap c_{R_p} \cap c_{N_p}$ uzayları Hahn özelliklidir (Boos ve Zeltser 2003).

Şimdi bu durumu inceleyelim.

$p \notin l_1$ ve R_p potent olsun.

$$\begin{aligned} p \notin l_1 &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_k = \infty \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n p_k = \infty \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \infty \\ &\Leftrightarrow R_p \text{ metodu regülerdir} \end{aligned}$$

Diğer yandan, $P_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) ve R_p potent olduğundan *Hatırlatma 5.11.1(iii)* uyarınca $\left(\frac{p_n}{P_n}\right) \in c_0$ elde edilir, yani N_p regülerdir.

Her $x \in Sp\{e\}$ için $x \in c$ gerçekleşir. R_p ve N_p regüler olduğundan,

$$x \in c_{R_p} \text{ ve } x \in c_{N_p} \quad (5.11.2)$$

elde edilir. *Teorem 5.11.1* ve *Teorem 5.11.3* ve (5.11.2) uyarınca,

$$bs(N) + Sp\{e\} \subset l^\infty \cap c_{R_p} \cap c_{N_p} \subset l^\infty \cap c_{R_p} \subset l^\infty$$

ve

$$bs(N) + Sp\{e\} \subset l^\infty \cap c_{R_p} \cap c_{N_p} \subset l^\infty \cap c_{N_p} \subset l^\infty$$

olduğundan bu uzaylar Hahn özelliklidir.

Sonuç 5.11.1 (i) R_p regüler olmayan ve konservatif ise, yani $p \in l_1$ gerçekleşiyorsa, bu durumda $l^\infty \cap c_{R_p}$ Hahn özelliklidir ve R_p potenttir.

(ii) R_p regüler ise, yani $p \notin l_1$ gerçekleşiyorsa, bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

a) R_p potenttir, yani $l^\infty \cap c_{R_p}$ matris Hahn özelliklidir.

- b) $\left(\frac{p_n}{P_n}\right) \in c_0$
c) $\left(\frac{1}{P_n} \max_{k \leq n} p_k\right) \in c_0$
d) $R_p \in KG$

e) $l^\infty \cap c_{R_p}$ ayrılabilir Hahn özelliklidir.

f) $l^\infty \cap c_{R_p}$ Hahn özelliklidir (Boos ve Zeltser 2003).

İspat. (i) *Hatırlatma 5.11.1(i)* uyarınca $l^\infty \subset c_{R_p}$ gerçekleşir. Böylece, $l^\infty \subset c_{R_p} \cap l^\infty$ ve $c_{R_p} \cap l^\infty \subset l^\infty$ elde edilir. Yani, $c_{R_p} \cap l^\infty = l^\infty$ gerçekleşir. l^∞ , Hahn özellikli olduğundan $c_{R_p} \cap l^\infty$ da Hahn uzaydır.

İspat. (ii) $f \Rightarrow e \Rightarrow a$ açıktır. *Hatırlatma 5.11.1(ii)* uyarınca $a \Rightarrow d$ ve *Hatırlatma 5.11.1(iii)* uyarınca $d \Rightarrow b$ elde edilir.

$\left(\frac{p_n}{P_n}\right) \in c_0$ olduğundan her alt dizisi de sıfıra yakınsar. O halde, $k \leq n$ ($k, n \in \mathbb{N}$) için $P_k \leq P_n$ olup

$$0 \leq \max_{k \leq n} \frac{p_k}{P_n} \leq \max_{k \leq n} \frac{p_k}{P_k} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P_n} \max_{k \leq n} p_k \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Böylece $b \Rightarrow c$ gerçekleşir.

Şimdi, $c \Rightarrow b$ ifadesinin gerçekleştiğini görelim.

$$0 \leq \frac{p_n}{P_n} \leq \frac{1}{P_n} \max_{k \leq n} p_k \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{p_n}{P_n}\right) \in c_0$$

elde edilir.

Hatırlatma 5.11.1(iii) ve hipotez uyarınca $b \Rightarrow a$ elde edilir. Son olarak, *Teorem 5.11.3* ve hipotez gereğince $a \Rightarrow f$ gerçekleşir.

Sonuç 5.11.2 (i) N_p regüler olmayan ve konservatif ise, yani $\left(\frac{p_n}{P_n}\right) \in c \setminus c_0$ gerçekleşiyorsa, bu durumda $l^\infty \cap c_{N_p}$ Hahn özelliklidir ve N_p potenttir.

(ii) N_p regüler ise, yani $\left(\frac{p_n}{P_n}\right) \in c_0$ gerçekleşiyorsa, bu durumda aşağıdaki ifadeler

denktir.

a) N_p potenttir, yani $l^\infty \cap c_{N_p}$ uzayı matris Hahn özelliklidir.

b) $p \notin l_1$

c) $c_{N_p} \cap l^\infty$ ayrılabilir Hahn özelliklidir.

d) $c_{N_p} \cap l^\infty$ Hahn özelliklidir (Boos ve Zeltser 2003).

İspat. (i) *Hatırlatma 5.11.1(vi)* uyarınca $l^\infty \subset N_p$ gerçekleşir. Böylece, $l^\infty \subset l^\infty \cap c_{N_p}$ ve $l^\infty \cap c_{N_p} \subset l^\infty$ olduğundan,

$$l^\infty \cap c_{N_p} = l^\infty$$

elde edilir. l^∞ , Hahn uzayı olduğundan $l^\infty \cap c_{N_p}$ uzayı da Hahn özelliklidir.

İspat. (ii) $d \Rightarrow c \Rightarrow a$ açıktır. *Teorem 5.11.2* uyarınca $a \Rightarrow b$ elde edilir. Son olarak, $p \notin l_1$ olsun, yani $P_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) olur. Hipotezden $\left(\frac{p_n}{P_n}\right) \in c_0$ olduğundan *Hatırlatma 5.11.1(iii)* uyarınca R_p potenttir. Böylece *Teorem 5.11.3* gereğince $b \Rightarrow d$ elde edilir.

KAYNAKLAR

- Agnew, R. P. 1947. Subseries of series which are not absolutely convergent.
Bull. Amer. Math. Soc. 53, 118-120.
- Bennett, G. and Kalton, N. J. 1973. Inclusion theorems for K-spaces. Canad.
J. Math. 25, 511-524.
- Bennett, G. 1974. A new class of sequence spaces with applications in
summability theory. J. Reine Agnew Math. 266, 49-75.
- Bennett, G. 1995. The Hahn Property. Lecture notes, Hagen.
- Bennett, G. Boos, J. and Leiger, T. 2002. Sequences of 0's and 1's.
Studia Math. 149, 75-99.
- Boos, J. 2000. Classical and Modern Methods in Summability. Oxford Univ.
Press, Oxford. pp 299.
- Boos, J. 2000. Classical and Modern Methods in Summability. Oxford Univ.
Press, Oxford. pp 319.
- Boos, J. 2000. Classical and Modern Methods in Summability. Oxford Univ.
Press, Oxford. pp 341, 342, 343.
- Boos, J. 2000. Classical and Modern Methods in Summability. Oxford Univ.
Press, Oxford. pp 46.
- Boos, J. 2000. Classical and Modern Methods in Summability. Oxford Univ.
Press, Oxford. pp 17.

- Boos, J. 2000. Classical and Modern Methods in Summability. Oxford Univ. Press, Oxford. pp 542.
- Boos, J. 2000. Classical and Modern Methods in Summability. Oxford Univ. Press, Oxford. pp 7.
- Boos, J. 2000. Classical and Modern Methods in Summability. Oxford Univ. Press, Oxford. pp 93, 94.
- Boos, J. 2000. Classical and Modern Methods in Summability. Oxford Univ. Press, Oxford. pp 81.
- Boos, J. 2000. Classical and Modern Methods in Summability. Oxford Univ. Press, Oxford. pp 55.
- Boos, J. and Zeltser, M. 2003. Sequences of 0's and 1's, Classes of concrete 'big' Hahn spaces. J. for Analysis and its Applications, 22, 819-842.
- Boos, J. Leiger, T. and Zeltser, M. 2006. The intersection of matrix domains including a given sequence space. Houston Journal of Math. 32, 205-225.
- Boos, J. and Leiger, T. 2007. Sequences of 0's and 1's : Special sequence spaces with the seperable Hahn property. Acta Math. Hungar. 115(4), 341-356.
- Freedman, A. R. and Sember, J. J. 1981. On summing sequences of 0's and 1's. Rocky Mountain J. Math. 11, 419-425.
- Hahn, H. 1922. Über folgen linearer operationen. Monatsh. Math. Phys. 32, 3-88.
- Hill, J. D. and Sledd, W. T. 1968. Approximation in bounded summability

- fields. *Canad. J. Math.* 20, 410-415.
- Kuttner, B. ve Maddox, I. J. 1981. Matrices which sum all bounded Cesàro summable sequences. *J. London Math. Soc.* 23, 503-508.
- Kuttner, B. and Parameswaran, M. R. 1994. Potent conservative summability methods. *Bull. London Math. Soc.* 26, 297-302.
- Lorentz, G. 1948. A contribution to the theory of divergent sequences. *Acta Math.* 80, 167-190.
- Maddox, I. J. 1970. *Elements of Functional Analysis*. Cambridge Univ. Press. pp 161.
- Wilansky, A. 1978. *Modern Methods in Topological Vector Spaces*. McGraw-Hill, New York. pp 37.
- Wilansky, A. 1978. *Modern Methods in Topological Vector Spaces*. McGraw-Hill, New York. pp 7, 91.
- Wilansky, A. 1978. *Modern Methods in Topological Vector Spaces*. McGraw-Hill, New York. pp 24, 136, 238, 248.
- Wilansky, A. 1984. *Summability through Functional Analysis*. North-Holland, Amsterdam. pp 105, 106.
- Wilansky, A. 1984. *Summability through Functional Analysis*. North-Holland, Amsterdam. pp 64, 256.
- Zeller, K. 1953. Über die darstellbarkeit von limitierungs verfahren mittels matrixtransformationen. *Math. Z.* 59, 271-277.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Emel SAVKU

Doğum Yeri : Çankırı

Doğum Tarihi : 14.11.1985

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Çankırı Anadolu Lisesi (2003)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2008)