



T.C.
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SÜREKSİZ STURM LİOUVILLE
PROBLEMLERİ İÇİN
SAYISAL ÇÖZÜM**

Savaş KUNDURACI

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Yrd.Doç. Dr. Zülfiğar AKDOĞAN
2010**

Her hakkı saklıdır

T.C.
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**SÜREKSİZ STURM LIOUVILLE PROBLEMLERİ İÇİN
SAYISAL ÇÖZÜM**

Savaş KUNDURACI

TOKAT

2010

Her hakkı saklıdır

Yrd.Doç. Dr. Zülfigar AKDOĞAN danışmanlığında, Savaş KUNDURACI tarafından hazırlanan bu çalışma 02/08/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

İmza:

Üye: Doç. Dr. Hakan K.AKMAZ

İmza:

Üye: Yrd.Doç. Dr. Zülfigar AKDOĞAN

İmza:

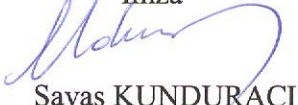
Yukarıdaki sonucu onaylarım

(İmza)


Prof. Dr. Metin YILDIRIM
Enstitü Müdürü
02.09.2010

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdığı yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza

Savaş KUNDURACI

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SÜREKSİZ STURM LIOUVILLE PROBLEMLERİ İÇİN SAYISAL ÇÖZÜM

Savaş KUNDURACI

Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd.Doç. Dr. Zülfigar AKDOĞAN

Bu çalışmada keyfi bir süreksizlik noktasına sahip sınır-değer geçiş probleminin sayısal çözümleri incelenmiştir. Dört bölüm halinde düzenlenen bu çalışmanın "Giriş" bölümünde araştırılan konunun güncelliği, ele alınma nedeni, uygulama alanları, teorik ve pratik önemi hakkında kısa bilgi verilmiştir. Bu bölümde sınır değer problemlerinin sayısal çözümlerinin genel tarihine ve tez konusuyla direkt ilgili olan çalışmalarda elde edilmiş sonuçların kısa bir özetine değinilmiştir. "Genel Bilgiler" bölümünde tez konusuyla ilgili olan ve daha sonraki "Bulgular ve Tartışma" bölümünde yararlanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. "Bulgular ve Tartışma" Bu bölümde süreksiz Sturm-Liouville problemleri için modifiye edilmiş sonlu farklar metodu ile özdeğer ve özfonksiyonlarına nümerik yaklaşımlar yapılmıştır. Çalışmamızın sonuncu "Sonuç ve Öneriler" bölümünde ise araştırmamızdan çıkarılabilecek sonuçlardan ve bu konuda ileride yapılması gereken çalışmalardan bahis edilmiştir.

2010, 43 sayfa

Anahtar kelimeler: Özdeğer, Özfonksiyon, Sınır-Değer problemleri, Geçiş Şartları, Sturm-Liouville teorisi, Sayısal çözüm.

ABSTRACT

Undergraduate Thesis

DISCONTINUOUS STURM-LIOUVILLE PROBLEM FOR THE NUMERICAL SOLUTION

Savaş KUNDURACI

Gaziosmanpasa University
Faculty of Arts and Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Yrd.Doç. Dr. Zülfiğar AKDOĞAN

In this study, the numerical solutions of arbitral discontinuity boundary value transition problem has been examined. It has been examined in four parts. The brief information concerning the actuality of the subject, the reason of handling, application fields, theoretic and practical importance has been given in Section 1 . In "Section 1" the general history of boundary value problems of numerical solutions and a brief summary of the results obtained from the studies directly concerning that thesis subject have been mentioned. In "Section 2" the basic definition and theorems have been given to benefit next sections of the work. In "Section 3" This section is devoted to determining the eigenvalues and eigenfunctions of a discontinuous Sturm-Liouville Problem. By modifying the finite difference method, we have developed a numerical approximation to the eigenvalues and eigenfunctions. In the last part " Section 4" the conclusions drawn our study and the studies that are required to be done in the future have been mentioned.

2010, 43 pages

Key words: Eigenvalue, Eigenfunction, Boundary-Value problems, Transmission Conditions, Sturm Liouville Theory, Numerical solution .

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezimi hazırlamamda desteğini, deneyimini ve emeğini hiçbir zaman esirgemeyen, kıymetli zamanını, fikirlerini ve bilgilerini benimle cömertçe paylaşan danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Zülfiğar AKDOĞAN' na minnettarlığımı sunarım.

Ayrıca, tez çalışmam boyunca karşılaştığım bazı problemlerde değerli fikirlerine başvurduğum bölüm başkanı hocam Sayın Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU'na teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Ayrıca, tez çalışmam boyunca tezimi hazırlamamda maddi ve manevi desteğini esirgemeyen hocam Sayın Doç. Dr. Naim ÇAĞMAN'a , Sayın Doç. Dr. Ercan TUNÇ'a ve Doç. Dr. Hakan K. AKMAZ'a teşekkür ederim.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca maddi ve manevi desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen bölümümüzün değerli hocalarına şükranlarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca her zaman yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen sevgili Aile'me teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	6
2.1 Lineer Diferansiyel İfade ve Sınır Şartları	6
2.2 Regüler Sturm-Liouville Problemi	7
2.3 Lineer Operatörlerin Özdeğer ve Özfonksiyonları	8
2.4 Şebeke ve Şebeke Fonksiyonu	8
2.5 Fark Sınır-Değer Problemleri	10
3. BULGULAR	12
3.1 Sınır Değer Probleminin İfadesi	12
3.2 İkinci Türeve Yaklaşım	12
3.3 $[0, \pi]$ Bölüntülere Ayırma	13
3.4 Neumann Şartları	16
3.5 Süreksiz Sturm-Liouville Problemi İçin Sayısal Çözüm	19
3.6 Nümerik Örnek 1.	21
3.6.1 Örnek 1'in Algoritma ve Nümerik Sonuçları	22
3.7 Nümerik Örnek 2.	25
3.7.1 Örnek 2'nin Algoritma ve Nümerik Sonuçları	26
3.8 Nümerik Örnek 3.	29
3.8.1 Örnek 3'ün Algoritma ve Nümerik Sonuçları	30
3.9 Nümerik Örnek 4.	33
3.9.1 Örnek 4'ün Algoritma ve Nümerik Sonuçları	36
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	39

KAYNAKLAR	40
ÖZGEÇMİŞ	43

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1	$[0, \pi]$ Çözüm aralığının bölüntülere ayrılması.	13
Şekil 3.2	$[0; \pi]$ Çözüm aralığını bölüntülere ayırma	19
Şekil 3.3	İlk iki özfonksiyon	23
Şekil 3.4	İlk iki özfonksiyon	27
Şekil 3.5	İlk iki özfonksiyon	31
Şekil 3.6	İlk iki özfonksiyon	37

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1	Nümerik Örnek 1 İçin Özvektör Değerleri	24
Çizelge 3.2	Nümerik Örnek 1 İçin İlk 30 Özdeğer	24
Çizelge 3.3	Nümerik Örnek 2 İçin Özvektör Değerleri	28
Çizelge 3.4	Nümerik Örnek 2 İçin İlk 30 Özdeğer	28
Çizelge 3.5	Nümerik Örnek 3 İçin Özvektör Değerleri	32
Çizelge 3.6	Nümerik Örnek 3 İçin İlk 30 Özdeğer	32
Çizelge 3.7	Nümerik Örnek 4 İçin Özvektör Değerleri	38
Çizelge 3.8	Nümerik Örnek 4. İçin İlk 30 Özdeğer	38

1. GİRİŞ

C. Sturm ve J. Liouville tarafından 1836 yılında ısı iletimi ile ilgili olarak araştırılan sınır-değer problemleri ve bu problemlerin daha da genelleştirilmesinden ortaya çıkan benzer problemler literatürde Sturm-Liouville problemleri olarak adlandırılır. Tarihsel açıdan bu tür problemler öncelikli olarak ısı akışı problemlerinin Fourier analizi yardımı ile çözümlenmesi probleminde ortaya çıkan sınır-değer problemleridir. Günümüzde, Sturm Liouville teorisi ısı akışı problemlerinin yanı sıra farklı matematik, fizik problemlerinin çözümü için de etkin bir yöntem oluşturmaktadır.

Bu yüzden fizikte ve mühendislikte bir çok konu kısmi diferansiyel denklemlerdeki çalışmalara bağlı olarak gelişme göstermektedir. Bütün bunları listelemek mümkün değildir. Ancak büyük ölçüde kısmi diferansiyel denklemlerdeki çalışmalara bağlı olan konular; akustik bilimi, aerodinamik, elastik, elektrodinamik, akışkan dinamiği, jeofizik (sismik dalga yayılımı), ısı transferi, meteoroloji, okyanus bilimi, optik, petrol mühendisliği, plazma fiziği, kuantum mekaniği şeklindedir. Son yıllarda gerek Matematik fiziğin, özellikle de kuantum mekaniğinin ortaya koyduğu yeni yeni somut problemlerin araştırılması ihtiyacı, gerekse de Diferansiyel operatörler teorisinin iç talepleri gereği konu hala güncelliğini korumakta olup bu konuyla ilgili çok sayıda çalışma yapılmış, makale ve kitaplar yazılmış ve yazılmaktadır. Bu çalışmada sadece tez konusuyla direkt yakınlığı olan bazı çalışmalardan bahsedilmektedir.

Muhtarov'un, 1988'deki çalışmasında sınır şartlarında özdeğer parametresi içermeyen, ancak denkleminde soyut lineer operatör bulunduran ve esas kısmı kendine eşlenik olan sınır-değer probleminin özdeğerlerinin asimptotiği bulunmuştur.

Altınışik'in, Muhtarov'un danışmanlığında 1998 yılında yazdığı "Sınır Şartlarında Özdeğer Parametresi Bulunduran Süreksiz Katsayılı Sınır-Değer Problemi" başlıklı doktora tezi'nde ise sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran süreksiz katsayılı sınır-değer probleminin spektral özellikleri araştırılmıştır.

Demir'in Muhtarov'un danışmanlığında 1999 yılında yazdığı "Bir Diferansiyel-Operatör Denklem İçin Sınır-Değer Problemi" başlıklı doktora tezi'nde ise hem sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran hem de denkleminde soyut lineer operatör bulunan ve esas kısmı kendine eşlenik olan sınır-değer probleminin özdeğerlerinin asimptotiği araştırılmıştır.

Son yıllarda ise bu alanda en önemli sonuçlar S.Y. Yakubov ve Y.Y. Yakubov'un çalışmalarında elde edilmiştir (Yakubov, 1993; 1994; 1998 and Yakubov, Yakubov, 1999; 2000). Yakubov'un , 1994' de yayımlanan kitabında reguler diferansiyel operatörlerin genel teorisi kurulmuş ve bu teori de yeni yöntemler geliştirilmiştir. Bu kitapta ispatlanan soyut teoremler çok geniş adi ve kısmi türevli diferansiyel sınır-değer problemlerine uygulanabilmesi açısından ehemmiyet arz etmektedir. Y. Yakubov' un çalışmalarında p-regülerlik olarak adlandırılan ve klasik Birkhoff anlamında regülerlikten farklı olan bir regülerlik kavramı tanımlanmış ve bu anlamda regüler olan sınır-değer problemleri için uzay değişkenine göre izomorfluk, uzay değişkenine ve özdeğer parametre sine göre koersitivlik, özfonksiyonlar ve özfonksiyonlara bağlanmış fonksiyonlar sisteminin tamlığı, çok kat tamlığı, Abel bazlığı v.s. gibi özellikleri araştırmıştır.

Yakubov'un son yıllardaki çalışmalarında ise irregüler sınır-değer problemlerinin spektral özellikleri araştırılarak elde edilen sonuçları birçok fiziksel problemlere uygulanmıştır. Yakubov (1995,1998)'un çalışmaları örnek olarak verilebilir. Yukarıda bahsedilen bütün çalışmalarda sınır-değer problemleri sürekli katsayılı diferansiyel denklemler için incelenmiştir. Muhtarov (1990, 1994, 1998, Mukhtarov ve Demir, 1999)'un çalışmalarında ise süreksiz katsayılı diferansiyel (adi ve kısmi türevli) denklemler için sınır-değer-geçiş problemleri araştırılmıştır. Bu çalışmalarda esasen diferansiyel ve özdeğer parametresine bağlı olan sınır-değer geçiş problemleri için izomorfluk, hem uzay değişkenine hem de özdeğer parametresine göre koersitivlik, özdeğerlerin asimptotiği, rezolvent operatörünün değerlendirilmesi, tamlık ve iki kat tamlık, Abel bazlığı v.s. hakkında teoremler ispatlanmış ve uygun parabolik tipten kısmi türevli diferansiyel denklemler için başlangıç-sınır-değer geçiş problemi incelenmiştir.

Sayısal analiz, matematik problemlerinin bilgisayar yardımı ile çözümlenme tekniğidir. Genellikle analitik olarak çözümleri çok zor veya imkânsız olan matematik problemleri

belli hata aralıklarında çözümlenmek için kullanılır. Sayısal çözümün vazgeçilmez parçalarından biri de elektronik araçlardır. Bilgisayar teknolojisi ile sayısal analiz metotları birbirine paralel olarak gelişmiştir. Bunun en güzel örneği günümüzün en popüler sayısal analiz metotlarından biri olan "sonlu farklar" diğeri ise "sonlu elemanlar" teorisidir. Bu metodların teorisi 1930'larda olmasına rağmen, yöntem el ile işlem yapmaya uygun olmadığından dolayı gerekli ilgiyi o yıllarda görmemiş ve gelişen bilgisayar teknolojisiyle birlikte kullanım alanı bulmuştur. Bunun yanında analitik işlemlerinde bilgisayar ortamında yapılabilmesi sayısal analiz metotlarının kullanılmasını zorunlu hale getirmektedir. Bu da sayısal analiz ile ilgili metotların gelişimine ve artmasına neden olmuştur.

Bailey, Gordon, Shampine (Automatic Solution of the Sturm-Liouville Problem)'in 1978 de yayımlanmış bu çalışmalarından başlayarak, günümüze dek yoğun biçimde araştırılmakta olup, bu alanda ilk ciddi sonuçlar bu çalışmalardan elde edilmiştir.

Bailey, Everitt, Weidmann, Zettl (Regular approximations of singular Sturm-Liouville problems)'in 1993'de yapmış oldukları çalışmada Tekil Sturm Liouville problemleri için sayısal çözüm yapmışlardır.

Bailey, Everitt, Zettl, Liouville (The SLEIGN2 Sturm-Liouville Code)'in 1999'da yazmış oldukları SLEIGN2 kod, fikrini 1979 yılında yazılmış olan SLEIGN kod fikrinden almaktadır. SLEIGN2 kodunun esas amacı düzenli ve tekil Sturm-Liouville problemlerinin özdeğerleri ve özfonksiyonlarını hesaplamak için yeni bir algoritma tanımlanmaktadır.

Pruess, Fulton (Mathematical software for Sturm-Liouville problems)'un 1993'de bahsi geçen çalışmalarında Sturm-Liouville problemlerinin özdeğerlerini bulmak için algoritma yazmışlardır. Özdeğerler ve özfonksiyonlar ile hata kontrollerinin tahmin edilmesi yazılımın matematiksel temelini oluşturmaktadır.

Ixaru, Meyer ve Berghe (CP Methods for the Schrödinger Equation revisited)'nin 1998 de yayımlanan çalışmalarında SLCPM12 kodu aynı zamanda Liouville dönüşümü ve Schrödinger denkleminin çözümünde için sayısal yöntemleri kullanır. Bu kod (SLEDGE, SLEIGN ve SL02F)kodlarından daha hızlı ve daha iyi sonuçlar vermektedir.

Ledoux, Daele ve Berghe'nin(Matslise: A Matlab package for the Numerical Solution of Sturm-Liouville and Schrodinger equations) 2005'de Sturm Liouville problemleri ve Schrödinger denklemleri için Matlab programında sayısal çözümler yapmışlardır.

Ledoux, Daele ve Berghe (The numerical solution of Sturm-Liouville and Schrodinger problems using Piecewise Perturbation methods)'nin 2005'de yapılan çalışmalarında parçalı petürbasyon metodu ile Sturm Liouville ve Schrödinger denklemleri için sayısal çözümler yapmışlardır.

Ledoux (Ph. D. Thesis pdf. Study of Study of Special Algorithms for solving Sturm-Liouville and Schrodinger Equations)'un 2007'de doktora tezi çalışmasında düzenli ve tekil Sturm-Liouville problemleri için paket yazılımlar oluşturmuş ve sayısal çözümler yapmıştır.

Ledoux, Daele, ve Berghe (Efficient computation of high index Sturm-Liouville eigenvalues for problems in physics)'nin 2009'da yapmış oldukları çalışmada yüksek dereceli Sturm-Liouville problemlerinin özdeğerleri için sayısal çözümler yapmışlardır.

Ledoux, Daele (Solution of Sturm-Liouville problems using modified Neumann schemes) 2010'da Sturm-Liouville problemlerinin özdeğerleri için modifiye edilmiş Neumann şemalarından faydalanarak sayısal çözümler yapmışlardır.

Ledoux, Daele'in (Solving Sturm-Liouville problems by piecewise perturbation methods) (2010)'da Sturm-Liouville özdeğer problemlerinin daha genel sınıfı olan Schrödinger denklemlerine CPM çözümü mevcuttur. CPM Sturm Liouville problemleri için Liouville dönüşümü sonrası uygulanabilir. Ledoux, Daele adı geçen çalışmada yüksek dereceli yaklaşımlar için modifiye edilmiş Neumann yöntemi uygulayarak çalışmışlardır. CPM'in daha basit yaklaşımlar için uygun olduğunu ifade etmişlerdir.

Bu tez çalışmasının esas konusu da keyfi bir c noktasında süreksiz, Regüler Sturm Liouville probleminin çözümdeki süreksizliği incelenerek sayısal çözüm yapılacaktır.

Tez çalışmasında kaynaklar kısmında bulunan aşağıdaki materyal ve metotlardan yararlanılmıştır. Diferansiyel operatörler teorisinden regüler Sturm-Liouville teorisi ve yöntemleri ; fonksiyonel analizden bazı temel tanımlar nümerik analizden sonlu farklar metodu ileri,geri farklar ve merkezi farklar metodu ; Lineer diferansiyel operatörler ve İnterpolasyon teorisi yöntemleri ile birlikte Sturm-Liouville teorisi yöntemleri ve kaynaklar kısmında yer alan (Muhtarov, 1988 ; Yakubov, 1994 ; Yakubov, and Yakubov, 1999 ; Demir, 1999 ; Ledoux, and Berghe, 2005 ; Ledoux, 2007) bu çalışmalardan özellikle yararlanılmış olup gösterilmiş yöntemlerden faydalanılmıştır.

2.GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tez çalışmasında yararlanılan temel kavram ve sonuçlar hakkında bilgiler verilmiştir.

2.1 Lineer Diferansiyel İfade ve Sınır Şartları

$p_i(x) : R \longrightarrow R$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\ell(y) := p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y, \quad x \in (a, b) \quad (2.1.1)$$

biçimindeki ifadeye n -mertebeden lineer diferansiyel ifade denir. Genel olarak her x için $p_0(x) \neq 0$ olduğu kabul edilir.

$$U(y) := \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) + \dots + \alpha_{n-1} y^{(n-1)}(a) \\ + \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) + \dots + \beta_{n-1} y^{(n-1)}(b) \quad (2.1.2)$$

biçimindeki ifadeye ise sınır değer ifadesi denir. $U_i(y)$, $i = 1, 2, \dots, m$ ifadeleri sınır değer ifadeleri olduğunda

$$U_i(y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.1.3)$$

biçimindeki eşitlikler sınır şartları olarak adlandırılır.

Bilindiği gibi $C[a, b]$ ile, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve sürekli olan fonksiyonların lineer uzayı gösterilir.

$$\{f \in C[a, b] \mid f', f'', \dots, f^{(n)} \in C[a, b]\}$$

lineer uzayı ise $C^{(n)}[a, b]$ biçiminde gösterilir. $L : C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$

$$D(L) = D = \{y \in C[a, b] \mid y \in C^{(n)}[a, b], U_i(y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m\}$$

$$L(y) = \ell(y) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y$$

eşitlikleri ile tanımlanan L -lineer operatörüne lineer diferansiyel operatör veya $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ile

$$U_i(y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

sınır şartlarının ürettiği lineer diferansiyel operatör denir (Naimark, 1967).

2.2 Regüler Sturm-Liouville Problemi

Verilmiş $[a, b]$ aralığında

$$-u'' + q(x)u = \lambda u \quad (2.2.1)$$

lineer diferansiyel denkleminin,

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \quad (2.2.2)$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \quad (2.2.3)$$

sınır şartlarını veya periyodik sınır şartları olarak adlandırılan

$$u(a) = u(b) \quad (2.2.4)$$

$$u'(a) = u'(b) \quad (2.2.5)$$

sınır şartlarını sağlayan çözümlerin araştırılması problemi klasik Sturm-Liouville problemi diye adlandırılır. Burada $\lambda \in \mathbb{C}$ parametresidir. Eğer herhangi $\lambda = \lambda_0$ değeri için bu problemin aşikar olmayan $u_0 \neq 0$ çözümü bulunursa, λ_0 sayısına verilmiş problemin özdeğeri, $u = u_0(x)$ fonksiyonuna ise bu özdeğere uygun özfonksiyon denir. $[a, b]$ aralığı sonlu, $q(x)$ fonksiyonu bu aralıkta integrallenebilir ise, söz konusu problem regüler Sturm-Liouville problemi, aksi halde ise, yani ya $[a, b]$ aralığı sonsuz veya $q(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ de integrallenebilir değilse (ya da hem $[a, b]$ aralığı sonlu değilse hem de $q(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilir değilse) o halde söz konusu problem Singüler Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılır. Şunu da ifade etmek gerekir ki; daha genel

$$-u'' + p(x)u' + r(x)u = \lambda s(x)u \quad (2.2.6)$$

diferansiyel denklemleri ($s(x)$ ikinci mertebeden, $p(x)$ ise birinci mertebeden sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar ise ve $s(x) > 0$ ise) (3.1.1) biçiminde

$$-v'' + q(y)v = \lambda v \quad (2.2.7)$$

denklemine indirgenebilir. Bunun için x ve $u = u(x)$ değişkenlerinden

$$y = \int_a^x \sqrt{s(t)} dt \quad (2.2.8)$$

$$v(y) = \sqrt[4]{s(x)} \exp\left(\frac{1}{2} \int_a^x p(t) dt\right) u(x) \quad (2.2.9)$$

dönüşümü ile yeni y ve $v = v(y)$ değişkenlerine geçmek yeterlidir. Bu dönüşüm, Liouville dönüşümü olarak adlandırılır (Titchmars, 1962).

2.3 Lineer Operatörlerin Özdeğer ve Özfonksiyonları

H Kompleks Hilbert uzayında tanım bölgesi $D(A)$ olan $A : H \rightarrow H$ lineer operatörü ve λ kompleks parametresi verilsin. Eğer $\lambda = \lambda_0$ için

$$Ay = \lambda_0 y \quad (2.3.1)$$

operatör denkleminin $y_0 \neq 0$ çözümü varsa, λ_0 sayısına A operatörünün özdeğeri, $y_0 \in D(A)$ elemanına ise bu özdeğere uygun özfonksiyonu denir (Titchmars, 1962).

2.4 Şebeke ve Şebeke Fonksiyonu

$$\varpi = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b\}$$

ayrık noktalar kümesine $[a,b]$ 'de tanımlanan düzgün olmayan şebeke, x_i noktalarına ise düğüm noktaları veya şebeke düğümleri denir. Eğer düğümler eşit aralıklı iseler buna

düzgün şebekeler denir.

$$\varpi_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N; h = (b - a)/N\}$$

h - sabitine şebeke adımı denir. ϖ şebekesinde tanımlanmış $f(x)$ ($x \in \varpi$) fonksiyonuna şebeke fonksiyonu denir. Ve $f(x_i)$ değeri kısa olarak f_i şeklinde belirtilir. Her bir diferansiyel denkleme aranan fonksiyon değerleri dışında türev değerleri de katılır. Türevlerin yaklaşımı için çok zaman fark türevleri denilen ifadeler kullanılır (Düzgün şebeke örneğinde). Birinci türev için;

$$u_{\bar{x},i} = \frac{(u_i - u_{i-1})}{h} \equiv \frac{(u(x_i) - u(x_{i-1})))}{h}$$

$$u_{x,i} = \frac{(u_{i+1} - u_i)}{h}$$

$$u_{0x,i} = \frac{(u_{i+1} - u_{i-1})}{2h}$$

Bu ifadelere sırasıyla $u(x)$ fonksiyonun x_i noktasındaki sol(geri), sağ(ileri) ve merkezi fark türevleri denir. Eğer $u(x)$ yeterince düzgün (smooth) ise, yani $[a, b]$ 'de yeterince türevleri varsa, bu fark türevlerinin her biri $h \rightarrow 0$ durumunda $u'(x_i)$ değerine yaklaşacaktır. Buna örnek olarak sol fark türevi gösterilebilir. $u(x) \in C^2[a, b]$ olduğunu varsayalım. Bu durumda Taylor formülüne göre;

$$u(x - h) = u(x) + \frac{h^2}{2} u''(\xi), \xi \in (x - h, x)$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{u(x) - u(x - h)}{h} = u'(x) - \frac{h}{2} u''(\xi)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$u_{\bar{x},i} - u'(x_i) = -\frac{h}{2} u''(\xi_i), \xi_i \in (x_{i-1}, x_i) \quad (2.4.1)$$

olur. $u(x) \in C^2[a, b]$ olduğundan $u_{\bar{x},i}$, fark türevi $u'(x_i)$ 'e $O(h)$ hızı ile yaklaşacaktır. İleri ve merkezi fark türevleri için de benzer yolla

$$u_{x,i} - u'(x_i) = \frac{h}{2} u''(\xi_i), \xi_i \in (x_i, x_{i+1}) \quad (2.4.2)$$

$$u_{0_{x,i}} = u'(x_i) = -\frac{h}{2}u''(\xi_i), \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}) \quad (2.4.3)$$

olduğu ispatlanabilir. (2.4.1). (2.4.3), (2.4.3)'den merkezi fark türevinin daha kesin olduğu görülür(yaklaşım hatası hatası daha küçük $O(h^2)$ biçimindedir). İkinci türev için;

$$u_{\bar{x}x,i} = \frac{1}{h}(u_{x,i} - u_{\bar{x},i}) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

buna ikinci fark türevi denir.

$$u(x_i + h) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2!}u''(x_i) + \frac{h^3}{3!}u'''(\xi_i) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\xi_i), \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$$

$$u(x_i - h) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2!}u''(x_i) - \frac{h^3}{3!}u'''(\xi_i) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\eta_i), \eta_i \in (x_i, x_{i+1})$$

Taylor açılımlarından yararlanarak

$$u_{\bar{x}x,i} - u''(x_i) = \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\theta_i), \theta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}) \quad (2.4.4)$$

olduğu görülebilir. (2.4.3) bağıntısı $u(x) \in C^4[a, b]$ durumunda ikinci fark türevinin hatasının $O(h^2)$ olduğunu ispatlar. Genel halde, fark türevlerinin kesinliği hem fonksiyonun düzgünlüğüne hem de düğüm noktalarının yerleşimine bağlıdır (Amirali ve Duru, 2002).

2.5 Fark Sınır-Değer Problemleri

Diferansiyel denklem sonsuz sayıda çözüme sahiptir. Tek çözümün olması için denkleme belli şartların eklenmesi gerekmektedir. Örnek olarak

$$u'' = f(x), a < x < b \quad (2.5.1)$$

$$u(a) = \mu_1, u(b) = \mu_2 \quad (2.5.2)$$

model sınır-değer problemi ele alınırsa, (2.4.3)'e göre $u''(x_i) \approx u_{\bar{x}x,i}$ olduğu için ω_h düzgün şebekesinde (2.5.1)- (2.5.2)'ya karşılık gelen aşağıdaki fark sınır-değer problemi sunulabilir.

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = f_i, i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (2.5.3)$$

$$y_0 = \mu_1, y_N = \mu_2 \quad (2.5.4)$$

(2.5.3)- (2.5.4) bağıntıları y_1, y_2, \dots, y_{N-1} değerlerine göre lineer denklem sistem oluştururlar ve buradan bulunacak y_i 'ler, $u(x_i)$ 'ler için yaklaşık değerler olurlar (Amirali ve Duru, 2002).

3.BULGULAR

Bu bölümde, sonlu farklar metodundan faydalanılarak $[0, \pi]$ sonlu aralığında, bir c süreksiz iç noktası bulunan Reguler Sturm-Liouville Problemlerinin sayısal çözümleri için tanımlanmış lineer dönüşümü ve sayısal çözümleri anlatılacaktır.

3.1 Sınır Değer Probleminin İfadesi

Bu bölümde

$$-y''(x) = \lambda y(x) \quad x \in [0, c) \cup (c, \pi] \quad (3.1.1)$$

Sturm-Liouville denkleminde,

$$y(0) = y(\pi) = 0 \quad (3.1.2)$$

sınır şartlarından ve

$$\gamma_1 y(c_+) = \gamma_2 y(c_-) \quad (3.1.3)$$

$\gamma_1, \gamma_2 \neq 0$ olmak üzere geçiş şartlarından oluşan, keyfi bir c noktasında süreksiz sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonları incelenecektir.

3.2 İkinci Türeve Yaklaşım

Sayısal çözüm için bu tür koşullar altında Taylor teoremi şu şekilde yazılabilir.

$$y(x + h) = y(x) + y'(x)h + \frac{y''(x)}{2!}h^2 + \dots$$

ve

$$y(x - h) = y(x) - y'(x)h + \frac{y''(x)}{2!}h^2 + \dots$$

Bu denklemler taraf tarafa toplandığında,

$$y(x + h) + y(x - h) \approx 2y(x) + y''(x)h^2$$

ifadesi elde edilir. Yukarıdaki denklemde arta kalan yüksek sıra terimleri atılmıştır. $y''(x)$ yaklaşını bulmak için denklem düzenlenirse;

$$y''(x) \approx \frac{y(x - h) - 2y(x) + y(x + h)}{h^2} \quad (3.2.1)$$

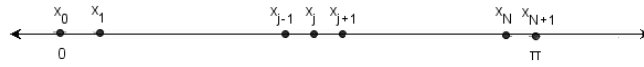
(3.2.1) denklemi elde edilir. (3.2.1) denklemi (3.1.1) Sturm-Liouville denkleminde yerine yazılırsa ikinci türev için;

$$-\frac{y(x - h) - 2y(x) + y(x + h)}{h^2} \approx \lambda y(x) \quad (3.2.2)$$

denklemini elde edilir.

3.3 $[0, \pi]$ Bölüntülere Ayırma

Sturm-Liouville probleminin çözümünün aranacağı aralık (Şekil 3.1)'deki gibi bölünmelidir. Bu noktalar arasındaki uzaklık aşağıdaki hesaplama yöntemi ile gösterilmiştir.



Şekil. 3.1: $[0, \pi]$ Çözüm aralığının bölüntülere ayrılması .

$$h = \frac{\pi - 0}{N + 1} = \frac{\pi}{N + 1}$$

(3.1.2)'de verilen sınır koşullarına göre, bu aralığın her bir uç noktası için çözüm bilinmektedir.

$$\begin{aligned}y(x_0) &= y(0) = 0 \\y(x_{N+1}) &= y(\pi) = 0\end{aligned}$$

Buna rağmen, her bir N iç noktası için çözüm bilinmemektedir.

$$x_j = jh, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Eğer (3.2.2)'deki kalanlar denklemi x_j ile değerlendirilirse;

$$-h^{-2}[y(x_j - h) - 2y(x_j) + y(x_j + h)] \approx \lambda y(x_j)$$

h bölüntülerde ardışık noktalar arasındaki artış olmasından dolayı

$$x_j - h = x_{j-1} \quad \text{ve} \quad x_j + h = x_{j+1}$$

biçimindedir. Dolayısıyla,

$$-h^{-2}[y(x_{j-1}) - 2y(x_j) + y(x_{j+1})] \approx \lambda y(x_j)$$

denkleminde $y(x_j)$ ile y_j 'nin yerleri değiştirilip denklem tekrar düzenlenirse;

$$-h^{-2}[y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}] = \lambda y_j \quad (3.3.1)$$

denklemini elde edilir. Bu (3.1.1) Sturm Liouville problemini bulmak için bir yaklaşımdır. Burada x_j 'de değerlendirilen $y(x_j)$ Sturm Liouville probleminin tam değerini temsil eder. Ama y_j değişkeni $y(x_j)$ 'nin x_j de yaklaşımını temsil etmektedir. Burada (3.3.1) denklemini $[0, \pi]$ üzerindeki bölümün iç noktalarında değerlendirilmesi gereklidir. $j = 1$ için (3.3.1) denklemi şu şekilde olacaktır:

$$-h^{-2}[y_0 - 2y_1 + y_2] = \lambda y_1 \quad (3.3.2)$$

Aynı şekilde $j = 2, 3$, ve 4 için aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned} -h^{-2}[y_1 - 2y_2 + y_3] &= \lambda y_2 \\ -h^{-2}[y_2 - 2y_3 + y_4] &= \lambda y_3 \\ -h^{-2}[y_3 - 2y_4 + y_5] &= \lambda y_4 \end{aligned}$$

Son olarak, $j = N$ için

$$-h^{-2}[y_{N-1} - 2y_N + y_{N+1}] = \lambda y_N \quad (3.3.3)$$

elde edilir. Buna rağmen, sınır koşulları şunu ister:

$$\begin{aligned} y_0 = y(x_0) = y(0) &= 0 \\ y_{N+1} = y(x_{N+1}) = y(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

Böylece (3.3.2)denklemi $-h^{-2}[-2y_1 + y_2] = \lambda y_1$ olur, bu arada da (3.3.3) denklemi $-h^{-2}[y_{N-1} - 2y_N] = \lambda y_N$ olur. Bu da N bilinmeyenli aşağıdaki N denklem sistemine dönüşür.

$$\begin{aligned} 2h^{-2}y_1 - h^{-2}y_2 &= \lambda y_1 \\ -h^{-2}y_1 + 2h^{-2}y_2 - h^{-2}y_3 &= \lambda y_2 \\ -h^{-2}y_2 + 2h^{-2}y_3 - h^{-2}y_4 &= \lambda y_3 \\ -h^{-2}y_3 + 2h^{-2}y_4 - h^{-2}y_5 &= \lambda y_4 \\ &\vdots \\ -h^{-2}y_{N-1} + 2h^{-2}y_N &= \lambda y_N \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Bu sistem matris formuna yerleştirilir ise;

$$\begin{bmatrix} 2h^{-2} & -h^{-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -h^{-2} & 2h^{-2} & -h^{-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -h^{-2} & 2h^{-2} & -h^{-2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -h^{-2} & 2h^{-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2h^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \quad (3.3.5)$$

matris formu oluşur. (3.3.5) $My = \lambda y$ şeklinde ifade edilir. Bu formda;

$$M = \begin{bmatrix} 2h^{-2} & -h^{-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -h^{-2} & 2h^{-2} & -h^{-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -h^{-2} & 2h^{-2} & -h^{-2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -h^{-2} & 2h^{-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2h^{-2} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. $My = \lambda y$ Matris probleminin özdeğerlerini ve öz fonksiyonlarını bulma problemi ile,

$$-y''(x) = \lambda y(x)$$

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının bulunması arasında bağlantı kurulmuş olur.

3.4 Neumann Şartları

$$-y''(x) = \lambda y(x) \tag{3.4.1}$$

$$y(0) = y'(\pi) = 0$$

(3.1.1) daki Sturm-Liouville denklemi tekrar incelendiği zaman (3.4.1) denkleminde bu sefer sağ uç noktasındaki Neumann koşulunun ilişkilendirilmesi gereklidir.

$$-y''(x) = \lambda y(x)$$

Sturm-Liouville denkleminde,

$$-h^{-2}[y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}] = \lambda y_j$$

(3.3.1) denklemi kullanılarak sayısal çözüm yapılacaktır. $y'(\pi) = 0$ olduğu sağ uç noktadaki Neumann koşulundan dolayı, çözümün değeri bilinmemektedir.

$$0 = x_0 < x_1 \dots < x_N < x_{N+1} = \pi$$

aralığa bölünmesi gereklidir. Bu aralıkta y_1, y_2, \dots, y_{N+1} hesaplanması gerekecektir. Bu da ekstradan bir denklemin eklenmesini gerektirir. $j = 1, 2, \dots, N + 1$ kadar denklem sistemi

$$\begin{aligned} -h^{-2}[y_0 - 2y_1 + y_2] &= \lambda y_1 \\ -h^{-2}[y_1 - 2y_2 + y_3] &= \lambda y_2 \\ -h^{-2}[y_2 - 2y_3 + y_4] &= \lambda y_3 \\ -h^{-2}[y_3 - 2y_4 + y_5] &= \lambda y_4 \\ -h^{-2}[y_4 - 2y_5 + y_6] &= \lambda y_5 \\ &\vdots \\ -h^{-2}[y_{N-2} - 2y_{N+1} + y_{N+2}] &= \lambda y_{N+1} \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

şeklinde olur. Dolayısıyla, bu da $N + 3$ bilinmeyenli $N + 1$ denklem vermektedir. $[0, \pi]$ aralığının sol uç noktada ki Dirichlet koşulundan dolayı

$$y_0 = y(x_0) = y(0) = 0$$

olduğunu bilinmektedir. Böylece bilinmeyen y_0 'ın çıkarılması gerekir. Buna rağmen y_{N+2} için bir değer elde etmeye ihtiyaç vardır.

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

denkleminde ilk türev için ileri farklar değeri kullanılarak gösterilebilir. h 'yi $[0, \pi]$ dağılımında şebeke adım ölçüsü olarak kullanılırsa,

$$y'(x_j) \approx \frac{y(x_{j+1}) - y(x_j)}{h}$$

yazılabilir. y_j 'i $y(x_j)$ 'nin yaklaşımı olarak kullanıldığında,

$$y'_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h}$$

ya da eşiti olarak ,

$$y_{j+1} = y_j + hy'_j$$

yazılabilir. $j = N + 1$, bize $y_{N+2} = y_{N+1} + hy'_{N+1}$ vermektedir. Buna rağmen $[0, \pi]$ aralığının sağ uç noktasındaki Neumann koşulu yüzünden,

$$y'_{N+1} = y'(x_{N+1}) = y'(\pi) = 0$$

olduğu bilinmektedir. Yani, $y_{N+2} = y_{N+1}$ elde edilir. $y_0 = 0$ ve $y_{N+2} = y_{N+1}$ 'dır. (3.4.2)'deki ilk ve son denklem sisteminin içinde yerlerine konulursa $N + 1$ bilinmeyen için $N + 1$ denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} -h^{-2}[-2y_1 + y_2] &= \lambda y_1 \\ -h^{-2}[y_1 - 2y_2 + y_3] &= \lambda y_2 \\ -h^{-2}[y_2 - 2y_3 + y_4] &= \lambda y_3 \\ -h^{-2}[y_3 - 2y_4 + y_5] &= \lambda y_4 \\ -h^{-2}[y_4 - 2y_5 + y_6] &= \lambda y_5 \\ &\vdots \\ -h^{-2}[y_N - y_{N+1}] &= \lambda y_{N+1} \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Bu denklem sisteminin matris formu;

$$\begin{bmatrix} 2h^{-2} & -h^{-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -h^{-2} & 2h^{-2} & -h^{-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -h^{-2} & 2h^{-2} & -h^{-2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -h^{-2} & 2h^{-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_{N+1} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_{N+1} \end{bmatrix}$$

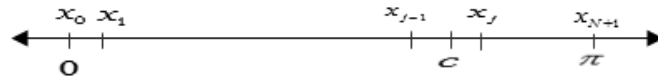
Bu formda;

$$M = \begin{bmatrix} 2h^{-2} & -h^{-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -h^{-2} & 2h^{-2} & -h^{-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -h^{-2} & 2h^{-2} & -h^{-2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -h^{-2} & 2h^{-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h^{-2} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_{N+1} \end{bmatrix}$$

Bu matris denkleminin $My = \lambda y$ formuna sahiptir.

3.5 Süreksiz Sturm-Liouville Problemi İçin Sayısal Çözüm

Bu bölümde, sonlu farklar metodundan faydalanılarak $[0, \pi]$ sonlu aralığında, bir c süreksiz iç noktası bulunan Reguler Sturm-Liouville Problemlerinin sayısal çözümleri için tanımlanmış lineer dönüşüm anlatılacaktır. Süreksiz Sturm Liouville probleminde $[0, \pi]$



Şekil. 3.2: $[0, \pi]$ Çözüm aralığını bölüntülere ayırma

aralığı c noktası (Şekil 3.2)'de olduğu gibi $x_{j-1} < c < x_j$ olacak şekilde bölüntülere ayrılabilir. (3.3.1)'de x_0, x_1, \dots, x_{j-1} noktalarındaki y_0, y_1, \dots, y_{j-1} yaklaşımları bilinmektedir. Burada (3.1.3)'de geçiş şartı kullanılırsa;

$$Y_j = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} y_{j-1}$$

için c süreksizlik noktasının sağ tarafındaki x_j değerlerine karşılık gelen Y_j yaklaşımı elde edilir. Burada y_j bilindiği için (3.3.1) denkleminde x_{j+1}, \dots, x_N noktalarına karşılık gelen y_{j+1}, \dots, y_N yaklaşımları hesaplanır. Yeni değişken Y_j olmak üzere,

$$j^* = \min\{k | x_k > c\}$$

$$Y_j = \begin{cases} y_j, & j \neq j^* \\ \frac{\gamma_2}{\gamma_1} y_j, & j = j^* \end{cases} \quad (3.5.1)$$

şeklinde tanımlanırsa,

$j = 1, 2, \dots, N$ kadar denklem sistemi

$$\begin{aligned} -h^{-2}[Y_0 - 2Y_1 + Y_2] &= \lambda Y_1 \\ -h^{-2}[Y_1 - 2Y_2 + Y_3] &= \lambda Y_2 \\ -h^{-2}[Y_2 - 2Y_3 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} Y_4] &= \lambda Y_3 \\ -h^{-2}[\frac{\gamma_2}{\gamma_1} Y_3 - 2Y_4 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} Y_5] &= \lambda Y_4 \\ -h^{-2}[\frac{\gamma_1}{\gamma_2} Y_4 - 2Y_5 + Y_6] &= \lambda Y_5 \\ -h^{-2}[Y_5 - 2Y_6 + Y_7] &= \lambda Y_6 \\ &\vdots \\ -h^{-2}[Y_{N-1} - 2Y_N + Y_{N+1}] &= \lambda Y_N \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

şeklinde olur. Bu denklem sisteminin matris formu,

$$h^{-2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} & 2 & -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} .$$

şekildedir. Bu şekilde elde edilen matris kullanılarak problemin özdeğer ve özfonksiyonları elde edilir.

3.6 Nümerik Örnek 1.

$$\begin{aligned}
 -y''(x) &= \lambda y(x) \quad x \in [0, c) \cup (c, \pi] & (3.6.1) \\
 y(0) &= y(\pi) = 0 \\
 \gamma_1 y(c_+) &= \gamma_2 y(c_-) \\
 \gamma_1, \gamma_2 &\neq 0
 \end{aligned}$$

Süreksiz Sturm-Liouville probleminde $N = 30$ ve $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{1}{2}$ $x_3 < c < x_4$ için algoritma oluşturulursa; x_j de $j = 1, 2, \dots, N$ kadar

$$\begin{aligned}
 -h^{-2}[y_0 - 2y_1 + y_2] &= \lambda y_1 \\
 -h^{-2}[y_1 - 2y_2 + y_3] &= \lambda y_2 \\
 -h^{-2}[y_2 - 2y_3 + y_4] &= \lambda y_3 \\
 -h^{-2}[y_3 - 2y_4 + y_5] &= \lambda y_4 \\
 &\vdots \\
 -h^{-2}[y_{N-1} - 2y_N + y_{N+1}] &= \lambda y_N
 \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

için denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi için;

$$j^* = \min\{k | x_k > c\}$$

olmak üzere,

$$Y_j = \begin{cases} y_j, & j \neq j^* \\ \frac{\gamma_2}{\gamma_1} y_j, & j = j^* \end{cases} \tag{3.6.3}$$

lineer dönüşüm uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
 -h^{-2}[Y_0 - 2Y_1 + Y_2] &= \lambda Y_1 \\
 -h^{-2}[Y_1 - 2Y_2 + Y_3] &= \lambda Y_2 \\
 -h^{-2}[Y_2 - 2Y_3 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}Y_4] &= \lambda Y_3 \\
 -h^{-2}[\frac{\gamma_2}{\gamma_1}Y_3 - 2Y_4 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}Y_5] &= \lambda Y_4 \\
 -h^{-2}[\frac{\gamma_1}{\gamma_2}Y_4 - 2Y_5 + Y_6] &= \lambda Y_5 \\
 -h^{-2}[Y_5 - 2Y_6 + Y_7] &= \lambda Y_6 \\
 &\vdots \\
 -h^{-2}[Y_{29} - 2Y_{30} + Y_{31}] &= \lambda Y_{30}
 \end{aligned} \tag{3.6.4}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemlerine karşı gelen matris sistemi

$$h^{-2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} & 2 & -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ \vdots \\ Y_{30} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ \vdots \\ Y_{30} \end{bmatrix} .$$

şeklinde dir.

3.6.1 Örnek 1'in Algoritma ve Nümerik Sonuçları

N=30;

c=4;

g1=1;

g2=2;

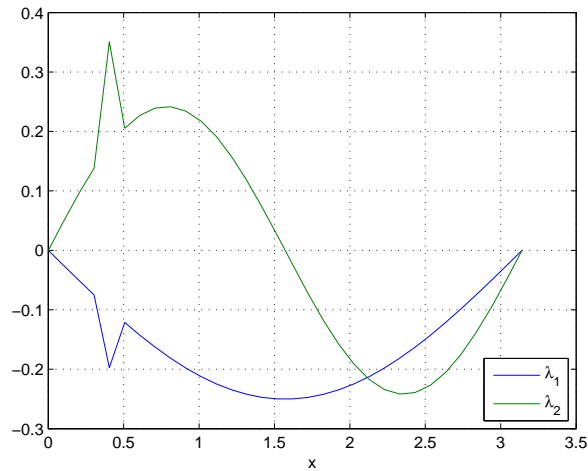
h=(pi-0)/(N+1);

```

H=diag([2*ones(1,N)])+diag([-1*ones(N-1,1)],1)+diag([-1*ones(N-1,1)],-1);
H(c-1,c)=-g1/g2; H(c,c-1)=-g2/g1;
H(c,c+1)=-g2/g1; H(c+1,c)=-g1/g2;
M=h^(-2)*H;
[v,e]=eig(M);
elapsed_time=69.9030
d=diag(e);
d(1:N)
VV=[zeros(1,N); v ;zeros(1,N)]
xx=(0:N)*h;
xx=[xx,pi];
plot(xx,VV(:,[1;2]))
grid on
xlabel('x')
legend('\lambda_1' ,'\lambda_2' ,4);

```

İlk iki özfonksiyon grafiği aşağıdaki şekilde gibidir.



Şekil. 3.3: İlk iki özfonksiyon

Yukarıdaki grafik ilk iki özdeğere karşı gelen özvektörlerin birleştirilmesiyle elde edilmiştir.

Çizelge. 3.1: Nümerik Örnek 1 İçin Özvektör Değerleri

Sütun 1	Sütun 2	Sütun 3	Sütun 4	Sütun 5	...	Sütun 29	Sütun 30
0	0	0	0	0		0	0
-0,0253	0,0487	0,0703	-0,0917	0,1146	...	-0,2098	-0,2036
-0,0504	0,0954	0,1341	-0,1685	0,2005	...	0,1848	0,2154
-0,0749	0,1382	0,1857	-0,2181	0,2359	...	0,0470	-0,0243
-0,1974	0,3508	0,4404	-0,4645	0,4242	...	-0,4525	-0,3794
-0,1215	0,2054	0,2345	-0,2088	0,1350	...	0,1522	0,2250
-0,1430	0,2269	0,2273	-0,1515	0,0239	...	0,0922	-0,0483
-0,1630	0,2392	0,1993	-0,0696	-0,0932	...	-0,2334	-0,1739
-0,1814	0,2417	0,1529	0,0235	-0,1868	...	0,1134	0,2322
-0,1979	0,2343	0,0926	0,1129	-0,2335	...	0,1335	-0,0718
-0,2124	0,2173	0,0238	0,1839	-0,2215	...	-0,2310	-0,1563
-0,2247	0,1914	-0,0473	0,2251	-0,1539	...	0,0700	0,2371
-0,2347	0,1576	-0,1140	0,2299	-0,0476	...	0,1694	-0,0946
-0,2423	0,1174	-0,1702	0,1973	0,0707	...	-0,2191	-0,1370
-0,2474	0,0724	-0,2108	0,1328	0,1712	...	0,0236	0,2396
-0,2499	0,0245	-0,2321	0,0468	0,2287	...	0,1983	-0,1164
-0,2499	-0,0245	-0,2321	-0,0468	0,2287	...	-0,1983	-0,1164
-0,2474	-0,0724	-0,2108	-0,1328	0,1712	...	-0,0236	0,2396
-0,2423	-0,1174	-0,1702	-0,1973	0,0707	...	0,2191	-0,1370
-0,2347	-0,1576	-0,1140	-0,2299	-0,0476	...	-0,1694	-0,0946
-0,2247	-0,1914	-0,0473	-0,2251	-0,1539	...	-0,0700	0,2371
-0,2124	-0,2173	0,0238	-0,1839	-0,2215	...	0,2310	-0,1563
-0,1979	-0,2343	0,0926	-0,1129	-0,2335	...	-0,1335	-0,0718
-0,1814	-0,2417	0,1529	-0,0235	-0,1868	...	-0,1134	0,2322
-0,1630	-0,2392	0,1993	0,0696	-0,0932	...	0,2334	-0,1739
-0,1430	-0,2269	0,2273	0,1515	0,0239	...	-0,0922	-0,0483
-0,1215	-0,2054	0,2345	0,2088	0,1350	...	-0,1522	0,2250
-0,0987	-0,1754	0,2202	0,2322	0,2121	...	0,2262	-0,1897
-0,0749	-0,1382	0,1857	0,2181	0,2359	...	-0,0470	-0,0243
-0,0504	-0,0954	0,1341	0,1685	0,2005	...	-0,1848	0,2154
-0,0253	-0,0487	0,0703	0,0917	0,1146	...	0,2098	-0,2036
0	0	0	0	0	...	0	0

Çizelge. 3.2: Nümerik Örnek 1 İçin İlk 30 Özdeğer

n	1	2	3	29	30
λ_n	0,9991	3,9863	8,9309	385,4923	388,4795

3.7 Nümerik Örnek 2.

$$-y''(x) = \lambda y(x) \quad x \in [0, c) \cup (c, \pi] \quad (3.7.1)$$

$$y(0) = y'(\pi) = 0$$

$$\gamma_1 y(c_+) = \gamma_2 y(c_-)$$

$$\gamma_1, \gamma_2 \neq 0$$

Süreksiz Sturm-Liouville probleminde $N = 30$ ve $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{1}{2}$ $x_3 < c < x_4$ için algoritma yazılırsa;

x_j de $j = 1, 2, \dots, N + 1$

$$\begin{aligned} -h^{-2}[-2y_1 + y_2] &= \lambda y_1 \\ -h^{-2}[y_1 - 2y_2 + y_3] &= \lambda y_2 \\ -h^{-2}[y_2 - 2y_3 + y_4] &= \lambda y_3 \\ -h^{-2}[y_3 - 2y_4 + y_5] &= \lambda y_4 \\ &\vdots \\ -h^{-2}[y_N - y_{N+1}] &= \lambda y_{N+1} \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

için denklemleri elde edilir. Bu denklem sistemi için;

$$j^* = \min\{k | x_k > c\}$$

olmak üzere,

$$Y_j = \begin{cases} y_j, & j \neq j^* \\ \frac{\gamma_2}{\gamma_1} y_j, & j = j^* \end{cases} \quad (3.7.3)$$

lineer dönüşüm uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
-h^{-2}[-2Y_1 + Y_2] &= \lambda Y_1 \\
-h^{-2}[Y_1 - 2Y_2 + Y_3] &= \lambda Y_2 \\
-h^{-2}[Y_2 - 2Y_3 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}Y_4] &= \lambda Y_3 \\
-h^{-2}[\frac{\gamma_2}{\gamma_1}Y_3 - 2Y_4 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}Y_5] &= \lambda Y_4 \\
-h^{-2}[\frac{\gamma_1}{\gamma_2}Y_4 - 2Y_5 + Y_6] &= \lambda Y_5 \\
-h^{-2}[Y_5 - 2Y_6 + Y_7] &= \lambda Y_6 \\
&\vdots \\
-h^{-2}[Y_{30} - Y_{31}] &= \lambda Y_{31}
\end{aligned} \tag{3.7.4}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemlerine karşı gelen matris sistemi,

$$h^{-2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} & 2 & -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ \vdots \\ Y_{31} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ \vdots \\ Y_{31} \end{bmatrix}.$$

şeklinde dir. Aşağıda $N = 30$ için karşı gelen özdeğerler ve özvektörler gösterilmiştir.

3.7.1 Örnek 2'nin Algoritma ve Nümerik Sonuçları

$N=30$;

$c=4$;

$g1=1$;

$g2=2$;

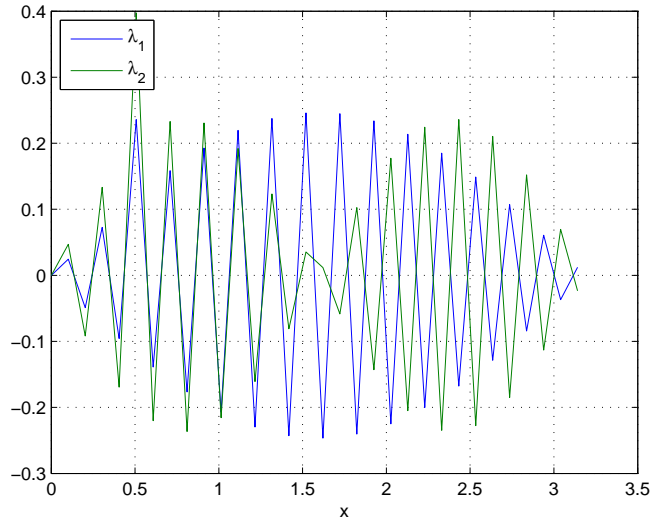
$h=\pi/(N+1)$;

```

H=diag([2*ones(1,N),1])-diag(ones(1,N),-1)-diag(ones(1,N),1);
H(c-1,c)=-g1/g2; H(c,c-1)=-g2/g1;
H(c,c+1)=-g2/g1; H(c+1,c)=-g1/g2;
M=h^(-2)*H;
[v,e]=eig(M);
d=diag(e);
d(1:N)
VV=[zeros(1,N+1);v];
xx=(0:N)*h;
xx=[xx,pi];
plot(xx,VV(:,[1,2]))
grid on
xlabel('x')
legend('\lambda_1', '\lambda_2', 2)

```

İlk iki özfonksiyon grafiği aşağıdaki şekildeki gibidir.



Şekil. 3.4: İlk iki özfonksiyon

Çizelge. 3.3: Nümerik Örnek 2 İçin Özvektör Değerleri

Sütun 1	Sütun 2	Sütun 3	Sütun 4	Sütun 5	...	Sütun 30	Sütun 31
0	0	0	0	0	...	0	0
0,0247	0,0477	-0,0688	0,0897	-0,1120	...	0,1238	-0,1484
-0,0492	-0,0934	0,1315	-0,1653	0,1967	...	0,2113	-0,2365
0,0732	0,1355	-0,1825	0,2150	-0,2335	...	0,2368	-0,2287
-0,1930	-0,3443	0,4346	-0,4618	0,4268	...	0,3857	-0,2562
0,1188	0,2020	-0,2328	0,2105	-0,1414	...	0,0923	0,0245
-0,1399	-0,2239	0,2276	-0,1571	0,0349	...	-0,0354	0,1671
0,1597	0,2369	-0,2022	0,0790	0,0801	...	-0,1527	0,2420
-0,1778	-0,2404	0,1588	0,0115	-0,1755	...	-0,2251	0,2186
0,1942	0,2345	-0,1013	-0,1002	0,2283	...	-0,2316	0,1066
-0,2087	-0,2192	0,0348	0,1732	-0,2254	...	-0,1700	-0,0487
0,2211	0,1953	0,0348	-0,2189	0,1676	...	-0,0586	-0,1842
-0,2313	-0,1636	-0,1013	0,2303	-0,0690	...	0,0700	-0,2450
0,2391	0,1254	0,1588	-0,2055	-0,0464	...	0,1781	-0,2064
-0,2447	-0,0823	-0,2022	0,1485	0,1505	...	0,2339	-0,0840
0,2477	0,0358	0,2276	-0,0681	-0,2179	...	0,2211	0,0724
-0,2484	0,0120	-0,2328	-0,0230	0,2323	...	0,1434	0,1995
0,2465	-0,0593	0,2173	0,1105	-0,1901	...	0,0236	0,2456
-0,2422	0,1044	-0,1825	-0,1806	0,1016	...	-0,1030	0,1921
0,2355	-0,1452	0,1315	0,2223	0,0117	...	-0,1995	0,0606
-0,2264	0,1803	-0,0688	-0,2292	-0,1221	...	-0,2374	-0,0954
0,2151	-0,2083	-0,0000	0,2000	0,2028	...	-0,2057	-0,2128
-0,2017	0,2280	0,0688	-0,1394	-0,2341	...	-0,1136	-0,2438
0,1863	-0,2386	-0,1315	0,0570	0,2083	...	0,0118	-0,1759
-0,1690	0,2398	0,1825	0,0344	-0,1319	...	0,1338	-0,0366
0,1500	-0,2315	-0,2173	-0,1204	0,0233	...	0,2165	0,1175
-0,1295	0,2140	0,2328	0,1875	0,0909	...	0,2357	0,2240
0,1078	-0,1880	-0,2276	-0,2252	-0,1831	...	0,1857	0,2395
-0,0850	0,1546	0,2022	0,2274	0,2306	...	0,0812	0,1579
0,0613	-0,1150	-0,1588	-0,1940	-0,2219	...	-0,0471	0,0122
-0,0370	0,0709	0,1013	0,1301	0,1592	...	-0,1615	-0,1384
0,0124	-0,0239	-0,0348	-0,0458	-0,0578	...	-0,2286	-0,2329

Çizelge. 3.4: Nümerik Örnek 2 İçin İlk 30 Özdeğer

n	1	2	3	29	30
λ_n	0,2421	2,1751	6,0219	385,6174	388,5109

3.8 Nümerik Örnek 3.

$$-y''(x) = \lambda y(x) \quad x \in [0, \pi] - \{c, d\} \quad (3.8.1)$$

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

$$\gamma_1 y(c_+) = \gamma_2 y(c_-)$$

$$\beta_1 y(d_+) = \beta_2 y(d_-)$$

$$\gamma_1, \gamma_2 \neq 0 \quad \beta_1, \beta_2 \neq 0$$

Süreksiz Sturm-Liouville probleminde $N = 30$ ve $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{1}{2}$ $\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{1}{3}$ $x_3 < c < x_4$
 $x_6 < d < x_7$ için algoritma yazılırsa; x_j de $j = 1, 2, \dots, N$

$$\begin{aligned} -h^{-2}[-2y_1 + y_2] &= \lambda y_1 \\ -h^{-2}[y_1 - 2y_2 + y_3] &= \lambda y_2 \\ -h^{-2}[y_2 - 2y_3 + y_4] &= \lambda y_3 \\ -h^{-2}[y_3 - 2y_4 + y_5] &= \lambda y_4 \\ &\vdots \\ -h^{-2}[y_{N-1} - 2y_N] &= \lambda y_N \end{aligned} \quad (3.8.2)$$

için denklemleri elde edilir. Bu denklem sistemi için,

$$j^* = \min\{k | x_k > c\}$$

$$j^* = \min\{k | x_k > d\}$$

olmak üzere,

$$Y_j = \begin{cases} y_j, & j \neq j^* \\ \frac{\gamma_2}{\gamma_1} y_j, & j = j^* \end{cases} \quad (3.8.3)$$

lineer dönüşüm uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
-h^{-2}[-2Y_1 + Y_2] &= \lambda Y_1 \\
-h^{-2}[Y_1 - 2Y_2 + Y_3] &= \lambda Y_2 \\
-h^{-2}[Y_2 - 2Y_3 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}Y_4] &= \lambda Y_3 \\
-h^{-2}[\frac{\gamma_2}{\gamma_1}Y_3 - 2Y_4 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}Y_5] &= \lambda Y_4 \\
-h^{-2}[\frac{\gamma_1}{\gamma_2}Y_4 - 2Y_5 + Y_6] &= \lambda Y_5 \\
&\vdots \\
-h^{-2}[Y_{29} - 2Y_{30}] &= \lambda Y_{30}
\end{aligned} \tag{3.8.4}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemlerine karşı gelen matris sistemi yazılırsa;

$$h^{-2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} & 2 & -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -\frac{\beta_1}{\beta_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta_2}{\beta_1} & 2 & -\frac{\beta_2}{\beta_1} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta_1}{\beta_2} & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \\ Y_8 \\ \vdots \\ Y_{30} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \\ Y_8 \\ \vdots \\ Y_{30} \end{bmatrix}.$$

şeklinde olacaktır. Aşağıda $N = 30$ için karşı gelen özdeğerler ve özvektörler gösterilmiştir.

3.8.1 Örnek 3'ün Algoritma ve Nümerik Sonuçları

$N=30$;

$c=4$; $d=7$;

$g1=1$; $g2=2$;

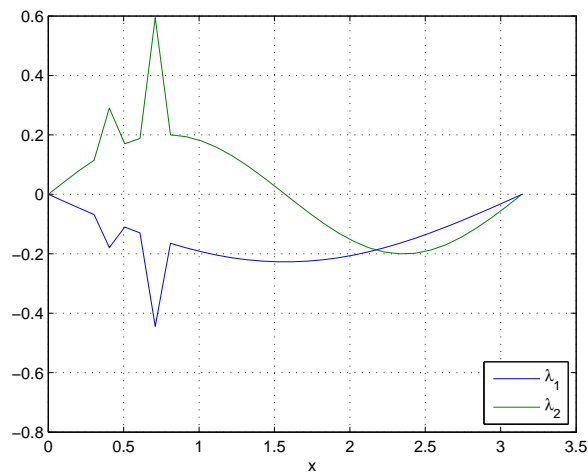
$b1=1$; $b2=3$;

```

h=(pi-0)/(N+1);
H=diag([2*ones(1,N)])+diag([-1*ones(N-1,1)],1)+diag([-1*ones(N-1,1)],-1);
H(c-1,c)=-g1/g2; H(c,c-1)=-g2/g1;
H(c,c+1)=-g2/g1; H(c+1,c)=-g1/g2;
H(d-1,d)=-b1/b2; H(d,d-1)=-b2/b1;
H(d,d+1)=-b2/b1; H(d+1,d)=-b1/b2;
M=h^(-2)*H;
[v,e]=eig(M);
elapsed_time=69.9030
d=diag(e); d(1:N);
VV=[zeros(1,N); v ;zeros(1,N)]
xx=(0:N)*h;
xx=[xx,pi];
plot(xx,VV(:, [1;2]))
grid on
xlabel('x')
legend('\lambda_1' , '\lambda_2' ,4);

```

İlk iki özfonksiyon grafiği aşağıdaki şekilde gibidir.



Şekil. 3.5: İlk iki özfonksiyon

Çizelge. 3.5: Nümerik Örnek 3 İçin Özvektör Değerleri

Sütun 1	Sütun 2	Sütun 3	Sütun 4	Sütun 5	...	Sütun 29	Sütun 30
0	0	0	0	0		0	0
-0,0230	0,0403	0,0612	-0,0900	0,1109	...	-0,1751	-0,1827
-0,0457	0,0790	0,1169	-0,1654	0,1939	...	0,1542	0,1933
-0,0680	0,1145	0,1618	-0,2140	0,2281	...	0,0393	-0,0218
-0,1792	0,2905	0,3836	-0,4557	0,4102	...	-0,3776	-0,3405
-0,1103	0,1701	0,2043	-0,2048	0,1305	...	0,1270	0,2019
-0,1298	0,1880	0,1980	-0,1486	0,0231	...	0,0769	-0,0433
-0,4441	0,5944	0,5208	-0,2049	-0,2703	...	-0,5843	-0,4681
-0,1647	0,2002	0,1332	0,0231	-0,1806	...	0,0946	0,2084
-0,1797	0,1940	0,0807	0,1107	-0,2258	...	0,1114	-0,0644
-0,1929	0,1799	0,0207	0,1804	-0,2142	...	-0,1928	-0,1402
-0,2040	0,1585	-0,0412	0,2209	-0,1488	...	0,0584	0,2128
-0,2131	0,1306	-0,0993	0,2255	-0,0460	...	0,1414	-0,0849
-0,2200	0,0973	-0,1483	0,1936	0,0684	...	-0,1829	-0,1230
-0,2246	0,0600	-0,1836	0,1303	0,1656	...	0,0197	0,2150
-0,2270	0,0203	-0,2022	0,0459	0,2211	...	0,1655	-0,1045
-0,2270	-0,0203	-0,2022	-0,0459	0,2211	...	-0,1655	-0,1045
-0,2246	-0,0600	-0,1836	-0,1303	0,1656	...	-0,0197	0,2150
-0,2200	-0,0973	-0,1483	-0,1936	0,0684	...	0,1829	-0,1230
-0,2131	-0,1306	-0,0993	-0,2255	-0,0460	...	-0,1414	-0,0849
-0,2040	-0,1585	-0,0412	-0,2209	-0,1488	...	-0,0584	0,2128
-0,1929	-0,1799	0,0207	-0,1804	-0,2142	...	0,1928	-0,1402
-0,1797	-0,1940	0,0807	-0,1107	-0,2258	...	-0,1114	-0,0644
-0,1647	-0,2002	0,1332	-0,0231	-0,1806	...	-0,0946	0,2084
-0,1480	-0,1981	0,1736	0,0683	-0,0901	...	0,1948	-0,1560
-0,1298	-0,1880	0,1980	0,1486	0,0231	...	-0,0769	-0,0433
-0,1103	-0,1701	0,2043	0,2048	0,1305	...	-0,1270	0,2019
-0,0896	-0,1453	0,1918	0,2279	0,2051	...	0,1888	-0,1702
-0,0680	-0,1145	0,1618	0,2140	0,2281	...	-0,0393	-0,0218
-0,0457	-0,0790	0,1169	0,1654	0,1939	...	-0,1542	0,1933
-0,0230	-0,0403	0,0612	0,0900	0,1109	...	0,1751	-0,1827
0	0	0	0	0		0	0

Çizelge. 3.6: Nümerik Örnek 3 İçin İlk 30 Özdeğer

n	1	2	3	29	30
λ_n	0,9991	3,9863	8,9309	385,4923	388,4795

3.9 Nümerik Örnek 4.

$$-y''(x) + 3xy(x) = \lambda y(x) \quad x \in [0, c) \cup (c, \pi] \quad (3.9.1)$$

$$y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

$$\gamma_1 y(c_+) = \gamma_2 y(c_-)$$

$$\gamma_1, \gamma_2 \neq 0$$

genel formdaki süreksiz Sturm-Liouville probleminde $p(x) = 1$, $q(x) = 3x$, ve $r(x) = 1$ 'dir. İkinci türevi ile

$$y''(x_j) = \frac{y(x_{j-1}) - 2y(x_j) + y(x_{j+1}))}{h^2}$$

ile değerlendirilirse

$$-y''(x) + 3xy(x) = \lambda y(x)$$

denklemini

$$-h^{-2}[y(x_{j-1}) - 2y(x_j) + y(x_{j+1}))] + 3x_j y(x_j) = \lambda y(x_j)$$

olur.

$$y_j \approx y(x_j)$$

denklem düzenlenirse,

$$-h^{-2}y_{j-1} + (2h^{-2} + 3x_j)y_j - h^{-2}y_{j+1} = \lambda y_j \quad (3.9.2)$$

Bu uygulamada, $[0, \pi]$ sol uç noktasındaki y' 'nin değeri bilinmeyendir. Ama sağ uç noktadaki değeri bilinmektedir. Yani N için x_0, x_1, \dots, x_N de y_0, y_1, \dots, y_N nin hesaplanması istenmektedir. Sonuç olarak, $N + 3$ bilinmeyenli $N + 1$ denklem elde

etmek için $j = 0, 1, \dots, N$ (3.9.2)'deki denklemin yerine koyulmalıdır.

$$\begin{aligned}
-h^{-2}y_{-1} + (2h^{-2} + 3x_0)y_0 - h^{-2}y_1 &= \lambda y_0 \\
-h^{-2}y_0 + (2h^{-2} + 3x_1)y_1 - h^{-2}y_2 &= \lambda y_1 \\
-h^{-2}y_1 + (2h^{-2} + 3x_2)y_2 - h^{-2}y_3 &= \lambda y_2 \\
-h^{-2}y_2 + (2h^{-2} + 3x_3)y_3 - h^{-2}y_4 &= \lambda y_3 \\
-h^{-2}y_3 + (2h^{-2} + 3x_4)y_4 - h^{-2}y_5 &= \lambda y_4 \\
&\vdots \\
-h^{-2}y_{N-1} + (2h^{-2} + 3x_N)y_N - h^{-2}y_{N+1} &= \lambda y_N
\end{aligned} \tag{3.9.3}$$

Buna rağmen $[0, \pi]$, sağ uç noktasındaki Dirichlet koşulu

$$y_{N+1} = y(x_{N+1}) = y(\pi) = 0 \tag{3.9.4}$$

sağlar. y_{-1} için bir değer bulunması gerekir. Aralığın sol uç noktasındaki Neumann koşulu verildiği için $[0, \pi]$ 'nin sol uç noktasındaki y' 'nin ilk türevinin değerlendirilmesi gerekir. Yani geri farkları kullanılmalıdır.

$$y'(x) = \frac{y(x) - y(x-h)}{h}$$

Tekrar, $[0, \pi]$ 'nin dağılımında h adım ölçüsüdür. Böylece

$$y'(x_j) = \frac{y(x_j) - y(x_{j-1})}{h}$$

yazılabilir. Ya da denk olarak $y(x_j)$ yaklaşığı y_j yazılabilir

$$y'_j = \frac{y_j - y_{j-1}}{h},$$

denk olarak ,

$$y_{j-1} = y_j - hy'_j$$

$j = 0$ ile, bu son denklem bize $y_{-1} = y_0 - hy'_0$ verir. Buna rağmen $[0, \pi]$ 'nin sol uç noktasındaki Neumann koşulu,

$$y'_0 = y'(x_0) = y'(0) = 0$$

sonucunu sağlar. Böylece

$$y_{-1} = y_0. \quad (3.9.5)$$

(3.9.5) ve (3.9.4)'ü (3.9.3)sistemin içine koyulabilir. $N+1$ bilinmeyende $N+1$ denklem sonucuna varılır.

$$\begin{aligned} (h^{-2} + 3x_0)y_0 - h^{-2}y_1 &= \lambda y_0 \\ -h^{-2}y_0 + (2h^{-2} + 3x_1)y_1 - h^{-2}y_2 &= \lambda y_1 \\ -h^{-2}y_1 + (2h^{-2} + 3x_2)y_2 - h^{-2}y_3 &= \lambda y_2 \\ -h^{-2}y_2 + (2h^{-2} + 3x_3)y_3 - h^{-2}y_4 &= \lambda y_3 \\ -h^{-2}y_3 + (2h^{-2} + 3x_4)y_4 - h^{-2}y_5 &= \lambda y_4 \\ &\vdots \\ -h^{-2}y_{N-1} + (2h^{-2} + 3x_N)y_N &= \lambda y_N \end{aligned} \quad (3.9.6)$$

Bu sistem $My = \lambda y$ matris formunda katsayı matrisi ile; aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\begin{bmatrix} h^{-2} + 3x_0 & -h^{-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -h^{-2} & 2h^{-2} + 3x_1 & -h^{-2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -h^{-2} & 2h^{-2} + 3x_2 & -h^{-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -h^{-2} & 2h^{-2} + 3x_3 & -h^{-2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h^{-2} & 2h^{-2} + 3x_4 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -h^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h^{-2} & 2h^{-2} + 3x_N \end{bmatrix}.$$

h^{-2} matris dışına alındığında katsayı matrisi; şu şekilde gösterilir.

$$\begin{bmatrix} 1 + 3h^{-2}x_0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 + h^{-2}3x_1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 + h^{-2}3x_2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 + h^{-2}3x_3 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 + h^{-2}3x_4 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 + h^{-2}3x_N \end{bmatrix}.$$

Burada

$$j^* = \min\{k | x_k > c\}$$

olmak üzere,

$$Y_j = \begin{cases} y_j, & j \neq j^* \\ \frac{\gamma_2}{\gamma_1} y_j, & j = j^* \end{cases} \quad (3.9.7)$$

(3.9.6) lineer dönüşüm uygulanırsa, bu dönüşüm sonucunda aşağıdaki yeni lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} (h^{-2} + 3x_0)y_0 - h^{-2}y_1 &= \lambda y_0 \\ -h^{-2}y_0 + (2h^{-2} + 3x_1)y_1 - h^{-2}y_2 &= \lambda y_1 \\ -h^{-2}y_1 + (2h^{-2} + 3x_2)y_2 - h^{-2}y_3 &= \lambda y_2 \\ -h^{-2}y_2 + (2h^{-2} + 3x_3)y_3 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}h^{-2}y_4 &= \lambda y_3 \\ -\frac{\gamma_2}{\gamma_1}h^{-2}y_3 + (2h^{-2} + 3x_4)y_4 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}h^{-2}y_5 &= \lambda y_4 \\ -\frac{\gamma_1}{\gamma_2}h^{-2}y_4 + (2h^{-2} + 3x_5)y_5 - h^{-2}y_6 &= \lambda y_5 \\ -h^{-2}y_5 + (2h^{-2} + 3x_6)y_6 - h^{-2}y_7 &= \lambda y_6 \\ &\vdots \\ -h^{-2}y_{N-1} + (2h^{-2} + 3x_N)y_N &= \lambda y_N \end{aligned} \quad (3.9.8)$$

Bu denklem sistemine karşı gelen matris sistemi oluşturulursa;

$$\begin{bmatrix} 1 + 3h^{-2}x_0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 + h^{-2}3x_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 + h^{-2}3x_2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 + h^{-2}3x_3 & -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} & 2 + h^{-2}3x_4 & -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} & 2 + h^{-2}3x_5 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 + h^{-2}3x_N \end{bmatrix}$$

Aşağıda $N = 30$ için karşı gelen özdeğerler ve özvektörler gösterilmiştir.

3.9.1 Örnek 4'ün Algoritma ve Nümerik Sonuçları

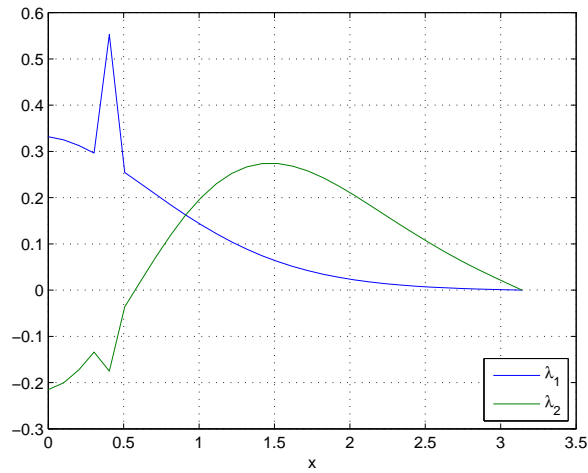
$N=30$;

```

c=4;
g1=1;
g2=2;
h=pi/(N+1);
xx=(0:N)*h;
H=diag([1,2*ones(1,N)]);
H=H+diag(3*h^2*xx);
H=H-diag(ones(1,N),-1)-diag(ones(1,N),1);
H(c,c+1)=-g1/g2; H(c+1,c)=-g2/g1;
H(c+1,c+2)=-g2/g1; H(c+2,c+1)=-g1/g2;
M=h^(-2)*H;
[v,e]=eig(M);
VV=[v;zeros(1,N+1)];
xx=[xx,pi];
plot(xx,VV(:,[1,2]))
xlabel('x')
legend('\lambda_1', '\lambda_2',4)
grid on

```

İlk iki özfonksiyon grafiği aşağıdaki şekilde gibidir.



Şekil. 3.6: İlk iki özfonksiyon

Çizelge. 3.7: Nümerik Örnek 4 İçin Özvektör Değerleri

Sütun 1	Sütun 2	Sütun 3	Sütun 4	Sütun 5	...	Sütun 30	Sütun 31
0,3319	-0,2151	0,2137	-0,2243	-0,2236	...	0,1186	0,1094
0,3252	-0,2004	0,1899	-0,1863	-0,1685	...	-0,2324	-0,2332
0,3129	-0,1726	0,1456	-0,1173	-0,0724	...	0,1038	0,1540
0,2963	-0,1341	0,0860	-0,0292	0,0411	...	0,1334	0,0597
0,5529	-0,1752	0,0354	0,1271	0,2897	...	-0,4612	-0,4422
0,2545	-0,0363	-0,0524	0,1464	0,2147	...	0,0851	0,1879
0,2313	0,0170	-0,1175	0,2067	0,2351	...	0,1503	0,0112
0,2078	0,0695	-0,1717	0,2358	0,2019	...	-0,2265	-0,2004
0,1847	0,1186	-0,2106	0,2302	0,1234	...	0,0622	0,2114
0,1624	0,1627	-0,2313	0,1913	0,0175	...	0,1683	-0,0337
0,1415	0,2002	-0,2327	0,1254	-0,0921	...	-0,2191	-0,1741
0,1220	0,2302	-0,2156	0,0422	-0,1819	...	0,0351	0,2255
0,1043	0,2524	-0,1819	-0,0468	-0,2332	...	0,1866	-0,0735
0,0884	0,2668	-0,1347	-0,1295	-0,2357	...	-0,2072	-0,1450
0,0743	0,2737	-0,0781	-0,1956	-0,1897	...	0,0039	0,2319
0,0620	0,2739	-0,0162	-0,2371	-0,1053	...	0,2036	-0,1075
0,0513	0,2682	0,0468	-0,2496	0,0002	...	-0,1898	-0,1152
0,0421	0,2575	0,1069	-0,2322	0,1056	...	-0,0309	0,2322
0,0343	0,2429	0,1608	-0,1878	0,1906	...	0,2178	-0,1354
0,0278	0,2253	0,2058	-0,1222	0,2394	...	-0,1660	-0,0864
0,0223	0,2056	0,2402	-0,0431	0,2433	...	-0,0684	0,2281
0,0178	0,1847	0,2628	0,0406	0,2026	...	0,2273	-0,1577
0,0141	0,1633	0,2734	0,1201	0,1251	...	-0,1350	-0,0598
0,0110	0,1420	0,2724	0,1875	0,0255	...	-0,1071	0,2214
0,0085	0,1211	0,2607	0,2366	-0,0786	...	0,2300	-0,1750
0,0065	0,1010	0,2395	0,2633	-0,1692	...	-0,0965	-0,0363
0,0049	0,0819	0,2104	0,2660	-0,2314	...	-0,1449	0,2133
0,0036	0,0638	0,1749	0,2452	-0,2553	...	0,2239	-0,1879
0,0025	0,0468	0,1347	0,2036	-0,2378	...	-0,0511	-0,0163
0,0016	0,0306	0,0913	0,1453	-0,1825	...	-0,1793	0,2050
0,0008	0,0151	0,0461	0,0755	-0,0988	...	0,2070	-0,1973
0	0	0	0	0	...	0	0

Çizelge. 3.8: Nümerik Örnek 4. İçin İlk 30 Özdeğer

n	1	2	3	29	30
λ_n	1,9676	6,6625	10,8305	390,0840	394,0373

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde yapılan nümerik çalışmalardan bir çok önemli sonuç çıkarılabilir. Bunların bir kısmından önceki bölümlerde yeri geldikçe bahsedilmiştir. Elde edilen en önemli sonuç, sınır-değer geçiş probleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları için yapılan sayısal çözümlerdir.

Ayrıca tezde elde edilen sonuçlar sayısal veriler olmasına rağmen, giriş bölümünde de belirtildiği gibi mekanik ve fiziğin bir çok somut problemlerinin sayısal çözümlerinin bulunmasında da uygulanabilir niteliktedir. Bu sonuçlar matematik fiziğin bir çok başlangıç sınır - değer geçiş problemlerinin araştırılmasında uygulanan bazı yöntemleri esaslandırmak için de kullanılabilir.

Teorik ve pratik uygulama alanlarının yeteri kadar geniş olduğu söylenilebilir. Tezde uygulanan yöntemle yüksek mertebeden diferansiyel-operatör denklemlerden ve daha genel sınır şartlarından oluşan sınır-değer geçiş problemleri de araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- Akdoğan, Z., Demirci, M. and Mukhtarov, O.SH., 2007. Normalized Eigenfunction of Discontinuous Sturm-Liouville Type Problem with Transmission Conditions , Applied Mathematical Sciences, Vol. 1, no.52,2573-2591,
- Akdoğan, Z., Demirci, M. and Mukhtarov, O.SH., 2005 A Discontinuous Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter-Dependent Boundary and Transmissions Conditions, Acta Applicandae Mathematicae, 86.329-344.
- Altınışık, N., 1998. Sınır Şartlarında Özdeğer Parametresi Bulunduran Süreksiz Katsayılı Sınır Değer Problemi Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü , Samsun.
- Altuner, B., 2007. Bir Süreksiz Sturm-Liouville Probleminin Bazı Temel Özellikleri Yüksek Lisans Tezi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü , Tokat.
- Amirali, G and Duru, H., 2002. "Nümerik Analiz", Pegema Yayıncılık, 25-28, Ankara.
- Bailey, P. B. and Everitt ,W. N. and Zettl, A. and Liouville, J. ,1999 The SLEIGN2 Sturm-Liouville Code,ACM Trans. Math. Software,21 ,143-192.
- Demir, H., 1999. Bir Diferansiyel Operatör Denklem için Sınır Değer Problemi Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü , Samsun.
- Fulton, C.T., 1977. Two-point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions, Proc. Roy. Soc. Edinburg, 77A, p. 293-308.
- Hayırhoğlu, G., 2005. Geçiş Şartlarında Özdeğer Parametresi Bulunduran Süreksiz Sturm-Liouville Probleminin Özdeğerleri Yüksek Lisans Tezi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü , Tokat.
- Ixaru, L. , Van Daele , M. and Vanden Berghe G. , 1999. A program solving regular Sturm-Liouville problems,department of Applied Mathematics and Computer Science Computer Pyhsics Communication Volume 118 , Issue 2-3, 259 - 277.

- Kadal, M., 2000. Sınır Şartlarının Birinde Özdeğer Parametresi Bulunduran Regüler Sınır-Değer-Geçiş Problemi Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü , Samsun.
- Kurt, A., 2005. Sınır ve Geçiş Şartları ile Verilmiş İkinci Mertebeden Diferansiyel Operatörün Bazı Spektral Özellikleri Yüksek Lisans Tezi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü , Tokat.
- Muhtarov, O.Ş.,1988. "Bir Geçiş Probleminin Bazı Spektral Özellikleri", VİNİTİ,No:1773(Moskow)
- Mukhtarov, O.SH., Demir, H., 1999. "Coersiveness of the Discontinuous Initial Boundary Value Problem for Parabolic Equation". Israel Journal of Mathematics, Vol. 114, Pages 239-252.
- Mukhtarov, O.SH., Kandemir, M., and Kuruoğlu, N., 2002. Distribution of eigenvalues for the Discontinuous boundary-value problem with functional-manypoint conditions. Israel Journal of Mathematics 129., 143-156.
- Mukhtarov, O.SH. and Yakubov, S., 2002. Problems for Ordinary Differential Equations with Transmission Conditions, Applicable Analysis, Vol 81, 1033-1064.
- Mukhtarov, O.SH., Kadakal M., Muhtarov, F.S., 2004. On Discontinuous Sturm-Liouville Problems with Transmission Conditions, J. Math. Kyoto Univ., Vol. 44, Number 4, 779-798.
- Ledoux, V. , 2007. [pdf]. Study of Study of Special Algorithms for solving Sturm-Liouville and Schrodinger Equations. Ph.D. Thesis, Dept. of Applied Mathematics and Computer Science, Ghent University
- Ledoux, V. and Van Daele , M. ,2005. Matslise: A Matlab package for the Numerical Solution of Sturm-Liouville and Schrodinger equations, ACM Transactions on Mathematical Software, 31 , 532-554.
- Ledoux, V. , Van Daele , M. and Vanden Berghe ,G. , 2005. The numerical solution of Sturm-Liouville and Schrodinger problems using Piecewise Perturbation methods, Proceedings: 3rd International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering, Ghent 2

- Ledoux, V. , Van Daele , M. and Vanden Berghe G. , 2009. Efficient computation of high index Sturm-Liouville eigenvalues for problems in physics, *Comp. Phys. Commun.* 180
- Ledoux, V. and Van Daele , M. ,2010. Solution of Sturm-Liouville problems using modified Neumann schemes, *SIAM Journal on Scientific Computing* 32, 563-584.
- Ledoux, V. and Van Daele , M. ,2010. Solving Sturm-Liouville problems by piecewise perturbation methods, revisited, *Computer Physics Communications* 181 , 1335-1345.
- Naimark, M.A., 1967. *Linear differential operators*, Ungar, Newyork.
- Okuducu, H., 2003. *Lineer Diferansiyel Denklem, Sınır Şartları ve Geçiş Şartlarının Ürettiği Diferansiyel Operatörün Özdeğeri*, Yüksek Lisans Tezi. (Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.)
- Pruess, S. and Fulton , C. T. ,1993. Mathematical software for Sturm-Liouville problems, *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, Volume 19 , Issue 3 ,360 - 376.
- Titchmars, E.C., 1962. *Eigenfunctions Expansion Associated with Second Order Differential Equations I*, second edn. Oxford Univ. press, London.
- Tunç, E. and Mukhtarov, O.SH., 2004. Fundamental solutions and eigenvalues conditions, *Applied Mathematics and Computation*. Vol. 157, p. 347-355.
- Yakubov, Y., 1998. "Irregular Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations", *Analysis*, R.Oldenburger Verlag München 18, 359-402
- Yakubov, S.Y. and Yakubov Y.Y., 1999. Abel Basis of Root Functions of Regular Boundary Value Problems, *Math. Nachr.* 197, 157-187.

ÖZGEÇMİŞ**Kişisel Bilgiler****Adı Soyadı** : Savaş KUNDURACI**Doğum Tarihi ve Yer** : 25.08.1976 Çal**Medeni Hali** : Bekar**Yabancı Dili** : İngilizce**Telefon** : 0505 774 94 96**E-posta** : savaskunduraci@hotmail.com**Eğitim:**

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2010
Lisans	Eskişehir Anadolu Üniversitesi	2000
Lise	İzmir Merkez Eşrefpaşa Lisesi	1993

İlgi Alanları

Gezi, Sinema, Kitap okumak, Matematikle ilgili gelişmeleri takip etmek, Satranç oynamak, Maç izlemek.