

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI DOĞRUSAL OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN SONLU FARKLAR
METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Hasan BULUT

HAZIRLAYAN
Tuğçem PARTAL

2011

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI DOĞRUSAL OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
SONLU FARKLAR METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Tuğçem PARTAL
08121114**

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Hasan BULUT

OCAK-2011

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI DOĞRUSAL OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
SONLU FARKLAR METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuğçem PARTAL

08121114

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih:
Tezin Savunulduğu Tarih:**

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Hasan BULUT(F.Ü)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Etibar Penahlı(F.Ü)
Yrd. Doç. Dr. İbrahim Enam İNAN(F.Ü)

OCAK-2011

ÖNSÖZ

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, tez konusunun belirlenilmesi, yazılması ve sonuçlandırılması sürecinde bütün fedakârlık ve yardımlarını esirgemeyen saygı değer Sayın Yrd. Doç. Dr. Hasan BULUT (F.Ü) hocama sonsuz şükranlarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca yardımlarını ve desteğini esirgemeyen Sayın Hocam Doç. Dr. Alaattin ESEN (İ.Ü) 'e ve Sayın Hocam Öğr. Gör. Yusuf Uçar (İ.Ü) 'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Tuğçem PARTAL
ELAZIĞ-2011

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY.....	V
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	VI
TABLolar LİSTESİ.....	VIII
SEMBOLLER LİSTESİ.....	XI
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIMLAR.....	4
3. MATERYAL ve METOT	9
3.1. Sonlu Farklar Metodu (SFM)	9
3.2. Adomian Ayrışım Metodu (ADM).....	13
3.3. Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM).....	15
3.4. Gauss Eleme Yöntemi	18
4. UYGULAMALAR.....	20
4.1. Doğrusal Olmayan KdV Denkleminde Sonlu Fark Metodu, Adomian Ayrışım Metodu ve Homotopi Pertürbasyon Metodunun Uygulanması.....	20
4.1.1 Sonlu Fark Metodu ile Çözüm.....	20
4.1.2 Adomian Ayrışım Metodu ile Çözüm.....	24
4.1.3 Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözüm.....	28
4.2. Doğrusal Olmayan Burgers Denkleminde Sonlu Fark Metodu, Adomian Ayrışım Metodu ve Homotopi Pertürbasyon Metodunun Uygulanması.....	32
4.2.1 Sonlu Fark Metodu ile Çözüm.....	32
4.2.2 Adomian Ayrışım Metodu ile Çözüm.....	36
4.2.3 Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözüm.....	39
5. SONUÇLAR ve TARTIŞMA	44
KAYNAKLAR.....	46
ÖZGEÇMİŞ.....	49

ÖZET

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, diferansiyel denklemlerle ilgili temel tanımlara yer verilmiştir.

İkinci bölümde Sonlu fark metodu, Adomian ayrışım metodu ve Homotopi Pertürbasyon metotlarının genel yapıları anlatılmıştır.

Üçüncü bölüm ise tezimizin orijinal kısmını oluşturmaktadır ve iki kısımdır. Birinci kısımda KdV denklemine sırasıyla SFM, ADM ve HPM uygulanarak denklemin sayısal çözümleri incelenmiştir. İkinci kısımda ise, Burgers denklemine SFM, ADM ve HPM uygulanarak denklemin sayısal çözümleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: KdV denklemi, Burgers denklemi, Sonlu Fark Metodu (SFM), Adomian Ayrışım Metodu (ADM), Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM), Crank Nicolson, Adomian Polinomları, Sonlu Fark Yaklaşımı.

SUMMARY

Solutions of Some Non-linear Partial Differential Equations With Finite Difference Method

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter, provides fundamental definitions related to differential equations.

In the second chapter, we give general structures of Finite Difference Method, Adomian Decomposition Method and Homotopy Perturbation Method.

The third chapter is the our major contribution and it has two section. In the first section of third chapter, numerical solitions of the KdV equation were investigated by applying Finite Difference Method, ADM and HPM methods respectively to the KdV equation. In the second section of third chapter, numerical solitions of the Burgers equation were investigated by applying Finite Difference Method, ADM and HPM methods respectively to the Burgers equation.

Key Words: KdV equation, Burgers equation, Finite Difference Method (SFM), Adomian Decomposition Method (ADM), Homotopy Perturbation Method (HPM), Crank Nicolson, Adomian Polinomials, Finite Diference Approximation.

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1. Parabolik bir denklemin çözüm alanı.....	6
Şekil 2.2. Hiperbolik bir denklemin çözüm alanı.....	7
Şekil 2.3. Eliptik bir denklemin kapalı çözüm alanı.....	8
Şekil 3.1. Sonlu Farklar Yönteminde çözüm alanının grid noktalara bölünmesi ve numaralandırma.....	10
Şekil 4.1. $h = 0.1$, $k = 0.0001$ için KdV denkleminin SFM ile yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü	22
Şekil 4.2. KdV denkleminin analitik çözümünün üç boyutlu görünümü	
Şekil 4.3. $h = 0.1$, $k = 0.0001$ için KdV denkleminin SFM ile yaklaşık çözümünün iki boyutlu görünümü	22
Şekil 4.4. KdV denkleminin analitik çözümünün iki boyutlu görünümü	22
Şekil 4.5. KdV denkleminin ADM ile yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü	25
Şekil 4.6. KdV denkleminin analitik çözümünün üç boyutlu görünümü	26
Şekil 4.7. KdV denkleminin ADM ile yaklaşık çözümünün iki boyutlu görünümü	26
Şekil 4.8. KdV denkleminin analitik çözümünün iki boyutlu görünümü	26
Şekil 4.9. KdV denkleminin HPM ile yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü	30
Şekil 4.10. KdV denkleminin analitik çözümünün üç boyutlu görünümü	30
Şekil 4.11. KdV denkleminin HPM ile yaklaşık çözümünün iki boyutlu görünümü	30
Şekil 4.12. KdV denkleminin analitik çözümünün iki boyutlu görünümü	31
Şekil 4.13. $h = 0.01$, $k = 0.000001$ için Burgers denkleminin SFM ile yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü	33
Şekil 4.14. Burgers denkleminin analitik çözümünün üç boyutlu görünümü.....	33
Şekil 4.15. $h = 0.01$, $k = 0.000001$ için Burgers denkleminin SFM ile yaklaşık çözümünün iki boyutlu görünümü	33
Şekil 4.16. $h = 0.01$, $k = 0.000001$ için Burgers denkleminin analitik çözümünün iki boyutlu görünümü	33

Şekil 4.17. Burgers denkleminin ADM ile yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü	36
Şekil 4.18. Burgers denkleminin analitik çözümünün üç boyutlu görünümü.....	36
Şekil 4.19. Burgers denkleminin ADM ile yaklaşık çözümünün iki boyutlu görünümü	36
Şekil 4.20. Burgers denkleminin analitik çözümünün iki boyutlu görünümü	37
Şekil 4.21. Burgers denkleminin HPM ile yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü	40
Şekil 4.22. Burgers denkleminin analitik çözümünün üç boyutlu görünümü.....	40
Şekil 4.23. Burgers denkleminin HPM ile yaklaşık çözümünün iki boyutlu görünümü	41
Şekil 4.24. Burgers denkleminin analitik çözümünün iki boyutlu görünümü	41

TABLÖLER LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 4.1: $h = 0.1$, $k = 0.0001$ için KdV denkleminin SFM ile yaklaşık çözümünün analitik çözüm ile karşılaştırılması.....	21
Tablo 4.2: KdV denkleminin ADM ile yaklaşık çözümünün, analitik çözüm ile karşılaştırılması.....	25
Tablo 4.3: KdV denkleminin HPM ile yaklaşık çözümünün, analitik çözüm ile karşılaştırılması.....	29
Tablo 4.4: $h = 0.01$, $k = 0.000001$ için Burgers denkleminin SFM ile yaklaşık çözümünün, analitik çözüm ile karşılaştırılması.....	32
Tablo 4.5: Burgers denkleminin ADM ile yaklaşık çözümünün, analitik çözüm ile karşılaştırılması.....	35
Tablo 4.6: Burgers denkleminin HPM ile yaklaşık çözümünün, analitik çözüm ile karşılaştırılması.....	39
Tablo 5.1: KdV denkleminin SFM, ADM ve HPM ile elde edilen sayısal çözümlerinin hata tablosu	42
Tablo 5.2: Burgers denkleminin SFM, ADM ve HPM ile elde edilen sayısal çözümlerinin hata tablosu	43

SEMBOLLER LİSTESİ

L	: Diferensiyel operatörü
L⁻¹	: İntegral operatörü
Nu	: Lineer olmayan terim
A_n	: Adomian polinomu
φ_n	: n-terim yaklaşımı
u(x,t)	: Çözüm fonksiyonu
p	: Küçük bir parametre
R	: Reel sayı sistemi
λ	: Lamda
ε	: Ebsilon
Ω	: Omega
Γ	: Gama
ξ	: Xi
φ	: Phi
σ	: Sigma

KISALTMALAR

KDD	: Kısmi Diferansiyel Denklem
SFM	: Sonlu Fark Metodu
SFD	: Sonlu Fark Denklemi
ADM	: Adomian Ayrışım Metodu
HPM	: Homotopi Pertürbasyon Metodu
KdV	: Korteweg-de Vries Denklemi

1. GİRİŞ

1.1. Korteweg de Vries (KdV) Denklemi

Bağımsız dalgalar (solitary waves) ilk defa 1834 yılında durgun bir teknenin ön tarafından kopan yuvarlak, düzgün ve oldukça belirgin bir su kümesinin şeklinde bir değişiklik veya hızında en ufak bir azalma olmaksızın yaklaşık 3 kilometrelik bir kanal boyunca ilerlediğinin Scott Russell [1] tarafından gözlemlenmesiyle kayda geçmiştir. Salınım yapan diğer dalga türlerinden farklı hareket biçimi nedeniyle yine Russell tarafından bunlara "bağımsız dalga" adı verilmiştir. 1847 yılında Stokes [2] ve 1872 yılında Boussinesq [3] gibi birçok matematikçi kısaca bu konudan bahsetmiş olsa da sığ sulardaki bağımsız dalgaların profilini gözlemleyen Scott Russell'dan sonraki ilk teorik çalışmalar 1895 yılında Korteweg ve de Vries'e aittir. Korteweg ve de Vries [4] sığ bir kanalda tek yönde ilerleyen dalgaların oluşumuna dair günümüzde oldukça ilgi çeken denklemi bulmuşlardır. Burada,

l : kanalın derinliği

$l + \eta$: (η küçük olmak üzere) yüzeyin dipten itibaren yüksekliği

α : sıvının düzgün hareketi ile ilgili küçük bir sabit

$\sigma : \frac{l^3}{3} - \frac{Tl}{pg}$ bir parametre

T : yüzey gerilimi

g : yerçekimi ivmesi

ρ : sıvının yoğunluğu

olmak üzere dalganın hareketi ile ilgili kısmi diferansiyel denklem

$$\eta_t = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right] \quad (1.1)$$

biçimindedir.

$$\eta = \beta \alpha u, \quad \xi = -\sqrt{\frac{2\alpha\mu}{\sigma}} x, \quad T = \sqrt{\frac{2g\mu\alpha}{\sigma l}} t$$

dönüşümleriyle (1.1) denklemi

$$u_T + u_\xi + \epsilon u u_\xi + \mu u_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (1.2)$$

şeklini alır. Burada $\varepsilon = \frac{3}{2}\beta$ ve μ bilinen parametrelerdir. (1.2) denkleminde $x = \xi - T$ dönüşümü yapılır ve T yerine t yazılırsa

$$u_t + \varepsilon uu_x + \mu u_{xxx} = 0 \quad (1.3)$$

KdV denklemi elde edilir [5].

KdV denklemi inverse scattering yöntemiyle [6] analitik olarak çözülebilir olmasına rağmen bu yöntemin zamandan bağımsız Schrödinger denkleminin bağılı olarak sadece birkaç özel potansiyel için sonuç veriyor olması sebebiyle nümerik çözümleri önemini korumaktadır. KdV denkleminin nümerik çözümünü ilk olarak Zabusky ve Kruskal [7] sonlu farklar yöntemini kullanarak elde etmişlerdir. O çalışmada iki bağımsız dalganın etkileşiminin özellikleri ortaya konulmuştur. Zabusky ve Kruskal, ikinci bir dalgayla karşılaştığında geçiş aşaması hariç, şeklini koruyarak düzgün hızla ilerleyen dalgalar için soliton kavramını tanımlamışlardır. Helal ve Mehanna [8] KdV denkleminin Adomian ayrışım yöntemini ve sonlu farklar yöntemini uygulayarak sayısal ve analitik çözümleri karşılaştırmışlardır. Cavlak [28] ise GKdV denklemini yarı analitik metotlarla incelemiştir.

1.2.Burgers Denklemi

ν , bir reel sabit olmak üzere;

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0 \quad (1.4)$$

denklemi Burgers denklemi olarak bilinir ve ilk olarak Bateman [9] tarafından çalışılmıştır. Burger [10], özellikle türbülansın modeli olması gibi, bu denklemi içeren geniş çapta çalışmalar yapmıştır. Bundan dolayı denklem Burgers denklemi olarak adlandırılmıştır.

Burgers denklemi için başlangıç ve sınır şartları sırasıyla,

$$u(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (1.5)$$

$$u(a, t) = \alpha, \quad u(b, t) = \beta, \quad t \in [0, T] \quad (1.6)$$

olarak seçilir.

Burgers denklemi, ısı iletimi, gaz dinamiği, esneklik, sayılar teorisi, şok dalga teorisi ve türbülans problemlerinin modellenmesinde kullanılır.

Burgers denklemi doğrusal olmayan konvektif uu_x terimi ve νu_{xx} viskozite teriminden dolayı Navier- Stokes denkleminin benzer özellikler gösterir. Bu nedenle Navier- Stokes denkleminin nümerik çözümlerine geçmeden önce daha basit bir model olan Burgers

denklemini çalışmak uygun bir başlangıçtır. Bu yüzden Burgers denklemi, Navier- Stokes denkleminin nümerik çözüm metotlarının kararlılık ve doğruluğunun test edilmesinde bir model olarak kullanılır.

Hopf [11] ve Cole [12], keyfi başlangıç koşulları için Burgers denklemini analitik ve birbirinden bağımsız olarak çözmüşlerdir. Birçok durumda bu çözümler, ν viskozite sabitinin küçük değerleri için çok yavaş yakınsayabilen sonsuz serileri içerir.

Bugüne kadar birçok bilim adamı Burgers denkleminin nümerik çözümlerini bulabilmek için çeşitli nümerik çözüm metotları kullandılar. Çok küçük viskozite değerlerinde denklemin nümerik çözümlerinde zorlukların ortaya çıktığı görüldü. Jain ve Holla [13] kübik spline fonksiyonlar yardımıyla sonlu farklar metoduyla bir ve iki boyutlu Burgers denkleminin nümerik çözümü üzerinde çalışmışlardır. Kutluay, Bahadır ve Özdeş [14] sonlu farklar metodunun bir uygulaması olan explicit ve tam explicit metotlarıyla Burgers denkleminin nümerik çözümünü elde etmişlerdir.

2. TEMEL TANIMLAR

2.1 Tanım: Bir veya birden fazla bağımlı değişkenin, bir veya daha fazla bağımsız değişkene göre birinci veya daha yüksek mertebeden türevlerini içeren denklemlere “*diferansiyel denklemler*” denir [33].

2.2 Tanım: Bir bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre birinci veya daha fazla mertebeden türevlerini içeren denklemlere “*adi diferansiyel denklemler*” denir. n. mertebeden adi diferansiyel denklemlerin genel formu,

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

şeklindedir [33].

2.3. Tanım: En az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre birinci veya daha fazla mertebeden kısmi türevlerini içeren denklemlere “*kısmi diferansiyel denklemler*” denir. Kısmi diferansiyel denklemlerin genel formu,

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots) = 0$$

şeklindedir [33].

2.4. Tanım: Bir diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevin mertebesine o diferansiyel denklemin “*mertebesi*” denir [33].

2.5. Tanım: Bir diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevin kuvvetine diferansiyel denklemin “*derecesi*” denir [33].

2.6. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Mühendislikte karşılaşılan kısmi diferansiyel denklemlerin büyük bir çoğunluğu bir veya ikinci mertebeden denklemlerdir. Bu tip denklemlerin bir kısmı için analitik çözüm bulunsa bile özellikle lineer olmayan tipleri için sayısal çözüme başvurmak gerekir. Sayısal çözüm için değişik yöntemler uygulanmakla beraber bu yöntemler denklemlerin tiplerine göre bazı özellikler arz eder.

2.6.1. Matematiksel Sınıflandırma

Bir $\varphi(x, y)$ fonksiyonu için ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklem genel formda

$$A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \varphi}{\partial x} + E \frac{\partial \varphi}{\partial y} + F \varphi = G(x, y) \quad (2.1)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem

$$A, B, C, D, E, F = f(x, y)$$

ise lineer,

$$A, B, C = f(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y)$$

ise yarı lineer bir denklemdir.

Böyle bir denklemin karakterini A,B,C katsayıları belirler. Verilen denklem,

$$B^2 - 4AC > 0 \Rightarrow \text{Hiperbolik Diferansiyel Denklem}$$

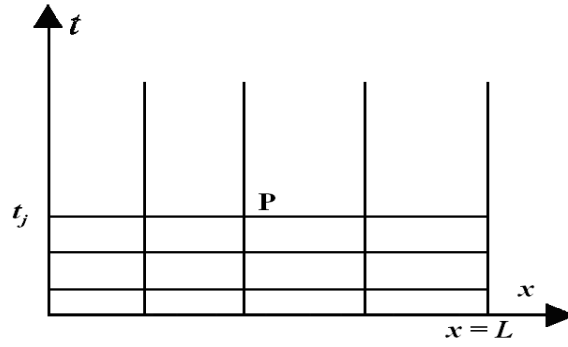
$$B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow \text{Parabolik Diferansiyel Denklem}$$

$$B^2 - 4AC < 0 \Rightarrow \text{Eliptik Diferansiyel Denklem}$$

olarak sınıflandırılır.

2.6.1.1. Parabolik Diferansiyel Denklemler

Verilen başlangıç ve sınır şartlarından başlanarak, bir yönü açık bir alanda adım adım ilerleyerek çözüm bulunan denklemlerdir. Dolayısıyla herhangi bir noktadaki çözüm o noktadan önceki noktalardaki değerlere bağlı olarak elde edilir. Örneğin Şekil 2.1'de **P** noktasındaki (herhangi bir t anında) çözüm, **P**'nin alt tarafındaki noktalara bağlı olarak bulunur. Yani **P** noktasındaki özellik daha önceki zaman adımlarında (t_j 'den önce) hesaplanan noktalardaki değerlere bağlı olup sonraki zaman adımlarında (t_j 'den sonra) hesaplamamanın yapılacağı noktalara bağlı değildir.



Şekil 2.1. Parabolik bir denklemin çözüm alanı

Parabolik denklemlerin tipik örneği difüzyon denklemdir. Isıl difüzyon denkleminin olan geçici rejim ısı iletimi denkleminde

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

$A=0$, $B=0$ ve $C=\alpha$ olup diskriminant sıfırdır. Dolayısıyla denklem parabolik denklemdir. Bu denklemin çözümü için başlangıç şartı ($t=0$ için sıcaklık değerleri) ve sınır şartları ($x=0$ ve $x=L$ için sıcaklıklar) verildiğinde t yönünde adım adım ilerleyerek her t anı için sıcaklık dağılımı elde edilir.

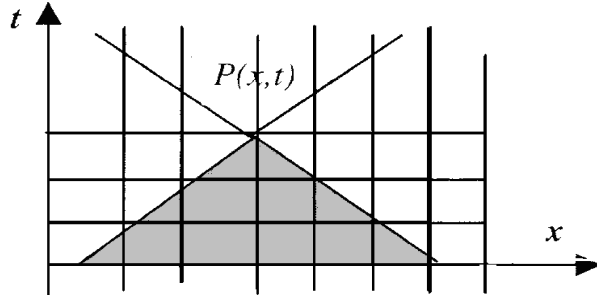
Parabolik denklemlere bir başka örnek sürekli rejimdeki bir akışa ait

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.3)$$

momentum denklemdir. Burada akışın x yönünde ve bu yöndeki hız bileşeninin u olduğu dikkate alınırsa x yönünde adım adım ilerleyerek her adımda y yönündeki hız profilleri bulunur. Açık ki bu çözümün yapılabilmesi için başlangıç şartları ($x=0$ için hız değerleri) ve sınır şartları ($y=0$ ve $y=h$ için hız değerleri) bilinmelidir [33].

2.6.1.2. Hiperbolik Diferansiyel Denklemler

Bir tarafı açık alanda, başlangıç değerlerden başlayarak adım adım ilerlemeyle çözüm bulunan denklemlerdir. Düzlemde P noktasındaki çözüm bulunmak isteniyorsa P noktasından önce gelen ve iki doğru arasında kalan noktadaki çözüm bilinmelidir. Bu iki doğru hiperbolik denklemlerde önemli olup karakteristik doğrular olarak adlandırılır (bunlar eğri de olabilir). Karakteristik eğriler arasındaki alanın kesim noktasından önceki kısmı $P(x,t)$ noktasındaki çözümü etkileyen alan, sonraki kısım ise $P(x,t)$ 'deki çözümün etkilediği alan olacaktır (Şekil. 2.2).



Şekil 2.2. Hiperbolik bir denklemin çözüm alanı

Yani etkileyen alan dışında herhangi bir tedirginlik $P(x, t)$ noktasındaki çözümü etkilemez. Bu açıdan bakıldığında parabolik denklemler, hiperbolik denklemlerin özel bir hali gibi düşünülebilir. Yani parabolik denklemlerde iki karakteristik doğru üst üste çakışık olup yatay gibi düşünülebilir. Gerçekten parabolik denklemlerde diskriminant sıfır olup katlı karakteristikler vardır.

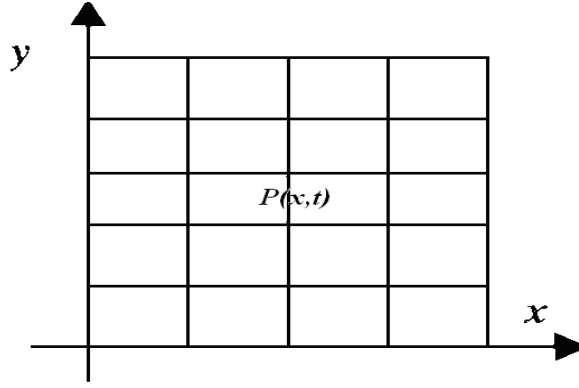
Hiperbolik denklemlerin tipik örneği dalga denklemdir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

Burada $A=1$, $B=0$ ve $C = -c^2$ olup diskriminant pozitif olduğundan hiperbolik denklem söz konusudur. Yine burada da verilen başlangıç şartlarından hareketle adım adım çözüm elde edilir [33].

2.6.1.3. Eliptik Diferansiyel Denklemler

Sınır değer problemleri bu gruba girer. Çözüm yapılacak alan içinde bir P noktasındaki çözüm diğer noktalara ve sınır değerlerine bağlıdır (Şekil 2.3). Dolayısıyla çözüm için bütün sınır değerler bilinmelidir. İç noktalarda çözümün adım adım değil eşzamanlı olarak bulunması gerekir. Bu bakımdan çözümü diğer denklem tiplerine göre daha zor olan denklemlerdir. Diskriminant negatif olduğu için eliptik denklemlerde reel karakteristik eğri yoktur [33].



Şekil 2.3. Eliptik bir denklemin kapalı çözüm alanı

Eliptik denklemlerin tipik örneği Laplace denklemdir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.5)$$

Bu denklemde $A=1$, $B=0$ ve $C=1$ olup diskriminant negatiftir. İki boyutlu ısı iletimi denklemleri

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.6)$$

de bu tip bir denklemdir. İki boyutlu sıkıştırılamaz akışa ait momentum denklemleri

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (2.7)$$

konuma göre eliptik, fakat zamana göre hiperbolik karakterli bir denklemdir. Bazı denklemler duruma göre karakter değiştirebilir. Mesela sıkıştırılabilir sürtünmesiz akışa ait potansiyel fonksiyon ifadesi

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{M^2 - 1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.8)$$

mach sayısı $M > 1$ ise (ses üstü akış) hiperbolik, $M < 1$ (ses altı akış) eliptik karakter gösterecektir. Bu durum sayısal çözümde özel dikkat gerektirir [33].

2.7. Tanım: Bir değişkenli skaler bir fonksiyon için Adomian polinomları, f fonksiyonu n defa türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$A_n = \frac{1}{n} f \left(\sum_{i=0}^{\infty} U_i \right)$$

formülü ile tanımlanır [31].

3. MATERYAL VE METOD

3.1. Sonlu Farklar Metodu (SFM)

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde değişik yöntemler kullanılır. Bunların arasında en eski ve açık yöntem sonlu farklar yöntemidir. Sonlu farklar yönteminde, sürekli çözüm alanı diskretize edilerek (alan belli aralıklarda noktalarla temsil edilerek) bağımlı değişkenin sadece bu noktalardaki değeri bulunmaya çalışılır. Türevlerin yaklaşık olarak sonlu farklarla ifade edilmesi, verilen kısmi diferansiyel denkleminin (KDD) cebirsel bir denklem veya denklem sistemi olan sonlu fark denklemlerine (SFD) dönüşmesini sağlar. Sonuçta elde edilen cebirsel sistem, orijinal KDD in karakterine bağlı olur.

Sonlu farklar yönteminin temeli, kısmi diferansiyel denklemlerde görülen türevlerin sonlu ve ayrık noktalarda yaklaşık olarak ifade edilmesi üzerine kuruludur.

Sonlu farklar yöntemi kısaca şöyle özetlenebilir:

Bağımlı değişkenin $u(x,y)$ olduğu bir diferansiyel denklem ele alınsın. Sonlu fark denkleminin kurulmasında ilk adımlardan biri çözüm alanını grid noktalara bölmektir.

Çözüm alanında oluşturulan grid noktalar, x - yönünde konumu belirten i ve y - yönünde konumu belirten j indisleri kullanılarak numaralandırılır. Buna göre herhangi bir (x_i, y_j) noktasında

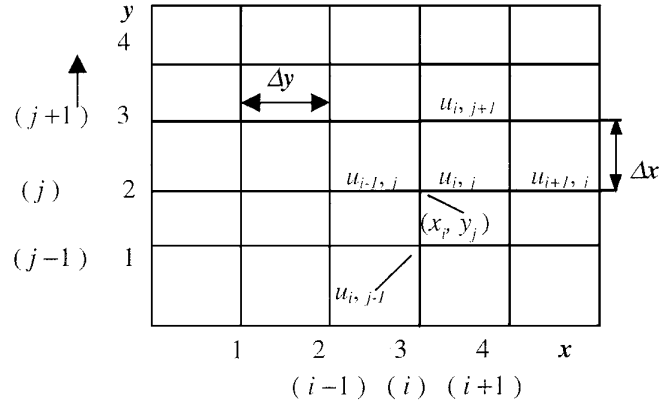
$$x_i = x_o + i\Delta x \quad (3.1)$$

$$y_j = y_o + j\Delta y \quad (3.2)$$

yazılabilir. Bu noktadaki fonksiyonun değeri

$$u_{i,j} = u(x_i, y_j) \quad (3.3)$$

ve civar noktalardaki fonksiyonun değerleri



Şekil 3.1. Sonlu Farklar Yönteminde çözüm alanının grid noktalara bölünmesi ve numaralandırma

$$u_{i,j+1} = u(x_i, y_j + \Delta y)$$

$$u_{i,j-1} = u(x_i, y_j - \Delta y)$$

$$u_{i+1,j} = u(x_i + \Delta x, y_j)$$

$$u_{i-1,j} = u(x_i - \Delta x, y_j)$$

şeklinde gösterilecektir.

Bir türevin sonlu farklarla ifadesinin temelini türev tanımı oluşturur. $u(x, y)$ fonksiyonun (x_i, y_j) noktasındaki türevi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x_i + \Delta x, y_j) - u(x_i, y_j)}{\Delta t} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta t} + hata \quad (3.4)$$

olacaktır. Eşitliğin sağ kısmı türevin sonlu farklarla gösterimidir. Sonlu fark gösterimindeki hata, limitin kaldırılmasıyla oluşan hata olup bu hatanın mertebesi ayrıca üzerinde durulması gereken önemli bir konudur.

Sonlu fark gösterimi bu temele oturtulabilir. Bu amaçla sonlu fark ifadelerinin oluşturulmasında,

- 1- Taylor seri açılımı
- 2- Polinom uydurma
- 3- İntegral metodu
- 4- Sonlu hacim yaklaşımı

yöntemleri kullanılır. Çoğu zaman bu dört yöntemle aynı SFD i elde edilir. Bunlardan polinom uydurma yöntemi daha çok sınır şartlarının tatbikinde uygulanır.

3.1.1 Taylor Serisi Açılımı ile Sonlu Fark Formülleri

$$u(x_i + \Delta x, y_j) = u(x_i, y_j) + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots$$

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \dots \quad (3.5)$$

ifadesinden birinci türev çekilirse

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \frac{\Delta x}{2!} - \dots \quad (3.6)$$

ileri sonlu fark türev ifadesi,

$$u(x_i - \Delta x, y_j) = u(x_i, y_j) - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots$$

şeklinde yazılarak birinci türev ifadesi çekilirse

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} (\Delta x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \frac{\Delta x}{2} + \dots \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.9)$$

geri sonlu fark türev ifadesi elde edilir. (3.7) eşitliği (3.5) eşitliğinden çıkartılıp,

$$\begin{aligned} u_{i+1,j} - u_{i-1,j} &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2} \\ &\quad + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \\ &= 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

ve birinci türev çekilirse

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (3.11)$$

merkezi sonlu fark ifadesi bulunur. Kesme hatalarına bakıldığında bu ifadenin ikinci mertebeden hassasiyete sahip olduğu görülür.

Diğer taraftan (3.5) ve (3.7) eşitlikleri taraf tarafa toplanıp,

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} = 2u_{i,j} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \frac{(\Delta x)^4}{4!} + \dots \quad (3.12)$$

ikinci mertebeden türev terimi çekilirse,

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad (3.13)$$

ikinci türev için merkezi sonlu fark ifadesi elde edilir. Kesme hatasına bakıldığında bu ifadenin ikinci mertebeden hassasiyete sahip olduğu anlaşılır.

Benzer şekilde x 'e göre alınan türev ifadeleri y 'ye göre türev için de yazılabilir. Örneğin; y 'ye göre birinci türev için *merkezi sonlu fark*,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (3.14)$$

olacaktır. Görüldüğü gibi y yönünde türev için j indisi değişmeli ve y yönündeki adım alınmalıdır.

Daha çok grid noktası kullanılarak daha yüksek hassasiyetli bağıntılar elde edilir. Bunun için Taylor serisi $(i+2, j)$ noktasında yazılırsa,

$$u_{i+2,j} = u_{i,j} + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} (2\Delta x) + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} \frac{(2\Delta x)^2}{2!} + \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{i,j} \frac{(2\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (3.15)$$

elde edilir. (3.5) denklemi 2 ile çarpılıp yukarıdaki ifadeden çıkartılırsa,

$$u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} = u_{i,j} - 2u_{i,j} + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} \frac{(2\Delta x)^2}{2!} - 2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{i,j} \frac{(2\Delta x)^3}{3!} + \dots$$

elde edilir. Buradan ikinci türev çekilerek,

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i,j}}{\Delta x^2} + \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{i,j} \frac{6(\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (3.16)$$

veya

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x) \quad (3.17)$$

ileri sonlu fark türev formülü elde edilir. Birinci mertebeden hassasiyete sahip bu ifade normalde çözüm alanının sınırlarında kullanılabilir. Bu ifade (3.6) denkleminde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{-u_{i+2,j} + 4u_{i+1,j} - 3u_{i,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (3.18)$$

birinci türev için ikinci mertebeden hassasiyetli ve üç nokta kullanan bir formül elde edilmiş olur.

Benzer şekilde elde edilen bazı çok nokta kullanan türev formülleri aşağıda sıralanmıştır [32].

Birinci türev için geri sonlu fark formülü:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{3u_{ij} + 4u_{i+1,j} - u_{i+2,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (3.19)$$

Birinci türev için çok nokta merkezi sonlu fark formülü:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{-u_{i+2,j} + 8u_{i+1,j} - 8u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{12\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (3.20)$$

Üçüncü türev için merkezi sonlu fark formülü:

$$\left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+2,j} - 3u_{i+1,j} + 3u_{i,j} - u_{i-1,j}}{(\Delta x)^3} \quad (3.21)$$

Üçüncü türev için çok nokta merkezi sonlu fark formülü:

$$\left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{i,j} = \frac{-u_{i+3,j} + 6u_{i+2,j} - 12u_{i+1,j} + 10u_{i,j} - 3u_{i-1,j}}{2(\Delta x)^3} \quad (3.22)$$

3.2. Adomian Ayrışım Metodu (ADM)

Ayrışım yönteminin, bir seri metodu olduğu, birçok cebirsel, lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklemlere başarılı bir şekilde uygulandığı bilinmektedir. Genel olarak bu metottan bahsedecek olursak; kabul edelim ki F , hem lineer hem de lineer olmayan terimleri içeren bir genel lineer olmayan adi diferansiyel operatör olmak üzere;

$$F(u) = g(x) \quad (3.23)$$

olsun. L - verilen diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeden türev operatörünü, R - lineer operatörün kalan kısmını ve N - ise lineer olmayan terimi göstermek üzere (3.23) denklemi

$$Lu + Ru + Nu = g \quad (3.24)$$

şeklinde yazılabilir. L bir lineer operatör olmak üzere L nin, L^{-1} tersi de mevcut olsun. (3.24) eşitliği

$$Lu = g - Ru - Nu \quad (3.25)$$

şeklinde yazılabilir ve (3.25) eşitliğinin her iki tarafına soldan L^{-1} operatörü uygulanırsa;

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (3.26)$$

elde edilir.

L 'nin ikinci mertebeden ve tersi mevcut olan lineer bir operatör olduğunu kabul edelim. (3.26) eşitliğinde gerekli işlemleri yaptıktan sonra

$$u = u(0) + tu'(0) + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (3.27)$$

çözüm fonksiyonu bulunur. (3.27) ile elde edilen eşitlikteki $N(u)$ lineer olmayan terim

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

şeklinde ifade edilmektedir. Buradaki A_n Adomian polinomları özel polinomlardır. (3.27) eşitliğindeki u ; ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonudur. Bu seri çözüm fonksiyonunun birinci terimi u_0 , verilen başlangıç değeri sağ taraf fonksiyonun integrali olmak üzere $u_0 = a + bt - L^{-1}g$ ile bulunur daha sonra u_0 terimi kullanılarak $u_1, u_2, u_3, \dots$ terimleri elde edilerek ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu;

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (3.28)$$

yazılabilir. Bu seri çözümü kullanılarak (3.27) eşitliği tekrar yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (3.29)$$

genel seri formu elde edilir. Benzer olarak (3.29) eşitliği açık şekilde

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ u_2 &= -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1 \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n, \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

formunda yazılabilir. Buradaki A_n polinomları her bir lineer olmayan terim için genelleştirilebilir ve bu genelleştirmede A_0 sadece u_0 'a, A_1 ise u_0 ve u_1 'e, A_2 ise u_0 , u_1 ve u_2 'ye bağlı ve benzer şekilde (3.30) eşitliğindeki bütün A_n Adomian polinomları elde edilebilir. A_n Adomian polinomunun ayrıştırılmış hali ise literatürde

$$\begin{aligned}
A_0 &= f(u_0) \\
A_1 &= u_1 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) \\
A_2 &= u_2 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^2}{2!} \right) \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0) \\
A_3 &= u_3 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + u_1 u_2 \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^3}{3!} \right) \left(\frac{d^3}{du_0^3} \right) f(u_0) \\
&\vdots \\
A_n &= \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} \Phi \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0
\end{aligned} \tag{3.31}$$

ile verilmektedir. Bazı problemlerin sayısal çözümlerinin daha hassas olmasının istenildiği durumlarda ayrışım serisi için çok sayıda terimin hesaplanması gerekebilir. Bu gibi durumlarda (3.31) genel formülünün kullanılması, (3.27) ayrıştırma serisinin çok sayıda teriminin hesaplanmasında kolaylık sağlamaktadır. Ayrışım metodu kullanılarak $u(x,t)$ kapalı çözüm fonksiyonunun bu fonksiyona ait sayısal çözümlerin elde edilmesi için;

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t), \quad n \geq 0 \tag{3.32}$$

olmak üzere;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = u(x,t) \tag{3.33}$$

ifadesi (3.30) indirgeme bağıntısı göz önüne alınarak kolayca hesaplanabilir [19]. Buna ilaveten (3.33) şeklindeki ayrışım seri çözümü, genel olarak fiziksel problemlerde çok hızlı olarak yakınsayan sonuçlar vermektedir. Ayrışım serisinin yakınsaklığı literatürde birçok yazar tarafından araştırılmıştır. Ayrışım serisinin yakınsaklığı teorik olarak Y.Cherruault ve arkadaşları tarafından incelenmiştir [15-21].

3.3. Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM)

Bu bölümde, topolojideki homotopi ile pertürbasyon tekniğini birleştirerek pertürbasyon metotlarının dezavantajlarını ortadan kaldırarak ve sadece zayıf lineer olmayan denklemler için değil aynı zamanda kuvvetli nonlinearliğe sahip denklemler için de elde edilen çözümlerin, tüm çözüm bölgesinde geçerli olduğu, yarı analitik bir metot olan

homotopi pertürbasyon metodu tanıtılacaktır.

Bu metodun temel fikrini açıklamak için aşağıdaki lineer olmayan diferansiyel denklemi göz önüne alalım

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega. \quad (3.34)$$

(3.34) denklemi için sınır koşulu

$$B(u, \partial u / \partial r) = 0, \quad r \in \Gamma, \quad (3.35)$$

şeklinde belirlenir. Burada A genel diferansiyel operatörü, B sınır operatörü, $f(r)$ bilinen analitik fonksiyon ve Γ ise Ω ya bağımlı bir sınırdır.

Genel olarak A diferansiyel operatörü L ve N gibi iki parçaya ayrılabilir ki burada L lineer, N ise lineer olmayan operatördür. Buna göre (3.34) denklemi aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir.

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \quad (3.36)$$

buna göre homotopi tekniği ile bir homotopi oluşturulur.

$$v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow R$$

olmak üzere,

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0, \quad r \in \Omega \quad (3.37)$$

dir. Burada $p \in [0, 1]$ bir parametre ve u_0 ise (3.34) denkleminin bir başlangıç koşuludur.

O halde

$$\begin{aligned} H(v, p) &= L(v) - L(u_0) - pL(v) + pL(u_0) + pA(v) - pf(r) = 0 \\ &= L(v) - L(u_0) - p[L(v) - L(u_0) - A(v) + f(r)] = 0 \\ &= L(v) - L(u_0) + pL(u_0) - p[L(v) - A(v) + f(r)] = 0 \end{aligned}$$

olup (3.34) den $A(u) - f(r) = 0$ dir. Böylece

$$L(v) - L(u_0) + pL(u_0) - p[L(v)] = 0 \quad (3.38)$$

elde ederiz ve buradan (3.36) eşitliğini kullanarak

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \Rightarrow L(u) = -N(u) + f(r) \quad (3.39)$$

denklemi bulunur. Bulunan (3.39) denklemi (3.38) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$L(v) - L(u_0) + pL(u_0) - p[-N(v) + f(r)] = 0$$

olur. Böylece (3.37) denklemi

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0, \quad (3.40)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada $p \in [0, 1]$, başlangıç koşulu u_0 ve $v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow R$ dir. (3.37) ve (3.40) denklemlerinden

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0 \quad (3.41)$$

$$H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0 \quad (3.42)$$

dir. Burada $p = 0$ olduğunda (3.37) denklemi lineer bir denklem haline gelir; $p = 1$ olduğunda lineer olmayan orijinal bir denklem olur. Bu yüzden 0'dan 1'e p nin değişim işlemi, $L(v) - L(u_0) = 0$ denklemini $A(v) - f(r) = 0$ denklemine dönüştürür. $L(v) - L(u_0) = 0$ aşıkâr problemi 0'dan 1'e monoton olarak artan p parametresi, sürekli olarak $A(v) - f(r) = 0$ problemine deforme oluyorsa bu topolojide *deforme* olarak adlandırılır. $L(v) - L(u_0) = 0$ ve $A(v) - f(r)$ ifadelerine ise *homotopiktirler* denir. Homotopi pertürbasyon metodu gereğince, ilk olarak yerleştirilen parametre p 'yi küçük parametre olarak kabul ederek (3.37) ve (3.40) denklemlerinin çözümü

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n \quad (3.43)$$

olacak şekilde p parametresinin kuvvet serisi

$$p^0 : f(v_0) - f(x_0) = 0, \quad (3.44)$$

$$p^1 : f'(v_0)v_1 + f(x_0) = 0, \quad (3.45)$$

$$p^2 : f'(v_0)v_2 + \frac{1}{2!}f''(v_0)v_1^2 = 0, \quad (3.46)$$

$$p^3 : f'(v_0)v_3 + \frac{1}{2!}f''(v_0)2v_1v_2 + \frac{1}{3!}f'''(v_0)v_1^3 = 0, \quad (3.47)$$

yazılır. (3.44)-(3.47) denklemlerinin v_1 , v_2 ve v_3 için çözülmesiyle

$$v_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(v_0)}, \quad (3.48)$$

$$v_2 = -\frac{f''(v_0)v_1^2}{2!f'(v_0)} = -\frac{f''(v_0)}{2!f'(v_0)}\left(\frac{f(v_0)}{f'(v_0)}\right)^2, \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned}
v_3 &= -\frac{f''(v_0)v_1v_2}{f'(v_0)} - \frac{f'''(v_0)v_1^3}{3!f'(v_0)} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{f''(v_0)}{f'(v_0)}\right)^2\left(\frac{f(v_0)}{f'(v_0)}\right)^3 + \frac{f'''(v_0)}{6f'(v_0)}\left(\frac{f(v_0)}{f'(v_0)}\right)^3, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.50}$$

(3.43) serisinin v_1 , v_2 ve v_3 bileşenleri elde edilir. Elde edilen (2.48)-(3.50) denklemleri, (3.43) denkleminde $p = 1$ alınarak yeniden yazılırsa (3.34) denkleminin çözümü

$$\begin{aligned}
u &= \lim_{p \rightarrow 1} (v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots) \\
&= v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} v_n
\end{aligned} \tag{3.51}$$

şeklinde elde edilir. Homotopi pertürbasyon metodu [22]-[27] geleneksel pertürbasyon metodunun tüm özelliklerine sahiptir. (3.43) serisi lineer olmayan $A(v)$ operatörüne bağlı olduğu oranda yakınsamaktadır. (Aşağıdaki görüş; He [25] tarafından önerilmektedir)

(1) V ile ilgili olarak $N(V)$ nin ikinci türevi, göreceli olarak olabildiğince küçük değerlere sahip olmalıdır. $p \rightarrow 1$ gibi.

(2) $L^{-1}(\partial N / \partial V)$ nin normu ise serilere yaklaşıp diye çok küçük olmalıdır.

3.9. Gauss Eleme Yöntemi

$AX = B$ şeklindeki denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan yöntemlerden biridir. Bu yöntemle, bilinmeyenler sistematik olarak yok edilip verilen denklem sistemi,

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= d_1 \\
a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= d_2 \\
&\vdots \\
a_{nn}x_n &= d_n
\end{aligned}$$

şeklinde bir üst üçgen sisteme dönüştürülür. Buradan bilinmeyenler en son denklemden başlayarak, yukarı doğru yerine yazmak suretiyle bulunur.

$$x_n = \frac{d_n}{u_{nn}}, \quad x_i = \frac{d_i - \sum_{k=i}^n u_{ik}x_k}{u_{ii}}$$

• Gauss eleme yönteminde verilen denklem sisteminin üst üçgen sisteme dönüştürülmesi işlemi aşağıdaki gibi yapılır:

Verilen denklem sisteminin birinci denkleminde köşegen üzerindeki eleman, yani x_1 in katsayısı sıfırdan farklı ise birinci denklem pivot denklem olarak seçilir.

$$M_{k1} = \frac{a_{k1}}{a_{11}}, \quad k = 2, 3, \dots, n$$

sayıları tanımlanarak pivot denklem bu sayılarla çarpılır ve sırasıyla k -ıncı denklemden çıkartılıp k -ıncı denklemin yerine yazılır. Yani;

1. Adımda: $S_k \rightarrow S_k - M_{k1}S_1$ satır işlemleri uygulanır. Bu işlemler yapıldığında birinci denklem hariç geriye kalan denklemlerde x_1 bilinmeyeni yok edilmiş olur. yani $n \times n$ tipindeki sistem ;

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= d_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= d_2^{(1)} \\ &\vdots \\ a_{nn}^{(1)}x_n &= d_n^{(1)} \end{aligned}$$

şekline dönüşür.

2. Adımda: Ortaya çıkan sistemin ikinci denkleminin köşegen üzerindeki elemanı, yani x_2 nin katsayısı sıfırdan farklı ise ikinci denklem pivot denklem olarak seçilir.

$$M_{k2} = \frac{a_{k2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad k = 3, 4, \dots, n$$

sayıları tanımlanır pivot denklem bu sayılarla çarpılıp sırasıyla k -ıncı denklemden çıkartılır ve k -ıncı denklemin yerine yazılır. Böylece 1 ve 2 inci denklem hariç geriye kalan denklemlerden x_2 bilinmeyeni yok edilmiş olur.

$\vdots$

Bu şekilde devam edilerek $(n-1)$ adım sonunda denklem sistemi bir üst üçgen sisteme dönüştürülmüş olur ve bilinmeyenler en son denklemden başlayarak yukarı doğru yerine yazmak suretiyle hesaplanır [32].

4.UYGULAMALAR

4.1.Doğrusal Olmayan KdV Denkleminin Sonlu Fark Metodu, Adomian Ayrıştırma Metodu ve Homotopi Pertürbasyon Metodunun Uygulanması

4.1.1. Sonlu Fark Metodu ile Çözüm

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (4.1)$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{6}(x-1) \quad (4.2)$$

$$u(0, t) = \frac{1}{6(1-t)}, u(1, t) = 0, t \geq 0 \quad (4.3)$$

şeklinde başlangıç ve sınır şartları verilmiş, ayrıca analitik çözümü de,

$$u(x, t) = \frac{1}{6} \left(\frac{x-1}{1-t} \right) \quad (4.4)$$

şeklinde olan, nonlinear KdV denklemini Sonlu Fark Metotlarından biri olan Crank Nicolson Metodu ile çözelim[31]. Şimdi (4.1) denkleminde u_t türevi yerine

$$u_t \cong \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} \quad (4.5)$$

ileri fark yaklaşımı, u_{xxx} türevi yerine

$$u_{xxx} \cong \frac{1}{2} \left[\frac{-5u_i^{j+1} + 18u_{i+1}^{j+1} - 24u_{i+2}^{j+1} + 14u_{i+3}^{j+1} - 3u_{i+4}^{j+1}}{2h^3} + \frac{-5u_i^j + 18u_{i+1}^j - 24u_{i+2}^j + 14u_{i+3}^j - 3u_{i+4}^j}{2h^3} \right] \quad (4.6)$$

Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı, uu_x nonlinear terimi yerine

$$uu_x \cong u_i^j \left(\frac{1}{2} \left[\frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{2h} + \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} \right] \right) \quad (4.7)$$

sonlu fark yaklaşımı yazılıp, $r = \frac{k}{h^3}$ alınırsa, nonlinear KdV denklemi için,

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{6}{4} r u_i^j h^2 \right) u_{i-1}^{j+1} + \left(1 - \frac{5}{4} r \right) u_i^{j+1} + \left(\frac{18}{4} r - \frac{6}{4} r u_i^j h^2 \right) u_{i+1}^{j+1} \\
& - \left(\frac{24}{4} r \right) u_{i+2}^{j+1} + \left(\frac{14}{4} r \right) u_{i+3}^{j+1} - \left(\frac{3}{4} r \right) u_{i+4}^{j+1} \\
& = \left(-\frac{6}{4} r u_i^j h^2 \right) u_{i-1}^j + \left(1 + \frac{5}{4} r \right) u_i^j + \left(-\frac{18}{4} r + \frac{6}{4} r u_i^j h^2 \right) u_{i+1}^j \\
& + \left(\frac{24}{4} r \right) u_{i+2}^j - \left(\frac{14}{4} r \right) u_{i+3}^j + \left(\frac{3}{4} r \right) u_{i+4}^j
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı elde edilir [29].

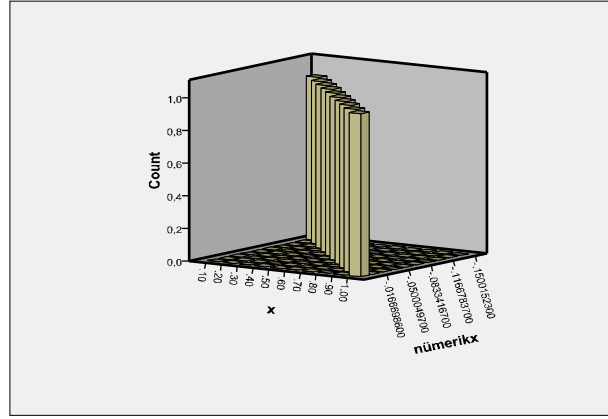
4.1.1.1 Sayısal Sonuçlar

(4.1) denkleminin Sonlu Fark Yaklaşımı ile elde edilen sayısal çözümü Tablo 4.1 de, nümerik çözüm ve tam çözüm için grafikler Şekil 4.1-Şekil 4.4 de verildi.

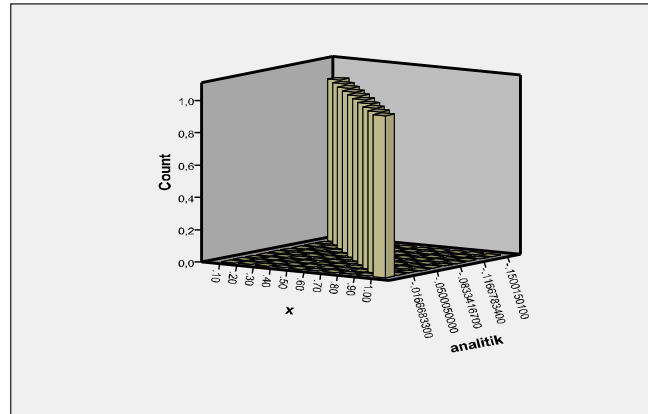
Tablo 4.1 de (4.1) denklemini için $t = 0.0001$, $k = 0.0001$ alınarak mesh uzunluğu h nın $h = 0.1$ deki değeri için SFM ile elde edilen sayısal çözüm ile tam çözüm karşılaştırıldı ve aradaki hata verildi.

Tablo 4.1. $h = 0.1$, $k = 0.0001$ için KdV denkleminin SFM ile yaklaşık çözümünün analitik çözüm ile karşılaştırılması

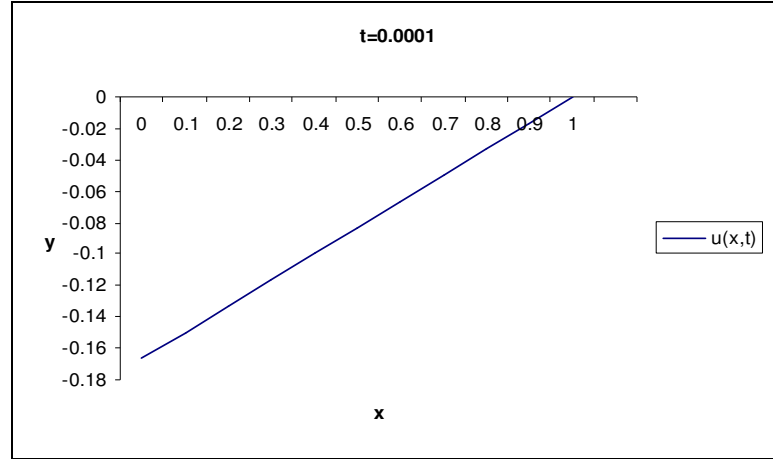
$t = 0.0001$			
x	Sayısal Çözüm (SFM)	Analitik Çözüm	Hata
0	-0.1666833	-0.1666833	0
0.1	-0.15001523	-0.15001501	2.3E-07
0.2	-0.13334625	-0.13334667	4.3E-07
0.3	-0.11667837	-0.11667834	3.00E-08
0.4	-0.10001	-0.10001	1.00E-08
0.5	-0.08334167	-0.08334167	0
0.6	-0.06667333	-0.06667334	1.00E-08
0.7	-0.05000497	-0.050005	4.00E-08
0.8	-0.03333674	-0.03333667	7.00E-08
0.9	-0.01666986	-0.01666833	1.53E-06
1	0	0	0



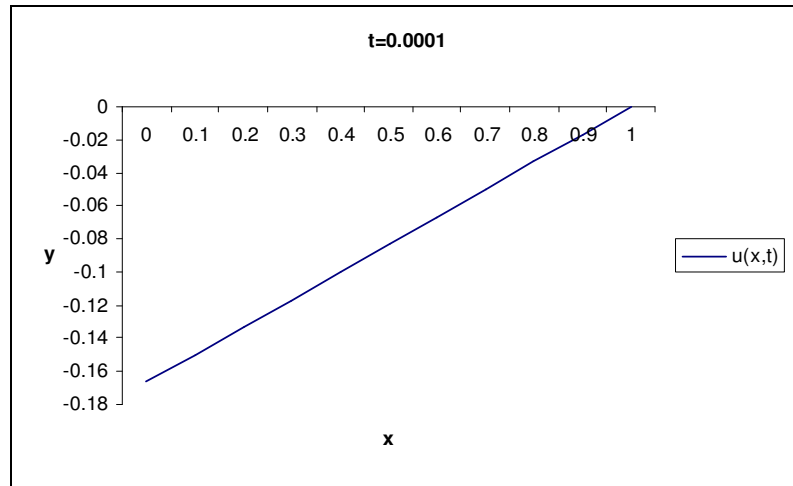
Şekil 4.1. $h = 0.1$, $k = 0.0001$ için KdV denkleminin SFM ile yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü



Şekil 4.2. KdV denkleminin analitik çözümünün üç boyutlu görünümü



Şekil 4.3. $h = 0.1$, $k = 0.0001$ için KdV denkleminin SFM ile yaklaşık çözümünün iki boyutlu görünümü



Şekil 4.4. KdV denkleminin analitik çözümünün iki boyutlu görünümü

4.1.2. Adomian Ayrışım Metodu İle Çözüm

Şimdi, (4.2) başlangıç koşulu ile verilen (4.1) KdV denklemini Adomian ayrışım metodu ile çözelim. Bu denklem operatör formunda,

$$L_t u = 6uu_x - u_{xxx} \quad (4.9)$$

şeklinde yazılır. Burada $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$ olarak ifade edilmektedir. L_t operatörünün tersi ise L_t^{-1} integral operatörü olup $L_t^{-1} = \int_0^t (\cdot) dt$ şeklinde gösterilir. Şu durumda (4.9) denkleminin her

iki tarafına soldan L_t^{-1} uygulanırsa,

$$L_t^{-1} (L_t u) = L_t^{-1} [6uu_x - u_{xxx}] \quad (4.10)$$

elde edilir. Buradan,

$$u(x, t) = u(x, 0) + L_t^{-1} [6uu_x] - L_t^{-1} [u_{xxx}] \quad (4.11)$$

olur. Burada lineer olmayan terim $6uu_x = 6 \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ şeklinde tanımlanarak A_n Adomian polinomunun ilk üç terimi,

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0(u_{0_x}), \\ A_1 &= u_{0_x}(u_1) + u_0(u_{1_x}), \\ A_2 &= u_{0_x}(u_2) + u_{1_x}(u_1) + u_{2_x}(u_0), \\ A_3 &= u_{0_x}(u_3) + u_{1_x}(u_2) + u_{2_x}(u_1) + u_{3_x}(u_0), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.12)$$

olarak alınabilir. (4.11) denklemi için,

$$\begin{cases} u(x, 0) = \frac{x-1}{6}, \\ u_{k+1}(x, t) = -L_t^{-1} [(u_k)_{xxx} - 6A_k], \quad k \geq 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

şeklinde rekürans bağıntısı yazılabilir. Elde edilen bu bağıntıdan,

$$\begin{aligned}
u_0(x,t) &= \frac{x-1}{6}, \\
u_1(x,t) &= L_t^{-1} \left[6A_0 - u_{0,xxx} \right] = \frac{1}{6}(x-1)t, \\
u_2(x,t) &= L_t^{-1} \left[6A_1 - u_{1,xxx} \right] = \frac{1}{6}(x-1)t^2, \\
u_3(x,t) &= L_t^{-1} \left[6A_2 - u_{2,xxx} \right] = \frac{1}{6}(x-1)t^3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklinde ayrışım serisinin ilk dört terimi bulunur. Bulunan u_0, u_1, u_2, u_3 terimleri (3.28) eşitliğinde yerine yazılarak (4.1) KdV denkleminin yaklaşık çözümü,

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots \\
&= \frac{x-1}{6} (1 + t + t^2 + t^3 + \dots)
\end{aligned}$$

olarak elde edilebilir. Böylece (4.1) denkleminin analitik çözümünün kapalı formu,

$$u(x,t) = \frac{1}{6} \left(\frac{x-1}{1-t} \right)$$

olur.

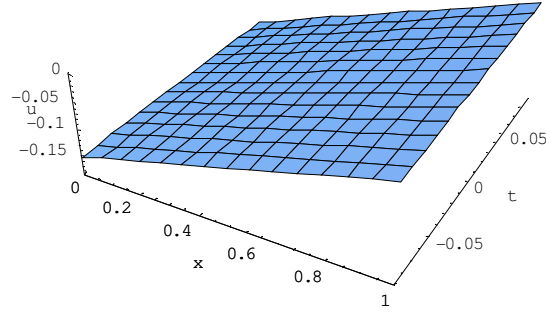
4.1.2.1 Sayısal Sonuçlar

(4.1) denkleminin Adomian Ayrışım Yöntemi ile elde edilen sayısal çözümü Tablo 4.2 de, sayısal çözüm ve analitik çözüm için grafikler ise Şekil 4.5 -Şekil 4.8 de verildi.

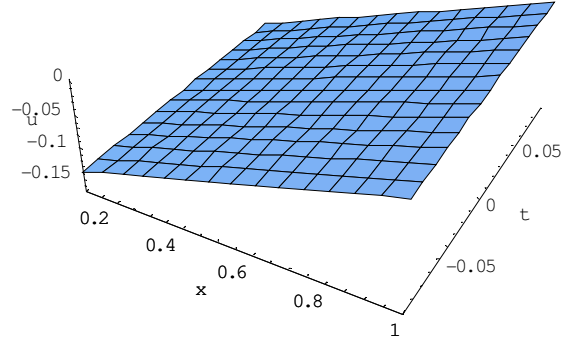
Tablo 4.2 de (4.1) denklemi için $t = 0.0001$, alınarak ADM ile elde edilen sayısal çözüm ile tam çözüm karşılaştırıldı ve aradaki hata verildi.

Tablo 4.2. KdV denkleminin ADM ile yaklaşık çözümünün analitik çözüm ile karşılaştırılması

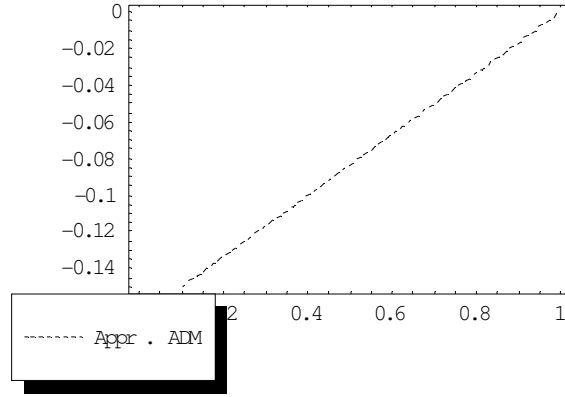
$t=0.0001$			
x	Sayısal Çözüm (ADM)	Analitik Çözüm	Hata
0	-0.1666833	-0.1666833	0
0.1	-0.15015	-0.15001501	1.50158×10^{-13}
0.2	-0.133467	-0.13334667	1.33449×10^{-13}
0.3	-0.116783	-0.11667834	1.16809×10^{-13}
0.4	-0.1001	-0.10001	1.00114×10^{-13}
0.5	-0.0834167	-0.08334167	8.34194×10^{-14}
0.6	-0.0667334	-0.06667334	6.67244×10^{-14}
0.7	-0.0500501	-0.050005	5.00572×10^{-14}
0.8	-0.0333667	-0.03333667	3.33622×10^{-14}
0.9	-0.0166834	-0.01666833	1.66811×10^{-14}
1	0	0	0



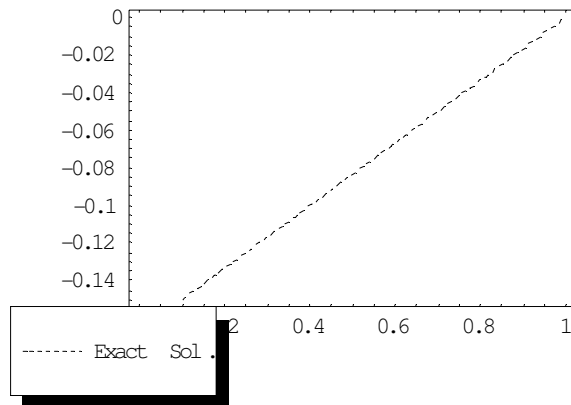
Şekil 4.5. KdV denkleminin ADM ile yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü



Şekil 4.6. KdV denkleminin analitik çözümünün üç boyutlu görünümü



Şekil 4.7. KdV denkleminin ADM ile yaklaşık çözümünün iki boyutlu görünümü



Şekil 4.8. KdV denkleminin analitik çözümünün iki boyutlu görünümü

4.1.3. Homotopi Pertürbasyon Metodu İle Çözüm

Şimdi de, (4.2) başlangıç koşulu ile verilen lineer olmayan (4.1) KdV denklemini son olarak Homotopi Pertürbasyon Metodu ile çözelim. Denklemin yaklaşık çözümünü elde etmek için,

$$(1-p)[\dot{Y}-\dot{u}_0]+p[\dot{Y}-6YY'+Y''']=0 \quad (4.14)$$

$$\dot{Y}-\dot{u}_0+p\dot{u}_0-6pYY'+pY'''=0$$

şeklinde bir homotopi kurulabilir. Burada, $Y''' = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, $\dot{Y} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $Y' = \frac{\partial u}{\partial x}$ ve $p \in [0,1]$ dir.

$u(x,0) = \frac{x-1}{6}$ başlangıç şartı ile verilen (4.1) denkleminin çözümü,

$$Y = Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p^n Y_n(x,t) \quad (4.15)$$

$$\dot{Y} = \dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 + \dots \quad (4.16)$$

$$Y''' = Y_0''' + pY_1''' + p^2Y_2''' + p^3Y_3''' + \dots \quad (4.17)$$

şeklinde ele alınabilir. (4.15) - (4.17) denklemlerinin (4.14) de yerine yazılmasıyla,

$$\left(\dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 \right) - \dot{u}_0 + p\dot{u}_0 - 6p(Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3)(Y_0' + pY_1' + p^2Y_2' + p^3Y_3') + p(Y_0''' + pY_1''' + p^2Y_2''' + p^3Y_3''') = 0,$$

$$\dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 - \dot{u}_0 + p\dot{u}_0 + (-6pY_0 - 6p^2Y_1 - 6p^3Y_2)(Y_0' + pY_1' + p^2Y_2' + p^3Y_3') + pY_0''' + p^2Y_1''' + p^3Y_2''' = 0,$$

$$\dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 - \dot{u}_0 + p\dot{u}_0 - 6pY_0Y_0' - 6p^2Y_0Y_1' - 6Y_0p^3Y_2' - 6p^2Y_1Y_0' - 6p^3Y_1Y_1' - 6p^3Y_2Y_0' + pY_0''' + p^2Y_1''' + p^3Y_2''' = 0$$

elde edilir. Bu denklem p 'nin aynı kuvvetli terimlerine göre yeniden düzenlenirse,

$$p^0 : \dot{Y}_0 - \dot{u}_0 = 0, \quad (4.18)$$

$$p^1 : \dot{Y}_1 + \dot{u}_0 - 6Y_0Y_0' + Y_0''' = 0, \quad (4.19)$$

$$p^2 : \dot{Y}_2 - 6Y_0Y_1' - 6Y_1Y_0' + Y_1''' = 0, \quad (4.20)$$

$$p^3 : \dot{Y}_3 - 6Y_0Y_2' - 6Y_1Y_1' - 6Y_2Y_0' + Y_2''' = 0, \quad (4.21)$$

⋮

bulunur. (4.18) - (4.21) denklemlerinin çözümü ile,

$$\begin{aligned}
 p^0 : \dot{Y}_0 - \dot{u}_0 &= 0 \Rightarrow \dot{Y}_0 = \dot{u}_0 \\
 &\Rightarrow Y_0 = u_0(x, 0) = \frac{x-1}{6} \\
 &\Rightarrow Y_0 = \frac{x-1}{6},
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
 p^1 : \dot{Y}_1 + \dot{u}_0 - 6Y_0Y_0' + Y_0''' &= 0, \Rightarrow \dot{Y}_1 = -\dot{u}_0 + 6Y_0Y_0' - Y_0''', \quad \text{ve } \dot{u}_0 = 0 \\
 &\Rightarrow Y_1 = \int_0^t [6Y_0Y_0' - Y_0'''] dt = \frac{1}{6}t(-1+x),
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
 p^2 : \dot{Y}_2 - 6Y_0Y_1' - 6Y_1Y_0' + Y_1''' &= 0 \Rightarrow \dot{Y}_2 = 6Y_0Y_1' + 6Y_1Y_0' - Y_1''' \\
 &\Rightarrow Y_2 = \int_0^t [6Y_0Y_1' + 6Y_1Y_0' - Y_1'''] dt \\
 &\Rightarrow Y_2 = \frac{1}{6}t^2(-1+x),
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
 p^3 : \dot{Y}_3 - 6Y_0Y_2' - 6Y_1Y_1' - 6Y_2Y_0' + Y_2''' &= 0 \Rightarrow \dot{Y}_3 = 6Y_0Y_2' + 6Y_1Y_1' + 6Y_2Y_0' - Y_2''' \\
 &\Rightarrow Y_3 = \int_0^t [6Y_0Y_2' + 6Y_1Y_1' + 6Y_2Y_0' - Y_2'''] dt \\
 &\Rightarrow Y_3 = \frac{1}{6}t^3(-1+x),
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

⋮

şeklinde serinin ilk üç terimi elde edilmiş olur. . (4.22) - (4.25) denklemleri $p \rightarrow 1$ iken (4.15) denkleminde yerine yazılırsa (4.1) nonlinear KdV denkleminin yaklaşık çözümü,

$$u(x, t) = Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + \dots,$$

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \lim_{p \rightarrow 1} (Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + \dots) \\
 &= Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 \\
 &= \frac{x-1}{6} + \frac{1}{6}t(-1+x) + \frac{1}{6}t^2(-1+x) + \frac{1}{6}t^3(-1+x)
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece (4.1) denkleminin analitik çözümünün kapalı formu

$$u(x, t) = \frac{1}{6} \left(\frac{x-1}{1-t} \right)$$

olur.

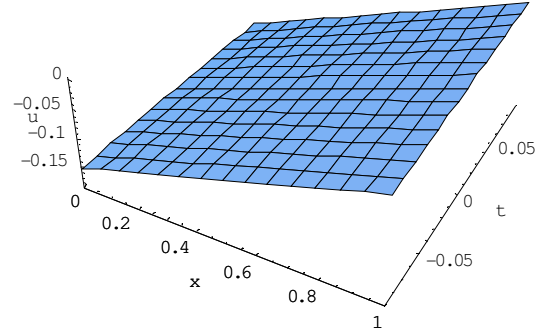
4.1.3.1. Sayısal Sonuçlar

(4.1) denkleminin Homotopi Pertürbasyon Metodu ile elde edilen sayısal çözümü Tablo 4.3 de, sayısal çözüm ve analitik çözüm için grafikler ise Şekil 4.9 -Şekil 4.12 da verildi.

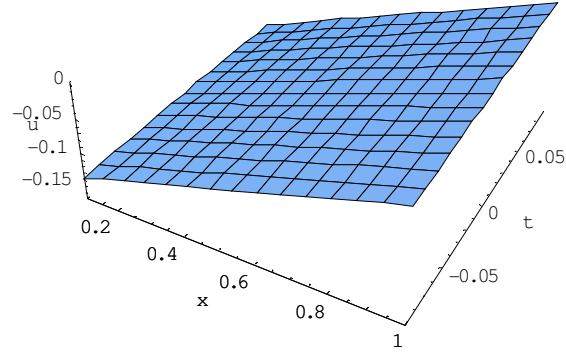
Tablo 4.3 de (4.1) denklemi için $t = 0.0001$, alınarak HPM ile elde edilen sayısal çözüm ile tam çözüm karşılaştırıldı ve aradaki hata verildi.

Tablo 4.3. KdV denkleminin HPM ile yaklaşık çözümünün analitik çözüm ile karşılaştırılması

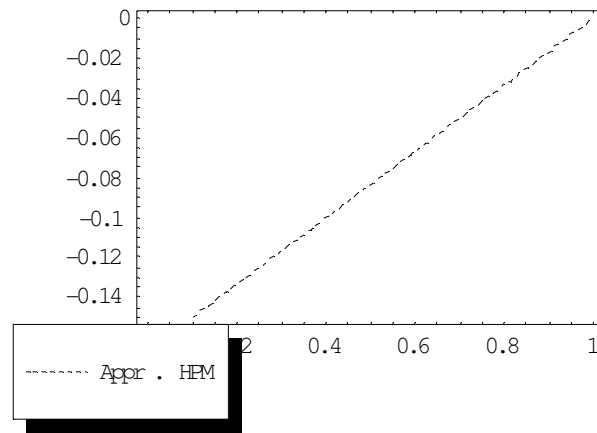
$t = 0.0001$			
x	Sayısal Çözüm (HPM)	Analitik Çözüm	Hata
0	-0.1666833	-0.1666833	0
0.1	-0.15015	-0.15001501	1.50158×10^{-13}
0.2	-0.133467	-0.13334667	1.33449×10^{-13}
0.3	-0.116783	-0.11667834	1.16809×10^{-13}
0.4	-0.1001	-0.10001	1.00114×10^{-13}
0.5	-0.0834167	-0.08334167	8.34194×10^{-14}
0.6	-0.0667334	-0.06667334	6.67244×10^{-14}
0.7	-0.0500501	-0.050005	5.00572×10^{-14}
0.8	-0.0333667	-0.03333667	3.33622×10^{-14}
0.9	-0.0166834	-0.01666833	1.66811×10^{-14}
1	0	0	0



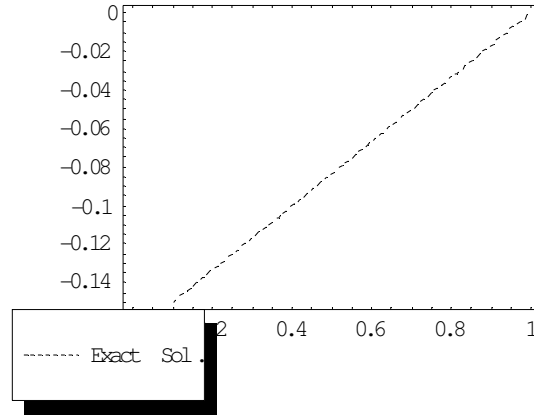
Şekil 4.9. KdV denkleminin HPM ile yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü



Şekil 4.10. KdV denkleminin analitik çözümünün üç boyutlu görünümü



Şekil 4.11. KdV denkleminin HPM ile yaklaşık çözümünün iki boyutlu görünümü



Şekil 4.12. KdV denkleminin analitik çözümünün iki boyutlu görünümü

4.2. Doğrusal Olmayan Burgers Denklemine Sonlu Fark Metodu, Adomian Ayrışım Metodu ve Homotopi Pertürbasyon Metodunun Uygulanması

4.2.1. Sonlu Fark Metodu İle Çözüm

$$u_t + uu_x = u_{xx} \quad (4.26)$$

$$u(x, 0) = x \quad (4.27)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = \frac{1}{1+t}, \quad t \geq 0 \quad (4.28)$$

şeklinde başlangıç ve sınır şartları verilmiş, ayrıca analitik çözümü de,

$$u(x, t) = \frac{x}{1+t} \quad (4.29)$$

şeklinde olan, nonlinear Burgers denklemini Sonlu fark metodu ile çözelim [31]. Şimdi (4.26) denkleminde u_t türevi yerine

$$u_t \cong \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} \quad (4.30)$$

ileri fark yaklaşımı, u_{xx} türevi yerine,

$$u_{xx} \cong \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} \quad (4.31)$$

merkezi fark yaklaşımını, ayrıca uu_x nonlinear terimi yerine

$$uu_x \cong u_i^j \left(\frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} \right) \quad (4.32)$$

sonlu fark yaklaşımı yazılıp , $r = \frac{k}{h^2}$ alınır, nonlinear Burgers denklemi için,

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{k}{h^2} (u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j) - \frac{k}{2h} u_i^j (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) \quad (4.33)$$

şeklinde açık sonlu fark yaklaşımı elde edilir [30].

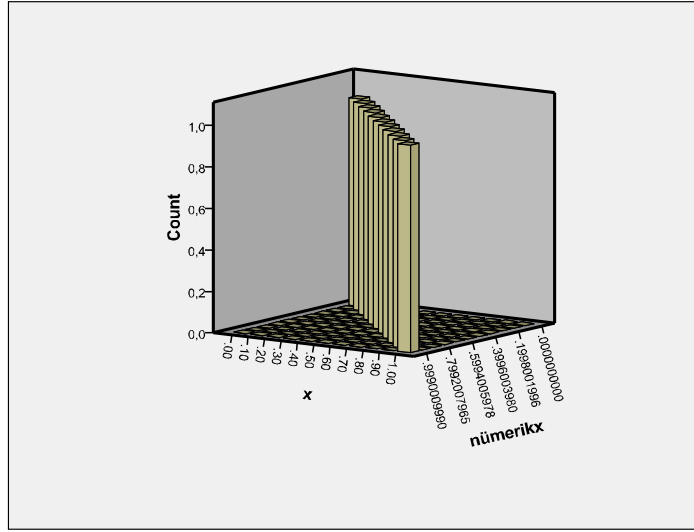
4.2.1.1 Sayısal Sonuçlar

(4.26) denkleminin Sonlu Fark Metodu ile elde edilen sayısal çözümü Tablo 4.13 de, sayısal çözüm ve analitik çözüm için grafikler ise Şekil 4.13-Şekil 4.16 da verildi.

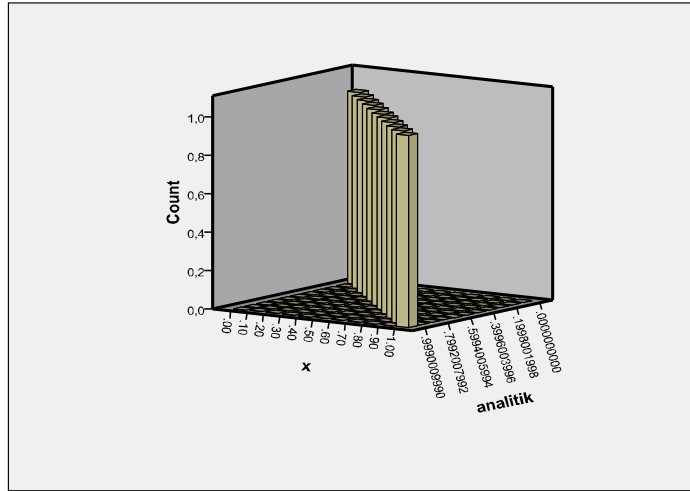
Tablo 4.4 de (4.26) denklemi için, $t = 0.001$, $k = 0.000001$ alınarak mesh uzunluğu h nın $h = 0.01$ deki değeri için SFM ile elde edilen yaklaşık ve tam çözüm karşılaştırıldı ve aradaki hata verildi.

Tablo 4.4. $h = 0.01$, $k = 0.000001$ için Burgers denkleminin SFM ile yaklaşık çözümünün, analitik çözümü ile karşılaştırılması

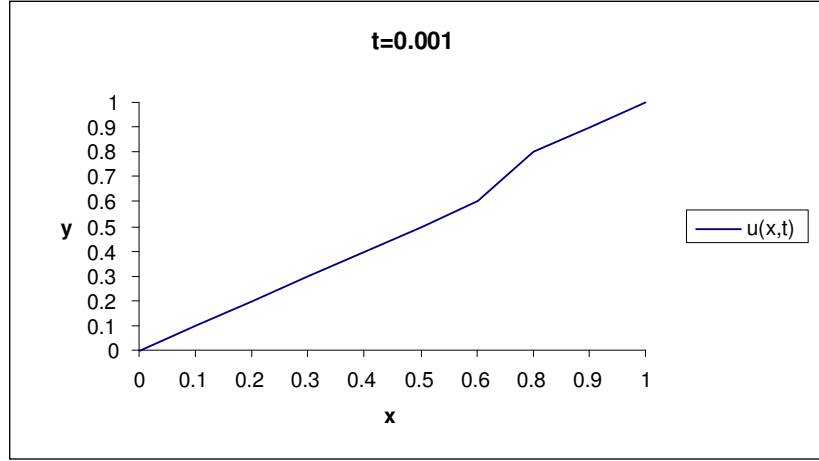
$t = 0.001$			
x	Sayısal Çözüm (SFM)	Analitik Çözüm	Hata
0	0	0	0
0.1	0.0999001	0.0999001	2.00E-10
0.2	0.1998002	0.1998002	2.00E-10
0.3	0.299700301	0.2997003	1.1E-09
0.4	0.399600398	0.3996004	1.6E-09
0.5	0.499500496	0.4995005	3.9E-09
0.6	0.599400598	0.599400599	1.6E-09
0.7	0.6993007005	0.6993006993	1.2E-09
0.8	0.799200797	0.799200799	2.7E-09
0.9	0.899100899	0.899100899	0
1	0.999000999	0.999000999	0



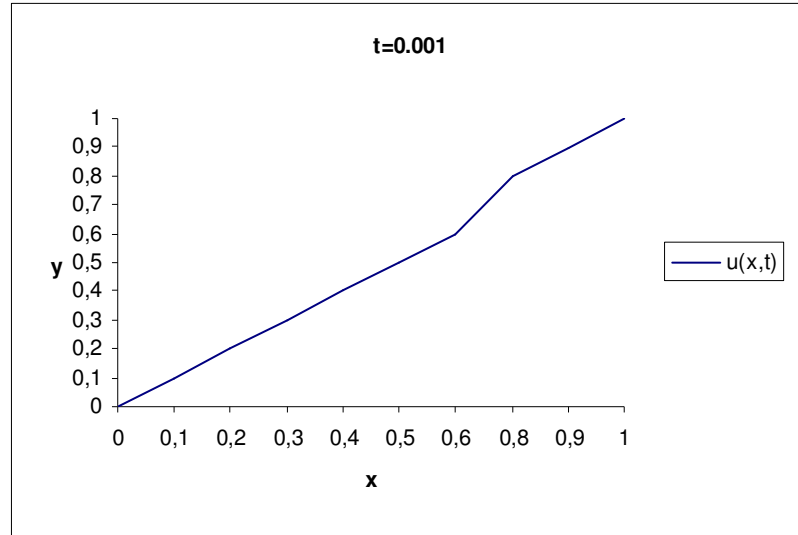
Şekil 4.13. $h = 0.01$, $k = 0.000001$ için Burgers denkleminin SFM ile yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü



Şekil 4.14. Burgers denkleminin analitik çözümünün üç boyutlu görünümü



Şekil 4.15. $h = 0.01$, $k = 0.000001$ için Burgers denkleminin SFM ile yaklaşık çözümünün iki boyutlu görünümü



Şekil 4.16. Burgers denkleminin analitik çözümünün iki boyutlu görünümü

4.2.3. Adomian Ayrışım Metodu İle Çözüm

Şimdi, (4.27) başlangıç koşulu ile verilen (4.26) nonlinear Burgers denklemini Adomian ayrışım metodu ile çözelim. Bu denklem operatör formunda,

$$L_t u = -uu_x + u_{xx} \quad (4.34)$$

şeklinde yazılır. Burada $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$ olarak ifade edilmektedir. L_t operatörünün tersi ise L_t^{-1} integral operatörü olup $L_t^{-1} = \int_0^t (.) dt$ şeklinde gösterilir. Bu durumda (4.34) denkleminin

her iki tarafına soldan L_t^{-1} uygulanırsa,

$$L_t^{-1} (L_t u) = L_t^{-1} [u_{xx} - uu_x] \quad (4.35)$$

elde edilir. Buradan,

$$u(x, t) = u(x, 0) + L_t^{-1} [u_{xx} - uu_x] \quad (4.36)$$

olur. Burada lineer olmayan terim $uu_x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ şeklinde tanımlanarak A_n Adomian polinomunun ilk üç terimi,

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0(u_{0_x}), \\ A_1 &= u_{0_x}(u_1) + u_0(u_{1_x}), \\ A_2 &= u_{0_x}(u_2) + u_{1_x}(u_1) + u_{2_x}(u_0), \\ A_3 &= u_{0_x}(u_3) + u_{1_x}(u_2) + u_{2_x}(u_1) + u_{3_x}(u_0), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.37)$$

olarak alınabilir. (4.36) denklemi için,

$$\begin{cases} u(x, 0) = x, \\ u_{k+1}(x, t) = L_t^{-1} [(u_k)_{xx} - (A_k)], \quad k \geq 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

şeklinde rekürans bağıntısı yazılabilir. Elde edilen bu bağıntıdan,

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= x, \\ u_1(x, t) &= L_t^{-1} [u_{0_{xx}} - A_0] = -xt, \\ u_2(x, t) &= L_t^{-1} [u_{1_{xx}} - A_1] = xt^2, \\ u_3(x, t) &= L_t^{-1} [u_{2_{xx}} - A_2] = -xt^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

şeklinde ayrışım serisinin ilk dört terimi bulunur. Bulunan u_0, u_1, u_2, u_3 terimleri (3.28) eşitliğinde yerine yazılarak (4.26) Burgers denkleminin yaklaşık çözümü,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

$$= x(1 - t + t^2 - t^3 + \dots)$$

olarak elde edilir. Böylece (4.26) denkleminin analitik çözümünün kapalı formu ,

$$u(x, t) = \frac{x}{1+t}$$

olur.

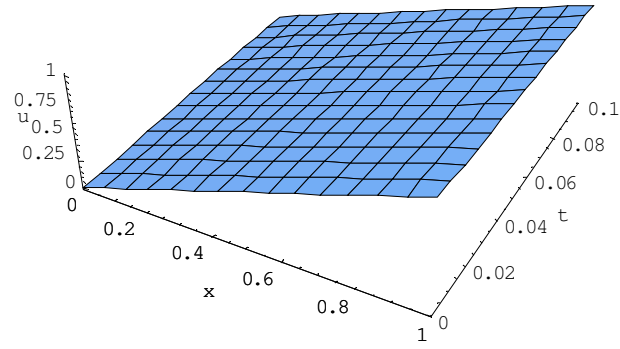
4.2.2.1. Sayısal Sonuçlar

(4.26) denkleminin Adomian Ayrışım Metodu ile elde edilen sayısal çözümü Tablo 4.5 de, sayısal çözüm ve analitik çözüm için grafikler ise Şekil 4.17 -Şekil 4.20 de verildi.

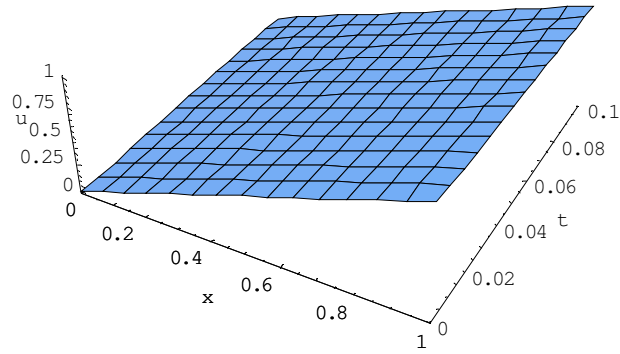
Tablo 4.5 de (4.26) denklemi için $t = 0.001$, alınarak ADM ile elde edilen sayısal çözüm ile tam çözüm karşılaştırıldı ve aradaki hata verildi.

Tablo 4.5. Burgers denkleminin ADM ile yaklaşık çözümünün, analitik çözümü ile karşılaştırılması

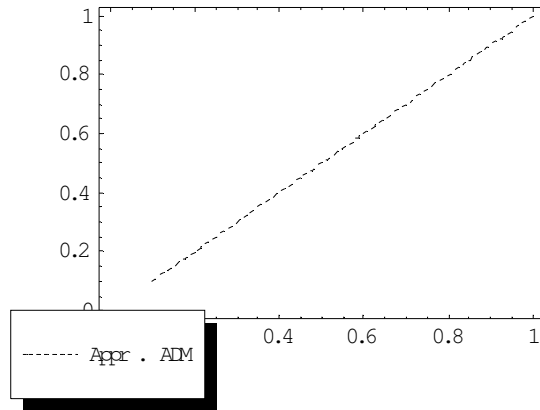
$t= 0.001$			
x	Sayısal Çözüm (ADM)	Analitik Çözüm	Hata
0	0	0	0
0.1	0.0999001	0.0999001	9.99062×10^{-14}
0.2	0.1998	0.1998002	1.99812×10^{-13}
0.3	0.2997	0.2997003	2.9976×10^{-13}
0.4	0.3996	0.3996004	3.99625×10^{-13}
0.5	0.4995	0.4995005	4.99545×10^{-13}
0.6	0.599401	0.599400599	5.9952×10^{-13}
0.7	0.699301	0.6993006993	6.99441×10^{-13}
0.8	0.799201	0.799200799	7.9925×10^{-13}
0.9	0.899101	0.899100899	8.99281×10^{-13}
1	0.999001	0.999000999	9.9909×10^{-13}



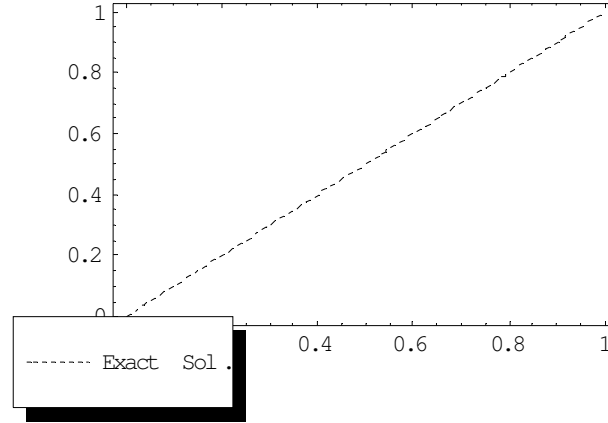
Şekil 4.17. Burgers denkleminin ADM ile yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü



Şekil 4.18. Burgers denkleminin analitik çözümünün üç boyutlu görünümü



Şekil 4.19. Burgers denkleminin ADM ile yaklaşık çözümünün iki boyutlu görünümü



Şekil 4.20. Burgers denkleminin analitik çözümünün iki boyutlu görünümü

4.2.2. Homotopi Pertürbasyon Metodu İle Çözümü

Şimdi de, (4.27) başlangıç koşulu ile verilen (4.26) non-lineer Burgers denklemini Homotopi Pertürbasyon metodu ile çözelim. Denklemin yaklaşık çözümünü elde etmek için,

$$(1-p)[\dot{Y}-\dot{u}_0]+p[\dot{Y}+YY'-Y'']=0 \quad (4.39)$$

$$\dot{Y}-\dot{u}_0+p\dot{u}_0+pYY'-pY''=0$$

şeklinde bir homotopi kurulabilir. Burada, $Y'' = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dot{Y} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $Y' = \frac{\partial u}{\partial x}$ ve $p \in [0,1]$ dir.

$u(x,0) = x$ başlangıç şartı ile verilen (4.26) denkleminin çözümü,

$$Y = Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p^n Y_n(x,t) \quad (4.40)$$

$$\dot{Y} = \dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 + \dots \quad (4.41)$$

$$Y' = Y'_0 + pY'_1 + p^2Y'_2 + p^3Y'_3 + \dots \quad (4.42)$$

$$Y'' = Y''_0 + pY''_1 + p^2Y''_2 + p^3Y''_3 + \dots \quad (4.43)$$

şeklinde ele alınabilir. (4.40) - (4.43) eşitliklerinin (4.39) da yerine yazılmasıyla,

$$\left(\dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 \right) - \dot{u}_0 + p\dot{u}_0 + p(Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3)(Y'_0 + pY'_1 + p^2Y'_2 + p^3Y'_3) - p(Y''_0 + pY''_1 + p^2Y''_2 + p^3Y''_3) = 0,$$

$$\dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 - \dot{u}_0 + p\dot{u}_0 + pY_0Y_0' + p^2Y_0Y_1' + p^3Y_0Y_2' + p^2Y_1Y_0' + p^3Y_1Y_1' + p^3Y_2Y_0' - pY_0'' - p^2Y_1'' - p^3Y_2'' = 0,$$

$$\dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 - \dot{u}_0 + p\dot{u}_0 + pY_0Y_0' + p^2Y_0Y_1' + p^3Y_0Y_2' + p^2Y_1Y_0' + p^3Y_1Y_1' + p^3Y_2Y_0' - pY_0'' - p^2Y_1'' - p^3Y_2'' = 0$$

elde edilir. Bu denklem p 'nin aynı kuvvetli terimlerine göre yeniden düzenlenirse,

$$p^0 : \dot{Y}_0 - \dot{u}_0 = 0, \quad (4.44)$$

$$p^1 : \dot{Y}_1 + \dot{u}_0 + Y_0Y_0' - Y_0'' = 0, \quad (4.45)$$

$$p^2 : \dot{Y}_2 + Y_0Y_1' + Y_1Y_0' - Y_1'' = 0, \quad (4.46)$$

$$p^3 : \dot{Y}_3 + Y_0Y_2' + Y_1Y_1' + Y_2Y_0' - Y_2'' = 0, \quad (4.47)$$

$\vdots$

bulunur. (4.44) - (4.47) denklemlerinin çözümü ile,

$$\begin{aligned} p^0 : \dot{Y}_0 - \dot{u}_0 = 0 &\Rightarrow \dot{Y}_0 = \dot{u}_0 \\ &\Rightarrow Y_0 = u_0(x, 0) = x \\ &\Rightarrow Y_0 = x, \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} p^1 : \dot{Y}_1 + \dot{u}_0 + Y_0Y_0' - Y_0'' = 0 &\Rightarrow \dot{Y}_1 = -\dot{u}_0 - Y_0Y_0' + Y_0'', \text{ ve } \dot{u}_0 = 0 \\ &\Rightarrow Y_1 = \int_0^t [-Y_0Y_0' + Y_0''] dt \\ &\Rightarrow Y_1 = -xt, \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} p^2 : \dot{Y}_2 + Y_0Y_1' + Y_1Y_0' - Y_1'' = 0 &\Rightarrow \dot{Y}_2 = Y_1'' - Y_0Y_1' - Y_1Y_0' \\ &\Rightarrow Y_2 = \int_0^t [Y_1'' - Y_0Y_1' - Y_1Y_0'] dt \\ &\Rightarrow Y_2 = xt^2, \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} p^3 : \dot{Y}_3 + Y_0Y_2' + Y_1Y_1' + Y_2Y_0' - Y_2'' = 0 &\Rightarrow \dot{Y}_3 = Y_2'' - Y_0Y_2' - Y_1Y_1' - Y_2Y_0' \\ &\Rightarrow Y_3 = \int_0^t [Y_2'' - Y_0Y_2' - Y_1Y_1' - Y_2Y_0'] dt \\ &\Rightarrow Y_3 = -xt^3, \end{aligned} \quad (4.51)$$

$\vdots$

şeklinde serinin ilk üç terimi elde edilmiş olur. (4.48) - (4.51) denklemleri $p \rightarrow 1$ iken

(4.40) denkleminde yerine yazılırsa (4.26) non-lineer Burgers denkleminin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{p \rightarrow 1} (Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + \dots) \\ &= Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots \\ &= x - xt + xt^2 - xt^3 + \dots \\ &= x(1 - t + t^2 - t^3 + \dots) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece (4.26) denkleminin analitik çözümünün kapalı formu

$$u(x, t) = \frac{x}{1+t}$$

olur.

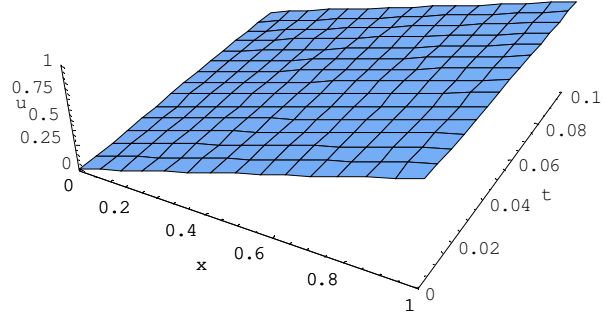
4.2.3.1. Sayısal Sonuçlar

(4.26) denkleminin Homotopi Pertürbasyon Metodu ile elde edilen sayısal çözümü Tablo 4.6 da, sayısal çözüm ve analitik çözüm için grafikler ise Şekil 4.21-Şekil 4.24 de verildi.

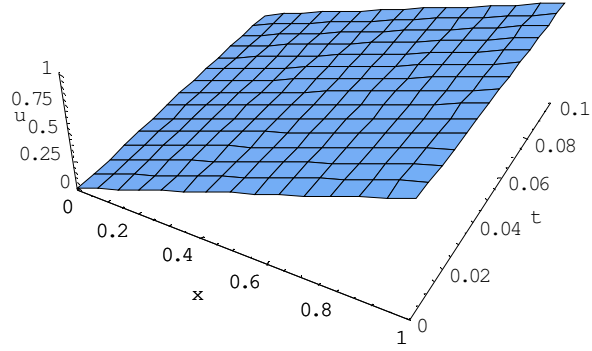
Tablo 4.6 da (4.26) denklemini için $t = 0.001$, alınarak HPM ile elde edilen sayısal çözüm ile tam çözüm karşılaştırıldı ve aradaki hata verildi.

Tablo 4.6. Burgers denkleminin HPM ile yaklaşık çözümünün, analitik çözümü ile karşılaştırılması

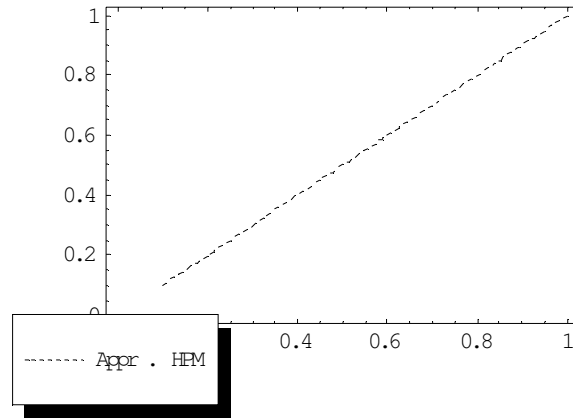
$t = 0.001$			
x	Sayısal Çözüm (HPM)	Analitik Çözüm	Hata
0	0	0	0
0.1	0.0999001	0.0999001	9.99062×10^{-14}
0.2	0.1998	0.1998002	1.99812×10^{-13}
0.3	0.2997	0.2997003	2.9976×10^{-13}
0.4	0.3996	0.3996004	3.99625×10^{-13}
0.5	0.4995	0.4995005	4.99545×10^{-13}
0.6	0.599401	0.599400599	5.9952×10^{-13}
0.7	0.699301	0.6993006993	6.99441×10^{-13}
0.8	0.799201	0.799200799	7.9925×10^{-13}
0.9	0.899101	0.899100899	8.99281×10^{-13}
1	0.999001	0.999000999	9.9909×10^{-13}



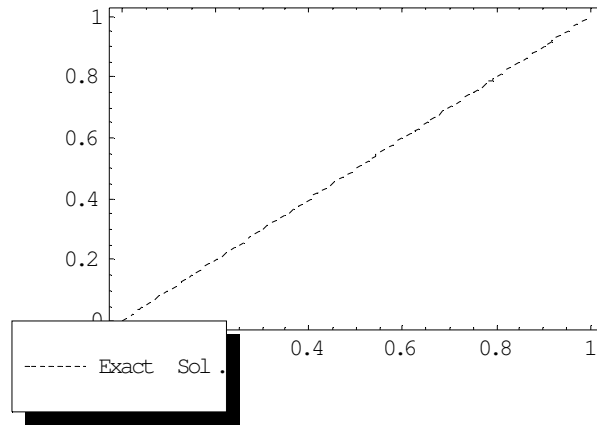
Şekil 4.21. Burgers denkleminin HPM ile yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü



Şekil 4.22. Burgers denkleminin analitik çözümünün üç boyutlu görünümü



Şekil 4.23. Burgers denkleminin HPM ile yaklaşık çözümünün iki boyutlu görünümü



Şekil 4.24. Burgers denkleminin analitik çözümünün iki boyutlu görünümü

5.SONUÇLAR VE TARTIŞMA

5.1. Sonuç : Başlangıç şartlı KdV denkleminin sonlu fark metodu, ayrışım metodu ve homotopi pertürbasyon metodu ile sayısal çözümleri elde edildi. Elde edilen sonuçlara göre homotopi pertürbasyon metodu ile adomian ayrışım metodunda aynı sonuçlar elde edildi. Bazı adımlarda sonlu fark metodu daha iyi sonuçlar vermesine rağmen genel olarak bakıldığında adomian ayrışım metodu ve homotopi pertürbasyon metodu ile sayısal çözümlerde sonlu fark metoduna göre analitik çözüme daha yakın değerler bulundu. Elde edilen hata tablosu Tablo 5.1. de verilmiştir.

Tablo 5.1. KdV denkleminin SFM, ADM ve HPM ile elde edilen sayısal çözümlerinin hata tablosu

$t= 0.0001$			
x	Hata (SFM)	Hata (ADM)	Hata (HPM)
0	0	0	0
0.1	2.3E-07	1.50158×10^{-13}	1.50158×10^{-13}
0.2	4.3E-07	1.33449×10^{-13}	1.33449×10^{-13}
0.3	3.00E-08	1.16809×10^{-13}	1.16809×10^{-13}
0.4	1.00E-08	1.00114×10^{-13}	1.00114×10^{-13}
0.5	0	8.34194×10^{-14}	8.34194×10^{-14}
0.6	1.00E-08	6.67244×10^{-14}	6.67244×10^{-14}
0.7	4.00E-08	5.00572×10^{-14}	5.00572×10^{-14}
0.8	7.00E-08	3.33622×10^{-14}	3.33622×10^{-14}
0.9	1.53E-06	1.66811×10^{-14}	1.66811×10^{-14}
1	0	0	0

5.2. Sonuç : Başlangıç şartlı Burgers denkleminin sonlu fark metodu, ayrışım metodu ve homotopi pertürbasyon metodu ile sayısal çözümleri elde edildi. Elde edilen sonuçlara göre homotopi pertürbasyon metodu ile adomian ayrışım metodunda aynı sonuçlar elde edildi. Bazı adımlarda sonlu fark metodu daha iyi sonuçlar vermesine rağmen genel olarak bakıldığında adomian ayrışım metodu ve homotopi pertürbasyon metodu ile sayısal çözümlerde sonlu fark metoduna göre analitik çözüme daha yakın değerler bulundu. Elde edilen hata tablosu Tablo 5.2. de verilmiştir.

Tablo 5.2. Burgers denkleminin SFM, ADM ve HPM ile elde edilen sayısal çözümlerinin hata tablosu

$t= 0.001$			
x	Hata (SFM)	Hata (ADM)	Hata (HPM)
0	0	0	0
0.1	2.00E-10	9.99062×10^{-14}	9.99062×10^{-14}
0.2	2.00E-10	1.99812×10^{-13}	1.99812×10^{-13}
0.3	1.1E-09	2.9976×10^{-13}	2.9976×10^{-13}
0.4	1.6E-09	3.99625×10^{-13}	3.99625×10^{-13}
0.5	3.9E-09	4.99545×10^{-13}	4.99545×10^{-13}
0.6	1.6E-09	5.9952×10^{-13}	5.9952×10^{-13}
0.7	1.2E-09	6.99441×10^{-13}	6.99441×10^{-13}
0.8	2.7E-09	7.9925×10^{-13}	7.9925×10^{-13}
0.9	0	8.99281×10^{-13}	8.99281×10^{-13}
1	0	9.9909×10^{-13}	9.9909×10^{-13}

KAYNAKLAR

- [1] **J.S.Russell**, 1844, Report on Waves, Rep. 14th Meeting of the British Assoc. for the Advancement of Science , John Murray, Londra, s.311-390+11 levha.
- [2] **G.G.Stokes**, 1847, On the Theory of Oscillatory Waves, Camb. Trans. **8**, 441- 473.
- [3] **J.Boussinesq**, 1872, Theorie des Ondes it des Remous Quise Propagent le long d'un Canal Rectangulaire Horizontal, en Communiquant au Liquide Continu Dans ce Canal des Vitesses Sensiblement Parlilles de la Surface au fond, J.Math.Pures. Appl. Ser **2** , **17**, 55-108.
- [4] **D.J.Korteweg ve G.de Vries**, On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a new type of Long Stationary Wa
- [5] **A.H.A.Ali**, 1895, Finite Element Studies of Korteweg de Vries Equation, Ph.D.Thesis, University College of North Wales,Bangor,UK,1-2, (1989)ves", Philos. Mag. **39**, 422-443.
- [6] **C.S.Gardner, J.M.Greene, M.D.Kruskal ve R.M.Miura**, 1967, Method for solving the Korteweg de Vries Equation, Phys. Rev. Lett. **19**, 1095-1097,
- [7] **N.J.Zabusky ve M.D.Kruskal**, 1965, Interaction of Solitons in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States, Phys. Rev. Lett. **15**, 240- 243.
- [8] **M.A. Helal, M.S. Mehanna**, 2007, A comparative study between two different methods for solving the general Korteweg--de Vries equation (GKdV). Chaos, Solitons and Fractals **33**, 725--739.
- [9] **Bateman, H.**, 1915, Some Recent Researhes on thr Motion of Fluids, Monthly Weather Rec. **43**, 163-170.
- [10] **Burgers, J.M.**, 1948, A Mathematical Model Illustrating The Theory of Turbulence, Adv. in App. Mech. **1**, 171-199.
- [11] **Hopf, E.**, 1950, The Partial Differential Equation $U_t + UU_x = \mu U_{xx}$, Comm. Pure App. Math. **3**, 201-230.
- [12] **Cole, J.D.**, 1951, On a Quasi-Linear Parabol in Aerodynamics, Quarterly of Applied Math. **9**, 225-236.
- [13] **Jain, P.C. and Holla, D.N.**, 1978, Numerical Solutions of Coupled Burgers' Equation, Int. J. Non-linear Mechanics **13**, 213-222.
- [14] **Kutluay, S., Bahadır, A.R. and Özdeş, A.**, 1999, Numerical Solution of One Dimensional Burgers' Equation: Explicit and Exact-Explicit Finite Difference

Methods, J. Comp. App. Maths. **103**, 251-261.

- [15] **Cherrault, Y.**, 1988, Convergence of Adomian's Method, *Kybernetes* **18** (2), 31-38.
- [16] **Hosseini, M., M., Nasabzadeh, H.**, 2006, On the Convergence of Adomian Decomposition Method, *Applied Mathematics and Computation* **182**, 536-543.
- [17] **Mavoungou, T., Cherrault, Y.**, 1992, Convergence of Adomian's Method and Application to Nonlinear Partial Differential Equations, *Kybernetes* **21** (6), 13-25.
- [18] **Sibony, M.**, 1968, Une Methode Iterative Pour les Inequations Variationelles non-lineaires, Rapport INRIA,
- [19] **Adomian, G.**, 1994, Solving Frontier Problems of Physics, The Decomposition Method, Kluwer, Boston.
- [20] **Tatari, M., Dehghan, M., Razzaghi, M.**, 2007, Application of the Adomian Decomposition Method for the Fokker-Planck Equation, *Mathematical and Computer Modelling* **45**, 639-650.
- [21] **Nagarhasta, N., Some, B., Abbaoui, K., Cherrault, Y.**, 2002, New Numerical Study of Adomian Method Applied to a diffusion Model, *Kybernetes* **31** (1), 61-75.
- [22] **He J.H.**, 2006. 'Non-Perturbative Methods for Strongly nonlinear Problems', dissertation, de -verlag im Internet *GmbH*, Berlin.
- [23] **Hasan Bulut, H.Mehmet Baskonus**, 2010. 'A study on the numerical solution of the third-order dispersive equations with homotopy perturbation method', *e-Journal of New World Sciences Academy*, **Vol: 5, (1)**, ISSN:1306–3111.
- [24] **J.H. He**, 2000. 'A coupling method a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems', *Int. J Non-Linear Mech* **35**, 37,43
- [25] **J.H. He**, 2000. *Int. J. Non-Linear Mech.* **35** (1), 37.
- [26] **J.H. He**, 2006. 'Some asymptotic methods for strongly nonlinearly equations', *Internat. J. Modern Math.* **20** (10), 1141–1199.
- [27] **Karagöz M.**, 1998. İstatistik Yöntemler, Malatya
- [28] **Cavlak, E.**, 2008, Genelleştirilmiş Korteweg-de Vries (GKdV) denkleminin yarı analitik metotlarla elde edilen sayısal çözümlerinin karşılaştırılması', *Yüksek lisans Tezi*, Elazığ
- [29] **A. Refik Bahadır**, 2005, Exponential finite-difference method applied to Korteweg-

-de Vries equation for small times. Applied Mathematics and Computation **160**, 675-682.

- [30] **Uçar, Y.**, 2005, 1-Boyutlu Burgerss Tipi Denklemlerin Sonlu Gark Çözümü, *Yüksek Lisans Tezi*, Malatya.
- [31] **Wazwaz, A.M.**, 2002, Partial Differential Equations Methods and Applications, Saint Xavier University, Chicago, Illiois, USA.
- [32] **Karagöz, İ.**, 2001, Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları, Vipaş A.Ş. Uludağ Üniversitesi Güçlendirme Vakfı, Bursa
- [33] **Yaşar , İ., B.**, 1999, Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, Siyasal Kitabevi, Ankara

KdV denkleminin ek dönüşüm uygulanarak Crank Nicolson metodu ile çözümü

```
parameter(NN=2000)
double precision bleft(1:NN-1,1:NN),br(1:NN-1,1:NN-1),
* u0(0:NN),u(0:NN),bv(1:NN-1),ua(0:NN)
double precision r, k,tm(1:NN-1,1:NN),xc(1:NN-1)
double precision tson,e,l2,lsonsuz
open(1,file='KdV_crank nicolson.txt',status='unknown')
write(*,*) 't son zaman degerini giriniz'
read(*,*) tson
write(*,*) 'tson=',tson
write(*,*) 'n degerini giriniz'
read(*,*) n
write(*,*) 'n=',n
write(*,*) 'k degerini giriniz'
read(*,*) k
write(*,*) 'k=',k
write(1,*)
write(1,*) 'n=',n
write(1,*)
write(1,*) 'tf=',tson
write(1,*)
write(1,555)k
write(1,*)
555 format('k=',f10.5)
h=0.1D0
r=k/(h**3)
write(*,*) 'h=',h
mtekrar=n/10
write(1,*) 'r=',r
x=0.D0
ts=0.D0
do 11 i=0,n
x=i*h
u0(i)=(1./6)*(x-1.)
ua(i)=(1./6)*((x-1.)/(1.-ts))
write(1,*)x,u0(i),ua(i)
11 continue
mson=int(tson/k)
write(*,*) 'mson=',mson
do 20 m=1,mson
bleft(1,1)=1.-(5.*r/4.)
bleft(1,2)=(6.*r/4.)*((-h**2)*u0(1)+3.)
bleft(1,3)=-6.*r
bleft(1,4)=7.*r/2.
bleft(1,5)=-3.*r/4.
bleft(2,1)=(r/2.)*((3*h**2)*u0(2)+1.)
bleft(2,2)=1.
bleft(2,3)=(-r/2.)*((3*h**2)*u0(2)+1.)
bleft(2,4)=r/4.
do 10 i=3,n-3
bleft(i,i-2)=-r/4.
```

```

bleft(i,i-1)=(r/2.)*((3*h**2)*u0(i)+1.)
bleft(i,i)=1.
bleft(i,i+1)=(-r/2.)*((3*h**2)*u0(i)+1.)
bleft(i,i+2)=r/4.
10 continue
bleft(N-2,N-4)=-r/4.
bleft(N-2,N-3)=(r/2.)*((3*h**2)*u0(N-2)+1.)
bleft(N-2,N-2)=1.
bleft(N-2,N-1)=(-r/2.)*((3*h**2)*u0(N-2)+1.)
bleft(N-1,N-1)=(1-9.*r*h**2*u0(N-1)+5.*r/4.)
bleft(N-1,N-2)=(r/2.)*((24.*h**2)*u0(N-1)-9.)
bleft(N-1,N-3)=(r/2.)*((-6*h**2)*u0(N-1)+12.)
bleft(N-1,N-4)=(-7.*r/2.)
bleft(N-1,N-5)=(3.*r/4.)

```

* **Matrisin sağ tarafı**

```

br(1,1)=1.+(5.*r/4.)
br(1,2)=(-6.*r/4.)*((-h**2)*u0(1)+3.)
br(1,3)=6.*r
br(1,4)=-7.*r/2.
br(1,5)=3.*r/4.
br(2,1)=(-r/2.)*((3*h**2)*u0(2)+1.)
br(2,2)=1.
br(2,3)=(r/2.)*((3*h**2)*u0(2)+1.)
br(2,4)=-r/4.
do 18 i=3,n-3
br(i,i-2)=r/4.
br(i,i-1)=(-r/2.)*((3*h**2)*u0(i)+1.)
br(i,i)=1.
br(i,i+1)=(r/2.)*((3*h**2)*u0(i)+1.)
br(i,i+2)=-r/4.
18 continue
br(N-2,N-4)=r/4.
br(N-2,N-3)=(-r/2.)*((3*h**2)*u0(N-2)+1.)
br(N-2,N-2)=1.
br(N-2,N-1)=(r/2.)*((3*h**2)*u0(N-2)+1.)
br(N-1,N-1)=(1.+9*r*h**2*u0(N-1)-5.*r/4.)
br(N-1,N-2)=(-r/2.)*((24.*h**2)*u0(N-1)-9.)
br(N-1,N-3)=(-r/2.)*((-6.*h**2)*u0(N-1)+12.)
br(N-1,N-4)=(7.*r/2.)
br(N-1,N-5)=(-3.*r/4.)
do 30 i=1,n-1
t=0.
do 32 j=1,n-1
t=t+br(i,j)*u0(j)
32 continue
bv(i)=t
30 continue
bv(1)=bv(1)-(3.*r*(h**2)*u0(1))*u0(0)
bv(2)=bv(2)+(r/2.)*u0(0)

```

```

do 37 i=1,n-1
do 37 j=1,n-1
tm(i,j)=0.
tm(i,j)=bleft(i,j)
37 continue
do 38 i=1,n-1
xc(i)=bv(i)
38 continue
ng=N-1
do 300 kg=1,ng
do 301 ig=kg+1,ng
TM(ig,kg)=TM(ig,kg)/TM(kg,kg)
301 continue
do 302 jg=kg+1,ng
do 303 ig=kg+1,ng
TM(ig,jg)=TM(ig,jg)-TM(ig,kg)*TM(kg,jg)
303 continue
302 continue
do 304 ig=kg+1,ng
xc(ig)=xc(ig)-TM(ig,kg)*xc(kg)
304 continue
300 continue
do 305 ig=ng,1,-1
do 306 jg=ig+1,ng
xc(ig)=xc(ig)-TM(ig,jg)*xc(jg)
306 continue
xc(ig)=xc(ig)/TM(ig,ig)
305 continue
do 39 i=1,n-1
u(i)=xc(i)
39 continue
x=0.
ts=m*k
write(*,*)ts
do 12 i=0,n
x=i*h
ua(i)=(1./6)*((x-1.)/(1.-ts))
12 continue
u(0)=ua(0)
u(n)=0.
do 47 i=0,n
u0(i)=u(i)
x=i*h
write(1,50)x,u(i),ua(i)
47 continue
20 continue
call analitik(n,tson,ua)
call hata(u,ua,n,e)
call hata_l2(u,ua,n,l2)
call hata_lsonsuz(u,ua,n,lsonsuz)
write(1,51) tson

```

```

write(1,*) ' x      sonlu fark      Analitik cozum      Hata'
write(1,*) ' -----'
do 41 i=1,n
  x=i*h
  thata=abs(ua(i)-u(i))
  write(1,50) x,u(i),ua(i),thata
41  continue
  write(1,*)
50  format(f8.3,5x,f12.8,5x,f12.8,5x,f12.8)
60  format(9(f8.3))
51  format('t=',f12.5)
52  format('r=',f12.5)
  stop
end

subroutine penta(q,n,x)
double precision q(1:n,1:n+1),a(1:n),b(1:n),c(1:n),d(1:n),e(1:n),f(1:n)
double precision ax(1:n),bx(1:n),cx(1:n),dx(1:n),ex(1:n),x(1:n)
do 10 i=1,n-2
  a(i)=q(i+2,i)
  e(i)=q(i,i+2)
10  continue
  do 11 i=1,n-1
    b(i)=q(i+1,i)
    d(i)=q(i,i+1)
11  continue
  do 12 i=1,n
    c(i)=q(i,i)
    f(i)=q(i,n+1)
12  continue
    ax(1)=0
    bx(1)=c(1)
    cx(1)=d(1)/bx(1)
    dx(1)=e(1)/bx(1)
    ex(1)=f(1)/bx(1)
    ax(2)=b(1)
    bx(2)=c(2)-ax(2)*cx(1)
    cx(2)=(d(2)-ax(2)*dx(1))/bx(2)
    dx(2)=e(2)/bx(2)
    ex(2)=(f(2)-ax(2)*ex(1))/bx(2)
    do 13 i=3,n
      ax(i)=b(i-1)-a(i-2)*cx(i-2)
      bx(i)=c(i)-ax(i)*cx(i-1)-a(i-2)*dx(i-2)
      cx(i)=(d(i)-ax(i)*dx(i-1))/bx(i)
      dx(i)=e(i)/bx(i)
      ex(i)=(f(i)-ax(i)*ex(i-1)-a(i-2)*ex(i-2))/bx(i)
13  continue
    x(n)=ex(n)
    x(n-1)=ex(n-1)-cx(n-1)*x(n)
    do 14 i=n-2,1,-1
      x(i)=ex(i)-x(i+2)*dx(i)-x(i+1)*cx(i)

```

```
14  continue
    return
    end
```

* **analitik çözüm için altprogram**

```
subroutine analitik(n,tmax,uu)
parameter(m_uzunluk=500)
DOUBLE PRECISION X,TMAX,H
DOUBLE PRECISION UU(0:m_uzunluk)
INTEGER I,N
H=1./FLOAT(N)
*C-----
DO 213 I=0,n
  x=I*H
  UU(I)=(1./6)*((x-1.)/(1.-TMAX))
213 CONTINUE
  return
END
```

* **Burgers denkleminin ek dönüşüm uygulanarak explicit yöntemiyle çözümü** □

```
*  UUx=Ui_j*(Ui+1_j-Ui-1_j)/2h dönüşümü uygulanmıştır
program burgers_explicit_ekdonusum2
parameter(nn=500)
double precision u(0:nn),u0(0:nn),ua(0:nn)
double precision k,tson,h,dt
open(1,file='burgers_explicit_ek1111.txt',status='unknown')
write(*,*) 't son zaman değerini giriniz!'
read(*,*) tson
write(*,*) 'n-değerini giriniz!'
read(*,*) n
write(*,*) 'k değerini giriniz!'
read(*,*) k
write(1,*)'ek_donusum_2'
write(1,*)
write(1,*)'n=',n
write(1,*)
write(1,*)'tf=',tson
write(1,*)
write(1,555)k
write(1,*)
555 format('k=',f10.8)
h=1./float(n)
x=0
mtekrar=n/10
do 10 i=0,n
  x=i*h
  u0(i)=x
10  continue
  u(0)=0.
```

```

u(n)=1.
mson=int(tson/k)
md=mson/10
do 25 m=1,mson
do 20 i=1,n-1
u(i)=u0(i)+k*(u0(i+1)-2.*u0(i)+u0(i-1))/(h**2)
* -k*u0(i)*(u0(i+1)-u0(i-1))/(2.*h)
20 continue
do 40 i=1,n-1
u0(i)=u(i)
40 continue
dt=m*k
u0(0)=0.
u0(n)=1./(1.+dt)
if (mod(m,md).eq.0) then call analitik(n,dt,ua)
write(1,51) m*k
write(1,*) ' x sonlu fark Analitik cozum Hata'
write(1,*) '-----'
* do 41 i=20,n-1,20
do 41 i=0,n
x=i*h
write(1,50) x,u0(i),ua(i),abs(ua(i)-u0(i))
41 continue
endif
25 continue
50 format(f8.3,5x,f12.10,5x,f12.10,5x,f12.10)
51 format('t=',f12.5)
stop
end
* analitik çözüm için altprogram
subroutine analitik(n,tmax,uu)
parameter(nn=500)
DOUBLE PRECISION UU(0:nn)
DOUBLE PRECISION X,TMAX,H
INTEGER I,N
H=1./FLOAT(N)
DO 213 I=0,n
x=I*H
UU(I)=x/(1.+TMAX)
213 CONTINUE
return
end

```

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Malatya’da doğdum. İlkokulu 30 Ağustos İlkokulunda tamamladım. Ortaokulu da Kolukısa Anadolu Lisesinde tamamladıktan sonra lise öğrenimime de Turgut Özal Lisesinde devam edip tamamladım. 2004-2008 yılları arasında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümümde lisans öğrenimimi tamamladım. 2008 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa başladım. 2009 yılında Rize Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalına Araştırma Görevlisi olarak atandım. 2010 yılında 35. madde ile yüksek lisansım süresince Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi kadrosuna atandım. Şuan hala Fırat Üniversitesinde 35. maddeyle görev yapmaktayım.