T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA STRONGLY θ-I-SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Sinan KOCAÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ocak-2011

KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Sinan Kocaöz tarafından hazırlanan "İdeal Topolojik Uzaylarda Strongly θ-I-Sürekli Fonksiyonlar" adlı tez çalışması 02/02/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL	
Danışman Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL	
Üye Doç. Dr. Gültekin ÇELİK	
Üye Yrd. Doç. Dr. Aynur KESKİN	

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Bayram SADE
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Sinan KOCAÖZ

14.01.2010

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA STRONGLY θ-I-SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Sinan KOCAÖZ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

2011, 26 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL
Doç. Dr. Gültekin ÇELİK
Yrd. Doç. Dr. Aynur KESKİN

Çalışmamız üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde srongly θ-sürekli fonksiyonları inceledik. İkinci bölümde; ideal topolojik uzayları ele aldık ve üçüncü bölümde kullanacağımız bazı tanım ve özellikleri verdik. Ayrıca lokal fonksiyon tanımını ve özelliklerini de inceledik. Üçüncü bölümde ise ideal topolojik uzaylarda strongly θ-I-sürekli fonksiyon tanımını kullanarak yeni kriterler verdik. Ayrıca bu süreklilik çeşitini bilinen diğer süreklilik çeşitleriyle karşılaştırdık.

Anahtar Kelimeler: strongly θ-I-sürekli fonksiyon, θ-I-yakınsaklık, θ-I-kapalı küme, θ-I-açık küme

ABSTRACT

MS THESIS

STRONGLY θ-I-CONTINUOUS FUNCTIONS IN IDEAL TOPOLOGICAL SPACES

Sinan KOCAÖZ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELCUK UNIVERSITY
MATHEMATICH BRABCH

Advisor: Prof. Dr. Saziye YUKSEL

2011, 26 Pages

Jury
Prof. Dr. Saziye YUKSEL
Assoc. Prof. Dr. Gültekin CELIK
Asst. Prof. Dr. Aynur KESKIN

Our study consists of three sections. In first section we investigated strongly θ-continuous functions. In second section we considered the ideal topological spaces and we gave some definitions and prorerties which we used in three section. We also investigated defination and properties of local functions. In third section we obtained some new characterizations inideal topological spaces by using the definition of strongly θ-I-continuous functions. Also we compared it with other known type of continuity.

Keywords: strongly θ-I-continuous functions, θ-I-converges, θ-closed set, θ-I-open set

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi, Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Tez çalışmamı başından sonuna kadar büyük bir sabır ve titizlikle yöneten, çalışmamın her safhasında yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL Hocam'a sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı, çalışmalarımda bilgi ve deneyimlerini benden esirgemeyen Arş.Gör.Tuğba Han ŞİMŞEKLER'e ve her zaman yanımda olan sevgili aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Sinan KOCAÖZ
KONYA-2011

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\in$	: Ait
$\notin$	: Ait değil
$A \cap B$	: A kesişim B
$A \cup B$	: A birleşim B
$A - B$	: A fark B
A^t	: A kümesinin tümleyeni
τ_A	: $A \subset X$ olmak üzere X kümesi üzerinde alt uzay topolojisi
(X, τ_A)	: Alt topolojik uzay
ϕ	: Boş küme
$A \subset B$	: B kümesi A kümesini kapsar
$A \not\subset B$	: B kümesi A kümesini kapsamaz
$=$	: Eşit
$\neq$	: Eşit değil
X	: Evrensel küme
$\Rightarrow$	: Gerek şart
$P(X)$	: Güç kümesi
$\forall$	: Her
(X, τ, I)	: Ideal topolojik uzay
τ	: Topolojik yapı
(X, τ)	: Topolojik uzay
$\Leftarrow$	: Yeter şart
I	: X kümesi üzerindeki herhangi bir ideal
I_c	: X kümesinin sayılabilir alt kümelerinden oluşan ideali
I_f	: X kümesinin sonlu alt kümelerinden oluşan ideali
$G_{(x)}$	: (X, τ) topolojik uzayındaki x noktasının açık komşuluklar ailesi
$\vartheta_{(x)}$	: (X, τ) topolojik uzayındaki x noktasının komşuluklar ailesi
$\widetilde{A}$	: (X, τ) topolojik uzayındaki $A \subset X$ kümesinin yığılma noktaları kümesi
yoğ(A)	: (X, τ) topolojik uzayındaki $A \subset X$ kümesinin yoğunlaşma noktaları kümesi

1.GİRİŞ

Lokal fonksiyon kavramı, ilk defa 1933 yılında Kuratowski tarafından tanımlandı ve özellikleri incelendi. 1945 yılında Vaidyanathaswamy lokal fonksiyon kavramından yararlanarak yeni bir kapanış işlemi tanımladı ve bu işlemden faydalanarak ideal topolojik uzayları oluşturdu ve bu topolojinin bir tabanını elde etti. 1964 yılında Hayashi kendi adını verdiği Hayashi uzayını tanımladı. Daha sonra Samuels 1975 yılında idealleri değiştirerek lokal fonksiyonun bazı ideallerde genel topolojide bilinen kapanış noktası, yoğunlaşma noktası, yığılma noktası ve II. kategoriden nokta kavramlarıyla çakıştığını gösterdi. 1990 yılında Jankovic ve Hamlett geçmişte yapılmış tüm bu çalışmaları inceleyerek ideal topolojilerin temelini oluşturan kapsamlı bir çalışma yaptılar.

Biz bu çalışmada; ilk olarak 1980 yılında Noiri tarafından tanımlanmış daha sonra 1981 yılında Paul E. Long ve Larrry L. Herrington tarafından karekterizasyonları verilmiş olan strongly θ-sürekli fonksiyonu ele aldık ve ideal topolojik uzaylarda da tanımlanmış bu süreklilik çeşiti için bazı yeni sonuçlar elde ettik. Ayrıca bu süreklilik çeşitini bilinen diğer süreklilik çeşitleriyle karşılaştırdık.

Bu çalışmada (X,τ) topolojik uzayı ve (X,τ, I) ideal topolojik uzayı, üzerinde hiçbir ayırma aksiyomu olmayan uzay olarak alınacaktır. (X,τ) ve (Y,υ) topolojik uzayları kısaca X ve Y ile gösterilecektir. (X,τ) veya (X,τ, I) uzaylarından alınan herhangi bir A alt kümesinin içini ve kapanışını sırasıyla $\mathrm{int}(A)$ ve $Cl(A)$ ile göstereceğiz. Ayrıca (X,τ,I) uzayındaki herhangi bir A alt kümesinin lokal fonksiyonunu kısaca A^* olarak ve yıldız kapanışını da $Cl^*(A)$ olarak göstereceğiz.

1. 1. Topolojik Uzaylarla İlgili Temel Kavramlar

Tanım 1.1.1: (X,τ) topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ kümesi verilsin. Eğer A kümesi için,

(i) $A = A^{-\circ}$ ise ; A kümesine **regüler açık küme,**

(ii) $A = A^{\circ-}$ ise ; A kümesine **regüler kapalı küme** (Stone, 1937) denir.

Tanım 1.1.2: (X,τ) topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ kümesi verilsin. Eğer A kümesi için, $A \subset A^{\circ-}$ ise A kümesine **semi-açık küme** (Levine, 1963) denir. Bir semi-açık kümenin tümleyenine semi-kapalıdır denir. A kümesini kapsayan tüm semi-kapalı kümelerin kesişimine A kümesinin semi-kapanışı (Crossley ve ark., 1971) denir ve A_s^- ile gösterilir. Eğer $A = A_s^-$ ise A kümesine **semi-kapalı** küme denir.

(X,τ) topolojik uzayındaki bütün semi-açık kümelerin ailesi $SO(X,\tau)$, regüler açık kümelerin ailesi $RO(X,\tau)$ sembolü ile gösterilecektir. Ayrıca; bir $x \in X$ noktasını içeren tüm semi-açık kümelerin, regüler açık kümelerin ailesi sırasıyla $SO(X,x)$, $RO(X,x)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.1.3: Bir Λ kümesi üzerinde "$\preccurlyeq$" bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlarsa "$\preccurlyeq$" bağıntısına Λ kümesini yönlendiriyor ve Λ kümesine de "$\preccurlyeq$" **bağıntısı ile yönlenmiş** küme denir ve $(\Lambda,\preccurlyeq)$ ikilisi ile gösterilir.

(i) $\forall\lambda \in \Lambda$ için, $\boldsymbol{\lambda \preccurlyeq \lambda}$

(ii) $\forall\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \Lambda$ için, $\boldsymbol{\lambda_1 \preccurlyeq \lambda_2}$ ve $\boldsymbol{\lambda_2 \preccurlyeq \lambda_3}$ ise $\boldsymbol{\lambda_1 \preccurlyeq \lambda_3}$

(iii) $\forall\lambda_1,\lambda_2 \in \Lambda$ için, $\exists\lambda_3 \in \Lambda \ni$ $\boldsymbol{\lambda_1 \preccurlyeq \lambda_3}$ ve $\boldsymbol{\lambda_2 \preccurlyeq \lambda_3}$ vardır.

Tanım 1.1.4: Herhangi bir X kümesi ve bir $(\Lambda,\preccurlyeq)$ yönlenmiş kümesi verilsin. Bu taktirde $f:\Lambda \to X$ fonksiyonu, her $\lambda \in \Lambda$ için, $f(\lambda) = x_\lambda$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu ya da $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ alt kümesine, X kümesi içinde bir **ağ** denir, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ya da (x_λ) biçiminde gösterilir.

Tanım 1.1.5: X kümesi içinde bir (x_λ) ağı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer ağın her elemanı A kümesi içinde ise, bu ağ A kümesi içinde bir ağ olacaktır. Eğer (x_λ) ağının elemanları belirli bir indisten sonra A kümesi içinde kalıyorsa, yani;

$$\exists\lambda_0 \in \Lambda \ni \lambda_0 \preccurlyeq \forall\lambda \text{ için } x_\lambda \in A$$

sağlanıyorsa, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağına "**sonunda *A* kümesi içinde kalıyor**" ya da $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağı, sonunda A kümesi içinde bir ağdır denir.

Tanım 1.1.6: (X,τ) topolojik uzayı içinde bir $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağı verilsin. Eğer $x \in X$ noktasının her V komşuluğu, sonunda (x_λ) ağını içeriyorsa, (x_λ) ağı $x \in X$ noktasına yakınsıyor denir ve kısaca

$$x_\lambda \to x \text{ ya da } \lim_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = x$$

şeklinde gösterilir. Eğer (x_λ) ağı $x \in X$ noktasına yakınsıyor ise, $x \in X$ noktasına (x_λ) **ağının limiti** denir.

Teorem 1.1.1: Bir $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonunun bir $x\in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart her (x_λ) ağı için,

$$x_\lambda \to x \text{ ise } f(x_\lambda)\to f(x)$$

olmasıdır.

2.STRONGLY θ-SÜREKLİ FONKSİYONLAR

2.1.Giriş

T.Noiri (Noiri, 1980), strongly θ-sürekli fonksiyon kavramını verdi: “ $f: X \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere, her $x \in X$ ve Y uzayında $f(x)$ kümesini içeren her V açık kümesi için, $f(Cl(U)) \subset V$ olacak şekilde x noktasının açık bir U komşuluğu varsa bu fonksiyona strongly θ-sürekli fonksiyon” dedi. Açıktır ki strongly θ-sürekli bir fonksiyon daima süreklidir. Ancak tersinin doğru olması gerekmez: Eğer R sol topolojik yapı ile verilmiş ise $i: R \longrightarrow R$ birim fonksiyonu süreklidir, fakat strongly θ-sürekli değildir. Eğer X uzayı regular ise o zaman $f: X \to Y$ her sürekli fonksiyon, strongly θ-süreklidir. Bu çalışmada strongly θ-sürekli fonksiyonun özelliklerini inceleyebilmek için, θ-kapalı küme kavramının bilinmesi gerekir. A kümesi, X uzayının bir alt kümesi olsun. X uzayında bir x noktasını içeren her açık U kümesi için, $Cl(U) \cap A \neq \emptyset$ oluyorsa bu x noktasına A kümesinin θ-kapanış noktası denir. A kümesinin bütün θ-kapanış noktalarının kümesi A kümesinin θ-kapanışı olarak adlandırılır ve $Cl_\theta(A)$ ile gösterilir (Velicko, 1968). Eğer $A = Cl_\theta(A)$ ise A alt kümesi θ-kapalıdır. Benzer şekilde X uzayında $x \in A$ noktası için, $Cl(U) \subset A$ olacak şekilde x noktasını içeren en az bir U açık kümesi varsa, x noktasına A kümesinin θ-iç noktasıdır denir. A kümesinin bütün θ-iç noktalarının oluşturduğu kümeye A kümesinin θ-içi denir ve $Int_\theta(A)$ ile gösterilir. Eğer bir A kümesi θ-açık ise $Int_\theta(A) = A$ dır. Her θ-açık küme açık ve her θ-kapalı küme kapalıdır. θ-açık kümelerin tümleyeni θ-kapalı ve θ-kapalı kümelerin tümleyeni θ-açıktır. (Velicko, 1968, Lemma 3) gösterir ki (X, τ) topolojik uzayında θ-açık kümelerin ailesi X için, τ_θ ile gösterilen, bir topolojidir. Son olarak bir topolojik uzayda x noktasını içeren her V açık kümesi için, (x_α) ağı sonunda V açığının kapanışın da kalıyorsa, topolojik uzayındaki bu (x_α) ağı x noktasına θ-yakınsaktır denir (Noiri, 1980).

2.2. Temel Özellikler

Strongly θ-sürekli fonksiyonun karekterizasyonları Paul E. Long ve Larrry L. Herrington (1981) tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 2.2.1: $f: X \to Y$ fonksiyonu verilsin, aşağıdaki özelilikler eşdeğerdir:

a) f fonksiyonu strongly θ-süreklidir;

b) Her kapalı kümenin ters görüntüsü θ-kapalıdır;

c) Her açık kümenin ters görüntüsü θ-açıktır;

d) Her $x \in X$ ve her (x_α) ağı için, $x_\alpha \underset{\theta}{\rightarrow} x$ ise $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$ yakınsaktır.

Uyarı 2.2.1: (X, τ) topolojik uzayında bir kümenin θ-kapalı olması için gerek ve yeter şart (X, τ_θ) topolojik uzayında kapalı olmasıdır, Teorem 2.2.1 gereğince $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ fonksiyonunun strongly θ-kapalı olması için gerek ve yeter şart $f: (X, \tau_\theta) \rightarrow (Y, \upsilon)$ fonksiyonunu sürekli olmasıdır, sonucu elde edilir. Ayrıca $i: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau_\theta)$ fonksiyonunun şekil 2.2.1 deki gibi sürekli olduğunu görülür.

$$\begin{tikzcd}
(X,T) \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "i"] & & Y \\
(X, Y_\theta) \arrow[urr, "f"'] & &
\end{tikzcd}$$

Şekil 2.2.1

Sürekli fonksiyonlar hakkındaki bilinen özelliklerden dolayı strongly θ-sürekli fonksiyonlar hakkında birkaç sonuç verilebilir. Teorem 2.2.2. de bunların bir örneği verilmiştir.

Teorem 2.2.2: Eğer $f, g: (X, \tau) \rightarrow (Y, \upsilon)$ strongly θ-sürekli fonksiyonlar ve Y uzayı Hausdorff uzayı ise $A = \{x: f(x) = g(x)\}$ kümesi, X uzayında θ-kapalıdır.

Teorem 2.2.3: Eğer $f: X \rightarrow Y$ strongly θ-sürekli, birebir fonksiyon ve Y uzayı Hausdorff uzayı ise o zaman X uzayı Urysohn uzayıdır.

Teorem 2.2.4: $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu strongly θ-sürekli ve birebir olsun. Eğer Y uzayı bir T_1-uzayı ise X uzayı da bir Hausdorff uzayıdır.

Teorem 2.2.5: Eğer $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu strongly θ-sürekli ve $g: Y \rightarrow Z$ fonksiyonu sürekli ise $gof: X \rightarrow Z$ bileşke fonksiyonu strongly θ-süreklidir.

İki strongly θ-sürekli fonksiyonun bileşkesi de strongly θ-süreklidir.

Lemma 2.2.1: $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonunun strongly θ-sürekli olması için gerek ve yeter şart alt tabandaki her $V \subset Y$ açık kümesi için, $f^{-1}(V)$ kümesinin X uzayında θ-açık olmasıdır.

Teorem 2.2.6: $f: X \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$ fonksiyonu ve $\prod_\alpha: \prod_\alpha X_\alpha \longrightarrow X_\alpha$ izdüşüm fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun strongly θ-sürekli olması için gerek ve yeter şart her $\prod_\alpha$ izdüşüm fonksiyonun strongly θ-sürekli olmasıdır.

Sonuç 2.2.1: $f: X \to Y$ ve $g: X \to X \times Y$ fonksiyonları ve $g(x) = (x, f(x))$ grafik fonksiyonu verilmiş olsun. O zaman f fonksiyonunun strongly θ-sürekli olması için gerek ve yeter şart g fonksiyonunun strongly θ-sürekli olmasıdır.

Sonuç 2.2.2: $g: X \to X \times Y$ grafik fonksiyonu verilsin. Eğer g fonksiyonu strongly θ-sürekli ise X uzayı regulardır.

Lemma 2.2.2: Her bir $i = 1,2,\cdots,n$ için, $U_{\alpha i} \subset X_{\alpha i}$ olsun. O zaman

$$U_{\alpha 1} \times U_{\alpha 2} \times \cdots \times U_{\alpha n} \times \prod_{\alpha \neq \alpha i} X_\alpha \subset \prod_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$$

θ-açık olması için gerek ve yeter şart her $i = 1,2,\cdots,n$ için $U_{\alpha i}$ kümesinin θ-açık olmasıdır.

Teorem 2.2.7: $\prod_\alpha f_\alpha : \prod_\alpha X_\alpha \longrightarrow \prod_\alpha Y_\alpha$ fonksiyonu $\{x_\alpha\} \longrightarrow \{f_\alpha(x_\alpha)\}$ şekilde tanımlansın. Bu takdirde $\prod_\alpha f_\alpha$ fonksiyonunun strongly θ-sürekli olması için gerek ve yeter şart her $f_\alpha: X_\alpha \longrightarrow Y_\alpha$ fonksiyonunun strongly θ-sürekli olmasıdır.

2.3. Strongly θ-süreklilik İçin Yeter Şartlar

Teorem 2.3.1: $f: X \to Y$ fonksiyonu sürekli olsun. Eğer Y uzayı regular ve T_1 uzayı ise, bu tadirde f fonksiyonu strongly θ-süreklidir.

Tanım 2.3.1: $f: X \to Y$ fonksiyonunun grafiği $G(f) = \{(x, f(x)): x \in X\}$, şeklinde gösterilsin. $\forall(x,y) \notin G(f)$ için, $(Cl(U) \times Cl(V)) \cap G(f) = \emptyset$ olacak şekilde x ve y noktalarını sırasıyla içeren U ve V açık kümeleri varsa, $G(f)$grafiğine $X \times Y$ uzayında θ-kapalı denir.

Tanım 2.3.2: $\forall(x,y) \notin G(f)$ için, $(Cl(U) \times V) \cap G(f) = \emptyset$ olacak şekilde $x \in U$ ve $y \in V$ açık kümeleri var ise, $f: X \to Y$ fonksiyonunun grafik fonksiyonu θ-kapalı denir.

Tanım 2.3.3: Bir $f: X \to Y$ fonksiyonu $\forall x \in X$ ve $f(x)$'i içeren her V açık kümesi için $f(Cl(U)) \subset Cl(V)$ olacak şekilde $x \in U$ açık kümesi varsa, bu fonksiyona θ-süreklidir denir. Açıktır ki bir strongly θ-sürekli fonksiyon, θ-süreklidir.

Teorem 2.3.2: Y uzayı kompakt olsun ve $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonun grafiği θ-kapalı ise, f fonksiyonu strongly θ-süreklidir.

Teorem 2.3.3: $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu strongly θ-sürekli ve Y uzayı Hausdorff ise, o zaman $G(f)$ θ-kapalıdır.

Teorem 2.3.4: Y bir kompakt Hausdorff uzayı olsun. O zaman $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonunun strongly θ-sürekli olması için gerek ve yeter şart $G(f)$, θ-kapalı olmasıdır.

3. İDEAL TOPOLOJİK UZAY

Bu bölümü iki başlık altında inceleyeceğiz.

İlk bölümde ideal topolojik uzaylardaki temel tanımlar ve kavramları vereceğiz.

İkinci bölümde ise ideal topolojik uzaylarda çok kullandığımız lokal fonksiyon kavramının tanımı ile bu fonksiyondan faydalanarak elde edilen bazı özellikleri vereceğiz. Yine lokal fonksiyon yardımıyla Kuratowski kapanış işleminin tanımını ve bulunan özelliklerini vereceğiz. Bu sayede tezimizin son kısmında kullanacağımız kavramları bu bölümde ayrıntılı bir şekilde incelemiş olacağız.

3.1. Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1: Boş olmayan bir X kümesinin alt kümelerinin boş olmayan bir $I \subset P(X)$ ailesi verilsin. Eğer I ailesi,

(ı) Her $A, B \in I$ kümeleri için, $A \cup B \in I$ (sonlu toplamsallık)

(ıı) Her $A \in I$ kümesi ve $B \subseteq A$ alt kümesi için, $B \in I$ (kalıtımsallık)

özelliklerini sağlarsa bu taktirde, I ailesine X **kümesi üzerinde bir ideal** denir (Kuratowski, 1933).

Tanım 3.1.2: $P(X)$ kümesi, X kümesinin güç kümesi olmak üzere, $\alpha: P(X) \to P(X)$ fonksiyonu,

(ı) $\alpha(\phi) = \phi$

(ıı) $A \in P(X) \Rightarrow A \subseteq \alpha(A)$

(ııı) $A, B \in P(X) \Rightarrow \alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$

(ıv) $A \in P(X) \Rightarrow \alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$

şartlarını sağlarsa bu taktirde, α küme fonksiyonuna **Kuratowski kapanış işlemi** denir. $K = \{A \in P(X) : A = \alpha(A)\}$ ailesine, X kümesi üzerindeki topolojiye göre **kapalılar ailesi** denir (Kuratowski, 1933).

Uyarı 3.1.1: $P(X)$ kümesi, X kümesinin güç kümesi olmak üzere, $d: P(X) \to P(X)$ fonksiyonu,

(ı) $d(\phi) = \phi$

(ıı) $A \subset d(A)$

(ııı) $d(A \cup B) = d(A) \cup d(B)$

(ıv) $d(d(A)) \subseteq d(A)$

şartlarını sağlasın (Jankovic, 1990).

Bu taktirde, $\alpha(A) = A \cup d(A)$ şeklinde tanımlanan α: $P(X) \to P(X)$ fonksiyonu, $P(X)$ güç kümesi üzerinde bir Kuratowski kapanış işlemidir.

İspat: **(ı)** $\alpha(A) = A \cup d(A)$ ifadesinde $A = \phi$ alırsak $\alpha(\phi) = \phi \cup d(\phi)$ olur. Uyarı 3.1.1 (ı) den, $d(\phi) = \phi$ olup $\alpha(\phi) = \phi$ bulunur.

(ıı) Herhangi bir $A \in P(X)$ alt kümesi için, α küme fonksiyonu tanımından $\alpha(A) = A \cup d(A)$ bağıntısı bulunur. Birleşim işlemi gereği, $A \subset A \cup d(A) = \alpha(A)$ ifadesi elde edilir. Böylece $A \subset \alpha(A)$ olur.

(ııı) Herhangi bir $A, B \in P(X)$ alt kümeleri için, α küme fonksiyonu tanımı ve Uyarı 3.1.1 (ıı) gereği,

$$\alpha(A \cup B) = (A \cup B) \cup d(A \cup B) = (A \cup B) \cup (d(A) \cup d(B)) = (A \cup d(A)) \cup (B \cup d(B))$$
$$= \alpha(A) \cup \alpha(B)$$

ifadesi bulunur. Böylece $\alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$ sonucunu elde ederiz.

(ıv) Herhangi bir $A \in P(X)$ alt kümesi için, α küme fonksiyonu tanımından $\alpha(A) = A \cup d(A)$ olur. Buradan 3.1.1. (ııı) ifadesi gereğince,

$$\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A \cup d(A)) = \alpha(A) \cup \alpha(d(A)) = (A \cup d(A)) \cup (d(A) \cup d(d(A)))$$

bağıntısı bulunur. Uyarı 3.1.1 (ııı) ifadesinden, $d(d(A)) \subseteq d(A)$ olur. Böylece $\alpha(\alpha(A)) = A \cup d(A) = \alpha(A)$ olduğu görülür.

Sonuç olarak, $\alpha : P(X) \to P(X)$ küme fonksiyonu Tanım 3.1.2' de verilen Kuratowski kapanış işlemi şartlarını sağlar.

Tanım 3.1.3: X kümesi üzerinde $\varphi = \{\phi, X\}$ şeklinde tanımlanan τ topolojisine **ayrık olmayan topoloji**, (X, φ) ikilisine de **ayrık olmayan uzay** denir (Bourbaki, 1966).

Tanım 3.1.4. X kümesi üzerinde tanımlanan $P(X)$ topolojisine **ayrık topoloji**, $(X, P(X))$ ikilisine de **ayrık uzay** denir (Bourbaki, 1966).

Tanım 3.1.5. (X,τ) topolojik uzayı, $A \subseteq X$ alt kümesi ve $x \in X$ noktası verilsin. Her $V \in \upsilon_{(x)}$ komşuluğu için, $A \cap V \neq \phi$ ise, $x \in X$ noktasına A **kümesinin bir kapanış noktası** denir (Kuratowski, 1933).

Tanım 3.1.6. (X,τ) topolojik uzayı, $A \subseteq X$ alt kümesi ve $x \in X$ noktası verilsin. Her $V \in \upsilon_{(x)}$ komşuluğu için, $A \cap V$ kümesinde sayılamayan sonsuz sayıda eleman varsa, $x \in X$ noktasına A **kümesinin bir yoğunlaşma noktası** denir (Kuratowski, 1933).

Tanım 3.1.7. (X,τ) topolojik uzayı, $A \subseteq X$ alt kümesi ve bir $x \in X$ noktası verilsin. Her $V \in \upsilon_{(x)}$ komşuluğu için, $A \cap (V - \{x\}) \neq \phi$ ise, $x \in X$ noktasına A **kümesinin bir yığılma noktası** denir (Kuratowski, 1933).

3.2. Lokal Fonksiyon

Tanım 3.2.1 . (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subseteq X$ alt kümesi verilsin. I ailesi X kümesi üzerinde bir ideal olsun. Bu taktirde,

$$A^*(I,\tau) = \left\{ x \in X : \forall U \in G_{(x)}, U \cap A \notin I \right\}$$

kümesine A kümesinin I idealine ve τ topolojisine bağlı **lokal fonksiyonu** denir (Kuratowski, 1933). $A^*(I,\tau)$ gösterimi için (Jankovic, 1990)' de gösterildiği gibi $A^*(I)$ veya kısaca A^* sembolü kullanılır ve buna A kümesinin lokal fonksiyonu denir.

$X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere X kümesindeki en basit idealler minimal ideal ($I = \phi$) ve maksimal ideal ($I = P(X)$) olup A^* kümesi bu ideallere göre (Jankovic, 1990) aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$\begin{aligned} A^*(\{\phi\},\tau) &= \left\{ x \in X : \forall U \in G_{(x)}, U \cap A \notin \phi \right\} \\ &= \left\{ x \in X : \forall U \in G_{(x)}, U \cap A \neq \phi \right\} \\ &= Cl(A) \end{aligned}$$

Buradan,

$$A^*(\{\phi\},\tau) = Cl(A)$$

sonucu elde edilir.

$$A^*(P(X),\tau)=\left\{x\in X:\forall U\in G_{(x)},U\cap A\notin P(X)\right\}=\phi$$

Buradan,

$$A^*\ (P(X),\tau)=\varnothing$$

sonucu elde edilir.

(X,τ) uzayında I_f (sonlu alt kümeler ideali), I_c (sayılabilir alt kümeler ideali) idealleri için (Jankovic, 1990) A^* kümesi aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}A^*(I_f,\tau)&=\left\{x\in X:\forall U\in G_{(x)},\quad U\cap A\notin I_f\right\}\\&=\left\{x\in X:\forall U\in G_{(x)},\quad U\cap A\quad \textit{kümesi sonsuz}\right\}\\&=\widetilde{A}\end{aligned}$$

Buradan,

$$A^*(I_f,\tau)=\ \widetilde{A}$$

sonucu elde edilir.

$$\begin{aligned}A^*(I_c,\tau)&=\left\{x\in X:\forall U\in G_{(x)},\quad U\cap A\notin I_c\right\}\\&=\left\{x\in X:\forall U\in G_{(x)},\quad U\cap A\quad \textit{kümesi sayılamaz}\right\}\\&=yo\breve{g}(A)\end{aligned}$$

Buradan,

$$A^*(I_c,\tau)=yo\breve{g}(A)$$

sonucu elde edilir.

(Samuels, 1975)' de, A kümesinin $A^*(I,\tau)$ lokal fonksiyonunun, A kümesinin kapanış noktası, yığılma noktası ve yoğunlaşma noktalarının bir genelleştirilmesi olduğunu vermiştir.

Teorem 3.2.1: (Jankovic, 1990) (X,τ) uzayı, X kümesi üzerinde I_1,I_2 idealleri ile birlikte verilen bir topolojik uzay ve $A,B\subseteq X$ olsun. Bu taktirde,

(a) $A\subseteq B\Rightarrow A^*\subseteq B^*$

(b) $I_1\subseteq I_2\Rightarrow A^*(I_2)\subseteq A^*(I_1)$

(c) $A^*=Cl(A^*)\subseteq Cl(A)$ (A^* kümesi kapalı bir kümedir)

(d) $(A^*)^*\subseteq A^*$

(e) $(A\cup B)^*=A^*\cup B^*$

(f) $(A\cap B)^* \subseteq A^* \cap B^*$

(g) $(A^* - B^*) = (A-B)^* - B^* \subseteq (A-B)^*$

(ı) $U \in \tau \;\Rightarrow\; U\cap A^* = U\cap (U\cap A)^* \subseteq (U\cap A)^*$

(k) $S \in I \;\Rightarrow\; (A\cup S)^* = A^* = (A-S)^*$

İspat. **(a)** $x \in A^*$ noktası olsun. O halde Tanım 3.2.1 den her $U \in G_{(x)}$ açık komşuluğu için, $A\cap U \notin I$ dır. $A\subset B$ ise, $A\cap U \subset B\cap U$ olur. Eğer $B\cap U \in I$ olsaydı I idealinin kalıtımsallık özelliğinden, $A\cap U \in I$ olurdu. Bu da, bir çelişki yaratır. O halde her $U \in G_{(x)}$ açık komşuluğu için, $B\cap U \notin I$ dır. Buradan Tanım 3.2.1 gereği, $x \in B^*$ olur. Böylece alt küme tanımı gereği $A^* \subset B^*$ bağıntısı bulunur.

(b) $I_1 \subseteq I_2$ ise $I_2^{\,t} \subseteq I_1^{\,t}$ olur. (3.1)

$A^*(I_2) = \left\{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad U\cap A \notin I_2\right\}$

$A^*(I_2) = \left\{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad U\cap A \in I_2^{\,t}\right\}$ (3.2)

(3.1), (3.2) ifadeleri ve Tanım 3.2.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned} A^*(I_2) &= \left\{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad U\cap A \in I_1^{\,t}\right\} \\ &= \left\{x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad U\cap A \notin I_1\right\} \\ &= A^*(I_1) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Buradan,

$$A^*(I_2) \subseteq A^*(I_1)$$

olduğu görülür.

(c) Öncelikle $A^* = Cl(A^*)$ eşitliğini gösterelim. Her $A\subset X$ alt kümesi için, $A\subset Cl(A)$ olduğunu biliyoruz. Bu sonuç A kümesinin lokal fonksiyonu içinde sağlanacağından;

$A^* \subseteq Cl(A^*)$ (3.3)

bağıntısını elde ederiz. $A^*(\{\phi\},\tau)=Cl(A)$, $A^*(P(X),\tau)=\phi$ olduğu (Jankovic, 1990) gösterilmiştir. Teorem 3.2.1 (b) den görülür ki kümenin lokal fonksiyonu en büyük değerini $I=\{\phi\}$ minimal ideali için, en küçük değerini de $I=P(X)$ maksimal ideali için alır. O halde (X,τ) uzayındaki her I ideali için $\phi\subseteq I\subseteq P(X)$ ifadesi sağlandığından,

$$\phi\subseteq A^*(I,\tau)\subseteq Cl(A) \tag{3.4}$$

olur.

Şimdi de $Cl(A^*)\subset A^*$ olduğunu gösterelim. Herhangi bir $x\in Cl(A^*)$ noktasını alalım. Varsayalım ki $x\notin A^*$ olsun. $Cl(A^*)=\bigcap\{F\subset X: F$ kapalı küme ve $A^*\subset F\}$ ifadesinden ve $x\in Cl(A^*)$ olduğundan $A^*\subset F$ olan her F kapalı kümesi için, $x\in F$ olur. $A^*\subset F$ ve F kapalı küme ise $X-F\subset X-A^*$ olup $X-F$ açık kümedir. Buradan $X-F\cap A^*=\phi$ bulunur. $x\notin A^*$ ifadesinden $x\in(X-A^*)$ elde edilir ve $x\in F$ olduğundan $F\cap(X-A^*)\neq\phi$ olur.

$X-F\cap A^*=\phi$ ve $F\cap(X-A^*)\neq\phi$ olması $F\subset A^*$ olduğunu gösterir. Bu ise bir çelişkidir. O halde,

$$Cl(A^*)\subset A^* \tag{3.5}$$

bulunur. (3.3), (3.4) ve (3.5) ifadelerinden $A^*=Cl(A^*)\subseteq Cl(A)$ bağıntısı elde edilir.

(d) Herhangi bir $x\in(A^*(I))^*(I)$ noktasını alalım. Varsayalım ki $x\notin A^*(I)$ olsun. Tanım 3.2.1 gereğince, $x\in(A^*(I))^*(I)=\{x\in X:\forall U\in G_{(x)}$ için, $(U\cap A^*)\notin I\}$ olur. Her $U\in G_{(x)}$ açık komşuluğu için, $(U\cap A^*)\notin I$ ifadesi ve idealin kalıtımsallık özelliği gereğince, $(U\cap A^*)\neq\phi$ olduğu bulunur. Kapanış noktası tanımından $x\in Cl(A^*)$ elde edilir. (e) şıkkı gereğince, $Cl(A^*)=A^*$ olması $x\in A^*$ olduğunu gösterir. Bu ise, bir çelişkidir. O halde $x\in(A^*)^*$ noktası için, $x\in A^*$ olduğundan $(A^*)^*\subseteq A^*$ bağıntısı elde edilir.

(e) Tanım 3.2.1 gereğince A ve B kümelerinin lokal fonksiyonları,

$$A^*(I)=\{x\in X:\forall U\in G_{(x)},\quad U\cap A\notin I\} \tag{3.6}$$

$$B^*(I)=\{x\in X:\forall U\in G_{(x)},\quad U\cap B\notin I\} \tag{3.7}$$

olur.

(3.6) ve (3.7) ifadelerinde birleşim işlemi alırsak,

$$A^*(I)\cup B^*(I)=\{x\in X:\forall U\in G_{(x)},\quad U\cap A\notin I\quad veya\quad U\cap B\notin I\}$$

$$A^*(I)\cup B^*(I)=\{x\in X:\forall U\in G_{(x)},\quad [(U\cap A)\cup(U\cap B)]\notin I\}$$

$$A^*(I)\cup B^*(I)=\{x\in X:\forall U\in G_{(x)},\quad [U\cap(A\cup B)]\notin I\}$$

elde edilir. Tanım 3.2.1'den,

$$A^*(I)\cup B^*(I)=(A\cup B)^*(I)$$

bulunur.

(f) $$(A\cap B)^*(I)=\{x\in X:\forall U\in G_{(x)},\quad [U\cap(A\cap B)]\notin I\}$$

$$(A\cap B)^*(I)=\{x\in X:\forall U\in G_{(x)},\quad [(A\cap U)\cap(B\cap U)]\notin I\}$$

$$(A\cap B)^*(I)=\{x\in X:\forall U\in G_{(x)},\quad [(A\cap U)\notin I\quad ve\quad (B\cap U)\notin I\} \tag{3.8}$$

(3.8) ifadesi gereği,

$$(A\cap B)^*(I)\subseteq\{x\in X:\forall U\in G_{(x)},\quad (A\cap U)\notin I\} \tag{8.9}$$

$$(A\cap B)^*(I)\subseteq\{x\in X:\forall U\in G_{(x)},\quad (B\cap U)\notin I\} \tag{8.10}$$

elde edilir. (3.9) ve (3.10) ifadelerinin kesişimlerini alırsak,

$$(A\cap B)^*(I)\subseteq A^*(I)\cap B^*(I)$$

olduğu bulunur.

(g) $A\cup B=(A-B)\cup B$ eşitliği her zaman doğrudur. Bu eşitlikte (*) işlemi uygulanırsa, Teorem 3.2.1 (e) gereğince,

$$(A\cup B)^*=[(A-B)\cup B]^*=(A-B)^*\cup B^*$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının B^{*t} kümesi ile kesişimi alınırsa,

$$(A\cup B)^*\cap B^{*t}=[(A-B)^*\cup B^*]\cap B^{*t}$$

$$(A^* \cup B^*) \cap B^{*t} = [(A-B)^* \cup B^*] \cap B^{*t}$$
$$(A^* \cup B^{*t}) \cup (B^* \cap B^{*t}) = [(A-B)^* \cap B^{*t}] \cup (B^* \cap B^{*t})$$

olur. $B^* \cap B^{*t} = \phi$ olduğundan,

$$A^* \cap B^{*t} = (A-B)^* \cap B^{*t}$$

eşitliği elde edilir. Fark işlemi tanımı gereği, $A^* - B^* = (A-B)^* - B^*$ eşitliği yazılır. Bu son eşitlikten

$$A^* - B^* = (A-B)^* - B^* \subseteq (A-B)^*$$

bulunur.

(h) Herhangi bir $x \in U \cap A^*$ noktasını alalım. Kesişim işlemi tanımından $x \in U$ ve $x \in A^*$ dır. Tanım 3.2.1 gereği her $V \in G_{(x)}$ açık komşuluğu için, $V \cap A \notin I$ olur. $x \in U$ ve $U \in \tau$ olduğundan komşuluk tanımı gereği $U \in G_{(x)}$ olur. Bir noktanın komşuları kesişimi yine o noktanın komşuluğu olduğundan $V \cap U \in G_{(x)}$ olur. $x \in A^*$ olup, $[(V \cap U) \cap A]$=$[V \cap (U \cap A)] \notin I$ ifadesi elde edilir. Tanım 3.2.1 gereği, $x \in (U \cap A)^*$ bulunur. $x \in U \cap A^*$ noktası için, $x \in (U \cap A)^*$ olduğundan

$$U \cap A^* \subseteq (U \cap A)^* \tag{3.11}$$

bulunur. (3.11) ifadesinde her iki tarafın U kümesi ile kesişimi alınırsa,

$$[U \cap (U \cap A^*)] \subseteq [U \cap (U \cap A)^*]$$
$$(U \cap A^*) \subseteq [U \cap (U \cap A)^*] \tag{3.12}$$

$U \cap A \subseteq A$ bağıntısı ve Teorem 3.2.1 (a) gereğince;

$$(U \cap A)^* \subseteq A^* \tag{3.13}$$

olur. (3.13) ifadesinin her iki tarafının U kümesi ile kesişimi alınırsa,

$$[U \cap (U \cap A)^*] \subseteq U \cap A^* \tag{3.14}$$

bulunur. (3.12) ve (3.14) ifadelerinden,

$$U \cap A^* \subseteq U \cap (U \cap A)^* \tag{3.15}$$

eşitliği yazılır. O halde (3.11) ve (3.15) ifadeleri gereği,

$$U \cap A^* = U \cap (U \cap A)^* \subseteq (U \cap A)^*$$

bulunur.

(k) $A \cup S = (A - S) \cup S$ eşitliği her zaman doğrudur. Bu eşitlikte her iki tarafın (*) işlemi alınırsa,

$$(A \cup S)^* = [(A - S) \cup S]^*$$

olur. Teorem 3.2.1 (e) gereğince,

$$(A \cup S)^* = A^* \cup S^* = (A - S)^* \cup S^* \tag{3.16}$$

elde edilir. Tanım 3.2.1 ve $S \in I$ olduğundan,
$S^* = \left\{ x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad (U \cap S) \in I \right\} = \phi$ olur. (3.16) ifadesinde $S^* = \phi$ yazılırsa $(A \cup S)^* = A^* = (A - S)^*$ elde edilir.

(Jankovic, 1990)' da, bir Cl^* işlemi tanımlanmış ve bu işlemin aslında bir Kuratowski kapanış işlemi olduğu aşağıdaki gibi gösterilmiştir.

Lokal fonksiyon olarak tanımlanan (*): $P(X) \to P(X)$ fonksiyonu Teorem 3.2.1'in (d) ve (e) şıkları ile,

$$\phi^*(I) = \left\{ x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad (U \cap \phi) \notin I \right\}$$
$$\phi^*(I) = \left\{ x \in X : \forall U \in G_{(x)}, \quad \phi \notin I \right\}$$

bulunur. Bu ise, I ideal olduğundan kalıtımsallık özelliği gereği imkansızdır. Dolayısıyla $\phi \in I$ olur. Dolayısıyla $\phi^*(I) = \phi$ olup, (*) $: P(X) \to P(X)$ lokal fonksiyonu, Uyarı 3.1.1 de verilen $d:\ P(X) \to\ P(X)$ fonksiyonu ile çakışır. Her $A \subseteq X$ alt kümesi için, $Cl^*(A) = A \cup A^*$ şeklinde tanımlanan Cl^* : $P(X) \to\ P(X)$ fonksiyonu Kuratowski Kapanış işlemidir.

(Jankovic, 1990) referansında , X kümesindeki minimal ideal olan $I=\{\phi\}$ ve maksimal ideal olan $I=P(X)$ idealleri için, $Cl^*(A)$ kümesi aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$I=\{\phi\}$ minimal ideali için, $A^*(\{\phi\})=Cl(A)$ olup bu ifade $Cl^*(A)=A\cup A^*$ eşitliğinde yazılırsa $Cl^*(A)=A\cup Cl(A)$ olur. Kapanış işleminin $A\subset Cl(A)$ özelliğinden, $Cl^*(A)=Cl(A)$ olur.

$I=P(X)$ maksimal ideali için, $A^*(P(X))=\phi$ olup $Cl^*(A)=A\cup A^*$ eşitliğinde yazılırsa, $Cl^*(A)=A$ olur.

Cl^* fonksiyonu yardımıyla üretilen τ^* topolojisi (Jankovic, 1990)' da aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.2: τ topolojisi X kümesindeki ilk topoloji olmak üzere, Cl^* fonksiyonu tarafından üretilen topoloji $\tau^*(I,\tau)$ ya da $\tau^*(I)$ (kısaca τ^*) ile gösterilir. Bu topoloji,

$$\tau^*(I)=\{U\subseteq X : Cl^*(X-U)=X-U\}$$

şeklindedir (Kuratowski,1933).

$I=\{\phi\}$ minimal ideali için, $\tau^*(\mathrm{I})=\tau$ elde edilir. $I=P(X)$ maksimal ideali için, $\tau^*(I)=P(X)$ olup X kümesi üzerindeki her I ideali için, $\phi\subseteq I\subseteq P(X)$ olduğundan $\tau\subseteq\tau^*(I)\subseteq P(X)$ bağıntısı Teorem 3.2.1'in (b) şıkkından elde edilir.

4. STRONGLY *θ-I*-SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Bu bölümde ideal topolojik uzaylarda strongly-*θ-I*-sürekli fonksiyon kavramını ele alıp (Yüksel ve ark., 2010) bu süreklilik çeşiti için bazı yeni karekterizasyonlar verdik. Ayrıca daha önce tanımlanan bazı süreklilik çeşitleriyle de karşılaştırılmasını yaptık.

4.1.Giriş

Tanım 4.1. 1: (X,τ,I) ideal topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. Her $x\in X$ noktası ve x noktasının her açık U komşuluğu için, $Cl^*(U)\cap A\neq\emptyset$ ise x noktasına A kümesinin *θ-I*-kapanış noktası denir ve $Cl_{\theta I}(A)$ ile gösterilir. A kümesinin θ-*I*-kapalı küme olması için gerek ve yeter şart $Cl_{\theta I}(A)=A$ olmasıdır (Yüksel ve ark., 2010).

Tanım 4.1.2: (X,τ,I) ideal topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. Her $x\in A$ noktasının $Cl^*(U)\subset A$ olacak şekilde x noktasını içeren en az bir açık U komşuluğu varsa, x noktasına A kümesinin *θ-I*-içi denir ve $int_{\theta I}(A)$ ile gösterilir. A kümesinin θ-*I*-açık olması için gerek ve yeter şart $int_{\theta I}(A)=A$ olmasıdır.

Tanım 4.1.3: $f:(X,\tau,I)\to(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Her $x\in X$ noktası ve Y uzayının $f(x)$ noktasını içeren V açık kümesi için, $f\big(Cl^*(U)\big)\subset V$ olacak şekilde x noktasının açık bir U komşuluğu varsa fonksiyonuna strongly *θ-I*-sürekli fonksiyon denir. (Yüksel ve ark., 2010)

Tanım 4.1.4: (X,τ,I) ideal topolojik uzayı içinde $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ ağı verilsin. Eğer $x\in X$ noktasının her U *θ-I*-açık komşuluğu, sonunda (x_α) ağını içeriyorsa, (x_α) ağı x noktasına *θ-I*-yakınsar denir ve $(x_\alpha)\underset{\theta_I}{\to} x$ şeklinde gösterilir.

4.2. Temel Özellikler

Teorem 4.2.1: $f:(X,\tau,I)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler eşdeğerdir:

a) f fonksiyonu strongly *θ-I*-süreklidir.

b) Her kapalı kümenin ters görüntüsü *θ-I*-kapalıdır.

c) Her açık kümenin ters görüntüsü *θ-I*-açıktır.

d) Her $x\in X$ ve her (x_α) ağı için, $(x_\alpha)\underset{\theta_I}{\to} x$ ise $f(x_\alpha)\to f(x)$ yakınsaktır.

İspat: (a)⇒(b) $F \subset Y$ kapalı olsun ve $f^{-1}(F)$ kümesinin X uzayında θ-I-kapalı olmadığını varsayalım. O zaman $x \notin f^{-1}(F)$ olacak şeklinde bir nokta vardır öyleki x noktasını içeren her U açık için, $Cl^{*}(U) \cap f^{-1}(F) \neq \emptyset$ olur. $f(x) \notin F$ olduğundan, $f(x)$ noktasını içeren *Y-F* bir açık kümedir. x noktasının kapalı olmayan komşuluğunun f altındaki görüntüsü *Y-F* kümesidir. Sonuç olarak f fonksiyonu x noktasında strongly θ-I-sürekli değildir. Bu çelişkiden dolayı,$f^{-1}(F)$ kümesi θ -I-kapalıdır.

(b)⇒(c) V kümesi, Y uzayında açık olsun. O zaman *Y-V* kapalıdır ve (b) gereğince, $f^{-1}(Y-V)$ kümesi θ-I-kapalıdır. Fakat $f^{-1}(Y-V) = X - f^{-1}(V)$ olduğundan, $f^{-1}(V)$ kümesi θ-I-açıktır.

(c)⇒(d) $x \in X$ ve $x_\alpha \underset{\theta_I}{\rightarrow} x$ olsun. $f(x) \in V$ herhangi bir açık küme olsun. O zaman (c) gereği, $f^{-1}(V)$ kümesi θ-I-açıktır ve x noktasını içerir. Böylece

$$x \in U \subset Cl^{*}(U) \subset f^{-1}(V)$$

olacak şekilde en az bir U açık kümesi vardır. x_α ağı x noktasında θ-I-yakınsak olduğundan, x_α ağı sonunda, $Cl^{*}(U)$ kümesinin içinde, $f(x_\alpha)$ ağı da V açığının içindedir. Sonuç olarak $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$ yakınsar.

(d)⇒(a) Her $(x_\alpha) \subset X$ ağı için, $(x_\alpha) \underset{\theta_I}{\rightarrow} x$ ve $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$ olsun. Varsayalım ki f fonksiyonu $x \in X$ noktasında strongly θ-I-sürekli olmasın. O zaman, x noktasını içeren her açık U kümesi için, $f\big(Cl^{*}(U)\big) \not\subset V$ olacak şekilde, $f(x)$ noktasını içeren en az bir V açık kümesi vardır. $x \in U$ ve $x_\alpha \in Cl^{*}(U)$ için $x_\alpha \notin f^{-1}(V)$ olacak şekilde bir (x_α) ağı oluşturalım. Bu (x_α) ağın x noktasına θ-I-yakınsadığından hipotez gereği $(f(x_\alpha))$ ağıda $f(x)$ yakınsar. Böylece belli bir U komşuluğu için $f(x_\alpha) \in V$ elde edilir. Bu $x_\alpha \notin f^{-1}(V)$ olmasıyla çelişir. Çelişki gösterir ki f fonksiyonu x noktasında strongly θ-I-süreklidir.

Teorem 4.2.2: $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \upsilon)$ strongly θ-I-sürekli fonksiyon için aşağıdaki özellikler eşdeğerdir;

a) X uzayının her A alt kümesi için $f(Cl_{\theta I}(A)) \subset Cl(f(A))$.

b) Y uzayının her B alt kümesi için $Cl_{\theta I}(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(Cl(B))$.

İspat: a⇒b) $B \subset Y$ olsun. (a) ifadesinden;

$$f\big(Cl_{\theta I}\big(f^{-1}(B)\big)\big) \subset Cl\big(f\big(f^{-1}(B)\big)\big) \subset Cl(B)$$

dır. Buradan,

$$Cl_{\theta I}(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(Cl(B))$$

sonucunu elde ederiz

b⟹a) $A \subset X$ olsun. O halde $f(A) \subset Y$ için (b) gereği;

$$Cl_{\theta I}(f^{-1}(f(A))) \subset f^{-1}(Cl(f(A)))$$
$$Cl_{\theta I}(A) \subset Cl_{\theta I}(f^{-1}(f(A))) \subset f^{-1}(Cl(f(A)))$$

dır.. Buradan,

$$f(Cl_{\theta I}(A)) \subset Cl(f(A))$$

sonucunu elde edilir.

Tanım 4.2.1. (X, τ, I) ideal topolojik uzay olsun. *X* uzayının birbirinden farklı her *x*, *y* nokta çifti için, $Cl^*(U) \cap Cl^*(V) = \emptyset$ olacak şekilde sırasıyla *x* ve *y* noktalarını içeren *U*, *V* açık komşulukları varsa bu uzaya Urysohn-*I* uzayı denir (Çaylak, 2009)

Teorem 4.2.3: Eğer $f: (X, \tau, I) \to (Y, \upsilon)$ strongly-*θ-I*-sürekli, bire bir fonksiyon ve *Y* uzayı T_2-uzayı ise o zaman *X* uzayı Uryson-*I* uzaydır.

İspat: Herhangi $x_1, x_2 \in X$ $(x_1 \neq x_2)$ noktalarını ele alalım. *f* fonksiyonu birebir olduğundan, $f(x_1) \neq f(x_2) \in Y$ olur. *Y* uzayı Hausdorff olduğundan, $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ noktalarını sırasıyla içeren V_1 ve V_2 ayrık açık kümeleri vardır. *f* strongly θ-I-sürekli olduğundan sırasıyla x_1 ve x_2 noktalarını içeren, $f(Cl^*(U_1)) \subset V_1$ ve $f(Cl^*(U_2)) \subset V_2$ olacak şekilde U_1 ve U_2 açık kümeleri vardır. Buradan $Cl^*(U_1) \cap Cl^*(U_2) = \emptyset$ olup, *X* uzayının Urysohn-*I* olduğu görülür.

Teorem 4.2.4: : $f: (X, \tau, I) \to (Y, \upsilon, I_1)$ fonksiyonu strongly *θ-I*-sürekli ve $g:(Y, \upsilon, I_1) \to (Z, \varphi)$ fonksiyonu sürekli ise $gof:(X, \tau, I) \to (Z, \varphi)$ bileşke fonksiyonu strongly-*θ-I*-süreklidir.

İspat: *V* kümesi, *Z* uzayında bir açık alt küme olsun. g fonksiyonu sürekli olduğundan $g^{-1}(V)$, *Y* uzayında açık ve f fonksiyonu strongly θ-*I*-sürekli olduğundan, $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (gf)^{-1}(V)$ Teorem 4.2.1 (c) gereği, *θ-I*-açıktır. Böylece gof bileşke fonksiyonu Teorem 4.2.1. gereği strongly θ-*I*-süreklidir.

İki strogly *θ-I*- sürekli fonksiyonun bileşkesi de strongly *θ–I*-süreklidir.

Teorem 4.2.5: : $f:(X,\tau,I)\to(Y,\upsilon,I)$ fonksiyonu strongly-θ-I-sürekli olması için gerek ve yeter şart alt tabandaki her $V\subset Y$ açık kümesi için f^{-1}(V) kümesinin X uzayında θ-I-açık olmasıdır.

İspat: Teorem 4.2.1. den gereklilik sağlanır. Tersine ise her $\alpha\in\Delta$ için $\{V_\alpha:\alpha\in\Delta\}$ Y uzayının bir alt tabanı ve $f^{-1}(V_\alpha)$ θ -I-açık olsun. O zaman her $V\subset Y$ açık kümesi şöyle yazılabiliriz

$$V=\cup\{V_{\alpha1}\cap V_{\alpha2}\cap\cdots\cap V_{\alpha n}:\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}\subset\Delta\}$$

yani $$f^{-1}(V)=\cup\{f^{-1}(V_{\alpha1})\cap f^{-1}(V_{\alpha2})\cap\cdots\cap f^{-1}(V_{\alpha n})\}.$$

θ-I-açık kümelerin sonlu kesişimi θ-I-açıktır ve θ-I-açık kümelerin birleşimi θ-I-açık olduğundan, $f^{-1}(V)$ kümesi, θ-I-açıktır. Böylece f fonksiyonu Teorem 4.2.1. gereği, strongly θ-I-süreklidir.

Tanım 4.2.2. (X,τ,I) ideal topolojik uzayının regüler-I uzay olması için gerek ve yeter şart x noktasının her açık U komşuluğu için $x\in V\subset Cl^*(V)\subset U$ olacak şekilde açık bir V komşuluğunun olmasıdır (Açıkgöz ve ark., 2004).

Teorem 4.2.6: $f:(X,\tau,I)\to(Y,\upsilon,I_1)$ ve g:$(X,\tau,I)\to X$xY, fonksiyonları verilsin. $g(x)=(x,f(x))$ ile tanımlanmış ve f fonksiyonun grafik fonksiyonu olsun, aşağıdakiler sağlanır.

a) g fonksiyonu strongly θ-I-sürekli fonksiyon ise f fonksiyonu strongly θ-I-sürekli fonksiyon ve X uzayı regüler-I uzayıdır.

b) f fonksiyonu strongly θ-I-sürekli fonksiyon ve X uzayı regüler–I uzay ise g fonksiyonu strongly θ-I-sürekli fonksiyondur.

İspat: a) $x\in X$ noktası ve V kümesi $f(x)$ noktasının açık bir komşuluğu olsun. O halde $X\times V$ kümesi $g(x)$ noktasının açık bir komşuluğu olur. g fonksiyonu strongly θ-I-sürekli olduğundan $g(Cl^*(U))\subset X\times V$ olacak şekilde, x noktasını içeren bir U açık kümesi vardır. Buradan, $f\big(Cl^*(U)\big)\subset V$ olur. Şimdi X uzayının regüler-I uzayı olduğunu gösterelim. U kümesi x noktasının açık bir komşuluğu olsun. Bu durumda $U\times Y$ kümesi $g(x)$ noktasının açık bir komşuluğudur. g fonksiyonu strongly θ-I-sürekli fonksiyon olduğundan $g(Cl^*(W))\subset U\times Y$ olacak şekilde, x noktasını içeren bir W açık kümesi vardır. Buradan, $Cl^*(W)\subset U$ olur ki bu da X uzayının regüler-I uzayı olduğunu gösterir.

b) $x\in X$ noktası ve W kümesi $X\times Y$ uzayında $g(x)$ noktasının açık bir komşuluğu olsun. O halde; $U\times V\subset W$ olacak şekilde $x\in U$, $f(x)\in V$ açık kümeleri vardır. f fonksiyonu strongly θ-I-sürekli fonksiyon olduğundan, $f\big(Cl^*(G)\big) \subset V$ olacak şekilde x noktasını içeren bir G açık kümesi vardır. Buradan, $U \cap G$ kümesi x noktasının açık bir komşuluğu olur. X uzayı regüler-I uzayı olduğundan $x \in T \subset Cl^*(T) \subset U \cap G$ olacak şekilde bir T açık kümesi vardır. Böylece $g(Cl^*(T)) \subset U \times f(Cl^*(G)) \subset U \times V \subset W$ olur ki bu da bize g fonksiyonun strongly θ-I-sürekli fonksiyon olduğunu gösterir.

Sonuç 4.2.1: (X,τ,I) uzayı regüler-I uzayı olsun. $f:(X,\tau,I) \to (Y,\upsilon)$ fonsiyonun strongly θ-I-sürekli olması için gerek ve yeter şart $g(x)$=(x,f(x)) ile tanımlanmış g:$(X,\tau,I) \to X$xY grafik fonksiyonun strongly θ-I-sürekli olmasıdır.

Teorem 4.2.7: $f:(X,\tau,I) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer f fonksiyonu strongly θ-I-sürekli ise, $f|_A:(A,\tau_A,I) \to (Y,\upsilon)$ kısıtlanmış fonksiyonu da strongly θ-I-süreklidir.

İspat: f fonksiyonu strongly θ-I-sürekli olsun. $V \subset Y$ açık kümesi alalım. f fonksiyonu strongly θ-I-sürekli olduğundan $f^{-1}(V)$ Teorem 4.2.1 (c) gereği θ-I-açık olur. Buradan $f|_A{}^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V)$ olup $f|_A$ kısıtlanmış fonksiyonu da strongly θ-I-süreklidir.

Teorem 4.2.8: (X,τ,I) ideal topolojik uzayın açık(kapalı) A ve B alt kümeleri verilsin, öyleki $X = A \cup B$ olsun. Eğer $f|_A:(A,\tau_A,I) \to (Y,\upsilon)$ ve $f|_B:(B,\tau_B,I) \to (Y,\upsilon)$ kısıtlanmış fonksiyonlarının her ikisi de strongly θ-I-sürekli ise, f:(X,τ,I)→(Y,υ) fonksiyonu da strongly θ-I-süreklidir.

İspat: A ve B kümeleri açık kümeler olsun. Herhangi $V \subset Y$ açık kümesi verilsin. Bu takdirde, $f^{-1}(V) = f|_A{}^{-1}(V) \cup f|_B{}^{-1}(V)$ olur. $f|_A$ ve $f|_B$ kısıtlanmış fonksiyonları strongly θ-I-sürekli olduğundan, Teorem 4.2.1 (c) gereği, $f|_A{}^{-1}(V)$ ve $f|_B{}^{-1}(V)$ θ-I-açık olduğundan bileşimi olan $f^{-1}(V)$ kümesi de θ-I-açık olur. Böylece f fonksiyonu strongly θ-I-süreklidir. A ve B kümeleri kapalı olmaları halinde, ispat benzer şekilde yapılır.

4.3. Strongly θ-I-süreklilik İçin Yeter Şartlar

Teorem 4.3.1: $f:(X,\tau,I) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu sürekli olsun. Eğer Y uzayı regüler uzay ise, f fonksiyonu strongly-θ-I-süreklidir.

İspat: $x \in X$ ve Y uzayının içinde $f(x) \in V$ açık küme olsun. Y uzayı regular olduğundan, $f(x) \in W \subset Cl(W) \subset V$ olacak şekilde bir W açık kümesi vardır. f sürekli olduğundan, $x \in f^{-1}(W) \subset Cl^*(f^{-1}(W)) \subset Cl(f^{-1}(W)) \subset f^{-1}(Cl(W)) \subset f^{-1}(V)$ dir. Şimdi $U = f^{-1}(W)$ alalım. O halde $f\big(Cl^*(U)\big) \subset V$ gösterir ki f fonksiyonu strongly θ-*I*-süreklidir.

Tanım 4.3.1: $f: (X, \tau, I) \to (Y, \upsilon)$ fonksiyonun grafiği $G(f)=\{(x,f(x)):x\in X\}$ şeklinde gösterilsin. Her $(x,y)\notin G(f)$ için, $(Cl^*(U)\text{x}V)\cap G(f)=\emptyset$ olacak şekilde x ve y noktalarını sırasıyla içeren U ve V açık komşuluğu varsa, $G(f)$ grafiği $X\text{x}Y$ uzayında θ-*I*-kapalı denir.

Lemma 4.3.1 : $f: (X, \tau, I) \to (Y, \upsilon)$ fonksiyonunun $G(f)$ grafiği $X\text{x}Y$ uzayında θ-*I*-kapalı küme olması için gerek ve yeter şart her $(x,y)\notin G(f)$ için $f\big(Cl^*(U)\big) \cap V = \emptyset$ olacak şekilde x ve y noktalarını sırasıyla içeren U ve V açık komşuluğunun olmasıdır.

İspat: Tanımın direkt sonucudur.

Teorem 4.3.2: $f: (X, \tau, I) \to (Y, \upsilon)$ fonksiyonu strongly θ-*I*-sürekli ve Y uzayı Hausdorff ise, o zaman $G(f)$ θ-I-kapalıdır.

İspat: $x \in X$ ve $y \neq f(x)$ olsun. Y uzayı Hausdorff olduğundan $f(x) \in W$ ve $y \in V$ ayrık, açık kümeleri vardır. f strongly θ-*I*-sürekli fonksiyon olduğundan, $f\big(Cl^*(U)\big) \subset W$ olacak şekilde bir $x \in U$ açık kümesi vardır. Bu nedenle

$$f\big(Cl^*(U)\big) \cap V = \emptyset$$

olur. Bu gösterir ki $G(f)$ grafiği θ-*I*-kapalıdır.

Uyarı 4.3.1: Strongly θ-sürekli (Noiri, 1980) , strongly θ-*I*-sürekli Tanım 4.1.3 (Yüksel ve ark., 2010) ve süreklilik tanımlarından aşağıdaki gereklilik aşikardır.

strongly θ-sürekli $\Rightarrow$strongly θ-*I*-sürekli $\Rightarrow$ süreklidir

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

(X,τ) topolojik uzayında tanımlanan strongly θ-sürekli fonksiyonları inceledik. Bu süreklilik çeşidinin ideal topolojik uzaylardaki tanımını ele alarak bilinen bu süreklilik çeşitleriyle karşılaştırdık ve bu süreklilik çeşitine ait yeni özellikler ve karekterizasyonlar elde ettik.

İncelemiş olduğumuz bu süreklilik çeşitinden yola çıkılarak yeni süreklilik çeşitleri tanımlanarak bu süreklilik çeşitine dair yeni özellikler elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Açıkgöz A. , Noiri T. , Yüksel Ş. , 2004, A decomposition of continuity in ideal topological spaces, Acta. Math. Hungar. , Vol. 105(4) ,285-289.

Bourbaki N. ,1966, General Topology, Part 1, Addison-Wesley, Reading, Mass.

Crossley S. G. and Hildebrand S. K., 1972, Semi-topological properties, Fund. Math., 74, 233-254.

Çaylak E.G., 2009, Topolojik ve İdeal Topolojik Uzaylarda Süreklilik ve Uzay Çeşitleri Üzerine Bir Çalışma, Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstütüsü, 47-48.

Jankovic D. , Hamlett T.R. ,1990, New topologies from old via ideals, Amer.Math.Monthly.,Vol. 97, 295-310.

Hayashi E., 1964, Topologies defined by local properties, Math. Ann., 156, 205-215.

Kuratowski K., 1933, Topologie I, Warszawa.

Levine N., 1963, Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, Amer. Math. Monthly, Vol. 70 , 36-41.

Long P.E. and Herrington L.L. 1981, J. Korean Math. Soc. Vol 18, No. 1.

Noiri T., 1980 ,On δ-Continuous functions, Jour. of the Korean Math. Soc., 16, No. 2 pp. 161-166.

Samuels P. ,1975, A topology formed from a given topology and ideal, J.London.Math. Hungar.Soc.(2),Vol. 10, 409-416.

Stone, M.H. 1937, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, TAMS 41, 375-381.

Vaidyanathaswamy R., 1960, Set topology, Chelsea Publishing Company, New York.

Velicko N.V. ,1968, H-closed topological spaces, Amer. Math. Soc. Transl., Vol. 78 , 103-118.

Yüksel Ş., Şimsekler T.H., Ergul Z.G. and Noiri T., 2010, Strongly θ-pre-*I*-continuous Functions, ''Vasile Alecsandri'' University of Bacau, Faculty of Sciences Scientific Research Series Mathematics and Informatics, Vol.20, No.2, 111-126.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Sinan KOCAÖZ
Uyruğu	**:**	T.C
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Aksaray/28.09.1981
Telefon	**:**	-
Faks	**:**	-
e-mail	**:**	-

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Ortaköy Lisesi , Ortaköy, Aksaray**	**1999**
Üniversite	:	**Selçuk Üniversitesi, Merkez, Konya**	**2004**
Yüksek Lisans	:	**Selçuk Üniversitesi, Merkez, Konya**	**2011**
Doktora	:	**-**	