



**T.C.**  
**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HEPTADIAGONAL MATRİSLERİN POZİTİF  
TAMSAYI KUVVETLERİNİN  
HESAPLANMASI**

**Murat GÜBEŞ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**MART-2011**  
**KONYA**  
**Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL VE ONAYI

Murat GÜBEŞ tarafından hazırlanan “**Heptadiagonal Matrislerin Pozitif Tamsayı Kuvvetlerinin Hesaplanması**” adlı tez çalışması 04/03/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

### İmza

#### Başkan

Doç. Dr. Galip OTURANÇ

.....

#### Danışman

Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

.....

#### Üye

Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

.....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Bayram SADE  
FBE Müdürü

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## **DECLARATION PAGE**

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Murat GÜBEŞ

Tarih:04/03/2011

# ÖZET

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

### HEPTADIAGONAL MATRİSLERİN POZİTİF TAMSAYI KUVVETLERİNİN HESAPLANMASI

Murat GÜBEŞ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

2011, 38 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Durmuş BOZKURT  
Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN  
Doç. Dr. Galip OTURANÇ

Bu çalışmada, genel bir Heptadiagonal matris tanımı verildi. Buna bağlı olarak belli tipteki heptadiagonal bir matrisin  $m$  inci ( $m \in \mathbb{N}$ ) kuvvetinin genel ifadesi elde edildi. Yine genel ifade içinde bu tip matrislerin Jordan formu, dönüşüm matrisi ve tersi elde edilmiştir.

Bunun için;  $H$  belli tipteki bir heptadiagonal matris,  $J$  bu matrisin Jordan formu ve  $P$  dönüşüm matrisi olmak üzere  $H^m = PJ^mP^{-1}$  ifadesinden yararlanılmıştır. Burada seçilen matrisin öz değerleri; kökleri

$$x_{nk} = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), k = \overline{1, n}$$

olarak tanımlanan

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos(x))}{\sin(\arccos(x))}, -1 \leq x \leq 1$$

ikinci tür Chebyshev polinomlarına bağlı olarak bulunmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Chebyshev polinomları, Fark denklemleri, matris kuvveti, Pentadiagonal matrisler, Üçlü bant matrisler, Yedi bant matrisler.

**ABSTRACT**

**MS THESIS**

**ON COMPUTING OF POSITIVE INTEGER POWERS OF HEPTADIAGONAL  
MATRICES**

**Murat GÜBEŞ**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF  
SELÇUK UNIVERSITY  
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

**Advisor: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT**

**2011, 38 Pages**

**Jury**

**Prof. Dr. Durmuş BOZKURT**

**Assoc. Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN**

**Assoc. Prof. Dr. Galip OTURANÇ**

In this study, a general heptadiagonal matrix definition was given. According to the definition, the general expression of the  $m$ th powers ( $m \in \mathbb{N}$ ) for some type of heptadiagonal matrices was derived. Once again, in the general expression that was  $m$ th powers of heptadiagonal matrices Jordan Forms', transformation matrices and their inverses were obtained.

To do this;  $H$  is one type of heptadiagonal matrix,  $J$  is Jordan form of this matrix and  $P$  is impending the transformation matrix, to made use of the expression of  $H^m = PJ^mP^{-1}$ . Here, the eigenvalues of selected matrix are found by depending on the Chebyshev polynomials of second kind as described following formula,

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos(x))}{\sin(\arccos(x))}, -1 \leq x \leq 1$$

whose roots are defined as

$$x_{nk} = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), k = \overline{1, n}$$

**Keywords:** Chebyshev polynomials, difference equations, Heptadiagonal matrices, matrix powers, Pentadiagonal matrices, Tridiagonal matrices.

## ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim üyesi Prof. Dr. Durmuş BOZKURT danışmanlığında yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne yüksek lisans tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, literatürdeki bu konuyla ilgili çalışma özetlerine, tezin amacı ve kapsamı ile ilgili bilgilere yer verilmiştir. İkinci bölümde, özel tipteki bazı matrislerle ilgili bilgiler yer almaktadır. Üçüncü bölümde ise bu çalışma için gerekli olan Chebyshev polinomları ve fark denklemlerinden bahsedilmiştir. Dördüncü bölüm çalışmanın esas kısmı olup, bu bölümde sırasıyla belli tipteki heptadiagonal bir matrisin, Chebyshev Polinomlarından faydalanılarak öz değer ve bunlara bağlı öz vektörlerinden oluşan  $P$  dönüşüm matrisi ve tersinin formülleri ile keyfi pozitif tamsayı kuvvetlerinin formülü elde edilmiştir. Beşinci bölümde sonuç ve önerilere yer verilmiş olup, altıncı bölüm ise yararlanılan kaynaklardan oluşmaktadır.

Bu çalışma boyunca benden maddi, manevi her konuda desteğini esirgemeyen ve beni her şekilde motive eden kıymetli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Durmuş BOZKURT'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman bana güven veren, çalışmalarımnda ve günlük hayatımda beni hiç yalnız bırakmayan nişanlım Arş. Gör. Neşe ÖZTÜRK'e çok teşekkür ederim.

Doğduğum günden bugüne beni en iyi şekilde yetiştirmeye çalışan, emeklerini asla ödeyemeyeceğim sevgili aileme teşekkür ve minnetlerimi sunarım.

Murat GÜBEŞ  
KONYA-2011

# İÇİNDEKİLER

|   |             |
|---|-------------|
| <b>ÖZET</b> .....   | <b>iv</b>   |
| <b>ABSTRACT</b> .....   | <b>v</b>    |
| <b>ÖNSÖZ</b> .....  | <b>vi</b>   |
| <b>İÇİNDEKİLER</b> .....  | <b>vii</b>  |
| <b>SİMGELER VE KISALTMALAR</b> .....  | <b>viii</b> |
| <b>1. GİRİŞ</b> .....   | <b>1</b>    |
| 1.1. Amaç ve Kapsam .....   | 2           |
| 1.2. Kaynak Araştırması.....  | 2           |
| <b>2. Temel Tanım ve Kavramlar</b> .....  | <b>4</b>    |
| 2.1. Özel Matris Tipleri.....   | 4           |
| 2.1.1. Toeplitz matrisler .....   | 4           |
| 2.1.2. Circulant matrisler .....  | 4           |
| 2.1.3. Tridiagonal-anti tridiagonal matrisler .....                                       | 5           |
| 2.1.4. Pentadiagonal-anti pentadiagonal matrisler .....                                   | 6           |
| 2.1.5. Heptadiagonal-anti heptadiagonal matrisler.....                                    | 7           |
| 2.2. Karakteristik Polinom, Öz değer ve Öz vektörler .....                                | 8           |
| 2.3. Köşegenleştirme .....  | 9           |
| 2.4. Jordan Form .....  | 10          |
| <b>3. Fark Denklemleri ve Chebyshev Polinomları</b> .....                                 | <b>11</b>   |
| 3.1. Fark Denklemleri .....   | 11          |
| 3.2. Chebyshev Polinomları .....  | 13          |
| 3.2.1. Birinci tür chebyshev polinomları.....   | 13          |
| 3.2.2. İkinci tür chebyshev polinomları.....  | 15          |
| 3.2.3. Chebyshev polinomlarının bazı özellikleri.....                                     | 16          |
| <b>4. BAZI HEPTADİAGONAL MATRİSLERİN TAMSAYI KUVVETLERİNİN HESAPLANMASI</b> .....         | <b>17</b>   |
| 4.1. Simetrik Heptadiagonal Bir Matrisin Pozitif Tamsayı Kuvvetlerinin Hesaplanması ..... | 17          |
| 4.2. Nümerik Örnekler .....   | 31          |
| <b>5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER</b> .....  | <b>35</b>   |
| <b>KAYNAKLAR</b> .....  | <b>36</b>   |
| <b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....   | <b>38</b>   |

## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

$f(k, y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+n}) = 0$ :  $n$ . mertebe genel bir fark denklemi,

$h_k$ : dönüşüm matrisin tersinde öz değerlere bağlı değişkenler.

$H_n$ :  $n$ -kare heptadiagonal matris,

$\{H^m\}_{ij}$ :  $H$  heptadiagonal matrisinin  $(i, j)$  inci elemanı,

$J$ : heptadiagonal matrisin Jordan formu,

$M_n$ :  $n$ -kare matrislerin kümesi,

$m$ : ( $m \in \mathbb{N}$ ),  $H$  matrisinin tamsayı kuvveti için değişken,

$T_n(x)$ : birinci dereceden Chebyshev polinomları,

$U_n(x)$ : ikinci dereceden Chebyshev polinomları,

$\lambda_k$ : heptadiagonal matrisin öz değerleri,

## 1. GİRİŞ

Matrisler günümüzde birçok alanda kullanılmakta ve birçok sistemin çözümüne de temel teşkil etmektedir. Özellikle; nümerik analiz, bazı diferansiyel denklemlerin, gecikmeli diferansiyel denklemlerin, fark denklemlerinin ( Agarwal, 1992), sınır değer problemlerinin çözümlerinde, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde, texture modellemesinde (Picard ve Elfadel, 1992), iletişim sistemi analizinde ( Rimas, 1977 ve Rimas, July 5–9, Leuven, Belgium) ve daha birçok uygulamalı alanda tridiagonal-antitridiagonal, pentadiagonal-antipentadiagonal, heptadiagonal-antiheptadiagonal matrislerin determinantları, öz değer-öz vektörleri, tersleri ve kuvvetleri ile karşılaşmaktadır. Bunlardan yola çıkılarak literatürde birçok çalışma yapılmıştır. Özellikle Jonas Rimas'ın 2005-2010 yıllarında (anti)tridiagonal, (anti)pentadiagonal matrislerin kuvvetlerinin genel ifadesi ile ilgili birçok çalışması vardır.

Rimas çalışmalarında yöntem olarak önce bir matris ele almış, bu matrisin kuvvetlerine ulaşabilmek için belli determinantlar tanımlamış, daha sonra bu determinantlar yardımıyla bir fark denklemini elde etmiştir. Elde edilen fark denkleminin çözümünden, kökleri ve birçok özelliği bilinen Chebyshev Polinomlarına geçiş yaparak matrisin öz değerlerini formüle etmiş ve  $H^m = PJ^mP^{-1}$  benzerlik dönüşüm formülünden yararlanarak matrisin kuvvetlerine ulaşmıştır. Burada orijinal olan, matrisin karakteristik polinomunun köklerinden Chebyshev polinomlarına geçiş, öz vektörleri bu polinomlar cinsinden hesaplayıp dönüşüm matrisinin ve tersinin bu polinomlara göre formüle edilebilmesidir.

Bunları göz önüne aldığımızda Rimas ve Gutiérrez- Gutiérrez (anti)tridiagonal, (anti)pentadiagonal matrislerin bazı çeşitleri için kuvvet formülleri vermişlerdir. Bizde bu çalışmada, bu materyal ve metotlar yardımıyla bazı heptadiagonal matris türleri için kuvvet formüllerini, öz değer ve öz vektör formüllerini ve bu öz vektörlere bağlı dönüşüm matrislerinin ve terslerinin formüllerini elde ettik. Tezin esas kısmı, ele alınan heptadiagonal matrislerin kuvvet formülleri, dönüşüm matrislerinin ve terslerinin formüllerinden oluşmaktadır.

## 1.1. Amaç ve Kapsam

Chebyshev polinomlarından ve fark denklemlerinden faydalanarak, Rimas'ın yapmış olduğu çalışmaları *heptadiagonal* tipteki matrislere taşıyıp, bu tip matrislerin kuvvetleri için yeni formüller türetmek çalışmamızın esas amacını teşkil etmektedir. Çalışmamızın özellikle uygulamalı bilimlerde karşılaşılan büyük boyutlu denklem sistemlerinin çözümlerinde kolaylık sağlayacağı ve ayrıca literatürde *heptadiagonal* matrislerle ilgili yapılan çalışmaların sınırlı sayıda olması sebebiyle bu konuyla ilgili çalışmalara katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

## 1.2. Kaynak Araştırması

Bu bölümde konuyla alakalı önceden yapılmış olan ve çalışmamıza kaynak teşkil eden çalışmalara ve özetlerine yer verilmiştir.

J. Rimas (2005), “*On computing of arbitrary positive integer powers for one type of symmetric tridiagonal matrices of odd order—I*” başlıklı çalışmasında tek mertebeden simetrik tridiagonal bir matrisin benzerlik dönüşüm formülü yardımıyla  $l$  inci ( $l \in \mathbb{N}$ ) kuvvetinin genel formülünü elde etmiştir.

J. Rimas (2006), yukarıda bahsetmiş olduğumuz makalesinin devamında tek mertebeden simetrik tridiagonal bir matrisin  $l$  inci ( $l \in \mathbb{N}$ ) kuvvet formülü için; matrisin öz vektörlerinin, öz değerlere bağlı Jordan formunun, öz vektörlere bağlı dönüşüm matrisi ve tersinin formüllerini vermiştir.

Yine J. Rimas (2008) de “*On computing of arbitrary positive integer powers for one type of symmetric pentadiagonal matrices of even order*” çalışmasıyla çift mertebeden simetrik bir pentadiagonal matrisin; Chebyshev polinomlarına bağlı öz değerlerini, öz vektörlere bağlı dönüşüm matrisi ve tersinin formüllerini,  $l$  inci ( $l \in \mathbb{N}$ ) kuvvet formülünü elde etmiştir.

J. Gutiérrez- Gutiérrez 2008 de yapmış olduğu “*Positive integer powers of certain tridiagonal matrices*” isimli çalışmasında J. Rimas'ın 2005-2007 de yayınlanan makalelerini genişleterek  $n \times n$  *Hermityen tridiagonal* matrislerin kuvvetlerini veren bir formül vermiştir.

A. A. Karawia (2010), üç ayrı çalışmasında sırasıyla; genel terslenebilir devirli heptadiagonal matrisler için güvenilir bir hesaplama algoritması tanımlamış, devirli heptadiagonal lineer denklem sistemlerinin çözümleri için Sherman-Morrison-Woodbury formülüne dayalı yeni bir hesaplama formülü sunmuş ve bu iki çalışmaya dayalı herhangi bir tekil olmayan genel devirli heptadiagonal matrisin determinantını ve anti heptadiagonal matrisin tersini bulmak için algoritmalar elde etmiştir.

Mohamed Elouafi, A. Driss Aiat Hadj (2009), çalışmalarında tridiagonal bir matrisin öz değer ayrışımını sunmuşlar, tridiagonal matrislerin kuvvetlerini ve terslerini elde etmişler ve bununla alakalı bazı bağıntılar ortaya koymuşlardır.

R. Witula, D. Slota (2008), “*Some phenomenon of the powers of certain tridiagonal and asymmetric matrices*” makalelerinde, her bir bandı ayrı ayrı aynı elemandan oluşan bazı asimetrik matrislerin reel ve kompleks kuvvetlerini hesaplayan yeni bir metot sunmuşlardır.

W. Kratz, M. Tentler (2008), çok hızlı (superfast algorithms) ve kararlı algoritmalarla simetrik Pentadiagonal ve Heptadiagonal matrislerin herhangi öz değerlerini hesaplamak için bölmesiz rekürans formülleri elde etmişlerdir.

Benzer bir şekilde Xi-Le Zhao, Ting-Zhu Huang (2008), “*On the inverse of a general pentadiagonal matrix*” isimli çalışmalarında genel pentadiagonal matrislerin tersleri için etkili bir algoritma geliştirmiş ve açıklayıcı örnekler vermişlerdir.

M. El-Mikkawy, El-Desouky Rahmo (2008) çalışmalarında terslenebilir genel tridiagonal ve anti-tridiagonal matrisler için yeni bir rekürans algoritması ve örnekler sunmuşlardır.

Koulaei M.H., Toutounian F. (2007) “*On computing of block ILU preconditioner for block tridiagonal systems*” isimli çalışmalarında, sınırlama tekniği kullanarak tridiagonal ve pentadiagonal matrislerin yaklaşık ters çarpanlarının hesabı için rekürans formülü vermişlerdir.

## 2. Temel Tanım ve Kavramlar

Bu bölümde, çalışmamızın ana kısmında faydalanacağımız bazı özel matris tipleri ve özelliklerinden bahsedilecektir.

### 2.1. Özel Matris Tipleri

#### 2.1.1. Toeplitz Matrisler

**Tanım 2.1.**  $T_n = [t_{k,j}; k, j = 0, 1, \dots, n - 1]$  olmak üzere  $n \times n$  tipinde ve

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & & \\ t_2 & t_1 & t_0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ t_{n-1} & & & \cdots & t_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilen matrise *Toeplitz Matris* denir. Burada  $t_{k,j} = t_{k-j}$  şeklindedir.

*Toeplitz* matrislerin birçok alanda uygulaması da bulunmaktadır. Örneğin; diferansiyel ve integral denklemlerin çözümünde, sinyal işlemede, fizik ve istatistik problemlerinde *Toeplitz matrisleri* kullanılır (M. Gray 2006).

#### 2.1.2. Circulant Matrisler

**Tanım 2.2.**  $n$ . mertebeden bir circulant matris bir kare matris olup şu şekilde verilir;

$$C = \text{circ}(c_1, c_2, c_3, \dots, c_n) \\ = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_n & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca circulant matrisi  $C = (c_{jk}) = (c_{k-j+1})$  ile de tanımlayabiliriz (Davis 1979).

Tanımdan görülüyor ki, her satırdaki elemanlar bir sütun sağa kayarak matrisi oluştururlar. Tanım 2.2.1 ile Tanım 2.2.2 karşılaştırıldığında her circulant matrisin bir Toeplitz matris olduğu fakat tersinin her zaman doğru olması gerekmediği sonucuna ulaşırız (J. Davis 1979).

### 2.1.3. Tridiagonal-Anti Tridiagonal Matrisler

**Tanım 2.3.**  $T_n = [t_{ij}] \in M_n$  ve  $|i - j| > 1$  için  $t_{ij} = 0$  şeklinde tanımlanan  $n \times n$  tipinde bir kare matrise *tridiagonal matris* denir. Yani,

$$T_n = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & & & 0 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & & \\ & t_{32} & t_{33} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & & & t_{n,n-1} & t_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisi genel bir tridiagonal matristir (Zhang 1999, Horn ve Johnson 1990)

**Tanım 2.4.**  $T_n$ ,  $n$ -kare tridiagonal bir matris ve

$$R = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & 1 \\ & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ 1 & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde kare bir matris olmak üzere

$$B = T_n R$$

olacak şekildeki  $B$  matrisine *anti-tridiagonal matris* denir (El-Mikkawy ve Rahmo 2009). Anti-tridiagonal matrisler

$$B = \begin{bmatrix} 0 & & & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ & & b_{2,n-2} & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ & \ddots & b_{3,n-2} & b_{3,n-1} & \\ b_{n-1,1} & \ddots & \ddots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & & & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde genel bir ifadeyle gösterilebilir.

Literatürde tridiagonal (anti-tridiagonal) matrislerin tersleri, kuvvetleri ve determinantları hakkında birçok çalışma vardır (Elouafi ve Hadj 2009, Rimas 2005, Witula ve Slota 2008).

#### 2.1.4. Pentadiagonal-Anti Pentadiagonal Matrisler

**Tanım 2.5.**  $P_n = [p_{ij}] \in M_n$  ve  $|i - j| > 2$  için  $p_{ij} = 0$  şeklinde tanımlanan  $n \times n$  tipindeki bir kare matrise *pentadiagonal matris* denir (Zhang 1999, Horn ve Johnson 1990). Yani,

$$P_n = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & & & & & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & & & & \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & & & \\ & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} & p_{46} & & \\ & & p_{53} & p_{54} & p_{55} & & \ddots & \\ & & & p_{64} & & & \ddots & p_{n-2,n} \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & p_{n-1,n} \\ 0 & & & & & p_{n,n-2} & p_{n,n-1} & p_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisi genel bir pentadiagonal matristir.

**Tanım 2.6.**  $P_n$ ,  $n$ -kare pentadiagonal matris ve

$$R = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & 1 \\ & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde  $n$ -kare bir matris olmak üzere



$$R = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & \\ 1 & 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlı  $n$ -kare bir matris olmak üzere,

$$B = H_n R$$

olacak şekilde tanımlanan  $B$  matrisi *anti-heptadiagonal* bir matristir ( El-Mikkawy ve Rahmo 2009).

$$B = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & b_{1,n-3} & b_{1,n-2} & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ & & & & & & & & & b_{2,n-4} & b_{2,n-3} & b_{2,n-2} & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ & & & & & & & & & b_{3,n-5} & b_{3,n-4} & b_{3,n-3} & b_{3,n-2} & b_{3,n-1} & b_{3n} \\ & & & & & & & & & b_{4,n-6} & b_{4,n-5} & b_{4,n-4} & b_{4,n-3} & b_{4,n-2} & b_{4,n-1} & b_{4n} \\ & & & & & & & & & \ddots & b_{5,n-6} & b_{5,n-5} & b_{5,n-4} & b_{5,n-3} & b_{5,n-2} & b_{5,n-1} \\ b_{n-3,1} & & & & & & & & & \ddots & b_{6,n-6} & b_{6,n-5} & b_{6,n-4} & b_{6,n-3} & b_{6,n-2} & \\ b_{n-2,1} & & & & & & & & & \ddots & b_{7,n-6} & b_{7,n-5} & b_{7,n-4} & b_{7,n-3} & & \\ b_{n-1,1} & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & b_{n4} & & & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde genel bir ifade ile yazabiliriz.

Çalışmamızın ana kısmında bu tip matrislerin bazı çeşitleri için tamsayı kuvvetlerini veren formüller, dönüşüm matrislerinin ve terslerinin formülüzasyonları ve nümerik örnekler verilecektir.

## 2.2. Karakteristik Polinom, Öz değer ve Öz vektörler

$$(\lambda I - A)x = 0 \text{ veya } Ax = \lambda x \quad (2.1)$$

lineer homojen denklem sistemini göz önüne alalım.

Burada  $I$ ,  $n \times n$  birim matristir.  $A$  matrisi denklem sisteminin katsayılar matrisi olmak üzere  $(\lambda I - A)$  ifadesini,

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

şeklinde yazalım. Lineer homojen denklem sisteminin sıfır çözümden başka çözümünün olabilmesi için bu determinantın sıfıra eşit olması gerekir.

$|\lambda I - A|$  determinantını açarak hesaplırsak,  $\lambda'$ 'ya bağlı  $n$ . dereceden monik bir polinom elde ederiz.

**Tanım 2.9.** Bir  $F$  cismi üzerinde  $A = [a_{ij}] \in M_n$  şeklinde tanımlı olsun. Bu taktirde  $\det(\lambda I - A)$  ifadesinin hesaplanmasıyla oluşan polinoma  $A$  matrisinin *karakteristik polinomu* denir (Bozkurt ve ark. 2007, Strang 1988, Harmancı ve Güngöroğlu 2000).

$\det(\lambda I - A) = 0$  şeklindeki denkleme *karakteristik denklem* ve bu denklemin köklerine de  $A$  matrisinin *öz değerleri* denir. Öz değerlere karşılık gelen her bir  $x \neq 0$  vektörüne de  $A$  matrisinin *öz vektörleri* denir (Bozkurt ve ark 2007, Strang 1988, Harmancı ve Güngöroğlu 2000)

### 2.3. Köşegenleştirme

$A$  ve  $B$   $n \times n$  iki matris olsun.  $P^{-1}AP = B$  olacak şekilde her zaman tekil olmayan bir  $P$  matrisi bulunabiliyorsa  $A$  ve  $B$  matrislerine *benzerdir* denir.  $P^{-1}AP$  çarpımına da *benzerlik dönüşümü* denir (Meyer 2000).

**Teorem 2.1.** Benzer matrislerin kuvvetleri de benzerdir (Taşcı 2001, Bozkurt ve ark. 2007, Meyer 2000)

**İspat:**  $A$  ve  $B$  benzer matrisler olduğundan  $P^{-1}AP = B$  dir. Bu taktirde göstermemiz gereken

$$P^{-1}A^kP = B^k$$

olduğudur. Bunu  $k$  üzerinden tümevarımla yapalım.  $k = 2$  için doğruluğunu gösterelim.

$$B^2 = BB = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P$$

olup doğrudur. Şimdi  $k - 1$  için doğru olsun ve  $k$  için doğruluğunu gösterelim.

$$B^{k-1} = P^{-1}A^{k-1}P$$

doğru olduğundan

$$B^k = B^{k-1}B = (P^{-1}A^{k-1}P)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^kP$$

olup istenen elde edilir.

$A$   $n \times n$  matrisi bir köşegen matrise benzer ise bu matris köşegenleştirilebilir. Başka bir ifadeyle  $D$  köşegen bir matris olmak üzere

$$P^{-1}AP = D$$

şeklinde tekil olmayan bir  $P$  matrisi varsa  $A$  köşegenleştirilebilir (Meyer 2000, Taşcı 2001).

## 2.4. Jordan Form

**Tanım 2.10.**  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ ;  $A$   $n \times n$  matrisinin öz değerleri olmak üzere bu matrisin *Jordan formu* öz değerlerin katlılığına göre:

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \dots \neq \lambda_n$  ise  $A$  matrisinin Jordan formu;

$$J = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \dots \neq \lambda_i = \lambda_{i+1} \neq \dots \neq \lambda_n$  olması durumunda  $A$  matrisinin Jordan formu;

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & 0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \lambda_i & 1 & \\ & & & & \lambda_{i+1} & \ddots \\ 0 & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

eğer öz değerler hepsi birbirine eşitse, yani  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n$  ise Jordan form;

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & 1 & & \\ & & \lambda_3 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir ( Strang 1988, Meyer 2000, Bozkurt ve ark. 2007 )

### 3. Fark Denklemleri ve Chebyshev Polinomları

Bu bölümde çalışmamızda önemli bir yere sahip olan ve kuvvet formülü için sıkça kullandığımız birinci ve ikinci mertebe fark denklemleri ile birinci tür ve ikinci tür Chebyshev polinomları ve bazı özellikleri verilecektir.

#### 3.1. Fark Denklemleri

Matematiğin, genellikle uygulamalı alanlarında  $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  şeklindeki diferansiyel denklemleri sık kullanırız. Böyle bir denklemin çözümünde  $y(x)$  fonksiyonu, sürekli bir fonksiyon şeklinde olursa çözüme çok zor ulaşılır veya çözüm bulunamaz. Buradan hareketle eğer  $x$ 'i sürekli olmayacak şekilde alırsak  $y(x)$  kesikli çözümüne oldukça kolay ulaşabiliriz. Bunun sonucu olarak fark denklemlerinden bahsedebiliriz ( Oturanç ve ark. 2008 ).

**Tanım 3.1.**  $x$  bağımsız ve  $y(x)$  bağımlı değişken olmak üzere  $y(x)$  ve  $x$ 'in değişik mertebeden ileri farkını bulunduran denklemlere *fark denklemleri* denir.

Genel olarak bir fark denklemini;

$$f(k, y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+n}) = 0 \quad (3.1)$$

şeklinde gösterilir. Aynı zamanda  $\Delta$  fark operatörü olmak üzere (3.1) ifadesini;

$$g(k, y(k), \Delta y(k), \dots, \Delta^n y(k)) = 0$$

şeklinde de yazabiliriz (Oturanç ve ark. 2008, Agarwal 1992).

Eğer (3.1) ifadesi

$$\sum_{i=0}^n a_i(k) y_{k+i} = b(k) \quad (3.2)$$

şeklinde yazılırsa lineer fark denklemi olur (Agarwal 1992). Burada  $b(k)$  en az bir  $k \in \mathbb{N}$  için sıfırdan farklıysa (3.2) ifadesi *homojen olmayan lineer fark denklemi* ve  $b(k) = 0$  olursa (3.2) ifadesi *homojen lineer fark denklemi* olarak adlandırılır (Agarwal 1992, Oturanç ve ark. 2008).

### Örnekler 3.1.

$$\Delta^2 y_k + 2\Delta y_k + y_k = 0$$

homojen lineer fark denklemdir.

$$y_{k+3} + 4y_{k+2} + 4y_{k+1}^2 - y_k^3 = 2x$$

ise lineer ve homojen olmayan fark denklemdir.

Şimdi kısaca lineer homojen fark denklem çözümlerini verelim.

$$y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \dots + a_1y_{k+1} + a_0y_k = 0 \quad (3.3)$$

$n$ . mertebeden genel lineer homojen fark denklemi için çözüm,

$$y_k = r^k$$

şeklindedir.

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0$$

(3.3) ifadesinin karakteristik denklemi olup, bu denklemin kökleri (3.3) denkleminin çözümleridir. Genel çözüm;

$$y_k = c_1r_1^k + c_2r_2^k + \dots + c_nr_n^k \quad (3.4)$$

olarak bulunur (Oturanç ve ark. 2008 , Agarwal 1992).

Genel çözüm, karakteristik denklemin köklerinin reel ve farklı olması durumunda (3.4) şeklinde; bazı köklerin eşit olması durumunda, yani

$r_1 = r_2 = r_3, r_4 = r_5 = r_6 = r_7 = r_8, \dots$  şeklinde ise genel çözüm

$$y_k = (c_1 + c_2k + c_3k^2)r_1^k + (c_4 + c_5k + c_6k^2 + c_7k^3 + c_8k^4)r_4^k + \dots$$

olur (Oturanç ve ark. 2008 , Agarwal 1992).

**Örnek 3.2.**  $y_{k+2} - 6y_{k+1} + 9y_k = 0$  fark denkleminin çözümü;

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

karakteristik denklemin kökleri  $r_1 = r_2 = 3$  olmak üzere

$$y_k = (c_1 + c_2k)(3)^k$$

şeklindedir. Yine  $y_{k+4} - 8y_{k+3} + 23y_{k+2} - 28y_{k+1} + 12y_k = 0$  fark denkleminin çözümü;

$$r^4 - 8r^3 + 23r^2 - 28r + 12 = 0$$

karakteristik denklemin kökleri  $r_1 = 1, r_2 = r_3 = 2, r_4 = 3$  olmak üzere

$$y_k = c_1(1)^k + (c_2 + c_3k)(2)^k + c_4(3)^k$$

olarak bulunur. Burada  $c_k$ 'lar başlangıç koşulu verilerek elde edilir.

### 3.2. Chebyshev Polinomları

#### 3.2.1. Birinci Tür Chebyshev Polinomları

$x = \cos\theta$  olmak üzere

$$T_n(x) = \cos(n\theta) = \cos(\arccos x) \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlı  $n$ . derece polinoma *birinci tür Chebyshev Polinomu* denir (Rivlin 1974, Mason and Handscomb 2003).

Bu polinomları açık bir şekilde aşağıdaki gibi yazabiliriz;

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ &\vdots \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Bu polinomların kökleri  $[-1,1]$  aralığında olup;

$$x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, k = \overline{1, n} \quad (3.6)$$

şeklinde ifade edilebilmektedir.

Bu polinomlar için  $T_0(x) = 1$  ve  $T_1(x) = x$  başlangıç koşuluyla  $n \geq 2$  olmak üzere

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

rekürans bağıntısı tanımlı olup,

$$\begin{bmatrix} x & 1 & & & \\ 1 & 2x & 1 & & \\ & 1 & 2x & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2x \end{bmatrix}$$

şeklinde  $n \times n$  üçlü bant bir matrisin determinanı olarak da yazılabilir (Mason and Handscomb 2003, Fox and Parke 1968, Rivlin 1974).

### 3.2.2. İkinci Tür Chebyshev Polinomları

$x = \cos\theta$  olmak üzere

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)} \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlanan  $n$ . derece polinomlara *ikinci tür Chebyshev Polinomu* denir (Rivlin 1974, Mason and Handscomb 2003, Fox and Parke 1968)

Yine bu polinomları açık bir şekilde,

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1 \\ U_1(x) &= 2x \\ U_2(x) &= 4x^2 - 1 \\ U_3(x) &= 8x^3 - 4x \\ U_4(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu polinomların kökleri de  $[-1,1]$  aralığında olup;

$$x_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = \overline{1, n} \quad (3.8)$$

şeklinindedir.

Bu polinomlar  $U_0(x) = 1$  ve  $U_1(x) = 2x$  başlangıç koşulları olmak üzere  $n \geq 2$  için

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanabilir ve

$$\begin{bmatrix} 2x & 1 & & & \\ 1 & 2x & 1 & & \\ & 1 & 2x & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2x \end{bmatrix}$$

şeklinde  $n - kare$  üçlü bant matrisin determinantı olarak da yazılabilir (Mason and Handscomb 2003, Fox and Parke 1968, Rivlin 1974).

### 3.2.3. Chebyshev Polinomlarının Bazı Özellikleri

Chebyshev polinomlarının bilinen bazı özellikleri ve birbirleriyle olan ilişkilerini aşağıdaki gibi verebiliriz (Mason and Handscomb 2003, Fox and Parke 1968):

$$T_i^2 - (x^2 - 1)U_{i-1}^2 = 1 \quad (\text{Pell denklem tanımı})$$

$$T_i + U_{i-1}\sqrt{x^2 - 1} = (x + \sqrt{x^2 - 1})^i \quad (\text{Pell denklem tanımı})$$

$$U_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$T_n(x) = \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}$$

$$T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x)$$

$$\frac{dT_n(x)}{dx} = nU_{n-1}(x) \text{ ve } \frac{dU_n(x)}{dx} = \frac{(n+1)T_{n+1}(x) - xU_n(x)}{x^2 - 1}$$

#### 4. BAZI HEPTADIAGONAL MATRİSLERİN TAMSAYI KUVVETLERİNİN HESAPLANMASI

Tezin bu bölümü çalışmanın esas kısmını oluşturmakta olup üç alt başlığa ayrılmıştır. Ele alınan bazı *heptadiagonal matrislerin* tamsayı kuvvetlerinin hesaplanması verilecektir. Bununla birlikte dönüşüm matrisleri ve terslerinin formülüzasyonu elde edilecektir.

##### 4.1. Simetrik Heptadiagonal Bir Matrisin Pozitif Tamsayı Kuvvetlerinin Hesaplanması

Pentadiagonal-antipentadiagonal, tridiagonal-antitridiagonal ve circulant matris çeşitlerinin bazı tiplerinin kuvvetleri için birçok çalışma yapılmıştır. Yapılan çalışmalar bize bazı uygulamalı bilimler için kolaylık sağlamaktadır. Bu durumu göz önüne alarak, Rimas'ın (2005-2006-2008) de yayınlamış olduğu çalışmalarının ışığında, ele almış olduğumuz simetrik heptadiagonal bir matrisin tamsayı kuvvet formülünü bir teoremlerle ifade edelim.

**Teorem 4.1.**  $H$   $n$ -kare matrisi,  $n = 3p, p = 1, 2, 3, \dots, \frac{n}{3}, p \in \mathbb{N}$  olmak üzere,

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & 1 & 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

şeklinde olsun.

Bu taktirde  $\lambda_k$ ,  $H$  matrisinin öz değerleri,  $U_n(x)$   $n$  inci derece ikinci tür Chebyshev polinomları,  $\{H^m\}_{ij}$  de  $H^m (m \in \mathbb{N})$ 'in  $(i, j)$  inci elemanı olacak şekilde;

$n = 3p, (p = 2, 4, 6, \dots, \frac{n}{3})$  için;

$$\begin{aligned} \{H^m\}_{i,j} &= \sum_{k=1}^{\frac{n}{6}} \lambda_{2k-1}^m h_{2k-1} U_{\frac{i-\delta_{ij}}{3}}\left(\frac{\lambda_{2k-1}}{2}\right) U_{\frac{j-\delta_{ij}}{3}}\left(\frac{\lambda_{2k-1}}{2}\right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\frac{n}{6}} \lambda_{2k}^m h_{2k} U_{\frac{n-\sigma_{ij}}{3}}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right) U_{\frac{j-\delta_{ij}}{3}}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right) \end{aligned}$$

ve

$$n = 3p, \left( p = 1, 3, 5, \dots, \frac{n}{3} \right), p \in \mathbb{N} \text{ için;}$$

$$\begin{aligned} \{H^m\}_{i,j} &= \sum_{k=1}^{\frac{n+3}{6}} \lambda_{2k-1}^m h_{2k-1} U_{\frac{i-\delta_{ij}}{3}}\left(\frac{\lambda_{2k-1}}{2}\right) U_{\frac{j-\delta_{ij}}{3}}\left(\frac{\lambda_{2k-1}}{2}\right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\frac{n-3}{6}} \lambda_{2k}^m h_{2k} U_{\frac{n-\sigma_{ij}}{3}}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right) U_{\frac{j-\delta_{ij}}{3}}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right) \end{aligned}$$

ifadeleri geçerlidir.

**İspat:** İspatı yapmak için birinci adımda (4.1) matrisinin öz değerlerini Chebyshev polinomları cinsinden formüle etmeye çalışalım. Bunun için (4.1) matrisinin karakteristik denklemi  $(\lambda I - H) = 0$  ( $I$ ,  $n$  inci mertebeden birim matris,  $\lambda$  öz değerler) olmak üzere

$$H_n(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \alpha & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & 1 & 0 & 0 & \alpha & \vdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} \quad (4.2)$$

ve

$$\Delta_n(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 1 & \alpha & \vdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \quad (4.3)$$

$n \times n$  determinantlarını tanımlayalım. Burada

$$\det(\lambda I - H) = H_n(\lambda) \quad (4.4)$$

olup determinant açarak elde edilebilir.

(4.2) ve (4.3) kullanılarak  $n = 3p, p = 1, 2, \dots, n/3$  için;

$$\begin{aligned} H_3(\alpha) &= \alpha^3 = (\alpha)^3 = (\Delta_1(\alpha))^3 \\ H_6(\alpha) &= \alpha^6 - 3\alpha^4 + 3\alpha^2 - 1 = (\alpha^2 - 1)^3 = (\Delta_2(\alpha))^3 \\ H_9(\alpha) &= \alpha^9 - 6\alpha^7 + 12\alpha^5 - 8\alpha^3 = (\alpha^3 - 2\alpha)^3 = (\Delta_3(\alpha))^3 \\ H_{12}(\alpha) &= \alpha^{12} - 9\alpha^{10} + 30\alpha^8 - 45\alpha^6 + 30\alpha^4 - 9\alpha^2 + 1 = (\alpha^4 - 3\alpha^2 + 1)^3 = (\Delta_4(\alpha))^3 \\ &\vdots \\ H_n(\alpha) &= \left( \frac{\Delta_n(\alpha)}{3} \right)^3 \end{aligned} \quad (4.5)$$

elde edilir. (4.4) ve (4.5) ifadelerinden  $\alpha = \lambda$  olduğu açıktır. Yine burada (4.5) ifadesini determinant açarak tümevarımla da gösterebiliriz. Ayrıca biliyoruz ki,

$$\Delta_n(\alpha) = \alpha\Delta_{n-1}(\alpha) - \Delta_{n-2}(\alpha) \quad (\Delta_0 = 1, \Delta_1 = \alpha, \Delta_2 = \alpha^2 - 1) \quad (4.6)$$

dır (Rimas 2005). (4.6) ifadesi ikinci dereceden lineer homojen bir fark denklemdir. Bu fark denkleminin çözümü;  $r^2 - \alpha r + 1 = 0$  karakteristik denkleminin kökleri  $r_1$  ve  $r_2$

$$r_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$$

ve

$$r_2 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$$

olmak üzere genel çözüm

$$\Delta_n(\alpha) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n \quad (4.7)$$

olup (Agarwal 1992, Oturanç ve ark. 2008), başlangıç koşulları

$$\begin{aligned} \Delta_0(\alpha) &= c_1 + c_2 = 1 \\ \Delta_1(\alpha) &= c_1 r_1 + c_2 r_2 = \alpha \end{aligned}$$

olacak şekilde  $c_1$  ve  $c_2$  katsayılarını elde ederiz. Son olarak  $c_1$  ve  $c_2$  katsayılarını (4.7) de yerine yazarsak genel çözüm

$$\Delta_n(\alpha) = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{\alpha^2-4}} \left[ (\alpha + \sqrt{\alpha^2-4})^{n+1} - (\alpha - \sqrt{\alpha^2-4})^{n+1} \right] \quad (4.8)$$

olarak bulunur. Kısım 3.2.3 deki Chebyshev polinomlarının özelliklerinden

$$U_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}} \quad (4.9)$$

eşitliğinin var olduğunu biliyoruz (Mason and Handscomb 2003, Rivlin 1974). Burada  $x = \frac{\alpha}{2}$  alırsak,

$$U_n\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-4})^{n+1} - (\alpha-\sqrt{\alpha^2-4})^{n+1}}{\sqrt{\alpha^2-4}} \quad (4.10)$$

olup, sonuç olarak (4.8) ve (4.10) dan

$$\Delta_n(\alpha) = U_n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (4.11)$$

elde edilir (Rimas 2005). (4.11) de  $n$  yerine  $n/3$  alırsak

$$\Delta_{\frac{n}{3}}(\alpha) = U_{\frac{n}{3}}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (4.12)$$

elde ederiz. (4.5) ve (4.12) eşitliklerinden de

$$H_n(\alpha) = \left( U_{\frac{n}{3}}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right)^3 \quad (4.13)$$

eşitliğine ulaşırız. (3.3) ifadesini (4.13) de gerekli düzenlemelerle yerine yazıp denklemi çözelim.

$$H_n(\alpha) = \left( \frac{\sin\left(\left(\frac{n+3}{3}\right)\arccos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{\sin\left(\arccos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)} \right)^3 = 0$$

olup

$$\left[ \sin\left(\left(\frac{n+3}{3}\right)\arccos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \right]^3 = 0 \Rightarrow \sin\left(\left(\frac{n+3}{3}\right)\arccos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 0$$

buradan da

$$\alpha_k = 2 \cos\left(\frac{3k\pi}{n+3}\right), k = \overline{1, \frac{n}{3}}$$

denklemini elde ederiz. (4.4) denkleminde  $\alpha = \lambda$  olup (4.1) matrisinin öz değerleri

$$\lambda_k = 2 \cos\left(\frac{3k\pi}{n+3}\right), k = \overline{1, \frac{n}{3}} \quad (4.14)$$

şeklinde elde edilir.

İkinci olarak  $H$  matrisinin *Jordan formu*, öz vektörlere bağlı dönüşüm matrisi ve tersini elde edelim.

$H$  matrisinin öz değerlerinin katlılığı 3 olup

$$J = \text{diag}\left(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_{\frac{n-3}{3}}, \lambda_{\frac{n-3}{3}}, \lambda_{\frac{n-3}{3}}, \lambda_{\frac{n}{3}}, \lambda_{\frac{n}{3}}, \lambda_{\frac{n}{3}}\right) \quad (4.15)$$

şeklinde yazabiliriz (Strang 1988, Meyer 2000, Bozkurt ve ark. 2007).

Bundan sonra (2.1) homojen lineer denklem sisteminden öz vektörleri ve bunlara bağlı dönüşüm matrisi ve tersini ifade edelim. Öz vektörlere ulaşmak için farklı olarak  $J$ ,  $H$  matrisinin Jordan formu,  $P$  dönüşüm matrisi ve  $P^{-1}$  tersi olmak üzere  $H = PJP^{-1}$  benzerlik dönüşüm formülünden yararlanılır.  $HP = PJ$  denkleminde  $P$  dönüşüm matrisinin sütun vektörleri

$$(\lambda I - H)x = 0$$

denklemindeki her  $\lambda$  öz değerine karşılık gelen  $x$  öz vektörleridir.  $P$ 'nin  $j$  inci sütun vektörü  $\rho_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) olmak üzere

$$P = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n)$$

ve (4.15) ifadesinden

$$\begin{aligned} (H\rho_1, H\rho_2, H\rho_3, \dots, H\rho_n) &= \left( \rho_1\lambda_1, \rho_2\lambda_1, \rho_3\lambda_3, \dots, \rho_n\lambda_{\frac{n}{3}} \right) \\ H\rho_1 &= \rho_1\lambda_1 \\ H\rho_2 &= \rho_2\lambda_1 \\ H\rho_3 &= \rho_3\lambda_1 \\ H\rho_4 &= \rho_4\lambda_2 \\ H\rho_5 &= \rho_5\lambda_2 \\ H\rho_6 &= \rho_6\lambda_2 \\ &\vdots \\ H\rho_{n-2} &= \rho_{n-2}\lambda_{\frac{n}{3}} \\ H\rho_{n-1} &= \rho_{n-1}\lambda_{\frac{n}{3}} \\ H\rho_n &= \rho_n\lambda_{\frac{n}{3}} \end{aligned}$$

yazabiliriz (Rimas 2008). Bu denklem sistemini çözersek  $H$  matrisinin öz vektörlerini Chebyshev polinomlarına bağlı olarak

$$\rho_j = \begin{pmatrix} U_0\left(\frac{\lambda_{j+2}}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ U_1\left(\frac{\lambda_{j+2}}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ U_{\frac{n-3}{3}}\left(\frac{\lambda_{j+2}}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, j = 1, 7, \dots, n-11, n-5 \quad \rho_j = \begin{pmatrix} 0 \\ U_0\left(\frac{\lambda_{j+1}}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ U_2\left(\frac{\lambda_{j+1}}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ U_{\frac{n-3}{3}}\left(\frac{\lambda_{j+1}}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}, j = 2, 8, \dots, n-4 \quad (4.16)$$

$$\rho_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_0\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ U_1\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ U_{\frac{n-3}{3}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) \end{pmatrix}, j = 3, 9, \dots, n-9, n-3 \quad \rho_j = \begin{pmatrix} U_{\frac{n-3}{3}}\left(\frac{\lambda_{j+2}}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ U_{\frac{n-6}{3}}\left(\frac{\lambda_{j+2}}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ U_0\left(\frac{\lambda_{j+2}}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, j = 4, 10, \dots, n-2 \quad (4.17)$$

$$\rho_j = \begin{pmatrix} 0 \\ U_{\frac{n-3}{3}}\left(\frac{\lambda_{j+1}}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ U_{\frac{n-6}{3}}\left(\frac{\lambda_{j+1}}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ U_0\left(\frac{\lambda_{j+1}}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}, j = 5, 11, \dots, n-7, n-1 \quad \rho_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_{\frac{n-3}{3}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ U_{\frac{n-6}{3}}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ U_0\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) \end{pmatrix}, j = 6, 12, \dots, n-6, n \quad (4.18)$$

şeklinde elde ederiz.  $U_k(x)$  ler ikinci tür Chebyshev polinomlarıdır. (4.16), (4.17) ve (4.18) ifadelerinden  $P$  dönüşüm matrisin mertebesi

$n = 3p, (p = 1, 3, 5, 7, 9, \dots, \frac{n}{3})$  için;

$$P = \begin{pmatrix} U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & 0 & U_{\frac{n-3}{3}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & 0 & \dots & U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & 0 & U_{\frac{n-3}{3}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \dots & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & 0 & U_{\frac{n-3}{3}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \dots & 0 & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2}\right) \\ U_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & 0 & U_{\frac{n-6}{3}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & 0 & \dots & U_1\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & U_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & 0 & U_{\frac{n-6}{3}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \dots & 0 & U_1\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & U_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & 0 & U_{\frac{n-6}{3}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \dots & 0 & 0 & U_1\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{\frac{n-3}{3}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & 0 & \dots & U_{\frac{n-3}{3}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & U_{\frac{n-3}{3}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \dots & 0 & U_{\frac{n-3}{3}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & U_{\frac{n-3}{3}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \dots & 0 & 0 & U_{\frac{n-3}{3}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$n = 3p, (p = 2, 4, 6, 8, \dots, \frac{n}{3})$  için;

$$P = \begin{pmatrix} U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & 0 & U_{\frac{n-3}{3}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & 0 & \dots & U_{\frac{n-3}{3}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & 0 & U_{\frac{n-3}{3}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \dots & 0 & U_{\frac{n-3}{3}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & 0 & U_{\frac{n-3}{3}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \dots & 0 & 0 & U_{\frac{n-3}{3}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2}\right) \\ U_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & 0 & U_{\frac{n-6}{3}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & 0 & \dots & U_{\frac{n-6}{3}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & U_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & 0 & U_{\frac{n-6}{3}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \dots & 0 & U_{\frac{n-6}{3}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & U_1\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & 0 & U_{\frac{n-6}{3}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \dots & 0 & 0 & U_{\frac{n-6}{3}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{\frac{n-3}{3}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & 0 & \dots & U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & U_{\frac{n-3}{3}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & \dots & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & U_{\frac{n-3}{3}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & \dots & 0 & 0 & U_0\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2}\right) \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

$PP^{-1} = I$  denkleminin çözümünden de  $P^{-1}$  matrisini buluruz. Yani,  $P^{-1}$  matrisinin  $j$  inci sütun vektörüne  $\tau_j$  dersek,

$$P^{-1} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_{n-1}, \tau_n)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan  $\tau_j$ 'ler;  $PP^{-1} = I$  olacak şekilde ikinci tür Chebyshev polinomlarına bağlı

$$\tau_j = \begin{pmatrix} h_1 U_{\frac{j-1}{3}} \left( \frac{\lambda_1}{2} \right) \\ 0 \\ 0 \\ h_2 U_{\frac{j-1}{3}} \left( \frac{\lambda_2}{2} \right) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ h_n U_{\frac{j-1}{3}} \left( \frac{\lambda_n}{2} \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, j = 1, 4, 7, \dots, n-2 \quad (4.19)$$

$$\tau_j = \begin{pmatrix} 0 \\ h_1 U_{\frac{j-2}{3}} \left( \frac{\lambda_1}{2} \right) \\ 0 \\ 0 \\ h_2 U_{\frac{j-2}{3}} \left( \frac{\lambda_2}{2} \right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_n U_{\frac{j-2}{3}} \left( \frac{\lambda_n}{2} \right) \\ 0 \end{pmatrix}, j = 2, 5, \dots, n-4, n-1 \quad (4.20)$$

$$\tau_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_1 U_{\frac{j-3}{3}} \left( \frac{\lambda_1}{2} \right) \\ 0 \\ 0 \\ h_2 U_{\frac{j-3}{3}} \left( \frac{\lambda_2}{2} \right) \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ h_n U_{\frac{j-3}{3}} \left( \frac{\lambda_n}{2} \right) \end{pmatrix}, j = 3, 6, 9, \dots, n-3, n \quad (4.21)$$

ile ifade edilebilir.

(4.19), (4.20) ve (4.21) den  $P^{-1}$  matrisini aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} h_1 U_0 \left( \frac{\lambda_1}{2} \right) & 0 & 0 & h_1 U_1 \left( \frac{\lambda_1}{2} \right) & 0 & 0 & \cdots & h_1 U_{\frac{n-3}{3}} \left( \frac{\lambda_1}{2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & h_1 U_0 \left( \frac{\lambda_1}{2} \right) & 0 & 0 & h_1 U_1 \left( \frac{\lambda_1}{2} \right) & 0 & \cdots & 0 & h_1 U_{\frac{n-3}{3}} \left( \frac{\lambda_1}{2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & h_1 U_0 \left( \frac{\lambda_1}{2} \right) & 0 & 0 & h_1 U_1 \left( \frac{\lambda_1}{2} \right) & \cdots & 0 & 0 & h_1 U_{\frac{n-3}{3}} \left( \frac{\lambda_1}{2} \right) \\ h_2 U_0 \left( \frac{\lambda_2}{2} \right) & 0 & 0 & h_2 U_1 \left( \frac{\lambda_2}{2} \right) & 0 & 0 & \cdots & h_2 U_{\frac{n-3}{3}} \left( \frac{\lambda_2}{2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & h_2 U_0 \left( \frac{\lambda_2}{2} \right) & 0 & 0 & h_2 U_1 \left( \frac{\lambda_2}{2} \right) & 0 & \cdots & 0 & h_2 U_{\frac{n-3}{3}} \left( \frac{\lambda_2}{2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & h_2 U_0 \left( \frac{\lambda_2}{2} \right) & 0 & 0 & h_2 U_1 \left( \frac{\lambda_2}{2} \right) & \cdots & 0 & 0 & h_2 U_{\frac{n-3}{3}} \left( \frac{\lambda_2}{2} \right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{\frac{n}{3}} U_0 \left( \frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2} \right) & 0 & 0 & h_{\frac{n}{3}} U_1 \left( \frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2} \right) & 0 & 0 & \cdots & h_{\frac{n}{3}} U_{\frac{n-3}{3}} \left( \frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & h_{\frac{n}{3}} U_0 \left( \frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2} \right) & 0 & 0 & h_{\frac{n}{3}} U_1 \left( \frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2} \right) & 0 & \cdots & 0 & h_{\frac{n}{3}} U_{\frac{n-3}{3}} \left( \frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & h_{\frac{n}{3}} U_0 \left( \frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2} \right) & 0 & 0 & h_{\frac{n}{3}} U_1 \left( \frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2} \right) & \cdots & 0 & 0 & h_{\frac{n}{3}} U_{\frac{n-3}{3}} \left( \frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2} \right) \end{pmatrix}$$

Burada

$$h_k = \frac{3(-1)^k(\lambda_k^2 - 4)}{2n+6}, n = 3p \left( p = 2, 4, 6, 8, \dots, \frac{n}{3} \right), k = 1, \frac{n}{3} \quad (4.22)$$

$$h_k = \begin{cases} \frac{3(-1)^{k+1}\lambda_{\frac{n+6k+3}{6}}^2}{2n+6}, 1 \leq k \leq \frac{n-3}{6} \\ \frac{6(-1)^{k+1}}{n+3}, k = \frac{n+3}{6}, n = 3p \left( p = 1, 3, 5, \dots, \frac{n}{3} \right) \\ \frac{3(-1)^{k+1}\lambda_{\frac{n-2k+3}{2}}^2}{2n+6}, \frac{n+9}{6} \leq k \leq \frac{n}{3} \end{cases} \quad (4.23)$$

olacak şekilde elde edilir.

Üçüncü olarak, (4.16), (4.17) ve (4.18) ifadelerinde  $P$  matrisinin  $i$ . satırına  $K_i$  dersek,  $K_i$ 'ler şöyle tanımlanır:

$n = 3p$  olmak üzere,  $(p = 1, 3, 5, 7, \dots, \frac{n}{3})$ ,  $i = 1, 4, 7, \dots, n - 5, n - 2$  ise,

$$K_i = \left( U_{\frac{i-1}{3}} \left( \frac{\lambda_1}{2} \right) \quad 0 \quad 0 \quad U_{\frac{n-(i+2)}{3}} \left( \frac{\lambda_2}{2} \right) \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad U_{\frac{i-1}{3}} \left( \frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2} \right) \quad 0 \quad 0 \right)$$

$i = 2, 5, 8, 11, \dots, n - 4, n - 1$  ise,

$$K_i = \left( 0 \quad U_{\frac{i-2}{3}} \left( \frac{\lambda_1}{2} \right) \quad 0 \quad 0 \quad U_{\frac{n-(i+1)}{3}} \left( \frac{\lambda_2}{2} \right) \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad U_{\frac{i-2}{3}} \left( \frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2} \right) \quad 0 \right)$$

ve  $i = 3, 6, 9, 12, \dots, n - 3, n$  ise

$$K_i = \left( 0 \quad 0 \quad U_{\frac{i-3}{3}} \left( \frac{\lambda_1}{2} \right) \quad 0 \quad 0 \quad U_{\frac{n-i}{3}} \left( \frac{\lambda_2}{2} \right) \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad U_{\frac{i-3}{3}} \left( \frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2} \right) \right)$$

ve  $n = 3p$  olmak üzere,  $(p = 2, 4, 6, 8, \dots, \frac{n}{3})$ ,  $i = 1, 4, 7, \dots, n - 5, n - 2$  ise

$$K_i = \left( U_{\frac{i-1}{3}} \left( \frac{\lambda_1}{2} \right) \quad 0 \quad 0 \quad U_{\frac{n-(i+2)}{3}} \left( \frac{\lambda_2}{2} \right) \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad U_{\frac{n-(i+2)}{3}} \left( \frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2} \right) \quad 0 \quad 0 \right)$$

$i = 2, 5, 8, 11, \dots, n - 4, n - 1$  ise

$$K_i = \begin{pmatrix} 0 & U_{\frac{i-2}{3}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & 0 & U_{\frac{n-(i+1)}{3}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & U_{\frac{n-(i+1)}{3}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

ve  $i = 3, 6, 9, 12, \dots, n-3, n$  ise

$$K_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & U_{\frac{i-3}{3}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) & 0 & 0 & U_{\frac{n-i}{3}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & U_{\frac{n-i}{3}}\left(\frac{\lambda_{\frac{n}{3}}}{2}\right) \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

Şimdi bu sonuçları birleştirerek,  $H^m = PJ^mP^{-1}$  benzerlik dönüşüm formülüne uygulayalım. Buradan da genel ifadeye ulaşalım.

$$J^m = \text{diag}\left(\lambda_1^m, \lambda_1^m, \lambda_1^m, \dots, \lambda_{\frac{n-3}{3}}^m, \lambda_{\frac{n-3}{3}}^m, \lambda_{\frac{n-3}{3}}^m, \lambda_{\frac{n}{3}}^m, \lambda_{\frac{n}{3}}^m, \lambda_{\frac{n}{3}}^m\right)$$

iken,

$$\{H^m\}_{i,j} = K_i J^m \tau_j \text{ formülünden,}$$

$$n = 3p, \left(p = 1, 3, 5, 7, \dots, \frac{n}{3}\right) \text{ ise}$$

$$\begin{aligned} \{H^m\}_{i,j} &= \sum_{k=1}^{\frac{n+3}{6}} \lambda_{2k-1}^m h_{2k-1} U_{\frac{i-\delta_{ij}}{3}}\left(\frac{\lambda_{2k-1}}{2}\right) U_{\frac{j-\delta_{ij}}{3}}\left(\frac{\lambda_{2k-1}}{2}\right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\frac{n-3}{6}} \lambda_{2k}^m h_{2k} U_{\frac{n-\sigma_{ij}}{3}}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right) U_{\frac{j-\delta_{ij}}{3}}\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Formülde  $h_k$ 'lar (4.23) de tanımlandığı gibi,  $\delta_{ij}$  ve  $\sigma_{ij}$  sırasıyla

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i+j \equiv 2 \pmod{3} \\ 2, & i+j \equiv 1 \pmod{3} \\ 3, & i+j \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \quad (4.24)$$

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} i+2, & i+j \equiv 2 \pmod{3} \\ i+1, & i+j \equiv 1 \pmod{3} \\ i, & i+j \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \quad (4.25)$$

olarak tanımlanır.

$n = 3p, (p = 2, 4, 6, 8, \dots, \frac{n}{3})$  ise,

$$\begin{aligned} \{H^m\}_{i,j} &= \sum_{k=1}^{\frac{n}{6}} \lambda_{2k-1}^m h_{2k-1} U_{\frac{i-\delta_{ij}}{3}} \left( \frac{\lambda_{2k-1}}{2} \right) U_{\frac{j-\delta_{ij}}{3}} \left( \frac{\lambda_{2k-1}}{2} \right) \\ &+ \sum_{k=1}^{\frac{n}{6}} \lambda_{2k}^m h_{2k} U_{\frac{n-\sigma_{ij}}{3}} \left( \frac{\lambda_{2k}}{2} \right) U_{\frac{j-\delta_{ij}}{3}} \left( \frac{\lambda_{2k}}{2} \right) \end{aligned}$$

olacak şekilde elde edilir. Yine burada  $h_k$ 'lar (4.22) de tanımlandığı gibi,  $\delta_{ij}$  ve  $\sigma_{ij}$ 'ler ise sırasıyla (4.24) ve (4.25) deki gibi tanımlıdır.

Ayrıca formülde;

$$\{H^m\}_{i,j} = \begin{cases} K_{ij}^m \tau_j = 0, i = 1, 4, 7, \dots, n-2 \text{ ve } j = 2, 5, 8, \dots, n-1, j = 3, 6, 9, \dots, n \\ K_{ij}^m \tau_j = 0, i = 2, 5, 8, \dots, n-1 \text{ ve } j = 1, 4, 7, \dots, n-2, j = 3, 6, 9, \dots, n \\ K_{ij}^m \tau_j = 0, i = 3, 6, 9, \dots, n \text{ ve } j = 1, 4, 7, \dots, n-2, j = 2, 5, 8, \dots, n-1 \end{cases}$$

olarak ifade edilmiştir.

## 4.2. Nümerik Örnekler

**Örnek 4.1.** Şimdi (4.1) de verilen matrisler için nümerik örneklere yer verelim.

$n = 6, J = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_2) = \text{diag}(a, a, a, b, b, b)$  ve

$$h_k = \frac{3(-1)^k(\lambda_k^2 - 4)}{2n+6}, k = 1, \frac{n}{3} \text{ için}$$

$$\{H^m\}_{i,j} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$$

olmak üzere Teorem 4.1 den,

$$\{H^m\}_{i,j} = \lambda_1^m h_1 U_{\frac{i-\delta_{ij}}{3}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) U_{\frac{j-\delta_{ij}}{3}}\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) + \lambda_2^m h_2 U_{\frac{n-\sigma_{ij}}{3}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) U_{\frac{j-\delta_{ij}}{3}}\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)$$

olup,

$$a_{12} = a_{13} = a_{15} = a_{16} = 0$$

$$a_{21} = a_{23} = a_{24} = a_{26} = 0$$

$$a_{31} = a_{32} = a_{34} = a_{35} = 0$$

$$a_{42} = a_{43} = a_{45} = a_{46} = 0$$

$$a_{51} = a_{53} = a_{54} = a_{56} = 0$$

$$a_{61} = a_{62} = a_{64} = a_{65} = 0$$

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a^m \frac{3(-1)^1(a^2 - 4)}{18} + b^{m+1} \frac{3(-1)^2(b^2 - 4)}{18}$$

$$a_{14} = a_{25} = a_{36} = a^{m+1} \frac{3(-1)^1(a^2 - 4)}{18} + b^{m+2} \frac{3(-1)^2(b^2 - 4)}{18}$$

$$a_{44} = a_{55} = a_{66} = a^{m+2} \frac{3(-1)^1(a^2 - 4)}{18} + b^{m+1} \frac{3(-1)^2(b^2 - 4)}{18}$$

$$a_{41} = a_{52} = a_{63} = a^{m+1} \frac{3(-1)^1(a^2 - 4)}{18} + b^m \frac{3(-1)^2(b^2 - 4)}{18}$$

olarak bulunur.

**Örnek 4.2.**  $n = 9$  için Teorem (4.1.)'i uygularsak;

$$J = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_3, \lambda_3) = \text{diag}(a, a, a, b, b, b, c, c, c),$$

$$h_k = \begin{cases} \frac{3(-1)^{k+1} \lambda_{\frac{n+6k+3}{6}}^2}{2n+6}, & 1 \leq k \leq \frac{n-3}{6} \\ \frac{6(-1)^{k+1}}{n+3}, & k = \frac{n+3}{6} \\ \frac{3(-1)^{k+1} \lambda_{\frac{n-2k+3}{2}}^2}{2n+6}, & \frac{n+9}{6} \leq k \leq \frac{n}{3} \end{cases}$$

ve

$$\{H^m\}_{i,j} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} & a_{39} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} & a_{49} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{58} & a_{59} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68} & a_{69} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{78} & a_{79} \\ a_{81} & a_{82} & a_{83} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & a_{88} & a_{89} \\ a_{91} & a_{92} & a_{93} & a_{94} & a_{95} & a_{96} & a_{97} & a_{98} & a_{99} \end{bmatrix}$$

olmak üzere, Teorem 4.1 den

$$a_{12} = a_{13} = a_{15} = a_{16} = a_{18} = a_{19} = 0$$

$$a_{21} = a_{23} = a_{24} = a_{26} = a_{27} = a_{29} = 0$$

$$a_{31} = a_{32} = a_{34} = a_{35} = a_{37} = a_{38} = 0$$

$$a_{42} = a_{43} = a_{45} = a_{46} = a_{48} = a_{49} = 0$$

$$a_{51} = a_{53} = a_{54} = a_{56} = a_{57} = a_{59} = 0$$

$$a_{61} = a_{62} = a_{64} = a_{65} = a_{67} = a_{68} = 0$$

$$a_{72} = a_{73} = a_{75} = a_{76} = a_{78} = a_{79} = 0$$

$$a_{81} = a_{83} = a_{84} = a_{86} = a_{87} = a_{89} = 0$$

$$a_{91} = a_{92} = a_{94} = a_{95} = a_{97} = a_{98} = 0$$

$$\begin{aligned} \{H^m\}_{11} = a_{11} &= \sum_{k=1}^2 \lambda_{2k-1}^m h_{2k-1} U_0 \left( \frac{\lambda_{2k-1}}{2} \right)^2 + \sum_{k=1}^1 \lambda_{2k}^m h_{2k} U_2 \left( \frac{\lambda_{2k}}{2} \right) U_0 \left( \frac{\lambda_{2k}}{2} \right) \\ &= a^m \frac{3(-1)^2 c^2}{24} + c^m \frac{3(-1)^2 c^2}{24} + b^m \frac{6(-1)^2}{12} (b^2 - 1) = a_{22} = a_{33} \end{aligned}$$

$$a_{14} = a^{m+1} \frac{3(-1)^2 c^2}{24} + c^{m+1} \frac{3(-1)^2 c^2}{24} + b^m \frac{6(-1)^2}{12} (b^3 - b) = a_{25} = a_{36}$$

$$a_{17} = a^m \frac{3(-1)^2 c^2}{24} (a^2 - 1) + c^m \frac{3(-1)^2 c^2}{24} (c^2 - 1) + b^m \frac{6(-1)^2}{12} (b^2 - 1)^2 = a_{28} = a_{39}$$

$$a_{41} = a^{m+1} \frac{3(-1)^2 c^2}{24} + c^{m+1} \frac{3(-1)^2 c^2}{24} + b^{m+1} \frac{6(-1)^2}{12} = a_{52} = a_{63}$$

$$a_{44} = a^{m+2} \frac{3(-1)^2 c^2}{24} + c^{m+2} \frac{3(-1)^2 c^2}{24} + b^{m+2} \frac{6(-1)^2}{12} = a_{55} = a_{66}$$

$$a_{47} = a^m (a^3 - a) \frac{3(-1)^2 c^2}{24} + c^m (c^3 - c) \frac{3(-1)^2 c^2}{24} + b^m (b^3 - b) \frac{6(-1)^2}{12} = a_{58} = a_{69}$$

$$a_{71} = a^m (a^2 - 1) \frac{3(-1)^2 c^2}{24} + c^m (c^2 - 1) \frac{3(-1)^2 c^2}{24} + b^m \frac{6(-1)^2}{12} = a_{82} = a_{93}$$

$$a_{74} = a^m (a^3 - a) \frac{3(-1)^2 c^2}{24} + c^m (c^3 - c) \frac{3(-1)^2 c^2}{24} + b^{m+1} \frac{6(-1)^2}{12} = a_{85} = a_{96}$$

$$\begin{aligned} a_{77} &= a^m (a^2 - 1)^2 \frac{3(-1)^2 c^2}{24} + c^m (c^2 - 1)^2 \frac{3(-1)^2 c^2}{24} + b^m (b^2 - 1) \frac{6(-1)^2}{12} = a_{88} \\ &= a_{99} \end{aligned}$$

olarak elde ederiz.

## 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Tezin hemen her bölümünde de bahsettiğimiz gibi, özel matris tipleri matematik ve bazı uygulamalı bilimlerde kolaylık sağlamaktadır. Bu nedenle özel tipteki matrislerle ilgili birçok çalışma yapıldığını daha önce belirtmiş ve kaynak araştırmasında bir kısmını vermiştik. Bu çalışmada ise *simetrik heptadiagonal* bir matris için genel bir pozitif kuvvet formülü elde edilmiştir. Yine çalışma içinde dönüşüm matrisi ve tersinin de formülü verilmiştir. Sonuç olarak genel heptadiagonal matrisler için de benzer çalışmalar yapılabileceği ön görülmektedir. Ayrıca, sadece kuvvet formülü için değil, determinantları, tersleri, öz değer ve öz vektörler ile ilgili bağıntılar için de çalışmalar yapılabilir.

**KAYNAKLAR**

- Agarwal, R.P., 1992, *Difference Equations and Inequalities*, Marcel Dekker, Inc., New York.
- Picard, R.W., Elfadel, I.M., 1992, Structure of aura and co-occurrence matrices for the Gibbs texture model, *J. Math. Imaging Vision* 2 (1) (1992).
- Rimas, J., 1977, Investigation of dynamics of mutually synchronized systems, *Telecommun. Radio Eng.* 32 (1977) 68–79.
- Rimas, J., Analysis of multidimensional delay system, in: *Proceedings of the 16th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, July 5–9, Leuven, Belgium, ISBN 90-5682-517-8. (<[www.mtns2004.be](http://www.mtns2004.be)>. )
- Elouafi M., Hadj A. D. A., 2009, On the powers and the inverse of a tridiagonal matrix, *Applied Mathematics and Computation*, 211 (2009), 137–141.
- Rimas, J., 2005, On computing of arbitrary positive integer powers for one type of symmetric tridiagonal matrices of odd order—I, *Applied Mathematics and Computation*, 171 (2005), 1214–1217.
- Rimas, J., 2005, On computing of arbitrary positive integer powers for one type of symmetric tridiagonal matrices of even order-I, *Applied Mathematics and Computation*, 168 (2005), 783–787.
- Mason, J. C. and Handscomb, D. C., 2003, *Chebyshev Polynomials*, by CRC Press LLC, A CRC Press Company.
- Rivlin, T. J., 1974, *The Chebyshev Polynomials*, John Wiley and Sons, New York, Wiley-Interscience publication.
- Gutiérrez-Gutiérrez J., 2008, Positive integer powers of certain tridiagonal matrices, *Applied Mathematics and Computation*, 202 (2008) 133–140.
- Horn, R. A. and Johnson, C. R., 1990, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press.
- Witula, R. and Slota, D., 2008, Some phenomenon of the powers of certain tridiagonal and asymmetric matrices, *Applied Mathematics and Computation*, 202 (2008) 348-359.
- Rimas, J., 2006, On computing of arbitrary positive integer powers for one type of symmetric tridiagonal matrices of odd order—II, *Applied Mathematics and Computation*, 174 (2006) 676–683.
- Rimas, J., 2006, On computing of arbitrary positive integer powers for one type of symmetric tridiagonal matrices of even order—II, *Applied Mathematics and Computation*, 172 (2006) 245–251.

- Rimas, J., 2008, On computing of arbitrary positive integer powers for one type of symmetric pentadiagonal matrices of even order, *Applied Mathematics and Computation*, 203 (2008) 582–591.
- Kratz, W. and Tentler, M. (2008), Recursion formulae for the characteristic polynomial of symmetric banded matrices, *Linear Algebra and its Applications*, 428 (2008) 2482–2500.
- Zhao, Xi-Le and Huang, Ting-Zhu, (2008), On the inverse of a general pentadiagonal matrix, *Applied Mathematics and Computation*, 202 (2008) 639–646.
- Gray, R. M., 2006, Toeplitz and Circulant Matrices: A review,
- Meyer, C. D., 2000, Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, *SIAM*.
- El-Mikkawy, M. and Rahmo, El-Desouky, 2008, A new recursive algorithm for inverting general tridiagonal and anti-tridiagonal matrices, *Applied Mathematics and Computation*, 204 (2008) 368–372.
- Strang, G., 1988, Linear Algebra and Its Applications, *Academic Press, New York*.
- Zhang, F., 1999, Matrix Theory (Basic Results and Techniques), *Springer-Verlag, New York*.
- Bozkurt, D., Türen, B., Solak, S., 2007, Lineer Cebir, *Dizgi Ofset Matbaacılık, Konya*.
- Taşcı, D., 2001, Lineer Cebir, *Sel-Ün Vakfı Yayınları, Ofset Hazırlık ve Baskı Üniversitesi Basımevi*.
- Oturanç, G., Kurnaz, K., Kiriş, M. E. ve Keskin, Y., 2008, Sayısal Analiz, *Dizgi Ofset Matbaacılık, Konya*.
- Karawia, A. A., 2010, On the Inverse of General Cyclic Heptadiagonal and Anti-Heptadiagonal Matrices, *arXiv:1011.3721v1[cs.SC]*, Submitted on 15 Nov 2010.
- Karawia, A. A., 2010, A New Algorithm for Inverting General Cyclic Heptadiagonal Matrices Recursively, *arXiv:1011.2306v3[cs.SC]*, Submitted on 10 Nov 2010(v1), last revised 19 Nov 2010(v3).
- Karawia, A. A., 2010, A New Algorithm for General Cyclic Heptadiagonal Linear Systems using Sherman-Morrison-Woodbury formula, *arXiv:1011.4580v1[cs.NA]*, Submitted on 20 Nov 2010.
- Koulaei, M.H. and Toutounian F., 2007, On computing of block ILU preconditioner for block tridiagonal systems, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 202 (2007) 248 – 257.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Murat GÜBEŞ  
**Uyruğu** : T.C.  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : Korkuteli / 27.02.1986  
**Telefon** : 05447962069  
**Faks** : -  
**e-mail** : [mgubes@kmu.edu.tr](mailto:mgubes@kmu.edu.tr)

### EĞİTİM

| Derece        | Adı, İlçe, İl                            | Bitirme Yılı |
|---------------|--|--------------|
| Lise          | : Korkuteli Lisesi / Korkuteli / ANTALYA | 2004         |
| Üniversite    | : Selçuk Üniversitesi / Selçuklu / KONYA | 2008         |
| Yüksek Lisans | : Selçuk Üniversitesi / Selçuklu / KONYA | 2011         |
| Doktora       | : -                                      |              |

### İŞ DENEYİMLERİ

| Yıl  | Kurum   | Görevi              |
|------|---|---------------------|
| 2009 | Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi<br>Kamil Özdağ Fen Fakültesi | Araştırma Görevlisi |

### UZMANLIK ALANI

Matris Teorisi, Cebir ve Sayılar Teorisi

### YABANCI DİLLER

İngilizce

### YAYINLAR