



**T.C.  
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ  
*k*-BASAMAK SAYI DİZİLERİNİN  
İNCELENMESİ**

**Adem ŞAHİN**

**Yüksek Lisans Tezi  
Matematik Anabilim Dalı  
Yrd. Doç. Dr. Kenan KAYGISIZ  
2010**

**Her hakkı saklıdır**

**T.C.  
GAZIOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ  $k$ -BASAMAK SAYI DİZİLERİNİN  
İNCELENMESİ**

**Adem ŞAHİN**

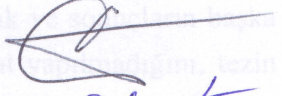
**TOKAT  
2010**

**Her hakkı saklıdır**

Yrd. Doç. Dr. Kenan KAYGISIZ danışmanlığında, Adem ŞAHİN tarafından hazırlanan bu çalışma 02/08/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

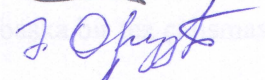
Başkan: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

İmza:



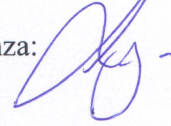
Üye: Doç. Dr. Eşref ORUCOV

İmza:



Üye: Yrd. Doç. Dr. Kenan KAYGISIZ

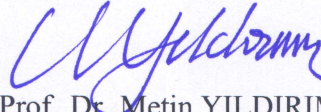
İmza:



İmza  
Adem ŞAHİN

**Yukarıdaki sonucu onaylarım**

(İmza)



Prof. Dr. Metin YILDIRIM

**Enstitü Müdürü**

27/08/2010

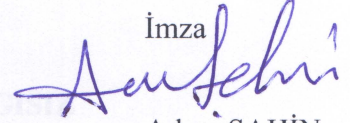
## TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Gaziosmanpaşa Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Kenan KAYGILI

İmza



Adem ŞAHİN

Bu çalışmada Fibonacci ve Lucas sayıları üzerine yapılan genelleştirmeler detaylı olarak anlatıldı. Bu genellemelerin birbirleri arasındaki ilişkiler elde edildi. T. MacHenry tarafından tanımlanan Fibonacci ve Lucas polinomları kullanılarak  $k$  Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas sayıları elde edildi. Daha sonra yine bu Fibonacci ve Lucas polinomları ve bunlara ek olarak T. MacHenry tarafından tanımlanan ve terimleri Fibonacci ve Lucas polinomlarından elde edilen  $\infty \times k$  boyutlu matrisler kullanılarak  $k$  Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas sayılarının  $k$  dizisi elde edildi. Bu dizilerin ilk olarak matris gösterimi elde edildi ve matris gösterimi kullanılarak dizilerin kendi terimleri arasındaki ilişkiler elde edildi. Daha sonra bu dizilerin birbirleriyle olan ilişkileri elde edildi. Son olarak  $k$  genelleştirilmiş  $k$  basamak Lucas sayıları ve  $k$  genelleştirilmiş  $k$  basamak Lucas sayılarının  $k$  dizisi elde edilirken kullanılan Fibonacci ve Lucas polinomları kullanılarak Genelleştirilmiş  $k$  basamak Perrin sayıları elde edildi ve bu sayı dizisinin özellikleri incelendi.

2010, 78 sayfa

**Araştırma** kelimeleri: Fibonacci Sayıları, Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Fibonacci Sayıları, Lucas Sayıları, Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas Sayıları, Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas Sayılarının  $k$  dizisi, Perrin Sayıları, Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Perrin Sayıları.

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ $k$ -BASAMAK SAYI DİZİLERİNİN İNCELENMESİ

Adem ŞAHİN

Gaziosmanpaşa Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Kenan KAYGISIZ

Bu çalışmada Fibonacci ve Lucas sayıları üzerine yapılan genellemeler detaylı olarak anlatıldı. Bu genellemelerin birbirleri arasındaki ilişkiler elde edildi. T. MacHenry tarafından tanımlanan Fibonacci ve Lucas polinomları kullanılarak  $k$  Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas sayıları elde edildi. Daha sonra yine bu Fibonacci ve Lucas polinomları ve bunlara ek olarak T. MacHenry tarafından tanımlanan ve terimleri Fibonacci ve Lucas polinomlarından elde edilen  $\infty \times k$  boyutlu matrisler kullanılarak  $k$  Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas sayılarının  $k$  dizisi elde edildi. Bu dizilerin ilk olarak matris gösterimi elde edildi ve matris gösterimi kullanılarak dizilerin kendi terimleri arasındaki ilişkiler elde edildi. Daha sonra bu dizilerin birbirleriyle olan ilişkileri elde edildi. Son olarak  $k$  genelleştirilmiş  $k$  basamak Lucas sayıları ve  $k$  genelleştirilmiş  $k$  basamak Lucas sayılarının  $k$  dizisi elde edilirken kullanılan Fibonacci ve Lucas polinomları kullanılarak Genelleştirilmiş  $k$  basamak Perrin sayıları elde edildi ve bu sayı dizisinin özellikleri incelendi.

2010, 70 sayfa

**Anahtar kelimeler:** Fibonacci Sayıları, Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Fibonacci Sayıları, Lucas Sayıları, Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas Sayıları, Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas Sayılarının  $k$  dizisi, Perrin Sayıları, Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Perrin Sayıları.

## **ABSTRACT**

### **Undergraduate Thesis**

### **Analysis of Some Generalized Order- $k$ Number Sequences**

**Adem ŞAHİN**

**Gaziosmanpasa University  
Faculty of Arts and Sciences  
Department of Mathematics**

**Supervisor : Asst. Prof. Dr. Kenan KAYGISIZ**

In this study, Generalization of Fibonacci and Lucas Numbers are explained in detail. Relationship between these generalizations are obtain.  $k$  Generalized Order- $k$  Lucas Numbers are obtained by using Fibonacci and Lucas Polynomial which are defined by T. MacHenry. After this we obtain  $k$  Sequences of  $k$  Generalized Order- $k$  Lucas Numbers by using Fibonacci and Lucas Polynomial and also the  $\infty \times k$  dimension matrices whose components obtained from Fibonacci and Lucas Polynomials defined by T. MacHenry. Firstly we obtain matrix representation of these sequences and using this matrix representation we get interior properties of these sequences. After that the relations between these sequences are obtained. And for the end part, the generalized Order- $k$  Perrin numbers are reached by using Fibonacci and Lucas polynomials which were used in the process of obtaining the  $k$  sequence of  $k$  generalized Order- $k$  Lucas numbers and  $k$ -generalized Order- $k$  numbers. And also we studied the properties of this sequence.

**2010, 70 pages**

**Key words:** Fibonacci Numbers, Generalized order- $k$  Fibonacci Numbers, Lucas Numbers, Generalized Order- $k$  Lucas Numbers,  $k$  sequences of generalized order- $k$  Lucas numbers, Perrin Numbers, Generalized Order- $k$  Perrin Numbers.

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezimi hazırlamamda desteğini, deneyimini ve emeğini hiçbir zaman esirgemeyen, kıymetli zamanını, fikirlerini ve bilgilerini benimle paylaşan saygıdeğer danışman hocam Yrd. Doç. Dr Kenan KAYGISIZ ' a ve maddi ve manevi destekleriyle beni hiç bir zaman yalnız bırakmayan bana her zaman güvenen ve güven veren aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Tez çalışmalarım sırasında desteklerini aldığım başta bölüm başkanımız Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU olmak üzere bölümdeki tüm hocalarıma, beni bilimsel çalışma yönünde teşvik eden bana güven veren saygıdeğer hocam Doç. Dr. Eşref ORUCOV'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez, 2009/46 nolu Bilimsel Araştırma Projesi olarak Gaziosmanpaşa Üniversitesi tarafından finansal olarak desteklenmiştir. Gaziosmanpaşa Üniversitesine verdiği finansal destekten dolayı teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

<b>ÖZET</b> . . . . .	<b>i</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>ii</b>
<b>TEŞEKKÜR</b> . . . . .	<b>iii</b>
<b>1. GİRİŞ</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2. LİTERATÜR ÖZETİ</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>3. GENEL BİLGİLER</b> . . . . .	<b>1</b>
3.1 Sayı Dizileri . . . . .	1
3.2 Matris Metodu . . . . .	2
3.3 Üreteç Fonksiyonu . . . . .	4
3.4 Binet Formülü . . . . .	6
3.5 Altın Oran . . . . .	6
3.6 Vandermonde Matrisi ve Determinantı . . . . .	7
3.7 Karakteristik polinom, özdeğer ve özvektör . . . . .	8
3.8 Vieta Teoremi . . . . .	9
3.9 $k$ - Genelleştirmeler . . . . .	10
3.10 Genelleştirmeler için Binet Formülü . . . . .	14
3.11 Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Polinomu . . . . .	18
<b>4. LUCAS SAYI DİZİSİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ</b> . . . . .	<b>26</b>
4.1 Genelleştirilmiş $k$ -Basamak Lucas Sayıları ve Matris Gösterimi . . . . .	26
4.2 Genelleştirilmiş $k$ -Basamak Lucas Sayılarının $k$ Dizisinin Tanımı ve Matris Gösterimi . . . . .	28
4.3 Kombinasyon İle Gösterim . . . . .	52
<b>5. GENELLEŞTİRİLMİŞ <math>k</math>-BASAMAK PERRİN SAYILARI</b> . . . . .	<b>56</b>
5.1 Genelleştirilmiş Perrin Polinomu ve $R^\infty$ Matrisi . . . . .	56
5.2 Genelleştirilmiş $k$ -Basamak Perrin Sayıları ve Matris Gösterimi . . . . .	59
<b>6. SONUÇ VE ÖNERİLER</b> . . . . .	<b>63</b>

<b>KAYNAKLAR</b> . . . . .	<b>64</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> . . . . .	<b>66</b>

## 1. GİRİŞ

Sayı dizileri amatör matematikçilerin olduğu kadar profesyonel matematikçilerin de ilgisini çekmiştir. Özellikle Fibonacci Sayıları yıllar boyunca birçok matematikçinin üzerinde çalışmalar yaptığı bir konudur. Bu çalışmalar sonucu çok daha sonra kullanılacak olan çeşitli tanımlamalar ve ilişkiler ortaya çıkmıştır. Yapılan bu tanımlamalar ve elde edilen ilişkiler sürpriz bir şekilde amatör ve geleneksel matematik içindeki birçok karmaşık problemin cevabını vermiştir.

Ayrıca Fibonacci Sayılarının sanatsal çalışmalar ve doğa bilimlerinde yapılan çalışmalarda sıkça rastlanan altın oranla sıkı bir ilişkisi olduğu tespit edilmiştir. Altın Oran çok eski çağlardan beri kullanılmasına rağmen bu sayı dizisi ile ilgili çalışmalar ilk olarak 1200 lü yıllarda Leonardo Pisano tarafından yapılmıştır. İtalyan matematikçi olan Leonardo Pisano, Fibonacci olarak bilinir ve bu sayı dizisi onun ismi ile anılır. Fibonacci uzun süre Hint-Arap matematiğini incelemiş ve buradan derlediği bilgilerle kendi çalışmalarını birleştirerek Liner Abaci isimli kitabını yazmıştır.

Bahsi ilk olarak bu kitapta geçen bu sayı dizisi;

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ ve } n \geq 2 \text{ için } F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

şeklinde tanımlanır ve Fibonacci dizisi olarak anılır. Bu sayı dizisinin ilk birkaç terimi : 0,1,1,2,3,5,8,13,21,... şeklindedir.

Bu dizinin en önemli özelliklerinden biri;  $F_n$ ,  $n$ -inci Fibonacci sayısı olmak üzere

$$” \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \text{Altın Oran} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, ”$$

özellidir. Ayrıca bu sayı dizisinin birçok uygulaması günümüzde kullanılmaktadır. Bunlardan bazıları yay(arc), fan yapımı, geri alma çizgileri ve zaman bölgeleridir.

Ayrıca Dow Jones Industrial Endeksi üzerine çizilen Fibonacci zaman aralıkları incelenirse seviye, sayı dizisine yakın yerlerde önemli değişimler göstermektedir. Bir başka örnek

verecek olursak; kenar uzunlukları 1 olan eşit iki kareyi yan yana getirelim sonra bu iki kareye bitişik olacak şekilde yeni bir kare çizelim, sonrada bunlara bitişik başka bir kare çizelim ve işlemi böyle devam ettirelim sonuçta bu karelerin kenar uzunluklarını incelersek bunlar bize Fibonacci Dizisini verecektir. Ayrıca oluşan dikdörtgenin kenar uzunluklarının oranları ise altın oranı verecektir. Bunlarında ötesinde Fibonacci sayılarının oranından elde edilen altın oran doğada birçok canlıda somut olarak görülmektedir ve birçok alanda uygulamaları vardır. Kabaca örnek verecek olursak; kolumuzun üst bölümünün alt bölümüne oranı, aynı şekilde kolun tümünün üst bölüme oranı altın oranı verir. Leonardo da Vinci hayranlıkla izlediğimiz birçok eserinde bu oranı kullanmıştır. Doğada ise çam kozalağından, tütün yaprağına altın orana ilginç bir şekilde rastlanmaktadır.

Fizikteki kullanım alanlarından birisi ise; verilen  $n$  tane dirençten maksimum verim elde etmek için paralel bir bağlama gerekir. İşte bu bağlama sonucu elde edilen eşdeğer direnç Altın Orana eşittir(Koshy, 2001).

Görüldüğü gibi Fibonacci sayıları ve onunla sıkı bir ilişkisi olan Altın Oran yadsınamaz bir şekilde birçok alanda kullanılmış ve kullanılmaya da devam edilmektedir. Bunu bilen birçok matematikçi Fibonacci sayıları üzerine derin araştırmalar yapmışlardır. Ayrıca bu sayı dizisi ile ilişkili olan Lucas Sayıları, Pell Sayıları ve bunlardan hareketle elde edilen sayı dizileri üzerine geniş araştırmalar yapmışlardır. Bu sayılardan bir kısmının genelleştirilmiş  $k$ -basamak sayı dizileri tanımlanmış ve bunların kendi içinde ve birbiriyle olan ilişkileri elde edilmiştir. Bu sayı dizilerinin içinde Fibonacci sayıları kadar ilgi gören diğer sayı dizisinde Lucas sayı dizisidir. Lucas sayıları ismini François Édouard Anatole Lucas (1842-1891) dan almıştır. François Édouard Anatole Lucas, Fibonacci ve Lucas sayılarının özelliklerini incelemiş ve bunların aralarındaki ilişkiler üzerine çalışmalar yapmıştır. Lucas sayı dizisinde Fibonacci sayı dizisine benzer olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$L_0 = 2, L_1 = 1 \text{ ve } n \geq 2 \text{ için } L_n = L_{n-1} + L_{n-2}.$$

Bu dizinin ilk birkaç terimi 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ... şeklindedir.

Lucas sayı dizisinin de ardışık iki teriminin oranı Altın Oran'a yaklaşmaktadır. Lucas ve Fibonacci sayı dizileri arasında

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}, F_n = \frac{L_{n-1} + L_{n+1}}{5}, F_{2n} = F_n L_n$$

gibi bir çok özellik bulunmaktadır. Biz bu çalışmamızda bahsedilen Lucas sayılarının önce  $k$  genelleştirilmesini yapıp buna genelleştirilmiş  $k$ -basamak Lucas sayıları diyeceğiz. Bu genelleştirmeden sonra genelleştirilmiş  $k$ -basamak Lucas sayılarının  $k$  dizisini tanımlayacağız. Daha sonra matris gösterimi kullanılarak bu sayı dizilerinin kendi terimleri arasındaki ilişkiler elde edildi. Yine matris gösterimlerinden faydalanarak genelleştirilmiş  $k$ -basamak Lucas sayılarının  $k$  dizisi ve genelleştirilmiş  $k$ -basamak Fibonacci sayılarının  $k$  dizisi arasındaki ilişkiler elde edildi. Lucas sayılarının genellemesini elde ederken kullandığımız Fibonacci ve Lucas Polinomlarından faydalanarak  $k$  genelleştirilmiş  $k$  basamak Perrin sayılarının  $k$  dizisinin tanımlanabileceğini göstereceğiz. Bu çalışmada yukarıda bahsi geçen konular arasındaki ilişkiler elde edilerek Fibonacci, Lucas, Pell ve Perrin sayı dizileri ve bunlardan elde edilen genelleştirmeler arasındaki sıkı ilişkiler tanımlanacaktır.

## 2. LİTERATÜR ÖZETİ

Terimleri arasında rekürans ilişkisi bulunan sayı dizileri üzerine yapılan çalışmalar ilk olarak 1200 lü yıllarda Leonardo Pisano tarafından yapılmıştır. Leonardo Pisano uzun süre Hint-Arap matematiğini incelemiş ve buradan derlediği bilgilerle kendi çalışmalarını birleştirerek Liner Abaci isimli kitabını yazmıştır. İlk defa bu kitapta bahsi geçen ve yazarın ismi ile anılacak olan Fibonacci sayılarını tanımlamıştır. Fibonacci sayıları matematikçilerin fazlasıyla ilgisini çekmiş ve bir çok matematikçi Fibonacci sayıları üzerine incelemeler yapmıştır. Bu çalışmalardan en önemlilerinden biri François Édouard Anatole Lucas (1842-1891) tarafından yapılan çalışmalardır. Lucas Fibonacci sayılarının özelliklerini incelemiş ve Fibonacci sayıları ile çok sıkı ilişkileri bulunan ve kendi adı ile anılan Lucas sayılarını tanımlamıştır. Fibonacci ve Lucas sayılarının birbirleriyle olan ilişkilerini elde etmiştir. Ayrıca Édouard Anatole Lucas Perrin sayılarını da tanımlamış fakat bu dizi daha sonra üzerinde yaptığı çalışmalar nedeniyle R. Perrin(1899)'in adıyla anılır. 20. yüzyılın ikinci yarısında çalışmalar hızlanmış ve bu sayı dizileri üzerine bir çok çalışma yapılmıştır. Miles 1960 da Fibonacci sayılarının  $k$ -basamak genelleştirmelerinden bahsedilmiştir. Vorob'yev 1961 yılında yazmış olduğu kitabında Fibonacci sayılarının özelliklerini geniş bir şekilde incelemiştir. Horadam 1961 ve 1967 yıllarında yazdığı makalelerinde Fibonacci sayılarının genelleştirmelerini yapmıştır. Silva ve Hoggatt tarafından 1980 yazılan makalede Fibonacci sayılarının yeni bir genelleştirmesi yapılmıştır. Silvester 1979 da matris özellikleri kullanarak Fibonacci sayılarının özelliklerini elde etmiştir. Kalman 1982 de genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının özelliklerini matris metodu kullanarak elde etmiştir. Daha sonra 1984 de yayımlanan Er tarafından yazılan makalede Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Fibonacci sayılarının  $k$  dizisinden bahsedilmiş ve bunlar üzerine çalışmalar yapmıştır. Vajda 1989 da basılan Fibonacci and Lucas Numbers and The Golden Section adlı kitabında negatif Fibonacci ve Lucas sayılarını tanımlamıştır. Ayrıca Vajda kitabında Tribonacci sayı dizisinin Miles tarafından tanımlandığını yazmıştır. Karaduman(2004) genelleştirilmiş  $k$ -basamak Fibonacci sayılarının  $k$  dizileri ve matris gösterimiyle ilgili bazı çalışmalar yapmıştır. Kılıç(2006) da genelleştirilmiş  $k$ -basamak Fibonacci sayıları için Binet benzeri formül elde etmiş ve yine bu sayı dizisi için bir kombinasyonel gösterim elde etmiştir. Bu konuya başka bir açıdan bakan MacHenry(2000) de Fibonacci ve Lucas Polinomları tanımlanmış ve bu polinomların bir çok özelliğini elde

etmiştir. Son olarakta yine MacHenry tarafından yazılan ve 2010 yılı itibariyle ulaşılabilen makalede Fibonacci ve Lucas polinomları incelenmiş ve bu polinomların birbirleriyle olan ilişkileri elde edilmiştir.

### 3.GENEL BİLGİLER

#### 3.1 Sayı Dizileri

Fibonacci sayıları, her  $n \geq 2$  doğal sayısı için başlangıç koşulları  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  olmak üzere

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

bağıntısı ile tanımlanır. Burada  $F_n$ ;  $n$ -inci Fibonacci sayısı ve  $\{F_n\}$  ise elemanları Fibonacci sayılarından oluşan Fibonacci dizisidir. Bu dizinin ilk 15 terimi şöyledir:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$F_n$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Ayrıca negatif indisli Fibonacci dizisi de  $F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$  formülü ile tanımlanmıştır (Vajda, 1989).

Lucas sayıları ise her  $n \geq 2$  doğal sayısı için başlangıç koşulları  $L_0 = 2$ ,  $L_1 = 1$  olmak üzere,

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Burada  $L_n$ ;  $n$ -inci Lucas sayısı ve  $\{L_n\}$  ise elemanları Lucas sayılarından oluşan Lucas dizisidir. Bu dizinin ilk 15 terimi şöyledir:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$L_n$	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843

Ayrıca negatif indisli Lucas dizisi de  $L_{-n} = (-1)^n L_n$  formülü ile tanımlanmıştır (Vajda, 1989).

Başlangıç koşulları  $P_0 = 0$ ,  $P_1 = 1$  olmak üzere her  $n \geq 2$  doğal sayısı için,

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$

şeklinde tanımlanan bağıntı ile Pell sayıları elde edilir. Burada  $P_n$ ;  $n$ -inci Pell sayısı ve  $\{P_n\}$  ise elemanları Pell sayılarından oluşan Pell dizisidir. Bu dizinin ilk 14 terimi şöyledir:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$P_n$	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741	13860	334615

Başlangıç koşulları  $R_0 = 3$ ,  $R_1 = 0$ ,  $R_2 = 2$  olmak üzere her  $n \geq 2$  doğal sayısı için,

$$R_{n+1} = R_{n-1} + R_{n-2}$$

şeklinde tanımlanan bağıntı ile Perrin sayıları elde edilir. Burada  $R_n$ ;  $n$ -inci Perrin sayısı ve  $\{R_n\}$  ise elemanları Perrin sayılarından oluşan Perrin dizisidir. Bu dizinin ilk 16 terimi şöyledir:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$R_n$	3	0	2	3	2	5	5	7	10	12	17	22	29	39	51	68

### 3.2 Matris Metodu

Fibonacci, Lucas, Pell ve Perrin sayılarının özelliklerini elde etmek için bir çok araştırmacı matris metodunu kullanmıştır. Bu metot yardımıyla, elde edilen sayı dizisinin özellikleri matris özellikleri kullanılarak daha kolay elde edilmektedir. Bu metodu ilk kullanan araştırmacı olan (Silvester, 1979)  $A_1$  companion matrisini

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

olarak almış ve

$$A_1^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

eşitliğini elde etmiştir. Daha sonra

$$A_1^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

olduğu gösterilmiştir. Bu özellik kullanılarak

$$A_1^n = A_1^{n-1} + A_1^{n-2}$$

bağıntısının sağlandığı, Fibonacci sayıları için Simpson formülü olarak bilinen

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

eşitliği matrisler yardımıyla elde edildiği ve  $m, n$  pozitif tam sayılar olmak üzere

$$A_1^{n+m} = A_1^n A_1^m$$

eşitliğinin sağlandığı yani  $A_1$ 'in matris çarpımı altında değişmeli olduğu gösterilmiştir. (Bong, 1999). Ayrıca Bong benzer matris işlemleri sonucu elde ettiği aşağıdaki eşitlikleri vermiştir:

$$A_1^{2n} = (A_1 + I)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} A_1^r$$

$$A_1^{2n+1} - I = A_1^{2n} + A_1^{2n-2} + \dots + A_1^2 + A_1^{-1}$$

burada  $I$  birim matristir. Bong bu eşitlikleri kullanılarak;

$$F_{2n} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} F_r \text{ ve } F_{2n+1} = 1 + \sum_{r=0}^n F_{2r} = \sum_{r=0}^n F_r$$

formüllerini elde etmiştir.

Bu eşitlikler matrisler kullanılarak Fibonacci sayılarının özelliklerinin elde edilmesini gösteren önemli eşitliklerdir. Bu özelliklere benzer olarak farklı araştırmacılar Fibonacci sayılarının birçok özelliğini elde etmiştir. Fibonacci dizisinin çok fazla özelliği bulunduğu

için diğer sayı dizilerinin bu sayı dizisi ile olan ilişkilerini elde etmek önemli bir çalışma alanı olmuştur. Bu özelliklerden bazıları şöyledir (Koshy, 2001);

$$1. L_n = F_{n-1} + F_{n+1} \quad (n \geq 1)$$

$$2. F_{2n} = F_n L_n$$

$$3. L_n = F_{n+2} - F_{n-2}$$

$$4. L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$$

$$5. L_{4n} = 5F_{2n}^2 + 2.$$

### 3.3 Üreteç Fonksiyonu

Fibonacci ve Lucas sayıları için üreteç fonksiyonu verelim. Üreteç fonksiyonları sabit katsayılı lineer indirgeme dizileri ve bu diziler için çeşitli formüller elde etmekte çok kullanışlıdır (Wilf, 2006). Fibonacci sayıları için;

$$F(x) = F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^4 + F_5x^5 + \dots + F_nx^n + \dots$$

olarak alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} (1 - x - x^2)F(x) &= F(x) - xF(x) - x^2F(x) \\ &= F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^4 + F_5x^5 + \dots \\ &\quad - F_1x^2 - F_2x^3 - F_3x^4 - F_4x^5 - F_5x^6 - \dots \\ &\quad - F_1x^3 - F_2x^4 - F_3x^5 - F_4x^6 - F_5x^7 - \dots \end{aligned}$$

şeklinde olur. Burada  $x$  in kuvvetlerine göre düzenleme yapılırsa

$$(1 - x - x^2)F(x) = F_1x + (F_2 - F_1)x^2 + (F_3 - F_2 - F_1)x^3 + (F_4 - F_3 - F_2)x^4 + \dots$$

elde edilir. Burada  $x$  in 2 ve 2 den büyük kuvvetlerinin katsayısının 0 a eşit olduğu görülür. Böylece

$$(1 - x - x^2)F(x) = F_1x = x \text{ ve}$$

$$F(x) = \frac{x}{(1 - x - x^2)}$$

olarak elde edilir(Horadam, 1965). Benzer bir metotla Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu elde edelim.

$L(x) = L_0x^0 + L_1x + L_2x^2 + L_3x^3 + L_4x^4 + L_5x^5 + \dots + L_nx^n + \dots$  olarak alalım.

$L_0 = 2$  ve  $L_1 = 1$  olduğundan;

$$L(x) = 2 + x + \sum_{i=2}^{\infty} L_i x^i$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} L(x) - 2 - x &= \sum_{i=2}^{\infty} L_i x^i = \sum_{i=2}^{\infty} (L_{i-1} + L_{i-2})x^i \\ &= \sum_{i=2}^{\infty} (L_{i-1})x^i + \sum_{i=2}^{\infty} (L_{i-2})x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (L_{i+1})x^{i+2} + x^2 \sum_{i=0}^{\infty} (L_i)x^i \\ &= xL(x) - 2x + x^2L(x) \end{aligned}$$

elde edilir.  $L(x)$  çekilirse

$$L(x) = \frac{x - 2}{x^2 - x - 1}$$

şeklinde olur.

Aynı metot kullanılarak Perrin sayıları içinde üreteç fonksiyonu elde edilebilir.

### 3.4 Binet Formülü

Fibonacci ve Lucas sayıları için Fransız matematikçi Binet tarafından 1843’de Binet formülleri olarak bilinen ve bu sayı dizilerinin istenen terimini önceki terimlere bağlı kalmadan hesaplayan formüller verilmiştir:

$x^2 - x - 1=0$  karakteristik denkleminin kökleri  $\delta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  ve  $\eta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$  dir.  $n \geq 1$  olmak üzere;

$$F_n = \frac{\delta^n - \eta^n}{\delta - \eta}$$

ve

$$L_n = \delta^n + \eta^n$$

dir. Ayrıca  $(x^3 - x - 1)$  denkleminin  $\alpha, \beta$  kompleks eşlenik kökleri ve  $\rho$  reel kökü olmak üzere;

$$R_n = \alpha^n + \beta^n + \rho^n$$

şeklindeki Binet-benzeri formül de Perrin sayıları için elde edilmiştir.

### 3.5 Altın Oran

Altın oran, doğada sayısız canlının ve cansızın şeklinde ve yapısında bulunan özel bir orandır. Doğada bir bütünün parçaları arasında gözlemlenen, yüzyıllarca sanat ve

mimaride uygulanmış, uyum açısından en güzel boyutları verdiği sanılan geometrik ve sayısal bir oran bağıntısıdır. Doğada en belirgin örneklerine insan vücudunda, deniz kabuklularında ve ağaç dallarında rastlanır. Platon'a göre kozmik fiziğin anahtarı bu orandır. Altın oranı bir dikdörtgenin boyunun enine olan "en estetik" oranı olarak tanımlayanlar da vardır.

Eski Mısırlılar ve Yunanlılar tarafından keşfedilmiş, mimaride ve sanatta kullanılmış tır. Göze en hoş gelen oran olduğu üzerinde genel kanı oluşmuştur.

Bir doğru parçasının ( $|AB|$ ) Altın Oran'a uygun biçimde iki parçaya bölünmesi gerektiğinde, bu doğru öyle bir noktadan ( $C$ ) bölünmelidir ki; küçük parçanın ( $|AC|$ ) büyük parçaya ( $|CB|$ ) oranı, büyük parçanın ( $|CB|$ ) bütün doğru parçasına ( $|AB|$ ) oranına eşittir. Bu oran  $|CB| / |AC| = |AB| / |CB|$  dir.  $|CB|=x$  olarak alırsak bu orandan  $x^2 - x - 1 = 0$  denklemi elde edilir. İşte altın oran bu denklemin pozitif kökü olan  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$  a eşittir. Bu değer yaklaşık olarak 1.618033988749894... dır. Altın Oranın ifade edilmesi için kullanılan sembol, PHI yani  $\Phi$  'dir.

Bu oranın Fibonacci ve Lucas sayıları ile olan ilişkisi ise;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \Phi$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır(Vajda,1989).

### 3.6 Vandermonde Matrisi ve Determinantı

$$V(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_k \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & x_3^{k-1} & \dots & x_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

veya

$$V(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{k-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \cdots & x_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

şeklindeki matrislere *Vandermonde matrisi* denir. Uygun satır veya sütun işlemleri yapılırsa

$$\det(V(x_1, x_2, \dots, x_k)) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_k \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & x_3^{k-1} & \cdots & x_k^{k-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq k} (x_i - x_j)$$

şeklinde olduğu görülür.

### 3.7 Karekarakteristik polinom, özdeğer ve özvektör

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisi ve

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

birim matrisi verilsin.  $(\lambda I_n - A)x = 0$  şeklinde ifade edilen lineer homojen denklem sisteminin sıfır çözümünden farklı çözümünün olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\det(\lambda I_n - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

olmasıdır. Bu determinant açıldığı zaman  $n$  inci dereceden  $\lambda$  ya bağlı monik bir polinom elde ederiz. Bu polinoma  $A$  matrisinin *karakteristik polinomu* denir. Bu polinom açık olarak ifade edilirse

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

şeklinde olur.

$\Delta_A(\lambda) = 0$  denklemine  $A$  matrisinin *karakteristik denklemi* denir.

Bu denklemin köklerine  $A$  matrisinin *özdeğerleri* veya *karakteristik değerleri* denir.

$1 \leq i \leq n$  için  $\lambda_i$  ler  $A$  matrisinin özvektörleri olmak üzere,

$$(\lambda_i I_n - A)x = 0$$

denkleminin  $x_i$  çözüm vektörüne  $A$  matrisinin *özvektörü* veya *karakteristik vektörü* denir.

### 3.8 Vieta Teoremi

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

denkleminin kökleri  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  olsun. Eğer,

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ s_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \\ s_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n \\ &\vdots \\ s_n &= x_1x_2x_3 \dots x_n \end{aligned}$$

ise

$$s_i = (-1)^i \frac{a_{n-i}}{a_n}$$

olur.

### 3.9 $k$ - Genelleştirmeler

Buraya kadar olan bölümde üzerinde bir çok araştırmacının çeşitli araştırmalar yaptığı Fibonacci, Lucas, Perrin ve Pell sayılarının özelliklerinden ve bunlar üzerindeki bazı önemli çalışmalardan kısaca bahsettik. Şimdi son dönemlerde üzerinde yoğun çalışmalar yapılan, bu sayı dizilerinin genelleştirmelerinden kısaca bahsedelim.

Çeşitli araştırmacılar Fibonacci, Lucas, Pell ve Perrin dizilerinin değişik genelleştirmelerini bazı kurallar verilerek yapmışlardır. İlk olarak yapılan bu genelleştirmeleri inceleyeceğiz. Yapılan genelleştirmeler esas olarak dört tip olarak görülebilir. Bu genelleştirmeler şunlardır:

1. Birinci tip genelleştirme klasik dizi tanımında 1 olarak alınan katsayılar keyfi olarak alınır ve geriye dönük iki terim toplanarak istenen terim elde edilir.
2. İkinci tip genelleştirme ise yine birinci tip genelleştirmelerde olduğu gibi katsayılar keyfi alınır ve buna ek olarak başta verilen başlangıç koşulları değiştirilir.

3. Üçüncü tip genelleştirmede  $k$  tane başlangıç koşulu verilir ve dizinin istenen terimi kendinden önceki  $k$  tane terimi toplanarak elde edilir. Bu tür diziler genelleştirilmiş  $k$ -basamak sayı dizileri olarak adlandırılır.

4. Dördüncü tip genelleştirmede ise genelleştirilmiş  $k$ -basamak sayı dizisi tanımlandıktan sonra bu dizi kullanılarak  $k - 1$  tane daha dizi tanımlanır. Elde edilen bu  $k$  tane sayı dizisi için  $k \times k$  lik bir başlangıç koşulu tanımlanır. Başlangıç koşulu belli olduktan sonra üçüncü tip genelleştirmede olduğu gibi her bir sayı dizisi kendine ait  $k$  tane başlangıç koşulunu kullanarak geriye dönük  $k$  terimin toplanması ile elde edilir. Bu tip genelleştirmelere genelleştirilmiş  $k$ -basamak sayıların  $k$  dizisi adı verilir.

Birinci tip genelleştirmeye örnek olarak Fibonacci ve Lucas sayıları için yapılan genelleştirmeler örnek olarak verilebilir.  $\Delta = a^2 - 4b \neq 0$  olacak şekilde  $a$  ve  $b$  sıfırdan farklı ve  $(a, b) = 1$  olmak üzere genelleştirilmiş Fibonacci dizisi  $\omega_0 = 0, \omega_1 = 1$  başlangıç koşulları olmak üzere her  $n \geq 2$  doğal sayısı için  $\omega_n = a\omega_{n-1} - b\omega_{n-2}$  şeklinde tanımlanır. Aynı şekilde genelleştirilmiş Lucas dizisi  $v_0 = 2, v_1 = 1$  başlangıç koşulları olmak üzere her  $n \geq 2$  doğal sayısı için  $v_{n+2} = av_{n+1} - bv_n$  şeklinde tanımlanır(Robbins,1993).

Bu genelleştirmede  $a = 1$  ve  $b = -1$  için  $\{\omega_n\}$  dizisi Fibonacci dizisi  $\{F_n\}$ 'e ve  $\{v_n\}$  dizisinde Lucas dizisi  $\{L_n\}$ 'e dönüşür. Ayrıca  $a = 2$  ve  $b = -1$  için  $\{\omega_n\}$  dizisi Pell dizisi  $\{P_n\}$ 'e dönüşür.

İkinci tip genelleştirme ise yine  $\Delta = a^2 - 4b \neq 0$  olacak şekilde  $a$  ve  $b$  sıfırdan farklı ve  $(a, b) = 1$  olmak üzere  $\varkappa_0 = \rho$  ve  $\varkappa_1 = \sigma$  başlangıç koşulları için her  $n \geq 2$  doğal sayısı için  $\varkappa_n = a\varkappa_{n-1} - b\varkappa_{n-2}$  bağıntısı ile tanımlanır(Horadam,1967).

Üçüncü tip genelleştirme olan  $k$ -basamak genelleştirmeye örnek olarak ilk kez Miles tarafından tanımlanan  $k$ -basamak Fibonacci sayıları gösterilebilir.  $k$ -basamak Fibonacci sayıları;

$$f_1 = f_2 = \dots = f_{k-2} = 0, f_{k-1} = f_k = 1$$

başlangıç koşulları ile birlikte  $n > k \geq 2$  olmak üzere

$$f_n = \sum_{j=1}^k f_{n-j} \quad (3.9.1)$$

olarak tanımlanmıştır(Miles, 1960).

Genelleştirilmiş  $k$ -basamak sayıların  $k$  dizisine örnek olarak da Er tarafından yapılan ve Miles'in genellemesinde içine alan genelleştirilmiş  $k$ -basamak Fibonacci sayılarının  $k$  dizisi örnek olarak verilebilir. Genelleştirilmiş  $k$ -basamak Fibonacci sayılarının  $k$  dizisi;  $1 - k \leq n \leq 0$  için

$$g_n^i = \begin{cases} 1 & i = 1 - n \text{ ise,} \\ 0 & \text{diğer,} \end{cases}$$

başlangıç koşulları ve  $n > 0, 1 \leq i \leq k$  olmak üzere

$$g_n^i = \sum_{j=1}^k c_j g_{n-j}^i \quad (3.9.2)$$

şeklinde tanımlanmıştır(Er, 1984). Burada  $c_j$  ( $1 \leq j \leq k$ ) sabit katsayılardır. Bu genelleştirmede  $c_j = 1$  alırsak  $n \geq 1 - k$  için  $g_n^k = f_{k+n-2}$  olduğu görülür. Biz aksi belirtilmedikçe bundan sonra  $1 \leq j \leq k$  için  $c_j = 1$  alacağız.

Burada başlangıç koşullarına dikkat edilirse her birinde  $k$  tane koşul bulunan  $k$  tane dizinin başlangıç koşulunun verildiği görülür. Bu başlangıç koşulu matris şeklinde ifade edilirse ortaya  $k \times k$  boyutunda bir matris çıkar. Bu özelliğinden dolayı bu genelleme matris işlemleri için çok uygundur. Er ilk kez Sylvester tarafından kullanılan matris metodunu genişleterek kendisinin tanımlamış olduğu genelleştirilmiş  $k$ -basamak Fibonacci sayılarının  $k$  dizisine uygun hale getirmiştir. Şimdi matris metodu ile genelleştirilmiş  $k$ -basamak Fibonacci sayılarının  $k$  dizisinin özelliklerini verelim;

$g_n^i$  genelleştirilmiş  $k$ -basamak Fibonacci sayılarının  $k$  dizisinin  $i$ -inci dizisi olmak üzere

$$\begin{bmatrix} g_{n+1}^i \\ g_n^i \\ g_{n-1}^i \\ \vdots \\ g_{n-k+2}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_n^i \\ g_{n-1}^i \\ g_{n-2}^i \\ \vdots \\ g_{n-k+1}^i \end{bmatrix} \quad (3.9.3)$$

eşitliği elde edilir. Burada kullanılan

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

matrisi *companion matrix* olarak adlandırılır. Ayrıca

$$G_n = \begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^k \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & \cdots & g_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n-k+1}^1 & g_{n-k+1}^2 & \cdots & g_{n-k+1}^k \end{bmatrix}_{k \times k} \quad (3.9.4)$$

şeklinde sütunları genelleştirilmiş  $k$ -basamak Fibonacci sayılarının  $k$  dizisinin belli elemanları alınarak tanımlanan  $G_n$  matrisi

$$G_{n+1} = A_1 G_n \quad (3.9.5)$$

özelliğini sağlar. Bu eşitlik açık olarak tekrar ifade edilirse

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} g_{n+1}^1 & g_{n+1}^2 & \cdots & g_{n+1}^k \\ g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n-k+2}^1 & g_{n-k+2}^2 & \cdots & g_{n-k+2}^k \end{bmatrix} \\
 = & \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^k \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & \cdots & g_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n-k+1}^1 & g_{n-k+1}^2 & \cdots & g_{n-k+1}^k \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin 3.9.3 eşitliğinin bir genelleştirmesi olduğu kolayca görülür.

Burada 3.9.5 eşitliğine tümevarım uygulanırsa

$$G_{n+1} = A_1^n G_1$$

eşitliği elde edilir(Er, 1984).

$G_n$  matrisi incelenir ve  $c_i = 1$  için düzenlenirse  $G_1 = A_1$  ve bunu kullanarak

$$G_{n+1} = A_1^{n+1}$$

elde edilir(Karaduman, 2004).

### 3.10 Genelleştirmeler için Binet Formülü

Yapılan bu genelleştirmeler için bir çok araştırmacı Binet formülleri elde etmiştir. İlk olarak Kalman(1982) genelleştirilmiş  $k$ -basamak Fibonacci sayıları için Binet formülünü aşağıdaki şekilde elde etmiştir.

Kalman, Silvester'in 3.2.1 de verdiği matris metodunda kullanılan  $2 \times 2$  lık matrisi aşağıdaki  $k \times k$  lık companion matrise genelleştirmiştir.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix}$$

Ayrıca klasik Fibonacci sayıları yerine genelleştirilmiş  $k$ -basamak Fibonacci sayılarında içine alan genel bir  $a_n$  dizisi tanımlamıştır. Bu dizinin  $(n + k)$ -ıncı terimi bu terimden önceki  $k$  tane terimi toplanarak elde edilir ve  $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$  sabit katsayılar olmak üzere

$$a_{n+k} = c_0 a_n + \dots + c_{k-1} a_{n+k-1}$$

şeklinde gösterilir. Kalman bundan sonrada Silvester tarafından verilen 3.2.2 eşitliğini genişleterek

$$C^n \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix} \quad (3.10.1)$$

eşitliğini elde etmiş ve burada  $\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$  olarak genelleştirilmiş  $k$ -basamak Fibonacci sayılarını tekrar tanımlamıştır. Bu tanımlamayla birlikte

3.10.1 eşitliğinden

$$C^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix}$$

eşitliğini elde etmiş ve

$$a_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} C^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.10.2)$$

eşitliği kullanılarak dizinin istenilen teriminin elde edilebileceğini göstermiştir.

Şimdi  $C$  companion matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterelim. Bunun için bu matrisin karakteristik polinomunun köklerinin yani bu matrisin özdeğerlerinin farklı olduğunu göstermeliyiz.  $C$  matrisinin karakteristik polinomu

$$P(x) = x^k - c_{k-1}x^{k-1} - \cdots - c_0$$

dur. Bu polinomun aynı zamanda  $C$  matrisinin minimal polinomu olduğu bilinmektedir. Bundan dolayı bu polinom  $k$  tane farklı köke sahiptir. Dolayısıyla  $\lambda_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) ler  $P(x)$  polinomunun kökleri olmak üzere

$$(C - \lambda_i I)V = 0$$

denkleminin çözümünden  $C$  matrisinin özdeğerleri hesaplanır. Özdeğerlerin hepsi farklı olduğundan özvektörler lineer bağımsızdır.  $v$  sabit katsayılar olmak üzere özvektörler;

$$V = v \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{k-1} \end{bmatrix}$$

şeklinindedir. Böylece  $C$  matrisi köşegenleştirilebilirdir.  $S$  matrisi sütunları  $C$  nin özvektörleri olarak alınan matris ve  $D$  köşegen matris olmak üzere

$$C = SDS^{-1}$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitliğin her iki tarafının  $n$ -inci kuvvetini alınırsa  $C^n = SD^nS^{-1}$  elde edilir. Burada tanımlanan  $S$  matrisi Vandermonde matrisi olarak isimlendirildiğini ve

$$V = S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \dots & \lambda_k^{k-2} \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterildiğini söylemiştik. Şimdi 3.10.2 eşitliğinde  $C^n$  matrisi yerine eşiti olan  $SD^nS^{-1}$  matrisi kullanılırsa

$$a_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} SD^nS^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.10.3)$$

eşitliği elde edilir. Burada ilk üç matrisin çarpımından  $\begin{bmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n & \dots & \lambda_k^n \end{bmatrix}$  matrisi elde edilir. Geriye kalan iki matrisin çarpımı da

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilirse 3.10.3 eşitliği

$$a_n = \sum_{i=1}^k \lambda_i^n y_i \quad (3.10.4)$$

şeklini alır. Daha sonra

$$S \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

eşitliğinden Cramer metodu kullanılarak  $y_m$  ler iki determinantın oranı olarak elde edilip gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra

$$y_m = \frac{(-1)^{m+k}}{(-1)^{-m+k} \prod_{i \neq m} (\lambda_m - \lambda_i)}$$

şeklinde elde edilir. Bu elde edilen değer 3.10.4 eşitliğinde yerine yazıldığında

$$a_n = \sum_{i=1}^k \frac{(\lambda_i)^n}{P'(\lambda_i)}$$

olur ki burada  $P'(\lambda_i)$ ,  $P(x)$  polinomunun  $(\lambda_i)$  noktasındaki türevidir (Kalman, 1980). Burada  $0 \leq i \leq k - 1$  için  $c_i = 1$  olarak alırsak;

$$g_n^k = \sum_{i=1}^k \frac{(\lambda_i)^n}{P'(\lambda_i)}$$

elde edilir.

### 3.11 Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Polinomu

Bölüm 3.10. da Fibonacci sayıları, Lucas sayıları ve onların birtakım genelleştirmelerini verdik. Görüldüğü gibi genelleştirilmiş  $k$ -basamak Fibonacci sayıları tanımlanmış ve üzerine bir dizi çalışma yapılmıştır. Biz bu bölümde Trueman MacHenry tarafından tanımlanan Fibonacci ve Lucas polinomlarını ve bunlardan elde edilen  $A^\infty$  ve  $D^\infty$  matrislerinin tanımlarını vereceğiz. İlk önce kullanacağımız terimlerin tanımlarını verelim.

**Tanım 3.11.1.** (MacHenry, 2000)  $P(x; t_1, t_2, \dots, t_k) = x^k - t_1 x^{k-1} - \dots - t_k$  şeklinde tanımlanan polinoma *core polinom* adı verilir.

Bu polinomun yukarıda tanımladığımız C companion matrisinin karakteristik polinomu olduğu açıktır.

**Tanım 3.11.2.** (MacHenry, 2000)  $k \geq 2$  şeklinde bir tamsayı ve

$$P(x; t_1, t_2, \dots, t_k) = x^k - t_1 x^{k-1} - \dots - t_k$$

polinomu verilsin.  $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$  olmak üzere Fibonacci polinomu  $F_{k,n}(t)$  aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} F_{k,0}(t) &= 0 \\ F_{k,1}(t) &= 1 \\ F_{k,n}(t) &= F_{k-1,n}(t), 1 \leq n \leq k, \\ F_{k,n}(t) &= \sum_{i=1}^k t_i F_{k,n-i}(t), n > k. \end{aligned}$$

**Tanım 3.11.3.** (MacHenry,2000)  $k \geq 2$  şeklinde bir tamsayı ve

$$P(x; t_1, t_2, \dots, t_k) = x^k - t_1 x^{k-1} - \dots - t_k$$

polinomu verilsin.  $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$  olmak üzere Lucas polinomu  $G_{k,n}(t)$  aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} G_{k,0}(t) &= k \\ G_{k,1}(t) &= t_1 \\ G_{k,n}(t) &= G_{k-1,n}(t), 1 \leq n < k, \\ G_{k,n}(t) &= \sum_{i=1}^k t_i G_{k,n-i}(t), n \geq k. \end{aligned}$$

Lucas polinomu için MacHenry tarafından verilen yukardaki tanımda  $k$  genelleştirilmiş Lucas polinomunu bulmak için  $k - i$  genelleştirilmiş Lucas polinomlarının hepsinin bulunması gerekir. Bu da  $k$  nın büyük değerleri için hesaplamayı uzatmaktadır. Genelleştirilmiş Lucas polinomunun yukardaki tanımı yerine aşağıdaki gösterimi kullanmak daha pratik olacaktır. MacHenry tarafından verilen Tanım 3.11.3 başka bir şekilde ifade edilirse aşağıdaki tanım elde edilir.

**Tanım 3.11.4.**  $k \geq 2$  şeklinde bir tamsayı ve

$$P(x; t_1, t_2, \dots, t_k) = x^k - t_1 x^{k-1} - \dots - t_k$$

polinomu verilsin.  $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$  olmak üzere Lucas polinomu  $G_{k,n}(t)$  aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$G_{k,0}(t) = k$$

$$G_{k,1}(t) = t_1$$

$$G_{k,2}(t) = t_1 G_{k,1}(t) + 2t_2$$

$$G_{k,3}(t) = t_1 G_{k,2}(t) + t_2 G_{k,1}(t) + 3t_3$$

$$G_{k,4}(t) = t_1 G_{k,3}(t) + t_2 G_{k,2}(t) + t_3 G_{k,1}(t) + 4t_4$$

$\vdots$

$$G_{k,k-1}(t) = t_1 G_{k,k-2}(t) + t_2 G_{k,k-3}(t) + \dots + t_{k-2} G_{k,1}(t) + t_{k-1}(k-1)$$

olmak üzere  $n \geq k$  için,

$$G_{k,n}(t) = \sum_{i=1}^k t_i G_{k,n-i}(t).$$

dir.

**Teorem 3.11.5.** (MacHenry ve Wong, to appear)  $F_{k,n}(t)$  ve  $G_{k,n}(t)$  Genelleştirilmiş

Fibonacci ve Lucas Polinomları olmak üzere  $(n, k \in \mathbb{N}, n \geq 1)$  ve

$$F_{k,0}(t) = 1, F_{k,-1}(t) = 0, \dots, F_{k,-k+1}(t) = 0,$$

$$G_{k,0}(t) = k, G_{k,-1}(t) = 0, \dots, G_{k,-k+1}(t) = 0$$

başlangıç koşulları için sırasıyla

$$F_{k,n}(t) = \sum_{a_1+n}^{|a|} \binom{|a|}{a_1, \dots, a_k} t_1^{a_1} \dots t_k^{a_k} \quad (3.11.1)$$

ve

$$G_{k,n}(t) = \sum_{a \vdash n} \frac{n}{|a|} \binom{|a|}{a_1, \dots, a_k} t_1^{a_1} \dots t_k^{a_k} \quad (3.11.2)$$

dir. Burada  $a_i$  tüm  $i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) için negatif olmayan tamsayıdır.

Bu çalışmada,  $a \vdash n$  ve  $|a|$  notasyonları sırasıyla  $\sum_{j=1}^k j a_j = n$  ve  $\sum_{j=1}^k a_j$  yerine kullanılacaktır.

Yine bu son çalışmalarında MacHenry ve Wong Genelleştirilmiş Fibonacci Polinomları için kombinasyon ile hesaplamayı aşağıdaki şekilde vermişlerdir.  $n \in \mathbb{Z}$  için,

$$F_{2,n}(t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n-j}{j} F_1^{n-2j} (-t_2)^j \quad (3.11.3)$$

dir. Burada  $n = 2k$  ve  $n = 2k - 1$  durumlarının her ikisinde  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = k$  dir.

Şimdi Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Polinomlarının  $k$  Dizisini verelim. Yukarıda tanımlanan  $C$  companion matrisinin son satır elemanları  $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$  vektörü olarak alınıp elde edilen matris  $A$  olarak adlandırılırsa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ t_k & t_{k-1} & t_{k-2} & \dots & t_2 & t_1 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

elde edilir.  $\begin{bmatrix} t_k & t_{k-1} & t_{k-2} & \dots & t_2 & t_1 \end{bmatrix}$  matrisini  $A$  ile işleme tabi tutalım. Bu işlem sonunda elde edilen satırı  $A$  matrisine satır olarak ekleyelim. Bu durumda  $(A^2)_{k+1 \times k}$  matrisi elde edilir. Bu işlemi sonsuz kez tekrarlayalım. Daha sonra  $A$  matrisinin tersi

olan

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -t_{k-1}t_k^{-1} & -t_{k-2}t_k^{-1} & \cdots & t_1t_k^{-1} & t_k^{-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

matrisini alalınır ve  $\begin{bmatrix} t_k & t_{k-1} & t_{k-2} & \cdots & t_2 & t_1 \end{bmatrix}$  matrisini  $A^{-1}$  ile işleme tabi tutulup bu işlem sonsuz kez tekrar edilir. Bu durumda  $A$  matrisine yukarı doğru sonsuz satır eklenir. İşte bu yukarı ve aşağı doğru eklenen satırlarla birlikte

$$A^\infty = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{k-1}S_{(-2,1^{k-1})} & \cdots & -S_{(-2,1)} & S_{(-2)} \\ (-1)^{k-1}S_{(-1,1^{k-1})} & \cdots & -S_{(-1,1)} & S_{(-1)} \\ (-1)^{k-1}S_{(0,1^{k-1})} & \cdots & -S_{(0,1)} & S_{(0)} \\ (-1)^{k-1}S_{(1,1^{k-1})} & \cdots & -S_{(1,1)} & S_{(1)} \\ (-1)^{k-1}S_{(2,1^{k-1})} & \cdots & -S_{(2,1)} & S_{(2)} \\ (-1)^{k-1}S_{(3,1^{k-1})} & \cdots & -S_{(3,1)} & S_{(3)} \\ (-1)^{k-1}S_{(4,1^{k-1})} & \cdots & -S_{(4,1)} & S_{(4)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = ((-1)^{k-j}S_{(n,1^{k-j})})_{\infty \times k}$$

matrisi elde edilir.  $k = 3$  için  $A$  matrisinin  $n$ -inci kuvveti

$$A^n = \begin{pmatrix} S_{(n-2,1^2)} & -S_{(n-2,1)} & S_{(n-2)} \\ S_{(n-1,1^2)} & -S_{(n-1,1)} & S_{(n-1)} \\ S_{(n,1^2)} & -S_{(n,1)} & S_{(n)} \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

olur, burada  $S_{(n-2)} = F_{3,n-2}(t)$ ,  $S_{(n-1)} = F_{3,n-1}(t)$ ,  $S_{(n)} = F_{3,n}(t)$  dir. Genelleme yapacak olursak  $A^\infty$  matrisinin en sağ sütunu genelleştirilmiş Fibonacci polinomu  $F_{k,n}(t)$  ye eşittir ve

$$S_{(n-r,1^r)} = (-1)^r \sum_{j=r+1}^n t_j S_{(n-j)}, \quad 0 \leq r \leq n$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca  $A^n$  matrisinin izi genelleştirilmiş Lucas polinomuna eşittir yani  $tr(A^n) = G_{k,n}(t)$  dir.

Aynı şekilde  $D^\infty$  matrisi de elde edilir.  $A^\infty$  matrisi elde ederken core polinomu

$$P(x; t_1, t_2, \dots, t_k) = x^k - t_1 x^{k-1} - \dots - t_k$$

nin katsayılar vektörü olan  $(t_k, t_{k-1}, \dots, t_1)$  vektörü yerine core polinomun türevi

$$P'(x) = kx^{k-1} - t_1(k-1)x^{k-2} - \dots - t_{k-1}$$

nin katsayılar vektörü  $(-t_{k-1}, \dots, -t_1(k-1), k)$  alınır ve  $(A^\infty)$  matrisi bulunurken yapıldığı şekilde  $A$  ve  $A^{-1}$  matrisleri ile işleme tabi tutulursa son sütunu  $G_{k,n}(t)$  genelleştirilmiş Lucas polinomunu veren  $(D^\infty)_{\infty \times k}$  matrisi elde edilir. (MacHenry ve Wong, to appear)

**Örnek 3.11.6.**  $k = 3$  için  $D^\infty$  matrisine örnek verelim.

$$D^\infty = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{t_2}{t_3} & -\frac{t_1}{t_3} & \frac{1}{t_3} \\ -t_2 & -2t_1 & 3 \\ 3t_3 & 2t_2 & t_1 \\ t_1 t_3 & 3t_3 + t_1 t_2 & 2t_2 + t_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{\infty \times 3}$$

şeklindedir.

Şimdi  $(t_k, t_{k-1}, \dots, t_1) = (1, 1, \dots, 1)$  olarak alalım ve  $k = 3, k = 4$  için  $A^\infty$  ve  $D^\infty$  matrislerine örnek verelim.

$$A_{(3)}^{\infty} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A_{(4)}^{\infty} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Bu matrislere dikkat edilirse en sağ sütunları genelleştirilmiş  $k$ -basamak Fibonacci sayılarını vermektedir. Ayrıca dikkat edilirse bu örneklerde görüldüğü üzere  $A^{\infty}$  matrisi Er tarafından tanımlanan  $g_n^i$  genelleştirilmiş  $k$ -basamak Fibonacci sayılarının  $k$  dizisini içermektedir. Burada  $k$ -ıncı sütun ( $g_n^1$ )'e, 1-inci sütun ( $g_n^k$ )'ya ve  $1 < i < k$  için  $(k-i+1)$  inci sütun  $g_n^i$  dizisine eşittir. Şimdi de  $D^{\infty}$  matrisi için örnek verelim;

$$D_{(3)}^{\infty} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ 5 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad D_{(4)}^{\infty} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ 7 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 6 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 8 & 7 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

dur.

Burada dikkat edilirse  $D^{\infty}$  matrislerinin son sütunundaki dizi  $A^{\infty}$  matrisi içindeki her bir ardışık  $k \times k$  boyutundaki matrisin izinden elde edilir. Biz bu  $A^{\infty}$  matrisi içindeki her bir ardışık  $k \times k$  boyutundaki matrisin izlerini ki bunlar genelleştirilmiş Lucas polinomunda

tüm katsayılar 1 alınarak elde edilir ve  $D^\infty$  matrisini kullanarak ilk önce genelleştirilmiş  $k$ -basamak Lucas sayılarını tanımlayalım.

## 4. LUCAS SAYI DİZİSİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ

### 4.1 Genelleştirilmiş $k$ -Basamak Lucas Sayıları ve Matris Gösterimi

$G_{k,n}(t)$  genelleştirilmiş Lucas polinomunu ve  $D^\infty$  matrisini kullanarak genelleştirilmiş  $k$ -basamak Lucas Sayılarını aşağıdaki gibi tanımlayalım. Bu genelleştirme 3.9 da tanımını verdiğimiz genelleştirmelerden 3. tip genelleştirme sınıfına girmektedir. Bu genelleştirme de  $k$  tane başlangıç koşulu verildikten sonra dizinin herhangi terimi kendinden önceki  $k$  tane terimin toplanması ile elde edilir.

**Tanım 4.1.1.** *Başlangıç koşulları  $k \geq 2$  olmak üzere*

$$l_{1-k} = l_{2-k} = \dots = l_{-1} = -1 \text{ ve } l_0 = k$$

ve  $n > 0$  için

$$l_n = \sum_{j=1}^k l_{n-j} \quad (4.1.1)$$

şeklinde tanımlanan dizi genelleştirilmiş  $k$ -basamak Lucas Sayıları olarak adlandırılır.

$k = 2$  için  $l_n$  sayı dizisi

$$l_{-1} = -1, l_0 = 2, l_1 = 1, l_2 = 3, l_3 = 4, l_4 = 7, l_5 = 11, l_6 = 18, \dots$$

şeklinde dir. Buradanda görüldüğü gibi  $k = 2$  için genelleştirilmiş  $k$ -basamak Lucas Sayıları klasik Lucas sayı dizisine eşittir.

$k=3$  için  $l_n$  sayı dizisi

$$l_{-2} = -1, l_{-1} = -1, l_0 = 3, l_1 = 1, l_2 = 3, l_3 = 7, l_4 = 11, l_5 = 21, l_6 = 39, \dots$$

şeklinde elde edilir.

Genelleştirilmiş  $k$ -basamak Lucas Sayılarını matris metodu ile göstermek için companion matrisi

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}_{k \times k} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & I & & & & \\ \vdots & & & & & \\ & & & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & & \end{bmatrix}_{k \times k} \quad (4.1.2)$$

şeklinde alalım.

**Teorem 4.1.2.**  $C_1$ , 4.1.2 deki matris ve  $l_n$  genelleştirilmiş  $k$ -basamak Lucas Sayı dizisi olmak üzere her  $n \in \mathbb{N}$  için,

$$\begin{bmatrix} l_{n-k+1} \\ l_{n-k+2} \\ l_{n-k+3} \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} = C_1^n \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ k \end{bmatrix}$$

olur.

**İspat:** İspatı  $n$  üzerinden tümevarımla yapalım.

$n = 1$  için

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ k \\ k-1-\dots-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{2-k} \\ l_{3-k} \\ l_{4-k} \\ \vdots \\ l_0 \\ l_1 \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanır.

$(n - 1)$  için ifadenin doğruluğunu kabul edelim. Yani

$$\begin{bmatrix} l_{n-k} \\ l_{n-k+1} \\ l_{n-k+2} \\ \vdots \\ l_{n-1} \end{bmatrix} = C_1^{n-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} \quad (4.1.3)$$

olsun. 4.1.3 eşitliğinin her iki yanını  $C_1$  matrisi ile çarpılırsa

$$C_1 C_1^{n-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} l_{n-k} \\ l_{n-k+1} \\ l_{n-k+2} \\ \vdots \\ l_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{n-k+1} \\ l_{n-k+2} \\ l_{n-k+3} \\ \vdots \\ l_{n-1} + \dots + l_{n-k+1} + l_{n-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{n-k+1} \\ l_{n-k+2} \\ l_{n-k+3} \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}$$

şeklinde eşitlik elde edilir. Buradan her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{bmatrix} l_{n-k+1} \\ l_{n-k+2} \\ l_{n-k+3} \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} = C_1^n \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ k \end{bmatrix}$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

## 4.2 Genelleştirilmiş $k$ -Basamak Lucas Sayılarının $k$ Dizisinin Tanımı ve Matris Gösterimi

Burada son sütunu genelleştirilmiş Lucas polinomlarını veren  $D^\infty$  matrisini kullanarak 4. tip genelleştirme olarak bahsettiğimiz Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas Sayılarının  $k$  Dizisini tanımlayacağız.  $D^\infty$  matrisinde  $(t_k, t_{k-1}, \dots, t_1) = (1, 1, \dots, 1)$  olarak aldığımızda son sütunun Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas Sayıları'na eşit olduğunu

gösterdik. Burada yine  $(t_k, t_{k-1}, \dots, t_1) = (1, 1, \dots, 1)$  olmak üzere  $D^\infty$  matrisini göz önüne alalım. Bu matrisleri incelediğimizde her  $k \geq 2$  için bu  $\infty \times k$  lık matrislerin  $k \times k$  lık kısımları arasında bir ilişki elde edilir. Bu ilişkileri elde ettiğimiz  $k \times k$  lık matrislere  $k = 3$  ve  $k = 4$  için örnek verecek olursak:

$$D_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ ve } D_4 = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 6 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisleri elde edilir. Burada  $k \geq 2$  için bu şekildeki  $D_k$  matrislerinden faydalanarak aşağıdaki tanım yapılabilir.

**Tanım 4.2.3.** *Başlangıç koşulları  $1 - k \leq n \leq 0$  için*

$$l_n^i = \begin{cases} -i & , i - n < k, \\ -2n + i & , i - n = k, \\ k - i - 1 & , i - n > k \end{cases}$$

ve  $n > 0, 1 \leq i \leq k$  olmak üzere

$$l_n^i = \sum_{j=1}^k l_{n-j}^i \quad (4.2.1)$$

şeklinde tanımlanan  $k$  tane diziyeye *Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas Sayılarının  $k$  Dizisi* denir.

Burada verilen bir  $k$  değeri için  $l_n^i$ ;  $i$ -inci dizinin  $n$ -inci terimidir. Burada dikkat edilirse verilen başlangıç koşulu yukarıda bahsettiğimiz  $D_k$  matrisine karşılık gelmektedir. Elde ettiğimiz genelleştirme,  $D_k$  matrisinin her sütunu ayrı ayrı  $k$  tane dizinin başlangıç koşulu olmak üzere bunların geriye dönük  $k$  tane elemanının toplanıp bir sonraki terimlerin elde edilmesiyle  $k$  tane genelleştirilmiş  $k$  basamak sayı dizisinin elde edilmesinden oluşur.

Bu genelleştirmede  $k = 2$  ve  $i = 2$  için  $l_n^i$  klasik Lucas sayılarına eşittir. Ayrıca  $i = k$  için,  $l_n$  Tanım 4.1.1. de tanımlanan genelleştirilmiş  $k$  basamak Lucas sayıları olmak üzere  $l_n^i = l_n$  dir.

Bu dizilerin özelliklerini daha kolay inceleyebilmek için matris gösterimini elde edelim.

$A$  matrisi aşağıda tanımlanan companion matris

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{k \times k} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & & 0 \\ & I & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{k \times k} \quad (4.2.2)$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} l_{n+1}^i \\ l_n^i \\ l_{n-1}^i \\ \vdots \\ l_{n-k+2}^i \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} l_n^i \\ l_{n-1}^i \\ l_{n-2}^i \\ \vdots \\ l_{n-k+1}^i \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik ile herhangi  $k$  tane terimi verilen dizinin bir sonraki terimi elde edilir. Şimdide genelleştirilmiş Lucas matrisi olarak isimlendirdiğimiz matrisi tanımlayalım.

**Tanım 4.2.4.**  $k \geq 2$  ve  $1 \leq i \leq k$  için  $l_n^i$ ; Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas Sayılarının  $k$  Dizisinin  $i$ -inci dizinin  $n$ -inci terimi olmak üzere

$$L_n^{\sim} = \begin{bmatrix} l_n^1 & l_n^2 & \dots & l_n^k \\ l_{n-1}^1 & l_{n-1}^2 & \dots & l_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n-k+1}^1 & l_{n-k+1}^2 & \dots & l_{n-k+1}^k \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan  $k \times k$  matrise genelleştirilmiş Lucas matrisi denir.

**Teorem 4.2.5.**  $L_n^\sim$  genelleştirilmiş Lucas matrisi ve  $A$ , 4.2.2 de verilen companion matris olmak üzere

$$L_{n+1}^\sim = AL_n^\sim$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:**

$$\begin{aligned} AL_n^\sim &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_n^1 & l_n^2 & \dots & l_n^k \\ l_{n-1}^1 & l_{n-1}^2 & \dots & l_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n-k+1}^1 & l_{n-k+1}^2 & \dots & l_{n-k+1}^k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k l_{n-j+1}^1 & \sum_{j=1}^k l_{n-j+1}^2 & \dots & \sum_{j=1}^k l_{n-j+1}^k \\ l_n^1 & l_{n-1}^2 & \dots & l_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n-k+2}^1 & l_{n-k+2}^2 & \dots & l_{n-k+2}^k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l_{n+1}^1 & l_{n+1}^2 & \dots & l_{n+1}^k \\ l_n^1 & l_n^2 & \dots & l_n^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n-k+2}^1 & l_{n-k+2}^2 & \dots & l_{n-k+2}^k \end{bmatrix} = L_{n+1}^\sim \end{aligned}$$

elde edilir.

**Tanım 4.2.6.** Tanım 4.2.3 ve  $L_n^\sim$  genelleştirilmiş Lucas matrisi dikkate alınırsa  $L_0^\sim$  matrisi,

$$L_0^\sim = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & \dots & -(k-2) & -(k-1) & k \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -(k-2) & k+1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & k+2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2k-3 & \dots & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2k-2 & k-4 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2k-1 & k-3 & k-4 & \dots & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

şeklindedir.

Burada dikkat edilirse  $L_0^\sim$  matrisi Bölüm 3.11 de verilen  $D_k$  matrisinin satırlarının matrisin ortasına göre simetriği alınmış halidir.

**Teorem 4.2.7.**  $L_0^\sim$  matrisi Tanım 4.2.6 da verilen matris ve  $A$  matrisi 4.2.2 de verilen matris olmak üzere

$$L_n^\sim = A^n L_0^\sim$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:** Teorem 4.2.5 den  $L_{n+1}^\sim = AL_n^\sim$  olduğunu biliyoruz. İspatı matrislerin çarpımı ile  $n$  üzerinden tümevarım ile yapalım.  $n = 1$  için

$$L_1^\sim = AL_0^\sim$$

elde edilir.  $n$  den küçük tüm doğal sayılar için eşitliğin doğru olduğunu kabul ederek eşitliğin  $n$  içinde doğru olduğunu göstereyim.  $(n - 1)$  için eşitliğin sağlandığını kabul ettiğimizden

$$L_{n-1}^\sim = A^{n-1} L_0^\sim$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitliğin her iki yanını da  $A$  matrisi ile çarpıp Teorem 4.2.5 kullanılırsa

$$AL_{n-1}^\sim = AA^{n-1} L_0^\sim$$

eşitliğinden

$$L_n^\sim = A^n L_0^\sim$$

eşitliği elde edilir.

**Teorem 4.2.8.**  $G_n$  ve  $L_n^\sim$  sırasıyla (3.9.4) ve Tanım 4.2.4 deki matrisler olmak üzere  $L_n^\sim = G_n L_0^\sim$  dır.

**İspat:**  $G_n = A^n$  (Karaduman, 2004) eşitliği bilinmektedir. Teorem 4.2.7 den  $L_n^\sim = A^n L_0^\sim$  elde edilmiştir. Bu iki eşitlik kullanıldığında  $L_n^\sim = G_n L_0^\sim$  eşitliği elde edilir.

**Örnek 4.2.9.** *Teorem 4.2.8 i  $k = 2$  ve  $k = 3$  için inceleyelim.*

$k = 2$  için  $L_n \approx G_n L_0$  eşitliği

$$\begin{bmatrix} l_n^1 & l_n^2 \\ l_{n-1}^1 & l_{n-1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

şekindedir. Matris çarpımından  $l_n^2 = 2g_n^1 - g_n^2$  elde edilir. Her  $n \in \mathbb{Z}$  için  $g_n^1 = g_{n+1}^2$  olduğundan

$$l_n^2 = 2g_{n+1}^2 - g_n^2$$

elde edilir.

Burada  $l_n^2$  ve  $g_n^2$  sırasıyla klasik Lucas ve Fibonacci sayılarıdır. Bu eşitliği Vajda(1989)  $L_n$  ve  $F_n$  klasik Lucas ve Fibonacci sayıları olmak üzere  $L_n = 2F_{n+1} - F_n$  şeklinde ifade etmiştir.  $k = 3$  için  $L_n \approx G_n L_0$  eşitliği

$$\begin{bmatrix} l_n^1 & l_n^2 & l_n^3 \\ l_{n-1}^1 & l_{n-1}^2 & l_{n-1}^3 \\ l_{n-2}^1 & l_{n-2}^2 & l_{n-2}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 & g_n^3 \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & g_{n-1}^3 \\ g_{n-2}^1 & g_{n-2}^2 & g_{n-2}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

şekindedir. Matris çarpımından  $l_n^3 = 3g_n^1 - g_n^2 - g_n^3$  elde edilir.  $k = 3$  ve her  $n \in \mathbb{Z}$  için  $g_n^1 = g_{n+1}^3$  ve  $g_n^2 = g_{n-1}^1 + g_{n-1}^3 = g_n^3 + g_{n-1}^3$  eşitlikleri sağlanır. Bu eşitlikler kullanılarak

$$l_n^3 = 3g_{n+1}^3 - 2g_n^3 - g_{n-1}^3$$

eşitliği elde edilir.

**Teorem 4.2.10.**  $k \geq 2$  ve  $n \geq 0$  için  $l_n^k$  ve  $g_n^k$  sırasıyla Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas ve Fibonacci Sayılarının  $k$  Dizisinin  $k$ -ıncı dizileri olmak üzere

$$l_n^k = k g_{n+1}^k - (k-1) g_n^k - \cdots - g_{n-k+2}^k = k g_{n+1}^k - \sum_{j=2}^k (k-j+1) g_{n+2-j}^k \quad (4.2.3)$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:** Tümevarım metodu kullanarak eşitliğin sağlandığını ispatlayalım. Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas ve Fibonacci Sayılarının  $k$  Dizisinin tanımından  $k \geq 2$  ile birlikte her  $k \in \mathbb{Z}^+$  için  $l_0^k = k$ ,  $g_{-k+2}^k = \dots = g_0^k = 0$  ve  $g_1^k = 1$  dir. Bu değerler kullanılarak  $n = 0$  için 4.2.3 eşitliği

$$l_0^k = kg_1^k - (k-1)g_0^k - \dots - g_{-k+2}^k = k \cdot 1 + 0 = k$$

şeklinde elde edilir. Şimdi eşitliğin  $n$ -ye eşit ve  $n$ -den küçük tüm doğal sayılar için sağlandığını varsayarak eşitliğin  $n+1$  için de sağlandığını gösterelim.  $n$  için

$$l_n^k = kg_{n+1}^k - \sum_{j=2}^k (k-j+1)g_{n+2-j}^k$$

eşitliğinin doğruluğunu kabul edelim. Tanım 4.2.3 den

$$l_n^i = \sum_{j=1}^k l_{n-j}^i$$

eşitliği sağlanmaktadır. Burada  $i = k$  olarak alınırsa

$$l_{n+1}^k = l_n^k + l_{n-1}^k + l_{n-2}^k + \dots + l_{n-k+1}^k$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. Ayrıca  $n$  ve  $n$ -den küçük doğal sayılar için 4.2.3 eşitliğinin sağlandığını kabul ettiğimizden

$$\begin{aligned} l_{n+1}^k &= l_n^k + l_{n-1}^k + l_{n-2}^k + \dots + l_{n-k+1}^k \\ &= (kg_{n+1}^k - (k-1)g_n^k - \dots - g_{n-k+2}^k) + \\ &\quad (kg_n^k - (k-1)g_{n-1}^k - \dots - g_{n-k+1}^k) + \\ &\quad \dots + (kg_{n-k+2}^k - (k-1)g_{n-k+1}^k - \dots - g_{n-2k+3}^k) \\ &= kg_{n+2}^k - (k-1)g_{n+1}^k - \dots - g_{n-k+3}^k \\ &= kg_{n+2}^k - \sum_{j=2}^k (k-j+1)g_{n+3-j}^k \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece 4.2.3 eşitliği,  $n+1$  içinde sağlanır ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.10,  $f_n$   $k$ -basamak Fibonacci sayıları 3.9.1 ve  $l_n$   $k$ -basamak Lucas sayıları 4.1.1 olmak üzere

$$g_n^k = f_{n+k-2} \text{ ve } l_n^k = l_n$$

eşitlikleri kullanılarak

$$l_n = kf_{n+k-1} - \sum_{j=2}^k (k-j+1)f_{n+k-j} \quad (4.2.4)$$

şeklinde ifade edilebilir.

**Teorem 4.2.11.**  $k \geq 2$  ve  $n \geq 0$ , için

$$G_{k,n}(t) = kF_{k,n}(t) - \sum_{j=2}^k (k-j+1)t_{j-1}F_{k,n+1-j}(t) \quad (4.2.5)$$

dır. Burada  $F_{k,n}(t)$  ve  $G_{k,n}(t)$  sırasıyla Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Polinomlarıdır.

**İspat:** Tümevarım metodu kullanarak eşitliğin sağlandığını ispatlayalım. Genelleştirilmiş Lucas ve Fibonacci Polinomları tanımından  $k \geq 2$  ile birlikte her  $k \in \mathbb{Z}^+$  için  $G_{k,0}(t) = k$ ,  $F_{k,-k+1}(t) = \dots = F_{k,-1}(t) = 0$  ve  $F_{k,0}(t) = 1$  dir. Bu değerler kullanılarak  $n = 0$  için 4.2.5 eşitliği

$$G_{k,0}(t) = kF_{k,0}(t) - (k-1)F_{k,-1}(t) - \dots - F_{k,-k+1}(t) = k \cdot 1 + 0 = k$$

şeklinde elde edilir. Şimdi eşitliğin  $n$  ye eşit ve  $n$  den küçük tüm doğal sayılar için sağlandığını varsayarak eşitliğin  $n+1$  içinde sağlandığını göstereyim.  $n$  için

$$G_{k,n}(t) = kF_{k,n}(t) - \sum_{j=2}^k (k-j+1)t_{j-1}F_{k,n+1-j}(t)$$

eşitliği sağlanmaktadır. Tanım 3.11.4 den

$$G_{k,n}(t) = \sum_{i=1}^k t_i G_{k,n-i}(t)$$

eşitliği sağlanmaktadır. Bu eşitliği açarsak;

$$G_{k,n+1}(t) = t_1 G_{k,n}(t) + t_2 G_{k,n-1}(t) + t_3 G_{k,n-2}(t) + \cdots + t_k G_{k,n-k+1}(t)$$

eşitliğinin sağlandığını görürüz. Ayrıca  $n$  ve  $n$  den küçük doğal sayılar için 4.2.5 eşitliğinin sağlandığını kabul etmiştik. Bu kabulü kullanarak

$$\begin{aligned} G_{k,n+1}(t) &= t_1 G_{k,n}(t) + t_2 G_{k,n-1}(t) + t_3 G_{k,n-2}(t) + \cdots + t_k G_{k,n-k+1}(t) \\ &= t_1 (kF_{k,n}(t) - \sum_{j=2}^k (k-j+1)t_{j-1}F_{k,n+1-j}(t)) + \\ &\quad t_2 (kF_{k,n-1}(t) - \sum_{j=2}^k (k-j+1)t_{j-1}F_{k,n-j}(t)) + \\ &\quad \cdots + t_k (kF_{k,n-k+1}(t) - \sum_{j=2}^k (k-j+1)t_{j-1}F_{k,n-k+2-j}(t)) \\ &= kF_{k,n+1}(t) - (k-1)F_{k,n}(t) - \cdots - F_{k,n-k+2}(t) \\ &= kF_{k,n+1}(t) - \sum_{j=2}^k (k-j+1)t_{j-1}F_{k,n+2-j}(t) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece eşitlik 4.2.5  $n+1$  içinde sağlanır ve ispat tamamlanır.

**Örnek 4.2.12.** Yukarıda ispatladığımız teoreme  $k=4$  için örnek verelim;  $k=4$  için Genelleştirilmiş Fibonacci Polinomu,

$$\begin{aligned} F_{4,0} &= 1 \\ F_{4,1} &= t_1 \\ F_{4,2} &= t_1^2 + t_2 \\ F_{4,3} &= t_1^3 + 2t_1t_2 + t_3 \\ F_{4,4} &= t_1^4 + 2t_1t_3 + t_2^2 + 3t_1^2t_2 + 4t_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

ve  $k = 4$  için Genelleştirilmiş Lucas Polinomu

$$\begin{aligned}
 G_{4,0} &= 4 \\
 G_{4,1} &= t_1 \\
 G_{4,2} &= t_1^2 + 2t_2 \\
 G_{4,3} &= t_1^3 + 3t_1t_2 + 3t_3 \\
 G_{4,4} &= t_1^4 + 4t_1t_3 + 2t_2^2 + 4t_1^2t_2 + 4t_4 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

şeklindedir. Yukarıda verdiğimiz değerleri kullanarak verilen genelleştirilmiş Fibonacci Polinomlarından Genelleştirilmiş Lucas Polinomunu  $n = 4$  için elde edelim.

$$\begin{aligned}
 G_{4,4} &= kF_{4,4}(t) - \sum_{j=2}^4 (4-j+1)t_{j-1}F_{4,4+1-j}(t) \\
 &= kF_{4,4}(t) - 3t_1F_{4,3}(t) - 2t_2F_{4,2}(t) - t_3F_{4,1}(t) \\
 &= 4(t_1^4 + 2t_1t_3 + t_2^2 + 3t_1^2t_2 + 4t_4) - 3t_1(t_1^3 + 2t_1t_2 + t_3) \\
 &\quad - 2t_2(t_1^2 + t_2) - t_3t_1 \\
 &= t_1^4 + 4t_1t_3 + 2t_2^2 + 4t_1^2t_2 + 4t_4
 \end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 4.2.13.**  $k \geq 2$  ve  $n \geq 1$  için  $l_n^k$  ve  $g_n^k$  sırasıyla Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas ve Fibonacci Sayılarının  $k$  Dizisinin  $k$ -ıncı dizileri olmak üzere

$$l_n^k = \sum_{j=1}^k jg_{n+1-j}^k \quad (4.2.6)$$

dir.

**İspat:** Tümevarım kullanarak eşitliğin doğru olduğunu ispatlayalım. Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas ve Fibonacci Sayılarının  $k$  Dizisinin tanımından  $k \geq 2$  ile birlikte her  $k \in \mathbb{Z}^+$  için  $l_0^k = k$ ,  $g_{-k+2}^k = \dots = g_0^k = 0$  ve  $g_{1-k}^k = 1$  dir. Bu değerler kullanılarak

$n = 0$  için 4.2.6 eşitliği

$$l_0^k = kg_{1-k}^k + (k-1)g_{2-k}^k + \cdots + g_0^k = k.g_{1-k}^k + 0 = k$$

şeklinde olur. Buradan  $n = 0$  için 4.2.6 eşitliğinin sağlandığı gösterilmiş olur. Şimdi eşitliğin  $n$  ye eşit ve  $n$  den küçük tüm doğal sayılar için sağlandığını varsayarak eşitliğin  $n + 1$  içinde sağlandığını gösterelim. Kabulden  $n$  için

$$l_n^k = \sum_{j=1}^k jg_{n+1-j}^k$$

eşitliği sağlanmaktadır. Tanım 4.2.3 den

$$l_n^i = \sum_{j=1}^k l_{n-j}^i$$

eşitliği sağlanmaktadır. Burada  $i = k$  alırsak

$$l_{n+1}^k = l_n^k + l_{n-1}^k + l_{n-2}^k + \cdots + l_{n-k+1}^k$$

eşitliğinin sağlandığını görürüz. Ayrıca  $n$  ve  $n$  den küçük doğal sayılar için 4.2.6 eşitliğinin sağlandığını kabul etmiştik. Bu kabulü kullanarak

$$\begin{aligned} l_{n+1}^k &= l_n^k + l_{n-1}^k + l_{n-2}^k + \cdots + l_{n-k+1}^k \\ &= \sum_{j=1}^k jg_{n+1-j}^k + \sum_{j=1}^k jg_{n-j}^k + \cdots + \sum_{j=1}^k jg_{n-k+2-j}^k \\ &= g_n^k + 2g_{n-1}^k + \cdots + kg_{n+1-k}^k + \\ &\quad g_{n-1}^k + 2g_{n-2}^k + \cdots + kg_{n-k}^k + \\ &\quad \cdots + \\ &\quad g_{n-k+1}^k + 2g_{n-k}^k + \cdots + kg_{n-2k+2}^k \\ &= g_{n+1}^k + 2g_n^k + \cdots + kg_{n+2-k}^k \\ &= \sum_{j=1}^k jg_{n+2-j}^k \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen son eşitlik 4.2.6 eşitliğinin  $n + 1$  için de sağlandığını gösterir. Böylece her  $n \geq 0$  için

$$l_n^k = \sum_{j=1}^k j g_{n+1-j}^k$$

eşitliğinin sağlandığı gösterilmiş olur.

Ayrıca yukardaki teoremden faydalanarak  $f_n$ ,  $k$ -basamak Fibonacci sayıları 3.9.1 ve  $l_n$ ,  $k$ -basamak Lucas sayıları 4.1.1 olmak üzere

$$g_n^k = f_{n+k-2} \text{ ve } l_n^k = l_n$$

eşitliklerini kullanırsak

$$l_n = \sum_{j=1}^k k f_{n+k-j-1} \quad (4.2.7)$$

eşitliği elde edilir.

Yukarıda ispatlarını verdiğimiz 4.2.3 ve 4.2.6 eşitlikleri ve bunlardan yararlanılarak gösterilen 4.2.4 ve 4.2.7 eşitlikleri çok önemli eşitliklerdir. Bu eşitlikler Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas ve Fibonacci Sayılarının  $k$  Dizisinin  $k$ -ıncı dizileri arasındaki ilişkiyi vermektedir. Litaratürde, giriş bölümünde bazılarında bahsettiğimiz Genelleştirilmiş  $k$ -basamak Fibonacci sayıları ile ilgili bir çok uygulama bulunmaktadır. Bulunan bu ilişkiler sayesinde Genelleştirilmiş  $k$ -basamak Fibonacci sayıları için verilen hemen hemen tüm özellikleri Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas Sayılarına uygulamak mümkün olacaktır.

**Teorem 4.2.14.**  $k \geq 2$  ve  $n \geq (2 - k)$  için  $l_n^1$  ve  $l_n^k$  sırasıyla Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas Sayılarının  $k$  Dizisinin 1-inci ve  $k$ -inci dizileri olmak üzere

$$l_n^1 = l_{n-1}^k$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:** Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas Sayılarının  $k$  Dizisinin başlangıç koşulları incelendiğinde 1-inci dizi için başlangıç koşulları

$$l_{1-k}^1 = 2k - 1, l_{2-k}^1 = -1, \dots, l_0^1 = -1$$

ve  $k$ -inci dizi için başlangıç koşulları

$$l_{1-k}^k = -1, l_{2-k}^k = -1, \dots, l_{-1}^k = -1, l_0^k = k$$

şeklindedir. Şimdi

$$\begin{bmatrix} l_{n+1}^i \\ l_n^i \\ l_{n-1}^i \\ \vdots \\ l_{n-k+2}^i \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} l_n^i \\ l_{n-1}^i \\ l_{n-2}^i \\ \vdots \\ l_{n-k+1}^i \end{bmatrix}$$

eşitliğini

$$\begin{bmatrix} l_{2-k}^1 \\ l_{3-k}^1 \\ l_{4-k}^1 \\ \vdots \\ l_1^1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} l_{1-k}^1 \\ l_{2-k}^1 \\ l_{3-k}^1 \\ \vdots \\ l_0^1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 2k - 1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{1-k}^k \\ l_{2-k}^k \\ l_{3-k}^k \\ \vdots \\ l_0^k \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edelim. Burada indisi 1 artırdığımızda başlangıç koşulları aynı olur. Yani başlangıç koşulunu  $-1, -1, \dots, -1, k$  olarak aldığımızda dizilerin terimleri aynı olur. Bu başlangıç koşullarını eşitlemek için indisimizi 1 tane kaydığımız için  $l_n^1 = l_{n-1}^k$  eşitliği elde edilir.

Burada Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas Sayılarının  $k$  Dizisinin ilk dizisinin terimlerinin  $k$ -ıncı dizi cinsinden yazılabileceği gösterildi.

**Teorem 4.2.15.**  $k \geq 2, n \geq i - k + 2$  ve  $1 \leq i \leq k - 1$  için  $l_n^i$  Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas Sayılarının  $k$  Dizisi'nin  $i$ -inci dizisi olmak üzere

$$l_n^{i+1} = l_n^i + l_{n-i-1}^k$$

dir.

**İspat:** İspatı yapmak için  $l_n^{i+1} - l_n^i = t_n$  dizisini elde edip  $t_n = l_{n-i-1}^k$  olduğunu gösterelim. İlk önce  $k \geq 2$ ,  $n \geq i - k + 2$  ve  $1 \leq i \leq k$  için  $t_n$  dizisinin başlangıç koşulunu elde edelim; Başlangıç koşulumuz  $n = i - k + 2$  ile başlamalıdır. Çünkü  $n - i - 1 \geq 1 - k$  olmak zorundadır.  $i - k + 2 \leq n \leq i + 1$  için  $l_n^i, l_n^{i+1}$  ve bunların fark dizisi olan  $t_n$  dizisinin başlangıç koşulları;

	$l_n^{i+1}$	$l_n^i$	$t_n$
$i - k + 2$	$-(i + 1)$	$-i$	$-1$
$i - k + 3$	$-(i + 1)$	$-i$	$-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$0$	$-(i + 1)$	$-i$	$-1$
$1$	$k - i$	$k - i + 1$	$-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$k - i + 2^n - 2$	$k - i + 2^n - 1$	$-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$i + 1$	$k - i + 2^n - 2$	$-i + 2^n - 2$	$k$

şeklinde olur.  $l_n^i$  ve  $l_n^{i+1}$  dizilerinin terimleri kendilerinden önce gelen  $k$  tane terimin toplamı olduğundan  $l_n^{i+1} - l_n^i = t_n$  dizisinin terimlerinde kendisinden önce gelen  $k$  tane terimin toplanmasıyla elde edilir. Burada dikkat edilirse  $t_n$  dizisi için elde ettiğimiz başlangıç koşulu indis kaymasıyla  $l_n^k$  dizisinin başlangıç koşuluyla aynıdır. Bu indis kayması hesaplandığında

$$t_n = l_{n-i-1}^k$$

elde edilir. Böylece

$$l_n^{i+1} - l_n^i = t_n = l_{n-i-1}^k \text{ ve buradan } l_n^{i+1} = l_n^i + l_{n-i-1}^k$$

elde edilir.

Aşağıda vereceğimiz Lemmada Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas Sayılarının  $k$  Dizisinin herhangi dizisinin Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas Sayılarının  $k$  Dizisi'nin  $k$ -ıncı dizisi

cinsinden yazılabileceği gösterilecektir. Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas Sayılarının  $k$  Dizisi'nin diğer bütün dizilerinin  $k$ -ıncı dizi cinsinden yazılabilmesi çok önemlidir.  $k$ -ıncı dizinin genelleştirilmiş  $k$ -basamak Lucas sayı dizisi  $l_n$  ile aynı sayı dizisi olduğunu söylemiştik. Genelleştirilmiş  $k$ -basamak Lucas sayı dizisi'nin özelliklerini elde etmek çok daha kolay olacaktır çünkü yukarıda elde ettiğimiz 4.2.3 ve 4.2.6 eşitlikleri sayesinde genelleştirilmiş  $k$ -basamak Lucas sayı dizisi  $l_n$  ile genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Fibonacci Sayıları arasında önemli eşitlikler elde edilmiştir. Bu sebeple uygulamada aşağıdaki Teorem bize büyük kolaylık sağlamaktadır.

**Teorem 4.2.16.**  $l_n^i$  Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas Sayılarının  $k$  Dizisi olmak üzere  $k \geq 2$  için

$$l_n^i = \begin{cases} l_{n-1}^k, & i = 1 \\ \sum_{m=1}^i l_{n-m}^k, & 1 < i < k \\ l_n^k, & i = k \end{cases}$$

dir.

**İspat:**  $l_n^1 = l_{n-1}^k$  olduğunu Teorem 4.2.14 de göstermiştik. Yukardaki Teoremde ise  $l_n^{i+1} = l_n^i + l_{n-i-1}^k$  olduğunu gösterdik. Bu eşitliği kullanarak;

$$\begin{aligned} l_n^{i+1} - l_n^i &= l_{n-i-1}^k \\ l_n^{i+2} - l_n^{i+1} &= l_{n-i-2}^k \\ &\vdots \\ l_n^{k-1} - l_n^{k-2} &= l_{n-k-1}^k \\ l_n^k - l_n^{k-1} &= l_{n-k}^k \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$l_n^k - l_n^i = l_{n-k}^k + l_{n-k-1}^k + \cdots + l_{n-i-2}^k + l_{n-i-1}^k$$

elde edilir. Burada elde ettiğimiz eşitlikte  $l_n^k = \sum_{j=1}^k l_{n-j}^k$  yı yerine yazarsak

$$\begin{aligned} l_n^i &= l_n^k - (l_{n-k}^k + l_{n-k-1}^k + \cdots + l_{n-i-2}^k + l_{n-i-1}^k) \\ &= l_{n-1}^k + l_{n-2}^k + \cdots + l_{n-k+1}^k - (l_{n-k}^k + l_{n-k-1}^k + \cdots + l_{n-i-2}^k + l_{n-i-1}^k) \\ &= l_{n-1}^k + l_{n-2}^k + \cdots + l_{n-i}^k \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 4.2.17.**  $l_n^i$  Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas Sayılarının  $k$  Dizisini,  $g_n^i$  Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Fibonacci Sayılarının  $k$  Dizisi çinsinden aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$k \geq 3$  ve  $1 \leq i \leq k$  için

$$l_n^i = \sum_{j=1}^{k+i-1} d_j g_{n-j}^k$$

dir. Burada  $1 \leq i \leq k$ ,  $n \geq 0$  ve sabit katsayılar

$$d_j = \begin{cases} \frac{j(j+1)}{2} & \text{eğer } 1 \leq j \leq i \\ \frac{j(j+1)}{2} - \frac{(j-i)(j-i+1)}{2} & \text{eğer } i+1 \leq j \leq k-1 \\ \frac{k(k+1)}{2} - \frac{(j-i)(j-i+1)}{2} & \text{eğer } k \leq j \leq k+i-1 \end{cases}$$

şeklinindedir.

**İspat:** Teorem 4.2.16 dan

$$l_n^i = \begin{cases} l_{n-1}^k, & i = 1 \\ \sum_{m=1}^i l_{n-m}^k, & 1 < i < k \\ l_n^k, & i = k \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz. İspat  $i = 1$  ve  $i = k$  için aşıkardır. Biz  $1 < i < k$  olduğu durumu inceleyelim.  $1 < i < k$  için

$$l_n^i = \sum_{m=1}^i l_{n-m}^k$$

dir. Teorem 4.2.13 den

$$l_n^k = \sum_{j=1}^k j g_{n+1-j}^k$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitliği bir önceki eşitlikte yerine yazarsak;

$$l_n^i = \sum_{m=1}^i \left( \sum_{j=1}^k j g_{n-m+1-j}^k \right)$$

elde edilir. Bu eşitlikteki toplamları açılırsak;

$$\begin{aligned} l_{n-1}^k &= g_{n-1}^k + 2g_{n-2}^k + 3g_{n-3}^k + \cdots + kg_{n-k}^k \\ l_{n-2}^k &= g_{n-2}^k + 2g_{n-3}^k + 3g_{n-4}^k + \cdots + kg_{n-k-1}^k \\ l_{n-3}^k &= g_{n-3}^k + 2g_{n-4}^k + 3g_{n-5}^k + \cdots + kg_{n-k-2}^k \\ l_{n-4}^k &= g_{n-4}^k + 2g_{n-5}^k + 3g_{n-6}^k + \cdots + kg_{n-k-3}^k \\ &\vdots \\ l_{n-i}^k &= g_{n-i}^k + 2g_{n-i-1}^k + 3g_{n-i-2}^k + \cdots + kg_{n-k-i+1}^k \end{aligned}$$

olduğu görürüz. Eşitliklerini taraf tarafa toplarken dikkat edersek  $g_{n-j}^k$  lerin katsayılarının  $1, 2, 3, \dots, k$  veya  $k > t$  olmak üzere  $1, 2, 3, \dots, t$  veya  $p > 1$  olmak üzere  $p, p+1, \dots, k$  şeklinde olduğunu görürüz. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$d_j = \begin{cases} \frac{j(j+1)}{2} & \text{eğer } 1 \leq j \leq i \\ \frac{j(j+1)}{2} - \frac{(j-i)(j-i+1)}{2} & \text{eğer } i+1 \leq j \leq k-1 \\ \frac{k(k+1)}{2} - \frac{(j-i)(j-i+1)}{2} & \text{eğer } k \leq j \leq k+i-1 \end{cases}$$

elde edilirki buda ispatı tamamlar.

**Örnek 4.2.18.** Üste ispatladığımız teoremi kullanarak  $k = 5$ ,  $n = 8$  ve  $i = 4$  için  $l_n^i$  yi hesaplayalım.

$$l_8^4 = \sum_{j=1}^{5+4-1} d_j g_{8-j}^k = d_1 g_7^k + d_2 g_6^k + d_3 g_5^k + d_4 g_4^k + d_5 g_3^k + d_6 g_2^k + d_7 g_1^k + d_8 g_0^k$$

dir. 3.9.2 den

$$g_7^5 = 31, g_6^5 = 16, g_5^5 = 8, g_4^5 = 4, g_3^5 = 2, g_2^5 = 1, g_1^5 = 1, g_0^5 = 0$$

olarak elde edilir. Teoremin ifadesinde verilen

$$d_j = \begin{cases} \frac{j(j+1)}{2} & \text{eğer } 1 \leq j \leq i \\ \frac{j(j+1)}{2} - \frac{(j-i)(j-i+1)}{2} & \text{eğer } i+1 \leq j \leq k-1 \\ \frac{k(k+1)}{2} - \frac{(j-i)(j-i+1)}{2} & \text{eğer } k \leq j \leq k+i-1 \end{cases}$$

eşitliğini kullanırsak;

$$d_1 = 1, d_2 = 3, d_3 = 6, d_4 = 10, d_5 = 14, d_6 = 12, d_7 = 9, d_8 = 5$$

olarak elde ederiz. Bunları kullanarak;

$$l_8^4 = 31 + 3.16 + 6.8 + 10.4 + 14.2 + 12 + 9 + 9.0 = 216$$

olarak bulunur.

**Teorem 4.2.19.**  $l_n^i$  Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas Sayılarının  $k$  Dizisi ve  $g_n^k$  Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Fibonacci Sayılarının  $k$  Dizisi'nin  $k$ -inci dizisi olmak üzere  $k \geq 2$  için,

$$l_n^i = \begin{cases} kg_n^k - \sum_{j=2}^k (k-j+1)g_{n+1-j}^k, & i = 1 \\ \sum_{m=1}^i kg_{n-m+1}^k - \sum_{m=1}^i \sum_{j=2}^k (k-j+1)g_{n-m-j+2}^k, & 1 < i < k \\ kg_{n+1}^k - \sum_{j=2}^k (k-j+1)g_{n+2-j}^k, & i = k \end{cases}$$

dir.

**İspat:** Teorem 4.2.10 dan

$$l_n^k = kg_{n+1}^k - \sum_{j=2}^k (k-j+1)g_{n+2-j}^k$$

ve Teorem 4.2.16 dan

$$l_n^i = \begin{cases} l_{n-1}^k, & i = 1 \\ \sum_{m=1}^i l_{n-m}^k, & 1 < i < k \\ l_n^k, & i = k \end{cases}$$

eşitliklerinin sağlandığını biliyoruz.  $i = 1$  için  $l_n^1 = l_{n-1}^k$  olduğundan

$$l_n^k = kg_{n+1}^k - \sum_{j=2}^k (k-j+1)g_{n+2-j}^k l_{n-1}^1 = kg_n^k - \sum_{j=2}^k (k-j+1)g_{n+1-j}^k$$

elde edilir.  $1 < i < k$  için

$$\begin{aligned} l_n^i &= \sum_{m=1}^i l_{n-m}^k = \sum_{m=1}^i (kg_{n-m+1}^k - \sum_{j=2}^k (k-j+1)g_{n-m+2-j}^k) \\ &= \sum_{m=1}^i kg_{n-m+1}^k - \sum_{m=1}^i \sum_{j=2}^k (k-j+1)g_{n-m-j+2}^k \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler birleştirilirse

$$l_n^i = \begin{cases} kg_n^k - \sum_{j=2}^k (k-j+1)g_{n+1-j}^k, & i = 1 \\ \sum_{m=1}^i kg_{n-m+1}^k - \sum_{m=1}^i \sum_{j=2}^k (k-j+1)g_{n-m-j+2}^k, & 1 < i < k \\ kg_{n+1}^k - \sum_{j=2}^k (k-j+1)g_{n+2-j}^k, & i = k \end{cases}$$

eşitliği elde edilir.

**Örnek 4.2.20.** Örnek 4.2.18 de elde ettiğimiz eşitliği Teorem 4.2.19 u kullanarak tekrar elde edelim. Yani  $k = 5$ ,  $n = 8$  ve  $i = 4$  için  $l_n^i$  yi hesaplayalım.

$$\begin{aligned} l_8^4 &= \sum_{m=1}^4 5g_{8-m+1}^5 - \sum_{m=1}^4 \sum_{j=2}^5 (5-j+1)g_{8-m-j+2}^5 \\ &= 5(g_8^5 + g_7^5 + g_6^5 + g_5^5) - \sum_{m=1}^4 (4g_{8-m}^5 + 3g_{7-m}^5 + 2g_{6-m}^5 + g_{5-m}^5) \\ &= 5(61 + 31 + 16 + 8) - (4g_7^5 + 3g_6^5 + 2g_5^5 + g_4^5) \\ &\quad - (4g_6^5 + 3g_5^5 + 2g_4^5 + g_3^5) - (4g_5^5 + 3g_4^5 + 2g_3^5 + g_2^5) \\ &\quad - (4g_4^5 + 3g_3^5 + 2g_2^5 + g_1^5) \\ &= 580 - (4.31 + 3.16 + 2.8 + 4) - (4.16 + 3.8 + 2.4 + 2) \\ &\quad - (4.8 + 3.4 + 2.2 + 1) - (4.4 + 3.2 + 2.1 + 1) \\ &= 580 - 192 - 98 - 49 - 25 = 216 \end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 4.2.21.**  $l_n^i$  Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas Sayılarının  $k$  Dizisi ve  $g_n^k$  Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Fibonacci Sayılarının  $k$  Dizisinin  $k$ -inci dizisi olmak üzere  $k \geq 2$  için,

$$l_n^i = \begin{cases} \sum_{j=1}^k jg_{n-j}^k, & i = 1 \\ \sum_{m=1}^i \sum_{j=1}^k jg_{n-m-j+1}^k, & 1 < i < k \\ \sum_{j=1}^k jg_{n+1-j}^k, & i = k \end{cases}$$

dir.

**İspat:** Teorem 4.2.12 den

$$l_n^k = \sum_{j=1}^k jg_{n+1-j}^k$$

ve Teorem 4.2.16 dan

$$l_n^i = \begin{cases} l_{n-1}^k, & i = 1 \\ \sum_{m=1}^i l_{n-m}^k, & 1 < i < k \\ l_n^k, & i = k \end{cases}$$

eşitliklerinin var olduğunu biliyoruz.

$$i = 1 \text{ için } l_n^1 = l_{n-1}^k$$

olduğundan

$$l_n^k = \sum_{j=1}^k jg_{n+1-j}^k \Leftrightarrow l_n^1 = \sum_{j=1}^k jg_{n-j}^k$$

elde edilir.

$$1 < i < k \text{ için } l_n^i = \sum_{m=1}^i l_{n-m}^k$$

olduğundan

$$l_n^i = \sum_{m=1}^i l_{n-m}^k = \sum_{m=1}^i \sum_{j=1}^k jg_{n-m+1-j}^k$$

elde edilir.  $i = k$  için  $l_n^k = \sum_{j=1}^k j g_{n+1-j}^k$  olduğu yukarıda elde edilen eşitliklerden

$$l_n^i = \begin{cases} \sum_{j=1}^k j g_{n-j}^k, & i = 1 \\ \sum_{m=1}^i \sum_{j=1}^k j g_{n-m-j+1}^k, & 1 < i < k \\ \sum_{j=1}^k j g_{n+1-j}^k, & i = k \end{cases}$$

elde edilir.

**Örnek 4.2.22.** Üsteki teoremi kullanarak  $k = 4$ ,  $n = 4$  ve  $i = 3$  için  $l_n^i$  yi elde edelim;  $g_0^4 = 0$ ,  $g_1^4 = g_2^4 = 1$  ve  $g_3^4 = 2$  olduğundan,

$$\begin{aligned} l_4^3 &= \sum_{m=1}^3 \sum_{j=1}^4 j \cdot g_{4-m-j+1}^4 = \sum_{m=1}^3 (g_{4-m}^4 + 2g_{3-m}^4 + 3g_{2-m}^4 + 4g_{1-m}^4) \\ &= g_3^4 + 2g_2^4 + 3g_1^4 + 4g_0^4 + g_2^4 + 2g_1^4 + g_1^4 = 11 \end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 4.2.23.**  $l_n^k$  ve  $g_n^k$  sırasıyla Genelleştirilmiş  $k$ -basamak Lucas and Fibonacci sayılarının  $k$  dizisi olmak üzere,  $m, n \in \mathbb{Z}$  ve  $1 \leq i \leq k - 1$  için,

$$l_{n+m}^i = \sum_{j=1}^i (l_{m-j}^k \sum_{s=1}^j g_n^s) + \sum_{j=i+1}^k (l_{m-j}^k \sum_{s=j-i+1}^j g_n^s) + \sum_{j=k+1}^{k+i-1} (l_{m-j}^k \sum_{s=j-i+1}^k g_n^s).$$

dir.

**İspat:**  $L_n^{\sim} = G_n L_0^{\sim}$  olduğunu Teorem 4.2.8 den biliyoruz. Bunu kullanarak,

$L_{n+m}^{\sim} = G_{n+m} L_0^{\sim} = A^{n+m} L_0^{\sim} = A^n A^m L_0^{\sim} = A^n L_m^{\sim} = G_n L_m^{\sim}$  yazabiliriz. Bu matris

çarpımından ve Teorem 4.2.16 dan;

$$\begin{aligned}
l_{n+m}^i &= g_n^1 l_m^i + \cdots + g_n^k l_{m-k+1}^i \\
&= g_n^1 (l_{m-1}^k + \cdots + l_{m-i}^k) + \cdots + g_n^k (l_{m-k}^k + \cdots + l_{m-k-i-1}^k) \\
&= l_{m-1}^k g_n^1 + l_{m-2}^k (g_n^1 + g_n^2) + \cdots + l_{m-i}^k (g_n^1 + g_n^2 + \cdots + g_n^i) + \\
&\quad l_{m-i-1}^k (g_n^2 + g_n^3 + \cdots + g_n^{i+1}) + \cdots + l_{m-k}^k (g_n^{k-i+1} + \cdots + g_n^k) + \\
&\quad l_{m-k-1}^k (g_n^{k-i+2} + \cdots + g_n^k) + \cdots + l_{m-k-i-1}^k g_n^k \\
&= \sum_{j=1}^i (l_{m-j}^k \sum_{t=1}^j g_n^t) + \sum_{j=i+1}^k (l_{m-j}^k \sum_{t=j-i+1}^j g_n^t) + \sum_{j=k+1}^{k+i-1} (l_{m-j}^k \sum_{t=j-i+1}^k g_n^t).
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Örnek 4.2.24.** Üstteki teoremi kullanarak  $l_{n+m}^i$  yi  $k = 5$ ,  $i = 3$ ,  $n = 3$  ve  $m = 4$  için elde edelim;

$$\begin{aligned}
l_{3+4}^3 &= l_7^3 = \sum_{j=1}^3 (l_{4-j}^5 \sum_{t=1}^j g_3^t) + \sum_{j=4}^5 (l_{4-j}^5 \sum_{t=j-2}^j g_3^t) + \sum_{j=6}^7 (l_{4-j}^5 \sum_{t=j-2}^5 g_3^t) \\
&= l_3^5 g_3^1 + l_2^5 (g_3^1 + g_3^2) + l_1^5 (g_3^1 + g_3^2 + g_3^3) + l_0^5 (g_3^2 + g_3^3 + g_3^4) \\
&\quad + l_{-1}^5 (g_3^3 + g_3^4 + g_3^5) + l_{-2}^5 (g_3^4 + g_3^5) + l_{-3}^5 g_3^5 \\
&= 28 + 24 + 12 + 55 - 9 - 5 - 2 = 103
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

**Teorem 4.2.25.**  $l_n^k$  Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas Sayılarının  $k$  Dizisinin  $k$ -inci dizisi olmak üzere  $1 \leq n \leq k$  için

$$l_n^k = 2^n - 1$$

dir.

**İspat:** İspatı  $P(n) = \{1 \leq n \leq k \text{ için } l_n^k = 2^n - 1\}$  önermesinin  $n$  üzerinden tümevarımla ispatını yaparak yapalım.  $P(1)$  için  $l_1^k = 1$  eşitliği sağlanır.  $n$ 'den küçük tüm  $m$  doğal sayıları için  $l_m^k = 2^m - 1$  eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu kabulü

$$l_n^k = l_{n-1}^k + l_{n-2}^k + \cdots + l_{n-k}^k = l_{n-1}^k + l_{n-2}^k + \cdots + l_0^k$$

eşitliğinde kullanırsak

$$\begin{aligned}
l_n^k &= l_{n-1}^k + l_{n-2}^k + \dots + l_0^k \\
&= (2^{n-1} - 1) + (2^{n-2} - 1) + \dots + (2^1 - 1) + k \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^1 + (-k + 1) + k \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^1 + 1 \\
&= (2 - 1)(2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^1 + 2^0) \\
&= 2^n - 1
\end{aligned}$$

eşitliğinden önermenin  $n$  içinde doğru olduğu gösterilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Sonuç 4.2.26.**  $l_n^{k-1}$  Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas Sayılarının  $k$  Dizisi'nin  $k - 1$ -inci dizisi olmak üzere  $1 \leq n \leq k - 1$  için

$$l_n^{k-1} = 2^n$$

dir.

**İspat:**  $l_n^i$  Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas Sayılarının  $k$  Dizisi olmak üzere  $k \geq 2$  için

$$l_n^i = \begin{cases} l_{n-1}^k & , i = 1 \\ \sum_{m=1}^i l_{n-m}^k & , 1 < i < k \\ l_n^k & , i = k \end{cases}$$

olduğunu Teorem 4.2.16 dan biliyoruz. Burada  $i = k - 1$  olarak alırsak

$$l_n^{k-1} = \sum_{m=1}^{k-1} l_{n-m}^k$$

olur. Üstteki teoremden  $1 \leq n \leq k$  için

$$l_n^k = 2^n - 1$$

olduğunu kullanarak

$$\begin{aligned}
 l_n^{k-1} &= \sum_{m=1}^{k-1} l_{n-m}^k = l_{n-1}^k + \dots + l_{n-k+1}^k \\
 &= 2^{n-1} - 1 + \dots + 2^{n-k+2} - 1 + k \\
 &= 2^{n-1} + \dots + 2^{n-k+2} - (k-2) + k \\
 &= (2^{n-1} + \dots + 2^{n-k+2} + 1) + 1 \\
 &= (2^n - 1) + 1 = 2^n
 \end{aligned}$$

elde edilir.

**Sonuç 4.2.27.**  $l_n^k$  ve  $l_n^{k-1}$  Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Lucas Sayılarının  $k$  Dizisinin  $k$ -ıncı ve  $k-1$ -inci dizileri olmak üzere  $1 \leq n \leq k-1$  için

$$l_n^k + 1 = l_n^{k-1}$$

dır.

**İspat:** Teorem 3.2.16 den

$$l_n^k = 2^n - 1$$

ve Sonuç 3.2.17 den

$$l_n^{k-1} = 2^n$$

olduğundan

$$l_n^k + 1 = 2^n - 1 + 1 = 2^n = l_n^{k-1}$$

elde edilir.

### 4.3 Kombinasyon İle Gösterim

**Teorem 4.3.28.**  $g_n^i$  Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Fibonacci Sayılarının  $k$  Dizisi olmak üzere,  $m, n \in \mathbb{Z}^+$ , için,

$$g_n^i = \begin{cases} \sum_{a \vdash n} \binom{|a|}{a_1, \dots, a_k} & \text{eğer } i = 1 \\ \sum_{m=1}^{k-i+1} \sum_{a \vdash (n-m)} \binom{|a|}{a_1, \dots, a_k} & \text{eğer } 1 < i < k \\ \sum_{a \vdash (n-1)} \binom{|a|}{a_1, \dots, a_k} & \text{eğer } i = k \end{cases} \quad (4.3.1)$$

**İspat:**  $1 < i < k$  için  $g_n^i = \sum_{m=1}^{k-i+1} g_{n-m+1}^k$  ve  $t_1 = t_2 = \dots = t_k = 1$  için  $F_{k,n-1}, g_n^k$  ya indirgenir. Böylece  $g_n^i = \sum_{m=1}^{k-i+1} F_{k,n-m}$  dir. 3.11.1 eşitliğini kullanarak

$$g_n^i = \sum_{m=1}^{k-i+1} \sum_{a \vdash (n-m)} \binom{|a|}{a_1, \dots, a_k}$$

elde edilir.  $i = 1$  ve  $i = k$  için  $g_n^i, F_{k,n} = g_n^1$  ve  $F_{k,n} = g_{n+1}^k$  olduğundan bu durumlar için ispat açıktır.

**Örnek 4.3.29.** Üsteki teoremi kullanarak  $k = 5, i = 3$  ve  $n = 6$  için  $g_n^i$  yi hesaplayalım.

$$g_6^3 = \sum_{m=1}^3 \sum_{a \vdash (6-m)} \binom{|a|}{a_1, \dots, a_k} = \sum_{a \vdash (5)} \binom{|a|}{a_1, \dots, a_k} + \sum_{a \vdash (4)} \binom{|a|}{a_1, \dots, a_k} + \sum_{a \vdash (3)} \binom{|a|}{a_1, \dots, a_k}$$

Şimdi  $a \vdash 5$ ,  $a \vdash 4$  ve  $a \vdash 3$  ağırlıklı toplamlarını hesaplayalım.  $a \vdash 5$  için,

$$\begin{array}{rcccccc}
 a_1 + & 2a_2 + & 3a_3 + & 4a_4 + & 5a_5 = & 5 \\
 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \longrightarrow \frac{5!}{5!} = 1 \\
 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \longrightarrow \frac{4!}{3!} = 4 \\
 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \longrightarrow \frac{3!}{2!} = 3 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \longrightarrow \frac{2!}{1!} = 2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \longrightarrow \frac{1!}{1!} = 1 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \longrightarrow \frac{2!}{1!} = 2 \\
 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \longrightarrow \frac{3!}{2!} = 3
 \end{array}$$

$a \vdash 4$  için,

$$\begin{array}{rcccccc}
 a_1 + & 2a_2 + & 3a_3 + & 4a_4 + & 5a_5 = & 4 \\
 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \longrightarrow \frac{4!}{4!} = 1 \\
 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \longrightarrow \frac{3!}{2!} = 3 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \longrightarrow \frac{2!}{1!} = 2 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \longrightarrow \frac{1!}{1!} = 1 \\
 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \longrightarrow \frac{2!}{2!} = 1
 \end{array}$$

ve  $a \vdash 3$  için,

$$\begin{array}{rcccccc}
 a_1 + & 2a_2 + & 3a_3 + & 4a_4 + & 5a_5 = & 4 \\
 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \longrightarrow \frac{4!}{4!} = 1 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \longrightarrow \frac{3!}{2!} = 2 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \longrightarrow \frac{2!}{1!} = 1
 \end{array}$$

olarak elde edilir. Elde ettiğimiz verileri yerlerine yazarsak;

$$g_6^3 = \sum_{a \vdash (5)} \binom{|a|}{a_1, \dots, a_k} + \sum_{a \vdash (4)} \binom{|a|}{a_1, \dots, a_k} + \sum_{a \vdash (3)} \binom{|a|}{a_1, \dots, a_k} = 16 + 8 + 4 = 28$$

elde edilir.

**Lemma 4.3.30.** (Kılıç, 2006)  $g_n^i$  Gnelleştirilmiş  $k$ -Basamak Fibonacci Sayılarının  $k$

Dizisi olmak üzere

$$g_n^k = \sum_{m \vdash (n-1+k)} \frac{m_k}{|m|} \times \binom{|m|}{m_1, \dots, m_k}$$

dir. Burada  $m = (m_1, m_2, \dots, m_k)$ ,  $m_1 + 2m_2 + \dots + km_k = n - 1 + k$ . eşitliğini sağlayan negatif olmayan tam sayılardır. Ayrıca  $0 \leq i \leq n - 1$  için

$$g_{n-i}^k = \sum_{m \vdash (n-i+k-1)} \frac{m_k}{|m|} \times \binom{|m|}{m_1, \dots, m_k}$$

dir.

**Teorem 4.3.31.**  $l_n^i$  Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Fibonacci Sayılarının  $k$  Dizisi olmak üzere,  $m, n \in \mathbb{Z}^+$ , için

$$l_n^i = \begin{cases} \sum_{j=1}^k j \sum_{m \vdash (n-j+k-1)} \frac{m_{jk}}{|m|} \times \binom{|m|}{m_{j1}, \dots, m_{jk}} & \text{eğer } i = 1 \\ \sum_{m=1}^i \sum_{j=1}^k j \sum_{t \vdash (n-m-j+k)} \frac{t_{mjk}}{|t|} \times \binom{|t|}{t_{m_{j1}}, \dots, t_{m_{jk}}} & \text{eğer } 1 < i < k \\ \sum_{j=1}^k j \sum_{m \vdash (n-j+k)} \frac{m_{jk}}{|m|} \times \binom{|m|}{m_{j1}, \dots, m_{jk}} & \text{eğer } i = k \end{cases}$$

burada  $t = (t_{m_{j1}}, \dots, t_{m_{jk}})$  ve  $m = (m_{j1}, m_{j2}, \dots, m_{jk})$  dir.

**İspat:** İspat üstteki lemma ve Teorem 4.2.13 kullanılarak tamamlanır.

Bu teoremin ispatı Lemma ve Teorem 4.2.3 kullanılarak kolayca yapılırsa da terim çokluğu nedeniyle uygulamada zorluk çıkarabilir. Bunun için bu teoremi kullanarak aşağıdaki örneği vererek indis çokluğunun hesaplamada engel teşkil etmediğini gösterelim.

**Örnek 4.3.32.** Üstteki teoremi kullanarak  $k = 4$ ,  $i = 3$  ve  $n = 5$  için  $l_n^i$  yi hesaplayalım. Bu örnekte göreceğiz ki teoremin ifadesinde yer alan indisler sadece gösterim kolaylığıdır. Yani  $j$  lerin ve  $m$  lerin farklı değerler aldığı göstermek içindir. Burada esas olan  $t$  nin  $k$  ile indislenerak hesap yapılmasıdır. Şimdi formülümüzü açık olarak yazıp hesaplamamızı yapalım;

$$\begin{aligned} l_5^3 &= \sum_{m=1}^3 \sum_{j=1}^4 j \sum_{t \vdash (9-m-j)} \frac{t_{m_{j4}}}{|t|} \times \binom{|t|}{t_{m_{j1}}, \dots, t_{m_{j4}}} \\ &= \sum_{j=1}^4 j \sum_{t \vdash (8-j)} \frac{t_{1j4}}{|t|} \times \binom{|t|}{t_{1j4}, \dots, t_{1j4}} + \sum_{j=1}^4 j \sum_{t \vdash (7-j)} \frac{t_{2j4}}{|t|} \times \binom{|t|}{t_{2j4}, \dots, t_{2j4}} \\ &+ \sum_{j=1}^4 j \sum_{t \vdash (6-j)} \frac{t_{3j4}}{|t|} \times \binom{|t|}{t_{3j4}, \dots, t_{3j4}} = \sum_{t \vdash (7)} \frac{t_{114}}{|t|} \times \binom{|t|}{t_{114}, \dots, t_{114}} \\ &+ 2 \sum_{t \vdash (6)} \frac{t_{124}}{|t|} \times \binom{|t|}{t_{124}, \dots, t_{124}} + 3 \sum_{t \vdash (5)} \frac{t_{134}}{|t|} \times \binom{|t|}{t_{134}, \dots, t_{134}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4 \sum_{t \vdash (4)} \frac{t_{144}}{|t|} \times \binom{|t|}{t_{144}, \dots, t_{144}} + \sum_{t \vdash (6)} \frac{t_{214}}{|t|} \times \binom{|t|}{t_{214}, \dots, t_{214}} \\
& + 2 \sum_{t \vdash (5)} \frac{t_{224}}{|t|} \times \binom{|t|}{t_{224}, \dots, t_{224}} + 3 \sum_{t \vdash (4)} \frac{t_{234}}{|t|} \times \binom{|t|}{t_{234}, \dots, t_{234}} \\
& + 4 \sum_{t \vdash (3)} \frac{t_{244}}{|t|} \times \binom{|t|}{t_{244}, \dots, t_{244}} + \sum_{t \vdash (5)} \frac{t_{314}}{|t|} \times \binom{|t|}{t_{314}, \dots, t_{314}} \\
& + 2 \sum_{t \vdash (4)} \frac{t_{324}}{|t|} \times \binom{|t|}{t_{324}, \dots, t_{324}} + 3 \sum_{t \vdash (3)} \frac{t_{334}}{|t|} \times \binom{|t|}{t_{334}, \dots, t_{334}} \\
& + 4 \sum_{t \vdash (2)} \frac{t_{344}}{|t|} \times \binom{|t|}{t_{344}, \dots, t_{344}}
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Şimdi ağırlıklı toplamlardan elde edilen ve kombinatorik olarak bulunan kısımları hesaplayalım. Bu hesaplamada bizim için esas olan  $k = 4$  için ağırlıklı toplam olduğundan  $t$  nin indislerini 1, 2, 3, 4 olarak almak yeterli olacaktır. Formülde  $\frac{t_4}{|t|}$  çarpanı olduğundan  $t_4 = 0$  için  $t_i$  leri hesaplamak gereksizdir. Ayrıca  $t \vdash 2$  ve  $t \vdash 3$  olduğu durumda  $t_4 = 0$  olacağı için bunuda hesaplamaya gerek yoktur, yani sonuç  $t_4 = 0$  olduğunda toplam sıfıra eşit olacaktır. Böylece karmaşık olan formül hesaplanırken bunlar göz önünde bulundurulursa hesaplama kolay olacaktır. Şimdi  $t \vdash 7, t \vdash 6, t \vdash 5, t \vdash 4$  için ağırlıklı toplamlarını hesaplayalım.  $t \vdash 7$  için,

$$\begin{array}{ccccccc}
t_1+ & 2t_2+ & 3t_3+ & 4t_4 = & 7 & \frac{t_4}{|t|} \times \binom{|t|}{t_1, \dots, t_4} \\
3 & 0 & 0 & 1 & \longrightarrow & \frac{1}{4} \times \frac{4!}{3!} = 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & \longrightarrow & \frac{1}{3} \times \frac{3!}{1!} = 2 \\
0 & 0 & 1 & 1 & \longrightarrow & \frac{1}{2} \times \frac{2!}{1!} = 1
\end{array}$$

$t \vdash 6$  için,

$$\begin{array}{ccccccc}
t_1+ & 2t_2+ & 3t_3+ & 4t_4 = & 6 & \frac{t_4}{|t|} \times \binom{|t|}{t_1, \dots, t_4} \\
0 & 1 & 0 & 1 & \longrightarrow & \frac{1}{2} \times \frac{2!}{1!} = 1 \\
2 & 0 & 0 & 1 & \longrightarrow & \frac{1}{3} \times \frac{3!}{2!} = 1
\end{array}$$

$t \vdash 5$  için,

$$\begin{array}{ccccccc}
t_1+ & 2t_2+ & 3t_3+ & 4t_4 = & 7 & \frac{t_4}{|t|} \times \binom{|t|}{t_1, \dots, t_4} \\
1 & 0 & 0 & 1 & \longrightarrow & \frac{1}{2} \times \frac{2!}{1!} = 1
\end{array}$$

ve  $t \vdash 4$  için,

$$\begin{array}{ccccccc}
t_1+ & 2t_2+ & 3t_3+ & 4t_4 = & 7 & \frac{t_4}{|t|} \times \binom{|t|}{t_1, \dots, t_4} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \longrightarrow & \frac{1}{1} \times \frac{1!}{1!} = 1
\end{array}$$

olarak elde edilir. Bunlar formülde yerlerine yazılırsa;

$$l_5^3 = 1.4 + 2.2 + 3.1 + 4.1 + 1.2 + 2.1 + 3.1 + 1.1 + 2.1 = 25 \text{ elde edilir.}$$

## 5. GENELLEŞTİRİLMİŞ $k$ -BASAMAK PERRİN SAYILARI

### 5.1 Genelleştirilmiş Perrin Polinomu ve $R^\infty$ Matrisi

Bölüm 4 de Lucas sayılarının genelleştirmeleri ve bu genelleştirmelerin özellikleri anlatıldı. Bu bölümde Lucas sayılarının genelleştirmelerinin özel bir halini inceleyeceğiz. Genelleştirilmiş Lucas Polinomu  $G_{k,n}(t)$  ve  $D^\infty$  matrisinin  $t = (t_k, t_{k-1}, \dots, t_1)$  olarak alınıp bu vektörün  $A$  ve  $A^{-1}$  matrisi ile çarpılarak elde edildiğini göstermiştik. Burada kullandığımız  $t = (t_k, t_{k-1}, \dots, t_1)$  vektörü yerine,

$$t_p = (t_k, t_{k-1}, \dots, t_2, 0)$$

vektörünü alarak Lucas sayılarının genelleştirmesinin özel bir halini elde edeceğiz. Şimdi  $t_p = (t_k, t_{k-1}, \dots, t_2, 0)$  vektörü yardımıyla elde edilen Genelleştirilmiş Lucas Polinomu  $G_{k,n}(t)$  nin özel bir hali olan ve Genelleştirilmiş Perrin Polinomu olarak adlandıracağımız polinomu elde edelim.

MacHenry tarafından kullanılan companion matris  $A$  yı;

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ t_k & t_{k-1} & t_{k-2} & \cdots & t_2 & 0 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

şeklinde alalım. Core polinomu

$$P(x; t_1, t_2, \dots, t_k) = x^k - t_1 x^{k-1} - \dots - t_k$$

nin katsayılar vektörü olan  $(t_k, t_{k-1}, \dots, t_1)$  vektörü yerine core polinomun türevi

$$P(x) = kx^{k-1} - t_1(k-1)x^{k-2} - \dots - t_{k-1}$$

nin katsayılar vektörü  $(-t_{k-1}, \dots, -t_1(k-1), k)$  alınıp  $A$  ve  $A^{-1}$  matrisleri ile işleme tabi tutulduğunda son sütünü  $G_{k,n}(t)$  genelleştirilmiş Lucas polinomunu veren  $(D^\infty)_{\infty \times k}$  matrisi elde edilmişti.(MacHenry ve Wong, to appear). Biz ise MacHenry'nin yaptığına benzer olarak core polinomun türevi

$$P(x) = kx^{k-1} - t_1(k-1)x^{k-2} - \dots - t_{k-1}$$

nin katsayılar vektörü  $(-t_{k-1}, \dots, -t_1(k-1), k)$  yı alıp  $t_1 = 0$  için yeniden düzenlersek

$$(-t_{k-1}, \dots, -(k-i)t_i, \dots, -(k-2)t_2, 0, k)$$

şeklindeki vektörü elde ederiz.  $(-t_{k-1}, \dots, -(k-i)t_i, \dots, -(k-2)t_2, 0, k)$  vektörü alınıp  $A^\infty$  ve  $D^\infty$  matrislerini elde ederken kullandığımız metotla  $A_p$  ve  $A_p^{-1}$  matrisi ile sonsuz defa çarparsak  $R^\infty$  matrisi olarak adlandırdığımız matrisi elde ederiz. Bu matrise  $k = 3$  ve  $k = 4$  için aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

$k = 3$  için;

$$R^\infty = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{t_2^3}{t_3} + 3 & -\frac{t_2}{t_3} & \frac{t_2^2}{t_3} \\ -\frac{t_2^2}{t_3} & 3 & -\frac{t_2}{t_3} \\ -t_2 & 0 & 3 \\ 3t_3 & 2t_2 & 0 \\ 0 & 3t_3 & 2t_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

ve  $k = 4$  için

$$R^\infty = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -t_3 & -2t_2 & 0 & 4 \\ 4t_4 & 3t_3 & 2t_2 & 0 \\ 0 & 4t_4 & 3t_3 & 2t_2 \\ 2t_2t_4 & 2t_2t_3 & 4t_4 + 2t_2^2 & 3t_3 \\ 32t_3t_4 & 2t_2t_4 + 32t_3^2 & 52t_2t_3 & 4t_4 + 2t_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

şeklinde olur.  $R^\infty$  matrisleri incelenirse bu matrislerin son sütununun pozitif yönü Genelleştirilmiş Lucas Polinomu  $G_{k,n}(t)$  de  $t_1 = 0$  almakla elde edilen polinom olduğu görülür. Bu polinomu Genelleştirilmiş Perrin Polinomu olarak isimlendirelim ve  $R_{k,n}(t)$  ile gösterelim.  $R_{k,n}(t)$  polinomunu açık olarak ifade edecek olursak;

$$\begin{aligned} R_{k,0}(t) &= k \\ R_{k,1}(t) &= 0 \\ R_{k,2}(t) &= 2t_2 \\ R_{k,n}(t) &= R_{k-1,n}(t), \quad 3 \leq n \leq k-1 \\ R_{k,n}(t) &= \sum_{i=2}^k t_i R_{k,n-i}(t), \quad n \geq k \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.  $R_{k,n}(t)$  polinomunun başka bir tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

**Tanım 5.1.1.**  $k \geq 3$  şeklinde bir tamsayı ve

$$P(x; t_1, t_2, \dots, t_k) = x^k - t_1x^{k-1} - \dots - t_k$$

polinomu verilsin.  $t = (0, t_2, \dots, t_k)$  olmak üzere genelleştirilmiş Perrin polinomu  $R_{k,n}(t)$  aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$R_{k,0}(t) = k$$

$$R_{k,1}(t) = 0$$

$$R_{k,2}(t) = 2t_2$$

$$R_{k,3}(t) = t_2R_{k,1}(t) + 3t_3$$

$$R_{k,4}(t) = t_2R_{k,2}(t) + t_3R_{k,1}(t) + 4t_4$$

$$\vdots$$

$$R_{k,k-1}(t) = t_2R_{k,k-3}(t) + \cdots + t_{k-1}G_{k,1}(t) + t_k k$$

olmak üzere  $n \geq k$  için,

$$R_{k,n}(t) = \sum_{i=2}^k t_i R_{k,n-i}(t).$$

şeklinde elde edilir.

## 5.2 Genelleştirilmiş $k$ -Basamak Perrin Sayıları ve Matris Gösterimi

Bu bölümde  $R_{k,n}(t)$  polinomunu ve  $R^\infty$  matrisini kullanarak Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Perrin Sayılarını elde edeceğiz. Bunun için  $R^\infty$  matrisini,  $t_p = (t_k, t_{k-1}, \dots, t_2, 0) = (1, 1, \dots, 1, 0)$  olarak alıp  $k = 3$  ve  $k = 4$  için tekrar ifade edelim.

$k = 3$  için

$$R^\infty = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

ve  $k = 4$  için

$$R^\infty = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada  $R^\infty$  ve  $R_{k,n}(t)$  polinomunu kullanarak Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Perrin Sayılarının başlangıç koşullarını aşağıdaki gibi elde ederiz.

$k = 3$  için,

$$1, -1, 3$$

$k = 4$  için,

$$2, -1, -1, 4$$

$k = 5$  için,

$$3, -1, -1, -1, 5$$

$\vdots$

ve bu örneklerdende anlaşılacağı üzere  $k$  için,

$$k - 2, -1, -1, \dots, -1, k \text{ (Burada } k - 2 \text{ tane } -1 \text{ var)}$$

şeklinde olur. Başlangıç koşullarını da elde ettikten sonra Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Perrin Sayılarını tanımlayalım.

**Tanım 5.2.2.**  $k \geq 3$  için başlangıç koşulları  $R_{1-k} = k - 2, R_{2-k} = -1, \dots, R_{-1} = -1, R_0 = k$  olmak üzere

$$R_n = \sum_{i=2}^k R_{n-i}$$

şeklinde tanımlanan sayı dizisine *Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Perrin Sayı Dizisi* adı verilir.

$k=3$  için  $R_n$  sayı dizisi

$$R_{-2} = 1, R_{-1} = -1, R_0 = 3, R_1 = 0, R_2 = 2, R_3 = 3, R_4 = 2, R_5 = 5, R_6 = 5, \dots$$

şeklinindedir. Tanımdanda görüldüğü gibi  $k = 3$  için Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Perrin Sayıları klasik Perrin sayı dizisine eşittir.

$k=4$  için  $R_n$  sayı dizisi

$$R_{-3} = 2, R_{-2} = -1, R_{-1} = -1, R_0 = 4, R_1 = 0, R_2 = 2, R_3 = 3, R_4 = 6, R_5 = 5, \dots$$

şeklinde elde edilir. Genelleştirilmiş  $k$ -Basamak Perrin Sayılarını matris metodu ile göstermek için companion matrisi

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ t_k & t_{k-1} & t_{k-2} & \cdots & t_2 & 0 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

olarak alalım.

**Teorem 5.2.3.**  $A_p$ , üstteki matris ve  $R_n$  Genelleştirilmiş  $k$  Basamak Perrin Sayı dizisi olmak üzere her  $n$  için,

$$\begin{bmatrix} R_{n-k+1} \\ R_{n-k+2} \\ R_{n-k+3} \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = A_p^n \begin{bmatrix} k-2 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ k \end{bmatrix}$$

olur.

**İspat:** İspatı  $n$  üzerinden tümevarımla Teorem 4.1.2 nin ispatına benzer olarak kolayca elde edilir.

Bu teoremin bir sonucu olan ve  $R_n$  yi matris çarpımları sonucu elde eden aşağıdaki sonucu verebiliriz.

**Sonuç 5.2.4.**

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} A_p^n \begin{bmatrix} k-2 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ k \end{bmatrix} = R_n$$

*dir.*

## 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Lucas sayılarının genelleştirilmeleri başka bir açıdan ele alınmış ve genelleştirilmiş  $k$ -basamak Lucas sayıları ve genelleştirilmiş  $k$ -basamak Lucas sayılarının  $k$  dizisinin tanımları yapılmıştır. Bu tanımlamada ana esin kaynağı T. MacHenry tarafından verilen genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomlarıdır. Fibonacci dizisi için Er tarafından yapılan  $k$  genelleştirmeler Genelleştirilmiş Fibonacci polinomları ile bire bir örtüşmekte idi. Bu ilişki fark edildikten sonra bu polinomları kullanarak Lucas genelleştirmesi yapmanın uygun olacağı düşüncesiyle yola çıkıldı ve Genelleştirilmiş  $k$  basamak Lucas sayıları elde edildi. Görüldü ki Lucas sayılarının bu genelleştirilmesi ve Er tarafından yapılan Fibonacci genelleştirmesi ve Miles tarafından yapılan Fibonacci genelleştirmesi arasında çok güçlü ilişkiler bulunmaktadır. Bu bulgular yaptığımız bu genelleştirmelerin uygun genelleştirmeler olduğunu yönündeki tezimizi güçlendirdi. Lucas sayılarının genelleştirilmesi yapıp bu genelleştirmenin Fibonacci sayılarının genelleştirmesi ile ilişkileri elde edildikten sonra Lucas sayılarının genelleştirmesi yapılırken ele alınan Lucas polinomunda  $t_1 = 0$  alınarak Perrin sayılarının genelleştirilmesi elde edildi. Dolayısıyla Perrin sayılarının ve onun genelleştirmelerinin Fibonacci ve Lucas sayılarının genelleştirmeleri ile olan ilişkisi elde edilmiş oldu.

Bu ilişkilerden faydalanarak Genelleştirilmiş  $k$  basamak Lucas ve Perrin sayılarının bir çok özelliği elde edilebilir. Bu özellikler önemlidir çünkü Genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının bir çok özelliği bilinmekte ve özellikler fizikten borsaya kadar bir çok alanda kullanılmaktadır. Bunlar düşünülerek ve bizim elde ettiğimiz özelliklerin yanı sıra yeni özellikler ve yeni ilişkiler elde edilerek birçok araştırma yapılabilir. Örneğin tezde kullanılan yöntem kullanılarak Pell sayılarının ve Pell sayılarının genelleştirmelerinin özellikleri elde edilebilir. Yapılacak olan tüm bu çalışmalarda düğüm noktası genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomları olacağı için bütün bu sayı dizileri arasında benzer ilişkiler elde edilebilir.

**KAYNAKLAR**

- Bong, N.H., 1999. Fibonacci matrices and Matrix Representation of Fibonacci Numbers. Southeast Asian Bull. Math, 23, 357-374.
- Er, M.C., 1984. Sums of Fibonacci numbers by Matrix Methods. Fibonacci Quart, 22(3), 204-207.
- Horadam, A.F., 1965. Generating functions for powers of a certain generalized sequence of numbers. Duke Math. J., 32, 437-446.
- Horadam, A.F., 1967. Special Properties of the sequence  $W(a,b,p,q)$ . Fibonacci Quart, 5, 424-434.
- Kalman, D., 1982. Generalized Fibonacci numbers by Matrix Methods. Fibonacci Quart, 20(1), 73-76.
- Karaduman, E., 2004. An Application of Fibonacci numbers in Matrices. Applied Mathematics and Computation, 147, 903-908.
- Kılıç, E. ve Taşçı, D., 2006. On The Order- $k$  Fibonacci and Lucas numbers. Rocky Mount. Jour. of Math., 36(6), 1915-1926.
- Koshy, T., 2001. Fibonacci and Lucas numbers with Applications. John Wiley and Sons, New York, 87-93.
- MacHenry, T., 2000. Generalized Fibonacci and Lucas Polynomials and Multiplicative Arithmetic Functions. Fibonacci Quarterly, 38, 17-24.
- MacHenry, T. and Wong, K. Degree  $k$  Linear Recursions mod( $p$ ) and Number Fields. Rocky Mount. Jour. of Math. to appear.
- Miles, E.P., 1960. Generalized Fibonacci numbers and Associated Matrices. American Math. Monthly, 67, 745-752.
- Robbins, N., 1984. Beginning Number Theory. Wm. C. Brown Publishes, Oxford, 185-195.

Silvester, J.R., 1979. Fibonacci Properties by Matrix Methods. *Mathematical Gasette*, 63, 188-191.

Vajda, S., 1989. Fibonacci and Lucas numbers, and Golden section. *Theory and Aplication*. John Wiley and Sons, New York, 24-61.

Wilf, H.S., 1990. *Generating Functionology*. Academic Press Inc., Sen Diego, 3-65.

**ÖZGEÇMİŞ****Kişisel Bilgiler****Adı Soyadı** : Adem ŞAHİN**Doğum Tarihi ve Yer** : 15.06.1986 Yıldızeli**Medeni Hali** : Evli**Yabancı Dili** : İngilizce**Telefon** : 05067271840**E-posta** : ademsahin@gop.edu.tr**Eğitim:**

<b>Derece</b>	<b>Eğitim Birimi</b>	<b>Mezuniyet Tarihi</b>
Yüksek Lisans	Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2010
Lisans	Sivas Cumhuriyet Üniversitesi	2008
Lise	Tokat Anadolu Öğretmen Lisesi	2003

**İlgi Alanları**

Farklı yerler görmek, Kitap okumak, Matematikle alakalı ilginç problemlerle uğraşmak, Türk ve Dünya Tarihi üzerine araştırmalar yapmak, Türk halk müziği.