T.C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SERTAN ALKAN

ŞUBAT 2011
MUĞLA

T.C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sertan ALKAN

MUĞLA 2011

T.C.

MUĞLA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Prof. Dr. Zeynep Fidan KOÇAK danışmanlığında Sertan ALKAN tarafından hazırlanan Sınır Değer Problemlerinin Nümerik Çözümleri başlıklı tez, 18/01/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Mehmet SEZER İmza :

Danışman : Prof. Dr. Zeynep Fidan KOÇAK İmza :

Üye : Prof. Dr. Nesrin ÖZSOY İmza :

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında yardımlarını ve desteğini esirgemeyen değerli danışmanım Prof. Dr. Zeynep Fidan KOÇAK'a, her zaman her konuda yanımda olduklarını bildiğim aileme ve Doğaner ailesine teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Sertan ALKAN

MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2011

ÖZET

Bu çalışmada ilk olarak spline fonksiyonlarının temel özellikleri ve çeşitleri ile temel Bernstein polinomları ve temel özellikleri verilmiştir. Daha sonra kübik spline fonksiyonları ve temel Bernstein polinomları kullanılarak sınır değer problemlerinin yaklaşık çözüm yöntemleri incelenmiştir. Son kısımda ise örnek problemler çözülüp elde edilen yaklaşık çözümler ile gerçek çözümler karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Spline Fonksiyonu, Galerkin Yöntemi, Bernstein Polinomları

Sayfa Adedi : 74
Tez Yöneticisi : Prof.Dr.Zeynep Fidan KOÇAK

NUMERICAL SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS
(M.Sc.Thesis)

Sertan ALKAN

MUĞLA UNIVERSITY
INSTITUTE of SCIENCE and TECHNOLOGY

2011

ABSTRACT

In this study the basic properties and types of spline functions and also Bernstein Polynomials basis and their properties have given. By using cubic spline functions and Bernstein polynomials basis, approximate solutions of boundary value problems have investigeted. At last part sample problems have solved and the obtained approximate solutions are compared with the exact solutions.

Keywords : Spline Function, Galerkin Method, Bernstein Polynomials

Page Number : 74
Adviser : Prof.Dr.Zeynep Fidan KOÇAK

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLOLAR DİZİNİ

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\forall$	Her
$\beta_i(x)$	Taban fonksiyonları
$B_{i,n}(x)$	n. dereceden temel Bernstein polinomları
$C^{n-1}[a,b]$	$n-1$. basamaktan sürekli türev
$\Re$	Reel sayılar kümesi
$S(x)$	$i=0,1,...,n$ için $[x_i,x_{i+1}]$ aralığında tanımlı spline fonksiyonu

1. GİRİŞ

Yaklaşım yöntemleri hem matematikte hem de başta mühendislik olmak üzere birçok bilim dalında kullanılan önemli çözüm yöntemleridir. Bu yöntemler, interpolasyon ve yaklaşım, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde sık sık kullanılmaktadır (Dağ, 1987; Özdemir, 1996).

İnterpolasyon, bir fonksiyonun tablo halinde verilmiş değerlerinden yola çıkarak bu fonksiyonun bu aralıkta bilinmeyen değerlerini hesaplama işlemidir(Bayram, 2002). Başka bir deyişle interpolasyon verilen fonksiyonlara yaklaşım yapmak için temel bir yöntemdir (Davis, 1975). Polinomlar ile çalışmak büyük kolaylık sağladığından yaklaşım yöntemlerinde interpolasyon yöntemlerinin önemli yeri vardır (Isaacson Keller, 1994).

Bazı durumlarda veri noktalarına bir tek eğri ile yaklaşma büyük hatalara neden olabilir. Ayrıca bu amaç için kullanılan Newton ve Lagrange interpolasyon polinomlarının derecesi nokta sayısı arttıkça artacağından bu tür polinomlarla yapılacak işlemler zorlaşır. Bu gibi durumlarda ise yaklaşım yöntemlerinden biri olan spline fonksiyonlarını kullanmak daha yararlı olmaktadır (Türker, Can, 1997).

Bu çalışmada ilk olarak spline fonksiyonlarının çeşitleri ile temel Bernstein polinomları üzerinde durulacaktır. Üçüncü kısımda kübik spline fonksiyonları kullanılarak sınır değer problemlerinin yaklaşık çözüm yöntemleri incelenecektir. Benzer şekilde aynı tipli sınır değer problemlerinin galerkin yönteminden faydalanılarak Bernstein polinomları ile yaklaşık çözüm yöntemleri de incelenecektir. Son kısımda ise örnek problemler her iki yöntemle de çözülerek elde edilen hata payları karşılaştırılacaktır.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

2.1. Spline Fonksiyonları

Spline fonksiyonları, parçalı değerli polinom fonksiyonlar olup, polinom fonksiyonların ve ardışık türevlerinin $\forall x \in \Re$ için sürekli olması bu fonksiyonları kullanışlı yapmaktadır.

Genel olarak n. dereceden spline fonksiyonu, $[a, b]$ aralığının sonlu parçalanışı,

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

olmak üzere aşağıdaki iki özelliğe sahiptir.

(i) $S(x)$, her $[x_i, x_{i+1}]$ de n. ya da daha küçük dereceden polinomdur.

(ii) $S(x)$ ve ardışık türevleri tanımlanan $[a, b]$ kapalı aralığında süreklidir.

Bu tanıma göre $n = 0$ için ikinci koşul geçersizdir ve 0. (sıfırıncı) dereceden spline fonksiyonu adım fonksiyonu olarak adlandırılır. $n = 1$ için $S(x)$ fonksiyonu doğru parçalarından oluşmaktadır ve lineer (doğrusal) spline fonksiyonu olarak adlandırılır. Benzer şekilde $n = 2$ için oluşturulan spline fonksiyonu kuadratik spline fonksiyonu, $n = 3$ için oluşturulan spline fonksiyonu ise kübik spline fonksiyonu olarak adlandırılır. Ayrıca $n = 4$ için oluşturulan spline fonksiyonu kuartik spline fonksiyonu ve $n = 5$ için oluşturulan spline fonksiyonu kuintik spline fonksiyonu olarak adlandırılır. İlerleyen başlıklarda bu fonksiyonlar ayrıntılı biçimde incelenecektir.
Spline fonksiyonların genel özellikleri aşağıdaki gibi verilebilir.

1. Spline fonksiyonlar, uygun tabanlara sahip sonlu boyutlu lineer uzaylardır.

2. Spline fonksiyonlar, düzgün fonksiyonlardır.

3. Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri de spline fonksiyonlardır.

4. Yaklaşım teorilerinde spline fonksiyonların kullanılması ile doğal matrisler ortaya çıkar ve bu matrisler uygun determinant özelliklerine sahiptir.

5. Spline fonksiyonlar, elde yada bilgisayarda yapılan hesaplamalarda kolaylık sağlar (Dönmez, 2008).

2.1.1. Lineer (Doğrusal) Spline Fonksiyonu

Veri noktalarını çeşitli aralıklara bölerek her bir aralıkta doğrusal fonksiyonlar kullanma esasına dayanan lineer spline interpolasyonu, spline interpolasyon türlerinin en basiti olup kullanım kolaylığı bakımından tercih edilir (Bayram, 2002).

Lineer spline interpolasyonunda her bir alt aralık için seçilen fonksiyonlar

$$S_i(x) = a_i x + b_i \qquad , \qquad i = 0, 1, ..., (n-1)$$

şeklindedir. Burada n tane fonksiyon olup her bir fonksiyonda da 2 bilinmeyen katsayı mevcut olduğundan toplamda $2n$ tane bilinmeyen katsayı vardır. Öyleyse bu katsayıları hesaplayabilmemiz için $2n$ tane denkleme ihtiyacımız olacaktır. Bu denklemleri ise aşağıdaki kabuller sonucunda elde edeceğiz.

i. $S_i(x)$ polinomları iç düğüm noktalarda fonksiyon ile aynı değeri almalıdır. Yani,

$$S_i(x_i) = y_i \qquad , \qquad i = 1, 2, ..., (n-1)$$

dir.

ii. $S_i(x)$ polinomları iç düğüm noktalarda sürekli olmalıdır.Yani,

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) \qquad , \qquad i = 0, 1, ..., (n-2)$$

dir.

iii. Baştaki ve sondaki spline polinomları uç noktalardan geçmelidir. Yani,

$$S_0(x_0) = y_0 \qquad , \qquad S_{n-1}(x_n) = y_n$$

dir.

Böylece *i.* koşuldan $n-1$, *ii.* koşuldan $n-1$ ve son olarak *iii.* koşuldan 2 tane olmak üzere toplamda,

$$(n-1) + (n-1) + 2 = 2n$$

tane denklem elde edilmiş olur. Bu denklemler kullanılarak katsayılar hesaplanır ve $S_i(x)$ spline polinomları elde edilir.

$S_i(x)$ spline polinomlarını bulmanın diğer bir yolu da Lagrange interpolasyon formülünü kullanmaktır. Bu formül ile ardışık (x_i, y_i) ile (x_{i+1}, y_{i+1}) noktalarını birleştiren doğru parçası,

$$L(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1} \qquad , \qquad i = 0, 1, ..., (n-1) \qquad (2.1)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin birinci mertebeden türevi alınırsa,

$$L'(x) = \frac{y_i}{x_i - x_{i+1}} + \frac{y_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \tag{2.2}$$

denklemi elde edilir ki bu da ele alınan doğru parçasının eğimidir. (2.1) denklemi düzenlenip, denklemde

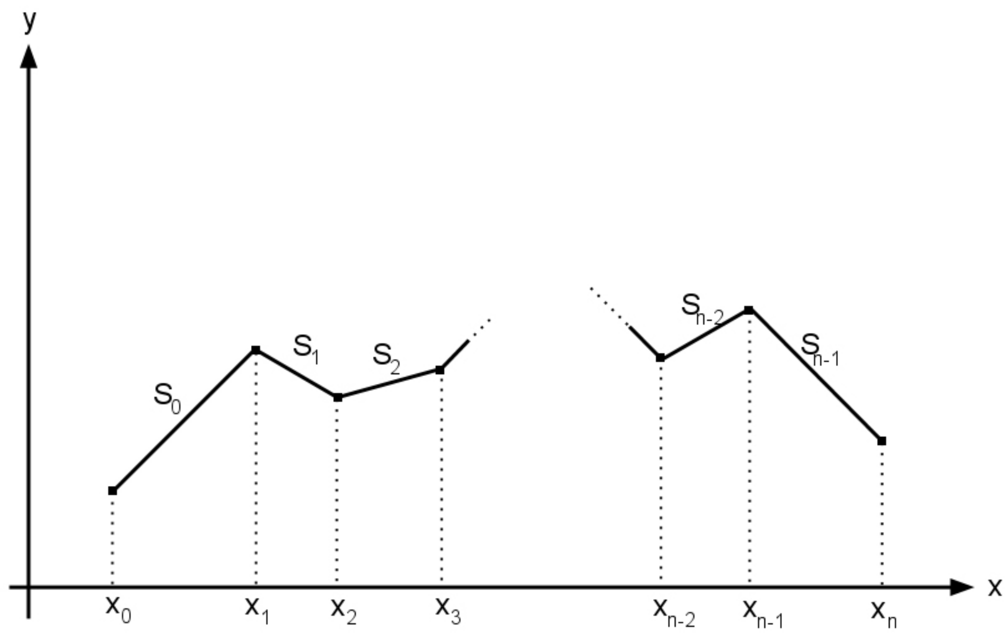
$$m_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

ifadesi yerine yazılırsa,

$$L(x) = S_i(x) = yi + m_i(x - x_i) \qquad , \qquad i = 0, 1, ..., (n-1)$$

lineer spline fonksiyonu elde edilir.

Lineer spline fonksiyonunu temsil eden grafik ve bu fonksiyonun parçalı değerli biçimde gösterimi aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.1 Lineer Spline Fonksiyon Grafiği

$$S(x) = \begin{cases} y_0 + m_0(x - x_0) & x \in [x_0, x_1] \\ y_1 + m_1(x - x_1) & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ y_{n-1} + m_{n-1}(x - x_{n-1}) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Örnek 2.1.1

x	1.0520	3.3560	4.5870	7.1250	9.2575
y	2.0030	1.2230	6.1120	5.6810	8.7015

tablosu veriliyor. Lineer spline interpolasyonu yöntemi ile en uygun yaklaşımı yapalım ve $y(5.0)$ değerini yaklaşık olarak hesaplayalım.

Çözüm: Nokta sayımız 5 olduğundan aralık sayımız $5 - 1 = 4$ olacaktır. O halde lineer spline polinomları

$$S_i(x) = y_i + m_i(x - x_i) \qquad , \qquad i = 0, 1, 2, 3$$

şeklinde olacaktır. O halde

$$\begin{aligned} S_0(x) = y_0 + m_0(x - x_0) &= 2.0030 + \frac{1.2230 - 2.0030}{3.3560 - 1.0520}(x - 1.0520) \\ &= 2.0030 - 0.338541(x - 1.0520) \\ &= -0.338541x + 2.359145 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1(x) = y_1 + m_1(x - x_1) &= 1.2230 + \frac{6.1120 - 1.2230}{4.5870 - 3.3560}(x - 3.3560) \\ &= 1.2230 + 3.971567(x - 3.3560) \\ &= 3.971567x - 12.105578 \end{aligned}$$

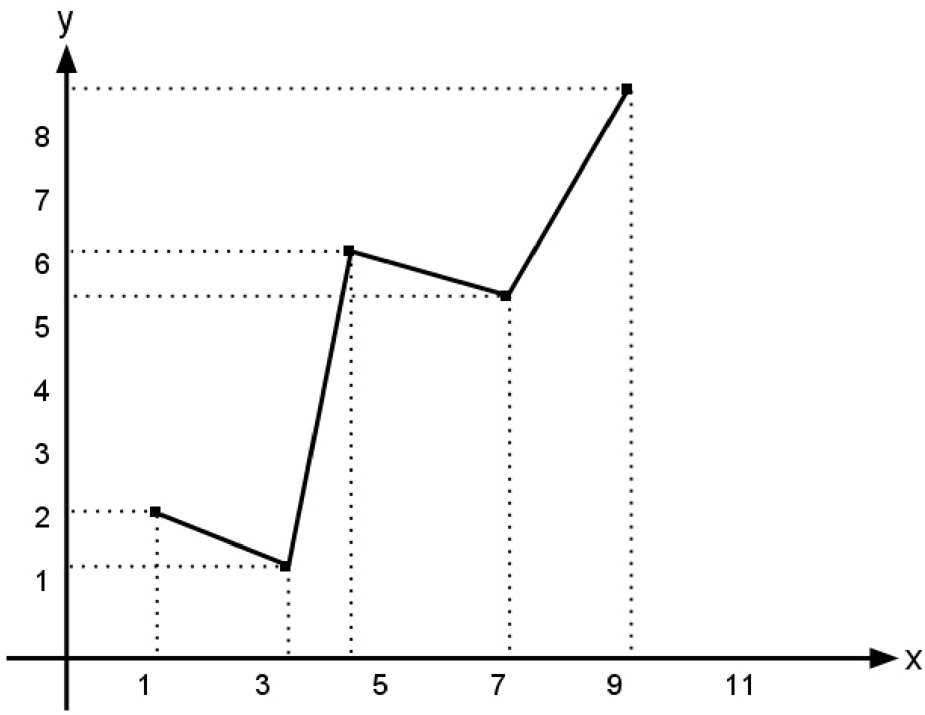
$$\begin{aligned}
S_2(x) = y_2 + m_2(x - x_2) &= 6.1120 + \frac{5.6810 - 6.1120}{7.1250 - 4.5870}(x - 4.5870) \\
&= 6.1120 - 0.169818(x - 4.5870) \\
&= -0.169818x + 6.890955
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_3(x) = y_3 + m_3(x - x_3) &= 5.6810 + \frac{8.7015 - 5.6810}{9.2575 - 7.1250}(x - 7.1250) \\
&= 5.6810 + 1.416412(x - 7.1250) \\
&= 1.416412x - 4.410935
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Buna göre

$$S(x) = \begin{cases} -0.338541x + 2.359145, & x \in [1.0520, 3.3560] \\ 3.971567x - 12.105578, & x \in [3.3560, 4.5870] \\ -0.169818x + 6.890955, & x \in [4.5870, 7.1250] \\ 1.416412x - 4.410935, & x \in [7.1250, 9.2575] \end{cases}$$

şeklinde yazılır ve grafiği aşağıdaki gibidir;



Şekil 2.2 Örnek 2.1.1 için lineer spline grafiği

O halde

$$
\begin{aligned}
y(5.0) \cong S_2(5.0) &= -0.169818(5.0) + 6.890955 \\
&= 6.0419
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır. Bu problemi Matlab programı ile çözersek,

```
>>x=[1.0520 3.3560 4.5870 7.1250 9.2575];
>>y=[2.0030 1.2230 6.1120 5.6810 8.7015];
>> lineerspline(x,y,5)

ans =

    6.0419
```

olduğu görülür.

2.1.2. Kuadratik Spline Fonksiyonu

Bu spline türünde her bir alt aralık için seçilen polinomlar,

$$S_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i \qquad , \qquad i = 0, 1, ..., (n-1)$$

şeklindedir. Burada n tane polinom olup her bir polinomda da 3 bilinmeyen katsayı mevcut olduğundan toplamda $3n$ tane bilinmeyen katsayı vardır. Öyleyse bu katsayıları hesaplayabilmemiz için $3n$ tane denkleme ihtiyacımız olacaktır. Bu denklemleri ise aşağıdaki spline özelliklerini kullanarak elde edeceğiz.

i. $S_i(x)$ spline polinomları iç düğüm noktalarında fonksiyon ile aynı değeri almalıdır. Yani,

$$S_i(x_i) = y_i \qquad , \qquad i = 1, 2, ..., (n-1)$$

dir.

ii. $S_i(x)$ spline polinomları iç düğüm noktalarında sürekli olmalıdır. Yani,

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) \qquad , \qquad i = 0, 1, ..., (n-2)$$

dir.

iii. $S_i(x)$ spline polinomlarının birinci mertebeden türevleri iç düğüm noktalarında sürekli olmalıdır. Yani,

$$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}) \qquad , \qquad i = 0, 1, ..., (n-2)$$

dir.

iv. Baştaki ve sondaki spline polinomları uç noktalardan geçmelidir. Yani,

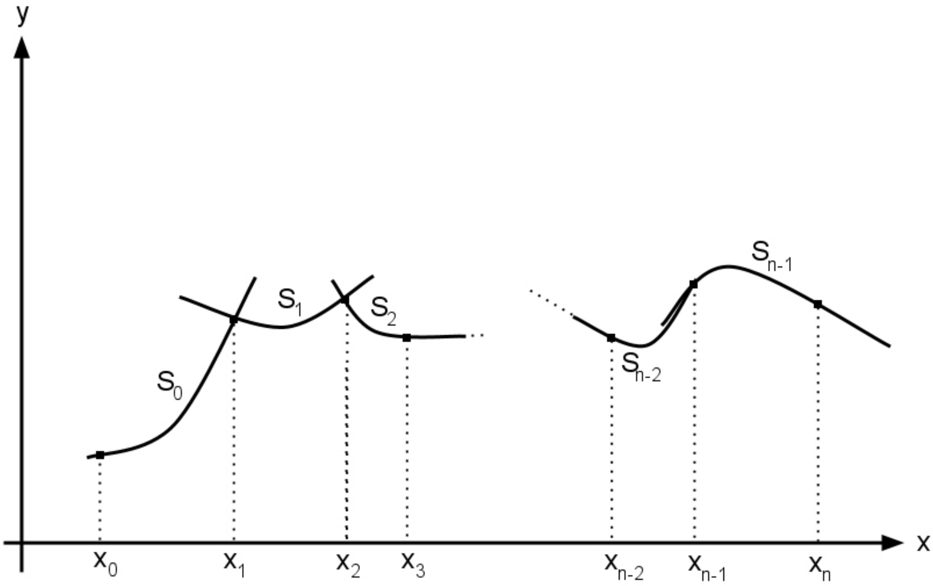
$$S_0(x_0) = y_0 \qquad , \qquad S_{n-1}(x_n) = y_n$$

dir.

Böylece *i.* özellikten $n-1$, *ii.* özellikten $n-1$, *iii.* özellikten $n-1$ ve son olarak *iv.* özellikten 2 tane olmak üzere toplamda,

$$(n-1) + (n-1) + (n-1) + 2 = 3n - 1$$

tane denklem elde edilmiş olur. O halde 1 denkleme daha ihtiyacımız olacaktır. Bu denklemi de ilk noktada ikinci türevin sıfır olduğu, yani $S_0(x)$ polinomunun bir doğru parçası olduğu koşulunu koyarak elde ederiz. Bu da $a_0 = 0$ olması ile eşdeğerdir. Bu şekilde elde edilen kuadratik spline fonksiyonuna *natural (doğal) kuadratik spline fonksiyonu* denir.



Şekil 2.3 Kuadratik Spline Fonksiyon Grafiği

Örnek 2.2.1

x	1.0520	3.3560	4.5870	7.1250	9.2575
y	2.0030	1.2230	6.1120	5.6810	8.7015

tablosu veriliyor. Kuadratik spline interpolasyonu yöntemi ile en uygun yaklaşımı yapalım ve $y(5.0)$ değerini yaklaşık olarak hesaplayalım.

Çözüm: Nokta sayımız 5 olduğundan aralık sayımız $5 - 1 = 4$ olacaktır. Bu yüzden kuadratik spline polinomları

$$S_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i \qquad , \qquad i = 0, 1, 2, 3$$

şeklinde olacaktır. O halde, i. koşuldan,

$$\begin{aligned} S_1(x_1) &= a_1(x_1)^2 + b_1 x_1 + c_1 = y_1 \\ &= a_1(3.3560)^2 + b_1(3.3560) + c_1 = 1.2230 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2(x_2) &= a_2(x_2)^2 + b_2 x_2 + c_2 = y_2 \\ &= a_2(4.5870)^2 + b_2(4.5870) + c_2 = 6.1120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3(x_3) &= a_3(x_3)^2 + b_3x_3 + c_3 = y_3 \\ &= a_3(7.1250)^2 + b_3(7.1250) + c_3 = 5.6810 \end{aligned}$$

bulunur. ii. koşuldan,

$$\begin{aligned} S_0(x_1) = S_1(x_1) \Rightarrow a_0(x_1)^2 + b_0(x_1) + c_0 &= a_1(x_1)^2 + b_1(x_1) + c_1 \\ &= 1.2230 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1(x_2) = S_2(x_2) \Rightarrow a_1(x_2)^2 + b_1(x_2) + c_1 &= a_2(x_2)^2 + b_2(x_2) + c_2 \\ &= 6.1120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2(x_3) = S_3(x_3) \Rightarrow a_2(x_3)^2 + b_2(x_3) + c_2 &= a_3(x_3)^2 + b_3(x_3) + c_3 \\ &= 5.6810 \end{aligned}$$

bulunur. iii. koşuldan

$$\begin{aligned} S_0'(x_1) = S_1'(x_1) \Rightarrow 2a_0(x_1) + b_0 &= 2a_1(x_1) + b_1 \\ 2a_0(3.3560) + b_0 &= 2a_1(3.3560) + b_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1'(x_2) = S_2'(x_2) \Rightarrow 2a_1(x_2) + b_1 &= 2a_2(x_2) + b_2 \\ 2a_1(4.5870) + b_1 &= 2a_2(4.5870) + b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2'(x_3) = S_3'(x_3) \Rightarrow 2a_2(x_2) + b_2 &= 2a_3(x_3) + b_3 \\ 2a_2(7.1250) + b_2 &= 2a_3(7.1250) + b_3 \end{aligned}$$

bulunur. iv. koşuldan

$$S_0(x_0) = a_0(1.0520)^2 + b_0(1.0520) + c_0 = 2.0030$$

ve

$$S_3(x_4) = a_3(9.2575)^2 + b_3(9.2575) + c_3 = 8.7015$$

olarak bulunur. Son olarak da

$$a_0 = 0$$

alınmasıyla,

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & x_1^2 & x_1 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & x_2^2 & x_2 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & x_2^2 & x_2 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & x_3^2 & x_3 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & x_3^2 & x_3 & 1.0 \\ x_0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & x_4^2 & x_4 & 1.0 \\ 1.0 & 0.0 & -2x_1 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 2x_2 & 1.0 & 0.0 & -2x_2 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2x_3 & 1.0 & 0.0 & -2x_3 & -1.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} b_0 \\ c_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1.2230 \\ 1.2230 \\ 6.1120 \\ 6.1120 \\ 5.6810 \\ 5.6810 \\ 2.0030 \\ 8.7015 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$Ax = b$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde,

$a_0 = 0.0$	$a_1 = 3.5013074$	$a_2 = -3.3299826$	$a_3 = 4.7070234$
$b_0 = -0.3385416$	$b_1 = -23.8393174$	$b_2 = 38.8309385$	$b_3 = -75.6963989$
$c_0 = 2.3591458$	$c_1 = 41.7934475$	$c_2 = -101.9407846$	$c_3 = 306.0628553$

olarak bulunur. O halde bu katsayılar kullanılarak $S(x)$ kuadratik spline fonksiyonu,

$$S(x) = \begin{cases} -0.3385416x + 2.3591458, & x \in [1.0520, 3.3560] \\ 3.5013074x^2 - 23.8393174x + 41.7934475, & x \in [3.3560, 4.5870] \\ -3.3299826x^2 + 38.8309385x - 101.9407846, & x \in [4.5870, 7.1250] \\ 4.7070234x^2 - 75.6963989x + 306.0628553, & x \in [7.1250, 9.2575] \end{cases}$$

şeklinde yazılır. Buradan da,

$$\begin{aligned} y(5.0) \cong S_2(5.0) &= -3.3299826(5.0)^2 + 38.8309385(5.0) - 101.9407846 \\ &= 8.9643 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu problemi Matlab programı ile çözersek,

```
>>x=[1.0520 3.3560 4.5870 7.1250 9.2575];
>>y=[2.0030 1.2230 6.1120 5.6810 8.7015];
>> kuadratikspline(x,y,5)
ans =
    8.9643
```

olduğu görülür.

2.1.3. Kübik Spline Fonksiyonu

Kübik spline fonksiyonunda her bir alt aralık için seçilen polinomlar,

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad , \quad i = 0, 1, ..., (n-1) \qquad (2.3)$$

şeklindedir. Burada n tane polinom olup her bir polinomda da 4 bilinmeyen katsayı mevcut olduğundan toplamda $4n$ tane bilinmeyen katsayı vardır. Öyleyse bu katsayıları hesaplayabilmemiz için $4n$ tane denkleme ihtiyacımız olacaktır. Bu denklemleri ise aşağıdaki koşullar sonucunda elde edeceğiz.

i. $S_i(x)$ polinomları iç düğüm noktalarında fonksiyon ile aynı değeri almalıdır. Yani,

$$S_i(x_i) = y_i \quad , \quad i = 1, 2, ..., (n-1)$$

dir.

ii. $S_i(x)$ polinomları iç düğüm noktalarında sürekli olmalıdır. Yani,

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) \quad , \quad i = 0, 1, ..., (n-2)$$

dir.

iii. $S_i(x)$ polinomlarının birinci mertebeden türevleri iç düğüm noktalarında sürekli olmalıdır. Yani,

$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}) \qquad , \qquad i = 0, 1, ..., (n-2)$$

dir.

iv. $S_i(x)$ polinomlarının ikinci mertebeden türevleri iç düğüm noktalarında sürekli olmalıdır. Yani,

$$S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1}) \qquad , \qquad i = 0, 1, ..., (n-2)$$

dir.

v. Baştaki ve sondaki spline polinomları uç noktalardan geçmelidir. Yani,

$$S_0(x_0) = y_0 \qquad , \qquad S_{n-1}(x_n) = y_n$$

dir.

Böylece *i.* özellikten $n-1$, *ii.* özellikten $n-1$, *iii.* özellikten $n-1$, *iv.* özellikten $n-1$ ve son olarak *v.* özellikten 2 tane olmak üzere toplamda,

$$(n-1) + (n-1) + (n-1) + (n-1) + 2 = 4n - 2$$

tane denklem elde edilmiş olur. O halde 2 denkleme daha ihtiyacımız olacaktır. Bu denklemleri de aşağıdaki koşuldan elde ederiz.

vi. Uç noktalarda ikinci mertebeden türevler sıfır olmalıdır. Yani,

$$S''_0(x_0) = 0 \qquad , \qquad S''_{n-1}(x_n) = 0$$

dır.

Bu son koşulu sağlayan kübik spline fonksiyonlara *natural (doğal) kübik spline fonksiyonları* denir.

Şimdi kübik spline fonksiyonlarının nasıl elde edileceklerini iki farklı yolla görelim;

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

noktaları verilsin. $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında,

$$S_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i \quad ; \quad i = 0, 1, ..., n-1 \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanan $S_i(x)$ fonksiyonları (x_i, y_i) ve (x_{i+1}, y_{i+1}) noktalarından geçeceğinden $x = x_i$ alırız. O halde

$$S_i(x_i) = d_i$$

olur. Diğer taraftan $S_i(x)$ fonksiyonları iç noktalarda sürekli olduğundan

$$\begin{aligned} S_{i+1}(x_{i+1}) = d_{i+1} &= S_i(x_{i+1}) \\ d_{i+1} &= d_i + c_i(x_{i+1} - x_i) + b_i(x_{i+1} - x_i)^2 + a_i(x_{i+1} - x_i)^3 \end{aligned}$$

olarak elde edilen denklemde $x_{i+1} - x_i = h_i$ ifadesi yerine yazılırsa

$$d_{i+1} = d_i + c_i h_i + b_i h_i^2 + a_i h_i^3 \quad ; \quad i = 0, 1, ..., n-1 \tag{2.5}$$

bulunur. (2.4) denkleminin birinci mertebeden türevi alındığında

$$S_i'(x) = c_i + 2b_i(x - x_i) + 3a_i(x - x_i)^2$$

şeklinde oluşan denklemde $x = x_i$ koyarsak

$$S_i'(x_i) = c_i$$

bulunur. $S_i'(x)$ fonksiyonu iç noktalarda sürekli olduğundan

$$\begin{aligned} S_{i+1}'(x_{i+1}) = c_{i+1} &= S_i'(x_{i+1}) \\ c_{i+1} &= c_i + 2b_i(x_{i+1} - x_i) + 3a_i(x_{i+1} - x_i)^2 \\ c_{i+1} &= c_i + 2b_i h_i + 3a_i h_i^2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

bulunur. Diğer taraftan (2.4) denkleminin ikinci mertebeden türevi alındığında

$$S_i''(x) = 2b_i + 6a_i(x - x_i)$$

elde edilir. Burada $x = x_i$ koyarsak

$$S_i''(x_i) = 2b_i$$

ve

$$b_i = \frac{S_i''(x_i)}{2}$$

bulunur. $S_i''(x_i)$ fonksiyonları iç noktalarda sürekli olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{S_{i+1}''(x_{i+1})}{2} = b_{i+1} &= \frac{S_i''(x_{i+1})}{2} \\ b_{i+1} &= \frac{2b_i + 6a_i(x_{i+1} - x_i)}{2} = b_i + 3a_i(x_{i+1} - x_i) \\ b_{i+1} &= b_i + 3a_i h_i \end{aligned} \tag{2.7}$$

elde edilir.

$$b_i = b_{i+1} - 3a_i h_i \tag{2.8}$$

yazılıp (2.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} d_{i+1} &= d_i + c_i h_i + b_i h_i^2 + a_i h_i^3 \\ &= d_i + c_i h_i + (b_{i+1} - 3a_i h_i) h_i^2 + a_i h_i^3 \\ &= d_i + c_i h_i + b_{i+1} h_i^2 - 2a_i h_i^3 \\ &= d_i + c_i h_i - (2a_i h_i^3 - b_{i+1} h_i^2) \end{aligned} \tag{2.9}$$

elde edilir. (2.5) denkleminden elde edilen

$$a_i h_i^3 = d_{i+1} - d_i - c_i h_i - b_i h_i^2$$

ifadesi (2.9) da yerine konulduğunda

$$\begin{aligned} d_{i+1} &= d_i + c_i h_i - (2(d_{i+1} - d_i - c_i h_i - b_i h_i^2) - b_{i+1} h_i^2) \\ d_{i+1} &= d_i + c_i h_i - 2d_{i+1} + 2d_i + 2c_i h_i + 2b_i h_i^2 + b_{i+1} h_i^2 \\ 3d_{i+1} &= 3d_i + 3c_i h_i + h_i^2(2b_i + b_{i+1}) \\ d_{i+1} &= d_i + c_i h_i + \frac{h_i^2}{3}(2b_i + b_{i+1}) \end{aligned} \tag{2.10}$$

bulunur. (2.8) ifadesi (2.6) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} c_{i+1} &= c_i + 2b_{i+1} h_i - 6a_i h_i^2 + 3a_i h_i^2 \\ c_{i+1} &= c_i + 2b_{i+1} h_i - 3a_i h_i^2 \\ 3a_i h_i^2 &= -c_{i+1} + c_i + 2b_{i+1} h_i \end{aligned} \tag{2.11}$$

bulunur. (2.6) denkleminde son ifadeyi yerine koyduğumuzda

$$\begin{aligned} c_{i+1} &= c_i + 2b_{i+1} h_i - 2c_{i+1} + c_i + 2b_i h_i \\ 2c_{i+1} &= 2c_i + 2h_i(b_{i+1} + b_i) \\ c_{i+1} &= c_i + h_i(b_i + b_{i+1}) \end{aligned} \tag{2.12}$$

bulunur. (2.10) denkleminde c_i'yi çektiğimizde

$$c_i = \frac{1}{h_i}(d_{i+1} - d_i) - \frac{h_i}{3}(2b_i + b_{i+1}) \tag{2.13}$$

elde edilir. Bu denklemde i yerine $i-1$ alındığında

$$c_{i-1} = \frac{1}{h_{i-1}}(d_i - d_{i-1}) - \frac{h_{i-1}}{3}(2b_{i-1} + b_i) \tag{2.14}$$

olacaktır. (2.12) denkleminde i yerine $i-1$ yazarsak

$$c_i = c_{i-1} + h_{i-1}(b_{i-1} + b_i)$$

elde edilir. Son denklemde c_i yerine (2.13), c_{i-1} yerine (2.14) denklemi yazıldığında

$$\frac{1}{h_i}(d_{i+1} - d_i) - \frac{h_i}{3}(2b_i + b_{i+1}) = \frac{1}{h_{i-1}}(d_i - d_{i-1}) - \frac{h_{i-1}}{3}(2b_{i-1} + b_i) + h_{i-1}(b_{i-1} + b_i)$$

$$\frac{1}{h_i}(d_{i+1} - d_i) - \frac{1}{h_{i-1}}(d_i - d_{i-1}) = \frac{h_i}{3}(2b_i + b_{i+1}) + h_{i-1}(-\frac{2}{3}b_{i-1} - \frac{1}{3}b_i + b_{i-1} + b_i)$$

$$\frac{1}{h_i}(d_{i+1} - d_i) - \frac{1}{h_{i-1}}(d_i - d_{i-1}) = \frac{h_i}{3}(2b_i + b_{i+1}) + h_{i-1}(\frac{1}{3}b_{i-1} + \frac{2}{3}b_i)$$

$$\frac{1}{h_i}(d_{i+1} - d_i) - \frac{1}{h_{i-1}}(d_i - d_{i-1}) = \frac{1}{3}(2b_ih_i + b_{i+1}h_i + h_{i-1}b_{i-1} + 2b_ih_{i-1})$$

$$h_{i-1}b_{i-1} + 2b_i(h_i + h_{i-1}) + h_ib_{i+1} = \frac{3}{h_i}(d_{i+1} - d_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(d_i - d_{i-1})$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade

$$h_i = x_{i+1} - x_i \ \ , \ \ h_{i-1} = x_i - x_{i-1}$$

$$b_i = \frac{S_i''(x_i)}{2} \ \ , \ \ b_{i+1} = \frac{S_{i+1}''(x_{i+1})}{2} \ \ , \ \ b_{i-1} = \frac{S_{i-1}''(x_{i-1})}{2}$$

$$d_i = S_i(x_i) \ \ , \ \ d_{i+1} = S_{i+1}(x_{i+1}) \ \ , \ \ d_{i-1} = S_{i-1}(x_{i-1})$$

eşitlikleri kullanılarak ikinci mertebeden türev cinsinden yazılırsa

$$\frac{1}{2}S''(x_{i-1}) + \frac{2}{2}S''(x_i)(x_{i+1} - x_{i-1}) + \frac{1}{2}S''(x_{i+1})$$

$$= \frac{3}{(x_{i+1} - x_i)}[S(x_{i+1}) - S(x_i)] - \frac{3}{(x_i - x_{i-1})}[S(x_i) - S(x_{i-1})]$$

bulunur ve buradan $i = 1, ..., n-1$ için

$$S''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})S''(x_i) + (x_{i+1} - x_i)S''(x_{i+1})$$

$$= \frac{6}{(x_{i+1} - x_i)}[S(x_{i+1}) - S(x_i)] - \frac{6}{(x_i - x_{i-1})}[S(x_i) - S(x_{i-1})] \qquad (2.15)$$

eşitliği elde edilir (Doğan, 2008).

Şimdi Lagrange interpolasyon formülünü kullanarak (2.15) denklemini elde edelim.

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

noktalarına karşılık y_i değerleri verilmiş ve

$$h_i = x_{i+1} - x_i \qquad , \qquad i = 0, 1, ..., n-1 \qquad (2.16)$$

olsun. $S_i(x)$ polinomları 3.dereceden olduğundan, bu polinomların ikinci mertebeden türevleri olan $S_i''(x)$ polinomları doğrusaldır. O halde,

$$S_i''(x_i) = M_i \qquad , \qquad S_i''(x_{i+1}) = M_{i+1}$$

olmak üzere $[x_i, x_{i+1}]$ aralığı için,

$$S_i''(x) = M_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \qquad , \qquad i = 0, 1, ..., n-1 \tag{2.17}$$

olarak yazılabilir. Bu denklemi düzenlersek,

$$S_i''(x) = M_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i} \qquad , \qquad i = 0, 1, ..., n-1 \tag{2.18}$$

elde edilir. Bu son denklemin iki kez integrali alındığında,

$$S_i(x) = M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + c_i(x_{i+1} - x) + d_i(x - x_i) \tag{2.19}$$

elde edilir. Burada c_i ve d_i keyfi sabitlerdir. $S_i(x)$ polinomu için,

$$S_i(x_i) = y_i \qquad \text{ve} \qquad S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

olacağından, $x = x_i$ için

$$\begin{aligned} S_i(x_i) &= M_i \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{6h_i} + M_{i+1} \frac{(x_i - x_i)^3}{6h_i} + c_i(x_{i+1} - x_i) + d_i(x_i - x_i) \\ &= M_i \frac{h_i^2}{6} + c_i h_i = y_i \end{aligned}$$

olup buradan

$$c_i = \left(y_i - \frac{M_i h_i^2}{6} \right) \frac{1}{h_i}$$

bulunur. Benzer şekilde $x = x_{i+1}$ için

$$\begin{aligned} S_i(x_{i+1}) &= M_i \frac{(x_{i+1} - x_{i+1})^3}{6h_i} + M_{i+1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{6h_i} + c_i(x_{i+1} - x_{i+1}) + d_i(x_{i+1} - x_i) \\ &= M_{i+1} \frac{h_i^2}{6} + d_i h_i = y_{i+1} \end{aligned}$$

olup buradan da

$$d_i = \left(y_{i+1} - \frac{M_{i+1} h_i^2}{6} \right) \frac{1}{h_i}$$

olarak bulunur. c_i ve d_i değerleri (2.19) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} S_i(x) = M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} &+ \left(y_i - \frac{M_i h_i^2}{6} \right) \frac{(x_{i+1} - x)}{h_i} \\ &+ \left(y_{i+1} - \frac{M_{i+1} h_i^2}{6} \right) \frac{(x - x_i)}{h_i} \end{aligned} \tag{2.20}$$

denklemi elde edilir. Bu son denklemin türevi alınırsa,

$$S_i'(x) = -3M_i\frac{(x_{i+1}-x)^2}{6h_i} + 3M_{i+1}\frac{(x-x_i)^2}{6h_i} - \Big(y_i - \frac{M_ih_i^2}{6}\Big)\frac{1}{h_i} + \Big(y_{i+1} - \frac{M_{i+1}h_i^2}{6}\Big)\frac{1}{h_i} \tag{2.21}$$

bulunur. Bu denklemde gerekli sadeleştirmeler ve düzenlemeler yapıldığında,

$$S_i'(x) = -M_i\frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i} + M_{i+1}\frac{(x-x_i)^2}{2h_i} + \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{M_{i+1}-M_i}{6}h_i \tag{2.22}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde i yerine $i-1$ yazarsak,

$$S_{i-1}'(x) = -M_{i-1}\frac{(x_i-x)^2}{2h_{i-1}} + M_i\frac{(x-x_{i-1})^2}{2h_{i-1}} + \frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{M_i-M_{i-1}}{6}h_{i-1} \tag{2.23}$$

elde edilir.

$$S_{i-1}'(x_i) = S_i'(x_i)$$

olduğundan (2.22) denkleminde $x = x_i$ alırsak,

$$\begin{aligned} S_{i-1}'(x_i) &= M_i\frac{h_{i-1}}{2} + \frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{M_i-M_{i-1}}{6}h_{i-1} \\ &= \frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{3}M_i + \frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}} \end{aligned} \tag{2.24}$$

ve benzer şekilde (2.23) denkleminde $x = x_i$ alırsak,

$$\begin{aligned} S_i'(x_i) &= -M_i\frac{h_i}{2} + \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{M_{i+1}-M_i}{6}h_i \\ &= -\frac{h_i}{3}M_i - \frac{h_i}{6}M_{i+1} + \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} \end{aligned} \tag{2.25}$$

değerleri elde edilir. $S'(x)$ sürekli olduğundan (2.24) ve (2.25) değerleri eşit olmalıdır. O halde,

$$\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{3}M_i + \frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}} = -\frac{h_i}{3}M_i - \frac{h_i}{6}M_{i+1} + \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}$$

olup bu eşitlik düzenlendiğinde,$i = 1, 2, 3, ..., n-1$ için

$$\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1} + \frac{h_{i-1}+h_i}{3}M_i + \frac{h_i}{6}M_{i+1} = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}} \tag{2.26}$$

eşitliği bulunur. Burada

$$M_{i-1} = S''(x_{i-1}) \quad , \quad M_i = S''(x_i) \quad , \quad M_{i+1} = S''(x_{i+1})$$

$$y_{i-1} = S(x_{i-1}) \quad , \quad y_i = S(x_i) \quad , \quad y_{i+1} = S(x_{i+1})$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i \qquad , \qquad h_{i-1} = x_i - x_{i-1}$$

olduğundan bu denklem, $i = 1, 2, ..., n-1$ için

$$S''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})S''(x_i) + (x_{i+1} - x_i)S''(x_{i+1})$$

$$= \frac{6}{(x_{i+1} - x_i)}[S(x_{i+1}) - S(x_i)] - \frac{6}{(x_i - x_{i-1})}[S(x_i) - S(x_{i-1})] \qquad (2.27)$$

şeklinde yazılabilir. Bu son denklem ile (2.15) denkleminin eşit olduğu görülmektedir. (2.26) denkleminin her iki tarafını $6/h_{i-1} + h_i$ ile çarparsak,

$$\frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} M_{i-1} + 2M_i + \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i} M_{i+1} = 6\Big(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\Big)\frac{1}{h_{i-1} + h_i}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde

$$\sigma_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \qquad , \qquad i = 1, 2, ..., n$$

$$\lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i} \qquad , \qquad i = 1, 2, ..., n-1$$

$$\mu_i = 1 - \lambda_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} \qquad , \qquad i = 1, 2, ..., n-1$$

$$\eta_i = 6(\sigma_{i+1} - \sigma_i)\frac{1}{h_{i-1} + h_i} \qquad , \qquad i = 1, 2, ...n-1$$

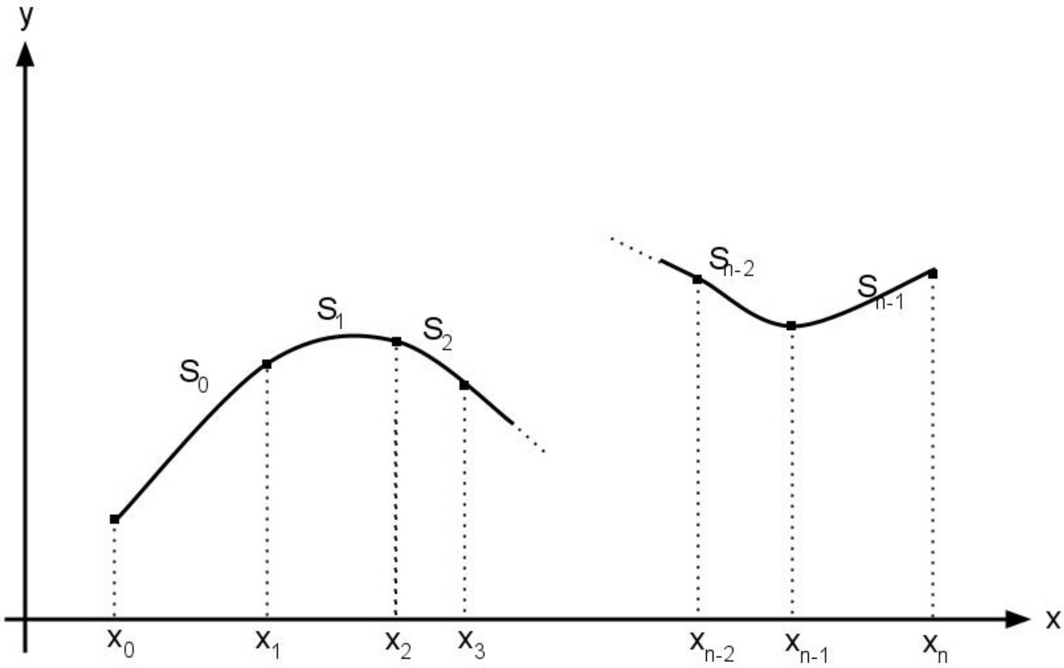
olarak tanımlarsak denklem

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = \eta_i \qquad , \qquad i = 1, 2, ..., n-1$$

şeklinde ifade edilir. Buradan toplamda $n-1$ tane denklem elde edilir. Ancak $M_0, M_1, ..., M_n$ olmak üzere elimizde $n+1$ tane bilinmeyen mevcuttur.
$S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ olduğundan,

$$M_0 = M_n = 0$$

alınır. Bu şekilde elde edilen kübik spline'a natural(doğal) kübik spline denir (Ralston, Rabinowitz, 2001).



Şekil 2.4 Kübik Spline Fonksiyon Grafiği

Örnek 2.3.1

x	1.0520	3.3560	4.5870	7.1250	9.2575
y	2.0030	1.2230	6.1120	5.6810	8.7015

tablosu veriliyor. Kübik spline fonksiyonları ile en uygun yaklaşımı yapalım ve $y(5)$ değerini yaklaşık olarak hesaplayalım.

Çözüm: Nokta sayımız 5 olduğundan aralık sayımız $5-1=4$ olacaktır. İlk önce bize gerekli olan değerleri hesaplayalım.

$$h_{i-1} = x_i - x_{i-1} \qquad , \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

olduğundan

$$h_0 = 2.3040$$

$$h_1 = 1.2310$$

$$h_2 = 2.5380$$

$$h_3 = 2.1325$$

olarak bulunur. Diğer taraftan

$$\lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i} \qquad , \qquad \mu_i = 1 - \lambda_i, \quad i = 1, 2, 3$$

olduğundan

$$\lambda_1 = \frac{h_1}{h_0 + h_1} = 0,34823196$$
$$\lambda_2 = \frac{h_2}{h_1 + h_2} = 0,67338816$$
$$\lambda_3 = \frac{h_3}{h_2 + h_3} = 0,45658923$$

ve

$$\mu_1 = 1 - \lambda_1 = 0,65176803$$
$$\mu_2 = 1 - \lambda_2 = 0,32661183$$
$$\mu_3 = 1 - \lambda_3 = 0,54341076$$

olarak hesaplanır. Ayrıca $i = 1, 2, 3, 4$ için

$$\sigma_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$$

ve $i = 1, 2, 3$ için

$$\eta_i = \frac{6(\sigma_{i+1} - \sigma_i)}{h_{i-1} + h_i}$$

olduğundan

$$\sigma_1 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} = -0,33854166$$
$$\sigma_2 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} = 3,97156783$$
$$\sigma_3 = \frac{y_3 - y_2}{h_2} = -0,16981875$$
$$\sigma_4 = \frac{y_4 - y_3}{h_3} = 1,41641266$$

ve

$$\eta_1 = \frac{6(\sigma_2 - \sigma_1)}{h_0 + h_1} = 7.31560309$$
$$\eta_2 = \frac{6(\sigma_3 - \sigma_2)}{h_1 + h_2} = -6.59281493$$
$$\eta_3 = \frac{6(\sigma_4 - \sigma_3)}{h_2 + h_3} = 2.03776650$$

olarak hesaplanır. Şimdi bu değerleri $i = 1, 2, 3$ için

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = \eta_i$$

denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
0,65176803M_0 + 2M_1 + 0,34823196M_2 &= 7.31560309 \\
0,32661183M_1 + 2M_2 + 0,67338816M_3 &= -6.59281493 \\
0,54341076M_2 + 2M_3 + 0,45658923M_4 &= 2.03776650
\end{aligned}$$

denklem sistemini elde ederiz. Elde etmek istediğimiz natural kübik spline olduğundan

$$M_0 = M_4 = 0$$

olarak seçilirse, yukarıdaki denklem sistemi 3 bilinmeyenli denklem sistemi haline gelir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde

$$M_1 = 4.49601061 \qquad M_2 = -4,81408468 \qquad M_3 = 2,32689595$$

olarak bulunur. Bu değerler

$$\begin{aligned} S_i(x) &= M_i\frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i} + M_{i+1}\frac{(x-x_i)^3}{6h_i} + \left(y_i - \frac{M_i h_i^2}{6}\right)\frac{(x_{i+1}-x)}{h_i} \\ &+ \left(y_{i+1} - \frac{M_{i+1}h_i^2}{6}\right)\frac{(x-x_i)}{h_i} \end{aligned} \tag{2.28}$$

denkleminde yerine yazılırsa, $i = 0$ için,

$$\begin{aligned} S_0(x) &= M_0\frac{(x_1-x)^3}{6h_0} + M_1\frac{(x-x_0)^3}{6h_0} + \left(y_0 - \frac{M_0 h_0^2}{6}\right)\frac{(x_1-x)}{h_0} \\ &+ \left(y_1 - \frac{M_1 h_0^2}{6}\right)\frac{(x-x_0)}{h_0} \\ &= 0,32523224(x-1.0520)^3 + 0,86935763(3,3560-x) \\ &- 1,19565210(x-1,0520) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde, $i = 1$ için,

$$\begin{aligned} S_1(x) &= M_1\frac{(x_2-x)^3}{6h_1} + M_2\frac{(x-x_1)^3}{6h_1} + \left(y_1 - \frac{M_1 h_1^2}{6}\right)\frac{(x_1-x)}{h_1} \\ &+ \left(y_2 - \frac{M_2 h_1^2}{6}\right)\frac{(x-x_1)}{h_1} \\ &= 0,60872063(4,5870-x)^3 - 0,65178509(x-3,3560)^3 \\ &+ 0,07106970(4,5870-x) + 5.95275875(x-3,3560) \end{aligned}$$

olur. $i = 2$ için,

$$\begin{aligned} S_2(x) &= M_2\frac{(x_3-x)^3}{6h_2} + M_3\frac{(x-x_2)^3}{6h_2} + \left(y_2 - \frac{M_2 h_2^2}{6}\right)\frac{(x_3-x)}{h_2} \\ &+ \left(y_3 - \frac{M_3 h_2^2}{6}\right)\frac{(x-x_2)}{h_2} \\ &= -0,31613374(7,1250-x)^3 + 0,15280377(x-4,5870)^3 \\ &+ 4,44455324(7,1250-x) + 1,25409968(x-4,5870) \end{aligned}$$

olur. Son olarak da, $i = 3$ için,

$$\begin{aligned}
S_3(x) &= M_3\frac{(x_4-x)^3}{6h_3} + M_4\frac{(x-x_3)^3}{6h_3} + \left(y_3 - \frac{M_3h_3^2}{6}\right)\frac{(x_4-x)}{h_3} \\
&+ \left(y_4 - \frac{M_4h_3^2}{6}\right)\frac{(x-x_3)}{h_3} \\
&= 0,18185979(9,2575-x)^3 + 0,90039434(9,2575-x) \\
&+ 4,08042203(x-7,1250)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde $S(x)$ parçalı spline fonksiyonu,

$$S(x) = \begin{cases}
0,32523224(x-1.0520)^3 + 0,86935763(3,3560-x) & \\
-1,19565210(x-1,0520) & , x \in [1.0520, 3.3560] \\
 & \\
0,60872063(4,5870-x)^3 - 0,65178509(x-3,3560)^3 & \\
+0,07106970(4,5870-x) + 5.95275875(x-3,3560) & , x \in [3.3560, 4.5870] \\
 & \\
-0,31613374(7,1250-x)^3 + 0,15280377(x-4,5870)^3 & \\
+4,44455324(7,1250-x) + 1,25409968(x-4,5870) & , x \in [4.5870, 7.1250] \\
 & \\
0,18185979(9,2575-x)^3 + 0,90039434(9,2575-x) & \\
+4,08042203(x-7,1250) & , x \in [7.1250, 9.2575]
\end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Buradan da,

$$\begin{aligned}
y(5,0) \cong S_2(5,0) &= -0,31613374(7,1250-5,0)^3 + 0,15280377(5,0-4,5870)^3 \\
&+ 4,44455324(7,1250-5,0) + 1,25409968(5,0-4,5870) \\
&= -3,0335 + 0,0108 + 9,4447 + 0,5179 \\
&= 6,9399
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Bu problemi Matlab programı ile çözersek,

```
>> x=[1.0520 3.3560 4.5870 7.1250 9.2575];
>> y=[2.0030 1.2230 6.1120 5.6810 8.7015];
>> kubikspline(x,y,5)
```

```
ans =
    6.9399
```

olduğu görülür.

2.2. Bernstein Polinomları

Bu kısımda Bernstein polinomlarının tanımını ve özelliklerini inceleyeceğiz. Ayrıca Galerkin yöntemi ile Berstein polinomlarından faydalanılarak belli noktalar için verilen sınır değer problemlerinin nümerik çözümlerini hesaplayacağız.

2.2.1. Temel Bernstein Polinomları

Tanım 2.2.1. $0 \leq x \leq 1$ ve $i = 0, 1, ..., n$ olmak üzere, n. dereceden Bernstein polinomları

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{(n-i)} \tag{2.29}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

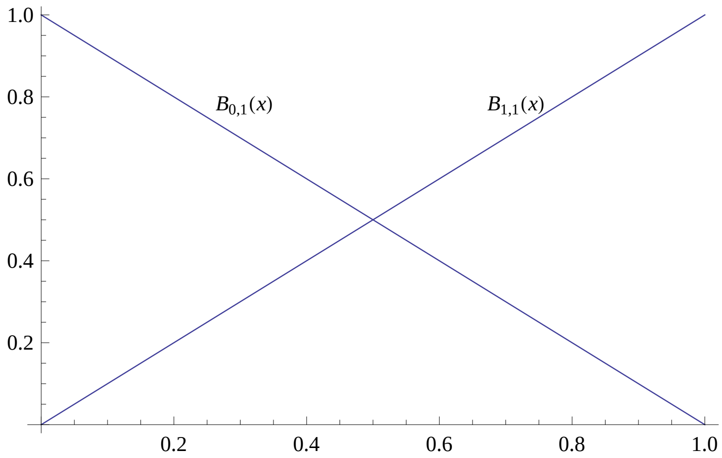
$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

dir. Bu tanımdan da anlaşılacağı gibi $n+1$ tane n. dereceden Bernstein polinomu vardır. Ayrıca matematiksel uygunluk için $i < 0$ veya $i > n$ olması durumda $B_{i,n} = 0$ olarak kabul edilir. Bernstein polinomlarının bazıları grafikleri ile birlikte aşağıda verilmiştir (Joy, 2000).

i. Birinci dereceden temel Bernstein polinomları $0 \leq x \leq 1$ aralığı için

$$\begin{aligned} B_{0,1}(x) &= 1 - x \\ B_{1,1}(x) &= x \end{aligned}$$

olup bu polinomların grafikleri aşağıda verilmiştir.

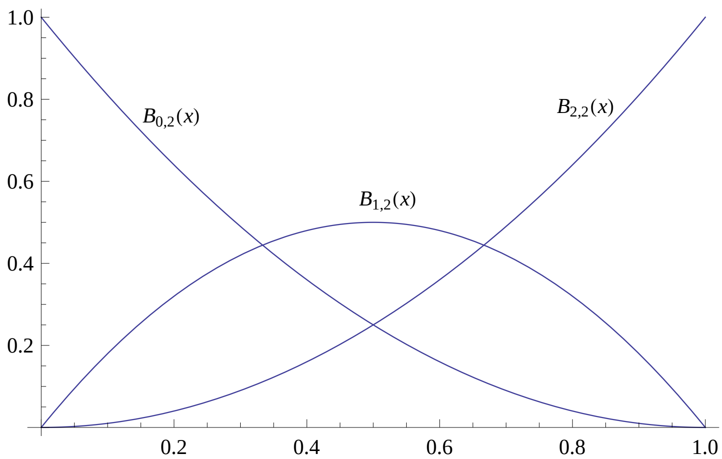


Şekil 2.5 Birinci dereceden temel Bernstein polinomlarının grafiği

ii. İkinci dereceden temel Bernstein polinomları $0 \leq x \leq 1$ aralığı için

$$\begin{aligned} B_{0,2}(x) &= (1-x)^2 \\ B_{1,2}(x) &= 2x(1-x) \\ B_{2,2}(x) &= x^2 \end{aligned}$$

olup bu polinomların grafikleri aşağıda verilmiştir.

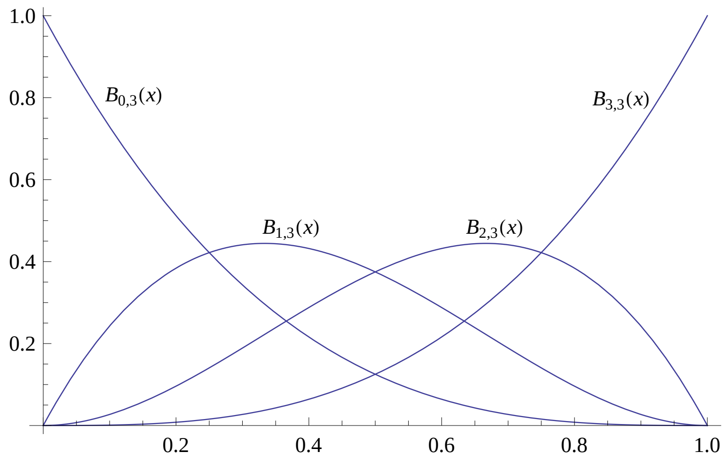


Şekil 2.6 İkinci dereceden temel Bernstein polinomlarının grafiği

iii. Üçüncü dereceden temel Bernstein polinomları $0 \leq x \leq 1$ aralığı için

$$\begin{aligned} B_{0,3}(x) &= (1-x)^3 \\ B_{1,3}(x) &= 3x(1-x)^2 \\ B_{2,3}(x) &= 3x^2(1-x) \\ B_{3,3}(x) &= x^3 \end{aligned}$$

olup bu polinomların grafikleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.7 Üçüncü dereceden temel Bernstein polinomlarının grafiği

Teorem 2.2.1. n. dereceden temel Bernstein polinomları $(n-1)$. dereceden iki temel Bernstein polinomunun lineer birleşimi şeklinde yazılabilir. Yani

$$B_{i,n}(x) = (1-x)B_{i,n-1}(x) + xB_{i-1,n-1}(x)$$

eşitliği sağlanır (Joy, 2000).

İspat: İspatı yapabilmemiz için Tanım 2.2.1'i ve bazı cebirsel işlemi kullanmamız yeterli olacaktır. O halde

$$
\begin{aligned}
(1-x)B_{i,n-1}(x)+xB_{i-1,n-1}(x) &= (1-x)\binom{n-1}{i}x^k(1-x)^{n-1-i} \\
&\quad +x\binom{n-1}{i-1}x^{i-1}(1-x)^{n-1-(i-1)} \\
&= \binom{n-1}{i}x^i(1-x)^{n-i}+\binom{n-1}{i-1}x^i(1-x)^{n-i} \\
&= \left[\binom{n-1}{i}+\binom{n-1}{i-1}\right]x^i(1-x)^{n-i} \\
&= \binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i} \\
&= B_{i,n}(x)
\end{aligned}
$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.2.2. Temel Bernstein polinomları,

$$B_{i,n}(x) = B_{n-i,n}(1-x)$$

eşitliğini sağlar (Joy, 2000).

İspat: Tanım 2.2.1'den,

$$
\begin{aligned}
B_{i,n}(x) &= \binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i} \\
&= \binom{n}{n-i}(1-x)^{n-i}x^i \\
&= B_{n-i,n}(1-x)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Teorem 2.2.3. n. dereceden $n+1$ tane temel Bernstein polinomunun toplamı, $(n-1)$. dereceden n tane temel Bernstein polinomunun toplamına eşittir. Yani,

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(x)$$

eşitliği sağlanır (Joy, 2000).

İspat: Teorem 2.2.1'deki $B_{i,n}(x) = (1-x)B_{i,n-1}(x) + xB_{i-1,n-1}(x)$ eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x) &= \sum_{i=0}^{n-1}[(1-x)B_{i,n}(x) + xB_{i-1,n-1}(x)] \\
&= (1-x)\Big[\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(x) + B_{n,n-1}(x)\Big] + x\Big[\sum_{i=1}^{n} B_{i-1,n-1}(x) + B_{-1,n-1}(x)\Big] \\
&= (1-x)\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(x) + x\sum_{i=1}^{n} B_{i-1,n-1}(x) \\
&= (1-x)\sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(x) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(x)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada

$$B_{i,i-1}(x) = B_{-1,i-1}(x) = 0$$

olarak alınmıştır.

Teorem 2.2.4. *n*. dereceden $n+1$ tane temel Bernstein polinomunun toplamı 1 dir. Yani

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x) = 1$$

dir (Joy, 2000).

İspat: Teorem 2.2.3'den $\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(x)$ yazılabilir. Bu şekilde devam edilirse,

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-2} B_{i,n-2}(x) = ... = \sum_{i=0}^{1} B_{i,1}(x) = (1-x) + x = 1$$

yazılır. İlk ve son terimden

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x) = 1$$

olarak bulunur.

Teorem 2.2.5. n. dereceden temel Bernstein polinomlarının türevleri $(n-1)$. dereceden temel Bernstein polinomlarının lineer birleşimi olarak yazılabilir. Yani $0 \leq i \leq n$ için

$$\frac{d}{dx}B_{i,n}(x) = n(B_{i-1,n-1}(x) - B_{i,n-1}(x))$$

dir(Joy,2000).

İspat: İspatı Bernstein polinomunun tanımında doğrudan diferansiyel kullanarak yapabiliriz.O halde

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}B_{i,n}(x) &= \frac{d}{dx}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i} \\
&= \frac{in!}{i!(n-i)!}x^{i-1}(1-x)^{n-i} - \frac{(n-i)n!}{i!(n-i)!}x^i(1-x)^{n-i-1} \\
&= \frac{n(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}x^{i-1}(1-x)^{n-i} - \frac{n(n-1)!}{i!(n-i-1)!}x^i(1-x)^{n-i-1} \\
&= n\Big(\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}x^{i-1}(1-x)^{n-i} - \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!}x^i(1-x)^{n-i-1}\Big) \\
&= n(B_{i-1,n-1}(x) - B_{i,n-1}(x))
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Sınır Değer Problemlerinin Kübik Spline İle Çözümü

Bir önceki kısımda $i = 1, 2, ..., n-1$ için

$$\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1} + \frac{h_{i-1}+h_i}{3}M_i + \frac{h_i}{6}M_{i+1} = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$$

olduğunu bulmuştuk. Burada $h_i = h$ alırsak

$$\frac{h}{6}M_{i-1} + \frac{2h}{3}M_i + \frac{h}{6}M_{i+1} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h} \tag{3.1}$$

denklemi elde edilir. Şimdi

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x) \tag{3.2}$$

$$y(x_0) = a, y(x_n) = b \tag{3.3}$$

sınır değer problemini gözönüne alalım. İlk olarak (3.2) denkleminde I.türevin olmadığını yani $f(x) = 0$ olduğunu düşünelim. O halde denklem

$$y'' + g(x)y = r(x) \tag{3.4}$$

şeklini alır. Burada

$$M_i = S''(x_i), g_i = g(x_i), r_i = r(x_i)$$

dersek (3.4) denklemi

$$M_i = r_i - g_i y_i$$

şeklinde yazılır. Bu denklem (3.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{h}{6}(r_{i-1} - g_{i-1}y_{i-1}) + \frac{2h}{3}(r_i - g_i y_i) + \frac{h}{6}(r_{i+1} - g_{i+1}y_{i+1}) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h}$$

olup buradan da

$$\frac{h}{6}r_{i-1} + \frac{2h}{3}r_i + \frac{h}{6}r_{i+1} = y_{i+1}\Big(\frac{h}{6}g_{i+1} + \frac{1}{h}\Big) - y_i\Big(-\frac{2h}{3}g_i + \frac{2}{h}\Big) + y_{i-1}\Big(\frac{h}{6}g_{i-1} + \frac{1}{h}\Big)$$

yazılır. Her iki tarafı h ile çarparsak

$$\begin{aligned} & y_{i+1}\Big(1 + \frac{h^2}{6}g_{i+1}\Big) - y_i\Big(2 - \frac{2h^2}{3}g_i\Big) + y_{i-1}\Big(1 + \frac{h^2}{6}g_{i-1}\Big) \\ = \;& \frac{h^2}{6}(r_{i+1} + 4r_i + r_{i-1}) \end{aligned} \tag{3.5}$$

olarak bulunur. Bu son denklem (3.2) denkleminin çözümüdür (Albasiny, Hoskins, 1969).
Şimdi (3.2) denklemini tekrar gözönüne alalım.

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x)$$

sınır değer probleminde $f(x) \neq 0$ olsun. O halde bu denklemi

$$M_j + f_j S'(x_j) + g_j y_j = r_j$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$f_j S'_j(x_j^+) = r_j - M_j - g_j y_j \tag{3.6}$$

yazılır. Daha önceden bulduğumuz

$$S'_j(x_j) = -\frac{h}{3}M_j - \frac{h}{6}M_{j+1} + \frac{(y_{j+1} - y_j)}{h}$$

eşitliğini (3.6) da yerine yazarsak

$$f_j\Big(-\frac{h}{3}M_j - \frac{h}{6}M_{j+1} + \frac{(y_{j+1} - y_j)}{h}\Big) = r_j - M_j - g_j y_j$$

ve buradan da $j = 0, 1, ..., n-1$ için

$$\Big(1 - \frac{h}{3}f_j\Big)M_j - \frac{h}{6}f_j M_{j+1} = r_j - g_j y_j - \frac{f_j}{h}(y_{j+1} - y_j) \tag{3.7}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$S'_{j-1}(x_j) = \frac{h}{3}M_j + \frac{h}{6}M_{j-1} + \frac{y_j - y_{j-1}}{h}$$

olduğundan

$$f_j\Big(\frac{h}{3}M_j + \frac{h}{6}M_{j-1} + \frac{y_j - y_{j-1}}{h}\Big) = r_j - M_j - g_j y_j$$

ve buradan da $j = 1, 2, ..., n$ için

$$\frac{h}{6}f_j M_{j-1} + \Big(1 + \frac{h}{3}f_j\Big)M_j = r_j - g_j y_j - \frac{f_j}{h}(y_j - y_{j-1}) \tag{3.8}$$

elde edilir.
(3.7) denkleminden n tane ve (3.8) denkleminden de n tane olmak üzere toplam $2n$ tane denklem elde etmiş olduk. Ancak elimizde $M_0, M_1, ..., M_n$ ve $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ olmak üzere toplam $2n + 2$ tane bilinmeyen vardır. Bize gereken 2 denklem ise

sınır değerlerinden elde edilir.

Şimdi (3.7) ve (3.8) denklemlerini toplarsak

$$\frac{h}{6}f_jM_{j-1} + 2M_j - \frac{h}{6}f_jM_{j+1} = 2(r_j - g_jy_j) - \frac{f_j}{h}(y_{j+1} - y_{j-1})$$

bulunur. Bu denklemden M_j'yi çektiğimizde,

$$M_j = \frac{1}{2}\Big[2(r_j - g_jy_j) - \frac{f_j}{h}(y_{j+1} - y_{j-1}) - \frac{h}{6}f_jM_{j-1} + \frac{h}{6}f_jM_{j+1}\Big]$$

elde edilir.

$$\frac{h}{6}M_{j-1} + \frac{2h}{3}M_j + \frac{h}{6}M_{j+1} = \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h}$$

denkleminde M_j'nin eşitini yazarsak

$$\frac{h}{6}M_{j-1} + \frac{h}{3}\Big[2(r_j - g_jy_j) - \frac{f_j}{h}(y_{j+1} - y_{j-1}) - \frac{h}{6}f_jM_{j-1} + \frac{h}{6}f_jM_{j+1}\Big] + \frac{h}{6}M_{j+1}$$

$$= \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h}$$

elde edilir. Denklemin her iki tarafını h ile çarpıp denklemi düzenlersek
$j = 1, 2, ..., n-1$ için

$$\Big(1 + \frac{h}{3}f_j\Big)y_{j+1} - 2\Big(1 - \frac{h^2}{3}g_j\Big)y_j + \Big(1 - \frac{h}{3}f_j\Big)y_{j-1} = \frac{2h^2}{3}r_j$$

$$+\frac{h^2}{6}\Big(1 - \frac{h}{3}f_j\Big)M_{j-1} + \frac{h^2}{6}\Big(1 + \frac{h}{3}f_j\Big)M_{j+1} \tag{3.9}$$

bulunur.

M_{j-1}'in y_{j-1} ve y_j cinsinden açık gösterimini elde etmek için (3.7) denkleminde j yerine $j-1$ yazıp elde edilen denklem ile (3.8) denklemini birlikte çözmemiz gerekir. O halde

$$\Big(1 - \frac{h}{3}f_{j-1}\Big)M_{j-1} - \frac{h}{6}f_{j-1}M_j = r_{j-1} - g_{j-1}y_{j-1} - \frac{f_{j-1}}{h}(y_j - y_{j-1})$$

$$\frac{h}{6}f_jM_{j-1} + \Big(1 + \frac{h}{3}f_i\Big)M_j = r_j - g_jy_j - \frac{f_j}{h}(y_j - y_j - 1)$$

denklemlerinden birincisini

$$\Big(1 + \frac{h}{3}f_j\Big)$$

ile ikincisini

$$\frac{h}{6}f_{j-1}$$

ile çarpıp taraf tarafa toplarsak $j = 1, 2, ..., n$ için

$$\begin{aligned} & \Big[\Big(1 - \frac{h}{3} f_{j-1}\Big)\Big(1 + \frac{h}{3} f_j\Big) + \frac{h^2}{36} f_{j-1} f_j\Big] M_{j-1} \\ = & \Big(1 + \frac{h}{3} f_j\Big)\Big[r_{j-1} - g_{j-1} y_{j-1} - \frac{f_{j-1}}{h}(y_j - y_{j-1})\Big] \\ + & \frac{h}{6} f_{j-1}\Big[r_j - g_j y_j - \frac{f_j}{h}(y_j - y_{j-1})\Big] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} A_j &= \Big(1 - \frac{h}{3} f_{j-1}\Big)\Big(1 + \frac{h}{3} f_j\Big) + \frac{h^2}{36} f_{j-1} f_j \\ T &= r_{j-1} - g_{j-1} y_{j-1} - \frac{f_{j-1}}{h}(y_j - y_{j-1}) \\ K &= r_j - g_j y_j - \frac{f_j}{h}(y_j - y_{j-1}) \end{aligned}$$

olarak tanımlarsak denklemi

$$A_j M_{j-1} = \Big(1 + \frac{h}{3} f_j\Big) T + \Big(\frac{h}{6} f_{j-1}\Big) K \tag{3.10}$$

şeklinde yazabiliriz.

Benzer şekilde M_{j+1}'in y_{j+1} ve y_j cinsinden açık gösterimini elde etmek için (3.8) denkleminde j yerine $j-1$ yazıp elde edilen denklemi (3.7) denklemiyle birlikte çözelim. Bunun için

$$\frac{h}{6} f_{j+1} M_j + \Big(1 + \frac{h}{3} f_{j+1}\Big) M_{j+1} = r_{j+1} - g_{j+1} y_{j+1} - \frac{f_{j+1}}{h}(y_{j+1} - y_j)$$

$$\Big(1 - \frac{h}{3} f_j\Big) M_j - \frac{h}{6} f_j M_{j+1} = r_j - g_j y_j - \frac{f_j}{h}(y_{j+1} - y_j)$$

denklemlerinden birincisini

$$\Big(1 - \frac{h}{3} f_j\Big)$$

ile ikincisini ise

$$\Big(-\frac{h}{6} f_{j+1}\Big)$$

ile çarpıp taraf tarafa toplarsak $j = 1, 2, ..., n$ için

$$\begin{aligned} & \Big[\Big(1 - \frac{h}{3} f_j\Big)\Big(1 + \frac{h}{3} f_{j+1}\Big) + \frac{h^2}{36} f_j f_{j+1}\Big] M_{j+1} \\ = & \Big(1 - \frac{h}{3} f_j\Big)\Big[r_{j+1} - g_{j+1} y_{j+1} - \frac{f_{j+1}}{h}(y_{j+1} - y_j)\Big] - \frac{h}{6} f_{j+1}\Big[r_j - g_j y_j - \frac{f_j}{h}(y_{j+1} - y_j)\Big] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$
\begin{aligned}
B_j &= \Big(1-\frac{h}{3}f_j\Big)\Big(1+\frac{h}{3}f_{j+1}\Big)+\frac{h^2}{36}f_jf_{j+1} \\
U &= r_{j+1}-g_{j+1}y_{j+1}-\frac{f_{j+1}}{h}(y_{j+1}-y_j) \\
V &= r_j-g_jy_j-\frac{f_j}{h}(y_{j+1}-y_j)
\end{aligned}
$$

olarak tanımlarsak denklemi

$$B_jM_{j+1}=\Big(1-\frac{h}{3}f_j\Big)U-\Big(\frac{h}{6}f_{j+1}\Big)V \tag{3.11}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan da

$$B_j=A_{j+1}$$

olduğu görülür. Şimdi (3.10) ve (3.11) denklemlerinden sırası ile M_{j-1} ve M_{j+1} çekilerek (3.9) denkleminde yerine yazılıp

$$C_j=1+\frac{7h}{24}(f_{j+1}-f_{j-1})-\frac{h^2}{12}f_{j-1}f_{j+1}$$

olarak tanımlanırsa $j=1,2,...,n-1$ için

$$
\begin{aligned}
& y_{j+1}(1+\frac{h}{2}f_{j+1}+\frac{h^2}{6}g_{j+1})A_j-y_j[(1+\frac{h}{2}f_{j+1})A_j+(1-\frac{h}{2}f_{j-1})B_j-\frac{2h^2}{3}g_jC_j] \\
+ & \; y_{j-1}(1-\frac{h}{2}f_{j-1}+\frac{h^2}{6}g_{j-1})B_j=\frac{h^2}{6}(A_jr_{j+1}+4C_jr_j+B_jr_{j-1}) \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

denklemi elde edilir. Burada $f(x)=0$ alındığında (3.5) denkleminin elde edilebileceği açıkça görülmektedir.

3.2. Galerkin Yöntemi

Galerkin yöntemi, 1915 yılında, Rus mühendis Galerkin tarafından geliştirilmiştir (Finlayson, 1972). Bu yöntemde $a\le x\le b$ aralığında yaklaşık çözümü veren bir $u_N(x)$ fonksiyonunun olduğu kabul edilir ve bu fonksiyon, $y(x)$ tam çözüm olmak üzere

$$y(x)\approx u_N(x)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\beta_i(x)=\alpha_1\beta_1(x)+\alpha_2\beta_2(x)+...+\alpha_N\beta_N(x) \tag{3.13}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\beta_i(x)$ fonksiyonları taban fonksiyonlarıdır. Çözümdeki α_i katsayılarının bulunması için gerekli olan lineer denklem sistemi

$$\int_a^b Evdx = 0 \tag{3.14}$$

integralinden faydalanılarak oluşturulur. Bu integraldeki v fonksiyonuna *test fonksiyonu* denir ve E ifadesi, ele alınan diferansiyel denklemdeki $y(x)$ ile türevleri yerine, yaklaşık çözüm olan $u_N(x)$ ve türevlerinin yazılmasıyla elde edilir. Ayrıca $\beta_i(x)$ taban fonksiyonları $\beta_i(a) = 0$ ve $\beta_i(b) = 0$ olacak şekilde seçilmelidir (Kahvecioğlu, 2004).

Şimdi

$$\int_0^1 Evdx \tag{3.15}$$

integralindeki v test fonksiyonunu,

$$v = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \beta_i$$

şeklinde tanımlayalım ve

$$ay'' + by' + cy + f(x) = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(1) = 0$$

sınır değer problemini gözönüne alalım. Burada a, b, c birer reel sayıdır. $u_N(x)$ yaklaşık çözüm olmak üzere, (3.14) integralinde,

$$\begin{aligned} \int_0^1 Evdx &= \int_0^1 (au_N'' + bu_N' + cu_N + f(x))vdx = 0 \\ &= \int_0^1 au_N''vdx + \int_0^1 bu_N'vdx + \int_0^1 cu_Nvdx + \int_0^1 f(x)vdx = 0 \end{aligned} \tag{3.16}$$

olup kısmi integrasyondan

$$\int_0^1 au_N''vdx = a\Big([u_N'v]\Big|_0^1 - \int_0^1 u_N'v'dx\Big)$$

olduğu görülür.

$$\beta_i(0) = 0 \qquad \beta_i(1) = 0$$

olduğundan

$$v(0) = 0 \qquad v(1) = 0$$

olur. Bu nedenle

$$[u_N'v]\Big|_0^1 = 0$$

olacağından

$$\int_0^1 au_N'' v dx = -\int_0^1 au_N' v' dx$$

yazılabilir. O halde

$$\int_0^1 (au_N'' + bu_N' + cu_N + f(x))vdx = \int_0^1 (-au_N'v' + bu_N'v + cu_Nv + f(x)v)dx$$

şeklinde yazılır. Burada

$$v = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \beta_i \qquad\qquad u_N = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \beta_j$$

olup bu fonksiyonlar son integralde yerine yazılırsa

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i \left[\sum_{j=1}^{N} \left(\int_0^1 (-a\beta_i'\beta_j' + b\beta_i\beta_j' + c\beta_i\beta_j)dx \right) \alpha_j + \int_0^1 f(x)\beta_i dx \right] = 0 \quad (3.17)$$

ifadesi elde edilir. Burada

$$K_{ij} = \int_0^1 (-a\beta_i'\beta_j' + b\beta_i\beta_j' + c\beta_i\beta_j)dx \quad (3.18)$$

ve

$$F_i = -\int_0^1 f(x)\beta_i dx \quad (3.19)$$

dersek (3.17) ifadesi,

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i \Big(\sum_{i=1}^{N} K_{ij}\alpha_j - F_i \Big) = 0 \quad (3.20)$$

şeklinde yazılır. v test fonksiyonu keyfi seçildiğinden μ_i katsayıları da keyfidir. Bu nedenle (3.20) ifadesi

$$\sum_{j=1}^{N} K_{ij}\alpha_j = F_i \qquad\qquad i = 1, 2, ..., N$$

şeklinde yazılabilir. Bu son denklem sistemini matris ile gösterecek olursak

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{pmatrix} \qquad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix}$$

elde edilir (Evans, Blackledge, Yardley, 2000).

3.3. Sınır Değer Problemlerinin Temel Bernstein Polinomları İle Çözümü

Bu başlık altında sınır değer problemlerinin Bernstein polinomları ve özellikleri kullanılarak nümerik çözümlerini elde edeceğiz. Bunun için de bir önceki başlık altında incelediğimiz Galerkin yönteminden faydalanacağız.
Galerkin yönteminde

$$ay'' + by' + cy + f(x) = 0 \qquad\qquad y(0) = y(1) = 0$$

sınır değer problemi için bir yaklaşık çözümü

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i(x)$$

olarak seçmiştik. Ayrıca bu yaklaşık çözümde

$$\beta_i(x) = x^i(1-x) \qquad\qquad i = 1, 2, ..., n$$

biçiminde taban fonksiyonu olduğunu söylemiştik. Ve

$$\int_0^1 Evdx$$

integralindeki v test fonksiyonunu da u_n ile benzer şekilde, yani,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \beta_i(x)$$

şeklinde yazmıştık.
Şimdi bu $\beta_i(x)$ taban fonksiyonlarını birer Bernstein polinomu olarak seçelim. Yani,

$$\beta_i(x) = B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \qquad\qquad i = 0, 1, ..., n$$

olsun. Burada β_i taban fonksiyonları ele alınan sınır değer probleminde verilen sınır koşullarını sağlamalıdır. Ancak $i = 0$ için,

$$\beta_0(x) = B_{0,n}(x) = \binom{n}{0} x^0 (1-x)^n = (1-x)^n$$

olup $x = 0$ noktasında,

$$\beta_0(0) = 1$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $i = n$ için,

$$\beta_n(x) = B_{n,n}(x) = \binom{n}{n} x^n (1-x)^0 = (x)^n$$

olup $x = 1$ noktasında,

$$\beta_n(1) = 1$$

olarak bulunur. O halde $\beta_0(x)$ ve $\beta_n(x)$ fonksiyonları sınır koşullarını sağlamamaktadır. Bu nedenle,

$$i = 1, 2, ..., (n-1)$$

olarak alınmalıdır. O halde v test fonksiyonu,

$$v = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i B_{i,n}(x) \tag{3.21}$$

olup yaklaşık çözüm fonksiyonu,

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j B_{j,n}(x) \tag{3.22}$$

şeklinde yazılır.

$$E = au'' + bu' + cu + f(x)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \int_0^1 Evdx &= \int_0^1 (au'' + bu' + cu + f(x))vdx \\ &= \int_0^1 au''vdx + \int_0^1 bu'vdx + \int_0^1 cuvdx + \int_0^1 f(x)vdx \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

olarak yazılır. Burada kısmi integrasyondan

$$\int_0^1 au''vdx = a\big([u'v]\Big|_0^1 - \int_0^1 u'v'dx\big) \tag{3.24}$$

olup $i = 1, 2, ..., (n-1)$ için

$$B_{i,n}(0) = B_{i,n}(1) = 0$$

olduğundan

$$v(0) = v(1) = 0$$

olarak yazılabilir. Bu nedenle,

$$[u'v]\Big|_0^1 = 0$$

olacağından (3.24) eşitliği,

$$\int_0^1 au''vdx = -\int_0^1 au'v'dx$$

şeklinde yazılır. O halde (3.23) eşitliği,

$$\int_0^1 (au'' + bu' + cu + f(x))vdx = \int_0^1 (-au'v' + bu'v + cuv + f(x)v)dx = 0$$

şeklinde ifade edilir. (3.21) ve (3.22)'te verilen v ve u fonksiyonları son integralde yerine yazılırsa,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i [\sum_{j=1}^{n-1} \left(\int_0^1 (-aB'_{i,n}(x)B'_{j,n}(x) + bB_{i,n}(x)B'_{j,n}(x) + cB_{i,n}(x)B_{j,n}(x))dx \right) \alpha_j$$
$$+ \int_0^1 f(x)B_{i,n}(x)dx] = 0 \qquad (3.25)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$K_{ij} = \int_0^1 (-aB'_{i,n}(x)B'_{j,n}(x) + bB_{i,n}(x)B'_{j,n}(x) + cB_{i,n}(x)B_{j,n}(x))dx \qquad (3.26)$$

ve

$$F_i = -\int_0^1 f(x)B_{i,n}(x)dx \qquad (3.27)$$

dersek (3.25) eşitliği,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \Big(\sum_{j=1}^{n-1} K_{ij}\alpha_j - F_i \Big) = 0 \qquad (3.28)$$

şeklinde yazılır. (3.21) de tanımlanan v test fonksiyonu keyfi seçildiği için μ_i katsayıları da keyfidir. Bu nedenle (3.28) eşitliğinden

$$\sum_{j=1}^{n-1} K_{ij}\alpha_j = F_i \qquad i = 1, 2, ..., n-1 \qquad (3.29)$$

elde edilir. Bu son denklem sistemini matris ile gösterecek olursak

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n-1} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n-11} & K_{n-12} & \cdots & K_{n-1n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

elde edilir (Bhatti, Bracken, 2007).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Örnek Problemler ve Tablolar İle Karşılaştırmalar

Örnek 4.1.1

$y'' + y + x = 0 \qquad y(0) = y(1) = 0$ sınır değer problemi için $y(0.5)$ değerini bulup $y(0.4)$ değerini yaklaşık olarak hesaplayalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
y_i &= y(x_i) = y(x_1) = y(0.5)\\
y_{i+1} &= y(x_{i+1}) = y(x_2) = y(1) = 0\\
y_{i-1} &= y(x_{i-1}) = y(x_0) = y(0) = 0\\
r_i &= r(x_i) = r(x_1) = r(0.5) = -0.5\\
r_{i+1} &= r(x_{i+1}) = r(x_2) = r(1) = -1\\
r_{i-1} &= r(x_{i-1}) = r(x_0) = r(0) = 0\\
g(x_0) &= g(x_1) = g(x_2) = 1
\end{aligned}$$

olup bu değerler

$$y_{i+1}\Big(1 + \frac{h^2}{6} g_{i+1}\Big) - y_i\Big(2 - \frac{2h^2}{3} g_i\Big) + y_{i-1}\Big(1 + \frac{h^2}{6} g_{i-1}\Big) = \frac{h^2}{6}(r_{i+1} + 4r_i + r_{i-1})$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
0 - y(0.5)\Big(2 - \frac{2}{3}\frac{1}{4}\Big) &= \frac{0.25}{6}(-1 - 4(0.5) + 0)\\
-y(0.5)\frac{11}{6} &= \frac{0.25}{6}(-3)\\
y(0.5) &= \frac{3}{44}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Şimdi spline fonksiyonunu elde edelim. Bunun için ilk olarak $S_0(x)$ ve $S_1(x)$ fonksiyonlarını bulmamız gerekir.
$M_i = r_i - g_i y_i$ olduğundan

$$\begin{aligned}
M_0 &= r(x_0) - g(x_0)y(x_0) = 0 - 0 = 0\\
M_1 &= r(x_1) - g(x_1)y(x_1) = -0.5 - \frac{3}{44} = -\frac{25}{44}\\
M_2 &= r(x_2) - g(x_2)y(x_2) = -1 - 0 = -1
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu değerleri $h = 0.5$ ve $i = 1$ için

$$\begin{aligned} S_{i-1}(x) &= M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h} + \Big(y_{i-1} - \frac{M_{i-1}h^2}{6}\Big)\frac{(x_i - x)}{h} \\ &+ \Big(y_i - \frac{M_i h^2}{6}\Big)\frac{(x - x_{i-1})}{h} \end{aligned}$$

denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} S_0(x) &= M_0\frac{(x_1 - x)^3}{6h} + M_1\frac{(x - x_0)^3}{6h} + \Big(y_0 - \frac{M_0 h^2}{6}\Big)\frac{(x_1 - x)}{h} \\ &+ \Big(y_1 - \frac{M_1 h^2}{6}\Big)\frac{(x - x_0)}{h} \\ &= -\frac{25}{44}\frac{(x)^3}{6(0.5)} + \Big(\frac{3}{44} + \frac{25}{44}\frac{(0.25)}{6}\Big)\frac{x}{0.5} \\ &= -\frac{25}{132}x^3 + \frac{97}{528}x \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $i = 2$ için

$$\begin{aligned} S_1(x) &= M_1\frac{(x_2 - x)^3}{6h} + M_2\frac{(x - x_1)^3}{6h} + \Big(y_1 - \frac{M_1 h^2}{6}\Big)\frac{(x_2 - x)}{h} \\ &+ \Big(y_2 - \frac{M_2 h^2}{6}\Big)\frac{(x - x_1)}{h} \\ &= -\frac{25}{44}\frac{(1 - x)^3}{3} - \frac{(x - 0.5)^3}{3} + \Big(\frac{3}{44} + \frac{25}{44}\frac{(0.25)}{6}\Big)\frac{(1 - x)}{0.5} \\ &+ \Big(0 + \frac{(0.25)}{6}\Big)\frac{(x - 0.5)}{0.5} \\ &= -\frac{25}{132}(1 - x)^3 - \frac{1}{3}(x - 0.5)^3 + \frac{97}{528}(1 - x) + \frac{1}{12}(x - 0.5) \end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{25}{132}x^3 + \frac{97}{528}x & x \in [0, 0.5] \\ \\ -\frac{25}{132}(1 - x)^3 - \frac{1}{3}(x - 0.5)^3 + \frac{97}{528}(1 - x) + \frac{1}{12}(x - 0.5) & x \in [0.5, 1] \end{cases}$$

şeklinde yazılır. Buradan da,

$$y(0.4) \cong S_0(0.4) = -\frac{25}{132}(0.4)^3 + \frac{97}{528}(0.4)$$

$$= 0.0613636$$

olarak bulunur. Bu örnekte incelediğimiz sınır değer probleminin gerçek çözümü ise

$$y(x) = -x + \csc(1)\sin x$$

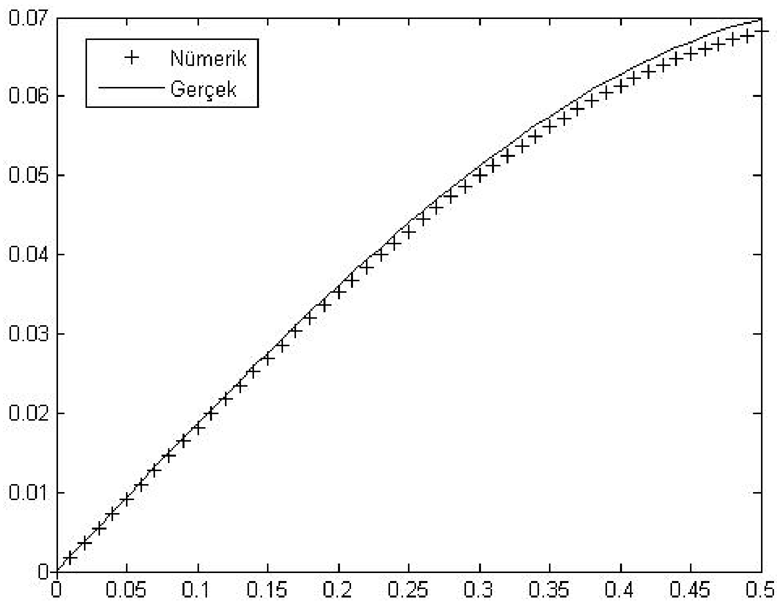
olup

$$y(0.4) = 0.0627829$$

dir. O halde hata

$$|y(0.4) - S_0(0.4))| = 0.0014193$$

olarak bulunur. Bu örnek için gerçk çözüm ile yaklaşık çözüm fonksiyonlarının grafikleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.1 Örnek 4.1.1 için gerçek çözüm ile yaklaşık çözüm grafiği

Örnek 4.1.2

$y'' + y' + y = x^2 \qquad y(0) = y(1) = 0$ sınır değer problemi için $y(0.5)$ değerini bulup $y(0.4)$ değerini yaklaşık olarak hesaplayalım.

Çözüm:

$f(x) = 1$ olduğundan $f_{j-1} = f_j = f_{j+1} = 1$
ve
$g(x) = 1$ olduğundan $g_{j-1} = g_j = g_{j+1} = 1$
olur. Ayrıca $r(x) = x^2$ ve $h = 0.5$'tir. O halde

$$\begin{aligned} A_j &= \Big(1 - \frac{h}{3} f_{j-1}\Big)\Big(1 + \frac{h}{3} f_j\Big) + \frac{h^2}{36} f_{j-1} f_j \\ &= \Big[\frac{5}{6}\frac{7}{6} + \frac{0.25}{6}\Big] \\ &= \frac{47}{48} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} B_j &= \Big(1 - \frac{h}{3} f_j\Big)\Big(1 + \frac{h}{3} f_{j+1}\Big) + \frac{h^2}{36} f_j f_{j+1} = A_j \\ &= \frac{47}{48} \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} C_j &= 1 + \frac{7h}{24}(f_{j+1} - f_{j-1}) - \frac{h^2}{12} f_{j-1} f_{j+1} \\ &= \frac{47}{48} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu değerleri (2.40) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} -y(0.5)\Big[\frac{235}{192} + \frac{47}{64} - \frac{47}{288}\Big] &= \frac{0.25}{6}\Big(\frac{47}{48} + 4\frac{47}{48}0.25\Big) \\ y(0.5) &= -\frac{1}{22} \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi spline fonksiyonu elde edelim. Bunun için M_0, M_1, M_2 değerlerini bulmalıyız. İlk olarak

$$A_j M_{j-1} = \Big(1 + \frac{h}{3} f_j\Big)T + \Big(\frac{h}{6} f_{j-1}\Big)K$$

denklemindeki T ve K ifadelerinin değerini bulalım.
$j = 1$ için

$$\begin{aligned} T &= r_0 - g_0 y_0 - \frac{f_0}{h}(y_1 - y_0) \\ &= \frac{1}{11} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} K &= r_1 - g_1 y_1 - \frac{f_1}{h}(y_1 - y_0) \\ &= \frac{17}{44} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$A_j = \frac{47}{48}$$

olduğunu da bulmuştuk. Şimdi bu değerleri yukarıdaki denklemde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{\left(1 + \frac{0.5}{3}\right)\frac{1}{11} + \left(\frac{0.5}{6}\right)\frac{17}{44}}{\frac{47}{48}} \\ &= \frac{73}{517} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi benzer işlemleri $j = 2$ için yaparsak

$$\begin{aligned} T &= r_1 - g_1 y - \frac{f_1}{h}(y_2 - y_1) \\ &= \frac{9}{44} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} K &= r_2 - g_2 y_2 - \frac{f_2}{h}(y_2 - y_1) \\ &= \frac{10}{11} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu değerleri de denklemde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{\left(1 + \frac{0.5}{3}\right)\frac{9}{44} + \left(\frac{0.5}{6}\right)\frac{10}{11}}{\frac{47}{48}} \\ &= \frac{166}{517} \end{aligned}$$

elde edilir. M_2 değerini bulmak için ise

$$B_j M_{j+1} = \left(1 - \frac{h}{3} f_j\right) U - \left(\frac{h}{6} f_{j+1}\right) V$$

denklemini kullanacağız. Bunun için $j = 1$ için U ve V değerlerini hasaplarsak

$$\begin{aligned} U &= r_2 - g_2 y_2 - \frac{f_2}{h}(y_2 - y_1) \\ &= \frac{10}{11} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} V &= r_1 - g_1 y_1 - \frac{f_1}{h}(y_2 - y_1) \\ &= \frac{9}{44} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$B_j = \frac{47}{48}$$

olduğunu da bulmuştuk. Bu değerleri yukarıdaki denklemde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{\left(1 - \frac{0.5}{3}\right)\frac{10}{11} - \left(\frac{0.5}{6}\right)\frac{9}{44}}{\frac{47}{48}} \\ &= \frac{391}{517} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Şimdi M_0, M_1, M_2 değerlerini

$$\begin{aligned} S_{i-1}(x) &= M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h} + \left(y_{i-1} - \frac{M_{i-1}h^2}{6}\right)\frac{(x_i - x)}{h} \\ &+ \left(y_i - \frac{M_i h^2}{6}\right)\frac{(x - x_{i-1})}{h} \end{aligned}$$

denkleminde kullanırsak, $i = 1$ için

$$\begin{aligned} S_0(x) &= M_0\frac{(x_1 - x)^3}{6h} + M_1\frac{(x - x_0)^3}{6h} + \left(y_0 - \frac{M_0 h^2}{6}\right)\frac{(x_1 - x)}{h} \\ &+ \left(y_1 - \frac{M_1 h^2}{6}\right)\frac{(x - x_0)}{h} \\ &= \frac{73}{1551}(0.5 - x)^3 + \frac{166}{1551}x^3 - \frac{73}{6204}(0.5 - x) - \frac{365}{3102}x \end{aligned}$$

ve $i = 2$ için

$$\begin{aligned} S_1(x) &= M_1\frac{(x_2 - x)^3}{6h} + M_2\frac{(x - x_1)^3}{6h} + \left(y_1 - \frac{M_1 h^2}{6}\right)\frac{(x_2 - x)}{h} \\ &+ \left(y_2 - \frac{M_2 h^2}{6}\right)\frac{(x - x_1)}{h} \\ &= \frac{166}{1551}(1 - x)^3 + \frac{391}{1551}(x - 0.5)^3 - \frac{365}{3102}(1 - x) - \frac{188}{2983}(x - 0.5) \end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde

$$S(x) = \begin{cases} \frac{73}{1551}(0.5-x)^3 + \frac{166}{1551}x^3 - \frac{73}{6204}(0.5-x) - \frac{365}{3102}x & x \in [0,0.5] \\ \\ \frac{166}{1551}(1-x)^3 + \frac{391}{1551}(x-0.5)^3 - \frac{365}{3102}(1-x) - \frac{188}{2983}(x-0.5) & x \in [0.5,1] \end{cases}$$

şeklinde yazılır. Buradan da,

$$\begin{aligned} y(0.4) \cong S_0(0.4) &= \frac{73}{1551}(0.5-0.4)^3 + \frac{166}{1551}(0.4)^3 - \frac{73}{6204}(0.5-0.4) - \frac{365}{3102}(0.4) \\ \\ &= -0.0413462 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu örnekte incelediğimiz sınır değer probleminin gerçek çözümü ise

$$y(x) = e^{-x/2}\Big(-2e^{x/2}x + e^{x/2}x^2 + \sqrt{e}\csc(\sqrt{3}/2)\sin(\sqrt{3}x/2)\Big)$$

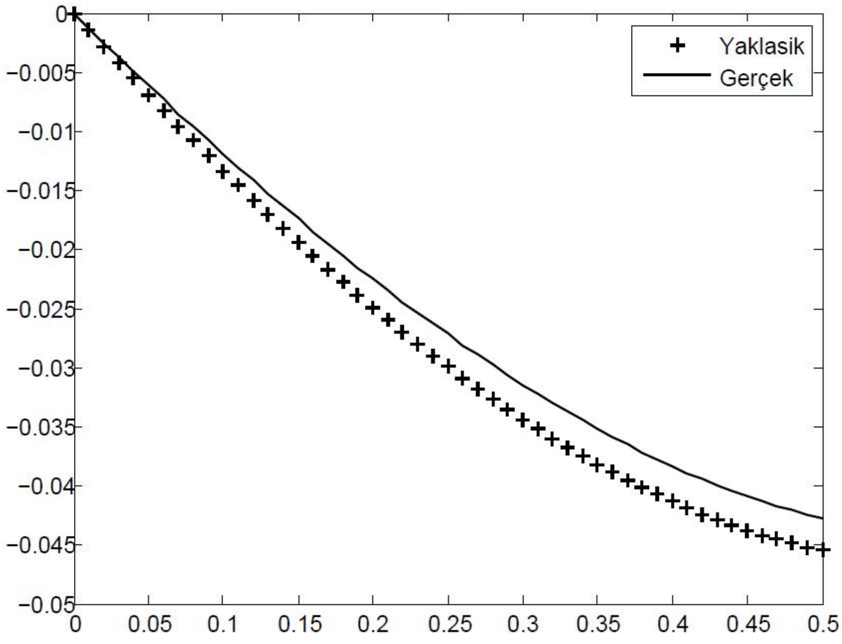
olup

$$y(0.4) = -0.0383556$$

dir. O halde hata

$$|y(0.4) - S_0(0.4)| = 0.0029906$$

olarak bulunur. Bu örnek için gerçk çözüm ile yaklaşık çözüm fonksiyonlarının grafikleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.2 Örnek 4.1.2 için gerçek çözüm ile yaklaşık çözüm grafiği

Örnek 4.1.3

$y'' + y + x = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y(1) = 0 \qquad 0 \leq x \leq 1$
sınır değer problemini Galerkin yöntemi ile çözüp $y(0.4)$ değerini yaklaşık olarak hesaplayalım.

Çözüm:

Verilen sınır değer problemi için,

$$E = \frac{d^2u_2}{dx^2} + u_2 + x$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca v test fonksiyonu, $v = \beta_i$ şeklinde seçilirse (3.14) integrali

$$\int_0^1 E\beta_i dx = 0 \qquad\qquad i = 1, 2$$

şeklinde yazılır. Yaklaşık çözüm ise,

$$u_2(x) = \alpha_1\beta_1(x) + \alpha_2\beta_2(x)$$

şeklinde ifade edilir. Sınır koşulları

$$y(0) = 0$$

ve

$$y(1) = 0$$

olduğundan taban fonksiyonlarını da

$$\beta_i(0) = 0$$

ve

$$\beta_i(1) = 0$$

olacak şekilde seçeriz. Bunun için en iyi seçim

$$\beta_i(x) = x^i(1 - x) \qquad\qquad i = 1, 2$$

şeklinde olacaktır. O halde

$$\beta_1(x) = x(1 - x)$$

ve

$$\beta_2(x) = x^2(1 - x)$$

olur. E ifadesi ise,

$$
\begin{aligned}
E = \frac{d^2u_2}{dx^2} + u_2 + x &= \frac{d^2[\alpha_1 x(1-x) + \alpha_2 x^2(1-x)]}{dx^2} \\
&+ \alpha_1 x(1-x) + \alpha_2 x^2(1-x) + x \\
&= -2\alpha_1 + \alpha_2(2-6x) + \alpha_1(x-x^2) + \alpha_2(x^2-x^3) + x \\
&= \alpha_1[-2+x-x^2] + \alpha_2[2-6x+x^2-x^3] + x
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. $N = 2$ için,

$$\int_0^1 E\beta_i(x)dx = 0 \qquad\qquad i = 1, 2$$

olduğundan

$$\int_0^1 E\beta_1(x)dx = \int_0^1 (\alpha_1[-2+x-x^2] + \alpha_2[2-6x+x^2-x^3] + x)x(1-x)dx = 0$$

olup buradan

$$\frac{3}{10}\alpha_1 + \frac{3}{20}\alpha_2 = \frac{1}{12}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\int_0^1 E\beta_2(x)dx = \int_0^1 (\alpha_1[-2+x-x^2] + \alpha_2[2-6x+x^2-x^3] + x)x^2(1-x)dx = 0$$

olup buradan

$$\frac{3}{10}\alpha_1 + \frac{13}{105}\alpha_2 = \frac{1}{20}$$

bulunur. O halde

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{3}{20} \\ \frac{3}{10} & \frac{13}{105} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{20} \end{bmatrix}$$

denklem sisteminin çözümünden

$$\alpha_1 = \frac{71}{369}$$

ve

$$\alpha_2 = \frac{7}{41}$$

olarak bulunur. Buradan da

$$u_2 = \alpha_1 x(1-x) + \alpha_2 x^2(1-x)$$

$$u_2 = x(1-x)\left[\frac{71}{369} + \frac{7}{41}x\right]$$

genel çözümü elde edilir. Burada $u_2(0.4)$ hesaplarsak,

$$u_2(0.4) = 0.0625691$$

bulunur. Gerçek çözüm ise

$$y(x) = -x + \csc(1)\sin x$$

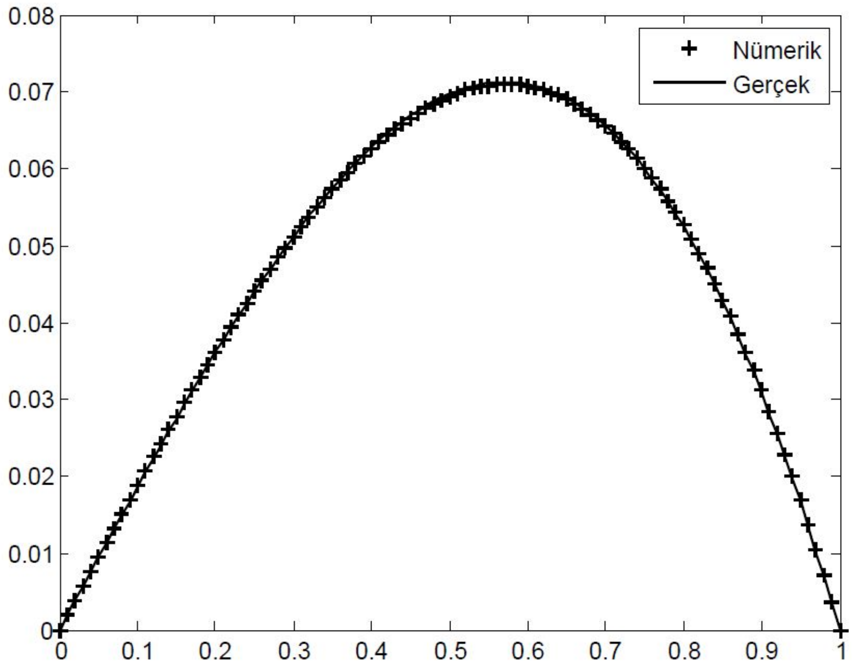
olup

$$y(0.4) = 0.0627829$$

olarak bulunur. O halde hata

$$|y(0.4) - u_2(0.4)| = 0.0002138$$

olarak hesaplanır (Evans, Blackledge, Yardley, 2000). Bu örnek için yaklaşık çözüm ile gerçek çözüm fonksiyonlarının grafikleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.3 Örnek 4.1.3 için gerçek çözüm ile yaklaşık çözüm grafiği

Örnek 4.1.4

$y'' + y' + y = x^2 \qquad 0 \leq x \leq 1 \qquad y(0) = 0 \quad y(1) = 0$
sınır değer problemini Galerkin yöntemi ile çözüp $y(0.4)$ değerini yaklaşık olarak hesaplayalım.

Çözüm:

Verilen sınır değer problemi için, $a = 1, b = 1, c = 1$ ve,

$$K_{ij} = \int_0^1 (-\beta_i'\beta_j' + \beta_i\beta_j' + \beta_i\beta_j)dx \quad , \quad F_i = \int_0^1 x^2\beta_i dx$$

olup

$$\beta_i(x) = x^i(1-x)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \int_0^1 (-(ix^{i-1} - (i+1)x^i)(jx^{j-1} - (j+1)x^j) + (x^i - x^{i+1})(jx^{j-1} - (j+1)x^j) \\ &+ (x^i - x^{i+1})(x^j - x^{j+1}))dx \\ &= -\frac{2ij}{(i+j)((i+j)^2-1)} + \frac{j-i}{(i+j)(i+j+1)(i+j+2)} \\ &+ \frac{2}{(i+j+1)(i+j+2)(i+j+3)} \end{aligned}$$

ve

$$F_i = \int_0^1 x^2x^i(1-x)dx = \frac{1}{(i+3)(i+4)}$$

bulunur. Bu eşitlikler kullanılarak

$$K_{11} = -\frac{3}{10} \qquad K_{12} = -\frac{2}{15} \qquad K_{21} = -\frac{1}{6} \qquad K_{22} = -\frac{13}{105}$$

$$F_1 = \frac{1}{20} \qquad F_2 = \frac{1}{30}$$

değerleri hesaplanır. Bu değerler kullanılarak

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{13}{105} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{1}{30} \end{pmatrix}$$

denklem sistemi oluşturulur. Bu denklem sistemi çözüldüğünde

$$\alpha_1 = -\frac{11}{94} \qquad \alpha_2 = -\frac{21}{188}$$

bulunur. O halde genel çözüm

$$u_2 = -\frac{11}{94}x(1-x) - \frac{21}{188}x^2(1-x)$$

olarak bulunur. Buradan

$$y(0.4) \cong u_2(0.4) = -0.0388085$$

olarak hesaplanır. Gerçek çözüm

$$y(x) = e^{-x/2}\Big(-2e^{x/2}x + e^{x/2}x^2 + \sqrt{e}\csc(\sqrt{3}/2)\sin(\sqrt{3}x/2)\Big)$$

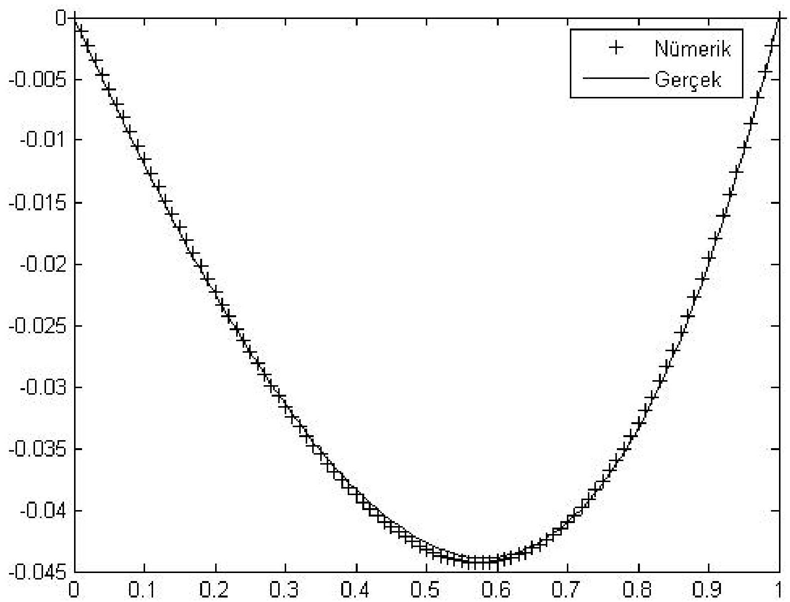
olduğundan

$$y(0.4) = -0.0383556$$

olarak bulunur. O halde hata

$$|y(0.4) - u_2(0.4)| = 0.0004529$$

olarak hesaplanır.



Şekil 4.4 Örnek 4.1.4 için gerçek çözüm ile yaklaşık çözüm grafiği

Örnek 4.1.5

$y'' + y + x = 0 \qquad 0 \leq x \leq 1 \qquad y(0) = 0 \quad y(1) = 0$
sınır değer probleminin Bernstein polinomları ile nümerik çözümünü bulup $y(0.4)$ değerini yaklaşık olarak hesaplayalım.,

Çözüm:

Verilen sınır değer problemi için $a = 1, b = 0, c = 1$ ve $f(x) = x$ olup,

$$K_{ij} = \int_0^1 (-B'_{i,n}(x)B'_{j,n}(x) + B_{i,n}(x)B_{j,n}(x))dx$$

ve

$$F_i = -\int_0^1 xB_{i,n}(x)dx$$

şeklinde yazılır. Burada $n = 3$ alıp,

$$M_{ij} = -B'_{i,3}(x)B'_{j,3}(x) + B_{i,3}(x)B_{j,3}(x)$$

olarak tanımlarsak,

$$\begin{aligned} M_{ij} &= (1-x)^{6-i-j}x^{i+j}\binom{3}{i}\binom{3}{j} \\ &+ \Big(-i(1-x)^{3-i}x^{i-1}\binom{3}{i} + (3-i)(1-x)^{2-i}x^{i}\binom{3}{i}\Big) \\ &. \Big(j(1-x)^{3-j}x^{j-1}\binom{3}{j} - (3-j)(1-x)^{2-j}x^{j}\binom{3}{j}\Big) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan

$$M_{11} = 9(1-x)^4x^2 + (-3(1-x)^2 + 6(1-x)x)(3(1-x)^2 - 6(1-x)x)$$

olup,

$$K_{11} = \int_0^1 M_{11}dx = -\frac{39}{35}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$M_{12} = 9(1-x)^3x^3 + (-3(1-x)^2 + 6(1-x)x)(6(1-x)x - 3x^2)$$

olup,

$$K_{12} = \int_0^1 M_{12}dx = -\frac{33}{140}$$

ve

$$M_{21} = 9(1-x)^3x^3 + (3(1-x)^2 - 6(1-x)x)(-6(1-x)x + 3x^2)$$

olup,

$$K_{21} = \int_0^1 M_{21}dx = -\frac{33}{140}$$

olarak bulunur. Son olarak

$$M_{22} = 9(1-x)^2x^4 + (6(1-x)x - 3x^2)(-6(1-x)x + 3x^2)$$

olup,

$$K_{22} = \int_0^1 M_{22}dx = -\frac{39}{35}$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde,

$$F_i = -\int_0^1 xB_{i,3}(x)dx$$

integralinde

$$N_i = -xB_{i,3}(x)$$

olarak tanımlarsak,

$$N_1 = -3(1-x)^2x^2$$

olup

$$F_1 = \int_0^1 N_1dx = -\frac{1}{10}$$

ve

$$N_2 = -3(1-x)x^3$$

olup

$$F_2 = \int_0^1 N_2dx = -\frac{3}{20}$$

olarak hesaplanır. Elde ettiğimiz değerleri matris ile gösterecek olursak,

$$\begin{pmatrix} -\frac{39}{35} & -\frac{33}{140} \\ -\frac{33}{140} & -\frac{39}{35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ -\frac{3}{20} \end{pmatrix}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde

$$\alpha_1 = \frac{71}{1107} \qquad \alpha_2 = \frac{134}{1107}$$

olarak bulunur. O halde yaklaşık çözüm,

$$\begin{aligned} u(x) &= \alpha_1 B_{1,3}(x) + \alpha_2 B_{2,3}(x) \\ &= \frac{71}{1107}\binom{3}{1} x(1-x)^2 + \frac{134}{1107}\binom{3}{2} x^2(1-x) \\ &= \frac{71}{369} x(1-x)^2 + \frac{134}{369} x^2(1-x) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Buradan,

$$y(0.4) \cong u(0.4) = 0.0625691$$

olup gerçek çözüm

$$y(x) = -x + \csc(1) \sin x$$

olduğundan

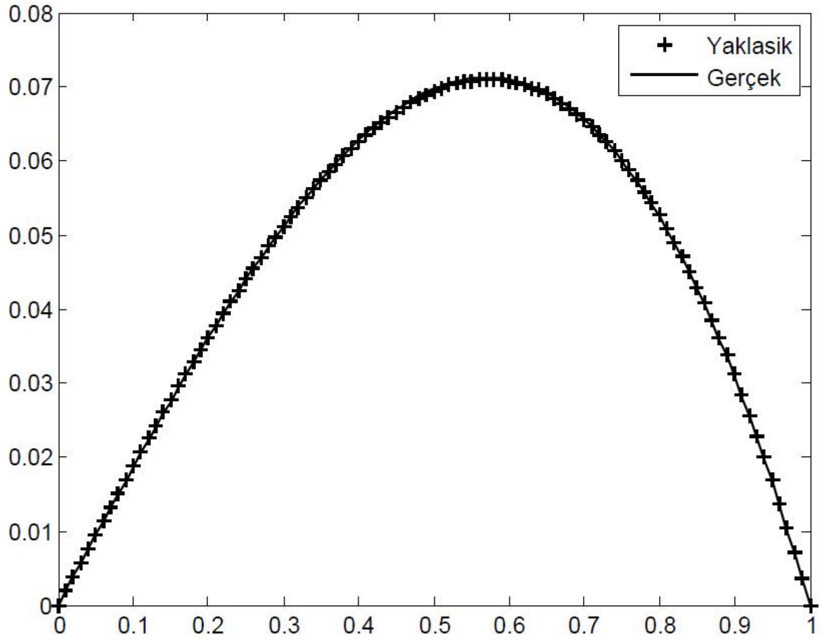
$$y(0.4) = 0.0627829$$

olarak bulunur. O halde hata

$$\Big| y(0.4) - u(0.4) \Big| = 0.0002138$$

olarak hesaplanır.

Bu örnek için gerçek çözüm ile yaklaşık çözüm fonksiyonlarının grafiği aşağıda verilmiştir. Ayrıca bu örnekteki sınır değer probleminin spline fonksiyonu ile çözümünden elde edilen $u(0.4)$ değeri ile Bernstein polinomlarıyla elde edilen $u(0.4)$ değerinin karşılaştırılması tablo 4.1'de gösterilmiştir.



Şekil 4.5 Örnek 4.1.5 için gerçek çözüm ile yaklaşık çözüm grafiği

	Gerçek Çözüm	Nümerik Çözüm	Hata
Bernstein Polinomları	0.0627829	0.0625691	0.0002138
Spline Fonksiyonu	0.0627829	0.0613636	0.0014193

Tablo 4.1 $y'' + y + x = 0$ sınır değer problemi için karşılaştırma

Örnek 4.1.6

$y'' + y' + y = x^2 \qquad 0 \leq x \leq 1 \qquad y(0) = 0 \quad y(1) = 0$
sınır değer probleminin Bernstein polinomları ile nümerik çözümünü bulup $y(0.4)$ değerini yaklaşık olarak hesaplayalım.

Çözüm:

Verilen sınır değer problemi için $a = 1, b = 1, c = 1$ ve $f(x) = -x^2$ olup,

$$K_{ij} = \int_0^1 (-B'_{i,n}B'_{j,n} + B_{i,n}B'_{j,n} + B_{i,n}B_{j,n})dx$$

ve

$$F_i = \int_0^1 x^2 B_{i,n} dx$$

şeklinde yazılır. Burada $n = 3$ alıp,

$$M_{ij} = -B'_{i,n}B'_{j,n} + B_{i,n}B'_{j,n} + B_{i,n}B_{j,n}$$

olarak tanımlarsak,

$$\begin{aligned} M_{ij} &= (1-x)^{6-i-j}x^{i+j}\binom{3}{i}\binom{3}{j} \\ &+ (1-x)^{3-i}x^{i}\binom{3}{i}\Big(j(1-x)^{3-j}x^{j-1}\binom{3}{j} - (3-j)(1-x)^{2-j}x^{j}\binom{3}{j}\Big) \\ &+ \Big(-i(1-x)^{3-i}x^{i-1}\binom{3}{i} + (3-i)(1-x)^{2-i}x^{i}\binom{3}{i}\Big) \\ &. \Big(j(1-x)^{3-j}x^{j-1}\binom{3}{j} - (3-j)(1-x)^{2-j}x^{j}\binom{3}{j}\Big) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} M_{11} &= 9(1-x)^4x^2 + 3(1-x)^2x(3(1-x)^2 - 6(1-x)x) \\ &+ (3(1-x)^2 - 6(1-x)x)(-3(1-x)^2 + 6(1-x)x) \end{aligned}$$

olup,

$$K_{11} = \int_0^1 M_{11}dx = -\frac{39}{35}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} M_{12} &= 9(1-x)^3x^3 + 3(1-x)^2x(6(1-x)x - 3x^2) \\ &+ (3(1-x)^2 - 6(1-x)x)(-6(1-x)x + 3x^2) \end{aligned}$$

olup,

$$K_{12} = \int_0^1 M_{12}dx = -\frac{3}{35}$$

ve

$$\begin{aligned} M_{21} &= 9(1-x)^3x^3 + 3(1-x)x^2(3(1-x)^2 - 6(1-x)x) \\ &+ (-3(1-x)^2 + 6(1-x)x)(6(1-x)x - 3x^2) \end{aligned}$$

olup,

$$K_{21} = \int_0^1 M_{21}dx = -\frac{27}{70}$$

olarak bulunur. Son olarak,

$$\begin{aligned} M_{22} &= 9(1-x)^2x^4 + 3(1-x)x^2(6(1-x)x - 3x^2) \\ &+ (6(1-x)x - 3x^2)(-6(1-x)x + 3x^2) \end{aligned}$$

olup,

$$K_{22} = \int_0^1 M_{22}dx = -\frac{39}{35}$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde

$$F_i = \int_0^1 x^2 B_{i,3}dx$$

integralinde,

$$N_i = x^2 B_{i,3}$$

olarak yazarsak,

$$N_1 = 3(1-x)^2x^3$$

olup

$$F_1 = \int_0^1 N_1 dx = \frac{1}{20}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde,

$$N_2 = 3(1-x)x^4$$

olup

$$F_2 = \int_0^1 N_2 dx = \frac{1}{10}$$

olarak bulunur. Elde ettiğimiz değerleri matris ile gösterecek olursak

$$\begin{pmatrix} -\frac{39}{35} & -\frac{3}{35} \\ -\frac{27}{70} & -\frac{39}{35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde

$$\alpha_1 = -\frac{11}{282} \qquad \alpha_2 = -\frac{43}{564}$$

olarak bulunur. O halde yaklaşık çözüm,

$$\begin{aligned} u(x) &= \alpha_1 B_{1,3}(x) + \alpha_2 B_{2,3}(x) \\ &= -\frac{11}{282}\binom{3}{1}x(1-x)^2 - \frac{43}{564}\binom{3}{2}x^2(1-x) \\ &= -\frac{11}{94}x(1-x)^2 - \frac{43}{188}x^2(1-x) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.Buradan,

$$y(0.4) \cong u(0.4) = -0.0388085$$

olup gerçek çözüm

$$y(x) = e^{-x/2}\Big(- 2e^{x/2}x + e^{x/2}x^2 + \sqrt{e}\csc(\sqrt{3}/2)\sin(\sqrt{3}x/2)\Big)$$

olduğundan

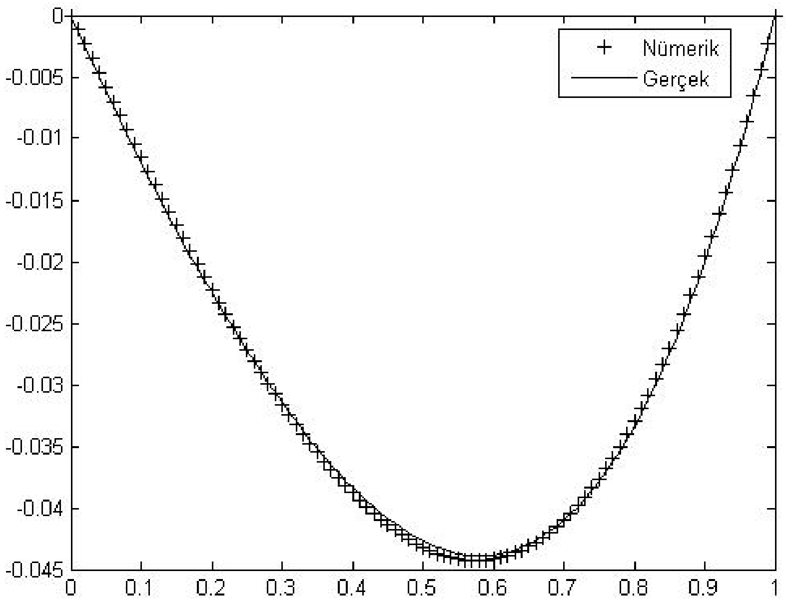
$$y(0.4) = -0.0383556$$

dir. O halde hata

$$|y(0.4) - u(0.4)| = 0.0004529$$

olarak bulunur.

Bu örnek için gerçek çözüm ile yaklaşık çözüm fonksiyonlarının grafiği aşağıda verilmiştir. Ayrıca bu örnekteki diferansiyel denklemin spline polinomları ile çözümünden elde edilen $u(0.4)$ değeri ile Bernstein polinomlarıyla elde edilen $u(0.4)$ değerinin karşılaştırılması tablo 4.2'de gösterilmiştir.



Şekil 4.6 Örnek 4.1.6 için gerçek çözüm ile yaklaşık çözüm grafiği

	Gerçek Çözüm	Nümerik Çözüm	Hata
Bernstein Polinomları	-0.0383556	-0.0388085	0.0004529
Spline Fonksiyonu	-0.0383556	-0.0413462	0.0029906

Tablo 4.2 $y'' + y' + y = x^2$ sınır değer problemi için karşılaştırma

5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada $y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x) \quad y(x_0) = a \quad y(x_n) = b$ tipindeki sınır değer problemlerinin Spline fonksiyonları ile nümerik çözümü incelenmiştir. Benzer şekilde temel Bernstein polinomları incelenerek $ay'' + by' + cy + f(x) = 0$ $y(0) = 0 \quad y(1) = 0$ tipindeki sınır değer problemlerinin temel Bernstein polinomları ile çözümü incelenmiş, yaklaşık çözüm ile tam çözümler karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmada hatanın çok küçük olması iki yöntemin de uygunluğunu ortaya koymaktadır. Ayrıca ele alınan bir sınır değer probleminin Spline fonksiyonları ve Bernstein polinomları ile çözümünde karşılaşılan hata payları da karşılaştırılmıştır.

Bu çalışmada ele alınan diferansiyel denklemler lineer ve sabit katsayılıdır. Bir başka çalışmada değişken katsayılı diferansiyel denklemler üzerine olabilir. Ayrıca zaman darlığından yapılamayan hata analizini içeren bir çalışma düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Albasiny, E.L., Hoskins, W.D., 1969. Cubic spline solutions to two-point boundary value problems, *Comput. J.*, 12, 151-153.

Bayram, M., 2002. *Nümerik Analiz*, Aktif Yayınevi, İstanbul, 499s.

Bhatti, M.I., Bracken, P., 2007. Solutions of differential equations in a Bernstein polynomial basis, *J. Comput. Appl. Math.*, 205, 272-280.

Dağ, İ., *Diferensiyel Denklemlerin Sayısal Çözümünde Spline Fonksiyon Uygulamaları*, Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi, Kayseri, 1987.

Davis, J.P., 1975. *Interpolation and Approximation*, Dover, New York, 393p.

Doğan, M., *q-Integer Noktalarında B-Spline Fonksiyonu ve Özellikleri*, Yüksek Lisans Tezi, Muğla Üniversitesi, 2008.

Dönmez, D., *Diferansiyel Denklemlerin B-Spline İle Çözümleri Hakkında*, Yüksek Lisans Tezi, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa, 2008.

Evans, G., Blackledge, J., Yardley, P., 2000. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Springer, New York, 290p.

Finlayson, B.A., 1972. *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Akademic Press, New York, 412p.

Isaacson, E., Keller, H.B., 1994. *Analysis Of Numerical Methods*, Dover, New York, 535p.

Joy, K.I., 2000. *Bernstein Polynomials*, University of California, 12p.

Kahvecioğlu, S., *İki Noktalı Sınır Değer Problemlerinin Çözümünde Kullanılan Nümerik Analiz Metotlarının İncelenmesi*, Yüksek Lisans Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir, 2004.

Özdemir, A., *Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Spline Fonksiyonu Yardımıyla Çözümü ve Bir Uygulama*, Sakarya Üniversitesi, 1996.

Ralston, A., Rabinowitz, P., 2001. *A First Course In Numerical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 576p.

Türker, E.S., Can, E., 1997. *Bilgisayar Uygulamalı Sayısal Analiz Yöntemleri*, Değişim Yayınevi, Sakarya, 460s.

EKLER

1. lineerspline.m

```
function sonuc = lineerspline(x,y,xx)
n=length(x);
if (xx<x(1)) || (xx>x(n));
   error('Aralık dışında değer girdiniz');
end;
for i = 1:n-1;
   if (xx>=x(i)) && (xx<=x(i+1));
      j=i;
      break;
   end;
end;
sonuc = y(j)*(xx-x(j+1))/(x(j)-x(j+1))+y(j+1)*(xx-x(j))/(x(j+1)-x(j));
```

2. kuadratikspline.m

```
function sonuc = kuadratikspline(x,y,xx)
n=length(x);
if (xx<x(1)) || (xx>x(n));
   error('Aralık dışında değer girdiniz');
end;
t=1:1:n;
   t(1)=(y(2)-y(1))/(x(2)-x(1));
for i = 2:n;
   t(i)=2.0*(y(i)-y(i-1))/(x(i)-x(i-1))-t(i-1);
end;
for i = 1:n-1;
   if (xx>=x(i)) && (xx<=x(i+1));
      j=i;
      break;
   end;
end;
sonuc = (xx-x(j))*( 0.5*(t(j+1)-t(j))*(xx-x(j))/(x(j+1)-x(j))+t(j))+y(j);
```

3. kubikspline.m

```
function sonuc = kubikspline(x,y,xx)
n=length(x);
if (xx<x(1)) || (xx>x(n));
   error('Aralık dışında değer girdiniz');
end;
h1=1:1:n; h2=1:1:n;
u1=1:1:n; u2=1:1:n;
for i=1:n-1;
   h1(i)=x(i+1)-x(i);
   h2(i)=(y(i+1)-y(i))/h1(i);
end;
u1(2)=2.0*(h1(1)+h1(2));
u2(2)=6.0*(h2(2)-h2(1));
for i=3:n-1;
   u1(i)=2.0*(h1(i)+h1(i-1))-h1(i-1)^2/u1(i-1);
   u2(i)=6.0*(h2(i)-h2(i-1))-h1(i-1)*u2(i-1)/u1(i-1);
end;
t(1)=0.0;
t(n)=0.0;
for i=n-1:-1:2;
   t(i)=(u2(i)-h1(i)*t(i+1))/u1(i);
end;
for i = 1:n-1;
   if (xx>=x(i)) && (xx<=x(i+1));
      j=i;
      break;
   end;
end;
hm=x(j+1)-x(j);
a1=xx-x(j);
a2=x(j+1)-xx;
sonuc = (t(j+1)*a1^3+t(j)*a2^3)/(6.0*hm) ...
+a1*( y(j+1)/hm-hm*t(j+1)/6.0 )+a2*( y(j)/hm-hm*t(j)/6.0 );
```

ÖZGEÇMİŞ

10.02.1984 doğumlu olan Sertan ALKAN ilkokulu Samsun'un Havza ilçesinde, ortaokul ve liseyi Amasya'da bitirmiştir. 2002 yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazanmış ve 2006 yılında mezun olmuştur. 2008 yılında Muğla Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisansa başlamıştır. 2010 yılında Bartın Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Yönetim Bilişim Sistemleri Bölümü'ne uzman olarak atanmıştır.