KESİKLİ TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN SİSTEMATİK MOMENTLERİ

Hidayet YALÇIN

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR

OCAK–2011

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİKLİ TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN SİSTEMATİK MOMENTLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hidayet YALÇIN

(08121109)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 11 Ocak 2011

OCAK–2011

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİKLİ TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN SİSTEMATİK MOMENTLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hidayet YALÇIN

(08121109)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 11 Ocak 2011

Tezin Savunulduğu Tarih: 27 Ocak 2011

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Necdet ÇATALBAŞ (F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Mahmut IŞIK (F.Ü)

OCAK-2011

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanmasında ve yürütülmesinde çalışmalarım süresince benden destek ve ilgilerini esirgemeyen bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım değerli hocam sayın Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR' e en içten teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Hidayet YALÇIN

ELAZIĞ – 2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tez, dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin olasılık ve dağılım fonksiyonları incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin beklenen değer, varyans ve kovaryansı elde edilmiştir.

Son bölümde, kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin momentleriyle ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sıralı İstatistikler, Bağımsız Tesadüfi Değişkenler, Aynı Dağılımlı Olmayan Tesadüfi Değişkenler, Kesikli Tesadüfi Değişkenler, Dağılım Fonksiyonu, Olasılık Fonksiyonu, Beklenen Değer, Varyans, Kovaryans.

SUMMARY

Systematic Moments of Order Statistics of Discrete Random Variables

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, the fundamental definitions and theorems are given.

In the second chapter, the probability and distribution functions of order statistics of independent and nonidentically distributed discrete random variables are examined.

In the third chapter, the expected value, variance and covariance of order statistics of independent and nonidentically distributed discrete random variables are obtained.

In the last chapter, the some results related to the moments of order statistics of discrete random variables are given.

Key Words: Order statistics, Independent Random Variables, Nonidentically Distributed Random Variables, Discrete Random Variables, Distribution Function, Probability Function, Expected Value, Variance, Covariance.

SEMBOLLER LİSTESİ

F : Dağılım fonksiyonu

f : Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$[\underset{i_1}{\mathrm{a}_1}\ \underset{i_2}{\mathrm{a}_2} \ldots]$: $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots$ kolon vektörleri olmak üzere, a_1'in i_1 defa, a_2'nin i_2 defa, … alınması ile oluşturulan matris

$[\mathrm{A}][s/\cdot)$: $s \subset N$ olmak üzere, indisleri s'de olan satırların alınması ile A'dan oluşturulan matris

n_s : s'nin eleman sayısı

$\sum_P$: $(1, 2, \ldots, n)$'nin bütün $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ permütasyonları üzerinden toplam

1. GİRİŞ

Sıralı istatistikler, istatistik teorisinde oldukça önemlidir. Çünkü; sıralı istatistiklerin dağılımları, örneklemin alındığı dağılımdan bağımsızdır.

Bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılımları, Khatri [1], tarafından incelenmiştir. Vaughan ve Venables [2], permanent yardımıyla bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin olasılık yoğunluk fonksiyonlarını incelemişlerdir. Corley [3], sürekli çok değişkenli tesadüfi değişkenlerin farklı anlamlarda sıralı istatistiklerini tanımlamıştır. Balakrishnan [4], bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli bir anakütleden gelen sıralı istatistikler için sağlanan bazı bağıntılar elde etmiştir. Bu bağıntılardan bazıları, aynı zamanda bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistikleri için de sağlanmaktadır. Reiss [5], bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılım ve yoğunluk fonksiyonları için birçok bağıntı elde etmiştir. Nagaraja [6,7], bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli bir anakütleden gelen sıralı istatistiklerin temel yapılarını incelemiştir. David [8], Arnold vd. [9] ve Gan ve Bain [10], bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin olasılık ve dağılım fonksiyonlarını elde etmişlerdir.

Bu çalışmada; bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılımları ve momentleri farklı şekillerde ifade edilmiştir.

1.1. Temel Tanımlar

Tanım 1.1.1. Bir tesadüfi değişken, sonlu veya sayılabilir sonsuzlukta değerler alabiliyorsa bu tesadüfi değişkene *kesikli tesadüfi değişken* denir [11].

Tanım 1.1.2. X, kesikli bir tesadüfi değişken olsun.

$i.\ f(x) \geq 0,$

$ii.\ \sum_{x} f(x) = 1.$

koşulları sağlayan $f(x)$'e X'in *olasılık fonksiyonu* denir [11].

Tanım 1.1.3. X, olasılık fonksiyonu f olan kesikli tesadüfi değişken olsun. X'in *dağılım fonksiyonu*,

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f(u)$$

şeklinde tanımlanır [11].

Tanım 1.1.4. X, olasılık fonksiyonu $f(x)$ olan bir tesadüfi değişken ve Y'de olasılık fonksiyonu $f(y)$ olan bir tesadüfi değişken olsun. Ayrıca, X ve Y'nin bileşik olasılık fonksiyonu $f(x, y)$ olsun. Eğer,

$$f(x, y) = f(x)\, f(y)$$

eşitliği sağlanıyorsa X ve Y'ye *bağımsız tesadüfi değişkenler* denir [11].

Tanım 1.1.5. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tesadüfi değişkenlerinin meydana gelme sırası değil büyüklüklerinin sırası göz önüne alınırsa bu tesadüfi değişkenlerin *sıralı istatistikleri*,

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \ldots \leq X_{n:n}$$

olarak ifade edilir.

$X_{r:n}$, r-inci sıralı istatistik denir.

Buradan,

$$X_{1:n} = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

ve

$$X_{n:n} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

yazılabilir [5].

Tanım 1.1.6. A=(a_{ij}), $n \times n$ tipinde karesel bir matris olsun. A matrisinin permanenti,

$$per\ \mathrm{A} = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

olarak ifade edilir. Burada; S_n, (1, 2,…, n)'nin permütasyonlarının kümesidir. Yani; permanent, açılımındaki bütün terimlerin işaretlerinin pozitif olması hariç determinant ile aynıdır [12].

Tanım 1.1.7. X, olasılık fonksiyonu f olan kesikli tesadüfi değişken olsun. X'in beklenen değeri,

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x\ f(x)$$

olarak ifade edilir [13].

Tanım 1.1.8. X tesadüfi değişkeninin varyansı,

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

olarak ifade edilir [13].

Tanım 1.1.9. X ve Y tesadüfi değişkenlerinin beklenen değerleri sırasıyla $E(X)$ ve $E(Y)$ ise X ve Y arasındaki kovaryans,

$$Cov(X,Y) = E(X\,Y) - E(X)E(Y)$$

olarak ifade edilir [13].

Teorem 1.1.1. Bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin r-inci sıralı istatistiğinin olasılık fonksiyonu, $F(x-) = P(X < x)$ ve $x = 0, 1, 2, \ldots$ olmak üzere

$$f_{r:n}(x) = \sum_{m=0}^{n-r} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{n![F(x-)]^{r-1-k}[f(x)]^{k+1+m}[1-F(x)]^{n-m-r}}{(r-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-r)!}$$

veya

$$f_{r:n}(x) = \int_{F(x-)}^{F(x)} \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} v^{r-1}(1-v)^{n-r}\,dv$$

şeklinde ifade edilir [1].

Teorem 1.1.2. Bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$'nin bileşik olasılık fonksiyonu, $1 \le r < s \le n$, $x_1 \le x_2$ ve $k_2 + m_1 \le s-1-r$ olmak üzere

$$f_{r,s:n}(x_1, x_2) = \sum_{m_2=0}^{n-s} \sum_{k_2=0}^{s-1-r} \sum_{m_1=0}^{s-1-r} \sum_{k_1=0}^{r-1}$$

$$\frac{n![F(x_1-)]^{r-1-k_1}[f(x_1)]^{k_1+1+m_1}[F(x_2-)-F(x_1)]^{s-1-k_2-m_1-r}[f(x_2)]^{k_2+1+m_2}[1-F(x_2)]^{n-m_2-s}}{(r-1-k_1)!\,(k_1+1+m_1)!\,(s-1-k_2-m_1-r)!\,(k_2+1+m_2)!\,(n-m_2-s)!}$$

veya

$$f_{r,s:n}(x_1, x_2) = \int_{F(x_1-)}^{F(x_1)} \int_{F(x_2-)}^{F(x_2)} \frac{n!}{(r-1)!\,(s-1-r)!\,(n-s)!} v_1^{r-1}(v_2-v_1)^{s-1-r}$$

$$\cdot (1-v_2)^{n-s}\,dv_2\,dv_1$$

şeklinde ifade edilir [1].

Teorem 1.1.3. Bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin r-inci sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu,

$$F_{r:n}(x)=\sum_{x=0}^{x}\left\{\sum_{m=0}^{n-r}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{n![F(x-)]^{r-1-k}[f(x)]^{k+1+m}[1-F(x)]^{n-m-r}}{(r-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-r)!}\right\}$$

veya

$$F_{r:n}(x)=\int_{0}^{F(x)}\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}v^{r-1}(1-v)^{n-r}\,dv$$

şeklinde ifade edilir [1].

Teorem 1.1.4. Bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$'nin bileşik olasılık fonksiyonu, $1\le r<s\le n$ ve $x_1\le x_2$ olmak üzere

$$F_{r,s:n}(x_1,x_2)=\sum_{x_1=0}^{x_1}\sum_{x_2=x_1}^{x_2}\left\{\sum_{m_2=0}^{n-s}\sum_{k_2=0}^{s-1-r}\sum_{m_1=0}^{s-1-r}\sum_{k_1=0}^{r-1}\right.$$

$$\left.\frac{n![F(x_1-)]^{r-1-k_1}[f(x_1)]^{k_1+1+m_1}[F(x_2-)-F(x_1)]^{s-1-k_2-m_1-r}[f(x_2)]^{k_2+1+m_2}[1-F(x_2)]^{n-m_2-s}}{(r-1-k_1)!\,(k_1+1+m_1)!\,(s-1-k_2-m_1-r)!\,(k_2+1+m_2)!\,(n-m_2-s)!}\right\}$$

veya

$$F_{r,s:n}(x_1,x_2)=\int_{0}^{F(x_1)}\int_{v_1}^{F(x_2)}\frac{n!}{(r-1)!\,(s-1-r)!\,(n-s)!}v_1^{r-1}(v_2-v_1)^{s-1-r}$$

$$\cdot(1-v_2)^{n-s}\,dv_2\,dv_1$$

şeklinde ifade edilir [1].

2. BAĞIMSIZ VE AYNI DAĞILIMLI OLMAYAN KESİKLİ TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN DAĞILIMLARI

Bu bölümde, bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin olasılık ve dağılım fonksiyonları verilecektir.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenler olsun. X_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ tesadüfi değişkeninin olasılık fonksiyonu f_i ve dağılım fonksiyonu F_i olsun. Bu tesadüfi değişkenlerden elde edilen sıralı istatistikler, $X_{1:n} \le X_{2:n} \le \dots \le X_{n:n}$ olsun.

Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin r-inci sıralı istatistiğinin olasılık fonksiyonu, $x = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere

$$f_{r:n}(x) = \sum_{m=0}^{n-r} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{(r-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-r)!}\, per[\underbrace{\mathrm{F}(x-)}_{r-1-k} \quad \underbrace{\mathrm{f}(x)}_{k+1+m} \quad \underbrace{1-\mathrm{F}(x)}_{n-m-r}] \qquad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada; $F_i(x-) = P(X_i < x)$ olmak üzere

$$\mathrm{F}(x-) = (F_1(x-), F_2(x-), \dots, F_n(x-))',$$

$$\mathrm{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))' \text{ ve}$$

$$1-\mathrm{F}(x)=(1-F_1(x),1-F_2(x),...,1-F_n(x))'$$

kolon vektörleridir.

(2.1)'de permanent açılımı kullanılırsa bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin *r*-inci sıralı istatistiğinin olasılık fonksiyonu,

$$f_{r:n}(x)=\sum_{m=0}^{n-r}\sum_{k=0}^{r-1}\left\{\frac{1}{(r-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-r)!}\right.$$
$$\left.\cdot\sum_{P}\left(\prod_{\ell=1}^{r-1-k}F_{i_\ell}(x-)\right)\left(\prod_{\ell=r-k}^{r+m}f_{i_\ell}(x)\right)\left(\prod_{\ell=r+m+1}^{n}[1-F_{i_\ell}(x)]\right)\right\} \tag{2.2}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin *r*-inci sıralı istatistiğinin olasılık fonksiyonunun integral formu,

$$f_{r:n}(x)=\frac{1}{(r-1)!\,(n-r)!}\sum_{n_\zeta}\int_{F_{\zeta'}(x-)}^{F_{\zeta'}(x)}per[\underset{r-1}{\mathrm{v}}\quad\underset{n-r}{1-\mathrm{v}}][\zeta/.)\,dv_{\zeta'} \tag{2.3}$$

şeklinde ifade edilir. Burada; $\zeta=\{\zeta^{(1)},\zeta^{(2)},...,\zeta^{(n-1)}\}$ ve $\zeta\cup\zeta'=\{1,2,...,n\}$ olmak üzere $\sum_{n_\zeta}$, ζ üzerinden toplamı ifade eder. Ayrıca;

$$v_{\zeta^{(l)}}=[v_{\zeta'}-F_{\zeta'}(x-)]\frac{f_{\zeta^{(l)}}(x)}{f_{\zeta'}(x)}+F_{\zeta^{(l)}}(x-)$$

olmak üzere,

$$\mathrm{v}=(v_1,v_2,...,v_n)'$$

ve

$$1-\mathrm{v}=(1-v_1,1-v_2,...,1-v_n)'$$

kolon vektörleridir.

(2.3)'de permanent açılımı kullanılırsa bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin *r*-inci sıralı istatistiğinin olasılık fonksiyonunun integral formu,

$$f_{r:n}(x)=\frac{1}{(r-1)!\,(n-r)!}\sum_P\int_{F_{i_r}(x-)}^{F_{i_r}(x)}\left(\prod_{l=1}^{r-1}v_{i_l}\right)\left(\prod_{l=r+1}^{n}(1-v_{i_l})\right)dv_{i_r} \tag{2.4}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada; v_{i_l} değişkeni,

$$v_{i_l} = [v_{i_r} - F_{i_r}(x-)]\frac{f_{i_l}(x)}{f_{i_r}(x)} + F_{i_l}(x-)$$

şeklindedir.

$X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$'nin bileşik olasılık fonksiyonu, $1 \le r < s \le n$, $x_1 \le x_2$ ve $k_2 + m_1 \le s-1-r$ olmak üzere

$$f_{r,s:n}(x_1, x_2) = \sum_{m_2=0}^{n-s} \sum_{k_2=0}^{s-1-r} \sum_{m_1=0}^{s-1-r} \sum_{k_1=0}^{r-1}$$

$$\left[\frac{1}{(r-1-k_1)!\,(k_1+1+m_1)!\,(s-1-k_2-m_1-r)!\,(k_2+1+m_2)!\,(n-m_2-s)!} \right.$$

$$\left. \cdot\, per[\underset{r-1-k_1}{\mathrm{F}(x_1-)} \quad \underset{k_1+1+m_1}{\mathrm{f}(x_1)} \quad \underset{s-1-k_2-m_1-r}{\mathrm{F}(x_2-)-\mathrm{F}(x_1)} \quad \underset{k_2+1+m_2}{\mathrm{f}(x_2)} \quad \underset{n-m_2-s}{1-\mathrm{F}(x_2)}] \right] \tag{2.5}$$

şeklinde ifade edilir.

(2.5)'de permanent açılımı kullanılırsa bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik olasılık fonksiyonu,

$$f_{r,s:n}(x_1, x_2) = \sum_{m_2=0}^{n-s} \sum_{k_2=0}^{s-1-r} \sum_{m_1=0}^{s-1-r} \sum_{k_1=0}^{r-1}$$

$$\left\{ \frac{1}{(r-1-k_1)!\,(k_1+1+m_1)!\,(s-1-k_2-m_1-r)!\,(k_2+1+m_2)!\,(n-m_2-s)!} \right.$$

$$\cdot \sum_P \left(\prod_{\ell=1}^{r-1-k_1} F_{i_\ell}(x_1-) \right) \left(\prod_{\ell=r-k_1}^{r+m_1} f_{i_\ell}(x_1) \right) \left(\prod_{\ell=r+m_1+1}^{s-1-k_2} [F_{i_\ell}(x_2-) - F_{i_\ell}(x_1)] \right)$$

$$\left. \cdot \left(\prod_{\ell=s-k_2}^{s+m_2} f_{i_\ell}(x_2) \right) \left(\prod_{\ell=s+m_2+1}^{n} [1 - F_{i_\ell}(x_2)] \right) \right\} \tag{2.6}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$'nin bileşik olasılık fonksiyonunun integral formu,

$$f_{r,s:n}(x_1, x_2) = \frac{1}{(r-1)!\,(s-1-r)!\,(n-r)!} \sum_{n_{\xi_1},\, n_{\xi_2}} \int_{F_{\xi_3^{(1)}}(x_1-)}^{F_{\xi_3^{(1)}}(x_1)} \int_{F_{\xi_2^{(1)}}(x_2-)}^{F_{\xi_2^{(1)}}(x_2)}$$

$$per[\underset{r-1}{\mathrm{v}^{(1)}} \quad \underset{s-1-r}{\mathrm{v}^{(2)} - \mathrm{v}^{(1)}} \quad \underset{n-s}{1 - \mathrm{v}^{(2)}}][\xi_1 / .)\, dv^{(2)}_{\xi_2^{(1)}}\, dv^{(1)}_{\xi_3^{(1)}} \tag{2.7}$$

şeklinde ifade edilir. Burada; $\xi_1 = \{\xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}, ..., \xi_1^{(n-2)}\}$, $\xi_2 = \{\xi_2^{(1)}\}$, $\xi_3 = \{\xi_3^{(1)}\}$, $\nu \neq \vartheta$ için $\xi_\nu \cap \xi_\vartheta = \phi$ ve $\bigcup_{\ell=1}^{3} \xi_\ell = \{1, 2, ..., n\}$ olmak üzere $\sum_{n_{\xi_1},\, n_{\xi_2}}$, $\bigcup_{\ell=1}^{2} \xi_\ell$ üzerinden toplamı ifade eder. Ayrıca;

$$v^{(1)}_{\xi_1^{(\ell)}} = [v^{(1)}_{\xi_3^{(1)}} - F_{\xi_3^{(1)}}(x_1-)] \frac{f_{\xi_1^{(\ell)}}(x_1)}{f_{\xi_3^{(1)}}(x_1)} + F_{\xi_1^{(\ell)}}(x_1-)$$

ve

$$v^{(2)}_{\xi_1^{(\ell)}} = [v^{(2)}_{\xi_2^{(1)}} - F_{\xi_2^{(1)}}(x_2-)] \frac{f_{\xi_1^{(\ell)}}(x_2)}{f_{\xi_2^{(1)}}(x_2)} + F_{\xi_1^{(\ell)}}(x_2-)$$

olmak üzere,

$$\mathrm{v}^{(.)} = (v_1^{(.)}, v_2^{(.)}, \ldots, v_n^{(.)})'$$

ve

$$1-\mathrm{v}^{(.)} = (1-v_1^{(.)}, 1-v_2^{(.)}, \ldots, 1-v_n^{(.)})'$$

kolon vektörleridir.

(2.7)'de permanent açılımı kullanılırsa bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$'nin bileşik olasılık fonksiyonunun integral formu,

$$f_{r,s:n}(x_1, x_2) = \frac{1}{(r-1)!\,(s-1-r)!\,(n-s)!} \sum_P \int_{F_{i_r}(x_1-)}^{F_{i_r}(x_1)} \int_{F_{i_s}(x_2-)}^{F_{i_s}(x_2)} \left(\prod_{l=1}^{r-1} v_{i_l}^{(1)} \right) \left(\prod_{l=r+1}^{s-1} (v_{i_l}^{(2)} - v_{i_l}^{(1)}) \right)$$

$$\cdot \left(\prod_{l=s+1}^{n} (1-v_{i_l}^{(2)}) \right) dv_{i_s}^{(2)}\, dv_{i_r}^{(1)} \qquad (2.8)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada; $v_{i_l}^{(1)}$ ve $v_{i_l}^{(2)}$ değişkenleri,

$$v_{i_l}^{(1)} = [v_{i_r}^{(1)} - F_{i_r}(x_1-)]\frac{f_{i_l}(x_1)}{f_{i_r}(x_1)} + F_{i_l}(x_1-)$$

ve

$$v_{i_l}^{(2)} = [v_{i_s}^{(2)} - F_{i_s}(x_2-)]\frac{f_{i_l}(x_2)}{f_{i_s}(x_2)} + F_{i_l}(x_2-)$$

şeklindedir.

Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin r-inci sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu,

$$F_{r:n}(x) = \sum_{x=0}^{x}\left[\sum_{m=0}^{n-r}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{1}{(r-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-r)!}per[\underset{r-1-k}{\mathrm{F}(x-)} \quad \underset{k+1+m}{\mathrm{f}(x)} \quad \underset{n-m-r}{1-\mathrm{F}(x)}]\right] \tag{2.9}$$

şeklinde ifade edilir.

(2.5)'de permanent açılımı yapılırsa bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin r-inci sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu,

$$F_{r:n}(x) = \sum_{x=0}^{x} \left\{ \sum_{m=0}^{n-r} \sum_{k=0}^{r-1} \left[\frac{1}{(r-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-r)!} \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot \sum_{P} \left(\prod_{\ell=1}^{r-1-k} F_{i_\ell}(x-) \right) \left(\prod_{\ell=r-k}^{r+m} f_{i_\ell}(x) \right) \left(\prod_{\ell=r+m+1}^{n} [1-F_{i_\ell}(x)] \right) \right] \right\} \tag{2.10}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin r-inci sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonunun integral formu,

$$F_{r:n}(x) = \frac{1}{(r-1)!\,(n-r)!} \sum_{n_\zeta} \int_0^{F_{\zeta'}(x)} per[\underset{r-1}{\mathrm{v}} \quad \underset{n-r}{1-\mathrm{v}}][\zeta\,/\,.)\, dv_{\zeta'} \tag{2.11}$$

şeklinde ifade edilir.

(2.7)’de permanent açılımı yapılırsa bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin r-inci sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonunun integral formu,

$$F_{r:n}(x) = \frac{1}{(r-1)!\,(n-r)!} \sum_{P} \int_0^{F_{i_r}(x)} \left(\prod_{l=1}^{r-1} v_{i_l} \right) \left(\prod_{l=r+1}^{n} (1-v_{i_l}) \right) dv_{i_r} \tag{2.12}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

3. BAĞIMSIZ VE AYNI DAĞILIMLI OLMAYAN KESİKLİ TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN SİSTEMATİK MOMENTLERİ

Bu bölümde, bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin beklenen değer, varyans ve kovaryansı ifade edilecektir.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenler olsun. X_i $(i=1,2,\ldots,n)$ tesadüfi değişkeninin olasılık fonksiyonu f_i ve dağılım fonksiyonu F_i olsun. Bu tesadüfi değişkenlerin büyüklüklerine göre sıralanmasıyla elde edilen sıralı istatistikler, $X_{1:n} \le X_{2:n} \le \ldots \le X_{n:n}$ olsun.

Kesikli tesadüfi değişkenlerin *r*-inci sıralı istatistiğinin beklenen değeri, $x = 0, 1, 2, \ldots$ olmak üzere

$$E(X_{r:n}) = \sum_{x=0}^{\infty} x\, f_{r:n}(x) \tag{3.1}$$

olarak ifade edilir.

(2.1) ve (2.2), (3.1)'de kullanılırsa bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$'nin beklenen değeri,

$$E(X_{r:n}) = \sum_{x=0}^{\infty} x \left[\sum_{m=0}^{n-r} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{(r-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-r)!} per\,[\underset{r-1-k}{\mathrm{F}(x-)} \quad \underset{k+1+m}{\mathrm{f}(x)} \quad \underset{n-m-r}{1-\mathrm{F}(x)}] \right] \tag{3.2}$$

veya

$$E(X_{r:n})=\sum_{x=0}^{\infty}x\left[\sum_{m=0}^{n-r}\sum_{k=0}^{r-1}\left\{\frac{1}{(r-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-r)!}\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\sum_{P}\left(\prod_{\ell=1}^{r-1-k}F_{i_\ell}(x-)\right)\left(\prod_{\ell=r-k}^{r+m}f_{i_\ell}(x)\right)\left(\prod_{\ell=r+m+1}^{n}[1-F_{i_\ell}(x)]\right)\right\}\right] \tag{3.3}$$

şeklinde elde edilir.

(2.3) ve (2.4), (3.1)'de kullanılırsa $E(X_{r:n})$ 'nin integral formu,

$$E(X_{r:n})=\sum_{x=0}^{\infty}x\;\frac{1}{(r-1)!\,(n-r)!}\sum_{n_\zeta}\int_{F_{\zeta'}(x-)}^{F_{\zeta'}(x)}per[\underset{r-1}{\mathrm{v}}\quad\underset{n-r}{1-\mathrm{v}}][\zeta\,/.)\;dv_{\zeta'} \tag{3.4}$$

veya

$$E(X_{r:n})=\sum_{x=0}^{\infty}x\;\frac{1}{(r-1)!\,(n-r)!}\sum_{P}\int_{F_{i_r}(x-)}^{F_{i_r}(x)}\left(\prod_{l=1}^{r-1}v_{i_l}\right)\left(\prod_{l=r+1}^{n}(1-v_{i_l})\right)dv_{i_r} \tag{3.5}$$

şeklinde elde edilir.

$X_{r:n}$ 'nin beklenen değeri,

$$E(X_{r:n})=\sum_{x=0}^{\infty}[1-F_{r:n}(x)] \tag{3.6}$$

olarak da ifade edilebilir.

(2.9) ve (2.10), (3.6)’da kullanılırsa $X_{r:n}$ ’nin beklenen değeri,

$$E(X_{r:n}) = \sum_{x=0}^{\infty}\left\{1-\sum_{x=0}^{x}\left[\sum_{m=0}^{n-r}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{1}{(r-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-r)!}per[\underset{r-1-k}{\mathrm{F}(x-)}\quad \underset{k+1+m}{\mathrm{f}(x)}\quad \underset{n-m-r}{1-\mathrm{F}(x)}]\right]\right\} \quad (3.7)$$

veya

$$E(X_{r:n}) = \sum_{x=0}^{\infty}\left\{1-\sum_{x=0}^{x}\sum_{m=0}^{n-r}\sum_{k=0}^{r-1}\left[\frac{1}{(r-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-r)!}\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\sum_{P}\left(\prod_{\ell=1}^{r-1-k}F_{i_\ell}(x-)\right)\left(\prod_{\ell=r-k}^{r+m}f_{i_\ell}(x)\right)\left(\prod_{\ell=r+m+1}^{n}[1-F_{i_\ell}(x)]\right)\right]\right\} \quad (3.8)$$

şeklinde elde edilir.

(2.11) ve (2.12), (3.6)’da kullanılırsa $E(X_{r:n})$ ’nin integral formu,

$$E(X_{r:n}) = \sum_{x=0}^{\infty}\left\{1-\left[\frac{1}{(r-1)!\,(n-r)!}\sum_{n_\zeta}\int_{0}^{F_{\zeta'}(x)} per[\underset{r-1}{\mathrm{v}}\quad \underset{n-r}{1-\mathrm{v}}][\zeta\,/.)\,dv_{\zeta'}\right]\right\} \quad (3.9)$$

veya

$$E(X_{r:n})=\sum_{x=0}^{\infty}\left\{1-\left[\frac{1}{(r-1)!\,(n-r)!}\sum_{P}\int_{0}^{F_{i_r}(x)}\left(\prod_{l=1}^{r-1}v_{i_l}\right)\left(\prod_{l=r+1}^{n}(1-v_{i_l})\right)dv_{i_r}\right]\right\} \tag{3.10}$$

şeklinde elde edilir.

Kesikli tesadüfi değişkenlerin r-inci sıralı istatistiğinin varyansı,

$$Var(X_{r:n})=\sum_{x=0}^{\infty}\left\{\,(2x+1)\left[1-F_{r:n}(x)\right]\,\right\}-\left[\sum_{x=0}^{\infty}[1-F_{r:n}(x)]\right]^{2} \tag{3.11}$$

olarak ifade edilir.

(2.9) ve (2.10), (3.11)'de kullanılırsa bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$'nin varyansı,

$$\begin{aligned}Var\,(X_{r:n})=&\sum_{x=0}^{\infty}\left\{(2x+1)\left[1-\sum_{x=0}^{x}\left[\sum_{m=0}^{n-r}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{1}{(r-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-r)!}\,per\,[\underset{r-1-k}{\mathrm{F}(x-)}\quad\underset{k+1+m}{\mathrm{f}(x)}\quad\underset{n-m-r}{1-\mathrm{F}(x)}]\right]\right]\right\}\\&-\left[\sum_{x=0}^{\infty}\left\{1-\sum_{x=0}^{x}\left[\sum_{m=0}^{n-r}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{1}{(r-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-r)!}\,per\,[\underset{r-1-k}{\mathrm{F}(x-)}\quad\underset{k+1+m}{\mathrm{f}(x)}\quad\underset{n-m-r}{1-\mathrm{F}(x)}]\right]\right\}\right]^{2}\end{aligned} \tag{3.12}$$

veya

$$Var(X_{r:n}) = \sum_{x=0}^{\infty} (2x+1)\left\{1-\sum_{x=0}^{x}\sum_{m=0}^{n-r}\sum_{k=0}^{r-1}\left[\frac{1}{(r-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-r)!}\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\sum_{P}\left(\prod_{\ell=1}^{r-1-k}F_{i_\ell}(x-)\right)\left(\prod_{\ell=r-k}^{r+m}f_{i_\ell}(x)\right)\left(\prod_{\ell=r+m+1}^{n}[1-F_{i_\ell}(x)]\right)\right]\right\}$$

$$-\left[\sum_{x=0}^{\infty}\left\{1-\sum_{x=0}^{x}\sum_{m=0}^{n-r}\sum_{k=0}^{r-1}\left[\frac{1}{(r-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-r)!}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\cdot\sum_{P}\left(\prod_{\ell=1}^{r-1-k}F_{i_\ell}(x-)\right)\left(\prod_{\ell=r-k}^{r+m}f_{i_\ell}(x)\right)\left(\prod_{\ell=r+m+1}^{n}[1-F_{i_\ell}(x)]\right)\right]\right\}\right]^2 \tag{3.13}$$

şeklinde elde edilir.

(2.11) ve (2.12), (3.11)'da kullanılırsa $Var(X_{r:n})$'nin integral formu,

$$Var(X_{r:n}) = \sum_{x=0}^{\infty}\left\{(2x+1)\left[1-\left[\frac{1}{(r-1)!\,(n-r)!}\sum_{n_\zeta}\int_0^{F_{\zeta'}(x)} per[\underset{r-1}{\mathrm{v}}\quad \underset{n-r}{1-\mathrm{v}}][\zeta\,/.)\,dv_{\zeta'}\right]\right]\right\}$$

$$-\left[\sum_{x=0}^{\infty}\left\{1-\left[\frac{1}{(r-1)!\,(n-r)!}\sum_{n_\zeta}\int_0^{F_{\zeta'}(x)} per[\underset{r-1}{\mathrm{v}}\quad \underset{n-r}{1-\mathrm{v}}][\zeta\,/.)\,dv_{\zeta'}\right]\right\}\right]^2 \tag{3.14}$$

veya

$$Var(X_{r:n}) = \sum_{x=0}^{\infty}\left\{(2x+1)\left[1-\left[\frac{1}{(r-1)!\,(n-r)!}\sum_{P}\int_0^{F_{i_r}(x)}\left(\prod_{l=1}^{r-1}v_{i_l}\right)\left(\prod_{l=r+1}^{n}(1-v_{i_l})\right)dv_{i_r}\right]\right]\right\}$$

$$-\left[\sum_{x=0}^{\infty}\left\{1-\left[\frac{1}{(r-1)!\,(n-r)!}\sum_{P}\int_0^{F_{i_r}(x)}\left(\prod_{l=1}^{r-1}v_{i_l}\right)\left(\prod_{l=r+1}^{n}(1-v_{i_l})\right)dv_{i_r}\right]\right\}\right]^2 \tag{3.15}$$

şeklinde elde edilir.

Kesikli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ arasındaki kovaryans, $1 \le r < s \le n$ ve $x_1 \le x_2$ olmak üzere

$$Cov(X_{r:n}, X_{s:n}) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=x_1}^{\infty} x_1 x_2 \, f_{r,s:n}(x_1, x_2) - \left[\sum_{x_1=0}^{\infty} x_1 \, f_{r:n}(x_1) \right] \left[\sum_{x_2=0}^{\infty} x_2 \, f_{s:n}(x_2) \right] \quad (3.16)$$

şeklinde ifade edilir.

(2.1) ve (2.5), (2.2) ve (2.6), (3.16)'da kullanılırsa bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ arasındaki kovaryans,

$$Cov(X_{r:n}, X_{s:n}) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=x_1}^{\infty} x_1 x_2 \sum_{m_2=0}^{n-s} \sum_{k_2=0}^{s-1-r} \sum_{m_1=0}^{s-1-r} \sum_{k_1=0}^{r-1}$$

$$\left[\frac{1}{(r-1-k_1)!\,(k_1+1+m_1)!\,(s-1-k_2-m_1-r)!\,(k_2+1+m_2)!\,(n-m_2-s)!} \right.$$

$$\left. \cdot\, per[\underset{r-1-k_1}{\mathrm{F}(x_1-)} \quad \underset{k_1+1+m_1}{\mathrm{f}(x_1)} \quad \underset{s-1-k_2-m_1-r}{\mathrm{F}(x_2-)-\mathrm{F}(x_1)} \quad \underset{k_2+1+m_2}{\mathrm{f}(x_2)} \quad \underset{n-m_2-s}{1-\mathrm{F}(x_2)} \right]$$

$$-\left[\sum_{x_1=0}^{\infty} x_1 \sum_{m=0}^{n-r} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{(r-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-r)!} \, per[\underset{r-1-k}{\mathrm{F}(x_1-)} \quad \underset{k+1+m}{\mathrm{f}(x_1)} \quad \underset{n-m-r}{1-\mathrm{F}(x_1)}] \right]$$

$$\cdot \left[\sum_{x_2=0}^{\infty} x_2 \sum_{m=0}^{n-s} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{(s-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-s)!} \, per[\underset{s-1-k}{\mathrm{F}(x_2-)} \quad \underset{k+1+m}{\mathrm{f}(x_2)} \quad \underset{n-m-s}{1-\mathrm{F}(x_2)}] \right] \quad (3.17)$$

veya

$$Cov(X_{r:n}, X_{s:n}) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=x_1}^{\infty} x_1 x_2 \sum_{m_2=0}^{n-s} \sum_{k_2=0}^{s-1-r} \sum_{m_1=0}^{s-1-r} \sum_{k_1=0}^{r-1}$$

$$\left\{ \frac{1}{(r-1-k_1)!\,(k_1+1+m_1)!\,(s-1-k_2-m_1-r)!\,(k_2+1+m_2)!\,(n-m_2-s)!} \right.$$

$$\cdot \sum_P \left(\prod_{\ell=1}^{r-1-k_1} F_{i_\ell}(x_1-) \right) \left(\prod_{\ell=r-k_1}^{r+m_1} f_{i_\ell}(x_1) \right) \left(\prod_{\ell=r+m_1+1}^{s-1-k_2} [F_{i_\ell}(x_2-) - F_{i_\ell}(x_1)] \right)$$

$$\left. \cdot \left(\prod_{\ell=s-k_2}^{s+m_2} f_{i_\ell}(x_2) \right) \left(\prod_{\ell=s+m_2+1}^{n} [1-F_{i_\ell}(x_2)] \right) \right\}$$

$$-\left[\sum_{x_1=0}^{\infty} x_1 \sum_{m=0}^{n-r} \sum_{k=0}^{r-1} \left\{ \frac{1}{(r-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-r)!} \right. \right.$$

$$\left. \left. \cdot \sum_P \left(\prod_{\ell=1}^{r-1-k} F_{i_\ell}(x_1-) \right) \left(\prod_{\ell=r-k}^{r+m} f_{i_\ell}(x_1) \right) \left(\prod_{\ell=r+m+1}^{n} [1-F_{i_\ell}(x_1)] \right) \right\} \right]$$

$$\cdot \left[\sum_{x_2=0}^{\infty} x_2 \sum_{m=0}^{n-s} \sum_{k=0}^{s-1} \left\{ \frac{1}{(s-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-s)!} \right. \right.$$

$$\left. \left. \cdot \sum_P \left(\prod_{\ell=1}^{s-1-k} F_{i_\ell}(x_2-) \right) \left(\prod_{\ell=s-k}^{s+m} f_{i_\ell}(x_2) \right) \left(\prod_{\ell=s+m+1}^{n} [1-F_{i_\ell}(x_2)] \right) \right\} \right] \tag{3.18}$$

şeklinde elde edilir.

(2.3) ve (2.7), (2.4) ve (2.8), (3.16)'da kullanılırsa $Cov(X_{r:n}, X_{s:n})$ 'nin integral formu,

$$Cov(X_{r:n}, X_{s:n}) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=x_1}^{\infty} x_1\, x_2 \frac{1}{(r-1)!\,(s-1-r)!\,(n-r)!} \sum_{n_{\xi_1}\, n_{\xi_2}} \int_{F_{\xi_3^{(1)}}(x_1-)}^{F_{\xi_3^{(1)}}(x_1)} \int_{F_{\xi_2^{(1)}}(x_2-)}^{F_{\xi_2^{(1)}}(x_2)}$$

$$per[\underset{r-1}{\mathrm{v}^{(1)}} \quad \underset{s-1-r}{\mathrm{v}^{(2)} - \mathrm{v}^{(1)}} \quad \underset{n-s}{1-\mathrm{v}^{(2)}}][\xi_1 /.)\, dv^{(2)}_{\xi_2^{(1)}}\; dv^{(1)}_{\xi_3^{(1)}}$$

$$-\left[\sum_{x_1=0}^{\infty} x_1 \frac{1}{(r-1)!\,(n-r)!} \sum_{n_\zeta} \int_{F_{\zeta'}(x_1-)}^{F_{\zeta'}(x_1)} per[\underset{r-1}{\mathrm{v}} \quad \underset{n-r}{1-\mathrm{v}}][\zeta /.)\, dv_{\zeta'}\right]$$

$$\cdot\left[\sum_{x_2=0}^{\infty} x_2 \frac{1}{(r-1)!\,(n-r)!} \sum_{n_\zeta} \int_{F_{\zeta'}(x_2-)}^{F_{\zeta'}(x_2)} per[\underset{r-1}{\mathrm{v}} \quad \underset{n-r}{1-\mathrm{v}}][\zeta /.)\, dv_{\zeta'}\right] \tag{3.19}$$

veya

$$Cov(X_{r:n}, X_{s:n}) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=x_1}^{\infty} x_1\, x_2 \frac{1}{(r-1)!\,(s-1-r)!\,(n-s)!} \sum_{P} \int_{F_{i_r}(x_1-)}^{F_{i_r}(x_1)} \int_{F_{i_s}(x_2-)}^{F_{i_s}(x_2)}$$

$$\left(\prod_{l=1}^{r-1} v^{(1)}_{i_l}\right)\left(\prod_{l=r+1}^{s-1} (v^{(2)}_{i_l} - v^{(1)}_{i_l})\right)\left(\prod_{l=s+1}^{n} (1-v^{(2)}_{i_l})\right) dv^{(2)}_{i_s}\; dv^{(1)}_{i_r}$$

$$-\left[\sum_{x_1=0}^{\infty} x_1 \frac{1}{(r-1)!\,(n-r)!} \sum_{P} \int_{F_{i_r}(x_1-)}^{F_{i_r}(x_1)} \left(\prod_{l=1}^{r-1} v_{i_l}\right)\left(\prod_{l=r+1}^{n} (1-v_{i_l})\right) dv_{i_r}\right]$$

$$\cdot\left[\sum_{x_2=0}^{\infty} x_2 \frac{1}{(s-1)!\,(n-s)!} \sum_{P} \int_{F_{i_s}(x_2-)}^{F_{i_s}(x_2)} \left(\prod_{l=1}^{s-1} v_{i_l}\right)\left(\prod_{l=s+1}^{n} (1-v_{i_l})\right) dv_{i_s}\right] \tag{3.20}$$

şeklinde elde edilir.

4. SONUÇLAR

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenler olsun. X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tesadüfi değişkeninin olasılık fonksiyonu f_i ve dağılım fonksiyonu F_i olsun. Burada, $f_i = f$ ve $F_i = F$ alınırsa $X_1, X_2, \ldots, X_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenler elde edilir. Bu yaklaşımla, aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 4.1. Bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin *r*-inci sıralı istatistiğinin beklenen değeri,

$$E(X_{r:n}) = \sum_{x=0}^{\infty} x \left[\sum_{m=0}^{n-r} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{n![F(x-)]^{r-1-k}[f(x)]^{k+1+m}[1-F(x)]^{n-m-r}}{(r-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-r)!} \right] \tag{4.1}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (3.2), (3.3), (3.7) veya (3.8)'de $f_i = f$ ve $F_i = F$ alınırsa (4.1) elde edilir.

Sonuç 4.2. Bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin *r*-inci sıralı istatistiğinin beklenen değerinin integral formu,

$$E(X_{r:n}) = \sum_{x=0}^{\infty} x \left[\int_{F(x-)}^{F(x)} \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} v^{r-1} (1-v)^{n-r}\, dv \right] \tag{4.2}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (3.4), (3.5), (3.9) veya (3.10)'de $f_i = f$ ve $F_i = F$ alınırsa (4.2) elde edilir.

Sonuç 4.3. Bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin r-inci sıralı istatistiğinin varyansı,

$$Var(X_{r:n}) = \sum_{x=0}^{\infty}\left\{ (2x+1)\left[1-\sum_{x=0}^{x}\left\{\sum_{m=0}^{n-r}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{n![F(x-)]^{r-1-k}[f(x)]^{k+1+m}[1-F(x)]^{n-m-r}}{(r-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-r)!}\right\}\right]\right\}$$
$$-\left[\sum_{x=0}^{\infty}\left\{1-\sum_{x=0}^{x}\left[\sum_{m=0}^{n-r}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{n![F(x-)]^{r-1-k}[f(x)]^{k+1+m}[1-F(x)]^{n-m-r}}{(r-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-r)!}\right]\right\}\right]^2 \qquad (4.3)$$

olarak ifade edilir.

İspat. (3.12) veya (3.13)'de $f_i = f$ ve $F_i = F$ alınırsa (4.3) elde edilir.

Sonuç 4.4. Bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin r-inci sıralı istatistiğinin varyansının integral formu,

$$Var(X_{r:n}) = \sum_{x=0}^{\infty}\left\{ (2x+1)\left[1-\int_{0}^{F(x)}\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}v^{r-1}(1-v)^{n-r}\,dv\right]\right\}$$
$$-\left[\sum_{x_r=0}^{\infty}\left\{1-\int_{0}^{F(x)}\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}v^{r-1}(1-v)^{n-r}\,dv\right\}\right]^2 \qquad (4.4)$$

olarak ifade edilir.

İspat. (3.14) veya (3.15)'de $f_i = f$ ve $F_i = F$ alınırsa (4.4) elde edilir.

Sonuç 4.5. Bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ arasındaki kovaryans,

$$Cov(X_{r:n}, X_{s:n}) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=x_1}^{\infty} x_1 x_2 \sum_{m_2=0}^{n-s} \sum_{k_2=0}^{s-1-r} \sum_{m_1=0}^{s-1-r} \sum_{k_1=0}^{r-1}$$

$$\frac{n![F(x_1-)]^{r-1-k_1}[f(x_1)]^{k_1+1+m_1}[F(x_2-)-F(x_1)]^{s-1-k_2-m_1-r}[f(x_2)]^{k_2+1+m_2}[1-F(x_2)]^{n-m_2-s}}{(r-1-k_1)!\,(k_1+1+m_1)!\,(s-1-k_2-m_1-r)!\,(k_2+1+m_2)!\,(n-m_2-s)!}$$

$$-\left[\sum_{x_1=0}^{\infty} x_1 \sum_{m=0}^{n-r} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{n![F(x_1-)]^{r-1-k}[f(x_1)]^{k+1+m}[1-F(x_1)]^{n-m-r}}{(r-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-r)!}\right]$$

$$\cdot\left[\sum_{x_2=0}^{\infty} x_2 \sum_{m=0}^{n-s} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{n![F(x_2-)]^{s-1-k}[f(x_2)]^{k+1+m}[1-F(x_2)]^{n-m-s}}{(s-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-s)!}\right] \qquad (4.5)$$

olarak ifade edilir.

İspat. (3.17) veya (3.18)'de $f_i = f$ ve $F_i = F$ alınırsa (4.5) elde edilir.

Sonuç 4.6. Bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ arasındaki kovaryansın integral formu,

$$Cov(X_{r:n}, X_{s:n}) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=x_1}^{\infty} x_r \, x_s \int_{F(x_1-)}^{F(x_1)} \int_{F(x_2-)}^{F(x_2)} \frac{n! v_1^{r-1} (v_2 - v_1)^{s-1-r} (1-v_2)^{n-s} \, dv_2 \, dv_1}{(r-1)!(s-1-r)!(n-s)!}$$

$$-\left[\sum_{x_1=0}^{\infty} x_r \int_{F(x_1-)}^{F(x_1)} \frac{n! v^{r-1} (1-v)^{n-r} dv}{(r-1)!(n-r)!}\right]\left[\sum_{x_2=0}^{\infty} x_s \int_{F(x_2-)}^{F(x_2)} \frac{n! v^{s-1} (1-v)^{n-s} dv}{(s-1)!(n-s)!}\right] \quad (4.6)$$

olarak ifade edilir.

İspat. (3.19) veya (3.20)’de $f_i = f$ ve $F_i = F$ alınırsa (4.6) elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] **Khatri, C. G.,** 1962. Distribution of order statistics for discrete case, *Ann. Inst. Statist. Math*., **14**, 167-171.

[2] **Vaughan, R. J. and Venables, W. N.**, 1972. Permanent expressions for order statistics densities, *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser.B **34**, 308-310.

[3] **Corley, H. W.,** 1984. Multivariate order statistics, *Commun. Statist.- Theor. Meth.*, **13**, 1299-1304.

[4] **Balakrishnan, N.,** 1986. Order statistics from discrete distributions, *Commun. Statist.- Theor. Meth.*, **15**, 657-675.

[5] **Reiss, R. -D.,** 1989. Approximate distributions of order statistics, Springer, Verlag, New York Inc., USA.

[6] **Nagaraja, H. N.,** 1986. Structure of discrete order statistics, *J. Statist. Plann. Inference*, **13**, 165-177.

[7] **Nagaraja, H. N.,** 1992. Order statistics from discrete distributions, *Statistics*, **23**, 189-216.

[8] **David, H. A.,** 1981. Order statistics, John Wiley and Sons Inc., New York.

[9] **Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N.,** 1992. A first course in order statistics, John Wiley and Sons Inc., New York.

[10] **Gan, G. and Bain, L. J.,** 1995. Distribution of order statistics for discrete parents with applications to censored sampling, *J. Statist. Plann. Inference*, **44**, 37-46.

[11] **Milton, J. S. and Arnold, J. C.,** 2003. Introduction to probability and statistics, McGraw-Hill, Boston.

[12] **Balakrishnan, N.,** 2007. Permanents, order statistics, outliers and robustness, *Rev. Mat. Complut*., **20**,7-107.

[13] **Akdeniz, Fikri**, 2002. Olasılık ve istatistik, Baki Kitabevi, Adana.

ÖZGEÇMİŞ

Hidayet YALÇIN, 1978 yılında Hatay'ın İskenderun ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini İskenderun'da tamamladı. 1999 yılında Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü'nden mezun oldu. Aynı yıl Malatya'da öğretmen olarak göreve başladı. 2008 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans çalışmasına başladı. Halen Kaya Karakaya Fen Lisesi'nde Matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır. Evli ve iki çocuk babasıdır.