TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN BİLEŞİK DAĞILIMLARI

Fahrettin ÖZBEY

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR

OCAK–2011

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN BİLEŞİK DAĞILIMLARI

DOKTORA TEZİ

Fahrettin ÖZBEY

(08121205)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 11 Ocak 2011

OCAK–2011

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN BİLEŞİK DAĞILIMLARI

DOKTORA TEZİ

Fahrettin ÖZBEY

(08121205)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 11 Ocak 2011

Tezin Savunulduğu Tarih: 26 Ocak 2011

Tez Danışmanı: **Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR (F.Ü)**

Diğer Jüri Üyeleri: **Prof. Dr. Murat KARAGÖZ (Fatih Ü)**

Prof. Dr. Necdet ÇATALBAŞ (F.Ü)

Prof. Dr. Mikail ET (F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Mahmut IŞIK (F.Ü)

OCAK-2011

ÖNSÖZ

Sıralı istatistiklerin dağılımları birçok çalışmaya konu olmuştur. Ancak, bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılımları literatürde bulunmamaktadır. Bu tez, söz konusu olan eksiği giderme ümidiyle hazırlandı.

Öğrencisi olduğum ilk günden itibaren bilgi ve tecrübesiyle bana yol gösteren, beni yönlendiren ve akademik hayatın dışında da her konuda manevi desteğini esirgemeyen değerli hocam ve tez danışmanım Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR'e teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca, tez dönemi boyunca yardım ve ilgisini hep yanımda hissettiğim değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Gökhan GÖKDERE'ye teşekkür ederim.

Her ne yapsam da borçlu kalacağım, nasıl teşekkür edeceğimi bilmediğim, hayatımda hep ilk sırada olmalarına rağmen bu son satıra yerleşen aileme yürekten teşekkür ederim.

Fahrettin ÖZBEY

ELAZIĞ – 2011

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Bu tez, altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, temel tanımlar verilmiştir.

İkinci bölümde, bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonları verilmiştir.

Üçüncü bölümde, bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik olasılık ve dağılım fonksiyonları ifade edilmiştir.

Dördüncü bölümde, bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonları incelenmiştir.

Beşinci bölümde, bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik olasılık ve dağılım fonksiyonları elde edilmiştir.

Son bölümde, tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılımları ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sıralı İstatistikler, Tesadüfi Değişkenler, Bağımsız Tesadüfi Değişkenler, Aynı Dağılımlı Tesadüfi Değişkenler, Aynı Dağılımlı Olmayan Tesadüfi Değişkenler, Sürekli Tesadüfi Değişkenler, Kesikli Tesadüfi Değişkenler, Bileşik Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu, Bileşik Olasılık Fonksiyonu, Bileşik Dağılım Fonksiyonu.

SUMMARY

Joint Distributions of Order Statistics of Random Variables

This thesis consists of six chapters.

In the first chapter, the fundamental definitions are given.

In the second chapter, the joint probability density and distribution functions of order statistics of independent and identically distributed continuous random variables are given.

In the third chapter, the joint probability and distribution functions of order statistics of independent and identically distributed discrete random variables are expressed.

In the fourth chapter, the joint probability density and distribution functions of order statistics of independent and nonidentically distributed continuous random variables are examined.

In the fifth chapter, the joint probability and distribution functions of order statistics of independent and nonidentically distributed discrete random variables are obtained.

In the last chapter, the some results related to the distributions of order statistics of random variables are given.

Key Words: Order statistics, Random Variables, Independent Random Variables, Identically Distributed Random Variables, Nonidentically Distributed Random Variables, Continuous Random Variables, Discrete Random Variables, Joint Probability Density Function, Joint Probability Function, Joint Distribution Function.

SEMBOLLER LİSTESİ

$\sum\limits_{m_p, k_p, \ldots, m_1, k_1}$: $\sum\limits_{m_p=0}^{n-r_p} \sum\limits_{k_p=0}^{r_p-1-r_{p-1}} \cdots \sum\limits_{m_2=0}^{r_3-1-r_2} \sum\limits_{k_2=0}^{r_2-1-r_1} \sum\limits_{m_1=0}^{r_2-1-r_1} \sum\limits_{k_1=0}^{r_1-1}$

$\sum\limits_{P}$: $(1, 2, \ldots, n)$'nin bütün $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ permütasyonları üzerinden toplam

1. GİRİŞ

İstatistik bilimi, esasen uygulamalı matematiğin bir dalı olup gözlemsel verilere matematiğin uygulanması olarak ifade edilebilir [1]. Matematiksel istatistiğin temel problemlerinden biri tesadüfi değişkenlerin deneysel değerleri kullanılarak, dağılım fonksiyonlarının tahmin edilmesidir. İstatistik teorisinde; normal, poisson, binom, çok değişkenli veya diğer özel dağılımlara sahip örnekler için bir veya iki bilinmeyen parametreye bağlı dağılımlarının fonksiyonları geliştirildi. Fakat birçok örneğin dağılımlarının fonksiyonları elde edilemedi. Bu problem, çalışmaların bu yönde ilerlemesine, tüm örnekler için sağlanan ve herhangi bir parametreye bağlı olmayan dağılımlarının fonksiyonlarının elde edilmesiyle sonuçlandı [2].

Sıralı istatistikler, istatistik teorisinin önemli kavramlarından biri olup parametrik olmayan istatistikte kullanılmaktadır.

Reiss [3], bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılım ve yoğunluk fonksiyonlarını elde etmiştir. Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli bir anakütleden gelen sıralı istatistikler için sağlanan bazı bağıntılar, Arnold vd. [4], David [5] ve Reiss [3] tarafından elde edilmiştir. Corley [6], sürekli çok değişkenli tesadüfi değişkenlerin farklı anlamlarda sıralı istatistiklerini tanımlamıştır. Balakrishnan [7], bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli bir anakütleden gelen sıralı istatistikler için sağlanan bazı bağıntılar elde etmiştir. Bu bağıntıların bazıları, aynı zamanda bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistikleri için de sağlanmaktadır.

Bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılımları, Khatri [8] tarafından incelenmiştir. Nagaraja [9,10], bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli bir anakütleden gelen sıralı istatistiklerin temel yapılarını incelemiştir. David [5], Arnold vd. [4] ve Gan ve Bain [11], bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin olasılık ve dağılım fonksiyonlarını elde etmişlerdir.

Cao ve West [12], bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli bir anakütleden gelen sıralı istatistiklerin dağılımları için bazı bağıntılar vermişlerdir. Vaughan ve Venables [13], permanent yardımıyla bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin olasılık yoğunluk fonksiyonlarını ifade etmişlerdir. Balakrishnan [14] ve Bapat ve Beg [15], permanent yardımıyla bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonlarını elde etmişlerdir.

Bu çalışmada, esas olarak bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik olasılık ve dağılım fonksiyonları elde edilmiştir.

1.1. Temel Tanımlar

Tanım 1.1.1. Örnek uzaydaki her bir elemanı bir reel sayıya eşleyen fonksiyona *tesadüfi değişken* denir [16].

Tanım 1.1.2. Bir tesadüfi değişken, herhangi bir aralıktaki bütün reel değerleri alabiliyorsa bu tesadüfi değişkene *sürekli tesadüfi değişken* denir [17].

Tanım 1.1.3. X, sürekli bir tesadüfi değişken olsun.

i. $f(x) \geq 0, \qquad x \in R$

ii. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

koşullarını sağlayan $f(x)$ 'e X'in *olasılık yoğunluk fonksiyonu* denir [17].

Tanım 1.1.4. X, olasılık yoğunluk fonksiyonu f olan sürekli tesadüfi değişken olsun. X'in *dağılım fonksiyonu*,

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du, \qquad x \in R$$

şeklinde tanımlanır [17].

Tanım 1.1.5. *X* ve *Y*, sürekli tesadüfi değişkenler olsun.

i. $f(x,y) \geq 0, \qquad x,y \in R$

ii. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx = 1$

koşullarını sağlayan $f(x,y)$'ye *X* ve *Y*'nin *bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu* denir [17].

Tanım 1.1.6. *X* ve *Y*, bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x,y)$ olan sürekli tesadüfi değişkenler olsun. *X* ve *Y*'nin *bileşik dağılım fonksiyonu*,

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,du\,dv, \qquad x,y \in R$$

şeklinde tanımlanır [18].

Tanım 1.1.7. Bir tesadüfi değişken, sonlu veya sayılabilir sonsuzlukta değerler alabiliyorsa bu tesadüfi değişkene *kesikli tesadüfi değişken* denir [17].

Tanım 1.1.8. *X*, kesikli bir tesadüfi değişken olsun.

i. $f(x) \geq 0$,

ii. $\sum_{x} f(x) = 1$.

koşullarını sağlayan $f(x)$ 'e *X*'in *olasılık fonksiyonu* denir [17].

Tanım 1.1.9. *X*, olasılık fonksiyonu *f* olan kesikli tesadüfi değişken olsun. *X*'in *dağılım fonksiyonu*,

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f(u)$$

şeklinde tanımlanır [17].

Tanım 1.1.10. *X* ve *Y*, kesikli tesadüfi değişkenler olsun.

i. $f(x, y) \geq 0$

ii. $\sum_{x} \sum_{y} f(x, y) = 1$

koşullarını sağlayan $f(x, y)$ 'ye *X* ve *Y*'nin *bileşik olasılık fonksiyonu* denir [17].

Tanım 1.1.11. *X* ve *Y*, bileşik olasılık fonksiyonu $f(x, y)$ olan kesikli tesadüfi değişkenler olsun. *X* ve *Y*'nin *bileşik dağılım fonksiyonu*,

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \sum_{u \le x} \sum_{v \le y} f(u,v)$$

şeklinde tanımlanır [18].

Tanım 1.1.12. *X*, olasılık fonksiyonu $f(x)$ olan bir tesadüfi değişken ve *Y*'de olasılık fonksiyonu $f(y)$ olan bir tesadüfi değişken olsun. Ayrıca, *X* ve *Y*'nin bileşik olasılık fonksiyonu $f(x,y)$ olsun. Eğer,

$$f(x,y) = f(x)\, f(y)$$

eşitliği sağlanıyorsa *X* ve *Y*'ye *bağımsız tesadüfi değişkenler* denir [17].

Tanım 1.1.13. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tesadüfi değişkenlerinin meydana gelme sırası değil büyüklüklerinin sırası göz önüne alınırsa bu tesadüfi değişkenlerin *sıralı istatistikleri*,

$$X_{1:n} \le X_{2:n} \le \ldots \le X_{n:n}$$

olarak ifade edilir.

$X_{r:n}$, *r*-inci sıralı istatistik denir.

Buradan,

$$X_{1:n} = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

ve

$$X_{n:n} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

yazılabilir [3].

Tanım 1.1.14. $a, b, c \in R$ ve $i + j \le n$ olmak üzere,

$$(a+b+c)^n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{i!\, j!\, (n-i-j)!} a^i\, b^j\, c^{n-i-j}$$

ifadesine üç terimli açılım denir.

2. BAĞIMSIZ VE AYNI DAĞILIMLI SÜREKLİ TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN BİLEŞİK DAĞILIMLARI

Bu bölümde, bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonları verilecektir.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonu f ve dağılım fonksiyonu F olsun. Bu tesadüfi değişkenlerin büyüklüklerine göre sıralanmasıyla elde edilen sıralı istatistikler, $X_{1:n} \le X_{2:n} \le \ldots \le X_{n:n}$ olsun.

$x_1 < x_2 < \ldots < x_p$, $x_w \in R\ (w = 1, 2, \ldots, p)$, $1 \le r_1 < r_2 < \ldots < r_p \le n$ ve $p = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \ldots, X_{r_p:n}$'nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{r_1, r_2, \ldots, r_p:n}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

$$= \lim_{\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_p \to 0} \frac{P\{x_1 < X_{r_1:n} \le x_1 + \delta x_1, x_2 < X_{r_2:n} \le x_2 + \delta x_2, \ldots, x_p < X_{r_p:n} \le x_p + \delta x_p\}}{\prod_{t=1}^{p} \delta x_t}$$

$$= n!\,C \left(\prod_{w=1}^{p+1} [F(x_w) - F(x_{w-1})]^{r_w - 1 - r_{w-1}} \right) \left(\prod_{t=1}^{p} f(x_t) \right) \qquad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada; $F(x_0) = 0$, $F(x_{p+1}) = 1$, $r_0 = 0$, $r_{p+1} = n + 1$ ve

$$C=[\prod_{w=1}^{p+1}(r_w-1-r_{w-1})!]^{-1}$$

olarak ifade edilir.

(2.1)'de $p=2$ alınırsa $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$'nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu, $1\leq r<s\leq n$ olmak üzere

$$f_{r,s:n}(x_1,x_2)=\frac{n!}{(r-1)!(s-1-r)!(n-s)!}[F(x_1)]^{r-1}\ f(x_1)[F(x_2)-F(x_1)]^{s-1-r}$$
$$\cdot f(x_2)[1-F(x_2)]^{n-s} \qquad (2.2)$$

şeklinde elde edilir.

(2.1)'de $p=1$ alınırsa bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin *r*-inci sıralı istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{r:n}(x)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}[F(x)]^{r-1}\ f(x)[1-F(x)]^{n-r} \qquad (2.3)$$

olarak elde edilir.

$X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \ldots, X_{r_p:n}$'nin bileşik dağılım fonksiyonu,

$$F_{r_1,r_2,\ldots,r_p:n}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = P\{X_{r_1:n} \le x_1, X_{r_2:n} \le x_2, \ldots, X_{r_p:n} \le x_p\}$$

$$= \sum_{j_p=r_p}^{n} \ldots \sum_{j_2=r_2}^{j_3} \sum_{j_1=r_1}^{j_2} n!\,D\left(\prod_{w=1}^{p+1}[F(x_w)-F(x_{w-1})]^{j_w-j_{w-1}}\right) \tag{2.4}$$

olarak ifade edilir. Burada; $j_0 = 0$, $j_{p+1} = n$ ve

$$D = [\prod_{w=1}^{p+1}(j_w - j_{w-1})!]^{-1}$$

olarak ifade edilir.

(2.4)'de $p = 2$ alınırsa $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$'nin bileşik dağılım fonksiyonu,

$$F_{r,s:n}(x_1, x_2) = \sum_{j_2=s}^{n} \sum_{j_1=r}^{j_2} \frac{n!}{j_1!\,(j_2-j_1)!\,(n-j_2)!}[F(x_1)]^{j_1}\,[F(x_2)-F(x_1)]^{j_2-j_1}$$

$$\cdot[1-F(x_2)]^{n-j_2} \tag{2.5}$$

şeklinde elde edilir.

(2.4)'de $p=1$ alınırsa bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin *r*-inci sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu,

$$F_{r:n}(x) = \sum_{j=r}^{n} \frac{n!}{j!\,(n-j)!} [F(x)]^{j} \, [1-F(x)]^{n-j} \tag{2.6}$$

olarak elde edilir.

3. BAĞIMSIZ VE AYNI DAĞILIMLI KESİKLİ TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN BİLEŞİK DAĞILIMLARI

Bu bölümde, bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik olasılık ve dağılım fonksiyonları verilecektir.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ olasılık fonksiyonu f ve dağılım fonksiyonu F'ye sahip bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenler olsun. Bu tesadüfi değişkenlerden elde edilen sıralı istatistikler, $X_{1:n} \le X_{2:n} \le \dots \le X_{n:n}$ olsun.

$x_1 \le x_2 \le \dots \le x_p$, $x_w = 0, 1, 2, \dots$ $(w = 1, 2, \dots, p)$, $1 \le r_1 < r_2 < \dots < r_p \le n$ ve $p = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_p:n}$'nin bileşik olasılık fonksiyonu,

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_p:n}(x_1, x_2, \dots, x_p) = P\{X_{r_1:n} = x_1, X_{r_2:n} = x_2, \dots, X_{r_p:n} = x_p\}$$

$$= \sum_{m_p, k_p, \dots, m_1, k_1} n! C_1 \left(\prod_{w=1}^{p+1} [F(x_w -) - F(x_{w-1})]^{r_w - 1 - k_w - m_{w-1} - r_{w-1}} \right)$$

$$\cdot \left(\prod_{t=1}^{p} [f(x_t)]^{k_t + 1 + m_t} \right) \qquad (3.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada; $r_0 = 0$, $r_{p+1} = n + 1$, $m_0 = 0$, $k_{p+1} = 0$, $m_{w-1} + k_w \le r_w - 1 - r_{w-1}$, $F(x_0) = 0$, $F(x_{p+1}) = 1$ $F(x_w -) = P(X < x_w)$ ve

$$C_1 = \left(\prod_{w=1}^{p+1} [(r_w - 1 - k_w - m_{w-1} - r_{w-1})!]^{-1} \right) \left(\prod_{t=1}^{p} [(k_t + 1 + m_t)!]^{-1} \right)$$

olarak ifade edilir.

(3.1)'de $p = 2$ alınırsa $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$'nin bileşik olasılık fonksiyonu, $1 \le r < s \le n$ olmak üzere

$$f_{r,s:n}(x_1, x_2) = \sum_{m_2=0}^{n-s} \sum_{k_2=0}^{s-1-r} \sum_{m_1=0}^{s-1-r} \sum_{k_1=0}^{r-1}$$

$$\frac{n![F(x_1-)]^{r-1-k_1}[f(x_1)]^{k_1+1+m_1}[F(x_2-)-F(x_1)]^{s-1-k_2-m_1-r}[f(x_2)]^{k_2+1+m_2}[1-F(x_2)]^{n-m_2-s}}{(r-1-k_1)!\,(k_1+1+m_1)!\,(s-1-k_2-m_1-r)!\,(k_2+1+m_2)!\,(n-m_2-s)!} \tag{3.2}$$

şeklinde elde edilir.

(3.1)'de $p = 1$ alınırsa bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin *r*-inci sıralı istatistiğinin olasılık fonksiyonu,

$$f_{r:n}(x) = \sum_{m=0}^{n-r} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{n![F(x-)]^{r-1-k}[f(x)]^{k+1+m}[1-F(x)]^{n-m-r}}{(r-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-r)!} \tag{3.3}$$

olarak elde edilir.

(3.1)'de

$$\prod_{t=1}^{p}\left(\frac{(k_t+1+m_t)!}{m_t!\,k_t!}\int_0^1 y_t^{k_t}(1-y_t)^{m_t}\,dy_t\right)=1$$

eşitliği kullanılırsa

$$f_{r_1,r_2,\ldots,r_p:n}(x_1,x_2,\ldots,x_p)=\sum_{m_p,k_p,\ldots,m_1,k_1} n!C_1\left(\prod_{w=1}^{p+1}[F(x_w-)-F(x_{w-1})]^{r_w-1-k_w-m_{w-1}-r_{w-1}}\right)$$

$$\cdot\prod_{t=1}^{p}\left(\frac{(k_t+1+m_t)!}{m_t!\,k_t!}\int_0^1[y_t\,f(x_t)]^{k_t}[(1-y_t)\,f(x_t)]^{m_t}\,f(x_t)\,dy_t\right)$$

ifadesi elde edilir. Burada; $v_t=y_t\,f(x_t)+F(x_t-)$ değişkeni ve üç terimli açılım kullanılırsa $X_{r_1:n}, X_{r_2:n},\ldots, X_{r_p:n}$'nin bileşik olasılık fonksiyonunun integral formu,

$$f_{r_1,r_2,\ldots,r_p:n}(x_1,x_2,\ldots,x_p)=\int_{F(x_1-)}^{F(x_1)}\int_{F(x_2-)}^{F(x_2)}\cdots\int_{F(x_p-)}^{F(x_p)} n!C\left(\prod_{w=1}^{p+1}(v_w-v_{w-1})^{r_w-1-r_{w-1}}\right)\prod_{\vartheta=0}^{p-1}dv_{p-\vartheta} \qquad (3.4)$$

olarak elde edilir. Burada; $v_0=0$, $v_{p+1}=1$ ve

$$C=\prod_{w=1}^{p+1}[(r_w-1-r_{w-1})!]^{-1}$$

olarak ifade edilir.

(3.4)'de $p=2$ alınırsa $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$'nin bileşik olasılık fonksiyonu,

$$f_{r,s:n}(x_1, x_2) = \int_{F(x_1-)}^{F(x_1)} \int_{F(x_2-)}^{F(x_2)} \frac{n!}{(r-1)!(s-1-r)!(n-s)!} v_1^{r-1} (v_2 - v_1)^{s-1-r}$$

$$\cdot (1-v_2)^{n-s}\, dv_2\, dv_1 \tag{3.5}$$

şeklinde elde edilir.

(3.4)'de $p=1$ alınırsa bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin *r*-inci sıralı istatistiğinin olasılık fonksiyonu,

$$f_{r:n}(x) = \int_{F(x-)}^{F(x)} \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} v^{r-1} (1-v)^{n-r}\, dv \tag{3.6}$$

olarak elde edilir.

$X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_p:n}$'nin bileşik dağılım fonksiyonu,

$$F_{r_1,r_2,\dots,r_p:n}(x_1, x_2, \dots, x_p) = P\{X_{r_1:n} \le x_1, X_{r_2:n} \le x_2, \dots, X_{r_p:n} \le x_p\}$$

$$= \sum_{x_1=0}^{x_1} \sum_{x_2=x_1}^{x_2} \cdots \sum_{x_p=x_{p-1}}^{x_p} f_{r_1,r_2,\dots,r_p:n}(x_1, x_2, \dots, x_p) \tag{3.7}$$

şeklinde ifade edilir. (3.1), (3,7)'de kullanılırsa $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_p:n}$'nin bileşik dağılım fonksiyonu,

$$F_{r_1,r_2,\ldots,r_p:n}(x_1,x_2,\ldots,x_p)=\sum_{x_1=0}^{x_1}\sum_{x_2=x_1}^{x_2}\cdots\sum_{x_p=x_{p-1}}^{x_p}\left\{\sum_{m_p,k_p,\ldots,m_1,k_1} n!C_1\right.$$

$$\left.\cdot\left(\prod_{w=1}^{p+1}[F(x_w-)-F(x_{w-1})]^{r_w-1-k_w-m_{w-1}-r_{w-1}}\right)\left(\prod_{t=1}^{p}[f(x_t)]^{k_t+1+m_t}\right)\right\} \qquad (3.8)$$

şeklinde elde edilir.

(3.8)'de $p=2$ alınırsa $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$'nin bileşik dağılım fonksiyonu,

$$F_{r,s:n}(x_1,x_2)=\sum_{x_1=0}^{x_1}\sum_{x_2=x_1}^{x_2}\left\{\sum_{m_2=0}^{n-s}\sum_{k_2=0}^{s-1-r}\sum_{m_1=0}^{s-1-r}\sum_{k_1=0}^{r-1}\right.$$

$$\left.\frac{n![F(x_1-)]^{r-1-k_1}[f(x_1)]^{k_1+1+m_1}[F(x_2-)-F(x_1)]^{s-1-k_2-m_1-r}[f(x_2)]^{k_2+1+m_2}[1-F(x_2)]^{n-m_2-s}}{(r-1-k_1)!\,(k_1+1+m_1)!\,(s-1-k_2-m_1-r)!\,(k_2+1+m_2)!\,(n-m_2-s)!}\right\} \qquad (3.9)$$

şeklinde elde edilir.

(3.8)'de $p=1$ alınırsa bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin r-inci sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu,

$$F_{r:n}(x)=\sum_{x=0}^{x}\left\{\sum_{m=0}^{n-r}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{n![F(x-)]^{r-1-k}[f(x)]^{k+1+m}[1-F(x)]^{n-m-r}}{(r-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-r)!}\right\} \qquad (3.10)$$

olarak elde edilir.

(3.4), (3.7)'de kullanılırsa $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_p:n}$'nin bileşik dağılım fonksiyonunun integral formu,

$$F_{r_1,r_2,\dots,r_p:n}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \int_0^{F(x_1)} \int_{v_1}^{F(x_2)} \dots \int_{v_{p-1}}^{F(x_p)} n!C\left(\prod_{w=1}^{p+1}(v_w - v_{w-1})^{r_w-1-r_{w-1}}\right)\prod_{\vartheta=0}^{p-1} dv_{p-\vartheta} \qquad (3.11)$$

şeklinde elde edilir.

(3.11)'de $p=2$ alınırsa $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$'nin bileşik dağılım fonksiyonu,

$$F_{r,s:n}(x_1, x_2) = \int_0^{F(x_1)} \int_{v_1}^{F(x_2)} \frac{n!}{(r-1)!(s-1-r)!(n-s)!} v_1^{r-1}(v_2 - v_1)^{s-1-r}$$

$$\cdot (1-v_2)^{n-s}\, dv_2\, dv_1 \qquad (3.12)$$

şeklinde elde edilir.

(3.11)'de $p=1$ alınırsa bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin r-inci sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu,

$$F_{r:n}(x) = \int_0^{F(x)} \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} v^{r-1}(1-v)^{n-r}\, dv \qquad (3.13)$$

olarak elde edilir.

4. BAĞIMSIZ VE AYNI DAĞILIMLI OLMAYAN SÜREKLİ TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN BİLEŞİK DAĞILIMLARI

Bu bölümde, bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonları verilecektir.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenler olsun. X_i $(i=1,2,\ldots,n)$ tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu f_i ve dağılım fonksiyonu F_i olsun. Bu tesadüfi değişkenlerin büyüklüklerine göre sıralanmasıyla elde edilen sıralı istatistikler, $X_{1:n} \le X_{2:n} \le \ldots \le X_{n:n}$ olsun.

$x_1 < x_2 < \ldots < x_p$, $x_w \in R\ (w=1,2,\ldots,p)$, $1 \le r_1 < r_2 < \ldots < r_p \le n$ ve $p=1,2,\ldots,n$ olmak üzere $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \ldots, X_{r_p:n}$'nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{r_1,r_2,\ldots,r_p:n}(x_1,x_2,\ldots,x_p) = C\sum_{P}\left(\prod_{w=1}^{p+1}\prod_{\ell=r_{w-1}+1}^{r_w-1}[F_{i_\ell}(x_w)-F_{i_\ell}(x_{w-1})]\right)\left(\prod_{t=1}^{p} f_{i_{r_t}}(x_t)\right) \tag{4.1}$$

şeklinde ifade edilir. Burada; $r_0=0$, $r_{p+1}=n+1$, $F_{i_\ell}(x_0)=0$, $F_{i_\ell}(x_{p+1})=1$ ve

$$C=[\prod_{w=1}^{p+1}(r_w-1-r_{w-1})!]^{-1}$$

olarak ifade edilir.

(4.1)'de $p=2$ alınırsa $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$'nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu, $1 \le r < s \le n$ olmak üzere

$$f_{r,s:n}(x_1, x_2) = \frac{1}{(r-1)!\,(s-1-r)!\,(n-s)!} \sum_P \left(\prod_{\ell=1}^{r-1} F_{i_\ell}(x_1) \right) f_{i_r}(x_1)$$

$$\cdot \left(\prod_{\ell=r+1}^{s-1} [F_{i_\ell}(x_2) - F_{i_\ell}(x_1)] \right) f_{i_s}(x_2) \left(\prod_{\ell=s+1}^{n} [1 - F_{i_\ell}(x_2)] \right) \tag{4.2}$$

şeklinde elde edilir.

(4.1)'de $p=1$ alınırsa bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin *r*-inci sıralı istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{r:n}(x) = \frac{1}{(r-1)!\,(n-r)!} \sum_P \left(\prod_{\ell=1}^{r-1} F_{i_\ell}(x) \right) f_{i_r}(x) \left(\prod_{\ell=r+1}^{n} [1 - F_{i_\ell}(x)] \right) \tag{4.3}$$

olarak elde edilir.

$X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_p:n}$'nin bileşik dağılım fonksiyonu,

$$F_{r_1, r_2, \dots, r_p:n}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \sum_{j_p=r_p}^{n} \cdots \sum_{j_2=r_2}^{j_3} \sum_{j_1=r_1}^{j_2} \left\{ D \sum_P \left(\prod_{w=1}^{p+1} \prod_{\ell=j_{w-1}+1}^{j_w} [F_{i_\ell}(x_w) - F_{i_\ell}(x_{w-1})] \right) \right\} \tag{4.4}$$

olarak ifade edilir. Burada; $j_0 = 0$, $j_{p+1} = n$ ve

$$D = [\prod_{w=1}^{p+1} (j_w - j_{w-1})!]^{-1}$$

şeklinde ifade edilir.

(4.4)'de $p = 2$ alınırsa $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$'nin bileşik dağılım fonksiyonu,

$$F_{r,s:n}(x_1, x_2) = \sum_{j_2=s}^{n} \sum_{j_1=r}^{j_2} \left\{ \frac{1}{j_1!(j_2 - j_1)!(n - j_2)!} \sum_P \left(\prod_{\ell=1}^{j_1} F_{i_\ell}(x_1) \right) \right.$$
$$\left. \cdot \left(\prod_{\ell=j_1+1}^{j_2} [F_{i_\ell}(x_2) - F_{i_\ell}(x_1)] \right) \left(\prod_{\ell=j_2+1}^{n} [1 - F_{i_\ell}(x_2)] \right) \right\} \tag{4.5}$$

şeklinde elde edilir.

(4.4)'de $p = 1$ alınırsa bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin r-inci sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu,

$$F_{r:n}(x) = \sum_{j=r}^{n} \left\{ \frac{1}{j!(n-j)!} \sum_P \left(\prod_{\ell=1}^{j} F_{i_\ell}(x) \right) \left(\prod_{\ell=j+1}^{n} [1 - F_{i_\ell}(x)] \right) \right\} \tag{4.6}$$

olarak elde edilir [14].

5. BAĞIMSIZ VE AYNI DAĞILIMLI OLMAYAN KESİKLİ TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN BİLEŞİK DAĞILIMLARI

Bu bölümde, bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik olasılık ve dağılım fonksiyonları verilecektir.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenler olsun. X_i $(i=1,2,\dots,n)$ tesadüfi değişkeninin olasılık fonksiyonu f_i ve dağılım fonksiyonu F_i olsun. Bu tesadüfi değişkenlerden elde edilen sıralı istatistikler, $X_{1:n} \le X_{2:n} \le \dots \le X_{n:n}$ olsun.

$x_1 \le x_2 \le \dots \le x_p$, $x_w = 0,1,2,\dots$ $(w=1,2,\dots,p)$, $1 \le r_1 < r_2 < \dots < r_p \le n$ ve $p=1,2,\dots,n$ olmak üzere $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_p:n}$'nin bileşik olasılık fonksiyonu,

$$f_{r_1,r_2,\dots,r_p:n}(x_1,x_2,\dots,x_p) = \sum_{m_p,k_p,\dots,m_1,k_1} \left\{ C_1 \sum_P \left(\prod_{w=1}^{p+1} \prod_{\ell=r_{w-1}+m_{w-1}+1}^{r_w-1-k_w} [F_{i_\ell}(x_w-) - F_{i_\ell}(x_{w-1})] \right) \cdot \left(\prod_{t=1}^{p} \prod_{\ell=r_t-k_t}^{r_t+m_t} f_{i_\ell}(x_t) \right) \right\} \tag{5.1}$$

şeklinde ifade edilir. Burada; $r_0 = 0$, $r_{p+1} = n+1$, $m_0 = 0$, $k_{p+1} = 0$, $m_{w-1} + k_w \le r_w - 1 - r_{w-1}$, $F_{i_\ell}(x_0) = 0$, $F_{i_\ell}(x_{p+1}) = 1$, $F_{i_\ell}(x_w-) = P(X_{i_\ell} < x_w)$ ve

$$C_1 = \left(\prod_{w=1}^{p+1} [(r_w - 1 - k_w - m_{w-1} - r_{w-1})!]^{-1} \right) \left(\prod_{t=1}^{p} [(k_t + 1 + m_t)!]^{-1} \right)$$

olarak ifade edilir.

(5.1)'de $p = 2$ alınırsa $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$'nin bileşik olasılık fonksiyonu, $1 \leq r < s \leq n$ olmak üzere

$$f_{r,s:n}(x_1, x_2) = \sum_{m_2=0}^{n-s} \sum_{k_2=0}^{s-1-r} \sum_{m_1=0}^{s-1-r} \sum_{k_1=0}^{r-1}$$

$$\left\{ \frac{1}{(r-1-k_1)!\,(k_1+1+m_1)!\,(s-1-k_2-m_1-r)!\,(k_2+1+m_2)!\,(n-m_2-s)!} \right.$$

$$\cdot \sum_P \left(\prod_{\ell=1}^{r-1-k_1} F_{i_\ell}(x_1-) \right) \left(\prod_{\ell=r-k_1}^{r+m_1} f_{i_\ell}(x_1) \right) \left(\prod_{\ell=r+m_1+1}^{s-1-k_2} [F_{i_\ell}(x_2-) - F_{i_\ell}(x_1)] \right)$$

$$\left. \cdot \left(\prod_{\ell=s-k_2}^{s+m_2} f_{i_\ell}(x_2) \right) \left(\prod_{\ell=s+m_2+1}^{n} [1 - F_{i_\ell}(x_2)] \right) \right\} \tag{5.2}$$

şeklinde elde edilir.

(5.1)'de $p = 1$ alınırsa bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin r-inci sıralı istatistiğinin olasılık fonksiyonu,

$$f_{r:n}(x) = \sum_{m=0}^{n-r} \sum_{k=0}^{r-1} \left\{ \frac{1}{(r-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-r)!} \right.$$

$$\left. \cdot \sum_P \left(\prod_{\ell=1}^{r-1-k} F_{i_\ell}(x-) \right) \left(\prod_{\ell=r-k}^{r+m} f_{i_\ell}(x) \right) \left(\prod_{\ell=r+m+1}^{n} [1 - F_{i_\ell}(x)] \right) \right\} \tag{5.3}$$

olarak elde edilir.

Teorem 5.1. Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik olasılık fonksiyonunun integral formu,

$$f_{r_1,r_2,\dots,r_p:n}(x_1,x_2,\dots,x_p)=C\sum_P \int_{F_{i_{r_1}}(x_1-)}^{F_{i_{r_1}}(x_1)} \int_{F_{i_{r_2}}(x_2-)}^{F_{i_{r_2}}(x_2)} \cdots \int_{F_{i_{r_p}}(x_p-)}^{F_{i_{r_p}}(x_p)} \left(\prod_{w=1}^{p+1}\prod_{l=r_{w-1}+1}^{r_w-1}(v_{i_l}^{(w)}-v_{i_l}^{(w-1)})\right)\prod_{\vartheta=0}^{p-1} dv_{i_{r_{p-\vartheta}}}^{(p-\vartheta)} \quad (5.4)$$

şeklindedir. Burada; $r_0=0$, $r_{p+1}=n+1$, $v_{i_l}^{(0)}=0$, $v_{i_l}^{(p+1)}=1$,

$$C=\prod_{w=1}^{p+1}[(r_w-1-r_{w-1})!]^{-1}$$

ve

$$v_{i_l}^{(w)}=[v_{i_{r_w}}^{(w)}-F_{i_{r_w}}(x_w-)]\frac{f_{i_l}(x_w)}{f_{i_{r_w}}(x_w)}+F_{i_l}(x_w-)$$

olarak ifade edilir.

İspat. (5.1),

$$f_{r_1,r_2,\dots,r_p:n}(x_1,x_2,\dots,x_p)=\sum_{m_p,k_p,\dots,m_1,k_1}\left\{C_1\sum_P\left(\prod_{w=1}^{p+1}\prod_{\ell=r_{w-1}+m_{w-1}+1}^{r_w-1-k_w}[F_{i_\ell}(x_w-)-F_{i_\ell}(x_{w-1})]\right)\right.$$

$$\left.\cdot\left(\prod_{t=1}^{p}\left(\prod_{\ell=r_t-k_t}^{r_t-1}f_{i_\ell}(x_t)\right)f_{i_{r_t}}(x_t)\left(\prod_{\ell=r_t+1}^{r_t+m_t}f_{i_\ell}(x_t)\right)\right)\right\}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikte,

$$\prod_{t=1}^{p}\left(\frac{(k_t+1+m_t)!}{m_t!\,k_t!}\int_0^1 y_t^{k_t}(1-y_t)^{m_t}\,dy_t\right)=1$$

eşitliği kullanılırsa

$$f_{r_1,r_2,\ldots,r_p:n}(x_1,x_2,\ldots,x_p)=\sum_{m_p,k_p,\ldots,m_1,k_1}\left\{C_1\sum_{P}\left(\prod_{w=1}^{p+1}\prod_{\ell=r_{w-1}+m_{w-1}+1}^{r_w-1-k_w}[F_{i_\ell}(x_w-)-F_{i_\ell}(x_{w-1})]\right)\right.$$

$$\left.\cdot\left[\prod_{t=1}^{p}\int_0^1\frac{(k_t+1+m_t)!}{m_t!\,k_t!}\left(\prod_{\ell=r_t-k_t}^{r_t-1}y_t\,f_{i_\ell}(x_t)\right)\left(\prod_{\ell=r_t+1}^{r_t+m_t}(1-y_t)\,f_{i_\ell}(x_t)\right)dy_t\,f_{i_{r_t}}(x_t)\right]\right\}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade,

$$f_{r_1,r_2,\ldots,r_p:n}(x_1,x_2,\ldots,x_p)=\sum_{m_p,k_p\ldots,m_1,k_1}\sum_{P}\int_0^1\int_0^1\ldots\int_0^1$$

$$\cdot\frac{1}{(r_1-1-k_1)!k_1!}F_{i_1}(x_1-)F_{i_2}(x_1-)\ldots F_{i_{r_1-1-k_1}}(x_1-)y_1 f_{i_{r_1-k_1}}(x_1)y_1 f_{i_{r_1-k_1+1}}(x_1)\ldots y_1 f_{i_{r_1-1}}(x_1)dy_1 f_{i_{r_1}}(x_1)$$

$$\cdot\frac{1}{(r_2-1-k_2-m_1-r_1)!m_1!k_2!}(1-y_1)\,f_{i_{r_1+1}}(x_1)(1-y_1)\,f_{i_{r_1+1}}(x_1)\ldots(1-y_1)\,f_{i_{r_1+m_1}}(x_1)$$

$$\cdot[F_{i_{r_1+m_1+1}}(x_2-)-F_{i_{r_1+m_1+1}}(x_1)]\ldots[F_{i_{r_2-k_2-1}}(x_2-)-F_{i_{r_2-k_2-1}}(x_1)]$$

$$\cdot\,y_2\,f_{i_{r_2-k_2}}(x_2)\;y_2\,f_{i_{r_2-k_2+1}}(x_2)\ldots y_2\,f_{i_{r_2-1}}(x_{r_2})\;dy_2\,f_{i_{r_2}}(x_2)\ldots$$

...

$$\cdot \frac{1}{(r_p - 1 - k_p - m_{p-1} - r_{p-1})! m_{p-1}! k_p!} (1 - y_{p-1}) f_{i_{r_{p-1}+1}}(x_{p-1})(1 - y_{p-1}) f_{i_{r_{p-1}+2}}(x_{p-1}) \ldots (1 - y_{p-1}) f_{i_{r_{p-1}+m_{p-1}}}(x_{p-1})$$

$$\cdot [F_{i_{r_{p-1}+m_{p-1}+1}}(x_p -) - F_{i_{r_{p-1}+m_{p-1}+1}}(x_{p-1})] \ldots [F_{i_{r_p - k_p - 1}}(x_p -) - F_{i_{r_p - k_p - 1}}(x_{p-1})]$$

$$\cdot y_p f_{i_{r_p - k_p}}(x_p) y_p f_{i_{r_p - k_p + 1}}(x_p) \ldots y_p f_{i_{r_p - 1}}(x_p) dy_p f_{i_{r_p}}(x_p)$$

$$\cdot \frac{1}{(n - m_p - r_p)! m_p!} (1 - y_p) f_{i_{r_p+1}}(x_p) \ldots (1 - y_p) f_{i_{r_p+m_p}}(x_p) [1 - F_{i_{r_p+m_p+1}}(x_p)] \ldots [1 - F_{i_n}(x_p)]$$

şeklinde de yazılabilir. Son eşitlik,

$$f_{r_1, r_2, \ldots, r_p : n}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum_{m_p, k_p, \ldots, m_1, k_1} \Bigg\{ \left(\prod_{w=1}^{p+1} \frac{1}{(r_w - 1 - k_w - m_{w-1} - r_{w-1})!\, m_{w-1}!\, k_w!} \right)$$

$$\cdot \sum_P \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left[\prod_{w=1}^{p+1} \left(\prod_{\ell = r_{w-1}+1}^{r_{w-1}+m_{w-1}} (1 - y_{w-1}) f_{i_\ell}(x_{w-1}) \right) \left(\prod_{\ell = r_{w-1}+m_{w-1}+1}^{r_w - 1 - k_w} [F_{i_\ell}(x_w -) - F_{i_\ell}(x_{w-1})] \right) \right.$$

$$\left. \cdot \left(\prod_{\ell = r_w - k_w}^{r_w - 1} y_w f_{i_\ell}(x_w) \right) \right] \left(\prod_{t=1}^{p} f_{i_{r_t}}(x_t)\, dy_t \right) \Bigg\}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada,

$$v_{i_\ell}^{(w)} = y_w\, f_{i_\ell}(x_w) + F_{i_\ell}(x_w -)$$

ifadesi kullanılırsa

$$f_{r_1,r_2,\dots,r_p:n}(x_1,x_2,\dots,x_p)=\sum_{m_p,k_p,\dots,m_1,k_1}\left\{\left(\prod_{w=1}^{p+1}\frac{1}{(r_w-1-k_w-m_{w-1}-r_{w-1})!\,m_{w-1}!\,k_w!}\right)\right.$$

$$\cdot\sum_P\int_{F_{i_{r_1}}(x_1-)}^{F_{i_{r_1}}(x_1)}\int_{F_{i_{r_2}}(x_2-)}^{F_{i_{r_2}}(x_2)}\dots\int_{F_{i_{r_p}}(x_p-)}^{F_{i_{r_p}}(x_p)}\left[\prod_{w=1}^{p+1}\left(\prod_{\ell=r_{w-1}+1}^{r_{w-1}+m_{w-1}}[F_{i_\ell}(x_{w-1})-v_{i_\ell}^{(w-1)}]\right)\right.$$

$$\left.\left.\cdot\left(\prod_{\ell=r_{w-1}+m_{w-1}+1}^{r_w-1-k_w}[F_{i_\ell}(x_w-)-F_{i_\ell}(x_{w-1})]\right)\left(\prod_{\ell=r_w-k_w}^{r_w-1}[v_{i_\ell}^{(w)}-F_{i_\ell}(x_w-)]\right)\right]\left(\prod_{\vartheta=0}^{p-1}dv_{i_{r_{p-\vartheta}}}^{(p-\vartheta)}\right)\right\}$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitlikte, $\tau+\xi\le n$ olmak üzere

$$\sum_{\tau=0}^{n}\sum_{\xi=0}^{n}\frac{1}{(n-\tau-\xi)!\;\xi!\,\tau!}\sum_P\left(\prod_{\ell=1}^{\xi}G_{i_\ell}^{(1)}(x)\right)\left(\prod_{\ell=\xi+1}^{n-\tau}G_{i_\ell}^{(2)}(x)\right)\left(\prod_{\ell=n-\tau+1}^{n}G_{i_\ell}^{(3)}(x)\right)$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_P\prod_{l=1}^{n}[G_{i_l}^{(1)}(x)+G_{i_l}^{(2)}(x)+G_{i_l}^{(3)}(x)]$$

eşitliği göz önüne alınırsa

$$f_{r_1,r_2,\dots,r_p:n}(x_1,x_2,\dots,x_p)=\left(\prod_{w=1}^{p+1}\frac{1}{(r_w-1-r_{w-1})!}\right)\sum_P\int_{F_{i_{r_1}}(x_1-)}^{F_{i_{r_1}}(x_1)}\int_{F_{i_{r_2}}(x_2-)}^{F_{i_{r_2}}(x_2)}\dots\int_{F_{i_{r_p}}(x_p-)}^{F_{i_{r_p}}(x_p)}$$

$$\left(\prod_{w=1}^{p+1}\prod_{l=r_{w-1}+1}^{r_w-1}[F_{i_l}(x_{w-1})-v_{i_l}^{(w-1)}+F_{i_l}(x_w-)-F_{i_l}(x_{w-1})+v_{i_l}^{(w)}-F_{i_l}(x_w-)]\right)\prod_{\vartheta=0}^{p-1}dv_{i_{r_{p-\vartheta}}}^{(p-\vartheta)}$$

ifadesi elde edilir. Böylece, ispat tamamlanmış olur.

(5.4)'de $p=2$ alınırsa $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$'nin bileşik olasılık fonksiyonu,

$$f_{r,s:n}(x_1, x_2) = \frac{1}{(r-1)!(s-1-r)!(n-s)!} \sum_P \int_{F_{i_r}(x_1-)}^{F_{i_r}(x_1)} \int_{F_{i_s}(x_2-)}^{F_{i_s}(x_2)} \left(\prod_{l=1}^{r-1} v_{i_l}^{(1)} \right) \left(\prod_{l=r+1}^{s-1} (v_{i_l}^{(2)} - v_{i_l}^{(1)}) \right)$$

$$\cdot \left(\prod_{l=s+1}^{n} (1 - v_{i_l}^{(2)}) \right) dv_{i_s}^{(2)}\, dv_{i_r}^{(1)} \tag{5.5}$$

şeklinde elde edilir.

(5.4)'de $p=1$ alınırsa bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin *r*-inci sıralı istatistiğinin olasılık fonksiyonu,

$$f_{r:n}(x) = \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \sum_P \int_{F_{i_r}(x-)}^{F_{i_r}(x)} \left(\prod_{l=1}^{r-1} v_{i_l} \right) \left(\prod_{l=r+1}^{n} (1 - v_{i_l}) \right) dv_{i_r} \tag{5.6}$$

olarak elde edilir.

(5.1), (3.7)'de kullanılırsa $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \ldots, X_{r_p:n}$'nin bileşik dağılım fonksiyonu,

$$F_{r_1,r_2,\ldots,r_p:n}(x_1,x_2,\ldots,x_p)=\sum_{x_1=0}^{x_1}\sum_{x_2=x_1}^{x_2}\cdots\sum_{x_p=x_{p-1}}^{x_p}\left\{\sum_{m_p,k_p,\ldots,m_1,k_1}\right.$$

$$\left.\left[C_1\sum_P\left(\prod_{w=1}^{p+1}\prod_{\ell=r_{w-1}+m_{w-1}+1}^{r_w-1-k_w}[F_{i_\ell}(x_w-)-F_{i_\ell}(x_{w-1})]\right)\left(\prod_{t=1}^{p}\prod_{\ell=r_t-k_t}^{r_t+m_t}f_{i_\ell}(x_t)\right)\right]\right\} \tag{5.7}$$

şeklinde elde edilir.

(5.7)'de $p=2$ alınırsa $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$'nin bileşik dağılım fonksiyonu,

$$F_{r,s:n}(x_1,x_2)=\sum_{x_1=0}^{x_1}\sum_{x_2=x_1}^{x_2}\left\{\sum_{m_2=0}^{n-s}\sum_{k_2=0}^{s-1-r}\sum_{m_1=0}^{s-1-r}\sum_{k_1=0}^{r-1}\right.$$

$$\left[\frac{1}{(r-1-k_1)!\,(k_1+1+m_1)!\,(s-1-k_2-m_1-r)!\,(k_2+1+m_2)!\,(n-m_2-s)!}\right.$$

$$\cdot\sum_P\left(\prod_{\ell=1}^{r-1-k_1}F_{i_\ell}(x_1-)\right)\left(\prod_{\ell=r-k_1}^{r+m_1}f_{i_\ell}(x_1)\right)\left(\prod_{\ell=r+m_1+1}^{s-1-k_2}[F_{i_\ell}(x_2-)-F_{i_\ell}(x_1)]\right)$$

$$\left.\left.\cdot\left(\prod_{\ell=s-k_2}^{s+m_2}f_{i_\ell}(x_2)\right)\left(\prod_{\ell=s+m_2+1}^{n}[1-F_{i_\ell}(x_2)]\right)\right]\right\} \tag{5.8}$$

şeklinde elde edilir.

(5.7)'de $p=1$ alınırsa bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin *r*-inci sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu,

$$F_{r:n}(x)=\sum_{x=0}^{x}\left\{\sum_{m=0}^{n-r}\sum_{k=0}^{r-1}\left[\frac{1}{(r-1-k)!\,(k+1+m)!\,(n-m-r)!}\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\sum_{P}\left(\prod_{\ell=1}^{r-1-k}F_{i_\ell}(x-)\right)\left(\prod_{\ell=r-k}^{r+m}f_{i_\ell}(x)\right)\left(\prod_{\ell=r+m+1}^{n}[1-F_{i_\ell}(x)]\right)\right]\right\} \tag{5.9}$$

olarak elde edilir.

(5.4), (3.7)'de kullanılırsa bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik dağılım fonksiyonunun integral formu,

$$F_{r_1,r_2,\ldots,r_p:n}(x_1,x_2,\ldots,x_p)=C\sum_{P}\int_{0}^{F_{i_{r_1}}(x_1)}\int_{v_{i_{r_1}}^{(1)}}^{F_{i_{r_2}}(x_2)}\cdots\int_{v_{i_{r_{p-1}}}^{(p-1)}}^{F_{i_{r_p}}(x_p)}\left(\prod_{w=1}^{p+1}\prod_{l=r_{w-1}+1}^{r_w-1}(v_{i_l}^{(w)}-v_{i_l}^{(w-1)})\right)\prod_{\vartheta=0}^{p-1}dv_{i_{r_{p-\vartheta}}}^{(p-\vartheta)} \tag{5.10}$$

şeklinde elde edilir.

(5.10)'da $p=2$ alınırsa $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$'nin bileşik dağılım fonksiyonu,

$$F_{r,s:n}(x_1,x_2)=\frac{1}{(r-1)!\,(s-1-r)!\,(n-s)!}\sum_{P}\int_{0}^{F_{i_r}(x_1)}\int_{v_{i_r}^{(1)}}^{F_{i_s}(x_2)}\left(\prod_{l=1}^{r-1}v_{i_l}^{(1)}\right)\left(\prod_{l=r+1}^{s-1}(v_{i_l}^{(2)}-v_{i_l}^{(1)})\right)$$

$$\cdot\left(\prod_{l=s+1}^{n}(1-v_{i_l}^{(2)})\right)dv_{i_s}^{(2)}\,dv_{i_r}^{(1)} \tag{5.11}$$

şeklinde elde edilir.

(5.10)'da $p=1$ alınırsa bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin r-inci sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu,

$$F_{r:n}(x)=\frac{1}{(r-1)!\,(n-r)!}\sum_{P}\int_{0}^{F_{i_r}(x)}\left(\prod_{l=1}^{r-1}v_{i_l}\right)\left(\prod_{l=r+1}^{n}(1-v_{i_l})\right)dv_{i_r} \tag{5.12}$$

olarak elde edilir.

6. SONUÇLAR

Bu bölümde, sırasıyla bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin, bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin, bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin, bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılımları ile ilgili sonuçlar verilecektir.

Sonuç 6.1. Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin minimumunun olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{1:n}(x) = n\, f(x)\,[1-F(x)]^{n-1} \tag{6.1}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (2.3)'de $r=1$ alınırsa, (6.1) elde edilir.

Sonuç 6.2. Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin minimumunun dağılım fonksiyonu,

$$F_{1:n}(x) = 1-[1-F(x)]^{n} \tag{6.2}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (2.6)'da $r=1$ alınırsa, (6.2) elde edilir.

Sonuç 6.3. Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin maksimumunun olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{n:n}(x)=n\,[F(x)]^{n-1}\ f(x) \tag{6.3}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (2.3)'de $r=n$ alınırsa, (6.3) elde edilir.

Sonuç 6.4. Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin maksimumunun dağılım fonksiyonu,

$$F_{n:n}(x)=[F(x)]^{n} \tag{6.4}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (2.6)'da $r=n$ alınırsa, (6.4) elde edilir.

Sonuç 6.5. Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin minimum ve maksimumunun bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{1,n:n}(x_1, x_2) = n\,(n-1)\; f(x_1)\,[F(x_2) - F(x_1)]^{n-2}\; f(x_2) \tag{6.5}$$

şeklinde ifade edilir.

İspat. (2.2)'de $r = 1$ ve $s = n$ alınırsa, (6.5) elde edilir.

Sonuç 6.6. Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin minimum ve maksimumunun bileşik dağılım fonksiyonu,

$$F_{1,n:n}(x_1, x_2) = \sum_{j_1=1}^{n} \frac{n!}{j_1!\,(n-j_1)!}[F(x_1)]^{j_1}\,[F(x_2) - F(x_1)]^{n-j_1} \tag{6.6}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (2.5)'de $r = 1$ ve $s = n$ alınırsa, (6.6) elde edilir.

Sonuç 6.7. Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı ilk p tanesinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{1,2,\dots,p:n}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \frac{n!}{(n-p)!}[1-F(x_p)]^{n-p}\left(\prod_{t=1}^{p} f(x_t)\right) \tag{6.7}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (2.1)'de $r_1 = 1,\ r_2 = 2, \dots, r_p = p$ alınırsa, (6.7) elde edilir.

Sonuç 6.8. Bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin minimumunun olasılık fonksiyonu,

$$f_{1:n}(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{n!}{(1+m)!\,(n-m-1)!}[f(x)]^{1+m}[1-F(x)]^{n-m-1} \tag{6.8}$$

veya

$$f_{1:n}(x) = \int_{F(x-)}^{F(x)} n(1-v)^{n-1}dv \tag{6.9}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (3.3) ve (3.6)'da $r = 1$ alınırsa, sırasıyla (6.8) ve (6.9) elde edilir.

Sonuç 6.9. Bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin minimumunun dağılım fonksiyonu,

$$F_{1:n}(x) = \sum_{x=0}^{x} \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} \frac{n!}{(1+m)!\,(n-m-1)!} [f(x)]^{1+m} [1-F(x)]^{n-m-1} \right\} \tag{6.10}$$

veya

$$F_{1:n}(x) = \int_{0}^{F(x)} n(1-v)^{n-1} dv \tag{6.11}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (3.10) ve (3.13)'de $r=1$ alınırsa, sırasıyla (6.10) ve (6.11) elde edilir.

Sonuç 6.10. Bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin maksimumunun olasılık fonksiyonu,

$$f_{n:n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-k)!\,(k+1)!} [F(x-)]^{n-1-k} [f(x)]^{k+1} \tag{6.12}$$

veya

$$f_{n:n}(x) = \int_{F(x-)}^{F(x)} n v^{n-1} dv \tag{6.13}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (3.3) ve (3.6)'da $r = n$ alınırsa, sırasıyla (6.12) ve (6.13) elde edilir.

Sonuç 6.11. Bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin maksimumunun dağılım fonksiyonu,

$$F_{n:n}(x) = \sum_{x=0}^{x} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-k)!\,(k+1)!} [F(x-)]^{n-1-k} [f(x)]^{k+1} \right\} \tag{6.14}$$

veya

$$F_{n:n}(x) = \int_{0}^{F(x)} n v^{n-1} dv \tag{6.15}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (3.10) ve (3.13)'de $r = n$ alınırsa, sırasıyla (6.14) ve (6.15) elde edilir.

Sonuç 6.12. Bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin minimum ve maksimumunun bileşik olasılık fonksiyonu,

$$f_{1,n:n}(x_1, x_2) = \sum_{k_2=0}^{n-2} \sum_{m_1=0}^{n-2} \frac{n![f(x_1)]^{1+m_1}[F(x_2-)-F(x_1)]^{n-k_2-m_1-2}[f(x_2)]^{k_2+1}}{(1+m_1)!\,(n-k_2-m_1-2)!\,(k_2+1)!} \tag{6.16}$$

veya

$$f_{1,n:n}(x_1, x_2) = \int_{F(x_1-)}^{F(x_1)} \int_{F(x_2-)}^{F(x_2)} n(n-1)(v_2-v_1)^{n-2}\, dv_2\, dv_1 \tag{6.17}$$

şeklinde ifade edilir.

İspat. (3.2) ve (3.5)'de $r=1$ ve $s=n$ alınırsa, sırasıyla (6.16) ve (6.17) elde edilir.

Sonuç 6.13. Bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin minimum ve maksimumunun bileşik dağılım fonksiyonu,

$$F_{1,n:n}(x_1, x_2) = \sum_{x_1=0}^{x_1} \sum_{x_2=x_1}^{x_2}$$

$$\left\{ \sum_{k_2=0}^{n-2} \sum_{m_1=0}^{n-2} \frac{n![f(x_1)]^{1+m_1}[F(x_2-)-F(x_1)]^{n-k_2-m_1-2}[f(x_2)]^{k_2+1}}{(1+m_1)!\,(n-k_2-m_1-2)!\,(k_2+1)!} \right\} \tag{6.18}$$

veya

$$F_{1,n:n}(x_1, x_2) = \int_0^{F(x_1)} \int_{v_1}^{F(x_2)} n(n-1)(v_2 - v_1)^{n-2} \, dv_2 \, dv_1 \tag{6.19}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (3.9) ve (3.12)'de $r=1$ ve $s=n$ alınırsa, sırasıyla (6.18) ve (6.19) elde edilir.

Sonuç 6.14. Bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı ilk p tanesinin bileşik olasılık fonksiyonu,

$$f_{1,2,\ldots,p:n}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum_{m_p=0}^{n-p} \frac{n!}{(1+m_p)!\,(n-m_p-p)!} \left(\prod_{\zeta=1}^{p-1} f(x_\zeta) \right) [f(x_p)]^{1+m_p} [1-F(x_p)]^{n-m_p-p} \tag{6.20}$$

veya

$$f_{1,2,\ldots,p:n}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \int_{F(x_1-)}^{F(x_1)} \int_{F(x_2-)}^{F(x_2)} \cdots \int_{F(x_p-)}^{F(x_p)} \frac{n!}{(n-p)!} (1-v_p)^{n-p} \prod_{\vartheta=0}^{p-1} dv_{p-\vartheta} \tag{6.21}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (3.1) ve (3.4)'de $r_1 = 1,\ r_2 = 2,\ \ldots,\ r_p = p$ alınırsa, sırasıyla (6.20) ve (6.21) elde edilir.

Sonuç 6.15. Bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı ilk p tanesinin bileşik dağılım fonksiyonu,

$$F_{1,2,\ldots,p:n}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum_{x_1=0}^{x_1} \sum_{x_2=x_1}^{x_2} \cdots \sum_{x_p=x_{p-1}}^{x_p} \left\{ \sum_{m_p=0}^{n-p} \frac{n!}{(1+m_p)!\,(n-m_p-p)!} \cdot \left(\prod_{\zeta=1}^{p-1} f(x_\zeta) \right) [f(x_p)]^{1+m_p} [1-F(x_p)]^{n-m_p-p} \right\} \tag{6.22}$$

veya

$$F_{1,2,\ldots,p:n}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \int_0^{F(x_1)} \int_{v_1}^{F(x_2)} \cdots \int_{v_{p-1}}^{F(x_p)} \frac{n!}{(n-p)!} (1-v_p)^{n-p} \prod_{\vartheta=0}^{p-1} dv_{p-\vartheta} \tag{6.23}$$

şeklinde ifade edilir.

İspat. (3.8) ve (3.11)'de $r_1 = 1,\ r_2 = 2,\ \ldots,\ r_p = p$ alınırsa, sırasıyla (6.22) ve (6.23) elde edilir.

Sonuç 6.16. Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin minimumunun olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{1:n}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{P} f_{i_1}(x)\left(\prod_{\ell=2}^{n}[1-F_{i_\ell}(x)]\right) \tag{6.24}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (4.3)'de $r=1$ alınırsa, (6.24) elde edilir.

Sonuç 6.17. Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin minimumunun dağılım fonksiyonu,

$$F_{1:n}(x) = 1-\left\{\frac{1}{n!}\sum_{P}\prod_{\ell=1}^{n}[1-F_{i_\ell}(x)]\right\} \tag{6.25}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (4.6)'da $r=1$ alınırsa, (6.25) elde edilir.

Sonuç 6.18. Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin maksimumunun olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{n:n}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{P}\left(\prod_{\ell=1}^{n-1}F_{i_\ell}(x)\right)f_{i_n}(x) \tag{6.26}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (4.3)'de $r = n$ alınırsa, (6.26) elde edilir.

Sonuç 6.19. Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin maksimumunun dağılım fonksiyonu,

$$F_{n:n}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{P} \prod_{\ell=1}^{n} F_{i_\ell}(x) \tag{6.27}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (4.6)'da $r = n$ alınırsa, (6.27) elde edilir.

Sonuç 6.20. Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin minimum ve maksimumunun bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{1,n:n}(x_1, x_2) = \frac{1}{(n-2)!}\sum_{P} f_{i_1}(x_1)\left(\prod_{\ell=2}^{n-1}[F_{i_\ell}(x_2) - F_{i_\ell}(x_1)]\right) f_{i_n}(x_2) \tag{6.28}$$

şeklinde ifade edilir.

İspat. (4.2)'de $r=1$ ve $s=n$ alınırsa, (6.28) elde edilir.

Sonuç 6.21. Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin minimum ve maksimumunun bileşik dağılım fonksiyonu,

$$F_{1,n:n}(x_1, x_2)=\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{1}{j!(n-j)!}\sum_{P}\left(\prod_{\ell=1}^{j} F_{i_\ell}(x_1)\right)\left(\prod_{\ell=j+1}^{n}[F_{i_\ell}(x_2)-F_{i_\ell}(x_1)]\right)\right\} \qquad (6.29)$$

olarak ifade edilir.

İspat. (4.5)'de $r=1$ ve $s=n$ alınırsa, (6.29) elde edilir.

Sonuç 6.22. Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı ilk p tanesinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{1,2,\ldots,p:n}(x_1, x_2, \ldots, x_p)=\frac{1}{(n-p)!}\sum_{P}\left(\prod_{\ell=p+1}^{n}[F_{i_\ell}(x_w)-F_{i_\ell}(x_{w-1})]\right)\left(\prod_{t=1}^{p} f_{i_t}(x_t)\right) \qquad (6.30)$$

olarak ifade edilir.

İspat. (4.1)'de $r_1=1,\ r_2=2, \ldots, \ r_p=p$ alınırsa, (6.30) elde edilir.

Sonuç 6.23. Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin minimumunun olasılık fonksiyonu,

$$f_{1:n}(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \left\{ \frac{1}{(1+m)!\,(n-m-1)!} \sum_{P} \left(\prod_{\ell=1}^{1+m} f_{i_\ell}(x) \right) \left(\prod_{\ell=m+2}^{n} [1-F_{i_\ell}(x)] \right) \right\} \tag{6.31}$$

veya

$$f_{1:n}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{P} \int_{F_{i_1}(x-)}^{F_{i_1}(x)} \left(\prod_{l=2}^{n} (1-v_{i_l}) \right) dv_{i_1} \tag{6.32}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (5.3) ve (5.6)’da $r=1$ alınırsa, sırasıyla (6.31) ve (6.32) elde edilir.

Sonuç 6.24. Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin minimumunun dağılım fonksiyonu,

$$F_{1:n}(x) = \sum_{x=0}^{x} \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} \left[\frac{1}{(1+m)!\,(n-m-1)!} \sum_{P} \left(\prod_{\ell=1}^{1+m} f_{i_\ell}(x) \right) \left(\prod_{\ell=m+2}^{n} [1-F_{i_\ell}(x)] \right) \right] \right\} \tag{6.33}$$

veya

$$F_{1:n}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{P}\int_{0}^{F_{i_1}(x)}\left(\prod_{l=2}^{n}(1-v_{i_l})\right)dv_{i_1} \tag{6.34}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (5.9) ve (5.12)’de $r=1$ alınırsa, sırasıyla (6.33) ve (6.34) elde edilir.

Sonuç 6.25. Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin maksimumunun olasılık fonksiyonu,

$$f_{n:n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{1}{(n-1-k)!\,(k+1)!}\sum_{P}\left(\prod_{\ell=1}^{n-1-k}F_{i_\ell}(x-)\right)\left(\prod_{\ell=n-k}^{n}f_{i_\ell}(x)\right)\right\} \tag{6.35}$$

veya

$$f_{n:n}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{P}\int_{F_{i_n}(x-)}^{F_{i_n}(x)}\left(\prod_{l=1}^{n-1}v_{i_l}\right)dv_{i_n} \tag{6.36}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (5.3) ve (5.6)’da $r=n$ alınırsa, sırasıyla (6.35) ve (6.36) elde edilir.

Sonuç 6.26. Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin maksimumunun dağılım fonksiyonu,

$$F_{n:n}(x) = \sum_{x=0}^{x} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{(n-1-k)!\,(k+1)!} \sum_{P} \left(\prod_{\ell=1}^{n-1-k} F_{i_\ell}(x-) \right) \left(\prod_{\ell=n-k}^{n} f_{i_\ell}(x) \right) \right] \right\} \tag{6.37}$$

veya

$$F_{n:n}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{P} \int_{0}^{F_{i_n}(x)} \left(\prod_{l=1}^{n-1} v_{i_l} \right) dv_{i_n} \tag{6.38}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (5.9) ve (5.12)'de $r = n$ alınırsa, sırasıyla (6.37) ve (6.38) elde edilir.

Sonuç 6.27. Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin minimum ve maksimumunun bileşik olasılık fonksiyonu,

$$f_{1,n:n}(x_1, x_2) = \sum_{k_2=0}^{n-2} \sum_{m_1=0}^{n-2} \left\{ \frac{1}{(1+m_1)!\,(n-k_2-m_1-2)!\,(k_2+1)!} \sum_{P} \left(\prod_{\ell=1}^{1+m_1} f_{i_\ell}(x_1) \right) \right.$$
$$\left. \cdot \left(\prod_{\ell=m_1+2}^{n-1-k_2} [F_{i_\ell}(x_2-) - F_{i_\ell}(x_1)] \right) \left(\prod_{\ell=n-k_2}^{n} f_{i_\ell}(x_2) \right) \right\} \tag{6.39}$$

veya

$$f_{1,n:n}(x_1,x_2)=\frac{1}{(n-2)!}\sum_P \int_{F_{i_1}(x_1-)}^{F_{i_1}(x_1)} \int_{F_{i_n}(x_2-)}^{F_{i_n}(x_2)} \left(\prod_{l=2}^{n-1}(v_{i_l}^{(2)}-v_{i_l}^{(1)})\right) dv_{i_n}^{(2)}\, dv_{i_1}^{(1)} \tag{6.40}$$

şeklinde ifade edilir.

İspat. (5.2) ve (5.5)'de $r=1$ ve $s=n$ alınırsa, sırasıyla (6.39) ve (6.40) elde edilir.

Sonuç 6.28. Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin minimum ve maksimumunun bileşik dağılım fonksiyonu,

$$F_{1,n:n}(x_1,x_2)=\sum_{x_1=0}^{x_1}\sum_{x_2=x_1}^{x_2}\left\{\sum_{k_2=0}^{n-2}\sum_{m_1=0}^{n-2}\left[\frac{1}{(1+m_1)!\,(n-k_2-m_1-2)!\,(k_2+1)!}\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\sum_P\left(\prod_{\ell=1}^{1+m_1} f_{i_\ell}(x_1)\right)\left(\prod_{\ell=m_1+2}^{n-1-k_2}[F_{i_\ell}(x_2-)-F_{i_\ell}(x_1)]\right)\left(\prod_{\ell=n-k_2}^{n} f_{i_\ell}(x_2)\right)\right]\right\} \tag{6.41}$$

veya

$$F_{1,n:n}(x_1,x_2)=\frac{1}{(n-2)!}\sum_P \int_0^{F_{i_1}(x_1)} \int_{v_{i_1}^{(1)}}^{F_{i_n}(x_2)} \left(\prod_{l=2}^{n-1}(v_{i_l}^{(2)}-v_{i_l}^{(1)})\right) dv_{i_n}^{(2)}\, dv_{i_1}^{(1)} \tag{6.42}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (5.8) ve (5.11)'de $r=1$ ve $s=n$ alınırsa, sırasıyla (6.41) ve (6.42) elde edilir.

Sonuç 6.29. Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı ilk p tanesinin bileşik olasılık fonksiyonu,

$$f_{1,2,\dots,p:n}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \sum_{m_p=0}^{n-p} \left\{ \frac{1}{(1+m_p)!\,(n-m_p-p)!} \sum_P \left(\prod_{\zeta=1}^{p-1} f_{i_\zeta}(x_\zeta) \right) \right.$$
$$\left. \cdot \left(\prod_{\ell=p}^{p+m_p} f_{i_\ell}(x_p) \right) \left(\prod_{\ell=p+m_p+1}^{n} [1-F_{i_\ell}(x_p)] \right) \right\} \tag{6.43}$$

veya

$$f_{1,2,\dots,p:n}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \frac{1}{(n-p)!} \sum_P \int_{F_{i_1}(x_1-)}^{F_{i_1}(x_1)} \int_{F_{i_2}(x_2-)}^{F_{i_2}(x_2)} \cdots \int_{F_{i_p}(x_p-)}^{F_{i_p}(x_p)} \left(\prod_{l=p+1}^{n} (1-v_{i_l}^{(p)}) \right) \prod_{\vartheta=0}^{p-1} dv_{i_{p-\vartheta}}^{(p-\vartheta)} \tag{6.44}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (5.1) ve (5.4)'de $r_1=1,\ r_2=2, \dots, r_p=p$ alınırsa, sırasıyla (6.43) ve (6.44) elde edilir.

Sonuç 6.30. Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin ardışık ilk *p* tanesinin bileşik dağılım fonksiyonu,

$$F_{1,2,\ldots,p:n}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum_{x_1=0}^{x_1} \sum_{x_2=x_1}^{x_2} \cdots \sum_{x_p=x_{p-1}}^{x_p} \left\{ \sum_{m_p=0}^{n-p} \left[\frac{1}{(1+m_p)!\,(n-m_p-p)!} \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot \sum_{P} \left(\prod_{\zeta=1}^{p-1} f_{i_\zeta}(x_\zeta) \right) \left(\prod_{\ell=p}^{p+m_p} f_{i_\ell}(x_p) \right) \left(\prod_{\ell=p+m_p+1}^{n} [1-F_{i_\ell}(x_p)] \right) \right] \right\} \tag{6.45}$$

veya

$$F_{1,2,\ldots,p:n}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \frac{1}{(n-p)!} \sum_{P} \int_{0}^{F_{i_1}(x_1)} \int_{v_{i_1}^{(1)}}^{F_{i_2}(x_2)} \cdots \int_{v_{i_{p-1}}^{(p-1)}}^{F_{i_p}(x_p)} \left(\prod_{l=p+1}^{n} (1-v_{i_l}^{(p)}) \right) \prod_{\vartheta=0}^{p-1} dv_{i_{p-\vartheta}}^{(p-\vartheta)} \tag{6.46}$$

şeklinde ifade edilir.

İspat. (5.7) ve (5.10)'da $r_1 = 1,\ r_2 = 2,\ \ldots,\ r_p = p$ alınırsa, sırasıyla (6.45) ve (6.46) elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] **Fisher, R. A.,** 1954. Statistical methods for research workers, Hafner Publishing Company Inc., New York.

[2] **Wilks, S. S.,** 1947. Order statistics, *Annual and Summer Meeting*, New Haven, University of New Haven October 1947, 6-50 (in USA).

[3] **Reiss, R. -D.,** 1989. Approximate distributions of order statistics, Springer-Verlag, New York.

[4] **Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N.,** 1992. A first course in order statistics, John Wiley and Sons Inc., New York.

[5] **David, H. A.,** 1981. Order statistics, John Wiley and Sons Inc., New York.

[6] **Corley, H. W.,** 1984. Multivariate order statistics, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **13**, 1299-1304.

[7] **Balakrishnan, N.,** 1986. Order statistics from discrete distributions, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **15**, 657-675.

[8] **Khatri, C. G.,** 1962. Distribution of order statistics for discrete case, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **14**, 167-171.

[9] **Nagaraja, H. N.,** 1986. Structure of discrete order statistics, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **13**, 165-177.

[10] **Nagaraja, H. N.,** 1992. Order statistics from discrete distributions, *Statistics*, **23**, 189-216.

[11] **Gan, G. and Bain, L. J.,** 1995. Distribution of order statistics for discrete parents with applications to censored sampling, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **44**, 37-46.

[12] **Cao, G. and West, M.,** 1997. Computing distributions of order statistics, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **26**, 755-764.

[13] **Vaughan, R. J. and Venables, W. N.,** 1972. Permanent expressions for order statistics densities, *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser. B, **34**, 308-310.

[14] **Balakrishnan, N.,** 2007. Permanents, order statistics, outliers and robustness, *Revista Matematica Complutense*, **20**,7-107.

[15] **Bapat, R. B. and Beg, M. I.,** 1989. Order statistics for nonidentically distributed variables and permanents, *Sankhyā*, Ser. A, **51**, 79-93.

[16] **Ronald, E. W.,** 1968. Introduction to statistics, Collier Macmillan Limited, London.

[17] **Milton, J. S. and Arnold, J. C.,** 2003. Introduction to probability and statistics, McGraw-Hill, Boston.

[18] **Akdeniz, F.**, 2002. Olasılık ve istatistik, Baki Kitabevi, Adana.

ÖZGEÇMİŞ

Fahrettin ÖZBEY, 1982 yılında Elazığ'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Elazığ'da tamamladı. 2005 yılında Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 2007 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Teorisi Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans çalışmasını tamamladı. 2008 yılında Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora eğitimine başladı. Bitlis Eren Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü'nde araştırma görevlisidir.