ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KONTAK GEOMETRİDE YÜZEYLER TEORİSİ

İsmail GÖK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2010

TEZ ONAYI

İsmail GÖK tarafından hazırlanan " **KONTAK GEOMETRİDE YÜZEYLER TEORİSİ** " adlı tez çalışması 07/07/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği / oy çokluğu** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: *Prof.Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU*

Jüri Üyeleri:

Başkan: *Prof.Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU*
Bilecik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: *Prof.Dr. Necmettin TANRIÖVER*
Başkent Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği Bölümü

Üye: *Prof.Dr. Yusuf YAYLI*
Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: *Prof.Dr. Baki KARLIĞA*
Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: *Doç.Dr. F. Nejat EKMEKCİ*
Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof.Dr. Orhan ATAKOL
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

KONTAK GEOMETRİDE YÜZEYLER TEORİSİ

İsmail GÖK

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

Bu doktora tezi beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm tezimin giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, önbilgiler ve diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar, lemmalar ve teoremler kaynakları ile birlikte verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Kontak geometri ile ilgili temel tanımlar, lemmalar ve teoremler kaynakları ile birlikte verilmiştir.

Dördüncü bölümde Baikousis ve Blair'in 1991'de yaptıkları makalede yer alan çalışmalarına ve bu makalenin Lorentz karşılığını incelemiş olan Camcı'nın elde ettiği sonuçlara yer verilmiştir. Ayrıca Camcı ve Gök tarafından elde edilen bir teorem de bu bölümde ispatı ile birlikte yer almaktadır.

Bu çalışmanın orijinal kısımları son bölümde verilmiştir. Bu bölümde $\mathbb{E}^3(-3)$ Sasaki uzayında Camcı tarafından yapılan vektörel çarpım tanımı ve özelikleri verilmiştir. Ayrıca, $\mathbb{E}^3(-3)$ Sasaki uzayında herhangi bir yüzeyin şekil operatörü matrisi, Gauss eğriliği, Ortalama eğriliği ve en önemlisi ilk kez $\mathbb{E}^3(-3)$ Sasaki uzayında bir yüzey için Gauss Egregium teoremi elde edilmiştir.

2010 , 153 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kontak geometri, Kontak manifold, Kontak yapı, Kontak metrik manifold, Kontak form, Hemen hemen kontak manifold, İntegral alt manifoldu, Sasaki manifoldu

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

SURFACES THEORY IN CONTACT GEOMETRY

İsmail GÖK

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, preliminaries, some necessary definitions, lemmas and theorems that will be needed for later use are given.

In the third section, contact geometry, the basic definitions, lemmas and theorems been provided with resources.

In the fourth section, the results of the Baikousis and Blair's article in 1991 and its extension to Lorentz space are given by Camcı. Furthermore, the proof of a theorem which was obtained by Camcı and Gök is given in this section.

The original part of this study are given in the last section. In this section, definition of the vector product and its features in $\mathbb{E}^3(-3)$ Sasaki space, defined by Camcı, are given. Moreover, $\mathbb{E}^3(-3)$ Sasaki space for any surface shape operator matrix, Gaussian curvature, mean curvature, and most importantly the first time, $\mathbb{E}^3(-3)$ Sasaki-space surface for Gauss Egregium theorem is obtained.

2010 , 153 pages

Key Words: Contact geometry, contact manifold, contact structure, contact metric manifold, Contact form, Almost contact manifold, integral submanifold, Sasaki manifold

TEŞEKKÜR

Bana bu konuda çalışma imkanı sağlayan ve çalışmalarım süresince yakın ilgi ve desteğini hiç esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof.Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU (Bilecik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü)'na, fikirleriyle beni yönlendiren değerli hocalarım Prof.Dr. Necmettin TANRIÖVER (Başkent Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği Bölümü)'e ve Prof.Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü)'ya en derin saygılarımı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Tezimle ilgili fikirleriyle ve sorularıyla bana destek olan Doç.Dr. Nejat EKMEKCİ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü)'ye, Doç.Dr. Kazım İLARSLAN (Kırıkkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü)'a ve tezimin temellerinin atılmasında ciddi katkıları bulunan, bana manevi abilik yapan Yrd.Doç.Dr. Çetin CAMCI (Çanakkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü)'ya en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmalarım sırasında benden maddi yardımlarını esirgemeyen TÜBİTAK kurumuna teşekkür ederim.

Ayrıca tezimi aldığım ilk günden bu yana manevi olarak her zaman yanımda olan sevgili eşim Özlem GÖK'e, biricik kızım Ecrin GÖK'e ve de beni bu günlere getiren üzerimde çok büyük hakları bulunan babam İbrahim GÖK ile annem Zeliha GÖK'e saygı ve sevgilerimi sunmayı bir borç bilirim.

İsmail GÖK
Ankara, Temmuz 2010

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

M^n	n-boyutlu Riemann manifoldu
η	kontak 1-form
(M, η)	kontak manifold
(φ, ξ, η)	hemen hemen kontak yapı
(M, φ, ξ, η)	hemen hemen kontak manifold
$(\varphi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$	hemen hemen kontak metrik yapı
$(M, \varphi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$	hemen hemen kontak metrik manifold
D, ∇	Riemann koneksiyonları
A_ξ	şekil operatörü
R	Riemann eğrilik tensörü
K	bir yüzeyin Gauss eğriliği
H	bir yüzeyin ortalama eğriliği
$\wedge$	kontak manifoldlarda vektörel çarpım
$[\ ,\ ]$	Lie (Bracket) operatörü
Γ_{ij}^k	Chrisstoffel sembolleri

1. GİRİŞ

Kontak geometri ilk olarak Christian Huygens, Barrow ve Isaac Newton tarafından yapılan çalışmalar ile ortaya çıkmıştır. Kontak dönüşümler teorisi daha sonraları S. Lie tarafından bazı diferensiyel denklemlerin çözümünü bulmak için geliştirilmiştir. Daha sonra Japon matematikçi S. Sasaki ilk kez 1960 yılında bir kontak manifold yapısı olan ve daha sonra kendi adı ile anılacak olan Sasaki manifold tanımını yapmıştır. Kontak geometri günümüzde de pek çok matematikçinin ilgisini çekmektedir. Doktora çalışmam süresince özelikle D.E. Blair'in kitap ve makaleleri, Japon matematikçi K. Yano'nun kitapları çok yararlı olmuştur. Ayrıca yüzeyler teorisini oluşturabilmem için eğriler teorisini iyi bilmem gerektiğini düşündüğümden Çetin Camcı'nın doktora tezini ayrıntılarıyla okudum. Bu sayede tezimin gelişmesinde çok önemli adımlar attım. İlk kez kendisi tarafından bir makalesinde ortaya attığı Kontak manifoldlarda 'Vektörel çarpım' tanımını kullanarak tezimin temelini oluşturdum. Ayrıca Baikoussis ve Blair, 1994'deki çalışmaları ile "$\mathbb{E}^3(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında $N^2(c)$ silindirinde yatan herhangi bir Legendre eğrisi 1-tiplidir ancak ve ancak Legendre eğrisi sabit eğriliklidir." önermesini ispatlamıştır. Camcı ise tezinde bu teoriyi herhangi bir sonlu tipte eğri için de ispatlamıştır. Camcı tezinin bu bölümünde $N^2(c)$ silindirinde yatan herhangi 1-tipinde eğrinin sabit eğrilikli olması gerektiğini fakat bunun tersinin olmadığını göstermiştir. Daha sonra bu teori üzerinde ortak çalışmamız sonucu Baikoussis ve Blair'in "$\mathbb{E}^{2n+1}(-3)$ Sasaki uzayında kompak integrallenebilir alt manifoldunun 1-tipli olması için gerek ve yeter koşulun, alt manifoldun $N^{2n}(c)$ silindirinde minimal olmasıdır." şeklinde verdikleri önermeyi "$N^{2n}(c)$ silindirinde yatan alt manifoldun 1-tipli olması için gerek ve yeter koşul alt manifoldun silindirde minimal olmasıdır." şeklinde geliştirdik. Tezimin 4. bölümünde bu teorimiz ile ilgili teoremi (Teorem 4.3) ispatı ile birlikte verdim. Üstelik teorinin gelişim sürecinin daha iyi takibi için bu bölümde, önceki teorilere Camcı'nın doktora tezinden yararlanarak ispatları ile birlikte yer verdim.

Öklid uzayında eğriler ve yüzeyler ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Bu konuda Gauss'un pek çok çalışmaları vardır. Hatta Gauss'un Egregium ve Gauss-Bonnet teoremleri matematiğin en güzel teoremlerinden ikisidir. Bu teoremler matematikte pek çok uygulama alanı da bulmuştur. Gauss gibi pek çok matematikçinin eğriler ve yüzeyler teorisinin gelişimine katkıları olmuştur. Baikoussis ve Blair göstermişlerdir ki, $\mathbb{E}^3(-3)$ Sasaki uzayındaki Legendre eğrileri üç boyutlu Öklid uzayına göre daha doğal eğrilerdir. Benzer şekilde görebiliriz ki, $\mathbb{E}^3(-3)$ Sasaki uzayındaki integral yüzeyleri 3 boyutlu Öklid uzayına göre daha doğal yüzeylerdir. Kontak geometrinin fizik, optik, mekanik, kontrol teori gibi pek çok alanda uygulaması vardır (Gieges 2001, Camcı 2007). Bu açıdan da bakıldığında kontak geometride eğriler ve yüzeyler teorisi önem kazanmaktadır. Bu tür bir alanda eğriler teorisi çalışmak bile yeterince zor iken yüzeyler teorisi çalışmak daha da zordur. Bizim bu tezde yaptığımız incelemeler ve orijinal teoriler 'Vektörel çarpım' tanımlaması ile mümkün olmuştur. Bu yüzden bu çalışmanın 5. bölümünde Camcı tarafından tanımlanan 'Vektörel çarpım' tanımı ile ilgili teoremler ispatları ile birlikte verilmiştir. Ayrıca bu bölümde $\mathbb{E}^3(-3)$ Sasaki uzayında herhangi bir yüzeyin şekil operatörü matrisi, Gauss eğriliği, Ortalama eğriliği ve bence en önemlisi ilk kez $\mathbb{R}^3(-3)$ Sasaki uzayında bir yüzey için Gauss Egregium teoremi elde edilmiştir. Bu sebepten dolayı tezimizin 5. bölümü genelde orijinal sonuçlarımız için kullanılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖNBİLGİLER

2.1 Riemann Manifoldu ve Riemann Koneksiyonu

Tanım 2.1 ***(Riemann metriği):*** *M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde tanımlı bir g simetrik bi-lineer formu pozitif tanımlı ise*

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, \mathbb{E})$$

şeklinde tanımlı bir $(0, 2)$ tipinde g metrik tensörüne M de ***Riemann metriği*** *adı verilir (Hacısalihoğlu 1980).*

Tanım 2.2 ***(Riemann manifoldu):*** *M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde bir g Riemann metriği tanımlanabiliyorsa (M, g) ikilisine bir* ***Riemann manifoldu*** *denir. Eğer g Riemann metriğinde pozitif tanımlılık aksiyomu yerine non-dejenere aksiyomunu sağlıyorsa (M, g) ikilisine bir* ***yarı-Riemann manifoldu*** *denir (Hacısalihoğlu 2003).*

Teorem 2.1 *V vektör uzayının bir bazı $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olsun.*

$$\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$$

olmak üzere $\forall X \in V$ vektörü

$$X = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(X, \varepsilon_i)\varepsilon_i$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir (O' Neill 1983).

Tanım 2.3 ***(Kovaryant türev):*** *Bir Riemann manifoldu M ve M üzerinde bir Riemann koneksiyonu D olsun. D nin M ye ait bir bölge üzerindeki*

$$D : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

bi-lineer dönüşümü $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, h \in C^\infty(M, \mathbb{E})$ için

$i)$ $D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z$

$ii)$ $D_{X+Y} Z = D_X Z + D_Y Z$

iii) $D_{fX}Y = fD_XY$

iv) $D_X(fY) = fD_XY + X(f)Y$

özeliklerini sağlıyorsa D *ye* M *üzerinde tanımlı bir afin koneksiyon veya* ***kovaryant türev*** *adı verilir (Hacısalihoğlu 2003).*

Tanım 2.4 ***(Levi-Civita koneksiyonu):*** (M, g) *bir Riemann manifoldu ve* D *de* M *üzerinde tanımlı bir afin koneksiyon olsun. O zaman* $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ *olmak üzere* D *dönüşümü*

i) $D_XY - D_YX = [X, Y]$ *(sıfır torsiyon özeliği)*

ii) $Zg(X, Y) = g(D_ZX, Y) + g(X, D_ZY)$ *(*D *nin metrikle bağdaşabilme özeliği)*

şartlarını sağlıyorsa D *ye* M *nin* ***Levi-Civita koneksiyonu*** *denir (Hacısalihoğlu 2003).*

Tanım 2.5 ***(Şekil operatörü):*** $\overline{M}$ *ve* M*, sırasıyla,* n *ve* $n+k$ *boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere* $\overline{M}$*,* M *nin alt manifoldu olsun.* M *de normal birim vektör alanı* ε *ve* $D_X\varepsilon$ *nın teğet ve normal bileşenleri, sırasıyla,* $-A_\varepsilon(X)$ *ve* $\nabla^\perp_X\varepsilon$ *olmak üzere,*

$$A : \chi(M) \times \chi^\perp(M) \to \chi(M)$$

dönüşümü iyi tanımlıdır. Böylece;

$$D_X\varepsilon = -A_\varepsilon(X) + \nabla^\perp_X\varepsilon \tag{2.1}$$

biçiminde tanımlı denkleme ***Weingarten denklemi*** *adı verilir. Burada* A_ε *ya* ***şekil operatörü****,* $\nabla^\perp$ *ifadesine de* M *nin* ***normal demetindeki koneksiyon*** *adı verilir (Hacısalihoğlu 2003).*

2.2 Dönüşümlerin Yarı Grubu

Tanım 2.6 ***(Dönüşümlerin yarı grubu):*** S *bir topolojik uzay ve* Γ *da* S *den* S *ye dönüşümlerin cümlesi olsun. Aşağıdaki özelikleri sağlayan* Γ *cümlesine,* S *topolojik uzayının* ***dönüşümler yarı grubu*** *denir.*

1) $\forall f \in \Gamma$ *dönüşümü,* $U, V \subset S$ *açık alt cümleler iken* $f : U \to V$ *şeklinde homeomorfizimdir.*

2) Şayet $f \in \Gamma$ ise f fonksiyonunun tanım cümlesinin her açık alt cümlesine kısıtlanışı da Γ dadır. Yani; $U, V \subset S$ açık alt cümleler olmak üzere

$$f \in \Gamma,\ f : U \to V,\ U^{'} \subset U \ (\text{açık}) \text{ ise } f\,|_{U'} \in \Gamma.$$

3) U_i cümleleri S nin açık alt cümleleri olmak üzere $U = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ ve $f : U \to V$ dönüşümü homeomorfizm olsun. $f\,|_{U'} \in \Gamma$ iken $f \in \Gamma$ dır. Yani;

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i,\ U_i \subset S,\ f : U \to V \ (\text{homeomorfizim}) \text{ ve } f\,|_{U'} \in \Gamma \ \text{ ise } f \in \Gamma.$$

4) S deki her açık alt cümlenin birim dönüşümleri Γ dadır.

5) Şayet $f \in \Gamma$ ise $f^{-1} \in \Gamma$ dır.

6) $f : U \to V$ ile $g : U^{'} \to V^{'}$ $(V \cap U^{'} \neq 0)$ şeklinde tanımlanan dönüşümler Γ da iken $g \circ f : f^{-1}(V \cap U^{'}) \to g(V \cap U^{'})$ dönüşümü de Γ dadır (Kobayashi 1996).

Teorem 2.2 ***(Darboux'un klasik teoremi):*** *n-boyutlu diferensiyellenebilir Riemann manifoldu M ve bu manifold üzerinde diferensiyel 1-form ω olsun. M üzerinde,*

$$\omega \wedge (d\omega)^p \neq 0 \ \text{ve} \ = d\omega^{p+1} = 0$$

olacak şekilde verilsin. Bu durumda, M manifoldunun her noktasında

$$\omega = dy^{p+1} - \sum_{i=1}^{p} y^i dx^i \tag{2.2}$$

olacak şekilde M nin her noktası civarında bir $(x^1, x^2, ..., x^p, y^1, y^2, ..., y^{n-p})$ koordinat sistemi vardır (Yano and Kon 1984).

Böylece Darboux teoremine göre (2n+1) boyutlu M manifoldunun her noktası civarında,

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i \tag{2.3}$$

olacak şekilde $(x^1, x^2, ..., x^n, y^1, y^2, ..., y^n, z)$ koordinatları vardır.

Tanım 2.7 ***(Kontak transformasyon):*** *$\mathbb{E}^{2n+1}$ üzerinde kartezyen koordinatlar $(x^1, x^2, ..., x^n, y^1, y^2, ..., y^n, z)$ ve $\mathbb{E}^{2n+1}$ de bir diferensiyel 1-form*

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i$$

olsun. $\mathbb{E}^{2n+1}$ *in açık alt cümleleri* U *ve* $U^{'}$ *olmak üzere* $f : U \to U^{'}$ *diffeomorfizmi için*

$$f_* : \chi(U) \to \chi(U^{'}) \ , \ f^* : \Omega(U^{'}) \to \Omega(U)$$

ve

$$\tau : U \to \mathbb{E}$$

olmak üzere

$$f^*\eta = \tau.\eta$$

oluyorsa f *ye* ***Kontak transformasyon*** *denir. Burada* $\chi(U)$*,* U *üzerindeki vektör alanların uzayı,* $\Omega(U)$ *da* $\chi(U)$ *vektör uzayının dualidir.*

U *üzerindeki bütün kontak transformasyonların cümlesi* Γ *ise;*

$$\Gamma = \left\{ f \ \middle| \ f : U \to U^{'};\ f^*\eta = \tau.\eta,\ U, U^{'} \subset \mathbb{E}^{2n+1} \ açık \right\} \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır ve fonksiyonlarda bileşke işlemine göre bir yarı gruptur (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.8 ***(Kesin Kontak transformasyon):*** $f \in \Gamma$ *kontak transformasyonu için* $\tau = 1$ *yani*

$$f^*\eta = \eta$$

ise f *ye bir* ***kesin Kontak transformasyon*** *veya* ***sıkı Kontak transformasyon*** *adı verilir. Bu tip transformasyonların cümlesi* Γ_0 *ile gösterilirse*

$$\Gamma_0 = \left\{ f \ \middle| \ f : U \to U^{'};\ f^*\eta = \eta,\ U, U^{'} \subset \mathbb{E}^{2n+1} \ açık \right\}$$

şeklindedir. Bu durumda Γ_0 *cümlesi* Γ *için bir alt yarı grup olur (Yano and Kon 1984).*

2.3 Yönlendirilebilir Manifoldlar

Tanım 2.9 ***(Yönlendirme):*** V*,* $n-$*boyutlu reel vektör uzayı ve* L *de* V *vektör uzayının sıralı bazlarının cümlesi olsun.* $u = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, $v = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \in L$ *için* $u_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$ *olacak şekilde* $A = (a_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R})$ *vardır.*

$$\text{“ } u = \{u_1, u_2, ..., u_n\} \sim v = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \Leftrightarrow \det(a_{ij}) > 0 \text{ ”}$$

bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısının iki denklik sınıfı vardır. Şayet $\det(a_{ij}) > 0$ *ise* u *ile* v ***aynı yönlendirmeye sahip,*** $\det(a_{ij}) < 0$ *ise de* u *ile* v ***karşıt yönlendirmeye sahiptir*** *denir (Boothby 1986).*

Sonuç 2.1 *V vektör uzayında n-lineer ve alterne fonksiyonellerin cümlesi de bir vektör uzayıdır. Bu uzayı " $\wedge^n V$ " ile gösterirsek "boy $\wedge^n V = 1$" dir. Tensör cebirinden biliyoruz ki, $\Omega \in \wedge^n V$ için*

$$\Omega\left(u_1, u_2, ..., u_n\right) = \det(a_{ij})\Omega\left(v_1, v_2, ..., v_n\right) \tag{2.5}$$

dir. Hiç bir yerde sıfır olmayan $\Omega \in \wedge^n V$ n-formunu ele alalım. Bu durumda (2.5) *eşitliğinden, $u = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, $v = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ bazlarında aynı yönlendirme vardır (veya karşıt) ancak ve ancak bazların Ω da aldığı değer aynı işarete sahiptir (veya zıt). Bu yüzden bir vektör uzayındaki yönlendirmeyi n-formlar ile ifade edebiliriz.*

$\Omega_1, \Omega_2 \in \wedge^n V$ için boy$\wedge^n V = 1$ olduğundan

$$\Omega_1 = \lambda\Omega_2$$

olacak şekilde λ vardır. Böylece Ω_1, Ω_2 aynı yönlendirmeye sahiptir(veya karşıt) ancak ve ancak $\lambda > 0$ (veya $\lambda < 0$) dır (Boothby 1986).

Tanım 2.10 ***(Yönlendirilmiş manifold):*** *n-boyutlu bir M manifoldu üzerinde hiç bir yerde sıfır olmayan bir Ω n-formu varsa, M manifolduna* ***yönlendirilebilir (orientable) manifold*** *denir. Bu formların her birine* ***yönlendirme (orientation)*** *ve bu seçilen yönlendirmeyle birlikte bu manifolda da* ***yönlendirilmiş (oriented) manifold*** *denir (Boothby 1986).*

Tanım 2.11 ***(Uygun yönlendirilmiş atlas):*** *$F = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\wedge}$ cümlesi bir M manifoldunun atlası olsun. Şayet $\forall\alpha, \beta \in \wedge$ için $(U_\alpha, \varphi_\alpha), \left(U_\beta, \varphi_\beta\right)$ haritaları gözönüne alınırsa*

$$\varphi_\alpha \circ \left(\varphi_\beta\right)^{-1}$$

dönüşümünün Jacobian matrisi pozitif determinanta sahipse bu atlasa M üzerinde ***uygun yönlendirilmiş atlas*** *denir (Boothby 1986).*

Teorem 2.3 *M, n-boyutlu bir manifold olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.*

i) M manifoldu yönlendirilebilirdir.

ii) M üzerinde hiçbir yerde sıfır olmayan n-form vardır.

iii) M üzerinde uygun yönlendirilmiş bir atlas vardır (Boothby 1986).

Teorem 2.4 *Herhangi bir manifoldun tanjant demeti manifold olarak yönlendirilebilirdir (Carmo 1992).*

Teorem 2.5 *Yönlendirilebilir bir manifoldun her alt manifoldu da yönlendirilebilirdir (Carmo 1992).*

3. KONTAK MANİFOLDLAR

3.1 Kontak Manifold ve Geniş Anlamda Kontak Manifold

Tanım 3.1 ***(Kontak manifold):*** *$(2n+1)$ boyutlu bir C^∞ diferensiyellenebilir M manifoldu verilsin. Şayet bu manifold üzerinde her noktada*

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0 \tag{3.1}$$

*koşulunu sağlayan bir η diferensiyel 1-formu varsa η ya **kontak form**, (M,η) ikilisine de **kontak manifold** denir. Kontak manifoldlarda $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ bağıntısı M manifoldu üzerinde bir hacim elementine karşılık gelir ve bundan dolayı M manifoldu yönlendirilebilirdir. Burada $(d\eta)^n$ ifadesi $d\eta$ nın kendisi ile n defa dış çarpımını gösterir, yani;*

$$(d\eta)^n = \underbrace{d\eta \wedge d\eta \wedge ... \wedge d\eta}_{n-tane}$$

dir. η 1-form olduğundan $d\eta$, 2-form ve $\eta \wedge (d\eta)^n$ ifadesi $(2n+1)$-form olur. Bu yüzden Kontak manifoldlar $(2n+1)$ boyutlu manifoldlardır (Blair 1976).

Örnek 3.1 *$(2n+1)$ boyutlu diferensiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde*

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i$$

diferensiyel 1-formunu gözönüne alalım. M manifoldu üzerinde her noktada

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

olduğundan η kontak form, (M,η) ikilisi $(2n+1)$ boyutlu kontak manifold olur. Burada $(x^1, x^2, ..., x^n, y^1, y^2, ..., y^n, z) \in \mathbb{E}^{2n+1}$ dir.

Örnek 3.2 *3-boyutlu diferensiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde*

$$\eta = \cos z dx + \sin z dy$$

diferensiyel 1-formunu gözönüne alalım. M manifoldu üzerinde her noktada

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

olduğundan η kontak form, (M,η) ikilisi 3-boyutlu kontak manifold olur. Burada $(x,y,z) \in \mathbb{E}^3$ dür.

Sonuç 3.1 *V bir vektör uzayı ve V^* da V nin dual uzayı olmak üzere ΛV^* Grassman cebiri tanımlanabilir. Burada θ kuadratik form olmak üzere şayet $\theta^r \neq 0$ ve $\theta^{r+1} \neq 0$ ise $rank\theta = 2r$ dir. Ayrıca*

$$V_0 = \{X \in V : \forall Y \in V, \theta(X,Y) = 0\}$$

olarak tanımlarsak

$$rank\theta = boyV - boyV_0$$

olduğunu görürüz (Yano and Kon 1984).

Kontak manifold tanımına bakarsak $(d\eta)^n \neq 0$ ve $(d\eta)^{n+1} = 0$ dır. Burada $r = n$, $rank\theta = 2n$ ve $boy\chi(M) = 2n+1$ olur. Ayrıca

$$D_0 = \{X \in \chi(M) : \forall Y \in \chi(M),\ d\eta(X,Y) = 0\}$$

dersek $boyD_0 = 1$ olduğunu görürüz. Kabul edelim ki, $0 \neq X \in D_0$ için $\eta(X) = 0$ olsun. $X \in D_0$ için tabana tamamlama teoreminden $\chi(M)$ in bir$\{X, Y_1, ..., Y_{2n}\}$ şeklinde tabanı vardır. Burada $(\eta \wedge (d\eta)^n)(X, Y_1, ..., Y_{2n}) = 0$ olduğunu görmek kolaydır. Bu ise $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ olmasıyla çelişir. Böylece $X \neq 0$ için $\eta(X) \neq 0$ dır.

Tanım 3.2 ***(Kontak dağılım):*** *$(2n+1)$ boyutlu (M,η) kontak manifoldu olmak üzere*

$$D = \{X \in \chi(M) : \eta(X) = 0\} \tag{3.2}$$

*biçiminde tanımlı D cümlesine M manifoldunun **kontak dağılımı (distribution)** denir. $\chi(M)$ vektör uzayı $(2n+1)$ boyutlu olduğundan $\chi(M)^*$ vektör uzayı $(2n+1)$ boyutludur. Bu iki dual vektör uzayının, sırasıyla, $\{\xi, X_1, ..., X_{2n}\}$ ve $\{\eta, \eta_1, ..., \eta_{2n}\}$ dual tabanları vardır. Böylece $i = 1, 2, ..., 2n$ için $\eta(X_i) = 0$ ve $\{X_1, ..., X_{2n}\} \subset D$ dir. Burada $D = sp\{X_1, ..., X_{2n}\}$ olduğunu görmek kolaydır. Dolayısıyla $boyD = 2n$ olur (Blair 1976).*

Sonuç 3.2 *(M,η) ikilisi $(2n+1)$ boyutlu kontak manifold ve $Ker\eta$, η kontak formunun çekirdeği olmak üzere η kontak formu birebirdir ancak ve ancak $Ker\eta = \{0\}$.*

Tanım 3.3 (M,η) *ikilisi* $(2n+1)$ *boyutlu kontak manifold ve* $Ker\eta$, η *kontak formunun çekirdeği olmak üzere*

$$Ker\eta = D$$

dir.

Tanım 3.4 (M,η) *Kontak manifoldu üzerinde* $X \neq \xi$ *için,*

$$\left.\begin{array}{l}\eta(\xi) = 1, \\ d\eta(\xi, X) = 0\end{array}\right\} \tag{3.3}$$

olacak şekilde bir $\xi \in \chi(M)$ *vektör alanı varsa* ξ *ye* η *kontak yapısının* ***karakteristik vektör alanı*** *denir. Burada*

$$\xi : M \to \bigcup_{p\in M} T_M(P)$$

şeklinde tanımlı 1:1 ve örten (1,0) tipinde tensör alanıdır (Blair 1976).

Örnek 3.3 3*-boyutlu diferensiyellenebilir bir* M *manifoldu üzerinde*

$$\eta = \cos z dx + \sin z dy$$

diferensiyel 1*-formu için*

$$\xi = \cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}$$

vektör alanı karakteristik vektör alanıdır.

Sonuç 3.3 η *formu* M *üzerinde kontak form olduğundan* D *üzerinde* $(d\eta)^n \neq 0$ *dır. Böylece* $d\eta$ *2-formu* D *üzerinde non-dejenere, antisimetrik bir lineer form olur. Çünkü* $X, Y \in D$ *için*

$$\begin{aligned} d\eta(X,Y) &= \frac{1}{2}(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y])) \\ &= -\frac{1}{2}\eta([X,Y]) \end{aligned}$$

olduğundan $d\eta$ *nın antisimetrik olduğu açıktır.* $\forall X, Y \in D$ *için*

$$d\eta(X,Y) = 0$$

iken kabul edelim ki, $X \neq 0$ olsun. boy $D = 2n$ olduğundan D uzayının bir

$$\{X, Y_1, ..., Y_{(2n-1)}\}$$

bazı vardır. Fakat burada $(d\eta)^n(X, Y_1, ..., Y_{(2n-1)}) = 0$ olduğu görülür. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $X = 0$ ve $d\eta$ 2-formu D dağılımı üzerinde non-dejenere olur.

Sonuç 3.4 *(M, η) kontak manifoldunda $d\eta$ 2-formu D dağılımı üzerinde non-dejenere, antisimetrik bilineer formdur. Bu yüzden $\forall P \in M$ noktasında*

$$d\eta : D_p \times D_p \longrightarrow \mathbb{E}$$

formu bir simplektik yapı (simplektik form) olur. Ayrıca Darboux teoremi uyarınca $\forall P \in M$ noktası için,

$$(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n, z)$$

koordinat fonksiyonları ile verilen η 1-formu

$$\eta = (\varphi_\alpha)^* \left(dz - \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i \right)$$

olacak şekilde bir $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ haritasının var olduğunu biliyoruz. Böylece $d\eta$ 2-formu

$$d\eta = (\varphi_\alpha)^* \left(\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i \right)$$

olur. $\varphi_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha \subset \mathbb{E}^n$ olmak üzere $Q = \varphi_\alpha(P) \in V_\alpha$ noktasındaki teğet uzayın tabanı

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} |_Q, \frac{\partial}{\partial x_2} |_Q, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} |_Q, \frac{\partial}{\partial y_1} |_Q, \frac{\partial}{\partial y_2} |_Q, ..., \frac{\partial}{\partial y_n} |_Q, \frac{\partial}{\partial z} |_Q \right\}$$

dır. Burada

$$\begin{aligned} E_{iP} &= (\varphi_\alpha)_*^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |_Q + y_i(Q) \frac{\partial}{\partial z} |_Q \right), E_{n+iP} = (\varphi_\alpha)_*^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial y_i} |_Q \right) \text{ ve} \\ \xi &= (\varphi_\alpha)_*^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial z} |_Q \right) \end{aligned}$$

ise

$$\{E_{1P}, E_{2P}, ..., E_{2nP}, \xi\}$$

cümlesi $T_M(P)$ *uzayının bir tabanıdır. Ayrıca*

$$\begin{aligned}
\eta(\xi) &= (\varphi_\alpha)^* \left(dz - \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i \right) \left((\varphi_\alpha)_*^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \mid_Q \right) \right) \\
&= \left(dz - \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i \right) \left((\varphi_\alpha)_* \circ (\varphi_\alpha)_*^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \mid_Q \right) \right) \\
&= \left(dz - \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} \mid_Q \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

ve $\forall X \in \chi(M)$ *için*

$$\begin{aligned}
d\eta(X, \xi) &= (\varphi_\alpha)^* \left(\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i \right) \left(X, (\varphi_\alpha)_*^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \mid_Q \right) \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i \right) \left((\varphi_\alpha)_*(X), (\varphi_\alpha)_* \circ (\varphi_\alpha)_*^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \mid_Q \right) \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i \right) \left((\varphi_\alpha)_*(X), \left(\frac{\partial}{\partial z} \mid_Q \right) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan $\xi \in \chi(M)$ *karakteristik vektör alanıdır. Böylece* $1 \leq k, l \leq n$ *için*

$$d\eta(E_{kP}, E_{lP}) = \left(\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \mid_Q + y_i(Q) \frac{\partial}{\partial z} \mid_Q, \frac{\partial}{\partial x_i} \mid_Q + y_i(Q) \frac{\partial}{\partial z} \mid_Q \right)$$

olur. Benzer şekilde $1 \leq k, l \leq n$ *için*

$$d\eta(E_{kP}, E_{lP}) = d\eta(E_{(n+k)P}, E_{(n+1)P}) = 0 \text{ ve } d\eta(E_{(n+k)P}, E_{(n+1)P}) = \delta_{kl}$$

dir. Böylece $\{E_{1P}, E_{2P}, ..., E_{2nP}\}$ *cümlesi* D_P *dağılımının kanonik simplektik tabanıdır. Bu tabana karşılık gelen matris de*

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Sonuç olarak $\forall X, Y \in D_P$ *için*

$$d\eta(X, Y) = X^T J_0 Y \tag{3.4}$$

dir (Ata 2004).

Tanım 3.5 ***(Geniş anlamda kontak manifold):*** *M^{2n+1} diferensiyellenebilir manifold ve Γ kontak dönüşümlerin cümlesi olsun. Şayet M^{2n+1} i örten $\{U_\alpha\}$ açık cümlelerin ailesi ve $f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha \subset \mathbb{E}^{2n+1}$ homeomorfizimler $\forall\alpha, \beta$ için $f_\alpha \circ f_\beta^{-1}$ tanımlı iken $f_\alpha \circ f_\beta^{-1} \in \Gamma$ oluyorsa M^{2n+1} diferensiyellenebilir manifolduna* ***geniş anlamda kontak manifold*** *(contact manifold in the wider sense) denir (Blair 1976).*

Tanım 3.6 ***(Geniş anlamda kontak yapı):*** *M^{2n+1} geniş anlamda kontak manifold olsun. "$\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ ve $\{(U_\beta, f_\beta)\}$ cümleleri M^{2n+1} üzerinde birer atlas olmak üzere "$\{(U_\alpha, f_\alpha)\} \sim \{(U_\beta, f_\beta)\}$ ancak ve ancak $f_\beta \circ f_\alpha^{-1}$ tanımlı iken $f_\beta \circ f_\alpha^{-1} \in \Gamma$ oluyorsa" bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısının denklik sınıflarına M^{2n+1} üzerinde* ***geniş anlamda kontak yapı*** *(contact structure in the wider sense on M^{2n+1}) denir (Blair 1976).*

Sonuç 3.5 *Darboux teoreminin bir sonucu olarak her kontak manifold geniş anlamda kontak manifolddur. Fakat bunun tersi doğru değildir (Blair 1976).*

Örnek 3.4 *$M^{2n+1} = \mathbb{E}^{n+1} \times P(\mathbb{E}^n)$ çarpım manifoldu geniş anlamda kontak manifolddur, fakat kontak manifold değildir. Neden ? $\mathbb{E}^{n+1}$ deki koordinatları $(x^1, x^2, ..., x^{n+1})$ ve $P(\mathbb{E}^n)$ reel projective uzayındaki homojen koordinat komşuluğunu $(t_1, t_2, .., t_{n+1})$ alalım. M^{2n+1}deki bir açık örtüyü $\{U_i : t_i \neq 0,\ (i = 1, 2, ..., n+1)\}$ seçelim. U_i deki 1-form η_i yi*

$$\eta_i = \frac{1}{t_i}\sum_{j=1}^{n+1} t_j dx^j$$

olarak tanımlarsak $\eta_i \wedge (d\eta_i)^n \neq 0$ ve $\eta_i = \frac{t_j}{t_i}\eta_i$ dir. Böylece $\forall\eta$ için M^{2n+1} manifoldu geniş anlamda kontak yapıya sahiptir. Fakat biliyoruz ki, $P(\mathbb{E}^n)$ manifoldu η çift iken yönlendirilemezdir. Dolayısıyla $M^{2n+1} = \mathbb{E}^{n+1} \times P(\mathbb{E}^n)$ manifoldu da yönlendirilemez olur. Sonuç olarak M^{2n+1} kontak yapı taşımaz (Blair 1976).

Tanım 3.7 *M^{2n+1} manifoldunu örten $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\wedge}$ açık cümlesi ve U_α komşuluğu üzerinde lokal olarak tanımlı η_α Kontak formlar ile elde edilen geniş anlamda Kontak yapı θ olsun. $m \in U_\alpha$ noktasında TM^{2n+1} nin D alt demetinin D_m lifi*

$$D_m = \left\{X_m \ \in \ T_m(M^{2n+1}) : \eta_\alpha(X_m) = 0\right\}$$

olarak tanımlanır (Blair 1976).

Sonuç 3.6 *η_α ve η_β formları, sırasıyla, U_α ve U_β üzerinde kontak form olsun. Böylece D_m üzerinde $(d\eta_\alpha)^n \neq 0$ ve $d\eta_\alpha$ ile $d\eta_\beta$ 2-formlarının D_m üzerinde non-dejenere, antisimetrik bilineer form olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla*

$$\eta_\alpha = \lambda_{\alpha\beta}\eta_\beta$$

olacak şekilde $U_\alpha \cap U_\beta$ üzerinde sıfır olmayan $\lambda_{\alpha\beta}$ fonksiyonları vardır. Böylece

$$d\eta_\alpha = d\lambda_{\alpha\beta} \wedge d\eta_\beta + \lambda_{\alpha\beta} d\ \eta_\beta$$

olur. Burada η_β 1-form olduğundan $\eta_\beta \wedge \eta_\beta = 0$ ve $\eta_\alpha \wedge d\eta_\alpha = \lambda^2_{\alpha\beta}\ \eta_\beta \wedge d\ \eta_\beta$ olur. İşlemi böyle devam ettirirsek

$$\eta_\alpha \wedge (d\eta_\alpha)^n = \lambda^{n+1}_{\alpha\beta}\eta_\beta \wedge (d\ \eta_\beta)^n$$

olduğu görülür. Ayrıca $\lambda^{n+1}_{\alpha\beta}$ fonksiyonunun bu iki komşuluğunun, koordinat fonksiyonlarının Jacobian matrisinin determinantına eşit olduğunu göstermek kolaydır. Yani; $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) koordinat komşulukları için det $J(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) = \lambda^2_{\alpha\beta}$ dir. Şayet M^{2n+1} ve n çift ise $\lambda^{n+1}_{\alpha\beta}$ fonksiyonu daima pozitiftir. Böylece D vektör demeti yönlendirilebilirdir. n tek iken Gray (Gray 1959) makalesinde M^{2n+1} yönlendirilebilir olsa bile D vektör demetinin yönlendirilebilir olamayabileceğine dair örnek vermiştir (Blair 1976).

Teorem 3.1 $(2n+1)$ *boyutlu yönlendirilebilir M manifoldu, geniş anlamda kontak manifold ve n çift ise kontak manifolddur (Blair 1976).*

İspat. M manifoldu yönlendirilebilir ise TM vektör demeti de yönlendirilebilirdir. η çift olduğundan D de vektör demeti olarak yönlendirilebilir olduğunu Sonuç 3.6 de göstermiştik. Böylece TM/D

$$\begin{aligned} TM/D &= \bigcup_{P\in M}\{\lambda\xi_P + D_P : \lambda \in \mathbb{E}\} \\ &= \bigcup_{P\in M}\{(P, \lambda\xi_P) : \lambda \in \mathbb{E}\} \\ &= \{(P, \lambda\xi_P) : P \in M, \lambda \in \mathbb{E}\} \end{aligned}$$

bölüm demeti de reel doğru demeti olarak yönlendirilebilir. Bölüm demeti, reel doğru demeti olarak yönlendirilebilir olduğundan yapı grubunu $(GL(1,\mathbb{E}) \simeq R,.)$ grubundan $(GL^+(1,\mathbb{E}) \simeq R^+,.)$ alt grubuna indirgeyebiliriz. Böylece TM/D bölüm demeti hiç bir noktada sıfır olmayan bir 'cross section' kabul eder. Diğer bir ifadeyle M manifoldunun her bir U_α komşuluğunda S_α lokal 'cross section' ı $\eta_\alpha(S_\alpha) = 1$ olacak şekilde tanımlayabiliriz. Her noktada S_α ve S 'cross section' ları sıfır olmuyorsa $S_\alpha = h_\alpha S$ olacak şekilde U_α üzerinde her noktada sıfır olmayan $h_\alpha = \dfrac{1}{\eta_\alpha(S)}$ fonksiyonu vardır. Böylece U_α üzerindeki bir η 1-formunu $\eta = h_\alpha\eta_\alpha$ olarak tanımlarsak M üzerinde bir 1-form tanımlamış oluruz. Ayrıca $d\eta = dh_\alpha \wedge \eta_\alpha + h_\alpha d\eta_\alpha$ ve $\eta = h_\alpha\eta_\alpha$

$$\eta \wedge (d\eta)^n = (h_\alpha)^n \eta_\alpha \wedge d\eta_\alpha \neq 0$$

elde edilir. ■

Teorem 3.2 *M^{2n+1} manifoldu $\mathbb{E}^{2n+2}$ Öklid uzayının regüler hiperyüzeyi olsun. Bu durumda*

$$i : M^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{E}^{2n+2}$$

düzgün hiperyüzey immersiyonu vardır. Ayrıca kabul edelim ki, M^{2n+1} manifoldunun her noktasındaki tanjant uzay orijin noktasını içermesin. Yani her $P \in M$ için $T_M(P) \cap \{0\} = \varnothing$ olsun. Bu durumda M^{2n+1} manifoldu kontak yapı taşır (Blair 1976).

İspat. $\mathbb{E}^{2n+2}$ de $(x_1, x_2, ..., x_{2n+2})$ kartezyen koordinatlar ve

$$\alpha = x_1 dx_2 - x_2 dx_1 + ... + x_{2n+1} dx_{2n+2} - x_{2n+2} dx_{2n+1}$$

olsun. Böylece

$$d\alpha = 2(dx_1 \wedge dx_2 + ... + dx_{2n+1} \wedge dx_{2n+2})$$

ve

$$\begin{aligned} \alpha \wedge (d\alpha)^n &= 2^{n-1} n! \sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge ... \wedge dx_{2n+1} \wedge dx_{2n+2} \\ &= 2^{n-1} n! \sum_{i=1}^{2n+1} x_i * (dx_i) \end{aligned}$$

olur. $x_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{(2n+2)0})$ noktasında M nin tanjant uzayının lineer bağımsız $V_1, V_2, ..., V_{2n+1}$ vektörlerini alalım. Hodge yıldız operatörü $*$ olmak üzere

$$\omega_j = *dx_j(V_1, V_2, ..., V_{2n+1})$$

olarak tanımlayalım. $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{2n+2})$ dersek ω vektörünün M nin normalinde olduğu görülür. Diğer yandan

$$(\alpha \wedge (d\alpha)^n)(V_1, V_2, ..., V_{2n+1}) = 2^{n-1} n! g(x_0, \omega)$$

eşitliğini kolayca elde edebiliriz. M^{2n+1} manifoldunun her noktasındaki tanjant uzay orijin noktasını içermediğinden, $\forall x_0 \in M^{2n+1}$ noktası için

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$$

dır. $\eta = i^*(\alpha)$ dersek η dönüşümü M^{2n+1} de bir formdur ve

$$\begin{aligned} \eta \wedge (d\eta)^n &= i^*(\alpha \wedge (d\alpha)^n) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece (M^{2n+1}, η) kontak manifolddur. ■

Sonuç 3.7 $\mathbb{E}^{2n+2}$ *uzayında*

$$S^{2n+1} = \left\{(x_1, x_2, ..., x_{2n+2}) \;\in\; \mathbb{E}^{2n+2} : (x_1)^2 + (x_2)^2 + ... + (x_{2n+2})^2 = 1\right\}$$

küresi ve $P(\mathbb{E}^{2n+1})$ *projektif uzayı Teorem* 3.2 *nin şartlarını sağlar. Dolayısıyla bu iki uzay kontak manifolddur.*

Teorem 3.3 (M^{2n+1}, η) *kontak manifold olsun. Bu durumda* $T(M^{2n+1})$ *tanjant demetinin yapı grubu* $U(n) \times 1$ *grubuna indirgenebilir (Blair 1976).*

3.2 Hemen Hemen Kontak Manifold

Tanım 3.8 ***(Hemen hemen kontak manifold):*** *M bir $(2n+1)$ boyutlu manifold ve φ, ξ, η da M üzerinde, sırasıyla, (1,1),(1,0),(0,1) tipinde tensör alanları olsun. Eğer φ, ξ, η için, $\forall X \in \chi(M)$ olmak üzere*

$$\left.\begin{aligned} &\eta(\xi) = 1, \\ &\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

koşulları sağlanıyorsa (φ, ξ, η) *üçlüsüne* M *üzerinde* ***hemen hemen kontak yapı*** *ve* (M, φ, ξ, η) *dörtlüsüne de* ***hemen hemen kontak manifold*** *denir (Blair 1976).*

Örnek 3.5 $\mathbb{E}^3$ *de* (x, y, z) *standart koordinatlar olmak üzere* η *kontak formu*

$$\eta = \frac{1}{2}(dz - ydx)$$

şeklinde verilsin. Burada $\xi = 2\frac{\partial}{\partial_z} \in \chi(\mathbb{E}^3)$ *için*

$$\begin{aligned}
\eta(\xi) &= \frac{1}{2}(dz - ydx)(2\frac{\partial}{\partial_z}) \\
&= dz(\frac{\partial}{\partial_z}) - ydx(\frac{\partial}{\partial_z}) \\
&= 1
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Ayrıca φ *endomorfizimine karşılık gelen matris*

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Böylece $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \chi(\mathbb{E}^3)$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned}
\varphi^2(X) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 - yx_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ve

$$\varphi^2(X) = -\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(x_3 - yx_1)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $X = (x_1, x_2, x_3) \in \chi(\mathbb{E}^3)$ *olmak üzere*

$$X = x_1\frac{\partial}{\partial x} + x_2\frac{\partial}{\partial y} + x_3\frac{\partial}{\partial z}$$

dir. Ayrıca $\eta(X)$ *değerini hesaplarsak*

$$\begin{aligned} \eta(X) &= \frac{1}{2}(dz - ydx)(x_1\frac{\partial}{\partial x} + x_2\frac{\partial}{\partial y} + x_3\frac{\partial}{\partial z}) \\ &= \frac{1}{2}\left(dz(x_1\frac{\partial}{\partial x} + x_2\frac{\partial}{\partial y} + x_3\frac{\partial}{\partial z}) - ydx(x_1\frac{\partial}{\partial x} + x_2\frac{\partial}{\partial y} + x_3\frac{\partial}{\partial z})\right) \\ &= \frac{1}{2}(x_3 - yx_1) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi$ *dir. Böylece* $(\mathbb{E}^3(-3), \varphi, \xi, \eta)$ *hemen hemen kontak manifolddur.*

Teorem 3.4 $(2n{+}1)$ *boyutlu* (M, φ, ξ, η) *hemen hemen kontak manifold olmak üzere* $X, \xi \in \chi(M)$, $X \neq \xi$ *için*

$$\left.\begin{aligned} &i)\ \varphi(\xi) = 0, \\ &ii)\ \eta \circ \varphi = 0, \\ &iii)\ rank\varphi = 2n \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

dir (Blair 1976).

3.3 Hemen Hemen Kontak Metrik Manifold

Tanım 3.9 ***(Hemen hemen kontak metrik manifold):*** (M, φ, ξ, η), $(2n+1)$ *boyutlu hemen hemen kontak manifold olsun ve* g *Riemannian metriği iken*

$\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\xi \in \chi(M)$ için

$$\left.\begin{aligned} &g(X, \xi) = \eta(X), \\ &g(\varphi(X), \varphi(Y)) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

koşullarını sağlayan (φ, ξ, η, g) yapısına **hemen hemen kontak metrik yapı** ve $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ beşlisine de **hemen hemen kontak metrik manifold** denir (Yano and Kon 1984).

Örnek 3.6 *Örnek* 3.5 *deki* $(\mathbb{E}^3(-3), \varphi, \xi, \eta)$ *hemen hemen kontak manifoldunda 'g' metriği*

$$g = \frac{1}{4}(\left(1 + y^2\right) dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2ydxdz)$$

olarak tanımlanırsa g metriğinin matris yazılımının

$$g = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Böylece $X = (x_1, x_2, x_3) \in \chi(\mathbb{E}^3)$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} g(X,\xi) &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2y \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(x_3 - yx_1) \end{aligned}$$

olup $\eta(X) = g(X,\xi)$ *olduğu görülür.*

Burada $\forall X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \chi(\mathbb{E}^3)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi(X) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ yx_2 \end{bmatrix}, \\ \varphi(Y) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \\ yy_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olup

$$g(\varphi(X), \varphi(Y)) = (\varphi(X))^T g\varphi(Y)$$

eşitliği yardımıyla

$$
\begin{aligned}
g(\varphi(X),\varphi(Y)) &= \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & yx_2 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \\ yy_2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \\ yy_2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4}(x_2y_2 + x_1y_1)
\end{aligned}
$$

dir. Ayrıca $\eta(X) = \dfrac{1}{2}(x_3 - yx_1)$ ve $\eta(Y) = \dfrac{1}{2}(y_3 - yy_1)$ olup

$$
\begin{aligned}
\eta(X)\eta(Y) &= \frac{1}{4}(x_3y_3 - yx_3y_1 - yx_1y_3 + y^2x_1y_1), \\
g(X,Y) &= \frac{1}{4}((1+y^2)x_1y_1 - yx_1y_3 + x_2y_2 - yx_3y_1 + x_3y_3), \\
&= \frac{1}{4}(x_2y_2 + x_1y_1) + \frac{1}{4}(x_3y_3 - yx_3y_1 - yx_1y_3 + y^2x_1y_1)
\end{aligned}
$$

olur. Dolayısıyla $\forall X,\, Y \in \chi(\mathbb{E}^3)$ için

$$
g(\varphi(X),\varphi(Y)) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)
$$

olduğundan $(\mathbb{E}^3(-3), \varphi, \xi, \eta, g)$ beşlisi bir hemen hemen kontak metrik manifold olur.

Teorem 3.5 *(φ, ξ, η) yapısı ile verilen $(2n+1)$ boyutlu bir hemen hemen kontak M manifoldunda $\forall X,\, Y \in \chi(M)$ için*

$$
g(\varphi(X),\varphi(Y)) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)
$$

olacak şekilde bir g Riemannian metriği daima vardır (Blair 1976).

Sonuç 3.8 *(φ, ξ, η) yapısı ile verilen $(2n+1)$ boyutlu bir hemen hemen kontak M manifoldunda $\forall X,\, Y \in \chi(M)$ için*

$$
g(\varphi(X), Y) + g(X, \varphi(Y)) = 0 \tag{3.8}
$$

dır (Blair 1976).

İspat. Teorem 3.5 de verilen 'g' metriğinde Y yerine $\varphi(Y)$ yazarsak

$$g(\varphi(X), \varphi^2(Y)) = g(X, \varphi(Y)) - \eta(X)\eta(\varphi(Y))$$

olur. Teorem 3.4 nin (ii) şıkkından $\eta(\varphi(Y)) = 0$ dır. Böylece

$$\begin{aligned} g(\varphi(X), -Y + \eta(Y)\xi) &= g(X, \varphi(Y)) \\ -g(\varphi(X), Y) + \eta(Y)g(\xi, \varphi(X)) &= \eta(X, \varphi(Y)) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $g(X, \xi) = \eta(X)$ eşitliği gözönüne alınırsa $g(\xi, \varphi(X)) = \eta(\varphi(X)) = 0$ olduğundan

$$g(\varphi(X), Y) + g(X, \varphi(Y)) = 0$$

bağıntısını elde ederiz. Böylece φ ye karşılık gelen matris antisimetriktir. ∎

Sonuç 3.9 *(φ, ξ, η) yapısı ile verilen $(2n+1)$ boyutlu bir hemen hemen kontak M manifoldunda $\forall X,\, Y \in \chi(M)$ için*

$$g(X, \varphi(X)) = 0 \tag{3.9}$$

dır (Blair 1976).

İspat. *Sonuç* 3.8 *de Y yerine X alırsak*

$$g(\varphi(X), X) + g(X, \varphi(X)) = 0$$

olduğundan

$$g(X, \varphi(X)) = 0$$

olur. ∎

Teorem 3.6 *M, $2n+1$ boyutlu kontak manifoldu verilsin. Dolayısıyla M de kontak η 1-formu vardır. Bu η 1-formu yardımıyla M de*

$$d\eta(X, Y) = g(X, \varphi(Y)) \tag{3.10}$$

olacak şekilde (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik yapısı vardır (Yano and Kon 1984).

3.4 Hemen Hemen Kontak Metrik Manifoldlarda İkinci Temel Form

Tanım 3.10 ***(II. Temel form):*** *(M,φ,ξ,η,g) hemen hemen kontak metrik manifoldu verilsin. Bu durumda $\forall X,\, Y\in\chi(M)$ için*

$$\Phi(X,Y)=g(X,\varphi(Y))=d\eta(X,Y) \tag{3.11}$$

*şeklinde tanımlı Φ 2-formuna (φ,ξ,η,g) hemen hemen kontak metrik yapısının **II. Temel formu** adı verilir. Burada $\eta\wedge(d\eta)^n\neq 0$ koşulu $\eta\wedge(\Phi)^n\neq 0$ biçimini alır (Yano and Kon 1984).*

Örnek 3.7 *Örnek 3.6 deki $(\mathbb{E}^3(-3),\varphi,\xi,\eta,g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldunun II. Temel formunu bulalım.*

$$\eta=\frac{1}{2}(dz-ydx)$$

kontak formu için

$$d\eta=\frac{1}{2}\left[d(dz)-dy\wedge dx-yd(dx)\right]$$

olup $d(dz)=0$ ve $d(dx)=0$ olduğundan

$$\Phi=\frac{1}{2}dx\wedge dy$$

ifadesi $(\mathbb{E}^3(-3),\varphi,\xi,\eta,g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldunun II. Temel formu olur.

Tanım 3.11 ***(Kontak metrik yapı):*** *M, $(2n+1)$ boyutlu manifold (φ,ξ,η,g) hemen hemen kontak metrik yapısı ile verilsin. Şayet $d\eta(X,Y)=g(X,\varphi(Y))$ oluyorsa (M,φ,ξ,η,g) ye **kontak metrik manifold**, (φ,ξ,η,g) yapısına da M de **kontak metrik yapı** denir (Yano and Kon 1984).*

Sonuç 3.10 *Her kontak metrik manifold, kontak manifolddur.*

Teorem 3.7 *$(M,\varphi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ hemen hemen kontak metrik manifoldu verilsin. Bu durumda $\forall X,\, Y\in\chi(M)$ için*

$$\Phi(X,Y)=\frac{1}{2}\left[g(D_X\xi,Y)-g(D_Y\xi,X)\right]$$

dir (Yano and Kon 1984).

Teorem 3.8 *$(M, \varphi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ hemen hemen kontak metrik manifoldu verilsin. Bu durumda $\forall X,\ Y \in \chi(M)$ için*

$$\left.\begin{array}{l} d\eta(X,\xi) = 0, \\ d\eta(\varphi(X), Y) = -d\eta(X, \varphi(Y)) \end{array}\right\} \tag{3.12}$$

dir (Yano and Kon 1984).

3.5 Hemen Hemen Kontak Manifoldlarda Torsiyon Tensörü

Tanım 3.12 ***(Hemen hemen kompleks yapı):*** *M, $(2n+1)$ boyutlu manifoldu (φ, ξ, η) hemen hemen kontak yapısı ile birlikte verilsin. Biliyoruz ki, $\mathbb{E}$ reel ekseni de bir manifolddur. Dolayısıyla $M \times \mathbb{E}$ kartezyen çarpım uzayı da $(2n+2)$ boyutlu bir çarpım manifoldu olacaktır. Burada vektör alanları*

$$\chi(\mathbb{E}) = \left\{ f\frac{d}{dt} : f \ \in \ C^{\infty}(M, \mathbb{E}) \right\}$$

$$\chi(M \times \mathbb{E}) = \left\{ (X, f\frac{d}{dt}) : X \in \ \chi(M) \right\}$$

şeklindedir. Şimdi J kompleks dönüşümü

$$\begin{aligned} J \ &: \ \chi(M \times \mathbb{E}) \rightarrowtail \chi(M \times \mathbb{E}) \\ &: \ (X, f\frac{d}{dt}) \longrightarrow J(X, f\frac{d}{dt}) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = (\varphi(X) - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}) \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlanır. Burada J ye $M \times \mathbb{E}$ üzerinde ***hemen hemen kompleks yapı*** *denir (Yano and Kon 1984).*

Teorem 3.9 *J kompleks dönüşümü aşağıda verilen özelikleri sağlar:*

i) J bir lineer bir dönüşümdür.

ii) $J^2 = -I$

özelikleri vardır (Yano and Kon 1984).

İspat. *i)* $\forall a,b \in \mathbb{E}$ ve $\forall (X, f\frac{d}{dt}), (Y, g\frac{d}{dt}) \in \chi(M \times \mathbb{E})$ için

$$\begin{aligned}
J(a(X,\ f\frac{d}{dt}) + b(Y,\ g\frac{d}{dt})) &= J((aX+bY,\ (af+bg)\frac{d}{dt})) \\
&= (\varphi(aX+bY) - (af+bg)\xi,\ \eta(aX+bY)\frac{d}{dt}) \\
&= (a\varphi(X) + b\varphi(Y) - af\xi - bg\xi,\ a\eta(X)\frac{d}{dt} + b\eta(Y)\frac{d}{dt}) \\
&= (a\varphi(X) - af\xi,\ a\eta(X)\frac{d}{dt}) + (\lambda\varphi(X) - bg\xi,\ b\eta(Y)\frac{d}{dt}) \\
&= aJ(X,\ f\frac{d}{dt}) + bJ(Y,\ g\frac{d}{dt})
\end{aligned}$$

olur. Böylece J nin lineer olduğu görülür.

ii) $\forall (X, f\frac{d}{dt}) \in \chi(M \times \mathbb{E})$ için

$$\begin{aligned}
J^2(X, f\frac{d}{dt}) &= J(J((X, f\frac{d}{dt})) \\
&= J(\varphi(X) - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}) \\
&= (\varphi(\varphi(X) - f\xi) - \eta(X)\xi, \eta(\varphi(X) - f\xi)\frac{d}{dt}) \\
&= (\varphi^2(X) - f\varphi(\xi) - \eta(X)\xi, ((\eta \circ \varphi)(X) - f\eta(\xi))\frac{d}{dt}
\end{aligned}$$

olup (3.5) ve (3.6) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
J^2(X, f\frac{d}{dt}) &= (-X + \eta(X)\xi - \eta(X)\xi,\ \ -f\frac{d}{dt}) \\
&= (-X, -f\frac{d}{dt}) \\
&= -(X, -f\frac{d}{dt}) \\
&= -I(X, f\frac{d}{dt})
\end{aligned}$$

olur. Bu $\forall (X, f\frac{d}{dt}) \in \chi(M \times \mathbb{E})$ için sağlandığından $J^2 = -I$ dir. ∎

Teorem 3.10 *M, $(2n+1)$ boyutlu manifoldu (φ, ξ, η) hemen hemen kontak yapısı ile birlikte verilsin.*

$$\begin{aligned}
J &: \chi(M \times \mathbb{E}) \rightarrowtail \chi(M \times \mathbb{E}) \\
&: (X, f\frac{d}{dt}) \longrightarrow J(X, f\frac{d}{dt})
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı lineer dönüşümüne $(2n+2)\times(2n+2)$ *tipinde bir matris karşılık gelir ve bu matris*

$$J=\begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 & 0 \\ -I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 3.13 ***(Nijenhuis torsiyon tensörü):*** *F bir M manifoldu üzerinde (1,1) tipinde tensör alanı olmak üzere N_F tensör alanı*

$$\begin{aligned} N_F \quad &: \quad \chi(M)\times\chi(M)\longrightarrow\chi(M) \\ (X,Y) \quad &\longrightarrow \quad N_F(X,Y) \end{aligned}$$

ve

$$N_F(X,Y)=F^2([X,Y])+[F(X),F(Y)]-F([F(X),Y])-F([X,F(Y)])$$

olacak şekilde (1,2) tipinde bir tensör alanıdır. N_F tensör alanına F nin ***Nijenhuis torsiyon tensör alanı*** *denir.*

I. Özel hal:

Burada $F=\varphi$ olması durumunda $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$N_\varphi(X,Y)=-[X,Y]+\eta[X,Y]\xi+[\varphi(X),\varphi(Y)]-\varphi[\varphi(X),Y]-\varphi[X,\varphi(Y)]$$

şeklinde tanımlanan N_φ tensör alanına φ nin **Nijenhuis torsiyon tensör alanı** denir.

II. Özel hal:

Burada $F=J$ olması durumunda $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$N_J(X,Y)=-[X,Y]+[J(X),J(Y)]+J[J(X),Y]-J[X,J(Y)]$$

şeklinde tanımlanan N_J tensör alanına J nin **Nijenhuis torsiyon tensör alanı** denir (Yano and Kon 1984).

Sonuç 3.11 *N_F Nijenhius torsiyon tensörü bi-lineer ve antisimetrik tensördür.*

Tanım 3.14 ***(İntegrallenebilir manifold):*** *Şayet J nin Nijenhuis torsiyon tensör alanı N_J özdeş olarak sıfır ise, J hemen hemen kontak yapısına* ***integrallenebilir*** *denir (Yano and Kon 1984).*

Tanım 3.15 ***(Normal manifold):*** *Şayet $M \times \mathbb{E}$ de J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (φ, ξ, η) hemen hemen kontak yapısına* ***normal yapı*** *denir (Yano and Kon 1984).*

Tanım 3.16 *($\chi(M\times\mathbb{E})$* ***de Braket Operatörü):*** *$(2n+1)$ boyutlu bir M manifoldu, (φ, ξ, η) hemen hemen kontak yapısı ile verilsin. $M\times\mathbb{E}$ nin de bir manifold olduğunu belirtmiştik. $M \times \mathbb{E}$ de $[,]$ operatörü*

$$\begin{aligned} [,] &: \chi(M \times \mathbb{E}) \times \chi(M \times \mathbb{E}) \longrightarrow \chi(M \times \mathbb{E}) \\ &: ((X, f\frac{d}{dt}), (Y, g\frac{d}{dt})) \longrightarrow \left[(X, f\frac{d}{dt}), (Y, g\frac{d}{dt})\right] \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\left[(X, f\frac{d}{dt}), (Y, g\frac{d}{dt})\right] = \left([X, Y], (X(g) - Y(f))\frac{d}{dt}\right)$$

şeklinde tanımlı ise $[,]$ operatörüne $\chi(M \times \mathbb{E})$ ***de Braket Operatörü*** *adı verilir (Blair 2002).*

Teorem 3.11 *$(2n + 1)$ boyutlu bir M manifoldu, (φ, ξ, η) hemen hemen kontak yapısı ile verilsin. $\chi(M \times \mathbb{E})$ de tanımlı $[,]$ Braket operatörü*
i) antisimetriktir.
ii) Jacobi özdeşliğini sağlar.
Böylece tanımladığımız bu operatör bir Lie braket operatörüdür (Blair 2002).

İspat. *i)* $\forall (X, f\frac{d}{dt}), (Y, g\frac{d}{dt}) \in \chi(M \times \mathbb{E})$ için

$$\begin{aligned} \left[(X, f\frac{d}{dt}), (Y, g\frac{d}{dt})\right] &= \left([X, Y], (X(g) - Y(f))\frac{d}{dt}\right) \\ &= -\left([X, Y], (X(g) - Y(f))\frac{d}{dt}\right) \\ &= -\left[(X, f\frac{d}{dt}), (Y, g\frac{d}{dt})\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece antisimetrik olduğu görülür.

$ii)$ $\forall A=(X,f\frac{d}{dt}), B=(Y,g\frac{d}{dt}), C=(Z,h\frac{d}{dt})\in\chi(M\times\mathbb{E})$ için

$$\begin{aligned}
[A,[B,C]] &= \left[(X,f\frac{d}{dt})\left[(Y,g\frac{d}{dt}),(Z,h\frac{d}{dt})\right]\right] \\
&= \left([X,[Y,Z]],(XY(h)-XZ(g)-[Y,Z](f))\frac{d}{dt}\right) \\
[B,[C,A]] &= \left[(Y,g\frac{d}{dt})\left[(Z,h\frac{d}{dt}),(X,f\frac{d}{dt})\right]\right] \\
&= \left([Y,[Z,X]],(YZ(h)-YX(g)-[Z,X](f))\frac{d}{dt}\right) \\
[C,[A,B]] &= \left[(Z,h\frac{d}{dt})\left[(X,f\frac{d}{dt}),(Y,g\frac{d}{dt})\right]\right] \\
&= \left([Z,[X,Y]],(ZX(h)-ZY(g)-[X,Y](f))\frac{d}{dt}\right)
\end{aligned}$$

burada

$$[X,Y]=XY-YX$$

eşitliğini gözönüne alınırsa ve $T=[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]$ dersek

$$\begin{aligned}
T &= \left(\begin{array}{c} [X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]] \\ \left(\begin{array}{c} [XY](F)-[X,Y](F)+[Y,Z](F) \\ -[Y,Z](F)+[Z,X](F)-[X,Y](F) \end{array}\right)\frac{d}{dt} \end{array}\right) \\
&= (0,0\frac{d}{dt})
\end{aligned}$$

olduğundan Jacobi özdeşliği sağlanır. Şimdi $N_J((X,0),(Y,0))$ ve $N_J((X,0),(0,\frac{d}{dt}))$ değerlerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
N_J((X,0),(Y,0)) &= -[(X,0),(Y,0)+[J(X,0),J(Y,0)]-J([J(X,0),(Y,0)]) \\
&\quad -J([(X,0),J(Y,0)] \\
&= -([X,Y],0)+\left([\varphi(X),\varphi(Y)],(\varphi(X)\eta(Y)-\varphi(Y)\eta(X))\frac{d}{dt}\right) \\
&\quad -\left(\varphi[\varphi(X),Y]+(Y\eta(X))\xi,\eta[\varphi(X),Y]\frac{d}{dt}\right) \\
&\quad -\left(\varphi[Y,\varphi(X)]+(X\eta(Y))\xi,\eta[X,\varphi(Y)]\frac{d}{dt}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_J((X,0),(Y,0)) &= (-[X,Y]+[\varphi(X),\varphi(Y)]-\varphi[\varphi(X),Y]-\varphi[Y,\varphi(X)) \\
&\quad -Y\eta(X)\xi+(X\eta(Y))\xi,(\varphi(X)\eta(Y)-\varphi(Y)\eta(X) \\
&\quad -\eta[\varphi(X),Y]-\eta[X,\varphi(Y)])\frac{d}{dt})
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
N^1(X,Y) &= -[X,Y] + [\varphi(X),\varphi(Y)] - \varphi[\varphi(X),Y] - \varphi[Y,\varphi(X)] - Y\eta(X)\xi \\
&\quad +(X\eta(Y))\xi \\
&= -[X,Y] + \eta[X,Y]\xi + [\varphi(X),\varphi(Y)] - \varphi[\varphi(X),Y] - \varphi[Y,\varphi(X)] \\
&\quad -Y\eta(X)\xi + (X\eta(Y))\xi - \eta[X,Y]\xi \\
&= -[X,Y] + \eta[X,Y]\xi + [\varphi(X),\varphi(Y)] - \varphi[\varphi(X),Y] - \varphi[Y,\varphi(X)] \\
&\quad +Y\eta(X)\xi - (X\eta(Y))\xi - \eta[X,Y]\xi
\end{aligned}$$

dir. Denklem (3.5) den

$$\begin{aligned}
N^1(X,Y) &= \varphi^2[X,Y] + \eta[X,Y]\xi + [\varphi(X),\varphi(Y)] - \varphi[\varphi(X),Y] - \varphi[Y,\varphi(X)] \\
&\quad +Y\eta(X)\xi - (X\eta(Y))\xi - \eta[X,Y]\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
N_\varphi(X,Y) &= \varphi^2[X,Y] + \eta[X,Y]\xi + [\varphi(X),\varphi(Y)] \\
&\quad -\varphi[\varphi(X),Y] - \varphi[Y,\varphi(X)]
\end{aligned} \tag{3.14}$$

ve

$$2d\eta(X,Y) = X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta[X,Y] \tag{3.15}$$

olduğundan

$$N^1(X,Y) = N_\varphi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi \tag{3.16}$$

elde edilir. Ayrıca ikinci tarafa

$$N^2(X,Y) = \varphi(X)\eta(Y) - \varphi(Y)\eta(X) - \eta[\varphi(X),Y] - \eta[X,\varphi(Y)] \tag{3.17}$$

dersek ve

$$\begin{aligned}
(L_{(\varphi X)}\eta)Y &= \varphi(X)\eta(Y) - \eta[\varphi X,Y] \\
(L_{(\varphi Y)}\eta)X &= \varphi(Y)\eta(X) - \eta[\varphi Y,X]
\end{aligned}$$

eşitliklerinin taraf tarafa çıkarırsak

$$(L_{(\varphi X)}\eta)Y - (L_{(\varphi Y)}\eta)X = \varphi(X)\eta(Y) - \eta[\varphi X,Y] - \varphi(Y)\eta(X) - \eta[\varphi Y,X]$$

olur. Denklem (3.16) dan

$$N^2(X,Y) = (L_{(\varphi X)}\eta)Y - (L_{(\varphi Y)}\eta)X \tag{3.18}$$

elde edilir. Şimdi $N_J((X,0),(0\frac{d}{dt}))$ yi hesaplarsak

$$\begin{aligned} N_J((X,0),(0\frac{d}{dt})) &= -\left[(X,0),(0\frac{d}{dt})\right] + \left[J(X,0),J(0\frac{d}{dt})\right] \\ &\quad -J\left[J(X,0),(0\frac{d}{dt})\right] - J\left[(X,0),J(0\frac{d}{dt})\right] \\ &= \left(-[\varphi(X),\xi],\xi\eta(X)\frac{d}{dt}\right) + \left(\varphi[X,\xi],\eta[X,\xi]\frac{d}{dt}\right) \\ &= \left(-[\varphi(X),\xi]+\varphi[X,\xi],\xi\eta(X)+\eta[X,\xi]\frac{d}{dt}\right) \end{aligned}$$

olur. Burada

$$N^3(X) = -[\varphi(X),\xi] + \varphi[X,\xi] \tag{3.19}$$

$$N^4(X) = \xi\eta(X) + \eta[X,\xi] \tag{3.20}$$

olarak alınır ve bu eşitlikler düzenlenirse,

$$\begin{aligned} N^3(X) &= [\xi,\varphi(X)] - \varphi[X,\xi] \\ (L_\xi\eta)X &= \xi\eta(X) - \eta[\xi,X] \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned} N^3(X) &= (L_\xi\varphi)X \\ N^4(X) &= (L_\xi\eta)X \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Tanım 3.17 ***(Lie türevi):*** *M üzerinde tanımlı bir vektör alanı X ve X ile gerilmiş lokal dönüşümlü 1-parametreli grup φ_t olsun. X vektör alanına göre F tensör alanının L_XF ile gösterilen Lie türevi;*

$$L_XF = [X,F]$$

eşitliği ile tanımlanır (Yano and Kon 1984).

Tanım 3.18 ***(Killing vektör alanı):*** *M bir Riemann manifoldu g Riemann metriği ile verilsin. Ayrıca M üzerinde bir X vektör alanını ele alalım. M nin her bir noktasının bir komşuluğunda X ile meydana gelen lokal dönüşümlerin lokal 1-parametreli grubu lokal izometrilerden oluşuyor ise X vektör alanına* ***Killing vektör alanı*** *denir.*
Böylece;

$$X \text{ Killing vektör alanı} \Leftrightarrow L_X g = 0$$

dir. Yani; g metrik tensörünün X vektör alanı yönündeki Lie türevi sıfırdır (Yano and Kon 1984).

Teorem 3.12 $(2n+1)$ *boyutlu M manifoldu* (φ, ξ, η) *hemen hemen kontak yapısıyla verilsin. Bu yapının normal olabilmesi için gerek ve yeter koşul* N^1, N^2, N^3 *ve* N^4 *tensörlerinin sıfır olmasıdır (Yano and Kon 1984).*

İspat. $(\Longrightarrow)$ Kabul edelim ki, (M, φ, ξ, η) hemen hemen kontak yapısı normal olsun.

$$N_J((X, f\frac{d}{dt}), (Y, g\frac{d}{dt})) = N_J(X, 0) + (0, f\frac{d}{dt}), (Y, 0) + (0, g\frac{d}{dt}))$$

Burada J nin bi-lineer ve antisimetrik oluşumunu kullanırsak

$$\begin{aligned} N_J((X, f\frac{d}{dt}), (Y, g\frac{d}{dt})) &= N_J((X,0),(Y,0)) + gN_J((X,0),(0,\frac{d}{dt})) \\ &\quad -fN_J((Y,0),(0,\frac{d}{dt})) + fgN_J((0,\frac{d}{dt}),(0,\frac{d}{dt})) \end{aligned}$$

elde edilir. $N_J((0, \frac{d}{dt}), (0, \frac{d}{dt})) = 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} N_J((X, f\frac{d}{dt}), (Y, g\frac{d}{dt})) &= N_J((X,0),(Y,0)) + gN_J((X,0),(0,\frac{d}{dt})) \\ &\quad -fN_J((Y,0),(0,\frac{d}{dt})) \\ &= (N^1(X,Y), N^2(X,Y)) + g(N^3(X), N^4(X)) \\ &\quad -f(N^3(Y), N^4(Y)) \\ &= (N^1(X,Y) + gN^3(X) - fN^3(Y), N^2(X,Y) \\ &\quad gN^4(X) - fN^4(Y)) \end{aligned}$$

olur. Şayet $N_J = 0$ ise

$$N^1(X,Y) + gN^3(X) - fN^3(Y) = 0 \tag{3.21}$$

$$N^2(X,Y) + gN^4(X) - fN^4(Y) = 0 \tag{3.22}$$

elde edilir. Denklem (3.14) den N_φ nin ve (3.15) den $d\eta$ nın antisimetrik olduğu görülür. Böylece denklem (3.16) dan N^1 de antisimetrik olur. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için doğru olan (3.21) eşitliğinde $X = Y$ alırsak

$$N^1(X,X) = (f-g)N^3(X) \qquad (f \neq g) \tag{3.23}$$

elde edilir. N^1 antisimetrik olduğundan $N^1(X,X) = 0$ dır. Dolayısıyla

$$(f-g)N^3(X) = 0$$

ise

$$N^3(X) = 0$$

olur. (3.17) den N^2 nin de antisimetrik olduğu görülür. Benzer yolla (3.22) eşitliğinden

$$N^4(X) = 0$$

bulunur. $N^3(X) = 0$ ve $N^4(X) = 0$ eşitlikleri $\forall X \in \chi(M)$ için doğru olduğundan (3.21) ve (3.22) eşitliklerini kullanırsak $N^1(X,Y) = 0$ ve $N^2(X,Y) = 0$ elde edilir. Bu ispat yapılırken $f \neq g$ kabul edilmişti. $f = g$ için (3.21) denkleminde $Y = -X$ yazılırsa ve $N^1(X,X) = 0$ olduğunu kullanırsak

$$\begin{aligned} -N^1(X,X) + fN^3(X) + fN^3(X) &= 0 \\ 2fN^3(X) &= 0 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $f \neq 0$ olduğundan

$$N^3(X) = 0$$

elde edilir. Aynı işlemleri (3.22) de yaparsak $N^4(X) = 0$ elde edilir, yine (3.21) ve (3.22) den $N^1(X,Y) = 0$ ve $N^2(X,Y) = 0$ olduğu görülür.

($\Longleftarrow$) : Tersine kabul edelim ki, $N^1(X,Y) = N^2(X,Y) = N^3(X) = N^4(X) = 0$ olsun.

$$\begin{aligned} N_J((X, f\frac{d}{dt}), (Y, g\frac{d}{dt})) &= N^1(X,Y) + gN^3(X) - fN^3(Y), N^2(X,Y) \\ &\quad + gN^4(X) - fN^4(Y)) = (0,0) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu $\forall (X, f\frac{d}{dt}), (Y, g\frac{d}{dt}) \in \chi(M \times \mathbb{E})$ için sağladığından $N_J \equiv 0$ dır. Dolayısıyla (φ, ξ, η) hemen hemen kontak yapısı normaldir. ■

Teorem 3.13 *$(2n+1)$ boyutlu M manifoldu (φ,ξ,η) hemen hemen kontak yapısıyla verilsin. Şayet $N^1=0$ ise $N^2=N^3=N^4=0$ dır (Yano and Kon 1984).*

İspat. Şayet $N^1=0$ ise $N^1(X,\xi)=0$ dır. (3.14), (3.15) ve (3.16) eşitliklerinden

$$N^1(X,\xi)=[\xi,X]+\varphi[\xi,\varphi(X)]-(\xi\eta(X))\xi=0 \tag{3.24}$$

elde edilir. Her iki tarafın η altında görüntüsünü alırsak

$$\eta[\xi,X]+\eta(\varphi[\xi,\varphi(X)])-(\xi\eta(X))\eta(\xi)=0 \tag{3.25}$$

(3.5) eşitliğinden

$$\eta[\xi,X]-(\xi\eta(X))=0 \tag{3.26}$$

olur. (3.20) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned} N^4(X) &= (L_\xi\eta)X \\ &= \eta[\xi,X]-(\xi\eta(X)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (3.24) denkleminde X yerine $\varphi(X)$ uygularsak

$$\begin{aligned} \varphi[\xi,X]+\varphi^2\eta[\xi,\varphi(X)]-(\xi\eta(X))\varphi(\xi) &= 0 \\ \varphi[\xi,X]-[\xi,\varphi(X)]+\eta[\xi,\varphi(X)] &= 0 \\ \varphi[\xi,X]-[\xi,\varphi(X)] &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$N^3(X)=(L_\xi\varphi)X=\varphi[\xi,X]-[\xi,\varphi(X)]=0$$

olarak bulunur. Ayrıca $N^1=0$ dan $N^1(\varphi(X),Y)=0$ dır. Böylece

$$\begin{aligned} N^1(\varphi(X),Y) &= -[\varphi(X),Y]+\eta[\varphi(X),Y]\xi+[-X+\eta(X)\xi,\varphi(Y)] \\ &\quad -\varphi[-X+\eta(X)\xi,(Y)]-\varphi[\varphi(X),\varphi(Y)]+\varphi(X)\eta(Y)\xi \\ &\quad -Y\eta(\varphi(X))\xi-\eta[\varphi(X),Y]\xi \\ 0 &= -[\varphi(X),Y]-[X,\varphi(Y)]+[\eta(X)\xi,\varphi(Y)]-\varphi[-X+\eta(X)\xi,Y] \\ &\quad -\varphi[\varphi(X),\varphi(Y)]+\varphi(X)\eta(Y)\xi \\ 0 &= -[\varphi(X),Y]-[X,\varphi(Y)]-\varphi(Y)\eta(X)\xi+\eta(X)[\xi,\varphi(Y)] \\ &\quad -\varphi[-X+\eta(X)\xi,Y]-\varphi[\varphi(X)]+\varphi(X)\eta(Y)\xi \end{aligned}$$

her iki tarafa η yı uygulayıp $\eta[\xi,\varphi(X)]=0$ eşitliğini gözönüne alırsak

$$\varphi(X),\eta(Y)-\varphi(Y),\eta(X)-\eta\left[\varphi(X),Y\right]-\eta\left[X,\varphi(Y)\right]=0$$

elde edilir. Dolayısıyla $N^2(X,Y)=0$ dır. Böylece ispat biter. ■

Sonuç 3.12 $(2n+1)$ *boyutlu* M *manifoldu* (φ,ξ,η) *hemen hemen kontak yapısıyla verilsin. Bu durumda her* $X,Y\in\chi(M)$ *için*

$$d\eta((\varphi(X),\varphi(Y))=d\eta(X,Y)$$

dir (Yano and Kon 1984).

İspat. (3.15) denkleminde X yerine $\varphi(X)$ alırsak

$$2d\eta(\varphi(X),Y)=\varphi(X)\eta(Y)-Y\eta(\varphi(X))-\eta[\varphi(X),Y]$$

olur. Benzer şekilde Y yerine $\varphi(Y)$ yazarsak

$$2d\eta(X,\varphi Y)=X\eta(\varphi(Y))-\varphi(Y)\eta(X)-\eta[X,\varphi(Y)]$$

elde edilir. Burada son iki eşitliği taraf tarafa toplar ve $\eta\circ\varphi=0$ özdeşliğini kullanırsak

$$2d\eta(\varphi(X),Y)+2d\eta(X,\varphi Y)=\varphi(X)\eta(Y)-\varphi(Y)\eta(X)-\eta[\varphi(X),Y]-\eta[X,\varphi(Y)]$$

olur ve

$$2d\eta(\varphi(X),Y)+2d\eta(X,\varphi Y)=N^2(X,Y) \tag{3.27}$$

elde edilir. Şayet $N^1=0$ ise $N^2=0$ dır. Böylece

$$\begin{aligned}2d\eta(\varphi(X),Y)+2d\eta(X,\varphi Y)&=0\\ d\eta(\varphi(X),Y)+d\eta(X,\varphi Y)&=0\end{aligned}$$

olur. Burada Y yerine $\varphi(Y)$ yazarsak

$$\begin{aligned}d\eta(\varphi(X),\varphi(Y))+d\eta(X,\varphi^2(Y))&=0\\ d\eta(\varphi(X),\varphi(Y))+d\eta(X,-Y+\eta(X)\xi)&=0\\ d\eta(\varphi(X),\varphi(Y))-d\eta(X,Y)+\eta(X)d\eta(X,\xi)&=0\end{aligned}$$

elde dilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} 2d\eta(X,\xi) &= -\xi\eta(X) - \eta[X,\xi] \\ &= -\xi\eta(X) - \eta[\xi,X] \\ &= (L_\xi\eta)X \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$d\eta((\varphi(X),\varphi(Y)) = d\eta(X,Y) \tag{3.28}$$

elde edilir. O halde $N^2 = 0$ olduğundan (φ,ξ,η) hemen hemen kontak yapısı, φ altında $d\eta$ yı invaryant bırakır. ∎

Sonuç 3.13 *$(2n+1)$ boyutlu M manifoldu (φ,ξ,η) hemen hemen kontak yapısıyla verilsin. (φ,ξ,η) yapısı normaldir ancak ve ancak $N^1 = 0$ dır (Yano and Kon 1984).*

Teorem 3.14 *$(2n+1)$ boyutlu M manifoldu $(\varphi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ kontak metrik yapısıyla verilsin. h lineer operatörünü*

$$\begin{aligned} h &: \chi(M) \longrightarrow \chi(M) \\ X &\longrightarrow h(X) = \frac{1}{2}(L_\xi\varphi)(X) \end{aligned}$$

ve $h = \frac{1}{2}L_\xi\varphi$ olarak tanımlayalım. Bu durumda h operatörü

i) Simetrik

ii) φ ile anti-komütatif (Yani, $\varphi h = -h\varphi$)

iii) $trh = 0$

iv) $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X\xi = -\varphi X - \varphi hX$$

v) Şayet M üç boyutlu ise $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X\varphi)Y = \varepsilon g(X+hX,Y)\xi - \eta(Y)(X+hX)$$

dir (Blair 2002).

Tanım 3.19 ***(Sasaki yapı):*** *$(2n+1)$ boyutlu M manifoldu $(\varphi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ normal kontak metrik yapısıyla verilsin. Bu durumda M manifolduna **Sasaki manifoldu** ve $(\varphi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ yapısına da **Sasaki yapı** denir (Belkhelfa 2002).*

Lemma 3.1 *φ nin kovaryant türevi $(\varphi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ hemen hemen kontak metrik yapısı için*

$$\begin{aligned}2g((\nabla_X\varphi)Y,Z) &= 3\varepsilon d\Phi(X,\varphi(Y),\varphi(Z))-3\varepsilon d\Phi(X,Y,Z)+g(N^{(1)}(Y,Z),\varphi(X))\\ &\quad+\varepsilon\eta(X)N^{(2)}(Y,Z)+2\varepsilon d\eta(\varphi(Y),X)\eta(Z)-2\varepsilon d\eta(\varphi(Z),X)\eta(Y)\end{aligned}$$

dir. Burada $\Phi(X,Y)=\varepsilon g(X,\varphi(Y))$ olup $\Phi=d\eta$ kontak durumunda

$$\begin{aligned}2g((\nabla_X\varphi)Y,Z) &= g(N^{(1)}(Y,Z),\varphi(X))+2\varepsilon d\eta(\varphi(Y),X)\eta(Z)\\ &\quad-2\varepsilon d\eta(\varphi(Z),X)\eta(Y)\end{aligned}\tag{3.29}$$

elde edilir (Belkhelfa 2002).

Teorem 3.15 *$(2n+1)$ boyutlu M manifoldu $(\varphi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ hemen hemen kontak metrik yapısıyla verilsin. Bu durumda M manifoldu Sasaki manifoldudur ancak ve ancak $\forall X,Y\in\chi(M)$ için*

$$(\nabla_X\varphi)Y=\varepsilon g(X,Y)\xi-\eta(Y)X\tag{3.30}$$

(Belkhelfa 2002).

İspat. $(\Longrightarrow)$ Kabul edelim ki, $(\varphi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ hemen hemen kontak metrik yapısı M de Sasaki yapı olsun. Bu durumda M manifoldu kontak metrik manifolddur ve $\Phi\equiv d\eta$ dır. Ayrıca Sasaki manifoldunun tanımından $N^{(1)}=N^{(2)}=0$ dır. Böylece (3.29) denkleminden

$$g(\nabla_X\varphi)Y,Z)=\varepsilon d\eta(\varphi(Y),X)\eta(Z)-\varepsilon d\eta(\varphi(Z),X)\eta(Y)$$

elde edilir. Yapı kontak metrik yapı olduğundan $\Phi(X,Y)=d\eta(X,Y)=\varepsilon g(X,\varphi(Y))$ dir. Dolayısıyla,

$$g(\nabla_X\varphi)Y,Z)=\varepsilon g(\varphi(X),\varphi(Y))\eta(Z)-\varepsilon g(\varphi(X),\varphi(Z))\eta(Y)$$

elde edilir. Yapı hemen hemen kontak metrik yapı olduğundan

$$g(\varphi(X),\varphi(Y))=g(X,Y)-\varepsilon\eta(X)\eta(Y)$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned} g(\nabla_X\varphi)Y, Z) &= \eta(Z)\left[g(X,Y) - \varepsilon\eta(X)\eta(Y)\right] - \eta(Y)\left[g(X,Z) - \varepsilon\eta(X)\eta(Z)\right] \\ &= \eta(Z)g(X,Y) - \eta(Y)g(X,Z) \\ &= \varepsilon g(Z,\xi)g(X,Y) - g(\eta(Y)X, Z) \\ &= g(\varepsilon g(X,Y)\xi - \eta(Y)X, Z) \end{aligned}$$

son eşitlik $\forall Z \in \chi(M)$ sağlandığından ve g non-dejenere olduğundan

$$(\nabla_X\varphi)Y = \varepsilon g(X,Y)\xi - \eta(Y)X$$

elde edilir.

($\Longleftarrow$) Tersine M, $(2n+1)$ boyutlu manifoldu $(\varphi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ hemen hemen kontak metrik yapısı ile verilsin ve (3.29) özdeşliği sağlansın. (3.29) denkleminde $Y = \xi$ alırsak

$$\begin{aligned} (\nabla_X\varphi)Y &= \varepsilon g(X,\xi)\xi - \eta(\xi)X \\ &= \eta(X)\xi - X \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} (\nabla_X\varphi)Y &= X\varphi(\xi) - \varphi(\nabla_X\xi) \\ &= -\varphi(\nabla_X\xi) \end{aligned}$$

olduğundan

$$-\varphi(\nabla_X\xi) = \eta(X)\xi - X$$

olur. Burada φ yi tekrar uygularsak

$$-\left(-\nabla_X\,\xi + \eta\left(\nabla_X\xi\right)\xi\right) = \eta(X)\varphi(\xi) - \varphi(X)$$

elde edilir. Burada g$(\xi,\xi) = \varepsilon$ eşitliğinde X yönünde kovaryant türev alırsak

$$\begin{aligned} \eta\left(\nabla_X\xi\right) &= g(\eta\left(\nabla_X\xi, \xi\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Burada $\varphi\left(\xi\right) = 0$ olduğundan

$$\nabla_X\xi = -\varphi(X)$$

elde edilir. Teorem 3.18 den ξ nin Killing vektör alanı olduğu görülür. Ayrıca,

$$\begin{aligned} (\triangledown_X \eta) Y &= X\eta(Y) - \eta(\triangledown_X Y) \\ (\triangledown_X \eta) Y &= Y\eta(X) - \eta(\triangledown_Y X) \end{aligned}$$

eşitliklerini taraf tarafa çıkarırsak

$$\begin{aligned} (\triangledown_X \eta) Y - (\triangledown_X \eta) Y &= X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y]) \\ &= 2d\eta(X,Y) \end{aligned}$$

eşitliğinden ve (3.44) denkleminden

$$\begin{aligned} d\eta(X,Y) &= \frac{1}{2}((\triangledown_X \eta) Y - (\triangledown_X \eta) Y) \\ &= \frac{1}{2}(g(\triangledown_X \xi, Y) - g(\triangledown_Y \xi, X)) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca ξ Killing vektör alanı olduğundan Teorem 3.18 ve (3.41) eşitliğinden dolayı

$$g(\triangledown_X \xi, Y) = -g(\triangledown_Y \xi, X)$$

dir. Dolayısıyla

$$d\eta(X,Y) = g(\triangledown_X \xi, Y) \tag{3.31}$$

elde edilir. (3.42) denkleminden

$$\begin{aligned} d\eta(X,Y) &= g(-\varphi(X), Y) \\ &= -g(\varphi(X), Y) \\ &= g(X, \varphi(Y)) \\ &= \Phi(X,Y) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Böylece $\Phi = d\eta$ olduğu görülür. Bu ise bize η nın Kontak metrik yapı ve (M,η) nın Kontak metrik manifold olduğunu söyler. Diğer taraftan

$$\alpha(X,Y) = (\varphi\nabla_Y\varphi - \nabla_{\varphi Y}\varphi) X - (\varphi\nabla_{\varphi X}\varphi - \nabla_{\varphi X}\varphi) Y$$

dersek

$$\begin{aligned}
\alpha(X,Y) &= \varphi(\nabla_Y\varphi)X-(\nabla_{\varphi Y}\varphi)X-\varphi(\nabla_X\varphi)Y-(\nabla_{\varphi X}\varphi)Y\\
&= \varphi(\nabla_Y\varphi X-\varphi(\nabla_Y X))-(\nabla_{\varphi Y}\varphi X-\varphi(\nabla_{\varphi Y}X))-\varphi(\nabla_X\varphi Y-\varphi(\nabla_X Y))\\
&\quad+(\nabla_{\varphi X}\varphi Y-\varphi(\nabla_{\varphi X}Y))\\
&= \varphi^2(\nabla_X Y-\nabla_Y X)+\varphi(\nabla_Y\varphi X-\nabla_{\varphi X}Y)+\varphi(\nabla_{\varphi Y}X-\nabla_X\varphi Y)\\
&\quad+\nabla_{\varphi X}\varphi Y-\nabla_{\varphi Y}\varphi X\\
&= \varphi^2([X,Y])+\varphi([Y,\varphi X])+\varphi([\varphi Y,X])+[\varphi X,\varphi Y]\\
&= \varphi^2([X,Y])+[\varphi X,\varphi Y]-\varphi([\varphi X,Y])-\varphi([X,\varphi Y])\\
&= N_\varphi(X,Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.30) denklemi ile

$$\begin{aligned}
N_\varphi(X,Y) &= \varphi(g(X,Y)\xi-\eta(X)Y)-g(\varphi(Y),X)\xi+\eta(X)\varphi(Y)\\
&\quad-\varphi(g(X,Y)\xi-\eta(Y)X)+g(\varphi(X),Y)\xi-\eta(Y)\varphi(X)\\
&= -\eta(X)\varphi(Y)-g(\varphi(Y),X)\xi+\eta(X)\varphi(Y)+\eta(Y)\varphi(X)\\
&\quad+g(\varphi(X),Y)\xi-\eta(Y)\varphi(X)\\
&= -(\varepsilon g(\varphi(Y),X)+\varepsilon g(\varphi(Y),X))\xi\\
&= -2\varepsilon g(\varphi(Y),X)\xi\\
&= -2d\eta(X,Y)\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
N^{(1)}(X,Y) &= N_\varphi(X,Y)+2d\eta(X,Y)\xi\\
&= 0
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Böylece M manifoldunun Sasaki manifoldu olduğu görülür. ■

Örnek 3.8 *g Riemannian veya Lorentzian metrik iken $g(\xi,\xi)=\varepsilon$ $(\varepsilon=\pm 1)$ olmak üzere $(\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon),\varphi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ hemen hemen kontak metrik manifold idi. Genel olması için ε ile işlem yapalım. Diğer taraftan metriğimiz şayet*

$$g_{ab}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}\delta_{ij}+\varepsilon y_i y_j & 0 & -\varepsilon y_i\\ 0 & \delta_{ij} & 0\\ -\varepsilon y_J & 0 & \varepsilon\end{bmatrix}$$

ise

$$g^{ab} = 4\begin{bmatrix} \delta_{ij} & 0 & y_i \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \\ y_i & 0 & \varepsilon + |y|^2 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Burada $|y|^2 = \sum (y^i)^2$ *dir. Ayrıca Chrisstoffel sembollerinin*

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kh} \left(g_{ih,j} + g_{hj,i} - g_{ij,h} \right)$$

olduğunu biliyoruz. Burada Einstein toplam sembolü kullanılmıştır. Ayrıca virgül kovaryant türev anlamındadır. Bu formülden Chrisstoffel sembollerini hesaplarsak

$$\begin{aligned}
\Gamma^k_{(n+i)j} &= \frac{1}{2} g^{kh} \left(g_{(n+i)h,j} + g_{hj,(n+i)} - g_{(n+i)j,h} \right), \; h = 1, ..., 2n+1; \;\; i, j, k = 1, 2, ..., n \\
&= \frac{1}{2} (g^{k1} g_{1j,(n+i)} + ... + g^{kn} g_{nj,(n+i)} + g^{k(n+1)} g_{(n+1)j,(n+i)} \\
&\quad + ... + g^{k(2n)} g_{(2n)j,(n+i)} + g^{k(2n+1)} g_{(2n+1)j,(n+i)}) \\
&= \frac{1}{2} \left(g^{kk} g_{kj,(n+i)} + g^{k(2n+1)} g_{(2n+1)j,(n+i)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(4 \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{4} \left(\delta_{kj} + \varepsilon y_k y_j \right) \right) + 4 y_k \frac{\partial}{\partial y_i} \left(-\frac{1}{4} \varepsilon y_i \right) \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \left(y_k y_j \right) - y_k \frac{\partial}{\partial y_i} \left(y_i \right) \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} \left(y_k \frac{\partial}{\partial y_i} \left(y_j \right) + y_j \frac{\partial}{\partial y_i} \left(y_k \right) - y_k \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\varepsilon y_j \right) \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} y_j \frac{\partial}{\partial y_i} \left(y_k \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} \delta_{ki} y_j
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer yolla

$$\begin{aligned}
\Gamma^k_{(n+i)(2n+1)} &= -\frac{\varepsilon}{2} \delta_{ik}, \Gamma^{n+k}_{ij} = -\frac{\varepsilon}{2} \left(\delta_{kj} y_i + \delta_{ki} y_j \right), \Gamma^{n+k}_{i(2n+1)} = \frac{\varepsilon}{2} \delta_{ki} \\
\Gamma^{2n+1}_{i(n+j)} &= \frac{1}{2} (\varepsilon y_i y_j - \delta_{ij}), \Gamma^{2n+1}_{(n+i)(2n+1)} = -\frac{\varepsilon}{2} y_i
\end{aligned}$$

dir. Diğer Chrisstoffel sembolleri sıfırdır. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{e_i}\varphi e_j &= \overline{\nabla}_{2\frac{\partial}{\partial y_i}} 2\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + y_j\frac{\partial}{\partial z}\right), \qquad\qquad i,j=1,...,n \\
&= 4\left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y_i}}\frac{\partial}{\partial x_j} + \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y_i}}\left(y_j\frac{\partial}{\partial z}\right)\right) \\
&= 4\left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y_i}}\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial y_j}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial z} + y_i\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y_i}}\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&= 4\left(\Gamma^p_{(n+i)j}\partial_p + \delta_{ij}\frac{\partial}{\partial z} + y_j\Gamma^p_{(n+i)(2n+1)}\partial_p\right), \qquad p=1,...,2n+1 \\
&= 4\left(\begin{array}{c} \Gamma^k_{(n+i)j}\partial_k + \Gamma^{n+k}_{(n+i)j}\partial_{n+k} + \Gamma^{2n+1}_{(n+i)j}\partial_{2n+1} + \delta_{ij}\frac{\partial}{\partial z} \\ +y_j\left(\Gamma^k_{(n+i)(2n+1)}\partial_k + \Gamma^{n+k}_{(n+i)(2n+1)}\partial_{n+k} + \Gamma^{2n+1}_{(n+i)(2n+1)}\partial_{2n+1}\right) \end{array}\right) \\
&= 4\left(\begin{array}{c} \frac{\varepsilon}{2}\delta_{ki}y_j\partial_k + 0\partial_{n+k} + \frac{1}{2}\left(\varepsilon y_i y_j - \delta_{ij}\right)\partial_{2n+1} + \delta_{ij}\partial_{2n+1} \\ +y_j\left(-\frac{\varepsilon}{2}\delta_{ik}\partial_k + 0\partial_{n+k} - \frac{\varepsilon}{2}y_i\partial_{2n+1}\right) \end{array}\right) \\
&= 4\left(\begin{array}{c} \frac{\varepsilon}{2}\delta_{ki}y_j\partial_k + \frac{1}{2}\varepsilon y_i y_j\partial_{2n+1} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\partial_{2n+1} + \delta_{ij}\partial_{2n+1} \\ --\frac{\varepsilon}{2}\delta_{ik}y_j\partial_k - \frac{\varepsilon}{2}y_i y_j\partial_{2n+1} \end{array}\right) \\
&= 4\left(-\frac{1}{2}\delta_{ij}\partial_{2n+1} + \delta_{ij}\partial_{2n+1}\right) \\
&= 4\frac{1}{2}\delta_{ij}\partial_{2n+1} \\
&= \delta_{ij}2\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \delta_{ij}\xi
\end{aligned}
$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\overline{\nabla}_{e_i}\varphi e_j = \delta_{ij}\xi = -\overline{\nabla}_{\varphi e_i}e_{j,}\ \overline{\nabla}_{\xi}e_i = -\varepsilon\varphi e_i = \overline{\nabla}_{e_i}\xi, \tag{3.32}$$

$$\overline{\nabla}_{\xi}\varphi e_i = \varepsilon e_i = \overline{\nabla}_{\varphi e_i}\xi,\ \overline{\nabla}_{e_i}e_j = \overline{\nabla}_{\varphi e_i}\varphi e_j = \overline{\nabla}_{\xi}\xi = 0 \tag{3.33}$$

olarak bulunur (Camcı 2007).

Teorem 3.16 $(2n+1)$ *boyutlu* M *manifoldu* $(\varphi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ *kontak metrik yapısıyla verilsin. Bu durumda* $N^2 = N^4 = 0$ *dır. Ayrıca,*

$$N^3 = 0 \Leftrightarrow \xi \text{ killing vektörüdür.}$$

önermesi doğrudur (Yano and Kon 1984).

İspat. ($\Longrightarrow$) Yapımız kontak metrik manifold yapısı olduğundan $d\eta(X,Y) = \varepsilon g(X,\varphi(Y))$ dir. Burada X yerine $\varphi(X)$, Y yerine de $\varphi(Y)$ yazarsak

$$\begin{aligned} d\eta(\varphi(X),\varphi(Y)) &= \varepsilon g\left(\varphi(X),\varphi^2(Y)\right) \\ &= -\varepsilon g(X,\varphi^3(Y)) \\ &= -\varepsilon g(X,-\varphi(Y)) \\ &= \varepsilon g(X,\varphi(Y)) \end{aligned}$$

dolayısıyla

$$d\eta(\varphi(X),\varphi(Y)) = d\eta(X,Y) \tag{3.34}$$

elde edilir. Ayrıca (3.34) eşitliğinde Y yerine de $\varphi(Y)$ yazarsak

$$\begin{aligned} d\eta\left(\varphi(X),\varphi^2(Y)\right) &= d\eta(X,\varphi(Y)) \\ d\eta(\varphi(X),-Y+\eta(Y)\xi) &= d\eta(X,\varphi(Y)) \\ -d\eta(\varphi(X),Y)+\eta(Y)\,d\eta(\varphi(X),\xi) &= d\eta(X,\varphi(Y)) \end{aligned}$$

olur, burada

$$\begin{aligned} d\eta(\varphi(X),\xi) &= \varepsilon g(\varphi(X),\varphi(\xi)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$d\eta(\varphi(X),Y) + d\eta(X,\varphi(Y)) = 0 \tag{3.35}$$

elde edilir. (3.27) den $N^2 = 0$ olur. Diğer taraftan $d\eta(X,\xi) = g(X,\varphi(\xi)) = 0$ ve

$$d\eta(X,\xi) = \frac{1}{2}\left(X\eta(\xi) - \xi\eta(X) - \eta([X,\xi])\right)$$

olduğundan

$$\xi\eta(X) - \eta([X,\xi]) = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} N^{(4)}(X) &= (L_\xi\eta)\,X \\ &= \xi\eta(X) - \eta([X,\xi]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Bu $\forall X \in \chi(M)$ için sağlandığından $N^{(4)} = 0$ elde edilir. Böylece birinci kısmın ispatı biter. İkinci kısmın ispatında

$$\begin{aligned} (L_\xi g)(X, \xi) &= \xi g(\xi, X) - g([\xi, X], \xi) - g(X, [\xi, \xi]) \\ &= \xi \eta(X) - \eta([\xi, X]) \\ &= (L_\xi \eta)(X) \end{aligned}$$

ve böylece $(L_\xi g)(X, \xi) = 0$ elde edilir. Biliyoruz ki, η ile $d\eta$ formları Lie türevi altında değişmez olduğundan $L_\xi d\eta \equiv 0$ dır. Dolayısıyla $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(L_\xi d\eta)(X, Y) = 0$$

olur. Böylece açılımı yaparsak

$$\xi d\eta(X, Y) - d\eta([\xi, X], Y) - d\eta(X, [\xi, Y]) = 0$$

dır. Ayrıca $d\eta(X, Y) = \varepsilon(X, \varphi(Y))$ eşitliğinden

$$\varepsilon \xi g(X, \varphi(Y)) - \varepsilon g([\xi, X], \varphi(Y)) - \varepsilon g(X, \varphi([\xi, Y])) = 0 \qquad (3.36)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} (L_\xi g)(X, \varphi(Y)) &= \xi g(\varphi(Y), X) - g([\xi, X], \varphi(Y)) - g(X, [\xi, \varphi(Y)]) \\ g(X, (L_\xi \varphi)(Y)) &= g(X, [\xi, \varphi(Y)]) - g(X, \varphi([\xi, Y])) \end{aligned}$$

eşitliklerini taraf tarafa toplarsak

$$(L_\xi g)(X, \varphi(Y)) + g(X, (L_\xi \varphi)(Y)) = \xi g(\varphi(Y), X) - g([\xi, X], \varphi(Y) - g(X, \varphi([\xi, Y]))$$

elde edilir. (3.36) eşitliğinden

$$(L_\xi g)(X, \varphi(Y)) + g(X, (L_\xi \varphi)(Y)) = 0$$

sonucuna ulaşırız. Buradan $N^3 = 0$ ise

$$(L_\xi g)(X, \varphi(Y)) = 0$$

olur. Bu eşitlik $\forall X, Y \in \chi(M)$ için sağlandığından $L_\xi g \equiv 0$ dır. Dolayısıyla ξ killing vektörüdür.

($\Longleftarrow$) : Tersine ξ killing vektör ise $L_\xi g \equiv 0$ olacağından $g(X, (L_\xi \varphi)(Y)) = 0$ olur. Bu eşitlik $\forall X \in \chi(M)$ için sağlandığından $N^3 = 0$ dır. Böylece ispat biter. ∎

Teorem 3.17 *Hemen hemen kontak (φ,ξ,η) yapısı ile verilen diferensiyellenebilir bir M manifoldu, hemen hemen kontak metrik olacak şekilde Riemannian metriği kabul ettiği gibi Lorentzian metriği de kabul eder (Belkhelfa 2002).*

İspat. h_0 bir Riemannian metrik ve $h_0(\xi,\xi)=1$ olsun. ξ^* da h_0 metriği ile bağlantılı ξ nin dual vektörü olmak üzere

$$\widetilde{h}\equiv h_0-(1-\varepsilon)\,\xi^*\otimes\xi^* \tag{3.37}$$

olarak tanımlayalım. Burada $\widetilde{h}$ nın bir Lorentzian metrik olduğu kolaylıkla ispatlanabilir. Burada

$$\begin{aligned}\widetilde{h}(\xi,\xi) &= h_0(\xi,\xi)-(1-\varepsilon)\xi^*(\xi)\otimes\xi^*(\xi)\\ &= 1-(1-\varepsilon)\\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

dir. h, $(0,2)$ tensör alanını

$$h(X,Y)=\widetilde{h}\left(\varphi^2(X),\varphi^2(Y)\right)+\varepsilon\eta(X)\eta(Y)$$

olarak tanımlayalım. Yine $\widetilde{h}$ metriğinde olduğu gibi h ın da Lorentzian metrik olduğu ispatlanabilir. Burada

$$\begin{aligned}h(\xi,\xi) &= \widetilde{h}\left(\varphi^2(\xi),\varphi^2(\xi)\right)+\varepsilon\eta(\xi)\eta(\xi)\\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

dir. Ayrıca $Y=\xi$ alırsak

$$\begin{aligned}h(X,\xi) &= \widetilde{h}\left(\varphi^2(X),\varphi^2(\xi)\right)+\varepsilon\eta(X)\eta(\xi)\\ h(X,\xi) &= \varepsilon\eta(X)\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde h metriğinden yararlanarak g yi

$$g(X,Y)=\frac{1}{2}\left(h(X,Y)+h(\varphi(X),\varphi(Y))+\varepsilon\eta(X)\eta(Y)\right) \tag{3.38}$$

şeklinde tanımlarsak g nin bir Lorentzian metrik olduğunu kolayca görebiliriz. Burada

$$\begin{aligned}g(\xi,\xi) &= \frac{1}{2}\left(h(\xi,\xi)+h(\varphi(\xi),\varphi(\xi))+\varepsilon\eta(\xi)\eta(\xi)\right)\\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon+0+\varepsilon)\\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

ve benzer şekilde (3.38) eşitliğinde $Y = \xi$ alırsak

$$\begin{aligned} g(X,\xi) &= \frac{1}{2}\left(h(X,\xi) + h(\varphi(X),\varphi(\xi)) + \varepsilon\eta(X)\eta(\xi)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\varepsilon\eta(X) + 0 + \varepsilon\eta(X)\right) \\ &= \varepsilon\eta(X) \end{aligned}$$

her iki tarafı ε ile çarparsak

$$\eta(X) = \varepsilon g(X,\xi) \tag{3.39}$$

elde edilir. Yine (3.38) eşitliğinde X yerine $\varphi(X)$ ve Y yerine $\varphi(Y)$ yazarsak

$$\begin{aligned} g(\varphi(X),\varphi(Y)) &= \frac{1}{2}\left(h(\varphi(X),\varphi(Y)) + h\left(\varphi^2(X),\varphi^2(Y)\right) + \varepsilon\eta(\varphi(X))\eta(\varphi(Y))\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(h(\varphi(X),\varphi(Y)) + h(-X+\eta(X)\xi, -Y+\eta(Y)\xi)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(h(X,Y) + h(\varphi(X),\varphi(Y)\right) + \varepsilon\eta(X)\eta(Y) \end{aligned}$$

dolayısıyla

$$g(\varphi(X),\varphi(Y)) = g(X,Y) - \varepsilon\eta(X)\eta(Y) \tag{3.40}$$

elde edilir. g Lorentzian metriği $g(\xi,\xi) = \varepsilon$ ve (3.38) şartını sağlar. ∎

3.6 K-Kontak Manifoldlar

Tanım 3.20 ***(K-Kontak manifold)****: M, $(2n+1)$ boyutlu manifoldu $(\varphi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ kontak metrik yapısı ile verilsin. Şayet ξ vektör alanı g metriğine göre bir Killing vektör alanı ise M ye* ***K-Kontak manifold****, $(\varphi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ yapısına da* ***K-Kontak yapı*** *denir (Belkhelfa 2002).*

Teorem 3.18 *M, $(2n+1)$ boyutlu manifold $(\varphi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ kontak metrik yapısı ile verilsin. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir:*

i) M bir K-kontak manifolddur.

ii) $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$g(\nabla_X\xi, Y) + g(\nabla_Y\xi, X) = 0 \tag{3.41}$$

dır.

iii) $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X\xi = -\varphi(X) \tag{3.42}$$

dır (Blair 1976).

İspat. $(i) \Longrightarrow (ii)$ M bir K-kontak manifold olsun. Dolayısıyla ξ bir killing vektör olur. M aynı zamanda kontak metrik manifold olduğundan

$$d\eta(X,Y) = \varepsilon g(X,\varphi(Y)) \tag{3.43}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} 2d\eta(X,Y) &= X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta\left[X,Y\right] \\ &= Xg(Y,\xi) - Yg(X,\xi) - g(\left[X,Y\right],\xi) \\ &= g(\nabla_X\xi,Y) + g(Y,\nabla_X\xi) - g(\nabla_Y X,\xi) - g(X,\nabla_Y\xi) \\ &\quad -g(\nabla_X Y,\xi) - g(\nabla_Y X,\xi) \end{aligned}$$

gerekli sadeleştirmeleri yaparsak

$$2d\eta(X,Y) = g(\nabla_X\xi,Y) - g(X,\nabla_Y\xi) \tag{3.44}$$

elde edilir. Ayrıca ξ killing vektör olduğundan $L_\xi g = 0$ dır. Burada $(L_\xi g)(X,Y)$ yi hesaplarsak

$$\begin{aligned} (L_\xi g)(X,Y) &= \xi g(X,Y) - g(\left[\xi,X\right],Y) - g(X,\left[\xi,Y\right]) \\ &= g(\nabla_\xi X,Y) + g(\nabla_\xi Y,X) - g(\nabla_\xi X,Y) \\ &\quad +g(\nabla_X\xi,Y) - g(\nabla_\xi Y,X) + g(\nabla_Y\xi,X) \end{aligned}$$

ve gerekli sadeleştirmeleri yaparsak

$$(L_\xi g)(X,Y) = g(\nabla_\xi X,Y) + g(X,\nabla_Y\xi) \tag{3.45}$$

olur, burada $(L_\xi g) = 0$ olduğundan

$$g(\nabla_\xi X,Y) + g(X,\nabla_Y\xi) = 0 \tag{3.46}$$

eşitliğini elde ederiz.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Öncelikle (3.41) denkleminin sağlandığını kabul edelim. Dolayısıyla

$$g(\nabla_\xi X,Y) = -g(X,\nabla_Y\xi) \tag{3.47}$$

olur. (3.44) ve (3.47) eşitliklerinden

$$d\eta(X,Y) = g(\nabla_X \xi, Y) = g(X, \varphi(Y)) \tag{3.48}$$

elde edilir. φ antisimetrik olduğundan

$$g(X,\varphi(Y)) = -g(\varphi X, Y) = g(\nabla_X \xi, Y)$$

olur ve bu eşitlik $\forall X \in \chi(M)$ için sağlandığından

$$\nabla_X \xi = -\varphi(X)$$

sonucuna ulaşılır.

$(iii) \Longrightarrow (ii)$: $\forall X \in \chi(M)$ için $\nabla_X \xi = -\varphi(X)$ olsun. (3.45) den ve φ antisimetrik olduğundan

$$\begin{aligned}(L_\xi g)(X,Y) &= g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi)\\ &= g(-\varphi(X), Y) + g(X, -\varphi(Y))\\ &= 0\end{aligned}$$

dır. Böylece ξ killing vektör ve M manifoldu K-Kontak manifolddur. ■

Lemma 3.2 *$(2n+1)$ boyutlu $(M,\varphi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ Sasaki manifoldu verilsin. Bu durumda aşağıdaki bağıntılar vardır.*

$$1)\ R(X,Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y \tag{3.49}$$

ve

$$\begin{aligned}2)\ R(X,\xi)Y &= \eta(Y)X - \varepsilon g(X,Y)\xi\\ &= -(\nabla_X \varphi)(Y)\end{aligned}$$

üstelik ξ ye ortogonal olan bütün X birim vektörleri için

$$R(X,\xi)X = -\varepsilon\xi$$

dir (Belkhelfa 2002).

İspat. Sasaki manifoldları aynı zamanda K-Kontak manifold olduklarından Teorem 3.18 den $\nabla_X \xi = -\varphi(X)$ dir.

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X,Y]}\xi \\ &= -\nabla_X \varphi(Y) + \nabla_Y \varphi(X) - \varphi([X,Y]) \\ &= -(\nabla_X \varphi(Y) - \varphi(\nabla_X Y)) + (\nabla_Y \varphi(X) - \varphi(\nabla_Y X)) \\ &= (\nabla_X \varphi)(Y) + (\nabla_Y \varphi)(X) \end{aligned}$$

M Sasaki manifoldu olduğundan (3.30) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= -(\varepsilon g(X,Y)\xi - \eta(Y)X) + (\varepsilon g(X,Y)\xi - \eta(X)Y) \\ &= \eta(Y)X - \eta(X)Y \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} g(R(X,\xi)Y,Z) &= g(R(Z,Y)\xi,X) \\ &= g(\eta(Y)Z - \eta(Z)g(Y,X) \\ &= g(\eta(Y)X,Z) - \varepsilon g(g(X,Y)\xi,Z) \\ &= g(\eta(Y)X - \varepsilon g(X,Y)\xi,Z) \end{aligned}$$

dir. Bu $\forall Z \in \chi(M)$ için sağlandığından ve g metriği non-dejenere olduğundan

$$R(X,\xi)Y = \eta(Y)X - \varepsilon g(X,Y)\xi$$

sonucuna ulaşırız. Burada Y yerine X alırsak

$$R(X,\xi)X = \eta(X)X - \varepsilon g(X,X)\xi$$

olur. X ile ξ ortogonal ve X birim olduğundan $\eta(X) = \varepsilon g(X,\xi) = 0$, $g(X,X) = 1$ dir. Dolayısı ile

$$R(X,\xi)X = -\varepsilon\xi$$

elde edilir. Böylece ispat biter. ■

Teorem 3.19 *ξ bir killing birim vektör alanı olmak üzere, Lorentzian veya Riemannian bir M manifoldunda $R(X,Y)\xi = \varepsilon g(\xi,Y)X - \varepsilon g(\xi,X)Y$ ise M bir Sasaki manifoldudur (Belkhelfa 2002).*

İspat. $\eta(X) = \varepsilon g(X,\xi)$ ve ξ killing vektör alanı olduğundan $\nabla_X \xi = -\varphi(X)$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca

$$R(X,\xi)Y = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_{\nabla_X Y} \xi$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} R(X,\xi)Y &= -\nabla_X \varphi(Y) + \varphi(\nabla_X Y) \\ &= -(\nabla_X \varphi)(Y) \end{aligned} \tag{3.50}$$

elde edilir. Bu (3.49), (3.50) ve $\eta(Z) = \varepsilon g(Z,\xi)$ eşitliklerini kullanırsak

$$\begin{aligned} g((\nabla_X \varphi)(Y), Z) &= g(-R(X,\xi)Y, Z) \\ &= g(R(\xi,X)Y, Z) \\ &= g(R(Y,Z)\xi, X) \\ &= g(\eta(Z)Y - \eta(Y)Z, X) \\ &= \eta(Z)g(Y,X) - g(Z, \eta(Y)X) \\ &= g(\varepsilon g(Y,X)\xi, Z) - g(\eta(Y)X, Z) \\ &= g(\varepsilon g(Y,X)\xi - \eta(Y)X, Z) \end{aligned}$$

olur. Son eşitlik $\forall Z \in \chi(M)$ için sağlandığından

$$(\nabla_X \varphi)(Y) = \varepsilon g(Y,X)\xi - \eta(Y)X$$

olur. Dolayısıyla (3.30) eşitliği uyarınca M Sasaki manifoldu olur. ■

3.7 $\varphi-$Kesitsel Eğrilik

Tanım 3.21 ***($\varphi-$kesitsel eğriliği):*** $(M, \varphi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$, $(2n+1)$ *boyutlu kontak metrik manifoldu olmak üzere* $\forall X \in \chi(M)$ *birim vektör alanı* ξ *karakteristik vektör alanına dik olsun.* $\{X, \varphi(X)\}$ *cümlesi bir düzlem kesitinin tabanı olmak üzere*

$$K(X,\varphi(X)) = g(R(X,\varphi(X))\varphi(X), X) \tag{3.51}$$

eşitliğine $\varphi-$***kesitsel eğriliği*** *denir (Yano and Kon 1984).*

Teorem 3.20 *$(2n+1)$ boyutlu M manifoldu $(\varphi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ kontak metrik yapısı ile verilsin. Şayet M bir K-Kontak manifold ise M nin her bir noktasında ξ yi kapsayan düzlem kesitleri için kesitsel eğriliği ε na eşittir (Belkhelfa 2002).*

İspat. $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} K(\xi,X) &= \frac{g\left(R(\xi,X)\,X,\xi\right)}{g\left(\xi,\xi\right)g\left(X,X\right)-g^{2}\left(\xi,X\right)} \\ &= \frac{g\left(R(\xi,X)\,\xi,X\right)}{g\left(\xi,\xi\right)g\left(X,X\right)-g^{2}\left(\xi,X\right)} \end{aligned}$$

eşitliğini hesaplamalıyız. Ayrıca

$$\begin{aligned} R(\xi,X)\xi &= \nabla_{\xi}\nabla_{X}\xi-\nabla_{X}\nabla_{\xi}\xi-\nabla_{[\xi,X]}\xi \\ &= \nabla_{\xi}\nabla_{X}\xi-\nabla_{X}\nabla_{\xi}\xi-\nabla_{\nabla_{\xi}X}\xi+\nabla_{\nabla_{X}\xi}\xi \end{aligned}$$

dir. M, K-Kontak manifold olduğundan Teorem 3.18 den $\nabla_{X}\xi=-\varphi\left(X\right)$ dir. Böylece $\nabla_{\xi}\xi=-\varphi\left(\xi\right)=0$ olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} R(\xi,X)\xi &= -\nabla_{\xi}\varphi(X)+\varphi\left(\nabla_{\xi}X\right)-\varphi\left(\nabla_{X}\xi\right) \\ &= -\left(\nabla_{\xi}\varphi\right)\left(X\right)+\varphi^{2}\left(X\right) \\ &= -\left(\nabla_{\xi}\varphi\right)\left(X\right)-X+\varepsilon g(X,\xi)\xi \end{aligned}$$

elde edilir. ξ killing vektör alanı olduğundan Teorem 3.16 dan $L_{\xi}\varphi\equiv 0$ dır. Dolayısı ile $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} \left(L_{\xi}\varphi\right)\left(X\right) &= \left[\xi,\varphi(X)\right]-\varphi\left[\xi,X\right] \\ 0 &= \nabla_{\xi}\varphi(X)-\nabla_{\varphi(X)}\xi-\varphi\left(\nabla_{\xi}X\right)+\varphi\left(\nabla_{X}\xi\right) \\ 0 &= \nabla_{\xi}\varphi X+\varphi^{2}\left(X\right)-\varphi\left(\nabla_{\xi}X\right)-\varphi^{2}\left(X\right) \\ 0 &= \nabla_{\xi}\varphi X-\varphi\left(\nabla_{\xi}X\right) \\ 0 &= \left(\nabla_{\xi}\varphi\right)\left(X\right) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca X ile ξ ortogonal olduğundan $g(X,\xi)=0$ dır. Dolayısıyla

$$R(\xi,X)\xi=-X$$

sonucuna ulaşırız. Böylece X birim vektör olduğundan

$$\begin{aligned} K(\xi, X) &= -\frac{g(-X,X)}{g(\xi,\xi)g(X,X)-g(\xi,X)^2} \\ &= \frac{g(X,X)}{g(\xi,\xi)g(X,X)-g(\xi,X)^2} \\ &= \frac{1}{\varepsilon.1-0} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat biter. ■

Tanım 3.22 *$(M, \varphi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$, $(2n+1)$ boyutlu kontak metrik manifoldu olmak üzere*

$$B : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \mathbb{E}$$

olarak tanımlı B tensörü, $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ ve $\forall \overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, \overline{W} \in D$ için

i) $B(W, Z, X, Y) = -B(Z, W, X, Y) = -B(W, Z, Y, X)$

ii) $B(W, Z, X, Y) = B(X, Y, W, Z)$

iii) $B(W, Z, X, Y) + B(W, X, Y, Z) + B(W, Y, Z, X) = 0$

iv) $B(\overline{W}, \overline{Z}, \overline{X}, \overline{Y}) = B(\varphi\overline{W}, \varphi\overline{Z}, \overline{X}, \overline{Y}) = B(\overline{W}, \overline{Z}, \varphi\overline{X}, \varphi\overline{Y})$

v) $B(\xi, \overline{Z}, \overline{X}, \overline{Y}) = B(\overline{W}, \xi, \overline{X}, \overline{Y}) = B(\overline{W}, \overline{Z}, \xi, \overline{Y}) = B(\overline{W}, \overline{Z}, \overline{X}, \xi)$

özeliklerini sağlar (Camcı 2007).

3.8 Sasaki Manifoldlarda İntegral Alt Manifoldlar ve Özelikleri

Tanım 3.23 *M manifoldu (N^{2n+1}, η) kontak manifoldunun alt manifoldu olsun. Bu durumda*

i) $\forall X \in \chi(M)$ *için* $\eta(X) = 0$

ii) $\forall X, Y \in \chi(M)$ *için* $d\eta(X, Y) = 0$

özeliklerinden birini sağlayan M manifolduna (N^{2n+1}, η) kontak manifoldunun ***integral alt manifoldu*** *adı verilir (Camcı 2007).*

Teorem 3.21 *$(2n+1)$ boyutlu kontak manifoldun integral alt manifoldunun maksimum boyutu 'n' dir (Blair 1976).*

Lemma 3.3 *$(N^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ kontak metrik manifold ve M^p de N^{2n+1} manifoldunun integral alt manifoldu olsun. Bu durumda $\forall X \in \chi(M^p)$ için*

$$\varphi(X) \in \chi(M^p)^{\perp}$$

dir (Blair 1976).

Sonuç 3.14 *$(N^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ Sasaki manifoldu ve*

$$i : M^p \to i(M^p) \subset N^{2n+1}$$

olacak şekilde inclusion dönüşümünü ele alalım. Burada M^p manifoldunu N^{2n+1} Sasaki uzayının alt manifoldu olarak düşünebiliriz. M^p manifoldu üzerindeki metrik 'g' ve N^{2n+1} manifoldu üzerindeki metrik 'G' olmak üzere

$$g(X, Y) = G(i_*(X), i_*(Y)) \tag{3.52}$$

olur. Ayrıca M^p manifoldu üzerinde 'g' metriğine karşılık gelen Levi-Civita koneksiyonu ∇ ve N^{2n+1} Sasaki uzayında 'G' metriğine karşılık gelen Levi-Civita koneksiyonu $\overline{\nabla}$ olsun. Böylece $\forall X, Y \in \chi(M^p)$ için Gauss formülü

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \tag{3.53}$$

ve $\forall X \in \chi(M^p)$, $\forall \xi_i \in \chi(M^p)$ için de Weingarten formülü

$$\overline{\nabla}_X \xi_i = -A_{\xi_i} X + D_X^{\perp} \xi_i \tag{3.54}$$

dir. Burada

$$A_{\xi_i} = A_i$$

ile göstereceğiz ve A_i ye ξ_i normal vektör alanına karşılık gelen şekil operatörü diyeceğiz. M^p manifoldunu N^{2n+1} in integral alt manifoldu ve $p = n$ alırsak M^n in ortonormal bir tabanı $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ şeklinde vardır. Lemma 3.3 den N^{2n+1} de ortonormal bir tabanını

$$\{X_1, X_2, ..., X_n, \xi_1 = \varphi X_1, \xi_2 = \varphi X_2, ..., \xi_n = \varphi X_n, \xi\}$$

olarak seçebiliriz. $\forall X, Y, Z \in \chi(M^p)$ için Gauss ve Weingarten formüllerinden

$$\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z = \overline{\nabla}_X \nabla_Y Z + \overline{\nabla}_X h(Y, Z)$$

ve

$$\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z = \nabla_X\nabla_Y Z + h(X, \nabla_Y Z) - A_{h(Y,Z)}X + D^{\perp}_X h(Y, Z) \tag{3.55}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z = \nabla_Y\nabla_X Z + h(Y, \nabla_X Z) - A_{h(X,Z)}X + D^{\perp}_Y h(X, Z) \tag{3.56}$$

olur. Ayrıca

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z = -\nabla_{[X,Y]}Z + h([X, Y], Z) \tag{3.57}$$

dir. (3.55), (3.56), (3.57), *eşitlikleri yardımıyla*

$$\begin{aligned} \overline{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - A_{h(Y,Z)}X + A_{h(X,Z)}Y \\ &\quad + h(X, \nabla_Y Z) - h(Y, \nabla_X Z) - h([X, Y], Z) \\ &\quad + D^{\perp}_X h(Y, Z) - D^{\perp}_Y h(X, Z) \end{aligned} \tag{3.58}$$

elde edilir. Burada

$$R(X, Y)Z - A_{h(Y,Z)}X + A_{h(X,Z)}Y$$

vektör alanı M^n manifoldunun teğetinde

$$h(X, \nabla_Y Z) - h(Y, \nabla_X Z) - h([X, Y], Z) + D^{\perp}_X h(Y, Z) - D^{\perp}_Y h(X, Z)$$

vektör alanı M^n manifoldunun normalinde olduğundan $\forall X, Y, Z \in \chi(M^p)$ için

$$\begin{aligned} g(\overline{R}(X, Y)Z, W) &= g(R(X, Y)Z, W) + g(A_{h(X,Z)}Y, W) \\ &\quad - g(A_{h(Y,Z)}X, W) \end{aligned} \tag{3.59}$$

olur. Ayrıca

$$R(X, Y)Z = \frac{c + 3\varepsilon}{4}(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)$$

olduğundan $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M^p)$ için

$$g(\overline{R}(X, Y)Z, W) = \frac{c + 3\varepsilon}{4}(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)$$

ve

$$\begin{aligned} h(X, Z) &= \sum_{\alpha} g(A_\alpha X, Z)\xi_\alpha \\ h(Y, Z) &= \sum_{\alpha} g(A_\alpha Y, Z)\xi_\alpha \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} g(A_{h(X,Z)}Y,W) &= \sum_{\alpha} g(A_\alpha Y,Z)g(A_\alpha X,W) \\ g(A_{h(Y,Z)}X,W) &= \sum_{\alpha} g(A_\alpha X,Z)g(A_\alpha Y,W) \end{aligned}$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,W) &= \frac{c+3\varepsilon}{4}(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) \\ &\quad + \sum_{\alpha} g(A_\alpha Y,Z)g(A_\alpha X,W) \\ &\quad - \sum_{\alpha} g(A_\alpha X,Z)g(A_\alpha Y,W) \end{aligned} \tag{3.60}$$

elde edilir (Camcı 2007).

Teorem 3.22 *$(N^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ Sasaki manifoldu ve*

$$i : M^n \to i(M^n) \subset N^{2n+1}$$

olacak şekilde inclusion dönüşümünü ele alalım. M^n integral alt manifoldu ise M^n in ortonormal bir tabanı $\{X_1,X_2,...,X_n\}$ olmak üzere baza tamamlama teoremi yardımıyla N^{2n+1} in bir ortonormal tabanını

$$\{X_1,X_2,...,X_n,\xi_1=\varphi X_1,\xi_2=\varphi X_2,...,\xi_n=\varphi X_n,\xi\}$$

olarak seçebiliriz. Bu bazın duali

$$\omega^1,\omega^2,...,\omega^n,\omega^{n+1},...,\omega^{2n},\omega^0=\eta$$

olsun. Bu durumda

i) $h^0 \equiv 0$

ii) Birinci Cartan yapı denklemi

$$d\omega^A = \sum_{B=0}^{2n} \omega_B^A \wedge \omega^B$$

olmak üzere $\left[\omega_B^A\right]$ matrisi antisimetriktir.

iii) $i^* = n+i$ $(i=1,2,...,n)$ olmak üzere $\omega_j^{i^*} = \omega_i^{j^*}$

iv) $\omega_j^{i^*} = \sum\limits_{k=0}^{2n} h_{jk}^i\omega^k$, $\omega_j^0 = \sum\limits_{k=0}^{2n} h_{jk}^0\omega^k = 0$

dır (Blair 1976).

Teorem 3.23 $(N^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ *Sasaki manifoldu ve*

$$i : M^n \to i(M^n) \subset N^{2n+1}$$

olacak şekilde inclusion dönüşümü ve M^n *manifoldu da* N^{2n+1} *Sasaki uzayının integral alt manifoldu olsun. Bu durumda* $\forall i, j = 1, 2, ..., n$ *için*

i) $A_i X_j = A_j X_i$

ii) $tr(\sum\limits_i A_i^2)^2 = \sum\limits_{i,j} (tr A_i A_j)^2$

dir (Blair 1976).

4. SASAKİ UZAYINDA ALTMANİFOLDLAR

4.1 $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki Uzayında İzometrik İmmersiyonun Özelikleri

$(\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon), \varphi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ altılısının Sasaki uzayında standart koordinatlar

$$(x_i, y_i, z) = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n, z)$$

iken $\eta = \frac{1}{2}(dz - \sum y_i dx_i)$ 1-formunu tanımlayalım. Burada karakteristik vektör alanı $\xi = 2\frac{\partial}{\partial z}$ ve φ endomorfizmine karşılık gelen matris

$$\begin{bmatrix} 0 & \varepsilon\delta_{ij} & 0 \\ -\varepsilon\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon y_i & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

dir. Ayrıca "g" metriği

$$g = \frac{1}{4}\sum\left(dx_i^2 + dy_i^2\right) + \varepsilon\eta \otimes \eta \tag{4.2}$$

olmak üzere, bu metriğe karşılık gelen matris

$$g_{ab} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \delta_{ij} + \varepsilon y_i y_i & 0 & -\varepsilon y_i \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\varepsilon y_i & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

olur. $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ uzayının $\left(\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i},\ \partial_{n+i} = \frac{\partial}{\partial y_i},\ \partial_{2n+1} = \frac{\partial}{\partial z}\right)$ doğal tabanından başka

$$\varphi = \left\{ \begin{array}{c} e_i = 2\frac{\partial}{\partial y_i}, \\ e_{n+i} = \varepsilon\varphi e_i = 2\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + y_i\frac{\partial}{\partial z}\right), \\ e_{2n+1} = \xi = 2\frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right\} \quad , \qquad (i = 1, 2, ..., n) \tag{4.3}$$

tabanı ortonormal bir tabandır. Şimdi $U \in \mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ vektörünün doğal tabanına göre yazılışı

$$U = U^A\partial_A + U^{2n+1}\partial_{2n+1}$$

ve $\varphi-$tabanında yazılışı da $U=\overline{U}^{A}e_{A}+\overline{U}^{2n+1}e_{2n+1}$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned}
U &= \overline{U}^{A}e_{A}+\overline{U}^{2n+1}e_{2n+1} \\
&= \overline{U}^{i}e_{i}+\overline{U}^{n+i}e_{n+i}+\overline{U}^{2n+1}e_{2n+1} \\
&= \overline{U}^{i}\left(2\frac{\partial}{\partial y_i}\right)+\overline{U}^{n+i}2\left(\frac{\partial}{\partial x_i}+y_i\frac{\partial}{\partial z}\right)+\overline{U}^{2n+1}\left(2\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&= 2\overline{U}^{i}\frac{\partial}{\partial y_i}+2\overline{U}^{n+i}\frac{\partial}{\partial x_i}+2\left(\overline{U}^{2n+1}+\sum y_i\overline{U}^{n+i}\right)\frac{\partial}{\partial z} \\
&= 2\overline{U}^{n+i}\partial_i+2\overline{U}^{i}\partial_{n+i}+2\left(\overline{U}^{2n+1}+\sum y_i\overline{U}^{n+i}\right)\partial_{2n+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulmuş olduğumuz son eşitliği $U=U^{i}\partial_i+U^{n+i}\partial_{n+i}+U^{2n+1}\partial_{2n+1}$ ile kıyaslarsak

$$\overline{U}^{n+i}=\frac{1}{2}U^{i},\ \overline{U}^{i}=\frac{1}{2}U^{n+i},\ \overline{U}^{2n+1}=\frac{1}{2}\left(U^{2n+1}-\sum y_iU^{i}\right)$$

eşitliklerine ulaşırız. Ayrıca burada

$$\begin{aligned}
\eta(e_j) &= \frac{1}{2}(dz-\sum y_idx_i)(2\frac{\partial}{\partial y_j}) \\
&= dz\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)-\sum y_idx_i\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \\
&= 0-\sum y_i0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\eta\left(e_{n+i}\right) &= \frac{1}{2}\left(dz-\sum y_idx_i\right)\left(2\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+y_j\frac{\partial}{\partial z}\right)\right) \\
&= dz\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+y_j\frac{\partial}{\partial z}\right)-\sum y_idx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+y_j\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&= y_j-\sum y_idx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\
&= y_j-\sum y_i\delta_{ij} \\
&= y_j-y_j \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece kontak distribution'un

$$D=Sp\left\{e_i,\varphi e_i\right\},\ i=1,...,2n$$

olduğu görülür (Baikousis 1991).

Tanım 4.1 *m- boyutlu M manifoldu $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayının alt manifoldu ve*

$$x : M \rightarrow \mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$$

izometrik immersiyonu için M ile bağlantılı elde edilen $[p,q]$ ikilisine $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında M ***manifoldunun mertebesi*** *denir. Şayet q sonlu ise x immersiyonuna* ***sonlu tipte*** *aksi halde* ***sonsuz tipte*** *denir (Baikousis 1991).*

Lemma 4.1 *m boyutlu M manifoldu, $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasakian uzayında integral alt manifoldu olsun. Burada izometrik immersiyon*

$$x : M \rightarrow \mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$$

olmak üzere

i) $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında , $X \in \chi(M)$ olmak üzere x izometrisi M nin yer vektörü için

$$\overline{\nabla}_X x = X - \eta(x)\varphi X + (X\eta(x) + \varepsilon g(x, \varphi X))\xi \tag{4.4}$$

dir. Burada $\overline{\nabla}$ koneksiyonu (4.2) metriğinden elde edilen $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ deki Levi Civita koneksiyonudur.

ii) Şayet H vektör alanı M nin ortalama eğrilik vektör alanı ise

$$\triangle g(x, e_A) = -mg(H, e_A), \; A = 1, 2, ..., 2n \tag{4.5}$$

dir (Baikousis 1991, Camcı 2007).

İspat. *i)* $X = \overline{X}^i e_i + \overline{X}^{n+i} e_{n+i} + \overline{X}^{2n+1}\xi$ ve $x = \overline{x}^i e_i + \overline{x}^{n+i} e_{n+i} + \overline{x}^{2n+1}\xi$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X x &= X - (\overline{X}^i \overline{x}^{n+i} + \overline{X}^{n+i}\overline{x}^i)\xi - \varepsilon \overline{X}^{2n+1}(\overline{x}^i e_{n+i} - \overline{x}^{n+i} e_i) \\ &\quad - \varepsilon \overline{x}^{2n+1}(\overline{X}^i e_{n+i} - \overline{X}^{n+i} e_i) \end{aligned}$$

ve

$$X\eta(x) = \eta(X) - 2\overline{X}^i \overline{x}^{n+i}$$

$$\varepsilon g(x, \varphi X) = \overline{X}^i \overline{x}^{n+i} - \overline{X}^{n+i}\overline{x}^i$$

eşitliklerinden

$$-(\overline{X}^i\overline{x}^{n+i}+\overline{X}^{n+i}\overline{x}^i = X\eta(Y)+\varepsilon g(Y,\varphi X)-\eta(X)$$

olur. Böylece

$$\overline{\nabla}_X x = X-\eta(X)(\varphi x+\xi)-\eta(x)\varphi X+(X\eta(x)+\varepsilon g(x,\varphi X)\xi \tag{4.6}$$

elde edilir. M manifoldu, $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında integral alt manifoldu olduğundan $\eta(X)=0$ dır. Böylece (4.4) eşitliğini elde ederiz.

ii)

$$Xg(x,e_A)=g(\overline{\nabla}_X x,e_A)+g(x,\overline{\nabla}_X e_A)$$

olup burada

$$\begin{aligned} g(\overline{\nabla}_X x,e_A) &= g(X-\eta(X)(\varphi x+\xi)-\eta(x)\varphi X+(X\eta(x)+\varepsilon g(x,\varphi X))\xi,e_A) \\ &= g(X,e_A)-\eta(X)g(\varphi x,e_A)-\eta(x)g(\varphi X,e_A) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g(x,\overline{\nabla}_X e_A) &= g(x,-\eta(e_A)\varphi X-\eta(X)\varphi e_A+(X\eta(e_A)+\varepsilon g(e_A,\varphi X))\xi \\ &= g(x,-\eta(X)\varphi e_A+\varepsilon g(e_A,\varphi X)\xi) \\ &= \eta(X)g(\varphi x,e_A)+g(x,\xi)\varepsilon g(\varphi X,e_A) \\ &= \eta(X)g(\varphi x,e_A)+\varepsilon^2\eta(x)g(\varphi X,e_A) \\ &= \eta(X)g(\varphi x,e_A)+\eta(X)g(\varphi X,e_A) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} Xg(x,e_A) &= g(X,e_A)-\eta(X)g(\varphi x,e_A)-\eta(x)g(\varphi X,e_A) \\ &\quad +\eta(X)g(\varphi x,e_A)+\eta(x)g(\varphi X,e_A) \\ &= g(X,e_A) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ den M manifolduna indirgenmiş koneksiyon ∇ olmak üzere Laplace denklemi

$$\triangle f=\sum_{i=1}^{m}((\nabla_{E_i}E_i)f-E_iE_if)$$

idi. Burada $f = g(x, e_A)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_i} E_i g(x, e_A) &= g(\nabla_{E_i} E_i, e_A) \\
&= g(\overline{\nabla}_{E_i} E_i - B(E_i, E_i), e_A) \\
& \quad g(\overline{\nabla}_{E_i} E_i, e_A) - g(B(E_i, E_i), e_A)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
E_i E_i f &= E_i E_i g(x, e_A) \\
&= E_i g(E_i, e_A) \\
&= g(\overline{\nabla}_{E_i} E_i, e_A) + g(E_i, \overline{\nabla}_{E_i} e_A)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $E_i \in \chi(\mathbb{E}^{2n+1})(-3\varepsilon))$ ve $g(E_i, e_{2n+1}) = 0$ olduğundan

$$E_i = \sum_{B=1}^{2n} \lambda_i^B e_B$$

olarak yazabiliriz. Böylece

$$g(E_i, \overline{\nabla}_{E_i} e_A) = \sum_{B=1}^{2n} \sum_{C=1}^{2n} \lambda_i^B \lambda_i^C g(e_B, \overline{\nabla}_{e_C} e_A)$$

olur. (3.32) ve (3.33) denklemlerinden $(A, B, C, = 1, 2, ..., 2n)$, $(i = 1, 2, ..., m)$ için $g(e_{B,} \overline{\nabla}_{e_C} e_A) = 0$ ve $g(E_i, \overline{\nabla} E_i e_A) = 0$ olduğu görülür. Böylece

$$\begin{aligned}
\triangle g(x, e_A) &= -\sum_{i=1}^{m} g(B(E_i, E_i), e_A) \\
&= -g\left(\sum_{i=1}^{m} B(E_i, E_i), e_A\right) \\
&= -g(mH, e_A) \\
&= -mg(H, e_A)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\triangle g(\varphi^2 x, a) &= \triangle g(x, \varphi^2 a) \\
&= \triangle g(x, \sum_{i=1}^{m} \lambda^A e_A) \\
&= \lambda^A \triangle g(x, e_A) \\
&= -m \sum_{i=1}^{m} \lambda^A g(H, e_A) \\
&= -mg(H, \sum_{i=1}^{m} \lambda^A e_A) \\
&= -mg(H, \varphi^2 a) \\
&= mg(H, a) - \eta(a) g(H, \xi)
\end{aligned}$$

elde ederiz. $M \subset \mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ $m-$ boyutlu olduğundan $\{E_1, E_2, ..., E_m\}$ ortonormal bazı vardır. $\{\xi_{1,}\xi_2, ..., \xi_{2n-m}, \xi\}$ de normalindeki ortonormal vektör alanı olsun. Burada ξ karakteristik vektör alanına karşılık gelen şekil öperatörü (Weingarten map) $A_\xi = 0$ dır. Böylece

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{i=1}^{2n-m} (trA_{\xi_i}) \xi_i + (trA_\xi) \xi \\
&= \sum_{i=1}^{2n-m} (trA_{\xi_i}) \xi_i
\end{aligned}$$

eşitliğinden $g(H, \xi) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\triangle g(\varphi^2 x, e_A) &= g(x, \varphi^2 e_A) \\
&= -g(x, e_A)
\end{aligned}$$

eşitliğini kullanırsak (4.5) eşitliğini elde ederiz. ■

Sonuç 4.1 *m boyutlu M manifoldu, $\mathbb{E}^{2n+1}(-3)$ Sasaki uzayında, $N^{2n}(c)$ silindirinde yatan integral alt manifoldu ve $\overline{H}$, $N^{2n}(c)$ silindirindeki ortalama eğrilik vektör alanı olmak üzere*

$$\overline{H} = \frac{2n-1}{2nc^2} \varphi^2 (x - x_0)$$

dir (Baikousis 1991, Camcı 2007).

İspat. $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında

$$\begin{aligned} N^{2n}(c) &= \left\{x \in \mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon) : g(x-x_0, x-x_0) - \varepsilon(\eta(x-x_0))^2 = c\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon) : \frac{1}{4}\sum((x^i - x_0^i)^2 + (y^i - y_0^i)^2) = c\} \end{aligned} \tag{4.7}$$

silindirini tanımlayalım. Burada $f(x) = g(x-x_0, x-x_0) - \varepsilon(\eta(x-x_0))^2 - c$ dersek $X \in \mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ için (4.5) denkleminden

$$Xf = 2g(x-x_0, X - \eta(X)\xi) \tag{4.8}$$

elde ederiz. Çünkü,

$$Xf = 2g(\overline{\nabla}x(x-x_0), x-x_0) - 2\eta(x-x_0)g(\overline{\nabla}x(x-x_0), \xi) - 2\eta(x-x_0)g(x-x_0, \overline{\nabla}x\xi)$$

dir. (4.6) eşitliğinden

$$\overline{\nabla}x(x-x_0) = X - \eta(X)(\varphi(x-x_0)+\xi) - \eta(x-x_0)\varphi X + (X\eta(x-x_0) + \varepsilon g(x-x_0, \varphi X))\xi$$

ve $\overline{\nabla}x\xi = -\varphi X$ olduğundan

$$\begin{aligned} Xf &= 2g(X, x-x_0) - 2\eta(x-x_0)g(x-x_0, \varphi X) - 2\varepsilon\eta(x-x_0)\eta(X) \\ &\quad +2\varepsilon\eta(x-x_0)X\left[\eta(x-x_0)\right] + 2\eta(x-x_0)g(x-x_0, \varphi X) \\ &\quad -2\eta(x-x_0)(\varepsilon\eta(X) - \varepsilon\eta(X) + \varepsilon X\left[\eta(x-x_0)\right] + g(x-x_0, \varphi X)) \\ &\quad +2\eta(x-x_0)g(x-x_0, \varphi X) \end{aligned}$$

gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$Xf = 2g(x-x_0, X - \eta(X)\xi)$$

elde edilir. Burada $-\varphi^2 X = X - \eta(X)\xi$ olduğundan

$$\begin{aligned} Xf &= 2g(x-x_0, -\varphi^2 X) \\ &= g(-2\varphi^2(x-x_0), X) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $Xf = g(\operatorname{grad} f, X)$ ve metrik non-dejenere olduğundan

$$\operatorname{grad} f = -2\varphi^2(x-x_0) \tag{4.9}$$

elde edilir. Burada $\operatorname{grad} f$ vektörü silindirin normalinde olan bir vektördür.

$$\operatorname{grad} f = -2\varphi^2(x - x_0) = 2((x - x_0) - \eta(x - x_0)\xi)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X(\operatorname{grad} f) &= 2(\overline{\nabla}_X(x - x_0) - (\overline{\nabla}_X\eta(x - x_0))\xi - \eta(x - x_0)\overline{\nabla}_X\xi \\
&= 2\begin{pmatrix} X - \eta(X)(\varphi(x - x_0) + \xi) - \eta(x - x_0)\varphi X \\ +(X\eta(x - x_0) + \varepsilon g(x - x_0, \varphi X))\xi \\ -\varepsilon g(X - \eta(X)(\varphi(x - x_0) + \xi) - \eta(x - x_0)\varphi X \\ +(X\eta(x - x_0) + \varepsilon g(x - x_0, \varphi X))\xi, \xi)\xi \\ -\varepsilon g(x - x_0, \overline{\nabla}_X\xi)\xi + \eta(x - x_0)\varphi X \end{pmatrix} \\
&= 2\begin{bmatrix} X - \eta(X)(\varphi(x - x_0) + \xi) + X\eta(x - x_0)\xi + \varepsilon g(x - x_0, \varphi X))\xi \\ -X\eta(x - x_0)\xi - \varepsilon g(x - x_0, \varphi X))\xi + \varepsilon g(x - x_0, \varphi X))\xi \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

gerekli sadeleştimeleri yaparsak

$$\overline{\nabla}_X(\operatorname{grad} f) = 2[X - \eta(X)(\varphi(x - x_0) + \xi) + \varepsilon g(x - x_0, \varphi X))\xi] \tag{4.10}$$

elde ederiz. Burada $N^{2n}(c)$ silindirinin $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ deki ikinci temel formu $\overline{B}$ ise

$$\overline{B}(X, Y) = -\frac{1}{4c^2} g(\overline{\nabla}_X(\operatorname{grad} f), Y) \operatorname{grad} f \tag{4.11}$$

dir. Çünkü, $Z = \frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}$ vektör alanı $N^{2n}(c)$ ye dik bir vektör alanıdır. Burada

$$\begin{aligned}
\|\operatorname{grad} f\|^2 &= g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) \\
&= 4g\left(\varphi^2(x - x_0), \varphi^2(x - x_0)\right) \\
&= 4g\left(\varphi(x - x_0), \varphi(x - x_0)\right) \\
&= 4\left(g(x - x_0, x - x_0) - \varepsilon\eta\left(x - x_0\right)^2\right) \\
&= 4c^2
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $\|\operatorname{grad} f\| = 2c$ ve $Z = \dfrac{\operatorname{grad} f}{2c}$ elde edilir. Ayrıca biliyoruz ki,

$$\begin{aligned}
\overline{B}(X, Y) &= -g(A_Z X, Y)Z \\
&= -g(\overline{\nabla}_X Z, Y)Z \\
&= -\frac{1}{4c^2} g(\overline{\nabla}_X(\operatorname{grad} f), Y) \operatorname{grad} f
\end{aligned}$$

dır. Böylece (4.10) ve (4.11) eşitliklerinden

$$\overline{B}(X,Y) = -\frac{1}{4c^2}\begin{bmatrix} g(X,Y) - \varepsilon\eta(X)\eta(Y) - \eta(X)g(\varphi(x-x_0),Y) \\ +\varepsilon g(x-x_0,\varphi X)g(\xi,Y) \end{bmatrix}\operatorname{grad} f$$

olur. Bu eşitliği

$$\overline{B}(X,Y) = -\frac{1}{2c^2}\begin{bmatrix} g(X,Y) - \varepsilon\eta(X)\eta(Y) \\ -g(\varphi(x-x_0),\eta(X)Y+\eta(Y)X) \end{bmatrix}\operatorname{grad} f \tag{4.12}$$

olarak da yazabiliriz. Burada $X,Y \in \chi(N^{2n}(c))$ dir. Ayrıca $\xi f = 0$ olduğundan $\xi \in \chi(N^{2n}(c))$ dir ve $\overline{B}(\xi,\xi) = 0$ dır. Böylece $N^{2n}(c)$ deki $\overline{H}$ ortalama eğrilik vektör alanı

$$\overline{H} = \frac{2n-1}{2nc^2}\varphi^2(x-x_0)$$

dir. Çünkü $N^{2n}(c)$ nin ortonormal bir bazını $(E_1,E_2,...,E_{2n-1},\xi)$ olarak seçebiliriz. Böylece $\eta(E_i) = 0$ ve (4.12) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \overline{B}(E_i,E_i) &= -\frac{1}{2c^2}g(E_i,E_i)\operatorname{grad} f \\ &= -\frac{1}{2c^2}(-2\varphi^2(x-x_0)) \\ &= \frac{1}{c^2}(\varphi^2(x-x_0)) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\overline{B}(\xi,\xi) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \overline{H} &= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\overline{B}(E_i,E_i) \\ &= \frac{2n-1}{2nc^2}\varphi^2(x-x_0) \end{aligned}$$

elde edilir ■

Sonuç 4.2 *m boyutlu M manifoldu $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında, $N^{2n}(c)$ silindirinde yatan integral alt manifold olsun. H ve H' vektör alanları M manifoldunun, sırasıyla, $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında ve $N^{2n}(c)$ silindirinde ortalama eğrilik vektör alanları olmak üzere*

$$H = H' + \frac{1}{c^2}\varphi^2(x-x_0)$$

dir (Camcı 2007).

İspat. M manifoldunun $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında ikinci temel formu B ve $N^{2n}(c)$ silindirinde ikinci temel formu da B' olsun. Eğer

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)\text{ Kon.} & N^{2n}(c)\text{ Kon.} & M\text{ de Kon.} & \text{İkinci temel form} \\ \overline{\nabla} & & \nabla & B \\ & \nabla' & \nabla & B' \\ \overline{\nabla} & \nabla' & & \overline{B} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlarsak Gauss denkleminden

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y) \tag{4.13}$$

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + B'(X,Y) \tag{4.14}$$

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla'_X Y + \overline{B}(X,Y) \tag{4.15}$$

eşitliklerini elde ederiz. (4.14) ve (4.15) eşitliklerinden

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B'(X,Y) + B(X,Y)$$

olur. Böylece son eşitlik ve (4.13) den $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$B(X,Y) = B'(X,Y) + \overline{B}(X,Y) \tag{4.16}$$

eşitliği elde edilir. H ve H' vektör alanları, sırasıyla, $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayı ve $N^{2n}(c)$ silindirinde yatan M manifoldunun ortalama vektör alanları olsun. $m-$boyutlu M manifoldu $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayının integral alt manifoldu olduğundan bir $\{E_1, E_2, ..., E_m\}$ ortonormal tabanı vardır. (4.12) eşitliğinden

$$\overline{B}(E_i, E_i) = \frac{1}{c^2} g(E_i, E_i)\varphi^2(x - x_0)$$

olur. (4.16) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} B(E_i, E_i) &= \sum_{i=1}^{m} B'(E_i, E_i) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{c^2} g(E_i, E_i)\varphi^2(x - x_0) \\ mH &= mH' + m\frac{1}{c^2}\varphi^2(x - x_0) \end{aligned}$$

ve

$$H = H' + \frac{1}{c^2}\varphi^2(x - x_0) \tag{4.17}$$

eşitliğini elde ederiz. ■

Lemma 4.2 *$m-$boyutlu M manifoldu $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ nin integral alt manifoldu olsun. M manifoldu $N^{2n}(c)$ silindirinde yatar $\Longleftrightarrow$ $x-x_0$ vektörü M nin dikindedir (Baikousis 1991).*

İspat. M manifoldu $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ nin integral alt manifoldu ise $\forall X \in \chi(M)$ için $\eta(X)=0$ dır.Bu sebeple

$$\begin{aligned} Xf &= 2g(x-x_0, X-\eta(X)\xi) \\ &= 2g(x-x_0, X) \end{aligned}$$

eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} XXf &= 2g(x-x_0, \overline{\nabla}_X X) + 2g(\overline{\nabla}_X (x-x_0), X) \\ &= 2g(x-x_0), \overline{\nabla}_X X) + 2g(X - \eta(x-x_0)\varphi X \\ &\quad +(X\eta(x-x_0) + \varepsilon g(x-x_0, \varphi X))\xi, X) \\ &= 2g(x-x_0, \overline{\nabla}_X X) + 2g(X, X) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca $\overline{\nabla}_X X = \nabla_X X + B(X,X)$ eşitliği gözönüne alınırsa

$$XXf = 2g(\nabla_X X + B(X,X), x-x_0) + 2g(X,X)$$

olur. $N^{2n}(c)$ silindirinde yatan $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ nin m boyutlu M integral alt manifoldunun bir ortonormal tabanı $(E_1, E_2, ..., E_m)$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned} \triangle f &= \sum_{i=1}^{m} ((\nabla_{E_i} E_i) f - E_i E_i f) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \begin{pmatrix} 2g(\nabla_{E_i} E_i, x-x_0) - 2g(\nabla_{E_i} E_i, x-x_0) \\ -2g(B(E_i,E_i), x-x_0) - 2g(E_i, E_i) \end{pmatrix} \\ &= -2\sum_{i=1}^{m} (g(E_i,E_i) + g(B(E_i,E_i), x-x_0)) \\ &= -2(m + g(mH, x-x_0)) \end{aligned}$$

ve buradan

$$\triangle f = -2m(1 + g(H, x-x_0)) \tag{4.18}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.1 *$\mathbb{E}^5(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında $N^4(c)$ de yatan her M^2 integral yüzeyi düzdür (Baikousis 1991, Camcı 2007).*

İspat. Biliyoruz ki, $\|\operatorname{grad} f\| = 2c$ dir. M^2 yüzeyinin $\{X_1, X_2\}$ ortonormal tabanını

$$\begin{aligned} \varphi X_1 &= \frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|} \\ &= -\frac{1}{c}\varphi(x - x_0) \end{aligned}$$

olacak şekilde seçelim. Böylece

$$\{X_1, X_2, \xi_1 = \varphi X_1, \xi_2 = \varphi X_2, \xi\}$$

vektör alanları $\mathbb{E}^5(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayının ortonormal bir tabanı olup

$$g(B(X_i, X_j), \xi_1) = g(\overline{B}(X_i, X_j), \xi_1)$$

olduğu görülür. Çünkü $\xi_1 = -\frac{1}{c}\varphi(x - x_0)$ vektör alanı $N^{2n}(c)$ silindirinin normalindedir ve $B'(X_i, X_j)$ de M^2 nin normalinde fakat, $N^{2n}(c)$ silindirinin teğetinde olan bir vektör alanıdır. Böylece $g(B'(X_i, X_j), \xi_1) = 0$ dır. (4.12) de $\eta(X_i) = \eta(X_j) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \overline{B}(X_i, X_j) &= -\frac{1}{2c^2} g(X_i, X_j) \operatorname{grad} f \\ &= -\frac{1}{c} g(X_i, X_j)\xi_1 \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} g(B(X_i, X_j), \xi_1 &= g(-\frac{1}{c} g(X_i, X_j)\xi_1, \xi_1) \\ &= -\frac{1}{c} g(X_i, X_j) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca biliyoruz ki,

$$\overline{\nabla}_{X_i} X_j = \nabla_{X_i} X_j + B(X_i, X_j)$$

ve $g(X_j, \xi_1) = 0$ ise

$$g(\overline{\nabla}_{X_i} X_j, \xi_1) + g(\overline{\nabla}_{X_i} \xi_1, X_j) = 0$$

olur ve böylece

$$\begin{aligned}
g(B(X_i, X_j), \xi_1) &= g(\overline{\nabla}_{X_i} X_j, \xi_1) \\
&= g(-\overline{\nabla}_{X_i} \xi_1, X_j) \\
&= g(A_{\xi_1} X_i, X_j)
\end{aligned}$$

dir. Son eşitlikten

$$g(A_{\xi_1} X_i, X_j) = g(-\frac{1}{c} X_i, X_j)$$

elde edilir. Böylece $A_1 X_i = -\frac{1}{c} X_i$ ve $A_1 = -\frac{1}{c} I$ sonucuna ulaşırız. Burada $A_{\xi_i} = A_i$ $(i = 1, 2)$ dönüşümleri M^2 yüzeyinin şekil operatörleridir. Kabul edelim ki,

$$\begin{aligned}
A_2 X_1 &= a_{11} X_1 + a_{21} X_2 \\
A_2 X_2 &= a_{12} X_1 + a_{22} X_2
\end{aligned}$$

olsun. Burada

$$\begin{aligned}
a_{11} &= g(A_2 X_1, X_1) = g(-\overline{\nabla}_{X_1} \xi_2, X_1) = 0 \\
a_{21} &= g(A_2 X_1, X_2) = g(A_1 X_2, X_2) = g(-\frac{1}{c} X_2, X_2) = -\frac{1}{c} \\
a_{12} &= g(A_2, X_2, X_1) = g(X_2, A_2 X_1) = -\frac{1}{c} \\
a_{22} &= g(A_2 X_2, X_2) = a
\end{aligned}$$

dır. Böylece şekil operatörlerini

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{c} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{c} \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{c} \\ -\frac{1}{c} & a \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

olarak elde ederiz. Burada a reel değerli bir fonksiyondur. (3.60) eşitliğinden M^2 nin Gauss eğriliği

$$\begin{aligned}
K(X_1, X_2) &= \sum_{i=1}^{2} (g(A_i X_1, X_1) g(A_i X_2, X_2) - g(A_i X_1, X_2)^2) \\
&= g(A_1 X_1, X_1) g(A_1 X_2, X_2) - g(A_1 X_1, X_2)^2 \\
&\quad + g(A_2 X_1, X_1) g(A_2 X_2, X_2) - g(A_2 X_1, X_2)^2 \\
&= \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ise M^2 integral yüzeyi düzdür demektir. ■

Teorem 4.2 *m boyutlu M manifoldu $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayının kompakt integral alt manifoldu olsun. M manifoldu 1- tiplidir ancak ve ancak M manifoldu $N^{2n}(c)$ de yatan minimal alt manifolddur. Burada $c^2 = \frac{m}{\lambda_p}$ dir (Baikousis 1991, Camcı 2007).*

İspat. Şayet M manifoldu $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında 1-tipli ise

$$\triangle g(x_P, e_A) = \lambda_P g(x_P, e_A)$$

dır. Burada $\varphi^2 x = \varphi^2 x_0 + \varphi^2 x_P$ ve $\varphi^2 x_0$ de $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ uzayında sabit vektördür. Böylece $\triangle g(\varphi^2 x, e_A) = mg(H, e_A)$, $(A = 1, 2, ..., 2n)$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\triangle g(\varphi^2 x, e_A) &= \triangle g(\varphi^2 x_0 + \varphi^2 x_P, e_A) \\
&= \triangle g(\varphi^2 x_P, e_A) \\
&= \triangle g(x_P, \varphi^2 e_A) \\
&= -\triangle g(x_P, e_A) \\
&= -\lambda_p g(x_P, e_A) \\
&= \lambda_p g(x_P, \varphi^2 e_A) \\
&= \lambda_p g(\varphi^2 x_P, e_A)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$mg(H, e_A) = \lambda_p g(\varphi^2 x_P, e_A)$$

dir. Böylece $\varphi^2 x_p = \varphi^2 (x - x_0)$ olduğundan

$$g(mH - \lambda_p \varphi^2 (x - x_0), e_A) = 0, (A = 1, 2, ..., 2n)$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak $mH - \lambda_p \varphi^2 (x - x_0) = \mu\xi$ dır. $A_\xi = 0$ olduğundan $g(H, \xi) = 0$ dır. Böylece $\mu = 0$ çıkar. $\mu = 0$ ise $H = \dfrac{\lambda_p}{m}\varphi^2 (x - x_0)$ olarak elde edilir. $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
g(H, X) &= g(\frac{\lambda_p}{m}\varphi^2 (x - x_0), X) \\
&= \frac{\lambda_p}{m} g(x - x_0), \varphi^2 X) \\
&= -\frac{\lambda_p}{m} g(x - x_0), X)
\end{aligned}$$

$g(H,X)=0$ olduğundan $\forall X \in \chi(M)$ için $g(x-x_0,X)=0$ dır. Böylece $\forall X \in \chi(M)$ vektör alanı $(x-x_0)$ in normalindedir. Lemma 4.1 den dolayı bazı M manifoldları $c\rangle 0$ için $N^{2n}(c)$ de yatarlar. (4.17) denkleminden $H=H'+\frac{1}{c^2}\varphi^2(x-x_0)$ idi. Böylece

$$H'=\left(\frac{\lambda_p}{m}-\frac{1}{c^2}\right)\varphi^2(x-x_0) \tag{4.20}$$

olur. Burada H' ortalama eğrilik vektör alanı ; $N^{2n}(c)$ silindirinde M manifoldunun ortalama eğrilik vektör alanıdır. Yani H' vektör alanı,$N^{2n}(c)$ nin teğet uzayında M manifolduna diktir. Böylece H' vektör alanı $\operatorname{grad} f$ vektör alanına dik olduğundan $H'=0$ dır. Sonuç olarak (4.20) den $\frac{\lambda_p}{m}-\frac{1}{c^2}=0$ ve $c^2=\frac{m}{\lambda_p}$ elde edilir.
Tersine M manifoldu $N^{2n}(c)$ de minimal alt manifold olsun. Lemma 4.1 in (ii) şıkkından $\triangle g(x,e_A)=-mg(H,e_A)$ ve (4.17) denkleminden $H=H^{'}+\frac{1}{c^2}\varphi^2(x-x_0)$ dir. M manifoldu minimal olduğundan $H'=0$ dır. Böylece

$$\begin{aligned}
\triangle g(x,e_A) &= -mg(H,e_A)\\
&= -mg(\frac{1}{c^2}\varphi^2(x-x_0),e_A)\\
&= -\frac{m}{c^2}g(x-x_0,\varphi^2 e_A)\\
&= \frac{m}{c^2}g(x-x_0,e_A)
\end{aligned}$$

olur. Spektral ayrışımı düşünürsek

$$g(x,e_A)=g(x_0,e_A)+\sum_{t=1}^{\infty}g(x,e_A)_t \tag{4.21}$$

olur. Burada $\triangle g(x,e_A)_t=\lambda_t g(x,e_A)_t$ ve

$$\begin{aligned}
\triangle g(x_0,e_A) &= \frac{m}{c^2}g(x_0-x_0,e_A)\\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\triangle g(x,e_A) &= \triangle g(x_0,e_A)+\sum_{t=1}^{\infty}\triangle g(x,e_A)_t\\
&= \sum_{t=1}^{\infty}\lambda_t g(x,e_A)_t
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\triangle g(x, e_A) &= \frac{m}{c^2} g(x - x_0, e_A) \\
&= \frac{m}{c^2} g(x, e_A) - \frac{m}{c^2} g(x_0, e_A) \\
&= \frac{m}{c^2} \left(g(x_{0,} e_A) + \sum_{t=1}^{\infty} g(x, e_A)_t \right) - \frac{m}{c^2} g(x_0, e_A) \\
&= \frac{m}{c^2} g(x_0 e_A) + \frac{m}{c^2} \sum_{t=1}^{\infty} g(x, e_A)_t - \frac{m}{c^2} g(x_0, e_A) \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{m}{c^2} g(x, e_A)_t
\end{aligned}
$$

olur. Böylece $\sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t g(x, e_A)_t = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{m}{c^2} g(x, e_A)_t$ ve

$$
\sum_{t=1}^{\infty} \left(\lambda_t - \frac{m}{c^2} \right) (g(x, e_A)_t = 0, \; A = 1, 2, ..., 2n \tag{4.22}
$$

eşitliğine ulaşırız. Kabul edelim ki $A \in \{1, 2, ..., 2n\}$ ve her s için $g(x, e_A)_s \neq 0$ olsun. Böylece (4.22) den

$$
\sum_{t=1}^{\infty} \left(\lambda_t - \frac{m}{c^2} \right) (g(x, e_A)_t, g(x, e_A)_s) = 0 \tag{4.23}
$$

olur. Burada $(,)$ $C^\infty(M)$ uzayında tanımlı bir iç çarpımdır. $\triangle$ Laplace operatörü self-adjoint olduğundan

$$
\lambda_t(f_t, f_s) = (\lambda_t f_t, f_s) = (\triangle f_t, f_s) = (f_t, \triangle f_s) = (f_t, \lambda_s f_s) = \lambda_s(f_t, f_s)
$$

olur. Böylece $(\lambda_t - \lambda_s)(f_t, f_s) = 0$ ve $t \neq s$ için $(f_t, f_s) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak (4.23) den $t \neq s$ için $g(x, e_A)_t \neq 0$ olduğu zaman

$$
\lambda_t - \frac{m}{c^2} = 0 \tag{4.24}
$$

olur. (4.24) denklemi tam olarak bir çözüme sahip olduğundan, M manifoldu 1-tiplidir. ■

Teorem 4.3 *m-boyutlu M manifoldu $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayının kompakt manifoldu olsun. M manifoldu 1- tiplidir ancak ve ancak M manifoldu $N^{2n}(c)$ silindirinde yatan minimal alt manifolddur (Camcı ve Gök).*

İspat. ($\Rightarrow$) M manifoldu $N^{2n}(c)$ silindirinde yatan $1-$tipli alt manifoldu olsun. Bu durumda

$$\Delta g(x_p, e_A) = \lambda_p g(x_p, e_A),\ \ A = 1, 2, ..., 2n.$$

ve

$$\varphi^2 x = \varphi^2 x_0 + \varphi^2 x_p$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\Delta g(\varphi^2(x - x_0), e_A) &= \Delta g(\varphi^2 x_p, e_A) \\
&= \Delta g(x_p, e_A) \\
&= \lambda_p g(x_p, e_A) \\
&= \lambda_p g(\varphi^2 x_p, e_A) \\
&= \lambda_p g(\varphi^2(x - x_0), e_A)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\Delta g(\phi^2(x - x_0), e_A) &= \Delta g(x - x_0, \phi^2 e_A) \\
&= -\Delta g(x - x_0, e_A) \\
&= m g(H, e_A)
\end{aligned}$$

dır. Böylece

$$\lambda_p g(\varphi^2(x - x_0), e_A) = m g(H, e_A)$$

veya g iç çarpımının özeliklerinden

$$g(mH - \lambda_p \varphi^2(x - x_0), e_A) = 0,\ \ A = 1, 2, ..., 2n \tag{4.25}$$

olur. Bu durumda (4.25) denkleminden

$$mH - \lambda_p \varphi^2(x - x_0) = k\xi \tag{4.26}$$

olduğu görülür. Diğer yandan (4.26) denklemi (4.17) denkleminde yerine yazılırsa

$$m(H' + \frac{\alpha}{c^2}\varphi^2(x - x_0)) - \lambda_p \varphi^2(x - x_0) = k\xi$$

veya

$$H^{'}+(\frac{\alpha}{mc^2}-\lambda_p)\varphi^2(x-x_0)=k\xi$$

olur. Burada $H^{'}\in\chi(M)^{\perp}$ ve $H^{'}\in\chi(N^{2n})$ olduğundan $\forall X\in\chi(M)$ için

$$g(H^{'},X)=0$$

ve

$$g(\varphi^2(x-x_0),X)=0$$

olur. Böylece $k=0$, $H^{'}=0$ ve $\lambda_p=\frac{m\alpha}{c^2}$ olarak bulunur. $H^{'}=0$ olduğundan M manifoldu $N^{2n}(c)$ silindirinde minimal alt manifold olur.

($\Leftarrow$) Tersine, kabul edelim ki M manifoldu $N^{2n}(c)$ de minimal alt manifold olsun. Bu durumda $H^{'}=0$ ve $H=\dfrac{\alpha}{c^2}\varphi^2(x-x_0)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\Delta g(x,e_A) &= -mg(H,e_A)\\ \Delta g(x,e_A) &= -mg(\frac{\alpha}{c^2}\varphi^2(x-x_0),e_A)\\ \Delta g(x,e_A) &= \frac{m\alpha}{c^2}g(x-x_0,e_A)\end{aligned}\tag{4.27}$$

olur. Spektral ayrışımı yapılırsa

$$g(x,e_A)=g(x_0,e_A)+\sum_{t=1}^{\infty}g(x,e_A)_t,\ A=1,2,...,2n\tag{4.28}$$

olur. Bu durumda (4.27) ve (4.28) denklemlerinden

$$\begin{aligned}g(x-x_0,e_A) &= \sum_{t=1}^{\infty}g(x,e_A)_t,\ A=1,2,...,2n\\ \Delta g(x-x_o,e_A) &= \sum_{t=1}^{\infty}g(x,e_A)_t\\ \frac{m\alpha}{c^2}g(x-x_0,e_A) &= \sum_{t=1}^{\infty}\lambda_t g(x,e_A)_t\\ \frac{m\alpha}{c^2}\sum_{t=1}^{\infty}g(x,e_A)_t &= \sum_{t=1}^{\infty}\lambda_t g(x,e_A)_t\\ \sum_{t=1}^{\infty}(\lambda_t-\frac{m\alpha}{c^2})g(x,e_A)_t &= 0,\ A=1,2,...,2n\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\sum_{t=1}^{\infty}(\lambda_t-\frac{m\alpha}{c^2})(g(x,e_A)_t,g(x,e_A)_s)=0$$

olur. Burada $f_t = g(x, e_A)_t$, $f_s = g(x, e_A)_s$ olmak üzere $\Delta f_t = \lambda_t f_t$, $\Delta f_s = \lambda_s f_s$ dir.

$$\begin{aligned} \lambda_t(f_t, , f_s) &= (\Delta f_t, , f_s) = \lambda_s(f_t, , f_s) \\ (\lambda_t - \lambda_s)(f_t, , f_s) &= 0 \end{aligned}$$

olur. $t \neq s$ ise $(f_t, , f_s) = 0$ olur.
Bu durumda $g(x, e_A)_t \neq 0$ olduğundan $A = 1, 2, ..., 2n$

$$\lambda_t - \frac{m\alpha}{c^2} = 0, \tag{4.29}$$

$A = 1, 2, ..., 2n$ için $g(x, e_A)_t \neq 0$ olduğundan (4.29) denkleminin yalnız bir çözümü olduğundan M manifoldu $1-$tiplidir ■

4.2 $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki Uzayında Alt Manifoldların Bazı Özelikleri

M manifoldu $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayının $m-$ boyutlu integral alt manifoldu olsun. Böylece $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ uzayında M üzerindeki ortonormal vektör alanları $X_1, ..., X_m$ olarak tanımlarsak, baza tamamlamadan $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ deki ortonormal taban vektör alanlarını

$$\{X_1, ..., X_m, \xi_{m+1}, \xi_{m+2}, ..., \xi_{2n+1} = \xi\}$$

olarak tanımlayabiliriz. Ayrıca D de $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ de M nin normal koneksiyonu olsun. Şayet $X \in \chi(M)$ için

$$\overline{\nabla}_X e_A = \varepsilon g(\varphi X, e_A), \quad A = 1, 2, .., 2n$$

olduğundan

$$\begin{aligned} Xg(H, e_A) &= g(\overline{\nabla}_X H, e_A) + g(H, \overline{\nabla}_X e_A) \\ &= g(-A_H X + D_X H, e_A) + 0 \\ &= -g(A_H X, e_A) + g(D_X H, e_A) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\triangle^D H = \sum_{t=1}^{m} (D_{\nabla_{X_i} X_i} H - D_{X_i} D_{X_i} H) \tag{4.30}$$

ve

$$tr(\overline{\nabla} A_H) = \sum_{t=1}^{m} (A_{D_{X_i} H} X_i + (\triangle_{X_i} A_H) X_i) \tag{4.31}$$

dir. Ayrıca ξ_{m+2} vektörünü H ortalama eğrilik vektör alanına paralel seçersek

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{m} B(X_i, A_H X_i) &= \sum_{t=m+1}^{2n} tr(A_H A_\alpha)\xi_\alpha \\ &= (trA_{m+1}^2)H + \sum_{t=m+2}^{2n} tr(A_H A_a)\xi_a\end{aligned}$$

elde edilir. Burada A_α terimi ξ_α ile bağlantılı $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ de uyumlu vektör alanını

$$a(H) = \sum_{t=m+2}^{2n} tr(A_H A_\alpha)\xi_\alpha$$

olarak tanımlarız. Yukarıdaki eşitliklerden

$$\Delta g(H, e_A) = \begin{pmatrix} tr(\overline{\nabla} A_H) + \Delta^D H + (trA_{m+1}^2)H \\ +a(H) - \sum_{t=1}^{m} \eta(D_{X_i} H)\varphi X_i, e_A \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

olur (Baikousis 1994).

Teorem 4.4 *M manifoldu $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ de bir kompakt integral alt manifoldu olsun. Şayet M manifoldunun $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ de ortalama eğrilik vektör alanı, paralel ise M manifoldu 1-tipindedir ancak ve ancak*
1) trA_{m+1}^2 *sabittir*
2) $tr(\overline{\nabla} A_H) = 0$
3) $a(H) = 0$ *(Chen yüzeyi)*
dir (Baikousis 1994, Camcı 2007).

İspat. M manifoldu $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ de paralel ise $DH = 0$ dır. Böylece $\Delta^D H = 0$ olduğu tanımından kolayca görülür. M manifoldu $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ de 1-tipli olsun. H' ortalama eğrilik vektör alanı, $N^{2n}(c)$ silindirinde M manifoldunun ortalama eğrilik vektör alanıdır. Yani H' vektör alanı, $N^{2n}(c)$ nin teğet uzayında M manifolduna diktir. Böylece H' vektör alanı $\operatorname{grad} f$ vektör alanına dik olduğundan $H' = 0$ dır. Dolayısıyla (4.17) den

$$H = \frac{1}{c^2}\varphi^2(x - x_0)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\Delta g(H, e_A) &= \frac{1}{c^2}\Delta g(\varphi^2(x - x_0), e_A) \\
&= \frac{1}{c^2}\Delta g(x - x_0, \varphi^2 e_A) \\
&= -\frac{1}{c^2}\Delta g(x - x_0, e_A) \\
&= -\frac{1}{c^2}\Delta g(x, e_A)
\end{aligned}$$

Lemma 4.1 nin (ii) şıkkından

$$\Delta g(H, e_A) = \frac{m}{c^2} g(H, e_A) \tag{4.33}$$

elde ederiz. $\lambda = \frac{m}{c^2}$ için (4.32) ve (4.33) denklemleri yardımıyla

$$g(tr(\overline{\nabla} A_H) + (trA^2_{m+1})H + \alpha(H) - \lambda H, e_A) = 0, \quad A = 1, 2, ..., 2n$$

olur. Bu son eşitlikten

$$tr(\overline{\nabla} A_H) + (trA^2_{m+1})H + a(H) - \lambda H = \mu\xi$$

sonucuna ulaşırız. $tr(\overline{\nabla} A_H)$ nın tanımından, bu vektörün M manifoldunun teğet uzayına ve H ortalama eğrilik vektör alanı ξ ye dik olduğundan (1), (2) ve (3) özeliklerinin sağlandığı görülür. Karşıt olarak (1), (2) ve (3) özelikleri sağlansın. Bu eşitlikleri (4.32) de yerine yazarsak $trA^2_{m+1} = \lambda$ (sabit) için

$$\Delta g(H, e_A) = \lambda g(H, e_A)$$

çıkar. Teorem 4.2 deki benzer işlemlerle M manifoldunun 1-tipden olduğu görülür. Farzedelim ki, M manifoldu $N^{2n}(c)$ silindirinde yatan ve $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayının n-boyutlu integral alt manifoldu olsun. M manifoldunun H ortalama eğrilik vektör alanı (4.17) deki gibidir. ξ vektör alanını H' ye paralel birim vektör alanı olarak seçersek $H' = a'\xi$ olarak yazabiliriz. Burada $a' = \|H'\|$ dir. $X_1, X_2, ..., X_n$ vektör alanları M manifoldunun lokal ortonormal baz vektörleri olsun. Böylece $N^{2n}(c)$ silindirinin normali $\tau = -\varphi^2(x - x_0)$ olmak üzere M manifoldunun ortonormal vektör alanını $\xi_{n+1} = \frac{1}{a}H$ $(a = \|H'\|)$, $\xi_{n+2} = \frac{\zeta + a'\tau}{ca}$ olarak seçebiliriz. Burada

$$g(\xi_{n+1}, \xi_{n+1}) = g(\xi_{n+2}, \xi_{n+2}) = 1$$

olduğu açıktır. $g(\varphi^2(x-x_0),H')=0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
g(\xi_{n+1},\xi_{n+2}) &= g(\frac{1}{a}H,\frac{\zeta+a'\tau}{ca}) \\
&= \frac{1}{ca^2}g(H,\zeta)+\frac{a'}{ca^2}g(H,\tau) \\
&= \frac{1}{ca^2}g\left(H'+\frac{1}{c^2}\varphi^2(x-x_0),\frac{1}{a'}H'\right) \\
&\quad +\frac{a'}{ca^2}g\left(H'+\frac{1}{c^2}\varphi^2(x-x_0),-\varphi^2(x-x_0)\right) \\
&= \frac{1}{ca^2}g\left(H',\frac{1}{a'}H'\right)+\frac{a'}{ca^2}g\left(\frac{1}{c^2}\varphi^2(x-x_0),-\varphi^2(x-x_0)\right) \\
&= \frac{1}{a'ca^2}g\left(H',H'\right)-\frac{a'}{c^3a^2}g\left(\varphi^2(x-x_0),\varphi^2(x-x_0)\right) \\
&= \frac{(a')^2}{a'ca^2}-\frac{a'c^2}{c^3a^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\xi_{n+2}=\dfrac{\zeta+a'\tau}{ca}$ eşitliğinden

$$\begin{aligned}
1 &= g\left(\frac{\zeta+a'\tau}{ca},\frac{\zeta+a'\tau}{ca}\right) \\
&= \frac{1}{c^2a^2}g\left(\frac{1}{a'}H',\frac{1}{a'}H'\right)+\frac{(a')^2}{c^2a^2}g\left(\tau,\tau\right) \\
&= \frac{1}{c^2a^2}+\frac{(a')^2c^2}{c^2a^2}
\end{aligned}$$

ve

$$\frac{1}{c^2}+(a')^2=a^2 \tag{4.34}$$

sonucuna ulaşırız. Teorem 4.1 deki metodu kullanırsak $\tau=-\varphi^2(x-x_0)$ için $A_\tau=-I$ ve $A_\tau=-n$ olur. Böylece $A_c=A_{\xi_\alpha}$ ve $H=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}B\left(X_i,X_i\right)$ olmak üzere

$$H=\frac{1}{n}\sum_{\alpha,t=1}^{n}g\left(A_{n+\alpha}X_i,X_i\right)\xi_{n+\alpha} \tag{4.35}$$

olarak da elde edilir. $\xi_{n+\alpha}=\varphi X_\alpha$ ve $H=a\varphi X_1$ olarak seçersek $(\varphi X_1,\varphi X_2,...,\varphi X_n)$ vektör alanlarının lineer bağımsızlığından ve (4.35) den

$$trA_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}g\left(A_\alpha X_i,X_i\right)=na$$

$\alpha\geq 2$ için

$$trA_{n+\alpha}=\sum_{i=1}^{n}g\left(A_{n+\alpha}X_i,X_i\right)=0 \tag{4.36}$$

olur. Ayrıca $H = a\xi_{n+1}$ ise $A_H = aA_{n+1}$ dir. Dolayısıyla $A_H = na^2$ olduğu görülür. Ayrıca $H' = a'\zeta$ ve (4.17) den $H = a^{'}\zeta - \dfrac{1}{c^2}\tau$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} trA_\zeta &= trA_{\frac{1}{a'}H+\frac{1}{a'c^2}\tau} \\ &= \frac{1}{a'}trA_H + \frac{1}{a'c^2}trA_\tau \\ &= \frac{na^2}{a'} - \frac{n}{a'c^2} \\ &= \frac{n}{a'}\left(a^2 - \frac{1}{c^2}\right) \\ &= na' \end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Ayrıca $H = a\zeta - \dfrac{1}{c^2}\tau$ ve $\xi_{n+2} = \dfrac{\zeta + a'\tau}{ca}$ olduğundan

$$\begin{aligned} trA_HA_{n+2} &= \frac{1}{ac}\left(a'trA_\zeta^2 + \frac{1}{c^2}trA_\zeta - (a')^2trA_\zeta - \frac{na'}{c^2}\right) \\ &= \frac{1}{ac}\left(a'trA_\zeta^2 + \frac{na'}{c^2} - (a')^2na' - \frac{na'}{c^2}\right) \\ &= \frac{a'}{ac}\left(trA_\zeta^2 - n(a')^2\right) \end{aligned}$$

ve

$$trA_HA_{n+2} = \frac{a'}{ac}(trA_\zeta^2 - \eta(a')^2) \tag{4.37}$$

elde edilir. $H = H' - \dfrac{1}{c^2}\tau$ ise $trA_HA_{n+\alpha} = trA_{H'}A_{n+\alpha} + \dfrac{1}{c^2}trA_HA_{n+\alpha}$ ve (4.36) denkleminden

$$trA_HA_{n+\alpha} = trA_{H'}A_{n+\alpha}, \ \alpha = 3, 4..., 2n \tag{4.38}$$

sonucuna ulaşız. $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayında, τ ya dik M manifoldunun herhangi bir normal vektörü σ için $A_\sigma = A_\sigma^{'}$ ve $D_\sigma = D_\sigma^{'}$ dr. Çünkü

$$\left.\begin{aligned} \overline{\nabla}_X\sigma &= -A_\sigma X + D_X\sigma, \\ \nabla_X^{'}\sigma &= -A_\sigma^{'}X + D_X^{'}\sigma \end{aligned}\right\} \tag{4.39}$$

dir. Burada $D, \mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ da M manifoldunun normal koneksiyonu ve D' de $N^{2n}(c)$ de M manifoldunun normal koneksiyonudur. Ayrıca biliyoruz ki

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X\sigma &= \nabla_X\sigma + B(\sigma, X) \\ \nabla'_X\sigma &= \nabla_X\sigma + B'(\sigma, X) \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$B(\sigma, X) = B'(\sigma, X) + \overline{B}(\sigma, X)$$

elde ederiz. $2n$-boyutlu $N^{2n}(c)$ nin birim normal vektörü

$$\tau = -\frac{1}{c}\varphi^2(x - x_0)$$

ve $\overline{B}(\sigma, X) = \lambda\tau$ olduğundan

$$\begin{aligned} g(\overline{\nabla}_X\sigma, \tau) &= g(\nabla_X\sigma + B(\sigma, X), \tau) \\ &= g(\nabla_X\sigma, \tau) + \lambda g(\tau, \tau) \\ &= \lambda \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Ayrıca $g(\sigma, \tau) = 0$, $A_\tau = -\frac{1}{c}I$ ve $\sigma \in \chi(M)^\perp$ olduğundan

$$\begin{aligned} \lambda &= g(\overline{\nabla}_X\sigma, \tau) \\ &= -g(\overline{\nabla}_X\tau, \sigma) \\ &= -g(-A_\tau X + D_X\tau, \sigma) \\ &= g(A_\tau X, \sigma) \\ &= -\frac{1}{c}g(X, \sigma) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece $B(\sigma, X) = B'(\sigma, X)$ elde edilir. Dolayısıyla $\overline{\nabla}_X\sigma = \nabla'_X\sigma = \nabla_X\sigma$ sonucuna ulaşırız. (4.39) dan $A_\sigma = A'_\sigma$ ve $D\sigma = D'\sigma$ olur. Böylece

$$a(H) = \sum_{t=m+2}^{2n} tr(A_H A_\alpha)\xi_\alpha$$

olduğundan

$$\begin{aligned} a(H) &= tr(A_H A_{m+2})\xi_{m+2} + \sum_{t=m+2}^{2n} tr(A_H A_\alpha)\xi_\alpha \\ &= \frac{a'}{ac}(trA_\zeta^2 - \eta(a')^2)\xi_{m+2} + \sum_{t=m+3}^{2n} tr(A_H A_\alpha)\xi_\alpha \end{aligned}$$

dir. Burada $a'(H') = \sum_{t=m+3}^{2n} tr(A_H A_\alpha)\xi_\alpha$ dersek

$$a(H) = \frac{a'}{ac}(trA_\zeta^2 - \eta(a')^2)\xi_{m+2} + a'(H') \tag{4.40}$$

elde edilir. Burada $a'(H')$ vektör alanı $N^{2n}(c)$ de M nin uyumlu ortalama eğrilik vektör alanıdır. Üstelik $A_{m+1} = A_{\frac{1}{a}H}$ olduğundan

$$\begin{aligned} trA^2_{m+1} &= \frac{1}{a} trA^2_{(a'\zeta - \frac{1}{c^2}\tau)} \\ &= \frac{1}{a} tr(a'A_\zeta + \frac{1}{c^2} I)^2 \\ &= \frac{1}{a}\left((a')^2 trA^2_\zeta + \frac{2a'}{c^2} trA_\zeta + \frac{1}{c^2} trI\right) \end{aligned}$$

ve

$$trA^2_{m+1} = \frac{1}{a}\left((a')^2 trA^2_\zeta + \frac{2n(a')^2}{c^2} + \frac{n}{c^2}\right) \tag{4.41}$$

elde edilir. $\triangle^D H$ için (4.30) den

$$\begin{aligned} \triangle^D H &= \triangle^{D'} H' - \frac{1}{c^2}\sum_{t=1}^{m}(D_{\nabla_{X_i}} x_i \tau - D_{X_i} D_{X_i} \tau) \\ &= \triangle^{D'} H' - \frac{1}{c^2}\sum_{t=1}^{m}(g(x - x_0, \xi_{n+i})\xi_{n+i} - g(x - x_0, \eta\varphi H)\xi) \end{aligned}$$

elde edilir. Fakat $g(x - x_0, \xi_{n+i})\xi_{n+i} = g(\tau, \xi_{n+i})\xi_{n+i} = \tau$ ve $g(x - x_0, X_i) = 0$ olduğundan

$$g(x - x_0, \varphi H) = g(x - x_0, a\varphi\xi_{n+1}) = -ag(x - x_{0,} X_1) = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\triangle^D H = \triangle^{D'} H' - \frac{1}{c^2}\tau \tag{4.42}$$

olur. Üstelik

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{m} \eta(D_{X_i} H)\varphi X_i &= \sum_{t=1}^{m} g(D_{X_i} H, \xi)\xi_{n+i} \\ & \quad \sum_{t=1}^{m} ag(\xi_{n+1}, \varphi X_i)\xi_{n+i} \\ &= a\xi_{n+1} \end{aligned}$$

veya

$$\sum_{t=1}^{m} \eta(D_{X_i} H)\varphi X_i = H \tag{4.43}$$

elde edilir. (4.32), (4.37) ve (4.43) den

$$\triangle g(H, e_A) = g\begin{pmatrix} tr(\overline{\nabla} A_H) + \triangle^{D'} H' + a'(H') \\ -\frac{n}{c^2}((a')^2 + \frac{1}{c^2})\tau \\ +(trA^2_\zeta + \frac{n}{c^2} - 1)H', e_A \end{pmatrix} \tag{4.44}$$

olur. ■

Teorem 4.5 *M manifoldu $N^{2n}(c)$ silindirinde yatan $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayının $n-$ boyutlu kompak integral alt manifoldu olsun. M manifoldu $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ uzayında 2-tipdendir ancak ve ancak*

i) M manifoldunun $N^{2n}(c)$ de a' ortalama eğriliği sabit ve

$$(a')^2 = \left(\frac{c}{n}\right)^2 \left(\frac{n}{c^2} - \lambda_p\right)\left(\lambda_q - \frac{n}{c^2}\right)$$

olarak verilir.

ii) $tr(\overline{\nabla} A_H) = 0$

iii) $\varphi^2(\triangle^{D'} H') + a'(H') + (trA_\zeta^2 + \frac{n}{c^2} - 1)H' = (\lambda_p + \lambda_q)H'$

dir (Baikousis 1991, Camcı 2007).

İspat. Eğer M manifoldu 2-tipten ise $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ uzayında M nin x pozisyon vektörü için

$$\varphi^2 x = \varphi^2 x_0 + \varphi^2 x_p + \varphi^2 x_q$$

yazabiliriz. Burada $\varphi^2 x_0$ sabit vektör ve $\triangle g(x_p, e_A) = \lambda_p g(x_p, e_A), \triangle g(x_q, e_A) = \lambda_q g(x_q, e_A) \quad (A = 1, 2, ..., 2n)$ dir. Üstelik $\triangle g(x_p, e_A) = -ng(H, e_A)$ olduğundan $-ng(H, e_A) = g(\lambda_p x_p + \lambda_q \lambda_q, e_A)$ ve

$$-n\triangle g(H, e_A) = g(\lambda_p^2 x_p + \lambda_q^2 x_q, e_A)$$

eşitliklerini elde ederiz. Çünkü

$$\begin{aligned} \triangle g(x, e_A) &= \triangle g(x_0 + x_1 + x_2, e_A) \\ &= \triangle g(x_0, e_A) + \triangle g(x_p, e_A) + \triangle g(x_q, e_A) \\ &= \triangle g(x_p, e_A) + \triangle g(x_q, e_A) \\ &= \lambda_p g(x_p, e_A) + \lambda_q g(x_q, e_A) \\ &= g(\lambda_p x_p + \lambda_q x_q, e_A) \end{aligned}$$

olur. Böylece $-ng(H, e_A) = g(\lambda_p x_p + \lambda_q x_q, e_A)$

$$\begin{aligned} -n\triangle g(H, e_A) &= \lambda_p \triangle g(x_p, e_A) + \lambda_q \triangle g(x_q, e_A) \\ &= \lambda_p \lambda_p g(x_p, e_A) + \lambda_q \lambda_q g(x_q, e_A) \\ &= g(\lambda_p^2 x_p + \lambda_q^2 x_q, e_A) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $\triangle g(x_p, e_A) = \lambda_p g(x_p, e_A)$ ve $\triangle g(x_q, e_A) = \lambda_q g(x_q, e_A)$ eşitliklerini toplarsak

$$\triangle g(H, e_A) = g\left((\lambda_p + \lambda_q)H + \frac{1}{n}\lambda_p\lambda_q(x - x_0), e_A\right)$$

elde ederiz. Çünkü $-ng(\lambda_p H, e_A) = g(\lambda_p^2 x_p + \lambda_p\lambda_q x_q, e_A)$ ve $-ng(\lambda_q H, e_A) = g(\lambda_p\lambda_q x_p + \lambda_q^2 x_q, e_A)$ eşitliklerini taraf tarafa toplarsak

$$-ng((\lambda_p + \lambda_q)H, e_A) = g\left((\lambda_p + \lambda_q)H + \frac{1}{n}\lambda_p\lambda_q(x - x_0), e_A\right)$$

olur. Ayrıca $H = H' - \frac{1}{c^2}\tau$ olduğundan

$$-ng((\lambda_p + \lambda_q)H, e_A) = g\begin{pmatrix} (\lambda_p + \lambda_q)H' \\ -(\frac{1}{c^2}(\lambda_p + \lambda_q) - \frac{1}{n}\lambda_p\lambda_q)\tau, e_A \end{pmatrix} \tag{4.45}$$

olur. (4.44) ve (4.45) denklemlerinde metrik non-dejenere olduğundan

$$\begin{aligned} & tr(\overline{\nabla} A_H) + \triangle^{D'} H' + a'(H') - \frac{n}{c^2}((a')^2 + \frac{1}{c^2})\tau + (trA_\zeta^2 + \frac{n}{c^2} - 1)H' \\ = \; & (\lambda_p + \lambda_q)H' - (\frac{1}{c^2}(\lambda_p + \lambda_q) - \frac{1}{n}\lambda_p\lambda_q)\tau \end{aligned}$$

dir. Burada $tr(\overline{\nabla} A_H)$ terimi M nin teğet uzayında da diğer terimler M nin normal uzayında olduğundan dolayı $tr(\overline{\nabla} A_H) = 0$ olur. Böylece yukarıdaki denklem

$$\begin{aligned} & (\lambda_p + \lambda_q)H' - (\frac{1}{c^2}(\lambda_p + \lambda_q) - \frac{1}{n}\lambda_p\lambda_q)\tau \\ = \; & \triangle^{D'} H' + a'(H') - \frac{n}{c^2}((a')^2 + \frac{1}{c^2})\tau + (trA_\zeta^2 + \frac{n}{c^2} - 1)H' \end{aligned} \tag{4.46}$$

dır. Burada τ vektör alanı $N^{2n}(c)$ nin normali, diğer terimler de teğetinde olduğundan

$$-\frac{n}{c^2}((a')^2 + \frac{1}{c^2}) = -(\frac{1}{c^2}(\lambda_p + \lambda_q) - \frac{1}{n}\lambda_p\lambda_q)$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} (a')^2 &= \frac{c^2}{n}(\frac{1}{c^2}(\lambda_p + \lambda_q) - \frac{1}{n}\lambda_p\lambda_q) - \frac{1}{c^2} \\ &= \frac{c^2}{n^2}\left(n(\frac{1}{c^2}(\lambda_p + \lambda_q) - \frac{1}{n}\lambda_p\lambda_q) - \frac{n^2}{c^4}\right) \\ &= \frac{c^2}{n^2}\left(\frac{n}{c^2}\lambda_p - \frac{n^2}{c^4} - \lambda_p\lambda_q + \frac{n}{c^2}\lambda_p\right) \\ &= \frac{c^2}{n^2}\left(\frac{n}{c^2}(\lambda_q - \frac{n}{c^2}) - \lambda_p(\lambda_q - \frac{n}{c^2})\right) \\ &= \left(\frac{c}{n}\right)^2\left(\frac{n}{c^2} - \lambda_p\right)\left(\lambda_q - \frac{n}{c^2}\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. (4.46) denklemini düzenlersek

$$(\lambda_p+\lambda_q)H^{'}=\triangle^{D^{'}}H^{'}+a'(H^{'})+(trA_\zeta^2+\frac{n}{c^2}-1)H^{'} \tag{4.47}$$

olur. $a'(H^{'})$ ve $H^{'}$ vektör alanları ξ karakteristik vektör alanına dik olduklarından

$$g(a'(H^{'}),\xi)=g(H^{'},\xi)=0$$

dir. Böylece

$$\eta(a'(H^{'}))=\eta(H^{'})=0$$

olur. (4.47) denkleminin her iki tarafının φ^2 altında görüntüsünü alırsak

$$-\varphi^2(\triangle^{D'}H^{'})+a'(H^{'})+(trA_\zeta^2+\frac{n}{c^2}-1)H^{'}=(\lambda_p+\lambda_q)H^{'} \tag{4.48}$$

bulunur.

Tersine (i), (ii) ve (iii) özelikleri sağlansın. (ii) den $tr(\overline{\nabla}A_H)=0$ dır. Bu eşitliği (4.44) de yazarsak

$$\triangle g(H,e_A)=g\left(\triangle^{D'}H^{'}+a'(H^{'})-\frac{n}{c^2}((a')+\frac{1}{c^2})\tau+(trA_\zeta^2+\frac{n}{c^2}-1)H^{'},e_A)\right)$$

olur. Ayrıca (i) den

$$-\frac{n}{c^2}((a')^2+\frac{1}{c^2})=-(\frac{1}{c^2}(\lambda_p+\lambda_q)-\frac{1}{n}\lambda_p\lambda_q)$$

ve

$$g(\varphi^2(\triangle^{D'}H^{'}),e_A)=g(\triangle^{D'}H^{'},e_A)$$

eşitliğini gözönüne alırsak (iii) den

$$\triangle g(H,e_A)=g\left((\lambda_p+\lambda_q)H^{'}-(\frac{1}{c^2}(\lambda_p+\lambda_q)-\frac{1}{n}\lambda_p\lambda_q)\tau,e_A\right)$$

eşitliğine ulaşırız. Burada $H=H^{'}-\frac{1}{c^2}\tau$ olduğundan

$$\triangle^2g(H,e_A)=(\lambda_p+\lambda_q)\triangle g(H,e_A)-\frac{1}{n}\lambda_p\lambda_q(\tau,e_A)$$

buluruz. Lemma 4.1 in (ii) şıkkından $\triangle g(x-x_0,e_A)=-ng(H,e_A)$ dır. Böylece

$$\triangle^2g(x-x_0,e_A)=-n\triangle g(H,e_A)$$

ve $\tau = -\varphi^2(x - x_0)$ olduğundan

$$-\frac{1}{n}\triangle^2 g(x - x_0, e_A) = -\frac{1}{n}(\lambda_p + \lambda_q)\triangle g(x - x_{0p}, e_A) - \frac{1}{n}\lambda_p\lambda_q g(-\varphi^2(x - x_0), e_A)$$

ve

$$\triangle^2 g(x - x_0, e_A) = (\lambda_p + \lambda_q)\triangle g(x - x_{op}, e_A) - \lambda_p\lambda_q g(x - x_0, e_A) \tag{4.49}$$

eşitliklerini elde ederiz. Spektral ayrışımını düşünürsek

$$g(x, e_A) = g(x_0, e_A) + \sum_{t=1}^{\infty} g(x, e_A)_t, \qquad A = 1, 2, ..., 2n \tag{4.50}$$

olur. Burada $g(x_0, e_A)$ sabit ve $\triangle g(x, e_A)_t = \lambda_t g(x, e_A)_t$ dir. Böylece (4.50) den

$$g(x - x_0, e_A) = \sum_{t=1}^{\infty} g(x, e_A)_t$$

bulunur. Her iki tarafa Laplace operatörünü uygularsak

$$\begin{aligned} \triangle g(x - x_0, e_A) &= \sum_{t=1}^{\infty} \triangle g(x, e_A)_t \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t g(x, e_A)_t \end{aligned}$$

ve

$$\triangle^2 g(x - x_0, e_A) = \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t^2 g(x, e_A)_t$$

elde edilir. (4.49) denkleminden

$$(\lambda_p + \lambda_q)\triangle g(x - x_{0p}, e_A) - \lambda_p\lambda_q g(x - x_0, e_A) = \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t^2 g(x, e_A)_t$$

ve

$$(\lambda_p + \lambda_q)\sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t g(x, e_A)_t - \lambda_p\lambda_q \sum_{t=1}^{\infty} g(x, e_A)_t = \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t^2 g(x, e_A)_t$$

olur. Böylece

$$\sum_{t=1}^{\infty} (\lambda_t^2 - (\lambda_p + \lambda_q)\lambda_t + \lambda_p\lambda_q) g(x, e_A)_t = 0 \tag{4.51}$$

elde edilir. Farzedelim ki, bazı $s \in A$ için $g(x, e_A)_s \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{t=1}^{\infty} (\lambda_t^2 - (\lambda_p + \lambda_q)\lambda_t + \lambda_p\lambda_q)(g(x, e_A)_t, g(x, e_A)_s) = 0$$

olur. Dolayısıyla

$$\lambda_t^2 - (\lambda_p + \lambda_q)\lambda_t + \lambda_p\lambda_q = 0, \ (g(x, e_A)_t) \neq 0$$

eşitliği elde edilir. (4.50) den bu denklemin sıfırdan farklı iki tane reel çözümü olduğu görülmektedir. Böylece M manifoldu 2-tipdendir. ■

4.3 $\mathbb{E}^{2n+1}(-3\varepsilon)$ Sasaki Uzayındaki Silindirde Yatan İntegral Alt Manifoldlar

Tanım 4.2 *γ bir N Riemann manifoldu üzerinde yay parametresi ile verilmiş, r. mertebeden ve γ boyunca ortonormal vektör alanları $E_1, E_2..., E_r$ olan Frenet eğrisi olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= E_1,\ \nabla_{\dot{\gamma}} E_1 = k_1 E_2,\ \nabla_{\dot{\gamma}} E_2 = -k_1 E_1 + k_2 E_3, ..., \\ \nabla_{\dot{\gamma} E_{r-1}} &= -k_{r-2} E_{r-2} + k_{r-1} E_r,\ \nabla_{\dot{\gamma}} E_r = -k_{r-1} E_{r-1} \end{aligned}$$

dir. Burada $k_1, k_2, ..., k_r$ ler s nin C^∞ fonksiyonlarıdır ve k_j ye j. eğrilik fonksiyonu denir. Şayet $k_1, k_2..., k_{r-1}$eğrilik fonksiyonları sabit ise (osculating) mertebesi 1 olan Frenet helis eğrisidir. Çemberler mertebesi 2 olan Frenet helis eğrileridir (Baikousis 1991).

Teorem 4.6 *M manifoldu $N^4(c)$ silindirinde yatan ve $\mathbb{E}^5(-3\varepsilon)$ Sasaki uzayının 2-tipli integral yüzeyi olsun. Böylece M yüzeyi*
i) Mertebesi 3 olan iki helis,
ii) Mertebesi 3 olan ve mertebesi 4 olan iki helis,
iii) $\mathbb{E}^5(-3\varepsilon)$ de bir geodezik ve mertebesi 3 olan bir helis,
iv) Bir çember ve mertebesi 3 olan bir helis,
eğrilerinin lokal olarak Riemann çarpımıdır (Baikousis 1991, Camcı 2007).

İspat. X_1 ve X_2, M manifoldunun lokal ortonormal vektör alanları olsun. Böylece

$$\xi_1 = \varphi X_1, \xi_2 = \varphi X_2, \xi$$

de ortonormal vektör alanlarını bir lokal alanlarının formudur. ξ_i ye bağlı Weingarten dönüşümünü A_i olarak tanımlayım $(i = 1, 2)$. X_1 ve X_2 taban vektörlerini öyle seçeriz ki, A_1 şekil öperatörüne (Weingarten dönüşümünü) karşılık gelen matris $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ şeklinde olur. Bu şekilde bir seçim genellikten bir şey kaybettirmez. Bu yüzden

$$\begin{aligned} A_1 X_1 &= \lambda_{11} X_1 + \lambda_{21} X_2 \\ A_1 X_2 &= \lambda_{12} X_1 + \lambda_{22} X_2 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\lambda_{11} &= g(A_1X_1, X_1) = a \\
\lambda_{21} &= A_{12} = g(A_1X_1, X_1) = g(A_1X_1, X_1) = 0 \\
\lambda_{22} &= g(A_1X_1, X_1) = d
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
A_2X_1 &= \mu_{11}X_1 + \mu_{21}X_2 \\
A_2X_2 &= \mu_{12}X_1 + \mu_{22}X_2
\end{aligned}$$

denklemleri yardımıyla, $A_2X_1 = A_1X_2$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\mu_{11} &= g(A_2X_1, X_1) \\
&= g(A_1X_2, X_1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\mu_{12} &= \mu_{21} = g(A_2X_1, X_2) \\
&= g(A_1X_2, X_2) \\
&= d
\end{aligned}$$

ve

$$\mu_{21} = g(A_2X_2, X_2) = b$$

dersek A_2 ye karşılık gelen matris $\begin{bmatrix} 0 & d \\ d & b \end{bmatrix}$ olur. Ayrıca biliyoruz ki $A_\xi = 0$ dır. Böylece M yüzeyinin ortalama eğrilik vektör alanı

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{t=1}^{3} tr(A_i)\xi_i \\
&= \frac{1}{2}(a+d)\xi_1 + \frac{1}{2}b\xi_2
\end{aligned}$$

dir. Burada a, b, d ler M manifoldu üzerinde tanımlanan reel değerli fonksiyonlardır. Ayrıca

$$\begin{aligned} K(X_1, X_2) &= \sum_{t=1}^{2}(g(A_iX_1, X_1)g(A_iX_2, X_2) - g(A_iX_1, X_2)^2) \\ &= (g(A_1X_1, X_1)g(A_1X_2, X_2) - g(A_1X_1, X_1)^2) \\ &\quad +(g(A_2X_1, X_1)g(A_2X_2, X_2) - g(A_2X_1, X_2)^2) \\ &= ad - d^2 \end{aligned}$$

olur. Burada M manifoldu düz (flat) olduğundan $K(X_1, X_2) = 0$ dır. Böylece

$$d(a - d) = 0 \tag{4.52}$$

elde edilir. Ayrıca $\omega^k(\nabla_X X_i) = \omega_i^k(X)$ olarak tanımlarsak $\omega^k(\nabla_{X_j} X_i) = \omega_i^k(X_j)$ olur. Böylece $\nabla_{X_j} X_i = \lambda_{ij}^p X_p$ dersek

$$\begin{aligned} \omega^k(\nabla_{X_j} X_i) &= \lambda_{ij}^p \omega^k(X_p) \\ &= \lambda_{ij}^p \delta_p^k \\ &= \lambda_{ij}^k \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\lambda_{ij}^k = \omega^k(\nabla_{X_j} X_i) = \omega_i^k(X_j)$ olur ve

$$\nabla_{X_j} X_i = \omega_i^k(X_j)X_k \quad (i, j, k = 1, 2)$$

eşitliğini elde ederiz.

$$\overline{\nabla}_X \varphi X_i = \varepsilon g(X, Y) + \varphi(\overline{\nabla}_X Y) - \eta(Y)X$$

eşitliğinde $X = X_j, Y = X_i$ yazarsak

$$\overline{\nabla}_{X_j} \varphi X_i = \varepsilon g(X_j, X_i) + \varphi(\overline{\nabla}_{X_j} X_i) - \eta(X_i)X_j$$

elde ederiz. M manifoldu integral alt manifoldu olduğundan $\eta(X_i) = 0$ dır. Ayrıca $\overline{\nabla}_{X_j} X_i = \nabla_{X_j} X_i + B(X_j, X_i)$ ve $\xi_i = \varphi X_i$ olduğundan

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{X_j} \xi_i &= \varepsilon \delta_{ij} \xi + \varphi(\nabla_{X_j} X_i + B(X_j, X_i)) \\ &= \varepsilon \delta_{ij} \xi + \varphi(\nabla_{X_j} X_i) + \varphi B(X_j, X_i) \end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
\varphi B(X_j, X_i) &= \sum_{k=1}^{2} \varphi(g(A_k X_i, X_j)\xi_k) \\
&= \sum_{k=1}^{2} g(A_k X_i, X_j)\varphi\xi_k \\
&= \sum_{k=1}^{2} g(A_i X_k, X_j)\varphi X_k \\
&= -\sum_{k=1}^{2} g(A_i X_j, X_k) X_k \\
&= -A_i X_j
\end{aligned}$$

ve $\nabla_{X_j} X_i = \omega_i^k(X_j) X_k$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{X_j}\xi_i &= \varepsilon\delta_{ij}\xi + \varphi(\omega_i^k(X_k) - A_i X_j \\
&= -A_i X_j + \varepsilon\delta_{ij}\xi + \omega_i^k(X_j)\varphi(X_k) \\
&= -A_i X_j + \varepsilon\delta_{ij}\xi + \omega_i^k(X_j)\xi_k
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan biliyoruz ki, Weingarten formülünden $\overline{\nabla}_{Xj}\xi_i = -A_i X_j + D_{X_j}\xi_i$ dir. Böylece

$$D_{X_j}\xi_i = \varepsilon\delta_{ij}\xi + \omega_i^k(X_j)\xi_k \tag{4.53}$$

elde edilir. Ayrıca $\nabla_{X_j} X_1 = \omega_1^1(X_j) X_1 + \omega_1^2(X_j) X_2$ ve $\nabla_{X_j} X_2 = \omega_2^1(X_j) X_1 + \omega_2^2(X_j) X_2$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\omega_1^1(X_j) &= g(\nabla_{X_j} X_1, X_1) \\
\omega_1^2(X_j) &= g(\nabla_{X_j} X_1, X_2) \\
\omega_2^1(X_j) &= g(\nabla_{X_j} X_2, X_1) \\
\omega_2^2(X_j) &= g(\nabla_{X_j} X_2, X_2)
\end{aligned}$$

olur. $g(X_1, X_1) = 1$ ve $g(X_2, X_2) = 1$ olduğundan

$$\omega_1^1(X_j) = g(\nabla_{X_j} X_1, X_1) = g(\nabla_{X_j} X_2, X_2) = \omega_2^2(X_j) = 0$$

dır. $g(X_1, X_1) = 0$ ise $g(\nabla_{X_j} X_1, X_2) + g(X_1, \nabla_{X_j} X_2) = 0$ olduğundan $\omega_1^2(X_j) + \omega_2^1(X_j) = 0$ elde edilir. Böylece

$$D_{X_j}\xi_1 = \varepsilon\delta_{1j}\xi + \omega_1^1(X_j)\xi_1 + \omega_1^2(X_j)\xi_2 \tag{4.54}$$

$$= \omega_1^2(X_j)\xi_2 + \varepsilon\delta_{ij}\xi$$

ve

$$\begin{aligned} D_{X_j}\xi_2 &= \varepsilon\delta_{2j}\xi + \omega_2^1(X_j)\xi_1 + \omega_2^2(X_j)\xi_2 \\ &= \omega_2^1(X_j)\xi_1 + \varepsilon\delta_{2j}\xi \\ &= -\omega_1^2(X_j)\xi_1 + \varepsilon\delta_{2j}\xi \end{aligned} \tag{4.55}$$

eşitliklerini elde ederiz. (4.52) eşitliğini irdelersek

1.Durum : $d = 0$ ise bu durumda $A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ elde ederiz.

$$\begin{aligned} R_{XY}Z &= \frac{c+3\varepsilon}{4}(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y)) \\ &+\frac{c-\varepsilon}{4}\begin{pmatrix} \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi \\ +\Phi(Z,Y)\varphi X - \Phi(Z,X)\varphi Y + 2\Phi(X,Y)\varphi Z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eşitliğinde $c = -3\varepsilon$ olduğundan bu denklem

$$R_{XY}Z = -\varepsilon\begin{pmatrix} \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi \\ +\Phi(Z,Y)\varphi X - \Phi(Z,X)\varphi Y + 2\Phi(X,Y)\varphi Z \end{pmatrix}$$

olarak yazabilir. Eğer $X = X_1, Y = X_2, Z = \xi_i$ alırsak

$$R_{X_1X_2}\xi_i = -\varepsilon\begin{pmatrix} \eta(X_1)\eta(\xi_i)X_2 - \eta(X_2)\eta(\xi_i)X_1 + g(X_1,\xi_i)\eta(X_2)\xi - g(X_2,\xi_i)\eta(X_1)\xi \\ +\Phi(\xi_i,X_2)\varphi X_1 - \Phi(\xi_i,X_1)\varphi X_2 + 2\varphi(X_1,X_2)\varphi\xi_i \end{pmatrix}$$

ve

$$R_{X_1X_2}\xi_i = -\varepsilon(\Phi(\xi_i,X_2)\varphi X_1 - \Phi(\xi_i,X_1)\varphi X_2 + 2\Phi(X_1,X_2)\varphi\xi_i)$$

elde edilir. Ayrıca biliyoruz ki $\Phi(X,Y) = \varepsilon g(X,\varphi Y)$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} \Phi(X_1,X_2) &= \varepsilon g(X_1,\varphi X_2) \\ &= \varepsilon g(X_1,\xi_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$R_{X_1X_2}\xi_i = -\varepsilon(\Phi(\xi_i,X_2)\varphi X_1 - \Phi(\xi_i,X_1)\varphi X_2) \tag{4.56}$$

eşitliğine ulaşırız. Diğer taraftan ,

$$R_{X_1X_2}\xi_i = \overline{\nabla}_{X_1}\overline{\nabla}_{X_2}\xi_i - \overline{\nabla}_{X_2}\overline{\nabla}_{X_1}\xi_i - \overline{\nabla}_{[X_1,X_2]}\xi_i \tag{4.57}$$

dir. Burada Weingarten formülünden $\overline{\nabla}_{X_2}\xi_i = -A_iX_2 + D_{X_2}\xi_i$ ve

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{X_1}\overline{\nabla}_{X_2}\xi_i &= -\overline{\nabla}_{X_!}A_iX_2 + \overline{\nabla}_{X_1}D_{X_2}\xi_i) \\ &= -(\nabla_{X_1}A_iX_2 + B(X_1, A_iX_2)) - A_{D_{X_2}\xi_i}X_1 + D_{X_1}\overline{D}_{X_2\xi_i} \end{aligned} \tag{4.58}$$

ve

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{X_2}\overline{\nabla}_{X_1}\xi_i &= -(\nabla_{X_2}A_iX_1 + B(X_2,A_iX_1)) \\ &\quad -A_{D_{X_1}\xi_i}X_2 + D_{X_2}D_{X_1}\xi_i \end{aligned} \tag{4.59}$$

dir. Ayrıca

$$[X_1, X_2] = \nabla_{X_1}X_2 - \nabla_{X_2}X_1$$

olduğundan Weingarten formülünden

$$\overline{\nabla}_{[X_1,X_2]}\xi_i = A_i(\nabla_{X_1}X_2) - A_i(\nabla_{X_2}X_1) + D_{[X_1,X_2]}\xi_i \tag{4.60}$$

elde edilir. (4.58), (4.59) ve (4.60) eşitliklerini (4.57) de yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned} R_{X_1X_2}\xi &= -(\nabla_{X_1}A_i)X_2 + (\nabla_{X_2}A_i)X_1 - A_{D_{X_2}\xi_i}X_1 + A_{D_{X_1}\xi_i}X_2 \\ &\quad +B(X_2, A_iX_1) - B(X_1, A_iX_2) + R^D_{X_1X_2}\xi_i \end{aligned} \tag{4.61}$$

sonucuna ulaşırız. Burada

$$\begin{aligned} I &: -(\nabla_{X_1}A_i)X_2 + (\nabla_{X_2}A_i)X_1 - A_{D_{X_2}\xi_i}X_1 + A_{D_{X_1}\xi_i}X_2 \\ II &: B(X_2, A_iX_1) - B(X_1, A_iX_2) + R^D_{X_1X_2}\xi_i \\ III &: -\varepsilon\Phi(\xi_i, X_2)\varphi X_1 + \varepsilon\Phi(\xi_i, X_1)\varphi X_2 \end{aligned}$$

dersek (4.56) ve (4.61) eşitlikleri yardımıyla

$$I + II = III$$

olur. Burada I eşitliği M manifoldunun teğet uzayında ve II ve III eşitlikleri de M manifoldunun normal uzayında olduğundan ; $II = III$ ve

$$-(\nabla_{X_1}A_i)X_2 + (\nabla_{X_2}A_i)X_1 - A_{D_{X_2}\xi_i}X_1 + A_{D_{X_1}\xi_i}X_2 = 0 \tag{4.62}$$

dır. (4.62) de $i=1$ için

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{X_1}A_1(X_2) - A_1(\nabla_{X_1}X_2) - \nabla_{X_2}A_1(X_1) \\ &\quad + A_1(\nabla_{X_2}X_1) + A_{D_{X_2}\xi_1}X_1 - A_{D_{X_1}\xi_1}X_2 \end{aligned} \tag{4.63}$$

dir. Burada $A_1(X_1) = aX_1$, $A_1(X_2) = 0 = A_2(X_1)$ ve $A_2(X_2) = bX_2$ dır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \nabla_{X_1}X_2 &= \omega_2^1(X_1)X_1 + \omega_2^2(X_1)X_2 = \omega_2^1(X_1)X_1 \\ \nabla_{X_2}X_1 &= \omega_1^1(X_2)X_1 + \omega_1^2(X_2)X_2 = \omega_1^2(X_2)X_2 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} A_1(\nabla_{X_1}X_2) &= A_1(\omega_2^1(X_2)X_1) = a\omega_2^1(X_1)X_1 \\ A_1(\nabla_{X_2}X_1) &= A_1(\omega_1^2(X_2)X_2) = 0 \\ \nabla_{X_1}A_1(X_2) &= 0 \\ \nabla_{X_2}A_1(X_1) &= \nabla_{X_2}aX_1 = a\nabla_{X_2}X_1 + X_2(a)X_1 \\ &= a\omega_1^2(X_2)X_2 + X_2(a)X_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu işlemleri devam ettirirsek

$$\begin{aligned} A_{D_{X_2}\xi_1}X_1 &= A_{\omega_1^2(X_2)\xi_2 + \varepsilon\delta_{12}\xi}X_1 \\ &= \omega_1^2(X_2)A_2(X_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} A_{D_{X_1}\xi_1}X_2 &= A_{\omega_1^2(X_1)\xi_2 + \varepsilon\delta_{11}\xi}X_2 \\ &= \omega_1^2(X_1)A_2X_2 + \varepsilon A_\xi X_2 \\ &= b\omega_1^2(X_1)X_2 \end{aligned}$$

olur. Böylece (4.63) den

$$(a\omega_2^1(X_1) + X_2(a))X_1 + (a\omega_1^2(X_2) + b\omega_1^2(X_1))X_2 = 0$$

elde edilir. $\{X_1, X_2\}$ lineer bağımsız ve $\omega_2^1(X_1) = -\omega_1^2(X_1)$ olduğundan

$$\begin{aligned} -a\omega_1^2(X_1) + X_2(a) &= 0 \\ a\omega_1^2(X_2) + b\omega_1^2(X_1) &= 0 \end{aligned} \tag{4.64}$$

sonucuna ulaşırız. $i = 2$ için

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{X_1} A_2(X_2) - A_2(\nabla_{X_1} X_2) - \nabla_{X_2} A_2(X_1) + A_2(\nabla_{X_2} X_1) \\ &\quad + A_{D_{X_2}\xi_2} X_1 - A_{D_{X_1}\xi_2} X_2 \end{aligned} \tag{4.65}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} A_2(\nabla_{X_1} X_2) &= 0 \\ A_1(\nabla_{X_2} X_1) &= b\omega_1^2(X_2) X_2 \\ \nabla_{X_1} A_2(X_2) &= b\omega_2^1(X_1) X_1 + X_1(b) X_2 \\ \nabla_{X_2} A_2(X_1) &= 0 \\ A_{D_{X_2}\xi_2} X_1 &= -a\omega_1^2(X_2) X_1 \\ A_{D_{X_1}\xi_2} X_2 &= 0 \end{aligned}$$

dir. Bu eşitlikleri(4.65) de yerlerine yazarsak

$$(-a\omega_1^2(X_2) + b\omega_2^1(X_1))X_1 + (b\omega_1^2(X_2) + X_1(b))X_2 = 0$$

ve $\{X_1, X_2\}$ lineer bağımsız olduğundan

$$\begin{aligned} -a\omega_1^2(X_2) + b\omega_2^1(X_1) &= 0 \\ b\omega_1^2(X_2) + X_1(b) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\omega_1^2(X_2) = -\omega_2^1(X_2)$ ve $\omega_1^2(X_1) = -\omega_2^1(X_1)$ olduğundan

$$\begin{aligned} -a\omega_1^2(X_2) + b\omega_2^1(X_1) &= a\omega_2^1(X_2) + b\omega_2^1(X_1) \\ &= -a\omega_1^2(X_2) - b\omega_1^2(X_1) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} a\omega_1^2(X_2) + b\omega_1^2(X_1) &= 0 \\ b\omega_1^2(X_2) + X_1(b) &= 0 \end{aligned} \tag{4.66}$$

elde edilir. (4.64) ve (4.66) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} i) - a\omega_1^2(X_1) + X_2(a) &= 0 \\ ii) \quad b\omega_1^2(X_2) + X_1(b) &= 0 \\ iii) \quad b\omega_1^2(X_1) + a\omega_1^2(X_2) &= 0 \end{aligned} \tag{4.67}$$

bağıntılarını elde ederiz. M manifoldu $N^4(c)$ silindirinde yatan ve $\mathbb{E}^5(-\varepsilon)$ Sasaki uzayının 2-tipten integral yüzeyi olduğundan $tr\overline{\nabla}A_H = 0$ dır. (4.31) da $m = 2$ alıp açarsak

$$\begin{aligned} tr\overline{\nabla}A_H &= A_{D_{X_1}H}X_1 + A_{D_{X_2}H}X_2 + \nabla_{X_1}A_H(X_1) \\ &\quad +\nabla_{X_2}A_H(X_2) - A_H(\nabla_{X_1}X_1) - A_H(\nabla_{X_2}X_2) \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada $H = \frac{1}{2}a\xi_1 + \frac{1}{2}b\xi_2$ ve $\nabla_{X_1}X_1 = \omega_1^2(X_1)X_2$, $\nabla_{X_2}X_2 = \omega_2^1(X_2)X_1$ olduğundan

$$\begin{aligned} A_{D_{X_1}H}X_1 &= \frac{1}{2}a\left[X_1(a) - b\omega_1^2(X_1)\right]X_1 \\ A_{D_{X_2}H}X_2 &= \frac{1}{2}b\left[X_2(b) + a\omega_1^2(X_2)\right]X_2 \\ \nabla_{X_1}A_H(X_1) &= \frac{1}{2}2aX_1(a)X_1 + \frac{1}{2}a^2\omega_1^2(X_1)X_2 \\ \nabla_{X_2}A_H(X_2) &= \frac{1}{2}2bX_2(b)X_2 - \frac{1}{2}b^2\omega_1^2(X_2)X_1 \\ A_H(\nabla_{X_1}X_1) &= \frac{1}{2}b^2\omega_1^2(X_1)X_2 \\ A_H(\nabla_{X_2}X_2) &= -\frac{1}{2}a^2\omega_1^2(X_2)X_1 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} tr(\overline{\nabla}A_H) &= \frac{1}{2}\left[aX_1(a) - ab\omega_1^2(X_1) + 2aX_1(a) - b^2\omega_1^2(X_2) + a^2\omega_1^2(X_2)\right]X_1 \\ &\quad +\frac{1}{2}\left[ab\omega_1^2(X_2) + bX_2(b) + 2bX_2(b) - b^2\omega_1^2(X_1) + a^2\omega_1^2(X_1)\right]X_2 \end{aligned}$$

olur. Burada $\{X_1, X_2\}$ lineer bağımsız ve $tr(\overline{\nabla}A_H) = 0$ olduğundan

$$\left.\begin{aligned} &i)\ ab\omega_1^2(X_1) - (a^2 - b^2)\omega_1^2(X_2) - 3aX_1(a) = 0, \\ &ii)\ (a^2 - b^2)\omega_1^2(X_1) + ab\omega_1^2(X_2) + 3bX_2(b) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.68)$$

eşitliklerini elde ederiz. Ortalama eğrilik vektör alanı sabit olduğundan

$$a^2 + b^2 = \lambda_0^2 \text{ (sbt)} \qquad (4.69)$$

dir. Kabul edelim ki, $\{X_1, X_2\}$ bazının belirttiği koordinat komşuluğu $\{x, y\}$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned} a, b \quad &: \quad M \longrightarrow \mathbb{E} \\ (x, y) \quad &\longrightarrow \quad a(x, y), b(x, y) \end{aligned}$$

şeklinde fonksiyonlardır. (4.69) dan

$$a(x,y) = \lambda_0 \cos f(x,y),\ b(x,y) = \lambda_0 \sin f(x,y) \tag{4.70}$$

olarak düşünebiliriz. (4.67) den $b\omega_1^2(X_1) = -a\omega_1^2(X_2)$ ve $\omega_1^2(X_2) = -\frac{1}{b}X_1(b)$ eşitliklerini elde ederiz. Bu eşitlikleri (4.68) denkleminin (i) şıkkında yerlerine yazarsak

$$(b^2 - 2a^2)X_1(b) + 3abX_1(a) = 0 \tag{4.71}$$

elde ederiz. Benzer şekilde (4.68) denkleminin (ii) şıkkından,

$$(a^2 - 2b^2)X_2(b) + 3abX_2(b) = 0 \tag{4.72}$$

sonucuna ulaşırız. (4.70) ve (4.71) eşitliklerinden

$$-2\lambda_0^3 f_x \cos f = 0$$

ve böylece $f_x = 0$ çıkar. (4.71) ve (4.72) den

$$2\lambda_0^3 f_y \cos f = 0$$

ve $f_y = 0$ olur. $f_x = f_y = 0$ ise f sabit dolayısıyla a ve b de sabittir. Ayrıca a ve b sabit ise

$$\begin{aligned} \omega_1^2(X_1) &= \frac{1}{a}X_2(a) = 0 \\ \omega_1^2(X_2) &= -\frac{1}{b}X_1(b) = 0 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{X_1}X_1 &= a\xi_1\ ,\ \overline{\nabla}_{X_1}\xi_1 = -aX_1 + \varepsilon\xi\ ,\ \overline{\nabla}_{X_i}\xi = -\xi_i\ , \\ \overline{\nabla}_{X_2}X_2 &= b\xi_2\ ,\ \overline{\nabla}_{X_2}\xi_2 = -bX_2 + \varepsilon\xi \end{aligned}$$

eşitliklerini elde ederiz. Çünkü,

$$\overline{\nabla}_{X_1}X_1 = \nabla_{X_1}X_1 + B(X_1, X_1)$$

dir. Burada

$$\nabla_{X_1}X_1 = \nabla_{X_1}X_2 = \omega_1^1(X_1)X_1 + \omega_1^2(X_1)X_2 = 0$$

ve

$$B(X_1, X_1) = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \lambda_3\xi$$

dersek $\lambda_1 = g(\overline{\nabla}_{X_1}X_1, \xi_1)$, $\lambda_2 = g(\overline{\nabla}_{X_1}X_1, \xi_2)$ ve $\lambda_3 = g(\overline{\nabla}_{X_1}X_1, \xi)$ olur. Ayrıca $g(X_1, \xi_1) = 0$ ise $g(\overline{\nabla}_{X_1}X_1, \xi_1) + g(X_1, \overline{\nabla}_{X_1}\xi_1) = 0$ ve böylece $A_1X_1 = -\overline{\nabla}_{X_1}\xi_1$ olduğundan

$$\lambda_1 = g(\overline{\nabla}_{X_1}X_1, \xi_1) = g(A_1X_1, X_1) = a$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= g(\overline{\nabla}_{X_1}X_1, \xi_2) = g(A_2X_1, X_1) = 0 \\ \lambda_3 &= g(\overline{\nabla}_{X_1}X_1, \xi) = g(A_\xi X_1, X_1) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu bulduklarımızı yerlerine yazarsak $\overline{\nabla}_{X_1}X_1 = a\xi_1$ sonucuna ulaşırız. Diğer taraftan Weingarten formülünden

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{X_1}\xi_1 &= -A_1X_1 + D_{X_1}\xi_1 \\ &= -aX_1 + \omega_1^2(X_1)\xi_2 + \varepsilon\delta_{11}\xi \\ &= -aX_1 + \varepsilon\xi \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde diğerlerinin de ispatları yapılabilir. Şimdi eğrimizin teğet vektör alanı $X_1 = E_1$ olsun. Böylece

$$\overline{\nabla}_{E_1}E_1 = a\xi_1 = k_1E_2$$

olur. Burada şayet $a > 0$ ise $k_1 = a$ ve $E_2 = \xi_1$ dir. Eğer $a < 0$ ise $k_1 = -a$ ve $E_2 = -\xi_1$ dir. Ayrıca biliyoruz ki, $a = 0$ ise X_1-eğrisi $\mathbb{E}^5(-3\varepsilon)$ uzayında bir geodezik eğridir. Farzedelim ki, $a > 0$ olsun. Böylece

$$\overline{\nabla}_{E_1}E_1 = aE_2,\ \overline{\nabla}_{E_1}E_2 = -aE_1 + \varepsilon\xi = -k_1E_1 + k_2E_3$$

olur. Bu eşitlikten $k_2 = \varepsilon$ ve $E_3 = \xi$ dır. Dolayısıyla $k_3 = 0$ elde edilir ve X_1 eğrisinin 3. mertebeden helis olduğu görülür. Benzer işlemleri yaparsak $a < 0$ durumu içinde aynı sonucu elde ederiz. $X_2 = E_1$ seçersek benzer işlemler sonucunda X_2 eğrisinin $\mathbb{E}^5(-3\varepsilon)$ uzayında 3. mertebeden helis olduğu görülür. Aynı şekilde $b = 0$ durumunda X_2-eğrisinin $\mathbb{E}^5(-3\varepsilon)$ uzayında bir geodeziktir. Böylece (i) ve (iii) şıklarını elde etmiş oluruz.

2.Durum: Çarpımın sıfır olabilmesi için $a = d$ olabilir. Bu durumda şekil operatörleri

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & b \end{bmatrix}$$

dir. Böylece

$$A_1X_1 = aX_1,\ A_1X_2 = aX_2\ ,\ \ A_2X_1 = aX_2 \text{ ve } A_2X_2 = aX_1 + bX_2$$

olur. Ayrıca

$$\nabla_{X_j}X_i = \omega_i^k(X_j)X_k \text{ ve } \omega_2^2(X_1) = \omega_1^1(X_2) = 0$$

olduğundan

$$\nabla_{X_1}X_2 = \omega_2^1(X_1)X_1,\ \nabla_{X_2}X_1 = \omega_1^2(X_2)X_2$$

dir. İşlemleri bu şekilde devam ettirirsek

$$\begin{aligned} A_1(\nabla_{X_1}X_2) &= \omega_2^1(X_1)A_1 = a\omega_2^1(X_1)X_1 \\ A_1(\nabla_{X_2}X_1) &= \omega_1^2(X_2)A_1X_2 = a\omega_1^2(X_2)X_2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \nabla_{X_1}A_1(X_2) &= X_1(a)X_2 + a\nabla_{X_1}X_2 \\ &= X_1(a)X_2 + a\omega_2^1(X_1)X_1 \\ \nabla_{X_2}A_1(X_1) &= X_2(a)X_1 + a\nabla_{X_2}X_1 \\ &= X_2(a)X_1 + a\omega_1^2(X_2)X_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.54) de $j = 2$ için $D_{X_2}\xi_1 = \omega_1^2(X_2)\xi_2$ olur. Böylece

$$A_{D_{X_2}\xi_1}X_1 = \omega_1^2(X_2)A_2X_1 = a\omega_1^2(X_2)X_2$$

benzer şekilde

$$D_{X_1}\xi_1 = \omega_1^2(X_1)\xi_2 + \varepsilon\xi$$

ve

$$A_{D_{X_1}\xi_1}X_2 = \omega_1^2(X_2)A_2X_2 = \omega_1^2(X_1)(aX_1 + bX_2)$$

olur. Bulduğumuz değerleri (4.63) yerlerine yazıp düzenlersek

$$(-X_2(a) - a\omega_1^2(X_1))X_1 + (X_1(a) + a\omega_1^2(X_2) - b\omega_1^2(X_1))X_2 = 0$$

elde edilir. $\{X_1, X_2\}$ lineer bağımsız olduğundan

$$\begin{aligned} a\omega_1^2(X_1) + X_2(a) &= 0 \\ b\omega_1^2(X_1) - a\omega_1^2(X_2) - X_1(a) &= 0 \end{aligned} \tag{4.73}$$

eşitlikleri bulunur. Benzer şekilde $i = 2$ için

$$\begin{aligned} A_2(\nabla_{X_1} X_2) &= a\omega_2^1(X_1)X_2 \\ A_1(\nabla_{X_2} X_1) &= \omega_1^2(X_2)(aX_1 + bX_2) \\ \nabla_{X_1} A_2(X_2) &= X_1(a)X_1 + X_1(b)X_2 + a\omega_1^2(X_1)X_2 + b\omega_2^1(X_1)X_1 \\ \nabla_{X_2} A_2(X_1) &= X_2(a)X_2 + a\omega_2^1(X_2)X_1 \\ A_{D_{X_2}\xi_2} X_1 &= -a\omega_1^2(X_2)X_1 \\ A_{D_{X_1}\xi_2} X_2 &= -a\omega_1^2(X_1)X_2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece (4.65) den

$$(b\omega_2^1(X_1) + a\omega_1^2(X_2) + X_1(a))X_1 + (3a\omega_1^2(X_1) + b\omega_1^2(X_2) + X_1(b) - X_2(a))X_2 = 0$$

benzer şekilde $\{X_1, X_2\}$ lineer bağımsız ve $\omega_2^1(X_1) = -\omega_1^2(X_1)$ olduğundan

$$\left.\begin{array}{l} i) : a\omega_1^2(X_1) + X_2(a) = 0, \\ ii) : b\omega_1^2(X_1) - a\omega_1^2(X_2) - X_1(a) = 0, \\ iii) : 3a\omega_1^2(X_1) + b\omega_1^2(X_2) + X_1(b) - X_2(a) = 0 \end{array}\right\} \tag{4.74}$$

eşitliklerini elde ederiz. Diğer taraftan $H = a\xi_1 + \frac{1}{2}b\xi_2$ olduğundan

$$\begin{aligned} D_{X_1} H &= D_{X_1}(a\xi_1 + \frac{1}{2}b\xi_2) \\ &= X_1(a)\xi_1 + aD_{X_1}\xi_1 + \frac{1}{2}X_1(b)\xi_2 + \frac{1}{2}bD_{X_1}\xi_2 \\ &= X_1(a)\xi_1 + a(\omega_1^2(X_1)\xi_2 + \varepsilon\xi) + \frac{1}{2}X_1(b)\xi_2 - \frac{1}{2}b\omega_1^2(X_1)\xi_1 \\ &= \left(X_1(a) - \frac{1}{2}b\omega_1^2(X_1)\right)\xi_1 + \left(a\omega_1^2(X_1) + \frac{1}{2}X_1(b)\right)\xi_2 + \varepsilon a\xi \end{aligned}$$

benzer şekilde

$$D_{X_2}H = \left(X_2(a) - \frac{1}{2}b\omega_1^2(X_2)\right)\xi_1 + \left(\frac{1}{2}X_2(b) + a\omega_1^2(X_2)\right)\xi_2 + \frac{1}{2}\varepsilon b\xi$$

olur. İşlemleri 1. Durumdaki gibi yaparsak

$$\begin{aligned}
A_{D_{X_1}H}X_1 &= \left(aX_1(a) - \frac{1}{2}ab\omega_1^2(X_1)\right)X_1 + \left(a^2\omega_1^2(X_1) + \frac{1}{2}aX_1(b)\right)X_2 \\
A_{D_{X_2}H}X_2 &= \left(\frac{1}{2}aX_2(b) + a^2\omega_1^2(X_2)\right)X_1 \\
&\quad + \left(aX_2(a) + \frac{1}{2}bX_2(b) + \frac{1}{2}ab\omega_1^2(X_2)\right)X_2 \\
\nabla_{X_1}A_H(X_1) &= \left(2aX_1(a) + \frac{1}{2}ab\omega_2^1(X_1)\right)X_1 + \left(a^2\omega_1^2(X_1) + \frac{1}{2}X_1(ab)\right)X_2 \\
\nabla_{X_2}A_H(X_2) &= \left((a^2 + \frac{1}{2}b^2)\omega_2^1(X_2) + \frac{1}{2}X_2(ab)\right)X_1 \\
&\quad + \left(2aX_1(a) + bX_1(b) + \frac{1}{2}ab\omega_1^2(X_2)\right)X_1 \\
A_H(\nabla_{X_1}X_1) &= \frac{1}{2}ab\omega_1^2(X_1)X_1 + \left(a^2 + \frac{1}{2}b^2\right)\omega_1^2(X_1)X_2 \\
A_H(\nabla_{X_2}X_2) &= a^2\omega_2^1(X_2)X_1 + \frac{1}{2}ab\omega_2^1(X_2)X_2
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
tr(\overline{\nabla}A_H) &= \left[\begin{array}{c} -\frac{3}{2}ab\omega_1^2(X_1) + \left(a^2 - \frac{1}{2}b^2\right)\omega_1^2(X_2) + 3aX_2(a) \\ +aX_2(b) + \frac{1}{2}bX_2(a) \end{array}\right]X_1 \\
&\quad + \left[\begin{array}{c} \left(a^2 - \frac{1}{2}b^2\right)\omega_1^2(X_1) + \frac{3}{2}ab\omega_1^2(X_2) + 3aX_2(a) + \frac{3}{2}bX_2(b) \\ +aX_1(b) + \frac{1}{2}bX_1(a) \end{array}\right]X_2
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $tr(\overline{\nabla}A_H) = 0$ ve $\{X_1, X_2\}$ lineer bağımsız olduğundan

$$0 = -\frac{3}{2}ab\omega_1^2(X_1) + \left(a^2 - \frac{1}{2}b^2\right)\omega_1^2(X_2) + 3aX_2(a) + aX_2(b) + \frac{1}{2}bX_2(a) \quad (4.75)$$

$$0 = \left(a^2 - \frac{1}{2}b^2\right)\omega_1^2(X_1) + \frac{3}{2}ab\omega_1^2(X_2) + 3aX_2(a) + \frac{3}{2}bX_2(b) + aX_1(b) + \frac{1}{2}bX_1(a)$$

eşitliklerine ulaşırız. Ayrıca ortalama eğrilik vektör alanı sabit olduğundan

$$a^2 + \frac{1}{4}b^2 = \lambda_0^2(sb) \quad (4.76)$$

dir. Böylece

$$a(x,y) = \lambda_0 \cos f(x,y),\ a(x,y) = 2\lambda_0 \sin f(x,y)$$

diyebiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} X_1(a) &= -\lambda_0 f_{,1} \sin f(x,y),\ X_1(b) = 2\lambda_0 f_{,1} \cos(x,y) \\ X_2(a) &= -\lambda_0 f_{,2} \sin f(x,y),\ X_1(b) = 2\lambda_0 f_{,2} \cos(x,y) \end{aligned}$$

olur. (4.74) (i) den $a\omega_1^2(X_1) = -X_2(a)$ ve (4.74) (ii) den

$$\omega_1^2(X_2) = -\frac{b}{a}X_2(a) - \frac{1}{a}X_1(a)$$

olur. (4.74) (iii) den ise

$$(4a^2 + b^2)X_2(a) + a(4a^2 + b^2)X_1(a) + 2a^3 X_2(b) = 0 \tag{4.77}$$

elde edilir. (4.75) birinci eşitliğinden

$$b(2a^2 + b^2)X_2(a) - abX_1(a) + \frac{3}{2}abX_2(b) + a^2 X_1(b) = 0 \tag{4.78}$$

ve (4.75) denklemindeki ikinci eşitlikten

$$(2a^2 - b^2)X_2(a) - abX_1(a) + \frac{3}{2}abX_2(b) + a^2 X_1(b) = 0 \tag{4.79}$$

sonucuna ulaşırız. (4.77) veya (4.78) eşitliklerinden

$$2f_{,2} \sin f + f_{,1} \cos f = 0$$

ve (4.78) denkleminden

$$f_{,2} \cos^2 f = 0$$

elde edilir. Son iki denklemi çözersek $f_{,1} = f_{,2} = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla a ve b sabit ve $\omega_1^2 = 0$ olur. Diğer taraftan $d = 0$ durumundakine benzer işlemleri yaparsak

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{X_1} X_1 &= a\xi_1,\ \overline{\nabla}_{X_1}\xi_1 = -aX_1 + \varepsilon\xi,\ \overline{\nabla}_{X_i}\xi = -\xi_i, \\ \overline{\nabla}_{X_2} X_2 &= a\xi_1 + b\xi_2,\ \overline{\nabla}_{X_2}\xi_1 = -aX_2,\ \overline{\nabla}_{X_2}\xi_2 = -aX_1 - bX_2 + \varepsilon\xi \end{aligned} \tag{4.80}$$

sonucuna ulaşırız. Kabul edelim ki, $X_1 = E_1$ olsun. Böylece (4.80) den

$$\overline{\nabla}_{E_1} E_1 = a\xi_1 = k_1 E_2$$

olur. Burada şayet $a > 0$ ise $k_1 = a$ ve $E_2 = \xi_1$ dir. Eğer $a < 0$ ise $k_1 = -a$ ve $E_2 = -\xi_1$ dir. Ayrıca biliyoruz ki $a = 0$ ise X_1- eğrisi $\mathbb{E}^5(-3\varepsilon)$ nun bir geodezik eğrisidir. Farzedelim ki $a > 0$ olsun. Böylece

$$\overline{\nabla}_{E_1}E_1 = aE_2,\ \overline{\nabla}_{E_1}E_2 = -aE_1 + \varepsilon\xi = -k_1E_1 + k_2E_3$$

olur. Bu eşitlikten

$$k_2 = \varepsilon,\ E_3 = \xi \text{ ve } \overline{\nabla}_{E_1}E_3 = -\xi_1 = -k_2E_2$$

dir. Dolayısıyla $k_3 = 0$ olur. Tanım 4.2 den X_1- eğrisinin $\mathbb{E}^5(-3\varepsilon)$ uzayında 3. mertebeden helis olduğu görülür. Benzer işlemleri yaparsak $a < 0$ durumu için de aynı sonucu elde ederiz. Şayet $X_2 = E_1$ dersek (4.80) denkleminden

$$\overline{\nabla}_{E_1}E_1 = a\xi_1 + b\xi_2 = k_1E_2$$

olur. Böylece

$$E_2 = \frac{a\xi_1 + b\xi_2}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad , \qquad k_1 = \sqrt{a^2+b^2}$$

olduğunu görürüz. Burada a ve b sabit olduğundan $\sqrt{a^2+b^2}$ de sabittir. Böylece

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{E_1}E_2 &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\overline{\nabla}_{E_1}\xi_2 + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\overline{\nabla}_{X_1}\xi_2 \\
&= \frac{-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}X_2 + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}(-aX_1 - bX_2 + \varepsilon\xi) \\
&= \frac{-(a^2+b^2)}{\sqrt{a^2+b^2}}X_2 + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}(-aX_1 + \varepsilon\xi)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada şayet $b > 0$ ise

$$E_3 = \frac{-aX_1 + \varepsilon\xi}{\sqrt{a^2+1}},\quad k_2 = \frac{b\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

eşitliğine ulaşılır. Şayet $b < 0$ ise

$$E_3 = \frac{-aX_1 + \varepsilon\xi}{\sqrt{a^2+1}},\quad k_2 = -\frac{b\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

dir. Burada $b = 0$ ise $k_2 = 0$ olacağından X_2-eğrisi bir çember olacaktır. Şayet $b > 0$ ise (4.80) den

$$\overline{\nabla}_{E_1}E_3 = -\sqrt{a^2+1}\xi_2 = -k_2E_2 + k_3E_4$$

elde edilir. Gerekli işlemleri yaparsak $a > 0$ ise

$$E_4 = \frac{b\xi_1 - a\xi_2}{\sqrt{a^2+b^2}},\ k_3 = \frac{a\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

veya $a < 0$ ise

$$E_4 = -\frac{b\xi_1 - a\xi_2}{\sqrt{a^2+b^2}},\ k_3 = -\frac{a\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

eşitliklerine ulaşabiliriz. Şayet $a = 0$ ise $k_3 = 0$ olacağından X_2-eğrisi 3. mertebeden helis olur. Şayet $a > 0$ ise

$$\overline{\nabla}_{E_1}E_4 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}(aX_1 - \varepsilon\xi) = -k_3E_3$$

olur. Böylece k_1, k_2, k_3 sabit $k_4 = 0$ ve X_2-eğrisi 4. mertebeden helis olur. $a, b < 0$ şartı için benzer durumlar elde edilir. Böylece ispat biter. ■

Örnek 4.1 *$x : M \longrightarrow \mathbb{E}^5(-3\varepsilon)$ izometrik immersiyonu*

$$x = \left(a\cos\frac{s}{a}, b\cos\frac{t}{b}, a\sin\frac{s}{a}, b\sin\frac{t}{b}, z(s,t)\right)$$

olarak verilsin. Böylece

$$x_s = \left(-\sin\frac{s}{a}, 0, \cos\frac{s}{a}, 0, z_s\right), x_t = \left(0, -\sin\frac{t}{b}, 0, cod\frac{t}{b}, z_t\right)$$

olur. M yüzeyi integral alt yüzeyi olduğundan $\eta(x_s) = \eta(x_t) = 0$ olacaktır. Burada

$$\eta = \frac{1}{2}(dz - y^1dx^1 - y^2dx^2)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\eta(x_s) &= \frac{1}{2}(dz - y^1dx^1 - y^2dx^2)\left(-\sin\frac{s}{a}\frac{\partial}{\partial x^1} + \cos\frac{s}{a}\frac{\partial}{\partial y^1} + z_s\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= \frac{1}{2}(z_s + a\sin^2\frac{s}{a})\end{aligned}$$

ve böylece $z_s + a\sin^2\frac{s}{a} = 0$ elde ederiz. $z_s = -a\sin^2(\frac{s}{a})$ integre edersek

$$z(s,t) = \frac{a^2}{4}\sin^2\frac{s}{a} - \frac{as}{2} + f(t) \tag{4.81}$$

olur. Benzer şekilde $z_t = -b\sin^2\frac{s}{b}$ olduğu görülür. (4.81) *ifadesinde t ye göre kısmi türev alıp integre edersek*

$$f(t) = \frac{b^2}{4}\sin^2\frac{s}{b} - \frac{bt}{2}$$

bulunur. Son ifade (4.81) *de yerine yazılırsa* $z(s,t)$ *fonksiyonunu*

$$z(s,t) = \frac{a^2}{4}\sin^2\frac{s}{a} + \frac{b^2}{4}\sin^2\frac{s}{b} - \frac{1}{2}(as+bt) \tag{4.82}$$

olarak buluruz. Burada açıkça görebiliriz ki,

$$g(x,x) - \varepsilon\eta^2(x) = \frac{1}{4}(a^2+b^2)$$

dir. Böylece M *yüzeyi* $c = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ *olmak üzere*

$$N^4(c) = \left\{x \ \in \ \mathbb{E}^5(-3\varepsilon) : g(x,x) - \varepsilon\eta^2(x) = \frac{1}{4}(a^2+b^2)\right\}$$

silindiri üzerindedir. $\mathbb{E}^5(-3\varepsilon)$ *uzayındaki* φ*- tabanı*

$$\varphi = \left\{ \begin{array}{lll} e_1 = 2\frac{\partial}{\partial y^1} & , \quad e_2 = 2\frac{\partial}{\partial y^2} & , \quad e_3 = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1\frac{\partial}{\partial z}\right), \\ e_4 = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial}{\partial z}\right) & , \quad e_5 = 2\frac{\partial}{\partial z} & \end{array} \right\}$$

ve $y^1 = a\sin(\frac{s}{a})$ *olduğundan*

$$\begin{aligned} x_s &= \left(-\sin\frac{s}{a}, 0, \cos\frac{s}{a}, 0, z_s\right) \\ &= -\sin\frac{s}{a}\frac{\partial}{\partial x^1} + \cos\frac{s}{a}\frac{\partial}{\partial y^1} - a\sin^2\frac{s}{a}\frac{\partial}{\partial z} \\ &= \frac{1}{2}\cos\frac{s}{a}\left(2\frac{\partial}{\partial y^1}\right) - \frac{1}{2}\sin\frac{s}{a}\left(2\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1\frac{\partial}{\partial z}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\cos\frac{s}{a}e_1 - \frac{1}{2}\sin\frac{s}{a}e_3 \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$x_t = \frac{1}{2}\cos\frac{t}{b}e_2 - \frac{1}{2}\sin\frac{t}{b}e_4$$

olarak ifade edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \varphi(x_s) &= \frac{1}{2}\cos\frac{s}{a}\varphi(e_1) - \frac{1}{2}\sin\frac{s}{a}\varphi(e_3) \\ \varphi(x_t) &= \frac{1}{2}\cos\frac{t}{a}\varphi(e_2) - \frac{1}{2}\sin\frac{t}{a}\varphi(e_4) \end{aligned}$$

dir. Burada $\varphi e_1 = \varepsilon e_3$ *ve* $\varphi e_2 = \varepsilon e_4$ *olduğundan, sırasıyla,* $\varphi e_3 = -\varepsilon e_1, \varphi e_4 = -\varepsilon e_2$ *olur. Dolayısıyla*

$$\begin{aligned} \varphi x_s &= \frac{\varepsilon}{2}\left(\sin\frac{s}{a}e_1 + \cos\frac{s}{a}e_3\right) \\ \varphi x_t &= \frac{\varepsilon}{2}\left(\sin\frac{t}{b}e_2 + \cos\frac{t}{b}e_4\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada açıkça $g(x_s, x_s) = g(x_t, x_t) = \frac{1}{4}$ *ve* $g(x_s, x_t) = 0$ *dır. Bu yüzden* $X_1 = 2x_s$ *ve* $X_2 = 2x_t$ *dersek* $\{X_1 = 2x_s,\ X_2 = 2x_t\}$ *cümlesi* M *manifoldunun tanjant uzayının lokal ortonormal tabanı olur. Böylece* $\varphi(X_1) = 2\varphi(x_s)$, $\varphi(X_2) = 2\varphi(x_t)$, ξ *de ortonormal normal vektör alanları olur. İzometrik immersiyonun tanımından*

$$x^1 = a\cos\frac{s}{a},\ x^2 = b\cos\frac{t}{b},\ y^1 = a\sin\frac{s}{a},\ y^2 = b\sin\frac{t}{b}$$

dir. Son eşitlikten

$$\cos\frac{s}{a} = \frac{x^1}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{y^1}{a}\right)^2},\ \cos\frac{t}{b} = \frac{x^2}{b} = \sqrt{1 - \left(\frac{y^2}{a}\right)^2}$$

olduğu görülür. Böylece

$$e_1\left(\cos\frac{s}{a}\right) = -\frac{2}{a}\tan\frac{s}{a} \tag{4.83}$$

$$\begin{aligned} e_3\left(\cos\frac{s}{a}\right) &= \frac{4}{a} \\ e_1\left(\sin\frac{s}{a}\right) &= \frac{2}{a} \\ e_3\left(\sin\frac{s}{a}\right) &= -\frac{4}{a}\cot\frac{s}{a} \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{X_1}X_1 &= \cos\frac{s}{a}e_1\left(\cos\frac{s}{a}\right)e_1 - \cos\frac{s}{a}e_1\left(\sin\frac{s}{a}\right)e_3 - \cos\frac{s}{a}\sin\frac{s}{a}\overline{\nabla}_{e_3}e_1 \\ &\quad - \cos\frac{s}{a}\sin\frac{s}{a}\overline{\nabla}_{e_1}e_3 - \sin\frac{s}{a}e_3\left(\cos\frac{s}{a}\right)e_1 + \sin\frac{s}{a}e_3\left(\sin\frac{s}{a}\right)e_3 \end{aligned}$$

olur. Burada $\overline{\nabla}_{e_3}e_1 = -\overline{\nabla}_{e_1}e_3$ *ve* (4.83) *denkleminden*

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{X_1}X_1 &= \left[\cos\frac{s}{a}e_1\left(\cos\frac{s}{a}\right) - \sin\frac{s}{a}e_3\left(\cos\frac{s}{a}\right)\right]e_1 \\ &\quad + \left[\sin\frac{s}{a}e_3\left(\sin\frac{s}{a}\right) - \cos\frac{s}{a}e_1\left(\sin\frac{s}{a}\right)\right]e_3 \\ &= \left[\cos\frac{s}{a}\left(-\frac{2}{a}\tan\frac{s}{a}\right) - \frac{4}{a}\sin\frac{s}{a}\right]e_1 \\ &\quad + \left[\sin\frac{s}{a}\left(-\frac{4}{a}\cot\frac{s}{a}\right) - \frac{2}{a}\cos\frac{s}{a}\right]e_3 \\ &= -\frac{6}{a}\left(\sin\frac{s}{a}e_1 + \cos\frac{s}{a}e_3\right) \\ &= -\frac{6}{a}\xi_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer yolla

$$\overline{\nabla}_{X_1}X_1 = -\frac{6}{a}\xi_1,\ \overline{\nabla}_{X_2}X_2 = -\frac{6}{b}\xi_2,\ \overline{\nabla}_{X_2}X_1 = 0 \tag{4.84}$$

olur. Dolayısıyla (4.84) *eşitliklerini Gauss formülünde yerlerine yazarsak teğetsel bileşenlerinin sıfır olduğu görülür. Böylece*

$$B(X_1, X_1) = -\frac{6}{a}\xi_1, B(X_2, X_2) = -\frac{6}{b}\xi_2, B(X_1, X_2) = 0 \tag{4.85}$$

olur. Ayrıca

$$H = \frac{1}{2}B(X_1, X_1) + \frac{1}{2}B(X_2, X_2) + \frac{1}{2}B(\xi, \xi)$$

olduğundan

$$H = -\frac{3}{a}\xi_1 - \frac{3}{b}\xi_2$$

eşitliklerini elde ederiz. Burada şekil operatörünü hesaplamak için

$$\begin{aligned} A_1X_1 &= a_{11}X_1 + a_{21}X_2 \\ A_1X_2 &= a_{12}X_1 + a_{22}X_2 \end{aligned}$$

dersek

$$\begin{aligned} a_{11} &= g(A_1X_1, X_1) = g(-\overline{\nabla}_{X_1}\xi_1, X_1) \\ a_{21} &= g(A_1X_1, X_2) = g(-\overline{\nabla}_{X_1}\xi_1, X_2) \\ a_{12} &= g(A_1X_2, X_1) = g(-\overline{\nabla}_{X_2}\xi_1, X_1) \\ a_{22} &= g(A_1X_2, X_2) = g(-\overline{\nabla}_{X_2}\xi_1, X_2) \end{aligned}$$

olur. Şayet $g(\xi_1, X_1) = 0$ *eşitliğinde her iki tarafın* X_1 *yönünde kovaryant türevini alırsak*

$$g(\overline{\nabla}_{X_1}X_1, \xi_1) + g(\overline{\nabla}_{X_1}\xi_1, X_1) = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned} a_{11} &= g(-\overline{\nabla}_{X_1}\xi_1, X_1) = g(\overline{\nabla}_{X_1}X_1, \xi_1) = -\frac{6}{a} \\ a_{12} &= a_{21} = g(-\overline{\nabla}_{X_1}\xi_1, X_2) = g(\overline{\nabla}_{X_1}X_2, \xi_1) = 0 \\ a_{22} &= g(-\overline{\nabla}_{X_2}\xi_1, X_2) = g(\overline{\nabla}_{X_2}X_2, \xi_1) = 0 \end{aligned}$$

ve ξ_1 *normal vektör alanına karşılık gelen şekil operatörü* $A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{6}{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *olur.* *Benzer işlemleri yaparsak* $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{b} \end{bmatrix}$ *eşitliğini elde ederiz.* (4.84) *den açıkca görülür ki,* $\nabla_{X_i} X_j = 0$ *dır. Dolayısıyla* M *manifoldunun Laplace operatörü*

$$\triangle f = -\sum_{i=1}^{2} X_i X_i f$$

olur. Şayet $\varphi^2 x_1 = -a\varphi x_s$ *ve* $\varphi^2 x_2 = -b\varphi x_t$ *dersek*

$$\begin{aligned} \varphi^2 x_1 + \varphi^2 x_2 &= -a\varphi x_s - b\varphi x_t \\ &= \left(-\frac{a}{2}\sin\frac{s}{a}, -\frac{b}{2}\sin\frac{t}{b}, -\frac{a}{2}\cos\frac{s}{a}, -\frac{b}{2}\cos\frac{t}{b}, 0\right) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $\varphi^2 x = \left(-\frac{a}{2}\sin\frac{s}{a}, -\frac{b}{2}\sin\frac{t}{b}, -\frac{a}{2}\cos\frac{s}{a}, -\frac{b}{2}\cos\frac{t}{b}, 0\right)$ *dir. Böylece*

$$\varphi^2 x = \varphi^2 x_1 + \varphi^2 x_2$$

elde edilir. Burada

$$\triangle g(x_1, e_A) = \frac{1}{a} g(x_1, e_A), \ \triangle g(x_2, e_A) = \frac{1}{b^2} g(x_2, e_A), \quad (A = 1, 2, 3, 4)$$

dir. Böylece M *manifoldu* $\mathbb{E}^5(-3\varepsilon)$ *Sasaki uzayının 2-tipten alt manifoldu olduğu görülür (Baikousis 1991).*

5. KONTAK MANİFOLDLARDA YÜZEYLER TEORİSİ

5.1 Kontak Manifoldlarda Vektörel Çarpım

Tanım 5.1 ***(Vektörel çarpım):*** *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak manifold olmak üzere*
$\forall X, Y \in \chi(M)$ için M üzerinde

$$\wedge : \ \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

dönüşümü

$$X \wedge Y = -g(X, \varphi(Y))\xi - \eta(Y)\varphi(X) + \eta(X)\varphi(Y) \tag{5.1}$$

eşitliği ile tanımlansın. Burada $X \wedge Y$ vektörüne, X ile Y nin ***vektörel çarpımı*** *adı verilir (Camcı 2010).*

Teorem 5.1 *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde*
$\forall X, Y \in \chi(M)$ için X ile Y vektörlerinin her ikisi de $X \wedge Y$ vektörüne ortogonaldir (Camcı 2010).

İspat. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için X ile $X \wedge Y$ vektörlerinin ortogonal olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
g(X, X \wedge Y) &= g(X, -g(X, \varphi(Y))\xi - \eta(Y)\varphi(X) + \eta(X)\varphi(Y)) \\
&= g(X, -g(X, \varphi(Y))\xi) - g(X, \eta(Y)\varphi(X)) + g(X, \eta(X)\varphi(Y)) \\
&= -g(X, \varphi(Y))g(X, \xi) - \eta(Y)g(X, \varphi(X)) + \eta(X)g(X, \varphi(Y)) \\
&= -g(X, \varphi(Y))\eta(X) - \eta(Y)g(X, \varphi(X)) + \eta(X)g(X, \varphi(Y)) \\
&= -\eta(Y)g(X, \varphi(X)).
\end{aligned}$$

Burada Sonuç (3.9) dan dolayı $g(X, \varphi(X)) = 0$ olduğundan

$$g(X, X \wedge Y) = 0 \tag{5.2}$$

olur ki, bu da X ile $X \wedge Y$ vektörlerinin ortogonal olduğu anlamına gelir.
Benzer mantıkla $\forall X, Y \in \chi(M)$ için X ile $X \wedge Y$ vektörlerinin ortogonal olduğunu

gösterelim.

$$\begin{aligned}
g(Y, X \wedge Y) &= g(Y, -g(X, \varphi(Y))\xi - \eta(Y)\varphi(X) + \eta(X)\varphi(Y)), \\
&= g(Y, -g(X, \varphi(Y))\xi) - g(Y, \eta(Y)\varphi(X)) + g(Y, \eta(X)\varphi(Y)), \\
&= -g(X, \varphi(Y))g(Y, \xi) - \eta(Y)g(Y, \varphi(X)) + \eta(X)g(Y, \varphi(Y)), \\
&= -g(X, \varphi(Y))\eta(Y) - \eta(Y)g(Y, \varphi(X)) + \eta(X)g(Y, \varphi(Y)), \\
&= g(\varphi(X), Y)\eta(Y) - \eta(Y)g(\varphi(X), Y) + \eta(X)g(Y, \varphi(Y)), \\
&= \eta(X)g(Y, \varphi(Y))
\end{aligned}$$

burada Sonuç 3.9 dan dolayı $g(Y, \varphi(Y)) = 0$ olduğundan

$$g(Y, X \wedge Y) = 0 \tag{5.3}$$

olur ki, bu da Y ile $X \wedge Y$ vektörlerinin ortogonal olduğu anlamına gelir. ■

Teorem 5.2 *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde vektörel çarpım* ***anti-simetrik*** *bir dönüşümdür (Camcı 2010).*

İspat. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için doğru olan (5.1) denkleminde X yerine Y, Y yerine X alırsak

$$\begin{aligned}
Y \wedge X &= -g(Y, \varphi(X))\xi - \eta(X)\varphi(Y) + \eta(Y)\varphi(X) \\
&= g(\varphi(Y), X)\xi - \eta(X)\varphi(Y) + \eta(Y)\varphi(X) \\
&= -\left[-g(X, \varphi(Y))\xi - \eta(Y)\varphi(X) + \eta(X)\varphi(Y)\right]
\end{aligned}$$

olduğundan

$$Y \wedge X = -\left(X \wedge Y\right) \tag{5.4}$$

olup $\wedge$ dönüşümü anti-simetriktir. ■

Teorem 5.3 *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde vektörel çarpım* ***alterne*** *bir dönüşümdür (Camcı 2010).*

İspat. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için doğru olan (5.1) denkleminde $Y = X$ alınırsa

$$\begin{aligned}
X \wedge X &= -g(X, \varphi(X))\xi - \eta(X)\varphi(X) + \eta(X)\varphi(X) \\
&= -g(X, \varphi(X))\xi
\end{aligned}$$

burada Sonuç 3.9 dan dolayı $g(X,\varphi(X))=0$ olduğundan $X\wedge X=0$ olur ki, bu da $\wedge$ dönüşümünün alterne olduğu anlamına gelir. ■

Teorem 5.4 *(M,φ,ξ,η,g) hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\forall X,Y\in\chi(M)$ için*

$$Y\wedge\varphi(X)=g(X,Y)\xi-\eta(Y)X \tag{5.5}$$

ve

$$\varphi(X)=\xi\wedge X \tag{5.6}$$

olur (Camcı 2010).

İspat. $\forall X,Y\in\chi(M)$ için doğru olan (5.1) denkleminde X yerine Y,Y yerine $\varphi(X)$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
Y\wedge\varphi(X) &= -g(Y,\varphi^2(X))\xi-\eta(\varphi(X))\varphi(Y)+\eta(Y)\varphi^2(X)\quad ,\eta\circ\varphi=0\\
&= -g(Y,-X+\eta(X)\xi)\xi+\eta(Y)(-X+\eta(X)\xi)\\
&= g(X,Y)\xi-\eta(X)g(Y,\xi)\xi-\eta(Y)X+\eta(X)\eta(Y)\xi\\
&= g(X,Y)\xi-\eta(X)\eta(Y)\xi-\eta(Y)X+\eta(X)\eta(Y)\xi\\
&= g(X,Y)\xi-\eta(Y)X
\end{aligned}$$

ve benzer mantıkla (5.1) denkleminde X yerine ξ, Y yerine X yazılırsa

$$\begin{aligned}
\xi\wedge Y &= -g(\xi,\varphi(X))\xi-\eta(X)\varphi(\xi)+\eta(\xi)\varphi(X)\\
&= g(\varphi(\xi),X)\xi-\eta(X)\varphi(\xi)+\eta(\xi)\varphi(X)
\end{aligned}$$

olur. Burada $g(\varphi(\xi),X)=0$, $\varphi(\xi)=0$ ve $\eta(\xi)=1$ olduğundan

$$\xi\wedge Y=\varphi(X)$$

elde edilir. ■

Tanım 5.2 *(M,φ,ξ,η,g) hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için $g(X\wedge Y,Z)$ sayısına X,Y,Z vektörlerinin karma çarpımı denir ve bazen (X,Y,Z) ifadesi ile de gösterilir. $\{X,Y,X\wedge Y\}$ üçlüsü pozitif yönlü bir çatı oluşturur.*

Teorem 5.5 *(M,φ,ξ,η,g) hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için*

$$(X,Y,Z)=g(X\wedge Y,Z)=det(X,Y,Z) \tag{5.7}$$

veya

$$(X,Y,Z)=-\left[g(X,\varphi(Y))\eta(Z)+g(Y,\varphi(Z))\eta(X)+g(Z,\varphi(X))\eta(Y)\right] \tag{5.8}$$

dir (Camcı 2010).

İspat. $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için

$$\begin{aligned} g(X\wedge Y,Z) &= g(-g(X,\varphi(Y))\xi-\eta(Y)\varphi(X)+\eta(X)\varphi(Y),Z)\\ &= -g(X,\varphi(Y))g(\xi,Z)-\eta(Y)g(\varphi(X),Z)+\eta(X)g(\varphi(Y),Z)\\ &= -g(X,\varphi(Y))\eta(Z)-\eta(Y)g(Z,\varphi(X))-\eta(X)g(Y,\varphi(Z))\\ &= -(g(X,\varphi(Y))\eta(Z)+g(Y,\varphi(Z))\eta(X)+g(Z,\varphi(X))\eta(Y)) \end{aligned} \tag{5.9}$$

olur. $\mathbb{E}^3(-3)$ Sasaki uzayının bir bazı $\{e,\varphi(e),\xi\}$ olmak üzere $X,Y,Z\in\chi(M)$ vektörlerinin bu baza göre ifadesi

$$\left.\begin{aligned} X=x_1e+x_2\varphi(e)+x_3\xi,\\ Y=y_1e+y_2\varphi(e)+y_3\xi,\\ Z=z_1e+z_2\varphi(e)+z_3\xi \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

ve bundan yararlanarak

$$\left.\begin{aligned} \varphi(X)=-x_2e+x_1\varphi(e),\\ \varphi(Y)=-y_2e+y_1\varphi(e),\\ \varphi(Z)=-z_2e+z_1\varphi(e) \end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

olarak bulunur. Yukarıda elde edilen (5.10) ve (5.11) denklemleri (5.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} g(X\wedge Y,Z) &= -(g(X,\varphi(Y))\eta(Z)+g(Y,\varphi(Z))\eta(X)+g(Z,\varphi(X))\eta(Y))\\ &= -((x_2y_1-x_1y_2)z_3+(y_2z_1-y_1z_2)x_3+(z_2y_1-z_1x_2)y_3)\\ &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}\\ &= \det(X,Y,Z) \end{aligned}$$

dır. ■

Teorem 5.6 $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ *hemen hemen kontak manifoldu üzerinde* $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$

$$(X, Y, Z) = (Y, Z, X) = (Z, X, Y) \tag{5.12}$$

dir (Camcı 2010).

İspat. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için Teorem 5.5 kullanılarak, sırasıyla,

$$\begin{aligned} g(Y \wedge Z, X) &= g(-g(Y, \varphi(Z))\xi - \eta(Z)\varphi(Y) + \eta(Y)\varphi(Z), X) \\ &= -g(Y, \varphi(Z))g(\xi, X) - \eta(Z)g(\varphi(Y), X) + \eta(Y)g(\varphi(Z), X) \\ &= -g(Y, \varphi(Z))\eta(X) - g(X, \varphi(Y))\eta(Z) - g(Z, \varphi(X))\eta(Y) \\ &= -(g(X, \varphi(Y))\eta(Z) + g(Y, \varphi(Z))\eta(X) + g(Z, \varphi(X))\eta(Y)) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g(Z \wedge X, Y) &= g(-g(Z, \varphi(X))\xi - \eta(X)\varphi(Z) + \eta(Z)\varphi(X), Y) \\ &= -g(Z, \varphi(X))g(\xi, Y) - \eta(X)g(\varphi(Z), Y) + \eta(Z)g(\varphi(X), Y) \\ &= -g(Z, \varphi(X))\eta(Y) - g(\varphi(Z), Y)\eta(X) - g(\varphi(X), Y)\eta(Z)) \\ &= -(g(X, \varphi(Y))\eta(Z) + g(Y, \varphi(Z))\eta(X) + g(Z, \varphi(X))\eta(Y)) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$(X, Y, Z) = (Y, Z, X) = (Z, X, Y)$$

olduğu görülür. ■

Teorem 5.7 $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ *hemen hemen kontak manifoldu üzerinde* $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ *için*

$$g(X, \varphi(Y))Z + g(Y, \varphi(Z))X + g(Z, \varphi(X))Y = -det(X, Y, Z)\xi \tag{5.13}$$

dir. Burada ξ, η *kontak yapısının karakteristik vektör alanıdır (Camcı 2010).*

İspat. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} g(X, \varphi(Y))Z &= (x_2y_1 - x_1y_2)z_1e + (x_2y_1 - x_1y_2)z_2\varphi(e) + (x_2y_1 - x_1y_2)z_3\xi \\ g(Y, \varphi(Z))X &= (y_2z_1 - y_1z_2)x_1e + (y_2z_1 - y_1z_2)x_2\varphi(e) + (y_2z_1 - y_1z_2)x_3\xi \\ g(Z, \varphi(X))Y &= (z_2x_1 - z_1x_2)y_1e + (z_2x_1 - z_1x_2)y_2\varphi(e) + (z_2x_1 - z_1x_2)y_3\xi \end{aligned}$$

denklemleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} g(X,\varphi(Y))Z + g(Y,\varphi(Z))X + g(Z,\varphi(X))Y & \\ &= (x_2y_1 - x_1y_2)z_3\xi + (y_2z_1 - y_1z_2)x_3\xi + (z_2x_1 - z_1x_2)y_3\xi \\ &= ((x_2y_1 - x_1y_2)z_3 + (y_2z_1 - y_1z_2)x_3 + (z_2x_1 - z_1x_2)y_3)\xi \\ &= -\det(X,Y,Z)\xi \end{aligned}$$

dır. ■

Teorem 5.8 (M,φ,ξ,η,g) *hemen hemen kontak manifoldu üzerinde* $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ *için*

$$(X \wedge Y) \wedge Z = g(X,Z)Y - g(Y,Z)X \tag{5.14}$$

dir (Camcı 2010).

İspat. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için (5.1) denklemi kullanarak teoremimizde verilen eşitliğin her iki yanının ayrı ayrı, aynı ifadeye eşit olduğunu göstererek ispat yapalım.

$$\begin{aligned} (X \wedge Y) \wedge Z &= (-g(X,\varphi(Y))\xi - \eta(Y)\varphi(X) + \eta(X)\varphi(Y)) \wedge Z \\ &= -g(-g(X,\varphi(Y))\xi - \eta(Y)\varphi(X) + \eta(X)\varphi(Y),\varphi(Z))\xi \\ &\quad -\eta(Z)\varphi(-g(X,\varphi(Y))\xi - \eta(Y)\varphi(X) + \eta(X)\varphi(Y)) \\ &\quad +\eta(-g(X,\varphi(Y))\xi - \eta(Y)\varphi(X) + \eta(X)\varphi(Y))\varphi(Z) \\ &= (g(X,\varphi(Y))g(\xi,\varphi(Z)) + \eta(Y)g(\varphi(X),\varphi(Z)) \\ &\quad -\eta(X)g(\varphi(Y),\varphi(Z)))\xi + \eta(Z)g(X,\varphi(Y))\varphi(\xi) \\ &\quad +\eta(Y)\eta(Z)\varphi^2(X) - \eta(X)\eta(Z)\varphi^2(Y) - g(X,\varphi(Y))\eta(\xi)\varphi(Z) \\ &\quad -\eta(Y)\,(\eta\circ\varphi)\,(X)\varphi(Z) + \eta(X)\,(\eta\circ\varphi)\,(Y)\varphi(Z) \\ &= (\eta(Y)g(X,Z) - \eta(X)\eta(Y)\eta(Z) - \eta(X)g(Y,Z) \\ &\quad +\eta(X)\eta(Y)\eta(Z))\xi - \eta(Y)\eta(Z) + \eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\xi \\ &\quad +\eta(X)\eta(Z) - \eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\xi - g(X,\varphi(Y))\varphi(Z) \end{aligned}$$

olur ve

$$\begin{aligned} X &= x_1e + x_2\varphi(e) + x_3\xi \\ Y &= y_1e + y_2\varphi(e) + y_3\xi \\ Z &= z_1e + z_2\varphi(e) + z_3\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(X) &= -x_2 e + x_1\varphi(e)\\ \varphi(Y) &= -y_2 e + y_1\varphi(e)\\ \varphi(Z) &= -z_2 e + z_1\varphi(e)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}(X\wedge Y)\wedge Z &= (y_3 g(X,Z) - x_3 g(Y,Z))\xi - \ y_3 z_3 X + x_3 z_3 Y\\ &\quad -(x_2y_1 - x_1y_2)(-z_2 e + z_1\varphi(e))\\ &= (z_2(x_2y_1 - x_1y_2) + z_3(x_3y_1 - x_1y_3))e\\ &\quad +(z_1(x_1y_2 - x_2y_1) + z_3(x_3y_2 - x_2y_3))\varphi(e)\\ &\quad +(y_3 g(X,Z) - x_3 g(Y,Z))\xi \qquad (5.15)\end{aligned}$$

dır. Şimdi de $g(X,Z)Y - g(Y,Z)X$ ifadesinin eşitini bulalım.

$$\begin{aligned}g(X,Z)Y - g(Y,Z)X &= (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)(y_1 e + y_2\varphi(e) + y_3\xi)\\ &\quad -(y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3)(x_1 e + x_2\varphi(e) + x_3\xi)\\ &= (x_1y_1z_1 + x_2y_1z_2 + x_3y_1z_3 - x_1y_1z_1 - x_1y_2z_2 - x_1y_3z_3)e\\ &\quad +(x_1y_2z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_2z_3 - x_2y_1z_1 - x_2y_2z_2 - x_2y_3z_3)\varphi(e)\\ &\quad +(y_3 g(X,Z) - x_3 g(Y,Z))\xi\\ &= (z_2(x_2y_1 - x_1y_2) + z_3(x_3y_1 - x_1y_3))e\\ &\quad +(z_1(x_1y_2 - x_2y_1) + z_3(x_3y_2 - x_2y_3))\varphi(e)\\ &\quad +(y_3 g(X,Z) - x_3 g(Y,Z))\xi \qquad (5.16)\end{aligned}$$

dır. O halde (5.15) ve (5.16) denklemleri yardımıyla

$$(X\wedge Y)\wedge Z = g(X,Z)Y - g(Y,Z)X$$

olur. ■

Teorem 5.9 (M,φ,ξ,η,g) *hemen hemen kontak manifoldu üzerinde* $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ *için*

$$(X\wedge Y)\wedge Z + (Y\wedge Z)\wedge X + (Z\wedge X)\wedge Y = 0 \qquad (5.17)$$

*dır. Bu eşitliğe " **Jacobi özdeşliği** " adı verilir (Camcı 2010).*

İspat. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için (5.14) denklemi kullanarak

$$
\begin{aligned}
(X \wedge Y) \wedge Z &= g(X, Z)Y - g(Y, Z)X \\
(Y \wedge Z) \wedge X &= g(Y, X)Z - g(Z, X)Y \\
(X \wedge Y) \wedge Z &= g(Z, Y)X - g(X, Y)Z
\end{aligned}
$$

olur. Bu üç eşitlik taraf tarafa toplanır ise

$$
(X \wedge Y) \wedge Z + (Y \wedge Z) \wedge X + (Z \wedge X) \wedge Y = 0
$$

dir. ■

Teorem 5.10 *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için*

$$
g(X \wedge Y, Z \wedge W) = g(X, Z)g(Y, W) - g(Y, Z)g(X, W) \tag{5.18}
$$

*dir. Bu eşitliğe " **Lagrange özdeşliği** " adı verilir (Camcı 2010).*

İspat. $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için (5.7) ve (5.14) denklemleri yardımıyla

$$
\begin{aligned}
g(X \wedge Y, Z \wedge W) &= (X \wedge Y, Z, W) \\
&= g((X \wedge Y) \wedge Z, W) \\
&= g(g(X, Z)Y - g(Y, Z)X, W) \\
&= g(X, Z)g(Y, W) - g(Y, Z)g(X, W)
\end{aligned}
$$

olur. ■

Teorem 5.11 *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için*

$$
g(X \wedge Y, X \wedge Y) = g(X, X)g(Y, Y) - g^2(X, Y) \tag{5.19}
$$

dir (Camcı 2010).

İspat. Lagrange özdeşliğinden yararlanarak (5.18) denkleminde Z yerine X ve W yerine Y yazılırsa

$$
\begin{aligned}
g(X \wedge Y, X \wedge Y) &= g((X \wedge Y) \wedge X, Y) \\
&= g(g(X,X)Y - g(Y,X)X, Y) \\
&= g(X,X)g(Y,Y) - g(Y,X)g(X,Y) \\
&= g(X,X)g(Y,Y) - g^2(X,Y)
\end{aligned}
$$

olur. Bu ispat için ikinci bir yol daha verelim. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$
\begin{aligned}
X &= x_1 e + x_2 \varphi(e) + x_3 \xi \\
Y &= y_1 e + y_2 \varphi(e) + y_3 \xi \\
Z &= z_1 e + z_2 \varphi(e) + z_3 \xi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi(X) &= -x_2 e + x_1 \varphi(e) \\
\varphi(Y) &= -y_2 e + y_1 \varphi(e) \\
\varphi(Z) &= -z_2 e + z_1 \varphi(e)
\end{aligned}
$$

ve

$$
X \wedge Y = (x_2 y_3 - x_3 y_2)e + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\varphi(e) + (x_2 y_1 - x_1 y_2)\xi
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
g(X \wedge Y, X \wedge Y) &= (x_2 y_3 - x_3 y_2)(x_2 y_3 - x_3 y_2) \\
&\quad +(x_3 y_1 - x_1 y_3)(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_2 y_1 - x_1 y_2)(x_2 y_1 - x_1 y_2),
\end{aligned}
$$

$$
g(X,X)g(Y,Y) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2),
$$

$$
\begin{aligned}
g^2(X,Y) &= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 \\
&= x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + x_3^2 y_3^3 + 2x_1 y_1 x_2 y_2 + 2x_1 y_1 x_3 y_3 + 2x_2 y_2 x_3 y_3
\end{aligned}
$$

eşitlikleri yardımıyla

$$
\begin{aligned}
g(X,X)g(Y,Y) - g^2(X,Y) &= x_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_3^2 + x_2^2 y_1^2 + x_2^2 y_3^2 + x_3^2 y_1^2 + x_3^2 y_2^2 \\
&\quad -2x_1 y_1 x_2 y_2 - 2x_1 y_1 x_3 y_3 - 2x_2 y_2 x_3 y_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(X\wedge Y, X\wedge Y) &= x_2^2y_3^2 - 2x_2y_3x_3y_2 + x_3^2y_2^2 + x_3^2y_1^2 - 2x_3y_1x_1y_3 + x_1^2y_3^2 \\
&\quad + x_2^2y_1^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_1^2y_2^2
\end{aligned}
$$

denklemleri elde edilir. O halde son iki eşitliği kullanarak

$$g(X\wedge Y, X\wedge Y) = \|X\wedge Y\|^2 = g(X,X)g(Y,Y) - g^2(X,Y)$$

olur. ■

Teorem 5.12 (M,φ,ξ,η,g) *hemen hemen kontak manifoldu üzerinde* $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ *için*

$$\nabla_Z(X\wedge Y) = (\nabla_Z X)\wedge Y + X\wedge(\nabla_Z Y) \tag{5.20}$$

dir. ∇ *ile burada* M *nin Levi-Civita koneksiyonu gösterilmektedir (Camcı 2010).*

İspat. $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için (5.1) denkleminden

$$
\begin{aligned}
\nabla_Z(X\wedge Y) &= -g(\nabla_Z X,\varphi(Y))\xi - \eta(Y)\varphi(\nabla_Z X) + \eta(\nabla_Z X)\varphi(Y) \\
&\quad - g(X,\varphi(\nabla_Z Y))\xi - \eta(\nabla_Z Y)\varphi(X) + \eta(X)\varphi(\nabla_Z Y) \\
&\quad - \eta(Y)(\nabla_Z\varphi(X) - \varphi(\nabla_Z X)) - g(X,\nabla_Z\varphi(Y)) - \varphi(\nabla_Z Y))\xi \\
&\quad + \eta(X)(\nabla_Z\varphi(Y) - \varphi(\nabla_Z Y)) + \eta(X)\nabla_Z\varphi(Y) \\
&\quad + (g(\nabla_Z X,\xi) + g(X,\nabla_Z\xi))\varphi(Y) \\
\nabla_Z(X\wedge Y) &= (\nabla_Z X)\wedge Y + X\wedge(\nabla_Z Y) - g(X,\nabla_Z\varphi(Y))\xi \\
&\quad - \eta(Y)\left(\nabla_Z\varphi\right)X + \eta(X)\left(\nabla_Z\varphi\right)Y - g(X,\varphi(Y))\nabla_Z\xi \\
&\quad - g(Y,\nabla_Z\xi)\varphi(X) + g(X,\nabla_Z\xi)\varphi(Y)
\end{aligned} \tag{5.21}
$$

$\forall X,Y\in\chi(M)$ için (M,φ,ξ,η,g) hemen hemen kontak manifoldu üzerinde Z. Olszak tarafından ispatlanan

$$\left(\nabla_X\varphi\right)(Y) = g(\varphi(\nabla_X\xi),Y)\xi - \eta(Y)\varphi(\nabla_X\xi)$$

eşitliği yardımıyla

$$-g(X,\nabla_Z\varphi(Y))\xi - \eta(Y)\nabla_Z\varphi(X) + \eta(X)\left(\nabla_Z\varphi\right)Y = 0$$

dır. $\{\varphi Z, \varphi^2 Z, \xi\}$ üçlüsü M nin ortogonal bazı olmak üzere $\nabla_Z \xi$ ile ξ dik olduğundan

$$\nabla_Z \xi = a\varphi Z + b\varphi^2 Z \tag{5.22}$$

eşitliği Teorem 5.7 ile birlikte kullanılırsa

$$-g(X, \varphi(Y))\nabla_Z \xi - g(Y, \nabla_Z \xi)\varphi(X) + g(X, \nabla_Z \xi)\varphi(Y) = 0$$

ve (5.7) denklemi ile

$$\nabla_Z (X \wedge Y) = (\nabla_Z X) \wedge Y + X \wedge (\nabla_Z Y)$$

olur. ■

5.2 $\mathbb{E}^3(-3)$ Hemen Hemen Kontak Metrik Manifoldlarda Herhangi Bir Yüzey İçin Weingarten Matrisinin Hesabı

M, $\mathbb{E}^3(-3)$ de bir yüzey olsun. M nin parametrik ifadesi

$$\begin{aligned} X &: \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^3(-3) \\ &: (u, v) \longmapsto \varphi(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v)) \end{aligned}$$

olsun. $\chi(M)$ nin bir bazı $\{X_u, X_v\}$ olmak üzere

$$X_u = f_{1,u}\frac{\partial}{\partial_x} + f_{2,u}\frac{\partial}{\partial_y} + f_{3,u}\frac{\partial}{\partial_z}$$

dır. Burada

$$\frac{\partial}{\partial_x} = \frac{1}{2}(\varphi(e) - y\xi), \ \frac{\partial}{\partial_y} = \frac{1}{2}e, \ \frac{\partial}{\partial_z} = \frac{1}{2}\xi$$

olduğundan

$$X_u = \frac{1}{2}f_{2,u}e + \frac{1}{2}f_{1,u}\varphi(e) + \frac{1}{2}(f_{3,u} - f_2 f_{1,u})\xi \tag{5.23}$$

ve benzer mantıkla

$$X_v = \frac{1}{2}f_{2,v}e + \frac{1}{2}f_{1,v}\varphi(e) + \frac{1}{2}(f_{3,v} - f_2 f_{1,v})\xi \tag{5.24}$$

olarak bulunur.

I. Hal: $g(X_u, X_v) = 0$ ise eğrilik çizgileri yüzeyin parametre eğrileridir. Yani $S(X_u) = \lambda X_u$ ve $S(X_v) = \mu X_v$ olur.

II. Hal: $g(X_u, X_v) \neq 0$ ise eğrilik çizgileri yüzeyin parametre eğrileri değildir. Genel ispat olması bakımından II. hali ispatlayalım. Çünkü II. hali çeşitli yöntemlerle I. hale getirebiliriz. Burada Weingarten matrisinin hesabı için gerekli bazı ifadeleri hatırlatarak işe başla- yalım. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için aşağıdaki eşitlikler vardır. $X = x_1 e + x_2\varphi(e) + x_3\xi$ ve $Y = y_1 e + y_2\varphi(e) + y_3\xi$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi(X) &= -x_2 e + x_1\varphi(e), \\ \varphi(Y) &= -y_2 e + y_1\varphi(e), \\ g(X, \varphi(Y)) &= x_2 y_1 - x_1 y_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta(X) &= x_3, \\ \varphi(\xi) &= 0, \\ \eta \circ \varphi &= 0, \\ \eta(\xi) &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(X, \varphi(Y)) &= -g(\varphi(X), Y), \\ g(X, \varphi(X)) &= 0 \end{aligned}$$

değerleri yardımıyla

$$\varphi(X_u) = -\frac{1}{2} f_{1,u} e + \frac{1}{2} f_{2,u}\varphi(e) \quad , \quad \varphi(\ X_v) = -\frac{1}{2} f_{1,v} e + \frac{1}{2} f_{2,v}\varphi(e) \tag{5.25}$$

ve

$$\left.\begin{aligned} \eta(X_u) = \tfrac{1}{2}(f_{3,u} - f_2 f_{1,u}), \\ \eta(X_v) = \tfrac{1}{2}(f_{3,v} - f_2 f_{1,v}) \end{aligned}\right\} \tag{5.26}$$

olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} X_u \wedge X_v &= -g(X_u, \varphi(X_v))\xi - \eta(X_v)\varphi(X_u) + \eta(X_u)\varphi(X_v) \\ &= -\left[\frac{1}{2} f_{1,u}\frac{1}{2} f_{2,v} - \frac{1}{2} f_{2,u}\frac{1}{2} f_{1,v}\right]\xi - \frac{1}{2}(f_{3,v} - f_2 f_{1,v})(-\frac{1}{2} f_{1,u} e + \frac{1}{2} f_{2,u}\varphi(e)) \\ &\quad +\frac{1}{2}(f_{3,u} - f_2 f_{1,u})(-\frac{1}{2} f_{1,v} e + \frac{1}{2} f_{2,v}\varphi(e)) \end{aligned}$$

$X_u \wedge X_v$ çarpımı $\{e, \varphi(e), \xi\}$ ortonormal baz vektörlerine göre düzenlenirse

$$\begin{aligned} X_u \wedge X_v &= \frac{1}{4}\left[f_{1,u}(f_{3,v} - f_2 f_{1,v}) - f_{1,v}(f_{3,u} - f_2 f_{1,u})\right] e \\ &\quad +\frac{1}{4}\left[f_{2,v}(f_{3,u} - f_2 f_{1,u}) - f_{2,u}(f_{3,v} - f_2 f_{1,v})\right]\varphi(e) \\ &\quad +\frac{1}{4}(f_{1,v} f_{2,u} - f_{1,u} f_{2,v})\xi \end{aligned} \tag{5.27}$$

olur ve

$$
\begin{aligned}
E = g(X_u, X_u) &= \tfrac{1}{4}f_{2,u}^2 + \tfrac{1}{4}f_{1,u}^2 + \tfrac{1}{4}(f_{3,u} - f_2 f_{1,u})^2, \\
F = g(X_u, X_v) &= \tfrac{1}{4}f_{2,u}f_{2,v} + \tfrac{1}{4}f_{1,u}f_{1,v} + \tfrac{1}{4}(f_{3,u} - f_2 f_{1,u})(f_{3,v} - f_2 f_{1,v}), \\
G = g(X_v, X_v) &= \tfrac{1}{4}f_{2,v}^2 + \tfrac{1}{4}f_{1,v}^2 + \tfrac{1}{4}(f_{3,v} - f_2 f_{1,v})^2
\end{aligned} \tag{5.28}
$$

olduğundan M yüzeyinin birim normal vektör alanı N olmak üzere

$$
N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}
$$

ifadesi Teorem 5.11 de ispatlanan

$$
\|X_u \wedge X_v\|^2 = g(X_u, X_u)g(X_v, X_v) - g^2(X_u, X_v)
$$

denklemi yardımıyla

$$
N = \frac{X_u \wedge X_v}{\sqrt{EG - F^2}} \tag{5.29}
$$

olur. Şimdi φ yüzeyine ait ikinci mertebeden türevleri bulalım.

$$
\begin{aligned}
X_{uu} &= \nabla_{X_u} X_u \\
&= \frac{1}{2}f_{2,uu}e + \frac{1}{2}f_{1,uu}\varphi(e) + \frac{1}{2}(f_{3,uu} - f_{2,u}f_{1,u} - f_{1,uu}f_2)\xi \\
&\quad -\eta(X_u)\varphi(X_u) - \eta(X_u)\varphi(X_u) - g(X_u, \varphi(X_u))\xi \\
&= \frac{1}{2}f_{2,uu}e + \frac{1}{2}f_{1,uu}\varphi(e) + \frac{1}{2}(f_{3,uu} - f_{2,u}f_{1,u} - f_{1,uu}f_2)\xi \\
&\quad -2\eta(X_u)\varphi(X_u) - g(X_u, \varphi(X_u))\xi
\end{aligned}
$$

olup (5.25) ve (5.26) denklemleri yardımıyla

$$
\begin{aligned}
X_{uu} &= \frac{1}{2}f_{2,uu}e + \frac{1}{2}f_{1,uu}\varphi(e) + \frac{1}{2}(f_{3,uu} - f_{2,u}f_{1,u} - f_{1,uu}f_2)\xi \\
&\quad -(f_{3,u} - f_2 f_{1,u})(-\frac{1}{2}f_{1,u}e + \frac{1}{2}f_{2,u}\varphi(e)) - \left[-\frac{1}{4}f_{1,u}f_{2,u} + \frac{1}{4}f_{2,u}f_{1,u}\right]\xi \\
X_{uu} &= \frac{1}{2}\left[f_{2,uu} + f_{1,u}(f_{3,u} - f_2 f_{1,u})\right]e + \frac{1}{2}\left[f_{1,uu} - f_{2,u}(f_{3,u} - f_2 f_{1,u})\right]\varphi(e) \\
&\quad +\frac{1}{2}\left[f_{3,uu} - f_{2,u}f_{1,u} - f_{1,uu}f_2\right]\xi
\end{aligned} \tag{5.30}
$$

olur. Benzer mantıkla X_{uv} ve X_{vv} türevleri

$$\begin{aligned}
X_{uv} &= \nabla_{X_v} X_u \\
&= \frac{1}{2} f_{2,uv} e + \frac{1}{2} f_{1,uv} \varphi(e) + \frac{1}{2}(f_{3,uv} - f_{2,v} f_{1,u} - f_{1,uv} f_2)\xi \\
&\quad -\eta(X_u)\varphi(X_v) - \eta(X_v)\varphi(X_u) - g(X_v, \varphi(X_u))\xi \\
&= \frac{1}{2} f_{2,uv} e + \frac{1}{2} f_{1,uv} \varphi(e) + \frac{1}{2}(f_{3,uv} - f_{2,v} f_{1,u} - f_{1,uv} f_2)\xi \\
&\quad -\frac{1}{2}(f_{3,u} - f_2 f_{1,u})(-\frac{1}{2} f_{1,v} e + \frac{1}{2} f_{2,v}\varphi(e)) \\
&\quad -\frac{1}{2}(f_{3,v} - f_2 f_{1,v})(-\frac{1}{2} f_{1,u} e + \frac{1}{2} f_{2,u}\varphi(e)) \\
&\quad +\frac{1}{4}(f_{1,u} f_{2,v} - f_{2,u} f_{1,v})\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{uv} &= \frac{1}{2}\left[f_{2,uv} + \frac{1}{2} f_{1,v}(f_{3,u} - f_2 f_{1,u}) + \frac{1}{2} f_{1,u}(f_{3,v} - f_2 f_{1,v})\right] e \\
&\quad +\frac{1}{2}\left[f_{1,uv} - \frac{1}{2} f_{2,v}(f_{3,u} - f_2 f_{1,u}) - \frac{1}{2} f_{2,u}(f_{3,v} - f_2 f_{1,v})\right]\varphi(e) \\
&\quad +\frac{1}{2}\left[f_{3,uv} - \frac{1}{2} f_{2,v} f_{1,u} - f_{1,uv} f_2 - \frac{1}{2} f_{1,v} f_{2,u}\right]\xi
\end{aligned} \tag{5.31}$$

ve

$$\begin{aligned}
X_{vv} &= \nabla_{X_v} X_v \\
&= \frac{1}{2} f_{2,vv} e + \frac{1}{2} f_{1,vv} \varphi(e) + \frac{1}{2}(f_{3,vv} - f_{2,v} f_{1,v} - f_{1,vv} f_2)\xi \\
&\quad -\eta(X_v)\varphi(X_v) - \eta(X_v)\varphi(X_v) - g(X_v, \varphi(X_v))\xi \\
&= \frac{1}{2} f_{2,vv} e + \frac{1}{2} f_{1,vv} \varphi(e) + \frac{1}{2}(f_{3,vv} - f_{2,v} f_{1,v} - f_{1,vv} f_2)\xi \\
&\quad -2\eta(X_v)\varphi(X_v) - g(X_v, \varphi(X_v))\xi \\
&= \frac{1}{2} f_{2,vv} e + \frac{1}{2} f_{1,vv} \varphi(e) + \frac{1}{2}(f_{3,vv} - f_{2,v} f_{1,v} - f_{1,vv} f_2)\xi \\
&\quad -(f_{3,v} - f_2 f_{1,v})(-\frac{1}{2} f_{1,v} e + \frac{1}{2} f_{2,v}\varphi(e)) \\
&\quad -\left[-\frac{1}{4} f_{1,v} f_{2,v} + \frac{1}{4} f_{2,v} f_{1,v}\right]\xi \\
X_{vv} &= \frac{1}{2}\left[f_{2,vv} + f_{1,v}(f_{3,v} - f_2 f_{1,v})\right] e \\
&\quad +\frac{1}{2}\left[f_{1,vv} - f_{2,v}(f_{3,v} - f_2 f_{1,v})\right]\varphi(e) \\
&\quad +\frac{1}{2}\left[f_{3,vv} - f_{2,v} f_{1,v} - f_{1,vv} f_2\right]\xi
\end{aligned} \tag{5.32}$$

eşitlikleri ile bulunur. Ayrıca yukarıda bulduğumuz X_{uu}, X_{uv} ve X_{vv} türevleri yardımıyla

$$\left.\begin{aligned} l &= g(N, X_{uu}), \\ m &= g(N, X_{uv}), \\ n &= g(N, X_{vv}) \end{aligned}\right\} \tag{5.33}$$

değerleri kolaylıkla hesaplanabilir.

M manifoldu üzerindeki şekil operatörü $S : \chi(M) \to \chi(M)$ şeklinde lineer bir dönüşüm olmak üzere

$$S(X) := \nabla_X N$$

olarak tanımlanır. $\{X_u, X_v\}$ cümlesi $\chi(M)$ in bir bazı oluğundan buradaki her vektör bu baz vektörlerinin lineer birleşimi şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla

$$S(X_u) = aX_u + bX_v$$

olur. Bu eşitliğin her iki yanını önce X_u sonra X_v ile iç çarpım yaparsak

$$g(S(X_u), X_u) = g(aX_u + bX_v, X_u)$$

$$g(S(X_u), X_u) = ag(X_u, X_u) + bg(X_v, X_u)$$

$$g(S(X_u), X_u) = l,\ g(X_u, X_u) = E,\ g(X_v, X_u) = F$$

olduğundan

$$l = aE + bF$$

ve

$$\begin{aligned} g(S(X_u), X_v) &= g(aX_u + bX_v, X_v) \\ g(S(X_u), X_v) &= ag(X_u, X_v) + bg(X_v, X_v) \end{aligned}$$

$$g(S(X_u), X_v) = m,\ g(X_u, X_v) = F,\ g(X_v, X_v) = G$$

olduğundan

$$m = aF + bG$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} a &= \frac{Gl - Fm}{EG - F^2} \\ b &= \frac{Em - Fl}{EG - F^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$S(X_v) = cX_u + dX_v$$

olduğundan benzer mantıkla

$$\begin{aligned} c &= \frac{Gm - Fn}{EG - F^2} \\ d &= \frac{En - Fm}{EG - F^2} \end{aligned}$$

eşitlikleri de kolayca bulunabilir. Bu sayede

$$\begin{aligned} S(X_u) &= \frac{Gl - Fm}{EG - F^2}X_u + \frac{Em - Fl}{EG - F^2}X_v \\ S(X_v) &= \frac{Gm - Fn}{EG - F^2}X_u + \frac{En - Fm}{EG - F^2}X_v \end{aligned}$$

olup M yüzeyine ait Weingarten matrisi

$$S = \begin{bmatrix} \frac{Gl-Fm}{EG-F^2} & \frac{Em-Fl}{EG-F^2} \\ \frac{Gm-Fn}{EG-F^2} & \frac{En-Fm}{EG-F^2} \end{bmatrix} \tag{5.34}$$

dir (Buradaki matris $\{X_u, X_v\}$ bazındadır).

5.3 $\mathbb{E}^3(-3)$ Hemen Hemen Kontak Metrik Manifoldlarda Herhangi Bir Yüzeyin Gauss ve Ortalama Eğriliği

Teorem 5.13 *M, $\mathbb{E}^3(-3)$ Sasaki uzayında bir yüzey olsun. Bu yüzey için Gauss eğriliği*

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} \tag{5.35}$$

dir.

İspat. M, $\mathbb{E}^3(-3)$ Sasaki uzayında bir yüzey olsun. Bu yüzey için şekil operatörünün matrisi

$$S = \begin{bmatrix} \frac{Gl-Fm}{EG-F^2} & \frac{Em-Fl}{EG-F^2} \\ \frac{Gm-Fn}{EG-F^2} & \frac{En-Fm}{EG-F^2} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu yüzey için Gauss eğriliği

$$
\begin{aligned}
K &= \det S \\
&= \left(\frac{Gl-Fm}{EG-F^2}\right)\left(\frac{En-Fm}{EG-F^2}\right)-\left(\frac{Em-Fl}{EG-F^2}\right)\left(\frac{Gm-Fn}{EG-F^2}\right) \\
&= \frac{EGln-FGmn-EFmn+F^2m^2-EGm^2+EFmn+GFml-F^2ln}{\left(EG-F^2\right)^2} \\
&= \frac{EG\left(ln-m^2\right)-F^2\left(ln-m^2\right)}{\left(EG-F^2\right)^2} \\
&= \frac{\left(EG-F^2\right)\left(ln-m^2\right)}{\left(EG-F^2\right)^2} \\
&= \frac{ln-m^2}{EG-F^2}
\end{aligned}
$$

olur. ■

Teorem 5.14 *M, $\mathbb{E}^3(-3)$ de bir yüzey olsun. S, M üzerinde şekil operatörü matrisi ve $\chi(M)$ in bir bazı $\{u,v\}$ olsun. Bu durumda K, M nin Gauss eğriliği olmak üzere*

$$S(u)\wedge S(v)=K\ \ (u\wedge v)\,, \tag{5.36}$$

$$g(S(u)\wedge S(v),u\wedge v)=K.\left\|u\wedge v\right\|^2, \tag{5.37}$$

$$K=\frac{g(S(u),u)g(S(v),v)-g(S(u),v)g(S(v),u)}{g(u,u)g(v,v)-g(u,v)g(v,u)} \tag{5.38}$$

dır.

İspat. $\chi(M)$ in bir bazı $\{u,v\}$ ve $S(u),S(v)\in\chi(M)$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
S(u) &= au+bv \\
S(v) &= cu+dv
\end{aligned}
$$

eşitlikleri yardımıyla

$$
\begin{aligned}
S(u)\wedge S(v) &= (au+bv)\wedge(cu+dv) \\
&= ac(u\wedge u)+ad(u\wedge v)+bc(v\wedge u)+bd(v\wedge v) \\
&= ad(u\wedge v)-bc(u\wedge v) \\
&= (ad-bc)(u\wedge v) \\
&= detS.(u\wedge v) \\
&= K.(u\wedge v)
\end{aligned}
$$

olur. (5.36) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned} g(S(u) \wedge S(v), u \wedge v) &= g(K.(u \wedge v), u \wedge v) \\ &= Kg(u \wedge v, u \wedge v) \\ &= K(g(u,u)g(v,v) - g(u,v)g(v,u)) \quad (5.39) \\ &= K. \|u \wedge v\|^2 \end{aligned}$$

dır.

$$g(X \wedge Y, Z \wedge W) = g(X,Z)g(Y,W) - g(Y,Z)g(X,W)$$

eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} g(S(u) \wedge S(v), u \wedge v) &= g(S(u),u)g(S(v),v) \\ &\quad - g(S(v),u)g(S(u),v) \quad (5.40) \end{aligned}$$

olup. (5.39)ve (5.40) denklemleri yardımıyla

$$g(S(u),u)g(S(v),v) - g(S(v),u)g(S(u),v) = K(g(u,u)g(v,v) - g(u,v)g(v,u))$$

ve

$$K = \frac{g(S(u),u)g(S(v),v) - g(S(u),v)g(S(v),u)}{g(u,u)g(v,v) - g(u,v)g(v,u)}$$

bulunur. ■

Teorem 5.15 *M, $\mathbb{E}^3(-3)$ Sasaki uzayında bir yüzey olsun. Bu yüzey için ortalama eğrilik*

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{Gl + En - 2Fm}{EG - F^2}\right) \quad (5.41)$$

dir.

İspat. M, $\mathbb{E}^3(-3)$ Sasaki uzayında bir yüzey olsun. Bu yüzey için şekil operatörünün matrisi

$$S = \begin{bmatrix} \frac{Gl-Fm}{EG-F^2} & \frac{Em-Fl}{EG-F^2} \\ \frac{Gm-Fn}{EG-F^2} & \frac{En-Fm}{EG-F^2} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu yüzey için ortalama eğrilik

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}S = \frac{1}{2}\left(\frac{Gl - Fm + En - Fm}{EG - F^2}\right) \\ H &= \frac{1}{2}\left(\frac{Gl + En - 2Fm}{EG - F^2}\right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. ■

Teorem 5.16 *M, $\mathbb{E}^3(-3)$ de bir yüzey olsun. S , M üzerinde şekil operatörünün matrisi ve $\chi(M)$ in bir bazı $\{u,v\}$ olsun. Bu durumda H, M nin ortalama eğriliği olmak üzere*

$$S(u)\wedge v + u\wedge S(v) = 2H\ u\wedge v, \tag{5.42}$$

$$g(S(u)\wedge v + u\wedge S(v), u\wedge v) = 2H.\left\|u\wedge v\right\|^2, \tag{5.43}$$

$$2H = \frac{g(S(u),u)g(v,v) - g(S(u),v)g(v,u) + g(u,u)g(S(v),v) - g(S(v),u)g(v,u)}{g(u,u)g(v,v) - g(u,v)g(v,u)} \tag{5.44}$$

olur.

İspat. $\chi(M)$ in bir bazı $\{u,v\}$ ve $S(u), S(v)\in\chi(M)$ olduğundan

$$\begin{aligned} S(u) &= au + bv \\ S(v) &= cu + dv \end{aligned}$$

eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} S(u)\wedge v + u\wedge S(v) &= (au+bv)\wedge v + u\wedge(cu+dv) \\ &= a(u\wedge v) + b(v\wedge v) + c(u\wedge u) + d(u\wedge v) \\ &= (a+d)(u\wedge v) \\ &= 2H(u\wedge v) \end{aligned}$$

olur. (5.42) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned} g(S(u)\wedge v + u\wedge S(v), u\wedge v) &= g(2H(\ u\wedge v), u\wedge v) \\ &= 2Hg(u\wedge v, u\wedge v) \\ &= 2H(g(u,u)g(v,v) - g(u,v)g(v,u)) \qquad (5.45) \\ &= 2H.\left\|u\wedge v\right\|^2 \end{aligned}$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned} g(S(u)\wedge v + u\wedge S(v), u\wedge v) &= g(S(u)\wedge v, u\wedge v) + g(u\wedge S(v), u\wedge v) \\ &= g(S(u),u)g(v,v) - g(v,u)g(S(u),v) + \\ &\quad g(u,u)g(S(v),v) - g(S(v),u)g(v,u) \qquad (5.46) \end{aligned}$$

olup. (5.45)ve (5.46) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} 2H(g(u,u)g(v,v)-g(u,v)g(v,u)) &= g(S(u),u)g(v,v)-g(v,u)g(S(u),v)+ \\ & \quad g(u,u)g(S(v),v)-g(S(v),u)g(v,u) \end{aligned}$$

$$2H = \frac{g(S(u),u)g(v,v)-g(S(u),v)g(v,u)+g(u,u)g(S(v),v)-g(S(v),u)g(v,u)}{g(u,u)g(v,v)-g(u,v)g(v,u)}$$

olur. ■

Sonuç 5.1 *M, $\mathbb{E}^3(-3)$ de bir yüzey olsun. S , M üzerinde şekil operatörünün matrisi ve $\chi(M)$ in bir bazı $\{X_u, X_v\}$ olsun. Bu durumda K, M nin Gauss eğriliği, H, M nin ortalama eğriliği olmak üzere*

$$\begin{aligned} K &= \frac{g(S(X_u),X_u)g(S(X_v),X_v)-g(S(X_u),X_v)g(S(X_v),X_u)}{g(X_u,X_u)g(X_v,X_v)-g(X_u,X_v)g(X_v,X_u)} \\ &= \frac{ln-m^2}{EG-F^2} \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} 2H &= \frac{g(S(X_u),X_u)g(X_v,X_v)-g(S(X_u),X_v)g(X_v,X_u)+g(X_u,X_u)g(S(X_v),X_v)}{g(X_u,X_u)g(X_v,X_v)-g(X_u,X_v)g(X_v,X_u)} \\ & \quad -\frac{g(S(X_v),X_u)g(X_v,X_u)}{g(X_u,X_u)g(X_v,X_v)-g(X_u,X_v)g(X_v,X_u)} \end{aligned}$$

bulunur.

5.4 $\mathbb{E}^{2n+1}(-3)$ Hemen Hemen Kontak Metrik Manifoldlarda Kovaryant Türev Operatörü

Tanım 5.3 *$\mathbb{E}^{2n+1}(-3)$ hemen hemen kontak metrik manifoldunda*

$$g_{ab} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \delta_{ij}+y_iy_j & 0 & -y_i \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -y_j & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ise

$$g^{ab} = 4\begin{bmatrix} \delta_{ij} & 0 & y_i \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \\ y_j & 0 & 1+\sum(y^i)^2 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Burada

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kh} (g_{ih,\ j} + g_{hj,\ i} + g_{ij,\ h})$$

Christoffel sembolleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
\nabla_e \varphi(e) &= \xi = -\nabla_{\varphi(e)} e \\
\nabla_\xi e &= -\varphi(e) = \nabla_e \xi \\
\nabla_\xi \varphi(e) &= e = \nabla_{\varphi(e)} \xi \\
\nabla_e e &= \nabla_{\varphi(e)} \varphi(e) = \nabla_\xi \xi = 0
\end{aligned}$$

olduğundan $X = x_1 e + x_2 \varphi(e) + x_3 \xi$ *ve* $Y = y_1 e + y_2 \varphi(e) + y_3 \xi$ *vektör alanları için*

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_X \ y_1 e + y_2 \varphi(e) + y_3 \xi \\
&= \nabla_X \ (y_1 e) + \nabla_X (y_2 \varphi(e)) + \nabla_X (y_3 \xi) \\
&= X\left[y_1\right] e + y_1 \nabla_X e + X\left[y_2\right] \varphi(e) + y_2 \nabla_X \varphi(e) \\
&\quad + X\left[y_3\right] \xi + y_3 \nabla_X \xi \\
&= X\left[y_1\right] e + X\left[y_2\right] \varphi(e) + X\left[y_3\right] \xi \\
&\quad + y_1 \nabla_{x_1 e + x_2 \varphi(e) + x_3 \xi} e + y_2 \nabla_{x_1 e + x_2 \varphi(e) + x_3 \xi} \varphi(e) \\
&\quad + y_3 \nabla_{x_1 e + x_2 \varphi(e) + x_3 \xi} \xi \\
&= X\left[y_1\right] e + X\left[y_2\right] \varphi(e) + X\left[y_3\right] \xi \\
&\quad + y_1 (x_1 \nabla_e e + x_2 \nabla_{\varphi(e)} e + x_3 \nabla_\xi e) \\
&\quad + y_2 (x_1 \nabla_e \varphi(e) + x_2 \nabla_{\varphi(e)} \varphi(e) + x_3 \nabla_\xi \varphi(e)) \\
&\quad + y_3 (x_1 \nabla_e \xi + x_2 \nabla_{\varphi(e)} \xi + x_3 \nabla_\xi \xi)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= D_X Y + x_1 y_2 \xi - x_1 y_3 \varphi(e) + x_2 y_1 \xi + x_2 y_3 e - x_3 y_1 \varphi(e) + x_3 y_2 \\
&= D_X Y - y_3 (x_1 \varphi(e) - x_2 e) - x_3 (y_1 \varphi(e) - y_2 e) + \xi (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\
&= D_X Y - \eta(Y) \varphi(X) - \eta(X) \varphi(Y) - \xi (x_2 y_1 - x_1 y_2) \\
&= D_X Y - \eta(Y) \varphi(X) - \eta(X) \varphi(Y) - g(X, \varphi(Y)) \xi \\
&= D_X Y - \eta(Y) \varphi(X) - \eta(X) \varphi(Y) - d\eta(X, Y) \xi
\end{aligned} \tag{5.47}$$

olarak bulunur. Burada $D_X Y = X\left[y_1\right] e + X\left[y_2\right] \varphi(e) + X\left[y_3\right] \xi$ *dır.*

5.5 $\mathbb{E}^3(-3)$ Hemen Hemen Kontak Metrik Manifoldlarda Gauss Egregium Teoremi

Teorem 5.17 *$\mathbb{E}^3(-3)$ üzerinde bir*

$$\begin{aligned} X &: \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^3(-3) \\ &: (u,v) \longmapsto X(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v)) \end{aligned}$$

yüzeyi için Gauss-Egregium teoremi

$$\begin{aligned} K &= \frac{E_uG_u + E_v^2}{4E^2G} - \frac{1}{E}\left\{(\frac{E_v}{2G})_v + (\frac{G_u}{2G})_u\right\} - \frac{E_vG_v + G_u^2}{4EG^2} \\ &\quad +3G - \eta^2(\frac{4G}{E}X_u + 4X_v) \end{aligned} \tag{5.48}$$

denklemi ile ifade edilir. Burada kullanılan değişkenler ispat içinde tanımlanmıştır.

İspat. M, $\mathbb{E}^3(-3)$ de bir yüzey olsun. M nin parametrik ifadesi

$$\begin{aligned} X &: \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^3(-3) \\ &: (u,v) \longmapsto X(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v)) \end{aligned}$$

olmak üzere $\chi(M)$ nin bir $\{X_u, X_v\}$ lineer bağımsız cümlesini ele alalım.

$$\left.\begin{aligned} X_u &= (\tfrac{1}{2}f_{2,u}, \tfrac{1}{2}f_{1,u}, \tfrac{1}{2}(f_{3,u} - f_2f_{1,u})), \\ X_v &= (\tfrac{1}{2}f_{2,v}, \tfrac{1}{2}f_{1,v}, \tfrac{1}{2}(f_{3,v} - f_2f_{1,v})) \end{aligned}\right\} \tag{5.49}$$

Şimdi, sırasıyla, X_{uu}, X_{uv}, X_{vu}, X_{vv} vektör alanlarını bulalım.

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \nabla_{X_u}X_u \\ &= (\frac{1}{2}f_{2,uu} + \frac{1}{2}f_{1,u}(f_{3,u} - f_2f_{1,u}))e + (\frac{1}{2}f_{1,uu} - \frac{1}{2}f_{2,u}(f_{3,u} - f_2f_{1,u}))\varphi(e) \\ &\quad +(\frac{1}{2}f_{3,uu} - \frac{1}{2}(f_{2,u}f_{1,u} + f_{1,uu}f_2))\xi. \end{aligned} \tag{5.50}$$

$$\begin{aligned} X_{vv} &= \nabla_{X_v}X_v \\ &= (\frac{1}{2}f_{2,vv} + \frac{1}{2}f_{1,v}(f_{3,v} - f_2f_{1,v}))e + (\frac{1}{2}f_{1,vv} - \frac{1}{2}f_{2,v}(f_{3,v} - f_2f_{1,v}))\varphi(e) \\ &\quad +(\frac{1}{2}f_{3,vv} - \frac{1}{2}(f_{2,v}f_{1,v} + f_{1,vv}f_2))\xi. \end{aligned} \tag{5.51}$$

$$\begin{aligned}
X_{uv} &= \nabla_{X_v} X_u \\
&= (\frac{1}{2}f_{2,uv} + \frac{1}{4}(f_{1,v}f_{3,u} + f_{1,u}f_{3,v}) - \frac{1}{2}f_2 f_{1,u}f_{1,v})e \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}f_{1,uv} - \frac{1}{4}(f_{2,v}f_{3,u} + f_{2,u}f_{3,v}) + \frac{1}{4}f_2(f_{1,u}f_{2,v} + f_{2,u}f_{1,v})\right)\varphi(e) \\
&\quad +(\frac{1}{2}f_{3,uv} - \frac{1}{4}(f_{2,v}f_{1,u} + f_{2,u}f_{1,v}) - \frac{1}{2}f_2 f_{1,uv})\xi. \qquad (5.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{vu} &= \nabla_{X_u} X_v \\
&= (\frac{1}{2}f_{2,vu} + \frac{1}{4}(f_{1,v}f_{3,u} + f_{1,u}f_{3,v}) - \frac{1}{2}f_2 f_{1,u}f_{1,v})e \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}f_{1,vu} - \frac{1}{4}(f_{2,v}f_{3,u} + f_{2,u}f_{3,v}) + \frac{1}{4}f_2(f_{1,u}f_{2,v} + f_{2,u}f_{1,v})\right)\varphi(e) \\
&\quad +(\frac{1}{2}f_{3,vu} - \frac{1}{4}(f_{2,v}f_{1,u} + f_{2,u}f_{1,v}) - \frac{1}{2}f_2 f_{1,vu})\xi \qquad (5.53)
\end{aligned}$$

olup açıkça görülüyor ki,

$$X_{uv} = X_{vu}$$

olur. Burada yukarıda elde ettiğimiz ikinci mertebeden türevler yardımıyla üçüncü mertebeden türevleri elde edelim.

$$\begin{aligned}
X_{uuv} &= \nabla_{X_v} X_{uu} \\
&= \frac{1}{2}\left(f_{2,uuv} + f_{1,uv}(f_{3,u} - f_2 f_{1,u}) + f_{1,u}(f_{3,uv} - f_{2,v}f_{1,u} - f_{1,uv}f_2)\right)e \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(f_{1,uuv} - f_{2,uv}(f_{3,u} - f_2 f_{1,u}) - f_{2,u}(f_{3,uv} - f_{2,v}f_{1,u} - f_{1,uv}f_2)\right)\varphi(e) \\
&\quad +\frac{1}{2}(f_{3,uuv} - f_{2,uv}f_{1,u} - f_{1,uv}f_{2,u} - f_{1,uuv}f_2 - f_{1,uu}f_{2,v})\xi \\
&\quad -\eta(X_v)\varphi(X_{uu}) - \eta(X_{uu})\varphi(X_v) - d\eta(X_v, X_{uu})\xi.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{uuv} &= \left(\frac{1}{2}f_{2,uuv} + \frac{1}{2}f_{1,uv}(f_{3,u} - f_2 f_{1,u}) + \frac{1}{2}f_{1,u}(f_{3,uv} - f_{2,v}f_{1,u} - f_{1,uv}f_2)\right)e \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}f_{1,uuv} - \frac{1}{2}f_{2,uv}(f_{3,u} - f_2 f_{1,u}) - \frac{1}{2}f_{2,u}(f_{3,uv} - f_{2,v}f_{1,u} - f_{1,uv}f_2)\right)\varphi(e) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}f_{3,uuv} - \frac{1}{2}(f_{2,uv}f_{1,u} + f_{1,uv}f_{2,u} + f_{1,uuv}f_2 + f_{1,uu}f_{2,v})\right)\xi \\
&\quad -\frac{1}{2}(f_{3,v} - f_2 f_{1,v})\left(-\frac{1}{2}\left(f_{1,uu} - f_{2,u}(f_{3,u} - f_2 f_{1,u})\right)e\right. \\
&\quad \left.+ \frac{1}{2}\left(f_{2,uu} + f_{1,u}(f_{3,u} - f_2 f_{1,u})\right)\varphi(e)\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}(f_{3,uu} - f_{2,u}f_{1,u} - f_{1,uu}f_2)\left(-\frac{1}{2}f_{1,v}e + \frac{1}{2}f_{2,v}\varphi(e)\right)
\end{aligned}$$

$$-\left(\frac{1}{2}f_{2,v}(-\frac{1}{2}(f_{1,uu}-f_{2,u}(f_{3,u}-f_2f_{1,u}))+\frac{1}{2}f_{1,v}(\frac{1}{2}(f_{2,uu}+f_{1,u}(f_{3,u}-f_2f_{1,u}))\right)\xi.$$

X_{uuv} değeri $\{e,\varphi(e),\xi\}$ baz vektörlerine göre düzenlenirse

$$\begin{aligned}
X_{uuv} &= \left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}f_{2,uuv}+\frac{1}{2}f_{1,uv}(f_{3,u}-f_2f_{1,u})+\frac{1}{2}f_{1,u}(f_{3,uv}-f_{2,v}f_{1,u}-f_{1,uv}f_2)\\ \frac{1}{4}(f_{3,v}-f_2f_{1,v})(f_{1,uu}-f_{2,u}(f_{3,u}-f_2f_{1,u}))\\ +\frac{1}{4}f_{1,v}(f_{3,uu}-f_{2,u}f_{1,u}-f_{1,uu}f_2)\end{array}\right\}e\\
&+\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}f_{1,uuv}-\frac{1}{2}f_{2,uv}(f_{3,u}-f_2f_{1,u})-\frac{1}{2}f_{2,u}(f_{3,uv}-f_{2,v}f_{1,u}-f_{1,uv}f_2)\\ -\frac{1}{4}f_{2,uu}(f_{3,v}-f_2f_{1,v})-\frac{1}{4}f_{1,u}(f_{3,v}-f_2f_{1,v})(f_{3,u}-f_2f_{1,u})\\ -\frac{1}{4}f_{2,v}(f_{3,uu}-f_{2,u}f_{1,u}-f_{1,uu}f_2)\end{array}\right\}\varphi(e)\\
&+\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}f_{3,uuv}-\frac{1}{2}f_{2,uv}f_{1,u}-\frac{1}{2}f_{1,uv}f_{2,u}-\frac{1}{2}f_{1,uuv}f_2-\frac{1}{4}f_{1,uu}f_{2,v}\\ -\frac{1}{4}f_{2,u}f_{2,v}(f_{3,u}-f_2f_{1,u})-\frac{1}{4}f_{1,v}f_{2,uu}-\frac{1}{4}f_{1,u}f_{1,v}(f_{3,u}-f_2f_{1,u})\end{array}\right\}\xi
\end{aligned}$$

olup gerekli sadeleştirmelerle

$$\begin{aligned}
X_{uuv} &= \left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}f_{2,uuv}+\frac{1}{2}f_{1,uv}f_{3,u}-\frac{1}{2}f_{1,uv}f_2f_{1,u}+\frac{1}{2}f_{1,u}f_{3,uv}-\frac{1}{2}f_{1,u}^2f_{2,v}\\ -\frac{1}{2}f_{1,u}f_{1,uv}f_2)+\frac{1}{4}f_{3,v}f_{1,uu}-\frac{1}{4}f_{3,v}f_{2,u}f_{3,u}+\frac{1}{4}f_{3,v}f_2f_{2,u}f_{1,u}\\ -\frac{1}{4}f_2f_{1,v}f_{1,uu}+\frac{1}{4}f_2f_{1,v}f_{2,u}f_{3,u}-\frac{1}{4}f_2^2f_{1,v}f_{2,u}f_{1,u}+\frac{1}{4}f_{1,v}f_{3,uu}\\ -\frac{1}{4}f_{1,v}f_{2,u}f_{1,u}-\frac{1}{4}f_{1,v}f_{1,uu}f_2\end{array}\right\}e\\
&+\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}f_{1,uuv}-\frac{1}{2}f_{2,uv}f_{3,u}+\frac{1}{2}f_{2,uv}f_2f_{1,u}-\frac{1}{2}f_{2,u}f_{3,uv}\\ +\frac{1}{2}f_{2,u}f_{2,v}f_{1,u}+\frac{1}{2}f_{2,u}f_{1,uv}f_2-\frac{1}{4}f_{2,uu}f_{3,v}+\frac{1}{4}f_{2,uu}f_2f_{1,v}\\ -\frac{1}{4}f_{1,u}f_{3,v}f_{3,u}+\frac{1}{4}f_{1,u}^2f_{3,v}f_2+\frac{1}{4}f_{1,u}f_{3,u}f_2f_{1,v}-\frac{1}{4}f_{1,u}^2f_2^2f_{1,v}\\ -\frac{1}{4}f_{2,v}f_{3,uu}+\frac{1}{4}f_{2,v}f_{2,u}f_{1,u}+\frac{1}{4}f_{2,v}f_{1,uu}f_2)\end{array}\right\}\varphi(e)\\
&+\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}f_{3,uuv}-\frac{1}{2}f_{2,uv}f_{1,u}-\frac{1}{2}f_{1,uv}f_{2,u}-\frac{1}{2}f_{1,uuv}f_2\\ -\frac{1}{4}f_{1,uu}f_{2,v}-\frac{1}{4}f_{2,u}f_{2,v}f_{3,u}+\frac{1}{4}f_{2,u}f_{2,v}f_2f_{1,u})\\ -\frac{1}{4}f_{1,v}f_{2,uu}-\frac{1}{4}f_{1,u}f_{1,v}f_{3,u}+\frac{1}{4}f_{1,u}^2f_{1,v}f_2)\end{array}\right\}\xi \qquad (5.54)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer mantıkla

$$
\begin{aligned}
X_{uvu} &= \nabla_{X_u} X_{uv} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} f_{2,uvu}+\frac{1}{2}(f_{1,vu}(f_{3,u}-f_2f_{1,u})+f_{1,v}(f_{3,uu}-f_{2,u}f_{1,u}-f_{1,uu}f_2)) \\ +\frac{1}{2}(f_{1,uu}(f_{3,v}-f_2f_{1,v})+f_{1,u}(f_{3,vu}-f_{2,u}f_{1,v}-f_{1,vu}f_2)) \end{array}\right\} e \\
&+\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} f_{1,uvu}-\frac{1}{2}(f_{2,vu}(f_{3,u}-f_2f_{1,u})+f_{2,v}(f_{3,uu}-f_{2,u}f_{1,u}-f_{1,uu}f_2)) \\ -\frac{1}{2}(f_{2,uu}(f_{3,v}-f_2f_{1,v})+f_{2,u}(f_{3,vu}-f_{2,u}f_{1,v}-f_{1,vu}f_2 \end{array}\right\} \varphi(e) \\
&+\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} f_{3,uvu}-\frac{1}{2}(f_{2,vu}f_{1,u}+f_{2,v}f_{1,uu})-(f_{1,uvu}f_2+f_{2,u}f_{1,uv}) \\ -\frac{1}{2}(f_{1,vu}f_{2,u}+f_{2,uu}f_{1,v}) \end{array}\right\} \xi \\
&-\eta(X_u)\varphi(X_{uv})-\eta(X_{uv})\varphi(X_u)-d\eta(X_u,X_{uv})\xi
\end{aligned}
$$

ifadesi düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
X_{uvu} &= \left\{\begin{array}{c} \frac{1}{2}f_{2,uvu}+\frac{1}{4}(f_{1,vu}f_{3,u}+f_{1,v}f_{3,uu}+f_{1,uu}f_{3,v}+f_{1,u}f_{3,vu}) \\ -\frac{1}{2}(f_{1,u}f_{1,v}f_{2,u}-\frac{1}{2}f_2(f_{1,uu}f_{1,v}+f_{1,vu}f_{1,u} \end{array}\right\} e \\
&+\left\{\begin{array}{c} \frac{1}{2}f_{1,uvu}-\frac{1}{4}(f_{2,vu}f_{3,u}+f_{2,uu}f_{3,v}+f_{3,uu}f_{2,v}+f_{3,vu}f_{2,u}) \\ +\frac{1}{4}f_{2,u}(f_{1,u}f_{2,v}+f_{1,v}f_{2,u})+\frac{1}{4}f_2(f_{2,vu}f_{1,u}+f_{1,uu}f_{2,v} \\ +f_{2,uu}f_{1,v}+f_{1,vu}f_{2,u}) \end{array}\right\} \varphi(e) \\
&+\left\{\begin{array}{c} \frac{1}{2}f_{3,uvu}-\frac{1}{4}(f_{2,vu}f_{1,u}+f_{1,uu}f_{2,v}+f_{1,vu}f_{2,u}+f_{2,uu}f_{1,v}) \\ -\frac{1}{2}(f_{2,u}f_{1,uv}+f_2f_{1,uvu}) \end{array}\right\} \xi \\
&-\frac{1}{2}(f_{3,u}-f_2f_{1,u})\left\{\begin{array}{c} (-\frac{1}{2}f_{1,uv}+\frac{1}{4}(f_{2,v}f_{3,u}+f_{2,u}f_{3,v}) \\ -\frac{1}{4}f_2(f_{1,u}f_{2,v}+f_{2,u}f_{1,v}))e \\ (\frac{1}{2}f_{2,uv}+\frac{1}{4}(f_{1,v}f_{3,u}+f_{1,u}f_{3,v}) \\ -\frac{1}{2}f_2f_{1,u}f_{1,v})\varphi(e) \end{array}\right\} \\
&-(\frac{1}{2}f_{3,uv}-\frac{1}{4}(f_{2,v}f_{1,u}+f_{1,v}f_{2,u})-\frac{1}{2}f_{1,uv}f_2)(-\frac{1}{2}f_{1,u}e+\frac{1}{2}f_{2,u}\varphi(e)) \\
&+\left\{\frac{1}{2}f_{2,u}\left(-\frac{1}{2}f_{1,uv}+\frac{1}{4}(f_{2,v}f_{3,u}+f_{2,u}f_{3,v})-\frac{1}{4}f_2(f_{1,u}f_{2,v}+f_{2,u}f_{1,v})\right)\right. \\
&\left.\frac{1}{2}f_{1,u}\left(\frac{1}{2}f_{2,uv}+\frac{1}{4}(f_{1,v}f_{3,u}+f_{1,u}f_{3,v})-\frac{1}{2}f_2f_{1,u}f_{1,v}\right)\right\}\xi
\end{aligned}
$$

$$
X_{uvu} = \left\{\begin{array}{c} \frac{1}{2}f_{2,uvu}+\frac{1}{4}f_{1,vu}f_{3,u}+\frac{1}{4}f_{3,uu}f_{1,v}+\frac{1}{4}f_{1,uu}f_{3,v}+\frac{1}{4}f_{3,vu}f_{1,u} \\ -\frac{1}{2}f_{1,u}f_{1,v}f_{2,u}-\frac{1}{2}f_2f_{1,uu}f_{1,v}-\frac{1}{2}f_2f_{1,vu}f_{1,u}+\frac{1}{4}f_{1,uv}f_{3,u} \\ -\frac{1}{4}f_{1,uv}f_2f_{1,u}-\frac{1}{8}f_{3,u}^2f_{2,v}-\frac{1}{8}f_{3,u}f_{2,u}f_{3,v}+\frac{1}{8}f_2f_{1,u}f_{2,v}f_{3,u} \\ +\frac{1}{8}f_2f_{1,u}f_{2,u}f_{3,v}+\frac{1}{8}f_2f_{3,u}f_{1,u}f_{2,v}+\frac{1}{8}f_2f_{3,u}f_{2,u}f_{1,v}-\frac{1}{8}f_2^2f_{1,u}^2f_{2,v} \\ -\frac{1}{8}f_2^2f_{1,u}f_{2,u}f_{1,v}+\frac{1}{4}f_{1,u}f_{3,uv}-\frac{1}{8}f_{1,u}^2f_{2,v}-\frac{1}{4}f_{1,u}f_{1,uv}f_2-\frac{1}{8}f_{1,u}f_{1,v}f_{2,u} \end{array}\right\} e
$$

$$+\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}f_{1,uvu}-\frac{1}{4}f_{2,vu}f_{3,u}-\frac{1}{4}f_{2,uu}f_{3,v}-\frac{1}{4}f_{3,uu}f_{2,v}-\frac{1}{4}f_{3,vu}f_{2,u}\\+\frac{1}{4}f_{1,u}f_{2,u}f_{2,v}+\frac{1}{4}f_{1,v}f_{2,u}^{2}+\frac{1}{4}f_{2}f_{1,u}f_{2,vu}+\frac{1}{4}f_{2}f_{2,v}f_{1,uu}\\+\frac{1}{4}f_{2}f_{2,uu}f_{1,v}+\frac{1}{4}f_{2}f_{1,vu}f_{2,u}-\frac{1}{4}f_{2,uv}f_{3,u}+\frac{1}{4}f_{2}f_{2,uv}f_{1,u}\\-\frac{1}{8}f_{3,u}^{2}f_{1,v}-\frac{1}{8}f_{3,u}f_{1,u}f_{3,v}+\frac{1}{8}f_{2}f_{1,u}f_{1,v}f_{3,u}+\frac{1}{8}f_{2}f_{1,u}^{2}f_{3,v}\\+\frac{1}{4}f_{2}f_{1,u}f_{1,v}f_{3,u}-\frac{1}{4}f_{2}^{2}f_{1,u}^{2}f_{1,v}-\frac{1}{4}f_{2,u}f_{3,uv}+\frac{1}{8}f_{1,u}f_{2,u}f_{2,v}\\+\frac{1}{4}f_{2,u}f_{1,uv}f_{2}+\frac{1}{8}f_{1,v}f_{2,u}^{2}\end{array}\right\}\varphi(e)$$

$$+\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}f_{3,uvu}-\frac{1}{4}f_{2,vu}f_{1,u}-\frac{1}{4}f_{1,uu}f_{2,v}-\frac{1}{4}f_{1,vu}f_{2,u}-\frac{1}{4}f_{2,uu}f_{1,v}\\-\frac{1}{2}f_{2,u}f_{1,uv}-\frac{1}{2}f_{2}f_{1,uvu}+\frac{1}{4}f_{2,u}f_{1,uv}-\frac{1}{8}f_{2,u}f_{2,v}f_{3,u}-\frac{1}{8}f_{2,u}^{2}f_{3,v}\\+\frac{1}{8}f_{2}f_{2,u}f_{1,u}f_{2,v}+\frac{1}{8}f_{2}f_{2,u}^{2}f_{1,v}-\frac{1}{4}f_{1,u}f_{2,uv}-\frac{1}{8}f_{1,u}f_{1,v}f_{3,u}\\-\frac{1}{8}f_{1,u}^{2}f_{3,v}+\frac{1}{4}f_{2}f_{1,u}^{2}f_{1,v}\end{array}\right\}\xi \tag{5.55}$$

olup buradan

$$\begin{aligned}X_{uuv}-X_{uuv} \;=\;& \left\{\begin{array}{c}-\frac{3}{8}f_{1,u}\left(f_{1,u}f_{2,v}-f_{2,u}f_{1,v}\right)-\frac{1}{8}f_{2,u}\left(f_{3,v}-f_{2}f_{1,v}\right)\left(f_{3,u}-f_{2}f_{1,u}\right)\\+\frac{1}{8}f_{2,v}\left(f_{3,u}-f_{2}f_{1,u}\right)^{2}\end{array}\right\}e\\&+\left\{\begin{array}{c}\frac{3}{8}f_{2,u}\left(f_{1,u}f_{2,v}-f_{2,u}f_{1,v}\right)+\frac{1}{8}f_{1,v}\left(f_{3,u}-f_{2}f_{1,u}\right)^{2}\\-\frac{1}{8}f_{1,u}\left(f_{3,u}-f_{2}f_{1,u}\right)\left(f_{3,v}-f_{2}f_{1,v}\right)\end{array}\right\}\varphi(e)\\&+\left\{\begin{array}{c}-\frac{1}{8}\left(f_{3,u}-f_{2}f_{1,u}\right)\left(f_{1,u}f_{1,v}+f_{2,u}f_{2,v}\right)\\+\frac{1}{8}\left(f_{3,v}-f_{2}f_{1,v}\right)\left(f_{1,u}^{2}+f_{2,u}^{2}\right)\end{array}\right\}\xi\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\{X_u, X_v\}$ ortogonal olduğundan

$$g(X_u, X_v) = 0$$

$$\frac{1}{4}f_{2,u}f_{2,v}+\frac{1}{4}f_{1,u}f_{1,v}+\frac{1}{4}(f_{3,u}-f_{2}f_{1,u})(f_{3,v}-f_{2}f_{1,v})=0$$

olur.

$$-(f_{3,u}-f_{2}f_{1,u})(f_{3,v}-f_{2}f_{1,v})=f_{1,u}f_{1,v}+f_{2,u}f_{2,v}$$

ve

$$f_{1,u}^{2}+f_{2,u}^{2}=4E-\left(f_{3,u}-f_{2}f_{1,u}\right)^{2}$$

eşitlikleri $X_{uuv} - X_{uuv}$ eşitliğinde yerine yazılacak olursa

$$
\begin{aligned}
X_{uuv} - X_{uuv} \quad = \quad & \left\{ \begin{array}{c} -\frac{3}{8} f_{1,u} \left(f_{1,u} f_{2,v} - f_{2,u} f_{1,v} \right) - \frac{1}{8} f_{2,u} \left(f_{3,v} - f_{2} f_{1,v} \right) \left(f_{3,u} - f_{2} f_{1,u} \right) \\ +\frac{1}{8} f_{2,v} \left(f_{3,u} - f_{2} f_{1,u} \right)^{2} \end{array} \right\} e \\
& + \left\{ \begin{array}{c} \frac{3}{8} f_{2,u} \left(f_{1,u} f_{2,v} - f_{2,u} f_{1,v} \right) + \frac{1}{8} f_{1,v} \left(f_{3,u} - f_{2} f_{1,u} \right)^{2} \\ -\frac{1}{8} f_{1,u} \left(f_{3,u} - f_{2} f_{1,u} \right) \left(f_{3,v} - f_{2} f_{1,v} \right) \end{array} \right\} \varphi(e) \\
& + \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{8} \left(f_{3,u} - f_{2} f_{1,u} \right)^{2} \left(f_{3,v} - f_{2} f_{1,v} \right) \\ +\frac{1}{8} \left(f_{3,v} - f_{2} f_{1,v} \right) \left(4E - \left(f_{3,u} - f_{2} f_{1,u} \right)^{2} \right) \end{array} \right\} \xi
\end{aligned}
$$

ifadesi düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
X_{uuv} - X_{uuv} \quad = \quad & \left\{ \begin{array}{c} -\frac{3}{8} f_{1,u} \left(f_{1,u} f_{2,v} - f_{2,u} f_{1,v} \right) - \frac{1}{8} f_{2,u} \left(f_{3,v} - f_{2} f_{1,v} \right) \left(f_{3,u} - f_{2} f_{1,u} \right) \\ +\frac{1}{8} f_{2,v} \left(f_{3,u} - f_{2} f_{1,u} \right)^{2} \end{array} \right\} e \\
& + \left\{ \begin{array}{c} \frac{3}{8} f_{2,u} \left(f_{1,u} f_{2,v} - f_{2,u} f_{1,v} \right) + \frac{1}{8} f_{1,v} \left(f_{3,u} - f_{2} f_{1,u} \right)^{2} \\ -\frac{1}{8} f_{1,u} \left(f_{3,u} - f_{2} f_{1,u} \right) \left(f_{3,v} - f_{2} f_{1,v} \right) \end{array} \right\} \varphi(e) \\
& + \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{8} \left(f_{3,u} - f_{2} f_{1,u} \right)^{2} \left(f_{3,v} - f_{2} f_{1,v} \right) \\ -\frac{1}{8} \left(f_{3,u} - f_{2} f_{1,u} \right)^{2} \left(f_{3,v} - f_{2} f_{1,v} \right) + \frac{1}{2} E \left(f_{3,v} - f_{2} f_{1,v} \right) \end{array} \right\} \xi
\end{aligned}
$$

veya

$$
\begin{aligned}
X_{uuv} - X_{uuv} \quad = \quad & \frac{3}{4} \left(f_{1,u} f_{2,v} - f_{2,u} f_{1,v} \right) \left(-\frac{1}{2} f_{1,u} e + \frac{1}{2} f_{2,u} \varphi(e) \right) \\
& -\frac{1}{4} \left(f_{3,v} - f_{2} f_{1,v} \right) \left(f_{3,u} - f_{2} f_{1,u} \right) \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} f_{2,u} e + \frac{1}{2} f_{1,u} \varphi(e) \\ +\frac{1}{2} \left(f_{3,u} - f_{2} f_{1,u} \right) \end{array} \right\} \xi \\
& +\frac{1}{4} \left(f_{3,u} - f_{2} f_{1,u} \right)^{2} \left(\frac{1}{2} f_{2,v} e + \frac{1}{2} f_{1,v} \varphi(e) + \frac{1}{2} \left(f_{3,v} - f_{2} f_{1,v} \right) \xi \right) \\
& +\frac{1}{2} E \left(f_{3,v} - f_{2} f_{1,v} \right) \xi
\end{aligned}
$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
X_{uuv} - X_{uuv} = 3g \left(X_u, \varphi(X_v) \right) \varphi(X_u) - \eta(X_u) \eta(X_v) X_u + \eta^2(X_u) X_v + \eta(X_v) E \xi
$$

sonucu elde edilir. $X_{uuv} - X_{uuv}$ eşitliğinin X_v bileşeni yardımıyla yüzeyin K ortalama eğriliğini bulmaya çalışalım.

$$
\begin{aligned}
g\left(X_{uuv}-X_{uuv},X_v\right) &= g\big(3g\left(X_u,\varphi(X_v)\right)\varphi(X_u)-\eta(X_u)\eta(X_v)X_u \\
&\quad +\eta^2(X_u)X_v+\eta(X_v)E\xi,X_v\big) \\
&= 3g\left(X_u,\varphi(X_v)\right)g\left(\varphi(X_u),X_v\right)-\eta(X_u)\eta(X_v)g\left(X_u,X_v\right) \\
&\quad +\eta^2(X_u)g\left(X_v,X_v\right)+\eta(X_v)Eg\left(\xi,X_v\right) \\
&= -3g^2\left(X_u,\varphi(X_v)\right)+\eta^2(X_u)G+\eta^2(X_v)E \qquad (5.56)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Diğer taraftan $\{X_u,X_v\}$ ortogonal ve $N=\frac{X_u\wedge X_v}{\|X_u\wedge X_v\|}$olmak üzere $\{X_u,X_v,N\}$ ortogonal bazdır. Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
X_{uu} &= a_1X_u+a_2X_v+a_3N \\
X_{uv} &= b_1X_u+b_2X_v+b_3N \\
X_{vv} &= c_1X_u+c_2X_v+c_3N \\
N_u &= d_1X_u+d_2X_v \\
N_v &= e_1X_u+e_2X_v
\end{aligned}
$$

biçiminde yazılabilir. $g\left(X_u,X_u\right)=E$ denkleminde u parametresine göre türev alınırsa

$$
\begin{aligned}
E_u &= g\left(\nabla_{X_u}X_u,X_u\right)+g\left(X_u,\nabla_{X_u}X_u\right) \\
&= 2g\left(X_{uu},X_u\right). \qquad (5.57)
\end{aligned}
$$

$g\left(X_u,X_v\right)=0$ denkleminde u parametresine göre türev alınırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= g\left(\nabla_{X_u}X_u,X_v\right)+g\left(X_u,\nabla_{X_u}X_v\right) \\
&= g\left(X_{uu},X_v\right)+g\left(X_u,X_{vu}\right) \quad ;X_{uv}=X_{vu} \\
&= g\left(X_{uu},X_v\right)+g\left(X_u,X_{uv}\right).
\end{aligned}
$$

$g\left(X_u,X_u\right)=E$ denkleminde v parametresine göre türev alınırsa

$$
\begin{aligned}
E_v &= g\left(\nabla_{X_v}X_u,X_u\right)+g\left(X_u,\nabla_{X_v}X_u\right) \\
&= 2g\left(X_{uv},X_u\right) \\
&= -2g\left(X_{uu},X_v\right) \qquad (5.58)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir.

$$\begin{aligned} g\left(X_{uu}, X_u\right) &= g\left(a_1 X_u + a_2 X_v + a_3 N, X_u\right) \\ &= a_1 g\left(X_u, X_u\right) \\ &= a_1 E \end{aligned} \tag{5.59}$$

olduğundan (5.57) ve (5.59) denklemleri yardımıyla

$$a_1 = \frac{E_u}{2E}$$

olarak bulunur. Benzer mantıkla, sırasıyla, a_2 ve a_3 değerleri de

$$\begin{aligned} g\left(X_{uu}, X_v\right) &= g\left(a_1 X_u + a_2 X_v + a_3 N, X_v\right) \\ &= a_2 g\left(X_v, X_v\right) \\ &= a_2 G \end{aligned} \tag{5.60}$$

olup (5.58) ve (5.60) denklemlerinden

$$a_2 = -\frac{E_v}{2G}$$

ve

$$\begin{aligned} g\left(X_{uu}, N\right) &= g\left(a_1 X_u + a_2 X_v + a_3 N, N\right) \\ &= a_3 g\left(N, N\right) \\ &= a_3 \\ &= l \end{aligned}$$

dır. Sonuç olarak

$$X_{uu} = \frac{E_u}{2E} X_u - \frac{E_v}{2G} X_v + lN \tag{5.61}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} g\left(X_{uv}, X_u\right) &= g\left(b_1 X_u + b_2 X_v + b_3 N, X_u\right) \\ &= b_1 g(X_u, X_u) \\ &= b_1 E \end{aligned} \tag{5.62}$$

olup (5.58) ve (5.62) den dolayı

$$b_1 = \frac{E_v}{2E}$$

dır. Benzer mantıkla, sırasıyla, b_2 ve b_3 değerlerini bulalım.

$$\begin{aligned} g\left(X_{uv}, X_v\right) &= g\left(b_1 X_u + b_2 X_v + b_3 N, X_v\right) \\ &= b_2 g(X_v, X_v) \\ &= b_2 G \end{aligned} \tag{5.63}$$

dır. $g\left(X_u, X_v\right) = 0$ denkleminde v parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= g\left(\nabla_{X_v} X_u, X_v\right) + g\left(X_u, \nabla_{X_v} X_v\right) \\ &= g(X_{uv}, X_v) + g(X_u, X_{vv}) \\ &= g(X_{uv}, X_v) + g(X_{vv}, X_u) \end{aligned}$$

ve $g\left(X_v, X_v\right) = G$ denkleminde u parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} G_u &= g\left(\nabla_{X_u} X_v, X_v\right) + g\left(X_v, \nabla_{X_u} X_v\right) \\ &= 2g(X_{uv}, X_v) \\ &= -2g(X_{vv}, X_u) \end{aligned} \tag{5.64}$$

olup (5.63) ve (5.64) den dolayı

$$b_2 = \frac{G_u}{2G}$$

ve

$$\begin{aligned} g\left(X_{uv}, N\right) &= g\left(b_1 X_u + b_2 X_v + b_3 N, N\right) \\ &= b_3 g(N, N) \\ &= b_3 \\ &= m \end{aligned}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak

$$X_{uv} = \frac{E_v}{2E} X_u + \frac{G_u}{2G} X_v + mN$$

eşitliği elde edilir. Şimdi c_1, c_2 ve c_3 değerlerini bulalım.

$$\begin{aligned} g\left(X_{vv}, X_u\right) &= g\left(c_1 X_u + c_2 X_v + c_3 N, X_u\right) \\ &= c_1 g(X_u, X_u) \\ &= c_1 E \end{aligned} \tag{5.65}$$

(5.64) ve (5.65) den dolayı

$$c_1 = -\frac{G_u}{2E}$$

olur. $g(X_v, X_v) = G$ denkleminde v parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} G_v &= g(\nabla_{X_v} X_v, X_v) + g(X_v, \nabla_{X_v} X_v) \\ &= 2g(X_{vv}, X_v) \end{aligned} \tag{5.66}$$

olup

$$\begin{aligned} g(X_{vv}, X_v) &= g(c_1 X_u + c_2 X_v + c_3 N, X_v) \\ &= c_2 g(X_v, X_v) \\ &= c_2 G \end{aligned} \tag{5.67}$$

dır. (5.66) ve (5.67) den dolayı

$$c_2 = \frac{G_v}{2G}$$

ve

$$\begin{aligned} g(X_{vv}, N) &= g(c_1 X_u + c_2 X_v + c_3 N, N) \\ &= c_3 g(N, N) \\ &= c_3 \\ &= n \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$X_{vv} = -\frac{G_u}{2E} X_u + \frac{G_v}{2G} X_v + nN$$

eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned} g(N_u, X_u) &= g(d_1 X_u + d_2 X_v, X_u) \\ &= d_1 g(X_u, X_u) \\ &= d_1 E \end{aligned} \tag{5.68}$$

dir. $g(X_u, N) = 0$ denkleminde u parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= g(\nabla_{X_u} X_u, N) + g(X_u, \nabla_{X_u} N) \\ &= g(X_{uu}, N) + g(X_u, N_u) \\ &= l + g(X_u, N_u) \end{aligned} \tag{5.69}$$

olup (5.68) ve (5.69) denklemlerinden

$$d_1 = -\frac{l}{E}$$

olur. Benzer yolla

$$\begin{aligned} g(N_u, X_v) &= g(d_1 X_u + d_2 X_v, X_v) \\ &= d_2 g(X_v, X_v) \\ &= d_2 G \end{aligned} \tag{5.70}$$

dır. $g(X_v, N) = 0$ denkleminde u parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= g(\nabla_{X_u} X_v, N) + g(X_v, \nabla_{X_u} N) \\ &= g(X_{vu}, N) + g(X_v, N_u) \\ &= m + g(X_v, N_u) \end{aligned} \tag{5.71}$$

olup (5.70) ve (5.71) denklemlerinden

$$d_2 = -\frac{m}{G}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak

$$N_u = -\frac{l}{E} X_u - \frac{m}{G} X_v$$

olduğu görülür.

$$\begin{aligned} g(N_v, X_u) &= g(e_1 X_u + e_2 X_v, X_u) \\ &= e_1 g(X_u, X_u) \\ &= e_1 E \end{aligned} \tag{5.72}$$

dır. $g(X_u, N) = 0$ denkleminde v parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= g(\nabla_{X_v} X_u, N) + g(X_u, \nabla_{X_v} N) \\ &= g(X_{uv}, N) + g(X_u, N_v) \\ &= m + g(X_u, N_v) \end{aligned} \tag{5.73}$$

olup (5.72) ve (5.73) denklemlerinden

$$e_1 = -\frac{m}{E}$$

olur. Benzer yolla

$$\begin{aligned} g(N_v, X_v) &= g(e_1 X_u + e_2 X_v, X_v) \\ &= e_2 g(X_v, X_v) \\ &= e_2 G \end{aligned} \tag{5.74}$$

dır. $g\left(X_v, N\right) = 0$ denkleminde v parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= g\left(\nabla_{X_v} X_v, N\right) + g\left(X_v, \nabla_{X_v} N\right) \\ &= g\left(X_{vv}, N\right) + g\left(X_v, N_v\right) \\ &= n + g\left(X_v, N_v\right) \end{aligned} \tag{5.75}$$

olup (5.74) ve (5.75) denklemlerinden

$$e_2 = -\frac{n}{G}$$

olur. Sonuç olarak

$$N_v = -\frac{m}{E} X_u - \frac{n}{G} X_v$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} X_{uuv} &= \nabla_{X_v} X_{uu} \\ &= \nabla_{X_v} (\frac{E_u}{2E} X_u - \frac{E_v}{2G} X_v + lN) \\ &= \nabla_{X_v} (\frac{E_u}{2E}) X_u + \frac{E_u}{2E} \nabla_{X_v} X_u - \nabla_{X_v} (\frac{E_v}{2G}) X_v - \frac{E_v}{2G} \nabla_{X_v} X_v + \nabla_{X_v} lN + l \nabla_{X_v} N \\ &= (\frac{E_u}{2E})_v X_u + \frac{E_u}{2E} X_{uv} - (\frac{E_v}{2G})_v X_v - \frac{E_v}{2G} X_{vv} + l_v N + l N_v \\ &= (\frac{E_u}{2E})_v X_u + \frac{E_u}{2E} \left(\frac{E_v}{2E} X_u + \frac{G_u}{2G} X_v + mN \right) - (\frac{E_v}{2G})_v X_v \\ &\quad - \frac{E_v}{2G} \left(-\frac{G_u}{2E} X_u + \frac{G_v}{2G} X_v + nN \right) + l_v N + l \left(-\frac{m}{E} X_u - \frac{n}{G} X_v \right) \\ &= \left\{ (\frac{E_u}{2E})_v + \frac{E_u E_v}{4E^2} + \frac{E_v G_u}{4EG} - \frac{lm}{E} \right\} X_u \\ &\quad + \left\{ \frac{E_u G_u}{4EG} - (\frac{E_v}{2G})_v - \frac{E_u G_v}{4G^2} - \frac{ln}{G} \right\} X_v \\ &\quad + \left\{ \frac{m E_u}{2E} - \frac{n E_v}{2G} + l_v \right\} N \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
X_{uvu} &= \nabla_{X_u} X_{uv} \\
&= \nabla_{X_u}(\frac{E_v}{2E}X_u + \frac{G_u}{2G}X_v + mN) \\
&= \nabla_{X_u}(\frac{E_v}{2E})X_u + \frac{E_v}{2E}\nabla_{X_u}X_u + \nabla_{X_u}(\frac{G_u}{2G})X_v + \frac{G_u}{2G}\nabla_{X_u}X_v + \nabla_{X_u}mN + m\nabla_{X_u}N \\
&= (\frac{E_v}{2E})_u X_u + \frac{E_v}{2E}X_{uu} + (\frac{G_u}{2G})_u X_v + \frac{G_u}{2G}X_{vu} + m_u N + mN_u \\
&= (\frac{E_v}{2E})_u X_u + \frac{E_v}{2E}\left(\frac{E_u}{2E}X_u - \frac{E_v}{2G}X_v + lN\right) + (\frac{G_u}{2G})_u X_v \\
&\quad + \frac{G_u}{2G}\left(\frac{E_v}{2E}X_u + \frac{G_u}{2G}X_v + mN\right) + m_u N + m\left(-\frac{l}{E}X_u - \frac{m}{G}X_v\right) \\
&= \left\{(\frac{E_v}{2E})_u + \frac{E_u E_v}{4E^2} + \frac{E_v G_u}{4EG} - \frac{lm}{E}\right\} X_u \\
&\quad + \left\{-\frac{E_v^2}{4EG} + (\frac{G_u}{2G})_u + \frac{G_u^2}{4G^2} - \frac{m^2}{G}\right\} X_v \\
&\quad + \left\{\frac{lE_v}{2E} - \frac{mG_u}{2G} + m_u\right\} N
\end{aligned}$$

denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
X_{uuv} - X_{uvu} &= \left\{(\frac{E_u}{2E})_v - (\frac{E_v}{2E})_u\right\} X_u \\
&\quad + \left\{\frac{E_u G_u + E_v^2}{4EG} - (\frac{E_v}{2G})_v - (\frac{G_u}{2G})_u - \frac{E_v G_v + G_u^2}{4G^2} - \frac{ln - m^2}{G}\right\} X_v \\
&\quad + \left\{\frac{mE_u - lE_v}{2E} - \frac{NE_v + mG_u}{2G} + l_v - m_u\right\} N
\end{aligned}$$

ve $X_{uuv} - X_{uvu}$ eşitliğinin X_v bileşeni

$$\begin{aligned}
g\left(X_{uuv} - X_{uvu}, X_v\right) &= \frac{E_u G_u + E_v^2}{4EG} - (\frac{E_v}{2G})_v - (\frac{G_u}{2G})_u \\
&\quad - \frac{E_v G_v + G_u^2}{4G^2} - \frac{ln - m^2}{G}
\end{aligned} \tag{5.76}$$

olarak bulunur. Burada (5.56) ve (5.76) ifadelerinin eşitliğinden

$$\begin{aligned}
-3g^2\left(X_u, \varphi(X_v)\right) + \eta^2(X_u)G + \eta^2(X_v)E &= \frac{E_u G_u + E_v^2}{4EG} - (\frac{E_v}{2G})_v - (\frac{G_u}{2G})_u \\
&\quad - \frac{E_v G_v + G_u^2}{4G^2} - \frac{ln - m^2}{G}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{ln - m^2}{G} &= \frac{E_u G_u + E_v^2}{4EG} - (\frac{E_v}{2G})_v - (\frac{G_u}{2G})_u - \frac{E_v G_v + G_u^2}{4G^2} \\
&\quad + 3g^2\left(X_u, \varphi(X_v)\right) - \eta^2(X_u)G - \eta^2(X_v)E
\end{aligned}$$

olur. Her iki taraf $\frac{1}{E}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \frac{ln-m^2}{EG} &= \frac{E_uG_u+E_v^2}{4E^2G} - \frac{1}{E}\left\{(\frac{E_v}{2G})_v + (\frac{G_u}{2G})_u\right\} - \frac{E_vG_v+G_u^2}{4EG^2} \\ &+ \frac{3}{E}g^2\left(X_u, \varphi(X_v)\right) - \frac{G}{E}\eta^2(X_u) - \eta^2(X_v) \end{aligned}$$

$F=0$ olan bir yüzeyin Gauss eğriliği

$$K = \frac{ln-m^2}{EG}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} K &= \frac{E_uG_u+E_v^2}{4E^2G} - \frac{1}{E}\left\{(\frac{E_v}{2G})_v + (\frac{G_u}{2G})_u\right\} - \frac{E_vG_v+G_u^2}{4EG^2} \\ &+ \frac{3}{E}g^2\left(X_u, \varphi(X_v)\right) - \frac{G}{E}\eta^2(X_u) - \eta^2(X_v) \end{aligned} \tag{5.77}$$

olur. Diğer taraftan

$\left\{\frac{X_u}{\sqrt{E}}, \frac{X_v}{\sqrt{G}}, \frac{X_u \wedge X_v}{\sqrt{EG}}\right\}$ ortonormal bazını kullanarak ξ vektör alanını

$$\xi = \lambda_1\frac{X_u}{\sqrt{E}} + \lambda_2\frac{X_v}{\sqrt{G}} + \lambda_3\frac{X_u \wedge X_v}{\sqrt{EG}}$$

eşitliğini g metriğine göre, sırasıyla, $X_u, X_v, X_u \wedge X_v$ ile çarparak $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ değerlerini bulalım.

$$\begin{aligned} g(\xi, X_u) &= g(\lambda_1\frac{X_u}{\sqrt{E}} + \lambda_2\frac{X_v}{\sqrt{G}} + \lambda_3\frac{X_u \wedge X_v}{\sqrt{EG}}, X_u) \\ &= \lambda_1\sqrt{E} \end{aligned}$$

ve $g(\xi, X_u) = \eta(X_u)$ olduğundan

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\eta(X_u)$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} g(\xi, X_v) &= g(\lambda_1\frac{X_u}{\sqrt{E}} + \lambda_2\frac{X_v}{\sqrt{G}} + \lambda_3\frac{X_u \wedge X_v}{\sqrt{EG}}, X_v) \\ &= \lambda_2\sqrt{G} \end{aligned}$$

ve $g(\xi, X_v) = \eta(X_v)$ olduğundan

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{G}}\eta(X_v)$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} g(\xi, X_u \wedge X_v) &= g(\lambda_1 \frac{X_u}{\sqrt{E}} + \lambda_2 \frac{X_v}{\sqrt{G}} + \lambda_3 \frac{X_u \wedge X_v}{\sqrt{EG}}, X_u \wedge X_v) \\ &= \lambda_2 \sqrt{EG} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g(\xi, X_u \wedge X_v) &= det(X_u, X_v, \xi) \\ &= -det(\xi, X_v, X_u) \\ &= -g(\varphi(X_v), X_u) \\ &= g(X_u, \varphi(X_v)) \end{aligned}$$

eşitliği yardımıyla

$$\lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{EG}} g(X_u, \varphi(X_v))$$

olur. ξ birim vektör alanı olduğundan

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \frac{1}{E}\eta^2(X_u) + \frac{1}{G}\eta^2(X_v) + \frac{1}{EG} g^2(X_u, \varphi(X_v)) = 1$$

eşitliği yardımıyla

$$\frac{1}{E} g^2(X_u, \varphi(X_v)) = G - \frac{G}{E}\eta^2(X_u) - \eta^2(X_v)$$

olur. Bu sonuç (5.77) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} K &= \frac{E_u G_u + E_v^2}{4E^2 G} - \frac{1}{E}\left\{ (\frac{E_v}{2G})_v + (\frac{G_u}{2G})_u \right\} - \frac{E_v G_v + G_u^2}{4EG^2} \\ &\quad +3G - \frac{3G}{E}\eta^2(X_u) - 3\eta^2(X_v) - \frac{G}{E}\eta^2(X_u) - \eta^2(X_v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{E_u G_u + E_v^2}{4E^2 G} - \frac{1}{E}\left\{ (\frac{E_v}{2G})_v + (\frac{G_u}{2G})_u \right\} - \frac{E_v G_v + G_u^2}{4EG^2} \\ &\quad +3G - \frac{4G}{E}\eta^2(X_u) - 4\eta^2(X_v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{E_u G_u + E_v^2}{4E^2 G} - \frac{1}{E}\left\{ (\frac{E_v}{2G})_v + (\frac{G_u}{2G})_u \right\} - \frac{E_v G_v + G_u^2}{4EG^2} \\ &\quad +3G - \eta^2(\frac{4G}{E} X_u + 4X_v) \end{aligned}$$

olur ki, yüzeyin Gauss eğriliği sadece birinci türevler cinsinden yazılmış olur. Bu da Gauss'un Muhteşem (Egregium) Teoreminin Kontak manifoldlardaki ifadesi olur. ■

Sonuç 5.2 $\mathbb{E}^3(-3)$ *üzerinde bir*

$$\begin{aligned} X &: \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^3(-3) \\ &: (u,v) \longmapsto X(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v)) \end{aligned}$$

yüzeyi için $\frac{4G}{E}X_u + 4X_v$ *vektörü "Kontak Distribution" da yatan bir vektör alanı ise bu yüzey için Gauss-Egregium teoremi*

$$\begin{aligned} K &= \frac{E_uG_u + E_v^2}{4E^2G} - \frac{1}{E}\left\{(\frac{E_v}{2G})_v + (\frac{G_u}{2G})_u\right\} \\ &\quad -\frac{E_vG_v + G_u^2}{4EG^2} + 3G \end{aligned} \tag{5.78}$$

olur.

İspat. $\mathbb{E}^3(-3)$ üzerinde bir $X(u,v)$ yüzeyi için $\frac{4G}{E}X_u + 4X_v$ vektörü "Kontak Distribution" da yatan bir vektör alanı ise

$$\eta^2(\frac{4G}{E}X_u + 4X_v) = \eta(\eta(\frac{4G}{E}X_u + 4X_v)) = 0$$

olur. Bu eşitlik Teorem 5.17 de kullanılırsa kolaylıkla

$$K = \frac{E_uG_u + E_v^2}{4E^2G} - \frac{1}{E}\left\{(\frac{E_v}{2G})_v + (\frac{G_u}{2G})_u\right\} - \frac{E_vG_v + G_u^2}{4EG^2} + 3G$$

olduğu görülür. ■

5.6 $\mathbb{E}^3(-3)$ Hemen Hemen Kontak Metrik Manifoldlarda Eğri-Yüzey İkilisinin Eğrilikleri

Tanım 5.4 $\mathbb{E}^3(-3)$ *Sasaki uzayında bir* M *yüzeyi içinde birim hızlı bir* $\alpha : I \longrightarrow M$ *eğrisi verilsin. Yüzeyin birim dik vektör alanı* N *olsun.* α *eğrisinin birim teğet vektör alanı* $\alpha'(s) = T$ *olmak üzere*

$$(N \circ \alpha) \wedge T = Y$$

eşitliğiyle tanımlanan Y *vektör alanını gözönüne alalım.* $\{T(s), Y(s), (N \circ \alpha)(s)\}$ *cümlesi* $T_{\alpha(s)}\mathbb{E}^3(-3)$ *uzayının ortonormal bir tabanı olur. Bu tabana* (α, M) ***eğri-yüzey ikilisinin çatısı*** *denir.*

Tanım 5.5 *$\alpha : I \longrightarrow M$, $\mathbb{E}^3(-3)$ Sasaki uzayında birim hızlı bir eğri olsun.*

$$\kappa_n(s) = g((\nabla_T T)(s), (N \circ \alpha)(s))$$

*eşitliğiyle belirli $\kappa_n(s)$ sayısına, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **normal eğriliği** denir.*

Tanım 5.6 *$\alpha : I \longrightarrow M$, $\mathbb{E}^3(-3)$ Sasaki uzayında birim hızlı bir eğri olsun.*

$$\kappa_g(s) = g((\nabla_T T)(s), Y(s))$$

*eşitliğiyle belirli $\kappa_g(s)$ sayısına,(α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **geodezik eğriliği** denir.*

Tanım 5.7 *$\alpha : I \longrightarrow M$, $\mathbb{E}^3(-3)$ Sasaki uzayında birim hızlı bir eğri olsun.*

$$t_r(s) = -g(\nabla_T (N \circ \alpha)(s), Y(s),)$$

*eşitliğiyle belirli $t_r(s)$ sayısına,(α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **geodezik burulması** denir.*

Tanım 5.8 *$\alpha : I \longrightarrow M$, $\mathbb{E}^3(-3)$ Sasaki uzayında birim hızlı bir eğri olmak üzere κ_n, κ_g, t_r fonksiyonlarına (α, M) **eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri** denir.*

Teorem 5.18 *$\mathbb{E}^3(-3)$ de bir M yüzeyi içinde birim hızlı bir $\alpha : I \longrightarrow M$ eğrisi verilsin.(α, M) eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri κ_n, κ_g, t_r olmak üzere*

$$\begin{bmatrix} \nabla_T T \\ \nabla_T Y \\ \nabla_T N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & t_r \\ -\kappa_n & -t_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Y \\ N \circ \alpha \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= \kappa_g Y + \kappa_n (N \circ \alpha) \\ \nabla_T Y &= -\kappa_g T + t_r (N \circ \alpha) \\ \nabla_T N &= -\kappa_n T - t_r Y \end{aligned}$$

dir.

İspat. $\{T, Y, N\}$ cümlesi $T_{\alpha(s)}(\mathbb{E}^3(-3))$ uzayının ortonormal bir tabanı olduğundan

$$\nabla_T T = a_1 T + a_2 Y + a_3 N \tag{5.79}$$

$$\nabla_T Y = b_1 T + b_2 Y + b_3 N \tag{5.80}$$

$$\nabla_T N = c_1 T + c_2 Y + c_3 N \tag{5.81}$$

olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned} g(\nabla_T T, T) &= g(a_1 T + a_2 Y + a_3 N, T) \\ &= a_1 g(T, T) + a_2 g(T, Y) + a_{31} g(T, N) \\ &= a_1. \end{aligned} \tag{5.82}$$

α birim hızlı olduğundan ve $\left\|\alpha^{'}(s)\right\| = \|T\| = g(T, T) = 1$ olduğundan $g(T, T) = 1$ denkleminde her iki tarafın türevi alınırsa

$$\begin{aligned} g\left(\nabla_T T, T\right) + g\left(T, \nabla_T T\right) &= 0 \\ 2g\left(\nabla_T T, T\right) &= 0 \\ g\left(\nabla_T T, T\right) &= 0. \end{aligned} \tag{5.83}$$

(5.82) ve (5.83) denklemlerinden

$$a_1 = 0$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} g(\nabla_T T, Y) &= g(a_1 T + a_2 Y + a_3 N, Y) \\ &= a_1 g(T, Y) + a_2 g(Y, Y) + a_3 g(N, Y) \\ &= a_2 \end{aligned}$$

ve Tanım 5.6 dan $g(\nabla_T T, Y) = \kappa_g$ olduğundan

$$a_2 = \kappa_g$$

olduğu görülür. Benzer mantıkla

$$\begin{aligned} g(\nabla_T T, N) &= g(a_1 T + a_2 Y + a_3 N, N) \\ &= a_1 g(T, N) + a_2 g(Y, N) + a_3 g(N, N) \\ &= a_3 \end{aligned}$$

ve Tanım 5.5 den $g(\nabla_T T, N) = \kappa_n$ olduğundan

$$a_3 = \kappa_n$$

olup a_1, a_2 ve a_3 değerleri (5.79) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\nabla_T T = \kappa_g Y + \kappa_n (N \circ \alpha)$$

eşitliği doğrulanır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} g(\nabla_T Y, T) &= g(b_1 T + b_2 Y + b_3 N, T) \\ &= b_1 g(T,T) + b_2 g(Y,T) + b_3 g(N,T) \\ &= b_1. \end{aligned} \tag{5.84}$$

$g(T, Y) = 0$ denkleminde her iki tarafın türevi alınırsa

$$\begin{aligned} g\left(\nabla_T Y, T\right) + g\left(Y, \nabla_T T\right) &= 0 \\ g\left(\nabla_T Y, T\right) + \kappa_g &= 0 \\ g\left(\nabla_T Y, T\right) &= -\kappa_g. \end{aligned} \tag{5.85}$$

(5.84) ve (5.85) denklemlerinden

$$b_1 = -\kappa_g$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} g(\nabla_T Y, Y) &= g(b_1 T + b_2 Y + b_3 N, Y) \\ &= b_1 g(T,Y) + b_2 g(Y,Y) + b_3 g(N,Y) \\ &= b_2. \end{aligned} \tag{5.86}$$

$g(Y, Y) = 1$ denkleminde her iki tarafın türevi alınırsa

$$\begin{aligned} g\left(\nabla_T Y, Y\right) + g\left(Y, \nabla_T Y\right) &= 0 \\ 2g\left(\nabla_T Y, Y\right) &= 0 \\ g\left(\nabla_T Y, Y\right) &= 0 \end{aligned} \tag{5.87}$$

olup (5.86) ve (5.87) denklemlerinden

$$b_2 = 0$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned} g(\nabla_T Y, N) &= g(b_1 T + b_2 Y + b_3 N, N) \\ &= b_1 g(T, N) + b_2 g(Y, N) + b_3 g(N, N) \\ &= b_3 \end{aligned} \tag{5.88}$$

ve $g(Y, N) = 0$ denkleminde her iki tarafın türevi alınarak

$$\begin{aligned} g(\nabla_T Y, N) + g(Y, \nabla_T N) &= 0 \\ g(\nabla_T Y, N) - t_r &= 0 \\ g(\nabla_T Y, N) &= t_r \end{aligned} \tag{5.89}$$

olduğundan (5.88) ve (5.89) denklemlerinin eşitliğinden

$$b_3 = t_r$$

olup b_1, b_2 ve b_3 değerleri (5.80) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\nabla_T Y = -\kappa_g T + t_r(N \circ \alpha)$$

eşitliği doğrulanır. Son olarak

$$\begin{aligned} g(\nabla_T N, T) &= g(c_1 T + c_2 Y + c_3 N, T) \\ &= c_1 g(T, T) + c_2 g(Y, T) + c_3 g(N, T) \\ &= c_1 \end{aligned} \tag{5.90}$$

ve $g(N, T) = 0$ denkleminde her iki tarafın türevi alınırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_T N, T) + g(N, \nabla_T T) &= 0 \\ g(\nabla_T N, T) + \kappa_n &= 0 \\ g(\nabla_T N, T) &= -\kappa_n \end{aligned} \tag{5.91}$$

olduğundan (5.90) ve (5.91) denklemlerinin eşitliğinden

$$c_1 = -\kappa_n$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} g(\nabla_T N, Y) &= g(c_1 T + c_2 Y + c_3 N, Y) \\ &= c_1 g(T, Y) + c_2 g(Y, Y) + c_3 g(N, Y) \\ &= c_2 \end{aligned}$$

ve Tanım 5.7 den $g(\nabla_T N, Y) = -t_r$ olduğundan

$$c_2 = -t_r$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} g(\nabla_T N, N) &= g(c_1 T + c_2 Y + c_3 N, N) \\ &= c_1 g(T, N) + c_2 g(Y, N) + c_3 g(N, N) \\ &= c_3. \end{aligned} \tag{5.92}$$

$g(N, N) = 1$ denkleminde her iki tarafın türevi alınırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_T N, N) + g(N, \nabla_T N) &= 0 \\ 2g(\nabla_T N, N) &= 0 \\ g(\nabla_T N, N) &= 0 \end{aligned} \tag{5.93}$$

olduğundan (5.92) ve (5.93) denklemlerinin eşitliğinden

$$c_3 = 0$$

c_1, c_2 ve c_3 değerleri (5.81) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\nabla_T N = -\kappa_n T - t_r Y$$

eşitliği doğrulanır. ■

Tanım 5.9 *$\alpha : I \longrightarrow M$, $\mathbb{E}^3(-3)$ Sasaki uzayında birim hızlı olmayan bir eğri ve bu eğriden elde edilen birim hızlı eğri β olsun. (β, M) eğri-yüzey ikilisinin çatısı $\{T^1, Y^1, (N \circ \beta)\}$ olduğuna göre,*

$$\begin{aligned} T(t) &= T^1(f(t)) \\ Y(t) &= Y^1(f(t)) \\ N(\alpha(t)) &= N(\beta(f(t))) \end{aligned}$$

eşitlikleriyle tanımlanan, $\{T, Y, (N \circ \alpha)\}$ *cümlesine,* (α, M) *ikilisinin çatısı denir.* (β, M) *eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri* $\kappa_{n_1}, \kappa_{g_1}, t_{r_1}$ *olduğuna göre* (α, M) *ikilisinin eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri*

$$\begin{aligned}\kappa_n(t) &= \kappa_{n_1}(f(t)) \\ \kappa_g(t) &= \kappa_{g_1}(f(t)) \\ t_r(t) &= t_{r_1}(f(t))\end{aligned}$$

eşitlikleriyle tanımlanan κ_n, κ_g, t_r *fonksiyonlarıdır.*

Teorem 5.19 $\alpha : I \longrightarrow M$, $\mathbb{E}^3(-3)$ *Sasaki uzayında bir eğri* (α, M) *eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri* κ_n, κ_g, t_r *olduğuna göre,* $\|\alpha'\| = f' = v$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned}\kappa_n &= \frac{1}{v^2} g(\alpha'', (N \circ \alpha)) \\ \kappa_g &= \frac{1}{v^2} g(\alpha'', Y) \\ t_r &= -\frac{1}{v} g((N \circ \alpha)', Y)\end{aligned}$$

dir.

İspat. $f(t) = s$ olmak üzere,

$$\kappa_n(t) = \kappa_{n_1}(s) = g(\beta''(s), (N \circ \beta)(s))$$

dir.

$$\beta'(s) = T^1(s) = T(t) = \frac{1}{v(t)} \alpha'(t)$$

olduğundan

$$\alpha'(t) = v(t)\beta'(s) = v(t)\beta'(f(t)) = v(t)(\beta' \circ f)(t)$$

ve buradan,

$$\alpha''(t) = v'(t)(\beta' \circ f)(t) + v(t)f'(t)\beta''(f(t)) = v'(t)\beta'(s) + v^2(t)\beta''(s)$$

bulunur. Bu eşitlikten

$$\beta''(s) = \frac{1}{v^2(t)}(\alpha''(t) - v'(t)\beta'(s))$$

elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned}
\kappa_n(t) &= g(\beta''(s), (N \circ \beta)(s)) \\
&= g(\frac{1}{v^2(t)}(\alpha''(t) - v'(t)\beta'(s)), (N \circ \beta)(s)) \\
&= \frac{1}{v^2(t)} g(\alpha''(t) - v'(t)\beta'(s), (N \circ \beta)(s)) \\
&= \frac{1}{v^2(t)} \{g(\alpha''(t), (N \circ \beta)(s)) - g(v'(t)\beta'(s), (N \circ \beta)(s))\} \\
&= \frac{1}{v^2(t)} g(\alpha''(t), (N \circ \alpha)(t)) \\
&= (\frac{1}{v^2(t)} g(\alpha'', (N \circ \alpha)))(t)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\kappa_n = \frac{1}{v^2} g(\alpha'', (N \circ \alpha))$$

olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\kappa_g(t) &= \kappa_{g_1}(s) = g(\beta''(s), Y^1(s)) \\
&= g(\frac{1}{v^2(t)}(\alpha''(t) - v'(t)\beta'(s)), Y^1(s)) \\
&= \frac{1}{v^2(t)} \left\{g(\alpha''(t), Y^1(s)) - g(v'(t)\beta'(s), Y^1(s)\right\} \\
&= \frac{1}{v^2(t)} g(\alpha''(t), Y^1(f(t))) \\
&= \frac{1}{v^2(t)} g(\alpha''(t), Y(t)) \\
&= (\frac{1}{v^2} g(\alpha'', Y))(t)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\kappa_g = \frac{1}{v^2} g(\alpha'', Y)$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
t_r(t) &= t_{r_1}(s) = -g((N \circ \beta)'(s), Y^1(s)) \\
&= -g((N \circ \beta)'(s), Y(t)) \\
&= -\frac{1}{v(t)} g((N \circ \alpha)'(t), Y(t)) \\
&= (-\frac{1}{v} g((N \circ \alpha)', Y)(t)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$t_r = -\frac{1}{v} g((N \circ \alpha)', Y)$$

elde edilir. ■

Sonuç 5.3 $\mathbb{E}^3(-3)$ *Sasaki uzayında bir* $\alpha : I \longrightarrow M$ *eğrisi verildiğinde,* (α, M) *eğri-yüzey ikilisi için,*

$$\begin{aligned}
\nabla_T T &= v\{\kappa_g Y + \kappa_n (N \circ \alpha)\} \\
\nabla_T Y &= v\{-\kappa_g T + t_r (N \circ \alpha)\} \\
\nabla_T N &= v\{-\kappa_n T - t_r Y\}
\end{aligned}$$

dir.

Sonuç 5.4 $\mathbb{E}^3(-3)$ *Sasaki uzayında bir* $\alpha : I \longrightarrow M$ *eğrisi verildiğinde,* (α, M) *eğri-yüzey ikilisi için,*

$$\begin{aligned}
\kappa_n &= \frac{1}{v} g(\nabla_T T, (N \circ \alpha)) \\
\kappa_g &= \frac{1}{v} g(\nabla_T T, Y) \\
t_r &= \frac{1}{v} g(\nabla_T Y, (N \circ \alpha))
\end{aligned}$$

dir.

KAYNAKLAR

Ata, E. 2004. Simplektik Diferensiyel Geometri Üzerine. Doktora tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Baikousis, C. and Blair, D. E. 1991. Finite type integral submanifold of the contact manifold $\mathbb{R}^{2n+1}(-3)$. Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, 19(4); 327-350.

Baikousis, C. and Blair, D. E. 1994. On Legendre curves in contact 3-manifolds. Geom. Dedicate, 49; 135-142.

Belkhelfa, M., Hirica, I. E., Rosca. R. and Verstraelen, L. 2002. On Legendre curves in Riemannian ve Lorentzian Sasaki Spaces. Soochow J. Math. 28; 81-91.

Blair, D. E. 1976. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Math. Vol. 509, Springer-Verlag.

Blair, D. E. 2002. Riemannian Geometry of Contact ve Simplectic Manifolds. Birkhauser. Boston.

Boothby, W. M. 1986. An Introduction to Differentiable Manifolds ve Riemannian Geometry. Acafemic Press.

Camcı, Ç. 2007. Kontak Geometride Eğriler Teorisi. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Camci, C., Yayli Y. and Hacisalihoglu, H. H. 2008. On the characterization of spherical curves in 3-dimensional Sasakian space. J. Math. Anal. Appl. 342, 1151-1159.

Camci, C. 2010. Extend cross product in a 3-dimensional almost contact metric manifold with Applications to curve theory. Submitted to publish.

Carmo, Manfredo Perdigao do. 1992. Riemannian Geometry. Birkhauser. Boston.

Ekmekci, N. and Yaz, N. 2004. Biharmonic general helices in contact ve Sasakian space. Tensor, N. S., vol: 65.

Gök, İ. 2005. Kontak Manifoldlarda Esas Formlar ve Yönlendirme. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Hacısalihoğlu, H. H. 2000. Diferensiyel Geometri. Ertem Matbaası, Ankara.

Hacısalihoğlu, H. H. 1980. Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş. Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi yayınları, Elazığ.

Hacısalihoğlu, H. H. 2003. Tensör Geometri. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi yayınları, Ankara.

Kocayiğit, H. 2004. Lorentz 3-Manifoldlarında Biharmonik Eğriler ve Kontak Geometri. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Kobayashi, S. and Nomuzi, K. 1996. Foundations of differential geometry. Vol: 1 Wiley-Interscience Publication.

O'Neill, B. 1983. Semi-Rimannian Geometry with applications to relativity. Academic press, Inc.

Sabuncuoğlu, A. 2004. Diferensiyel Geometri. Nobel Basımevi, Ankara.

Yano, K. and Kon, M. 1984. Structures on Manifolds. Series in Pure Mathematics, vol: 3, Singapore.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: İsmail GÖK

Doğum Yeri: Ankara

Doğum Tarihi: 20.07.1977

Medeni Hali: Evli ve 1 çocuk babası

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise: Abidinpaşa Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi (Ankara 1995)

Lisans: Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi,
Matematik Bölümü (2003)

Yüksek Lisans: Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı (2005)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü,
Araştırma Görevlisi (Aralık 2005 - ...)

Yayınları:

- **Gok, I.**, Camci, C. ve Hacısalihoglu, H. H., V_n-slant helices in Euclidean n-space E^n, Math. Commun., Vol. 14, No. 2, pp. 317-329 (2009).
- **Gok, I.**, Camci, C. ve Hacısalihoglu, H. H., V_n-slant helices in Minkowski n-space E_1^n, Communications, Vol. 58, No. 1, pp. 29-38 (2009).
- **Gok, I.**, Ozkaldi, S., Yayli, Y. and Hacısalihoglu, H. H., LC slant helix on hypersurfaces in Euclidean n-space E^n, Reports of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic countries, vol: 1, pp. 81-87 (2009).
- Ozkaldi, S., **Gok, I.**, Yayli, Y. and Hacısalihoglu, H. H., LC-slant helix on hypersurfaces in Minkowski space, TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, (accepted 2010).