

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN ORTOGONAL POLİNOMLAR
YARDIMI İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuğçe AKKAYA

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Uygulamalı Matematik

MANİSA - 2011

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**STURM-LİOUVILLE PROBLEMİNİN ORTOGONAL POLİNOMLAR
YARDIMI İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuğçe AKKAYA

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :
Tezin Savunulduğu Tarih :**

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ

**Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet SEZER
Prof. Dr. Necdet BİLDİK**

MANİSA -2011

ÖZET

STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN ORTOGONAL POLİNOMLAR YARDIMI İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

TUĞÇE AKKAYA

Bu tezde, ilk olarak Sturm-Liouville probleminin tarihi gelişimi ve özellikleri verildikten sonra, Ll. G. Chambers, (Chambers, 1994)'nin yaptığı çalışma ile M. SEZER, (Sezer, 1996)'nin makalesi esas alınıp, bu çalışmalarda verilen metot homojen olmayan Sturm-Liouville problemine uygulanmıştır.

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde Sturm-Liouville Problemi, Chebyshev polinomları, Legendre polinomları ve Boubaker polinomları için gerekli temel kavramlar verilmiş, Sturm-Liouville problemi normal formuna indirgenmiştir.

İkinci bölümde Liouville normal formunun yaklaşık çözümlerinin bulunması için yöntem geliştirilmiştir.

Son bölümde ise Sturm-Liouville probleminin bu yöntemle yaklaşık çözümü yapılmış ve sonuçlar referans özfonksiyonlar ile karşılaştırılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Sturm-Liouville Problemi, Sıralama yöntemi, Chebyshev, Legendre ve Boubaker polinomları ve serileri, Yaklaşık çözüm.

ABSTRACT

APPROXIMATE COMPUTATION of STURM-LIOUVILLE PROBLEMS USING ORTHOGONAL POLYNOMIALS

TUĞÇE AKKAYA

In the present thesis the historical development of Sturm-Liouville problem are given firstly. Then the method which was studied in a paper of, Ll. G. Chambers, (Chambers, 1994) and a paper of M. SEZER, (Sezer, 1996), is applied to the nonhomogenous Sturm-Liouville problem.

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter the necessary preliminaries about Sturm-Liouville problem, Chebyshev polynomials, Legendre polynomials and Boubaker polynomials are given and Sturm-Liouville problem is reduced to the Liouville normal form..

In the second chapter, the new method is investigated in order to obtain approximate solutions of Liouville normal form.

In the final chapter, as an application, Sturm-Liouville problem is approximately solved by this method and the obtained results are compared with the reference eigenfunctions.

KEYWORDS: Sturm-Liouville problem, Collocation method, Chebyshev, Legendre and Boubaker polynomials and series, Approximate solution.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve alakasını esirgemeyen, ortaya çıkan her türlü bilimsel problemin çözümünde devamlı yardımlarını gördüğüm değerli hocalarım Prof. Dr. Mehmet SEZER ve Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ'a, ayrıca bana daima destek olan aileme ve arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Tuğçe AKKAYA

İÇİNDEKİLER

Özet	i
Abstract	ii
Teşekkür	iii
İçindekiler	iv
Simgeler Listesi	vi
Çizelgeler Listesi	vii
Şekiller Listesi	viii
1. STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNE GENEL BAKIŞ VE TARİHÇE	1
1.1. Sturm-Liouville Denklemine giriş	3
1.2. Sturm-Liouville Sistemleri	7
1.3. Periyodik Sturm-Liouville Sistemleri	10
1.4. Özfonksiyonlar ve Ortogonal (Dik) Fonksiyon Uzayları	11
1.5. Ortalama Yakınsaklık	19
1.6. Özfonksiyon Açılımları	21
1.7. Ortogonal Fonksiyonlar Sistemi	27
1.8. Tamlık ve Parseval Özdeşliği	29
1.9. Adjoint Formlar ve Lagrange Özdeşliği	30
1.10. Aykırı (Singüler) Sturm-Liouville Sistemleri	35
1.11. Sturm-Liouville Denkleminin Serilerle Çözümü	37
1.12. Salınlımlı Çözümler	44
1.13. Bir Yarı Eksen Üzerinde Salınlımlı Çözümler	46
1.14. Sturm Ayırma ve Karşılaştırma Teoremleri	49
1.15. Liouville Normal Form	52
2. TEMEL KAVRAMLAR	56
2.1 Legendre Polinomları ve Özellikleri	56
2.1.1 Rekürans (Tekrarlama) Bağlıntıları	58
2.2 Chebyshev Polinomları ve Özellikleri	58
2.2.1 Rekürans (Tekrarlama) Bağlıntıları	61

2.3 Boubaker Polinomları ve Özellikleri	62
2.3.1 Rekürans (Tekrarlama) Bağlılıları	63
3. STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ İÇİN SIRALAMA YÖNTEMİ	64
3.1 Legendre Sıralama Yöntemi	65
3.2 Chebyshev Sıralama Yöntemi	74
3.3 Boubaker Sıralama Yöntemi	80
4. UYGULAMA	87
5. SONUÇ	101
6. KAYNAKLAR	102
ÖZGEÇMİŞ	104

SİMGELER LİSTESİ

 Σ

Toplam sembolü

 $\frac{dy}{dx}$

y 'nin x 'e göre 1 . mertebeden türevi

 $\frac{d^2y}{dx^2}$

y 'nin x 'e göre 2 . mertebeden türevi

ÇİZELGELER LİSTESİ

Çizelge 3.1. $N = 5, 10, 15, 20$ için Legendre Hata Hesapları	90
Çizelge 3.2. $N = 5, 10, 15, 20$ için Chebyshev Hata Hesapları	95
Çizelge 3.3. $N = 5, 10, 15, 20$ için Boubaker Hata Hesapları	99
Çizelge 3.4. $N = 5$ için Legendre, Chebyshev ve Boubaker Nümerik Sonuçların Referans Sonuçlarla Karşılaştırması	100

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3.1. $y = 1 - e^{-1} \cosh x$ ile $N = 5, 10, 15, 20$ için Bulunan Legendre	
Çözümlerin Karşılaştırılması	91
Şekil 3.2. $y = 1 - e^{-1} \cosh x$ ile $N = 5, 10, 15, 20$ için Bulunan Legendre	
Çözümlerin Hata Grafiği	91
Şekil 3.3. $y = 1 - e^{-1} \cosh x$ ile $N = 5, 10, 15, 20$ için Bulunan Chebyshev	
Çözümlerin Karşılaştırılması	95
Şekil 3.4. $y = 1 - e^{-1} \cosh x$ ile $N = 5, 10, 15, 20$ için Bulunan Chebyshev	
Çözümlerin Hata Grafiği	95
Şekil 3.5. $y = 1 - e^{-1} \cosh x$ ile $N = 5, 10, 15, 20$ için Bulunan Boubaker	
Çözümlerin Karşılaştırılması	99
Şekil 3.6. $y = 1 - e^{-1} \cosh x$ ile $N = 5, 10, 15, 20$ için Bulunan Boubaker	
Çözümlerin Hata Grafiği	99

1. STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNE GENEL BAKIŞ VE TARİHÇE



Jacques Charles Francois Sturm (1803-1855)

1826 yılında İsviçreli mühendis Daniel Colladon ile beraber çalışan Sturm sudaki ses hızının tam hesabını ilk bulan kişi olmuştur. 1833 yılında Fransız vatandaşı olup Paris'te 1840 yılında profesör olduğu *École Polytechnique*'de çalıştı. Aynı yıl içerisinde Paris, *Faculté des Sciences*'da makine bölümüne profesörü olarak atanmıştır.

Yaklaşık 1750 yılına dayanan sınır şartlarına bağlı adi diferansiyel denklemin özdeğer ve özfonksiyon belirleme problemi ve özfonksiyonların bir sonsuz serisine keyfi fonksiyonların açılımı problemi, yeni koordinat sistemlerinin tanıştırılması ve fonksiyonların yeni sınıflarının artması kadar öne çıkar hale geldi. Sturm ve arkadaşı Joseph Liouville herhangi bir ikinci derece lineer diferansiyel denklem için genel bir problemi çözmeye çalışmaya karar verdiler.

Sturm 1833 yılından beri özdeğer ve özfonksiyonları göz önüne almaksızın kısmi diferansiyel denklemin problemleri ve özellikle değişken yoğunluklu bir çubuktaki ısı akışkanı üzerine çalışmıştır. Bu problem için uyguladığı matematiksel görüşleri cebirsel denklemlerin köklerinin gerçekliği ve dağılımının buluşlarıyla yakından ilgilidir. Diferansiyel denklemler üzerine görüşleri limit için bir pasaj ve fark denklemlerin bir çalışmasından ortaya çıktıdır. Liouville, Sturm'un ele aldığı aynı konuyu çalışmaya başladı. Birlikte çalışmalarının sonuçları oldukça detaylı olan birçok dergide yer aldı.



Joseph Liouville (1809-1882)

Liouville 19. yüzyılın sonlarına doğru Fransız matematik hayatında önemli bir rol oynayan önemli bir devri, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*'un kurucusu ve editörü ve Paris'teki *Collège de France*'da büyük ölçüde saygı duyulan bir profesördü. Yaratıcı bir matematikçi olarak kayda değer başarıları hak ettiği takdiri son zamanlarda almaktadır.

Eş değer bir integral denklemini kullanarak sınır değer problemini çözen ilk kişidir. Kesirli türev teorisi n 'nin pozitif tamsayı olmadığı durumda mantıklı anlamın $d^n y / dx^n$ sembolüne atanabildiğinin uzun süren problemine cevap vermiştir. Kompleks analizde temel sonuçlar keşfetti ve bunları kendi eliptik fonksiyonlar teorisi için bir temel olarak kullandı. Ayrıca faz uzayında zamanla değişen hacim integrali olarak ifade edilen Hamiltonian mekaniğinde çok iyi bilinen bir Liouville teoremi bulunmaktadır. Sturm ile birlikte ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerin özdeğer problemini de incelemişlerdir. (Hassani, 2002)

Transandantal sayılar teorisi Liouville'nin çalışmalarından kaynaklanan matematiğin diğer bir branşıdır. π ve e 'nin rasyonelsizliği (herhangi lineer denklemin

çözümleri olmamaları) 18. yüzyılda Lambert ve Euler tarafından kanıtlanmıştır. 1844 yılında Liouville e 'nin integral katsayılı herhangi kuadratik denklemin bir kökü de olamayacağını gösterdi. Bu onu e 'nin transandantal olduğu varsayımına götürdü ki bu da onun integral katsayılı herhangi polinom denklemini sağlamadığı anlamına gelir.

Sturm ve Liouville'nin üzerinde çalıştıkları sorular kabaca üç ana grupta toplanabilir.

- i) Özdeğerlerin özellikleri
- ii) Özfonksiyonların nitel davranışı
- iii) Özfonksiyonların bir sonsuz serisine keyfi fonksiyonların açılımı.

Bunlardan (i) ve (ii) yi Sturm araştırmıştır. Liouville, (iii) üzerinde çalışmış ve (i), (ii) ye ilişkin değişik sonuçlar ortaya koymuştur. Sturm ve Liouville'nin doğrusal diferensiyel denklemler üzerine olan çalışmalarını dört döneme ayırmak uygun düşer.

Birinci dönem olan 1829-1830 arasında her iki matematikçi de, birbirinden bağımsız olarak yayınladıkları makalelerle konuya yaklaşımlarını belirlediler. 1831-1835 döneminin ortalarında Sturm'un yaptığı iki büyük çalışma ile üçüncü dönem olan 1836-1837 de Liouville'nin konuya ilişkin ilk meşhur çalışması ard arda yayınlandı. Kuram üzerindeki özgün çalışmaların son dönemi olan 1838-1840 yılları arasında Liouville'nin büyük katkıları olmuştur. (Akça,1986)

1.1. Sturm-Liouville Denklemine giriş

Teorik fiziğin pek çok kolunda sık sık

$$\nabla^2 \bar{\Psi}(r,t) + \lambda' \bar{\Psi}(r,t) = \bar{A}(r,t) + B(t) \frac{\partial \bar{\Psi}(r,t)}{\partial t} + C(t) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(r,t)}{\partial t^2} \quad (1.1.1)$$

şeklinde lineer bir diferansiyel denklemlerle karşılaşılır. λ' ile bir parametre gösterilmektedir. λ' , $\bar{A}(r,t)$, $B(t)$ ve $C(t)$ nin özel değerleri için denklem de bazı özel isimler alır:

- 1) Eğer $\bar{A}(r,t) = 0$, $B(t) = \text{Sabit}$, $C(t) = \text{Sabit}$ ise denkleme *telgrafçılar denklemi*,
- 2) $A = C = 0$ ise *difüzyon denklemi*,

- 3) $\lambda' = B = C = 0$ ise *Poisson denklemi*,
- 4) $\lambda' = A = C = 0$ ise *Dalga denklemi*,
- 5) $A = B = C = 0$ ise *Helmholtz denklemi*,
- 6) $\lambda' = A = B = C = 0$ ise *Laplace denklemi* denir.

$\vec{A}(r,t)$ fonksiyonunun sıfırdan farklı olduğu hallerde $A = 0$ için elde edilen özel homojen denklemin genel çözümü ile A fonksiyonlu, yani homojen olmayan denklemin özel bir çözümünün lineer kombinasyonu, göz önüne alınan denklemin genel denklemini teşkil eder. Homojen denklemin genel çözümünü bulduktan sonra homojen olmayan denklemin özel bir çözümünü bulmak için mesela, analiz dersinden bilinen, Lagrange'in *katsayıların değişimi metodu* gibi bir metot uygulamak çok kere kolaylıkla sonuca ulaşılmasını mümkün kılar. Bu itibarla homojen denklemin genel çözümünün bulunması ön planda gelmektedir.

Şu halde

$$\nabla^2 \vec{\Psi}(r,t) + \lambda' \vec{\Psi}(r,t) = B(t) \frac{\partial \vec{\Psi}(r,t)}{\partial t} + C(t) \frac{\partial^2 \vec{\Psi}(r,t)}{\partial t^2} \quad (1.1.2)$$

denkleminin genel çözümünü bulmak için

$$\vec{\Psi}(r,t) = \vec{U}(r)T(t) \quad (1.1.3)$$

şeklinde değişken ayırımı yapıp gerek $\vec{U}(r)$ ve gerekse $T(t)$ fonksiyonlarını ayrı ayrı tespit etmeğe ve neticede bunların çarpımıyla $\vec{\Psi}(r,t)$ yi bulmaya çalışalım (1.1.3)'ü (1.1.2)'e yerleştirip de her iki yanı $\vec{U}(r)T(t)$ ile bölünce,

$$\frac{1}{\vec{U}(r)} \nabla^2 \vec{U}(r) + \lambda' = \frac{B(t)}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} + \frac{C(t)}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} \quad (1.1.4)$$

elde edilir. Bu takdirde iki şık vardır:

- 1) Ya (1.1.4)'in sol yanı $\vec{f}(r)$ ve sağ yanı da $g(t)$ gibi sırasıyla $\vec{r}$ ve t 'nin açık birer fonksiyonudur,
- 2) Ya da (1.1.4)'in her iki yanı da ayrı bir μ sabitine eşittir.

Birinci halde (1.1.4) denklemi

$$\vec{f}(r) = g(t) \text{ ya da } \vec{f}(r) - g(t) = \vec{F}(r, t) = 0$$

şeklinde olurdu ki bu fonksiyonel bağıntı, $\vec{r}$ ve t 'nin birinden birinin diğerinin fonksiyonu olduğunu gösterirdi; bu ise $\vec{r}$ ve t 'nin bağımsız değişkenler olması keyfiyetiyle açık olarak çelişiktir. Bu çelişiklik ancak (1.1.4)'ün her iki yanı da aynı bir μ ayrışım sabitine eşitse ortadan kalkar. Bu itibarla ve $\lambda' - \mu = \lambda$ kabul ederekten (1.1.4)'den

$$\nabla^2 \vec{U}(r) + \lambda \vec{U}(r) = 0 \quad (1.1.5)$$

$$C(t) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + B(t) \frac{dT(t)}{dt} - \mu T(t) = 0 \quad (1.1.6)$$

bulunur. Bunlardan (1.1.6) denklemi ikinci mertebeden adi bir diferansiyel denklem olup ∇^2 nin ifadesine bağlı değildir ve bunun integrasyonu herhangi bir zorluk arz etmez.

(1.1.5) denklemi ise Helmholtz tipi bir denklem olup aynı zamanda Laplace denkleminin özdeğer probleminin bir parçası olarak da kabul edilebilir. Buradaki Laplace operatörü (=Laplasyen), denklemin geçerli olduğu koordinat sistemine bağlıdır. Mesela küresel koordinatlarda $U = U(r, \theta, \phi)$ olmak üzere (1.1.5)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \lambda U = 0 \quad (1.1.7)$$

şeklini alır. Burada yine

$$U(r, \theta, \phi) = u(r)v(\theta)w(\phi)$$

farz ederek değişkenlere ayrışım metodu uygulayarak

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{du}{dr} \right] + \lambda r^2 u - \alpha u = 0 \quad (1.1.8)$$

$$\frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{dv}{d\theta} \right] + (\alpha \sin \theta) v - \frac{\beta}{\sin \theta} v = 0 \quad (1.1.9)$$

$$\frac{d^2 w}{d\phi^2} + \beta^2 w = 0 \quad (1.1.10)$$

şeklinde üç denklem elde edilir. Böylece kısmi türevli (1.1.7) denkleminin çözümü bu üç adi diferansiyel denklemin çözümüne indirgenmiş olmaktadır. Eğer α, β ve λ ayrışım sabitlerinin, bu denklemlerin çözümlerini mümkün kılacak değerleri varsa

$$U(r, \theta, \phi) = u(r; \lambda, \alpha) v(\theta; \alpha, \beta) w(\phi; \beta)$$

fonksiyonu Laplace operatörünün küresel koordinatlardaki bir özfonksiyonu olur. Şüphesiz ki bu denklemlerle birlikte *sınır şartları*'nın da belirtilmesi lazımdır. Esasında α, β ve λ nın kabul edilebilir değerlerini tayin eden de bu sınır şartlarıdır. Mesela (1.1.7) Helmholtz denklemini $r = R$ yarıçaplı bir kürenin içi için çözüp de bu çözümü $r = R$ için

$$\left. \begin{aligned} U &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial r} + \sigma U &= 0 \end{aligned} \right\}$$

sınır şartlarından birine tabi tutarsak bu şartlar

$$\left. \begin{aligned} u(R) &= 0 \\ u'(R) &= 0 \\ u'(R) + \sigma u(R) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

olmasını sonuçlandırır. $u(r)$ 'nin $R = 0$ da sürekli olması ve 1. mertebeden sürekli türevi haiz olmasını şart koşarsak bu, $u(0)$ 'ın sonlu kalmak mecburiyetinde olması demektir. Eğer $U(r, \theta, \phi)$, kürenin içinde sürekli ise ve sürekli türevi haizse

$w(0) = w(2\pi)$, $w'(0) = w'(2\pi)$ olur ki n bir tamsayı olmak üzere bu, $\beta = n^2$ olması demektir. Yine aynı şekilde $U(r, \theta, \phi)$ 'nin kürenin kutupsal eksenini üzerinde sürekli olması ve sürekli türevelere sahip olması isteniyorsa $v(0)$, $v'(0)$, $v(\pi)$ ve $v'(\pi)$ 'nin de sonlu kalmaları gerekir.

Gerek (1.1.8), gerek (1.1.9) ve gerekse (1.1.10) denklemlerinin, $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ reel fonksiyonlar olmak üzere

$$\frac{d}{dx} \left[P(x) \frac{dy(x)}{dx} \right] + Q(x)y(x) - \lambda R(x)y(x) = 0 \quad (1.1.11)$$

şeklindeki bir denklemin özel halleri olduğunu görmek kolaydır. Bu denkleme Sturm-Liouville denklemi adı verilmektedir. Bu denklemin bir sınır şartına bağlı olarak çözülmesi *Sturm-Liouville Problemi*'ni teşkil eder (Özemre, 1971).

1.2. Sturm-Liouville Sistemleri:

λ bir parametre olmak üzere

$$a_1(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_2(x) \frac{dy}{dx} + [a_3(x) + \lambda]y = 0 \quad (1.2.1)$$

ikinci basamaktan lineer diferansiyel denklemini göz önüne alalım. (1.2.1) denkleminde eğer,

$$p(x) = \exp \left[\int \frac{a_2(t)}{a_1(t)} dt \right], \quad q(x) = \frac{a_3(x)}{a_1(x)} p(x), \quad r(x) = \frac{p(x)}{a_1(x)} \quad (1.2.2)$$

dönüşümlerini yaparsak,

$$\frac{d}{dx} \left(p \frac{dy}{dx} \right) + (q + \lambda r)y = 0 \quad (1.2.3)$$

Sturm-Liouville denklemi elde edilir. Bu denklem

$$L = \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) + q$$

operatörü yardımıyla

$$L[y] + \lambda r(x)y = 0 \quad (1.2.4)$$

olarak yazılabilir. Buradan p, q ve r reel değerli fonksiyonlardır. Çözümlerin varlığını garanti edebilmek için kapalı bir $[a, b]$ aralığında q ve r 'nin sürekli, p 'nin ise türevlenebilir olduğu kabul edilmektedir.

Eğer $p(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında pozitif iseler (1.2.3) Sturm-Liouville denkleminde $[a, b]$ aralığında “regülerdir” veya “düzgündür” denir. Bir düzgün Sturm-Liouville denklemi verilen bir λ için $[a, b]$ aralığında iki lineer bağımsız çözüme sahiptir (Pryce, 1993).

$$L[y] + \lambda r(x)y = 0, \quad a \leq x \leq b \quad \text{Sturm-Liouville Denklemi}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 y(a) + a_2 y'(a) &= 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.5)$$

olarak verilen sınır koşulları ile birlikte bir Sturm-Liouville sistemi tanımlar. Burada a_1, a_2 ve b_1, b_2 'ler reel sabitler olup, $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$ dır. Bir Sturm-Liouville sistemi için aşikâr (sıfıra özdeş) olmayan çözümler veren λ değerlerine “özdeğer” ve karşılık gelen çözümlere de “özfonksiyonlar” denir (Duffy, 1997).

Örnek 1.2.1: Aşağıdaki Sturm-Liouville sistemini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ y(0) &= 0, \quad y'(\pi) = 0 \end{aligned}$$

$\lambda \leq 0$ olduğu zaman sistemin bir çözüme sahip olmadığını görmek kolaydır. Gerçekten; $\lambda = -\mu^2$ alınırsa denklemin genel çözümü

$$y(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

olup $y(0) = y'(\pi) = 0$ koşullarına uygun tek çözümü $A = B = 0$ değerlerine karşılık gelen $y \equiv 0$ aşıkâr çözümdür. $\lambda = 0$ olması halinde $y(x) = Ax + B$ 'de aynı durum vardır. Hâlbuki $\lambda > 0$ olması halinde Sturm-Liouville denkleminin genel çözümü

$$y(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x$$

olup $y = 0$ koşulu $A = 0$ olmasını, $y'(\pi) = 0$ koşulu ise $B \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \pi = 0$ olmasını gerektirir. $\lambda \neq 0$ ve $B = 0$ seçimi aşıkâr çözümleri verdiğinden $\cos \sqrt{\lambda} \pi = 0$, $B \neq 0$ alınmalıdır. Bu denklemi sağlayan λ değerleri $\sqrt{\lambda} = \frac{2n-1}{2}$; $n = 1, 2, 3, \dots$ olup özdeğerler $\lambda_n = \frac{(2n-1)^2}{4}$ ve karşılık gelen özfonksiyonlar

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde bulunur.

Örnek 1.2.2: $x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0$, $1 \leq x \leq e$; $y(1) = 0$, $y(e) = 0$ Sturm-Liouville sistemini göz önüne alalım. Verilen Euler Denklemi

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \frac{1}{x} \lambda y = 0$$

Sturm-Liouville formunda yazılabilir ve onun genel çözümü $y(x) = c_1 x^{i\sqrt{\lambda}} + c_2 x^{-i\sqrt{\lambda}}$ 'dir.

$$x^{i\alpha} = e^{\ln c_1 x^{i\alpha}} = e^{i\alpha \ln x} = \cos(\alpha \ln x) + i \sin(\alpha \ln x)$$

olduğu göz önünde tutulursa $y(x)$ genel çözümü

$$y(x) = A \cos(\sqrt{\lambda} \ln x) + B \sin(\sqrt{\lambda} \ln x)$$

olarak yazılabilir. $A = c_1 + c_2$ ve $B = i(c_1 - c_2)$ olan yeni sabitlerdir. $y(1) = 0$ sınır koşulu $A = 0$ olmasını, $y(e) = 0$ sınır koşulu ise $\sin \sqrt{\lambda} = 0$, $B \neq 0$ olmasını verir. Bu ise verilen sistemin özdeğerlerinin

$$\lambda_n = n^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ve karşılık gelen özfonksiyonlarının

$$\varphi_n(x) = \sin(n\pi \ln x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

olduğunu gösterir.

1.3. Periyodik Sturm-Liouville Sistemleri

$p(a) = p(b)$ olmak üzere bir Sturm-Liouville sistemi

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0, \quad a \leq x \leq b$$

$$y(a) = y(b)$$

$$y'(a) = y'(b)$$

olarak verilmiş ise ona “Periyodik Sturm-Liouville Sistemi” denir.

Örnek 1.3.1: $y'' + \lambda y = 0$, $-\pi \leq x \leq \pi$; $y(-\pi) = y(\pi)$ ve $y'(-\pi) = y'(\pi)$ periyodik Sturm-Liouville sistemini göz önüne alalım. Burada $p(x) = 1$ olduğundan $p(-\pi) = p(\pi)$ sağlanmaktadır.

$\lambda > 0$ için verilen denklemin genel çözümü

$$y(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x$$

olup periyodik sınır koşullarının uygulanması

$$(2 \sin \sqrt{\lambda} \pi) B = 0$$

$$(2 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \pi) A = 0$$

eşitliklerinin sağlanmasını gerektirir. Buradan aşikâr olmayan bir çözüm elde etmek için

$$\sin \sqrt{\lambda} \pi = 0, \quad A \neq 0, \quad B \neq 0$$

alınmalıdır. Keyfi a ve b değerleri için $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$ değerleri $\sin \sqrt{\lambda} \pi = 0$ denklemini gerçeklediğinden, aynı n^2 özdeğerine karşılık iki lineer bağımsız özfonksiyon elde edilir. Bunlar $\cos nx$ ve $\sin nx$ dir.

$\lambda < 0$ için Sturm-Liouville denkleminin çözümlerinin periyodik sınır koşullarını gerçeklemediği kolayca gösterilebilir. Yani negatif özdeğerler yoktur.

$\lambda = 0$ olduğu zaman $y(x) = 1$ sistemin aşikâr olmayan bir çözümüdür. Böylece verilen periyodik Sturm-Liouville sisteminin özdeğerleri $0, \{n^2\}$ ve karşılık gelen özfonksiyonlar da $1, \{\cos nx\}, \{\sin nx\}$ 'dir. Burada $n > 0$ tamsayıdır.

Tanım 1.3.1: Bir Sturm-Liouville sisteminde herhangi bir özdeğere karşılık gelen lineer bağımsız çözümün tek veya ($k > 1$) olacak şekilde k tane olmasına göre o özdeğere “**basit özdeğer**” veya “**k. katlı özdeğer**” adı verilir (Pinchover and Rubinstein, 2005).

1.4. Özfonksiyonlar ve Ortogonal (Dik) Fonksiyon Uzayları

Örnek(1.3.1)'de gördük ki $n = 1, 2, \dots$ için $\cos nx$ ve $\sin nx$ 'ler verilen sistemin özfonksiyonlarıdır. Trigonometrik özdeşlikler kullanılarak aşağıdaki bağıntılar gösterilebilir.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx \, dx = 0, \quad m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \text{tüm } m, n \in \mathbb{Z} \text{ için}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = 0, \quad m \neq n.$$

Böyle bir durumda bu fonksiyonlara $[-\pi, \pi]$ aralığında birbirine diktirler denir. Bu tip diklik bağıntıları genel olarak Sturm-Liouville sistemlerinin özfonksiyonları için geçerlidirler.

Teorem 1.4.1: Bir $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonların dizisi $\{\varphi_n(x)\}$ olsun. $x \in [a, b]$ için $x > 0$ olan bir fonksiyon olmak üzere eğer,

$$\int_a^b r(x) \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0, m \neq n, n, m \in \mathbb{N} \quad (1.4.1)$$

sağlanıyorsa $\varphi_n(x)$ fonksiyonlar dizisine $[a, b]$ aralığında $r(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal bir sistem teşkil ediyor denir. Eğer $m = n$ ise

$$\|\varphi_n(x)\| = \left[\int_a^b r(x) \varphi_n^2(x) dx \right]^{1/2} \quad (1.4.2)$$

ifadesine $\varphi_n(x)$ ortogonal sisteminin “normu” denir.

Teorem 1.4.2: Bir Sturm-Liouville sisteminde p, q ve r katsayıları $[a, b]$ de sürekli ve λ_n, λ_m özdeğerlerine karşılık gelen φ_n ve φ_m özfonksiyonları aynı aralıkta türevlenebilir olsunlar. O takdirde φ_n ve $\varphi_m, [a, b]$ aralığında r ağırlık fonksiyonuna göre diktirler.

İspat: λ_n ve λ_m ya karşılık gelen φ_n ve φ_m özfonksiyonları (1.2.3) Sturm-Liouville denklemini sağlayacağından

$$\frac{d}{dx}(p\varphi_n') + (q + \lambda_n r)\varphi_n = 0 \quad (1.4.3)$$

ve

$$\frac{d}{dx}(p\varphi_m') + (q + \lambda_m r)\varphi_m = 0 \quad (1.4.4)$$

şeklinde yazılabilirler. $(1.4.3) \cdot \varphi_m - (1.4.4) \cdot \varphi_n = 0$ ifadesinden

$$\begin{aligned} (\lambda_n - \lambda_m) r \varphi_n \varphi_m &= \varphi_n \frac{d}{dx} (p \varphi'_m) - \varphi_m \frac{d}{dx} (p \varphi'_n) \\ &= \frac{d}{dx} [(p \varphi'_m) \varphi_n - (p \varphi'_n) \varphi_m] \\ &= \frac{d}{dx} [p(\varphi'_m \varphi_n - \varphi'_n \varphi_m)] \end{aligned}$$

olup her iki yanın $[a, b]$ aralığında integrasyonu aşağıdakini verir.

$$\begin{aligned} (\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b r \varphi_n \varphi_m dx &= [p(\varphi'_m \varphi_n - \varphi'_n \varphi_m)]_a^b \\ &= p(b)[\varphi'_m(b) \varphi_n(b) - \varphi'_n(b) \varphi_m(b)] \\ &\quad - p(a)[\varphi'_m(a) \varphi_n(a) - \varphi'_n(a) \varphi_m(a)]. \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Diğer taraftan φ_n ve φ_m özfonksiyonları (1.2.5) sınır koşullarını sağlayacağından

$$b_1 \varphi_n(b) + b_2 \varphi'_n(b) = 0$$

$$b_1 \varphi_m(b) + b_2 \varphi'_m(b) = 0$$

olacaktır. $b_2 \neq 0$ için bu son denklem çiftinin ilki $\varphi_m(b)$, ikincisi $\varphi_n(b)$ ile çarpılır taraf tarafa çıkartılırsa,

$$[\varphi_n(b) \varphi'_m(b) - \varphi'_n(b) \varphi_m(b)] = 0 \quad (1.4.6)$$

elde edilir. Yukarıdaki benzer işlemler $a_2 \neq 0$ için

$$a_1 \varphi_n(a) + a_2 \varphi'_n(a) = 0$$

$$a_1 \varphi_m(a) + a_2 \varphi'_m(a) = 0$$

sınır koşulları üzerinde tekrarlandığında,

$$[\varphi_n(a)\varphi'_m(a) - \varphi'_n(a)\varphi_m(a)] = 0 \quad (1.4.7)$$

elde edilir. (1.4.6) ve (1.4.7) sonuçlarının (1.4.5)' de yerine konulmasıyla

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b r \varphi_n \varphi_m dx = 0 \quad (1.4.8)$$

bulunur. Eğer λ_n ve λ_m farklı özdeğerler iseler o takdirde $\lambda_n - \lambda_m \neq 0$ olacağından

$$\int_a^b r \varphi_n \varphi_m dx = 0$$

elde edilir ki bu sonuç teoremi ispatlar.

Teorem 1.4.3: $[a, b]$ aralığında bir periyodik Sturm-Liouville sisteminin özfonksiyonları aynı aralıkta r ağırlık fonksiyonuna göre diktirler.

İspat: φ_n ve φ_m özfonksiyonları için periyodik sınır koşulları sağlanırsa

$$\varphi_n(a) = \varphi_n(b); \quad \varphi'_n(a) = \varphi'_n(b)$$

$$\varphi_m(a) = \varphi_m(b); \quad \varphi'_m(a) = \varphi'_m(b)$$

olup bu ifadelerin (1.4.5)'de yerlerine konulması ile aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b r \varphi_n \varphi_m dx = [p(b) - p(a)][\varphi_n(a)\varphi'_m(a) - \varphi'_n(a)\varphi_m(a)]$$

$p(a) = p(b)$ olduğundan eşitliğin ikinci tarafı sıfırdır. Böylece $\lambda_n \neq \lambda_m$ farklı özdeğerleri için

$$\int_a^b r \varphi_n \varphi_m dx = 0$$

elde edilir. Bu teoremin ispatıdır (Watts, 2007).

Teorem 1.4.4: Bir düzgün (regüler) Sturm-Liouville sisteminin tüm özdeğerleri reeldir (Boyce and DiPrima, 2000).

İspat: Kabul edelim ki bir $\lambda_n = \alpha + i\beta$ kompleks özdeğeri vardır ve ona karşılık gelen özfonksiyon $\varphi_n = u + iv$ dir. Denklemin katsayılarının reel olmasından dolayı $\lambda_n = \alpha + i\beta$ özdeğerinin $\lambda_n = \alpha - i\beta$ eşleniği de bir özdeğerdir. O halde λ_m ya karşılık gelen bir $\varphi_m = u - iv$ fonksiyonu vardır. (1.4.8) bağıntısının kurulması

$$2i\beta \int_a^b r(u^2 + v^2) dx = 0$$

olmasını gerektirecektir. Düzgün (regüler) Sturm-Liouville sisteminde $r(x) > 0$ olacağından yukarıdaki ifade de integral sıfıra eşit olamaz. O halde $\beta = 0$ olmak zorundadır. Bu ise λ_n özdeğerinin reel olduğunu gösterir.

Teorem (1.4.4) ifade etmektedir ki bir düzgün (regüler) Sturm-Liouville sisteminin tüm özdeğerleri reeldir. Ancak burada herhangi bir özdeğerin varlığı garanti edilmemektedir. Böyle olmakla birlikte bir self-adjoint düzgün (regüler) Sturm-Liouville sisteminin özdeğerleri sayısının sayılabilir sonsuzlukta olduğu ispatlanabilmektedir. Bu durumu görmek için aşağıdaki örneği göz önüne alalım.

Örnek 1.4.1: $y'' + \lambda y = 0$, $0 \leq x \leq 1$, $y(0) = 0$, $y(1) + hy'(1) = 0$, $h > 0$

bir sabit olmak üzere verilen Sturm-Liouville sisteminde $p = 1$, $q = 0$, $r = 1$ olup Sturm-Liouville sisteminin çözümü,

$$y(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x$$

dir. $y(0) = 0$ sınır koşulu $A = 0$ olmasını gerektirir. O halde

$$y(x) = B \sin \sqrt{\lambda} x$$

şeklinde çözümler aranacaktır. İkinci sınır koşulu uygulanırsa

$$\sin \sqrt{\lambda} + h\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} = 0 \quad B \neq 0$$

elde edilir ki bu ifade

$$\tan \sqrt{\lambda} = -h\sqrt{\lambda}$$

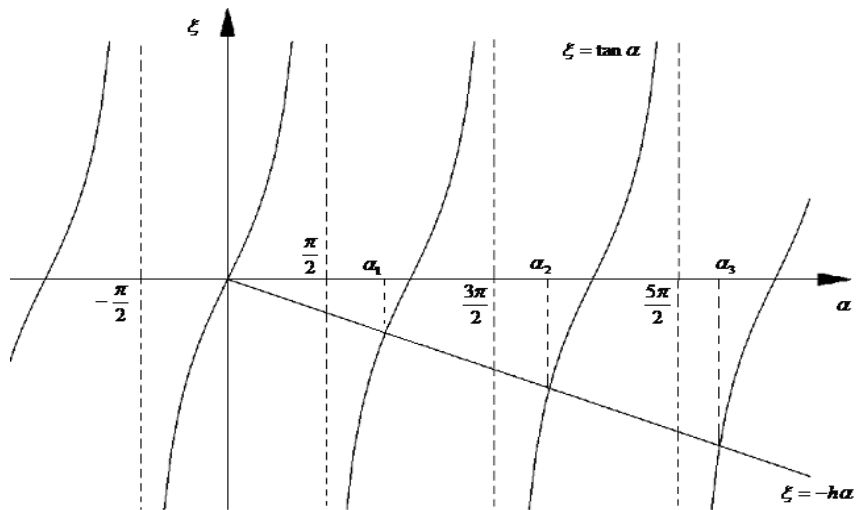
olarak yazılabilir. $\alpha = \sqrt{\lambda}$ denilmesiyle bu denklem,

$$\tan \alpha = -h\alpha$$

şeklini alır. Bu denklemi sağlayan α çözümleri açık olarak ifade edilemezler. Ancak,

$$\xi = \tan \alpha \text{ ve } \xi = -h\alpha$$

fonksiyonlarının grafiklerini çizerek kesim noktalarının apsisi istenilen nokta değerlerini verecektir.



Yukarıdaki şekil üzerinde iki eğrinin kesim noktalarına karşılık gelen α_n 'ler görülmektedir. $n = 1, 2, \dots$ için sonsuz sayıda α_n olup her bir α_n ye karşılık gelen λ_n değeri vardır ve bunlar

$$\lambda_n = \alpha_n^2 ; \quad n = 1, 2, \dots$$

olarak verilirler. Böylece özdeğerlerin bir dizisi vardır öyle ki

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

olup $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ olur. Karşılık gelen özfonksiyonlar ise

$$\varphi_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x$$

şeklindedir.

Uyarı: $\lambda \leq 0$ olması halinde aşıkâr çözüm vardır.

Teorem 1.4.5: Bir self-adjoint düzgün (regüler) Sturm-Liouville sistemi reel özdeğerlerin sonsuz bir (λ_n) dizisine sahiptir, öyle ki

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

olup $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ olur. Her bir n için karşılık gelen $\varphi_n(x)$ özfonksiyonu bir sabit çarpan farkıyla tektir ve (a, b) aralığında tam olarak n tane köke (sıfır yerine) sahiptir.

Teorem 1.4.6: $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında $L[y] + \lambda r[y] = 0$ denkleminin herhangi iki çözümü ise, o takdirde

$$p(x)W(x_i \varphi_1, \varphi_2) = \text{sabit}$$

dır. Burada W , Wronskian dır.

İspat: $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında $L[y] + \lambda r[y] = 0$ denkleminin herhangi iki çözümü olduğundan

$$\frac{d}{dx} \left(p \frac{d\varphi_1}{dx} \right) + (q + \lambda r)\varphi_1 = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(p \frac{d\varphi_2}{dx} \right) + (q + \lambda r)\varphi_2 = 0$$

şeklinde yazılabilirler. Bu iki denklemden birincisi φ_2 ile ikincisi φ_1 ile çarpıldıktan sonra taraf tarafa çıkartılırsa,

$$\varphi_1 \frac{d}{dx} \left(p \frac{d\varphi_2}{dx} \right) - \varphi_2 \frac{d}{dx} \left(p \frac{d\varphi_1}{dx} \right) = 0$$

elde edilir. Bu denklem a dan x 'e integre edilirse,

$$p(x)[\varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_2(x)\varphi_1'(x)] - p(a)[\varphi_1(a)\varphi_2'(a) - \varphi_2(a)\varphi_1'(a)] = \text{sabit}$$

elde edilir. Bu eşitlik kısaca

$$p(x)W(x; \varphi_1, \varphi_2) = p(a)W(a; \varphi_1, \varphi_2) = \text{sabit} \quad (1.4.9)$$

olarak yazılabilir ve “Abel formülü” olarak bilinir.

Teorem 1.4.7: Bir düzgün (regüler) Sturm-Liouville sisteminin herhangi bir λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu, sabit çarpan farkıyla tektir.

İspat: $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ bir λ özdeğerine karşılık gelen iki özfonksiyon olsunlar. Abel formülünden dolayı,

$$p(x)W(x; \varphi_1, \varphi_2) = \text{sabit} \quad p(x) > 0$$

dır. Buradan görülmektedir ki eğer herhangi bir $a \in [a, b]$ için $W(x; \varphi_1, \varphi_2) = 0$ ise, o takdirde her $x \in [a, b]$ için olmak zorundadır. Diğer taraftan $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$, $x = a$ da sınır koşullarını gerçeklediğinden

$$a_1\varphi_1(a) + a_2\varphi_1'(a) = 0$$

$$a_1\varphi_2(a) + a_2\varphi_2'(a) = 0$$

olacaktır. a_1 ve a_2 , her ikisi birden sıfır olamayacağından

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(a) & \varphi_1'(a) \\ \varphi_2(a) & \varphi_2'(a) \end{vmatrix} = W(a; \varphi_1, \varphi_2) = 0$$

olmalıdır. $x_0 = a \in [a, b]$ da $W = 0$ olduğundan $[a, b]$ aralığında $W \equiv 0$ dır. Bu ise $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ 'nin lineer bağımlı olmaları için yeter koşuldur. O halde $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ biri diğerinin bir sabit katıdır.

1.5. Ortalama Yakınsaklık

Bir $[a, b]$ aralığında $r(x) > 0$ ağırlık fonksiyonuna göre dik ve kare integrallenebilir fonksiyonların bir cümlesi $\{\varphi_n\}$ olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ serisinin k . kısmi toplamı

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^k c_n \varphi_n(x)$$

ile gösterilsin. $[a, b]$ aralığında kare integrallenebilir bir f fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_I [f(x) - S_k(x)]^2 r(x) dx = 0$$

sağlanıyor ise, o takdirde $\{S_k(x)\}$ dizisine I aralığında $r(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre $f(x)$ fonksiyonuna “ortalama yakınsaktır” denir. Bu durum bazen “ortalama kare yakınsaklık” olarak da ifade edilir. Şimdi $S_k(x)$ ’in $f(x)$ fonksiyonuna en iyi yaklaşımını sağlayan c_n katsayılarını belirlemeye çalışalım. Bunun için

$$\begin{aligned} E(c_n) &= \int_I [f(x) - S_k(x)]^2 r(x) dx \\ &= \int_I f^2 r dx - 2 \sum_{n=1}^k c_n \int_I f \varphi_n r dx + \sum_{n=1}^k c_n^2 \int_I \varphi_n^2 r dx \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

integrali minimum yapmamız gerekecektir. Bu bir extramum problemidir. E ’nin c_n lar üzerinde bir minimuma sahip olması için bu katsayılar göre E ’nin ilk kısmi türevleri sıfır olmalıdır. O halde (1.5.1)’den her iki tarafın c_n ’ye göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenirse, $n = 1, 2, \dots, k$ için

$$\frac{\partial E}{\partial c_n} = -2 \int_I f \varphi_n r dx + 2c_n \int_I \varphi_n^2 r dx \quad (1.5.2)$$

bulunur. Buradan c_n değerleri

$$c_n = \frac{\int_I f \varphi_n r dx}{\int_I \varphi_n^2 r dx} \quad (1.5.3)$$

olarak elde edilirler. Şimdi de (1.5.1)’in ikinci yanını aşağıdaki biçimde yazalım.

$$E(c_n) = \int_I f^2 r dx + \sum_{n=1}^k \int_I \varphi_n^2 r dx \left[c_n - \frac{\int_I f \varphi_n r dx}{\int_I \varphi_n^2 r dx} \right]^2 - \sum_{n=1}^k \frac{\left(\int_I f \varphi_n r dx \right)^2}{\int_I \varphi_n^2 r dx}$$

Bu eşitlikten de görülmektedir ki ancak ve ancak c_n 'ler (1.5.3) deki gibi verildiği zaman E minimum değeri alır. O halde $f(x)$ fonksiyonuna en iyi yaklaşımı c_n 'lerin (1.5.3) bağıntısına uygun şekilde seçilmesi ile mümkün olabilmektedir.

Serinin $f(x)$ fonksiyonuna ortalama yakınsaklığını ifade etmek için

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

gösterimi kullanılır. Burada c_n 'ler r ağırlık fonksiyonlu $\{\varphi_n\}$ sistemine göre f 'nin Fourier katsayılarını ve seri de f 'nin Fourier serisini göstermektedir. Bu seri noktasal yakınsak veya düzgün yakınsak olabilir ya da olmayabilir.

1.6. Özfonksiyonların Açılımları:

Tanım 1.6.1: Reel değerli bir $\varphi(x)$ fonksiyonu bir I aralığında

$$\int_I \varphi^2(x) r(x) dx < \infty \quad (1.6.1)$$

(yalnızca bir değere yakınsak) özelliğini gerçekleştiriyor ise φ fonksiyonuna I aralığında $r(x) > 0$ ağırlık fonksiyonuna göre “kare integrallenebilir” denir.

Bu tanımın bir sonucu Schwartz eşitsizliğidir. $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ kare integrallenebilir fonksiyonları için

$$\left| \int_I \varphi(x) \psi(x) r(x) dx \right|^2 \leq \int_I \varphi^2(x) r(x) dx + \int_I \psi^2(x) r(x) dx \quad (1.6.2)$$

dir. Bu ifade “Schwartz eşitsizliği” olarak bilinir.

Bir I aralığında $r(x) > 0$ ağırlık fonksiyonuna göre kare integrallenebilir ve dik (ortogonal) fonksiyonların bir uzayı $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$ olsun. Bu uzayda bir $f(x)$ fonksiyonu belirli koşullar altında

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad (1.6.3)$$

şeklinde düzgün yakınsak bir seriye açılabilir. Burada c_n 'ler sabitlerdir. (1.6.3) serisinin her iki yanını $\varphi_m(x)r(x)$ ile çarpar ve I aralığında terim terime integre edersek,

$$\begin{aligned} \int_I f(x) \varphi_m(x) r(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_I c_n \varphi_n(x) \varphi_m(x) r(x) dx \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ m \neq n}}^{\infty} c_n \int_I \varphi_n(x) \varphi_m(x) r(x) dx + c_m \int_I \varphi_m^2(x) r(x) dx \\ &= c_m \int_I \varphi_m^2(x) r(x) dx \end{aligned}$$

buluruz. Bu eşitlikte m yerine n yazarsak

$$\int_I f(x) \varphi_n(x) r(x) dx = c_n \int_I \varphi_n^2(x) r(x) dx$$

elde edilir. Böylece c_n katsayıları,

$$c_n = \frac{\int_I f \varphi_n r dx}{\int_I \varphi_n^2 r dx}, \quad n = 1, 2, \dots$$

olarak bulunurlar. Bu sonuçlar aynı zamanda aşağıdaki teoremin ispatıdır.

Teorem 1.6.1: φ_n ler bir I aralığında $r(x) > 0$ ağırlık fonksiyonuna göre dik ve kare integrallenebilir fonksiyonlar olmak üzere, eğer bir f fonksiyonu I aralığında düzgün yakınsak olan

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

şeklinde bir seriye açılabilirse, o takdirde c_n katsayıları,

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$$

ile verilirler.

Örnek 1.6.1: $f(x) = x$, $0 \leq x \leq \pi$ fonksiyonunu $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ düzgün Sturm-Liouville sisteminin özfonksiyonları cinsinden seriye açınız.

Çözüm: Denkleme ait karakteristik denklem,

$$\alpha^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \mp \sqrt{-\lambda}$$

şeklinde elde edilir.

Durum I: $\lambda > 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \mp i \sqrt{\lambda}$ şeklinde olup denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

şeklinde elde edilir. Koşullar genel çözüme uygulandığında

$$y(0) = c_1 = 0 \Rightarrow y(x) = c_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

$$y(\pi) = c_2 \sin \sqrt{\lambda} x = 0 \Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} x = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} x = n\pi \Rightarrow \lambda_n = n^2, n \in \mathbb{N}^+$$

elde edilir ve karşılık gelen özfonksiyonlar,

$$\varphi_n(x) = \sin n x, \quad n = 1, 2, \dots$$

elde edilir.

Durum II: $\lambda = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = 0$ şeklinde olup denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1 x + c_2$$

şeklinde elde edilir. Koşullar genel çözüme uygulandığında

$$y(0) = c_2 = 0 \Rightarrow y(x) = c_1 x$$

$$y(\pi) = c_1 \pi = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow y(x) = 0$$

elde edilir. Çözüm aşikârdır ve $\lambda = 0$ özdeğer değildir.

Durum III: $\lambda < 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \mp \sqrt{-\lambda}$ şeklinde olup denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1 e^{-\sqrt{\lambda} x} + c_2 e^{\sqrt{\lambda} x}$$

elde edilir. Koşullar genel çözüme uygulandığında

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0$$

$$y(\pi) = c_1 e^{-\sqrt{\lambda} \pi} + c_2 e^{\sqrt{\lambda} \pi} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{\lambda} \pi} & e^{\sqrt{\lambda} \pi} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow y(x) = 0$$

elde edilir. Çözüm aşikârdır. Ortalama yakınsaklık

$$f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n x$$

şeklinde elde edilir ve katsayılar

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{\int_0^\pi x \sin nx \, dx}{\int_0^\pi \sin^2 nx \, dx} = \frac{\left[-x \frac{\cos nx}{n} \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos nx}{n} \, dx}{\int_0^\pi \frac{1 - \cos 2nx}{2} \, dx} \\
&= \frac{\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^\pi}{\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2nx}{4n} \right) \Big|_0^\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Böylece

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

dir.

Örnek 1.6.2: $y'' + 2y' + (1 + \lambda)y = 0$; $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ Sturm-Liouville sisteminin $\{\varphi_n(x)\}$ özfonksiyonlarını bulunuz. $0 < x < 1$ için $f(x) = 1$ fonksiyonunu bu sistemin özfonksiyonları cinsinden seriye açınız.

Çözüm: Karakteristik denklem $\alpha^2 + 2\alpha + (1 + \lambda) = 0$ olup

$$\alpha_{1,2} = \frac{-2 \mp \sqrt{4 - 4(1 + \lambda)}}{2} = -1 \mp \sqrt{-\lambda}$$

Durum I: $\lambda > 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = -1 \mp i\sqrt{\lambda}$ şeklinde olup denklemin genel çözümü

$$y(x) = e^{-x} (c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x)$$

elde edilir. Koşullar genel çözüme uygulandığında

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow y(x) = e^{-x} c_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow e^{-1} c_2 \sin \sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = n\pi \Rightarrow \lambda_n = n^2 \pi^2, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

elde edilir ve karşılık gelen özfonksiyonlar,

$$\varphi_n(x) = e^{-x} \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, \dots$$

elde edilir.

Durum II: $\lambda = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = -1$ şeklinde olup denklemin genel çözümü

$$y(x) = e^{-x}(c_1 x + c_2)$$

elde edilir. Koşullar genel çözüme uygulandığında

$$y(0) = e^0 c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow y(x) = c_1 e^{-x} x$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow c_1 e^{-1} = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0 \Rightarrow y(x) = 0$$

elde edilir. Çözüm aşikârdır ve $\lambda = 0$ özdeğer değildir.

Durum III: $\lambda > 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = -1 \mp \sqrt{-\lambda}$ şeklinde olup denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1 e^{(-1-\sqrt{-\lambda})x} + c_2 e^{(-1+\sqrt{-\lambda})x}$$

elde edilir. Koşullar genel çözüme uygulandığında

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0$$

$$y(1) = c_1 e^{(-1-\sqrt{-\lambda})} + c_2 e^{(-1+\sqrt{-\lambda})}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{(-1-\sqrt{-\lambda})} & e^{(-1+\sqrt{-\lambda})} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow y(x) = 0$$

elde edilir. Çözüm aşikârdır. Ortalama yakınsaklık

$$\begin{aligned}
f(x) = 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x \\
&= \frac{\int_0^1 e^{-x} (\sin n\pi x) e^{2x} dx}{\int_0^1 e^{-2x} (\sin n\pi x)^2 e^{2x} dx} \\
&= \frac{\int_0^1 e^x (\sin n\pi x) dx}{\int_0^1 (\sin n\pi x)^2 dx} \\
&= \frac{e(-1)^{n+1} + 1}{2n^2\pi^2 + 1} 2n\pi, \quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

elde edilir ve ağırlık fonksiyonu

$$\begin{aligned}
r(x) &= \frac{p(x)}{a_1(x)} = \frac{\exp\left(\int^x \frac{a_0(t)}{a_1(t)} dt\right)}{a_1(t)} \\
&= \exp\left(\int^x 2 dt\right) = e^{2x}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

1.7. Ortogonal Fonksiyonlar Sistemi

Teorem 1.7.1: p, q, s katsayıları $[a, b]$ aralığında sürekli ve λ_n, λ_m özdeğerlerine karşılık gelen $\varphi_n(x)$ ve $\varphi_m(x)$ özfonksiyonları aynı aralıkta türevlenebilir olan bir Sturm-Liouville sistemini göz önüne alalım. Bu taktirde $\varphi_n(x)$ ve $\varphi_m(x)$, $[a, b]$ aralığında r ağırlık fonksiyonuna göre denktir.

Örnek 1.7.1: $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ probleminin $\lambda > 0$ için özdeğerleri $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \dots$ ve özfonksiyonları $\varphi_n(x) = \sin nx$, $n = 1, 2, \dots$ olarak bulmuştuk.

$$\frac{d}{dx} \left(1 \cdot \frac{dy}{dx} \right) + (0 + 1 \cdot \lambda y) = 0$$

$p = 1, q = 0, r = 1$ katsayıları $[0, \pi]$ aralığında sürekli $\varphi_n(x) = \sin nx$, $n = 1, 2, \dots$ her yerde türevlenebilir olduğundan Teorem (1.7.1)'in koşulları sağlanmıştır. Teorem (1.7.1)'den dolayı,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(m-n)x \cdot \cos(m+n)x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right) \Big|_0^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 1.7.2: $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$ probleminin $\lambda > 0$ değerleri için özdeğerler $\lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2 \pi^2$, $n = 1, 2, \dots$ olup karşılık gelen özfonksiyonlar

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\frac{2n-1}{2} \pi x\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklindedir.

$$\frac{d}{dx} \left(1 \cdot \frac{dy}{dx} \right) + (0 + 1 \cdot \lambda y) = 0$$

$p = 1, q = 0, r = 1$ katsayıları $[0, 1]$ aralığında sürekli $\varphi_n(x)$ ler $[0, 1]$ aralığında türevlenebilir olduğundan Teorem (1.7.1)'e göre

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{2m-1}{2} \pi x\right) \cdot \sin\left(\frac{2n-1}{2} \pi x\right) dx = 0, \quad m \neq n$$

şeklinde yazılır. Gerçekten

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi x\right) \cdot \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right) dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\cos\left(\frac{2m-1}{2}\pi x - \frac{2n-1}{2}\pi x\right) - \cos\left(\frac{2m-1}{2}\pi x + \frac{2n-1}{2}\pi x\right) \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 [\cos(m-n)\pi x - \cos(m+n-1)\pi x] dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)\pi x}{(m-n)\pi} - \frac{\sin(m+n-1)\pi x}{(m+n-1)\pi} \right]_0^1 = 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

1.8. Tamlık ve Parseval Özdeşliği

(1.5.3) Fourier katsayılarının (1.5.1) de yerine konulması

$$\int_I \left(f(x) - \sum_{n=1}^k c_n \varphi_n(x) \right)^2 r(x) dx = \int_I f^2 r dx - \sum_{n=1}^k c_n^2 \int_I \varphi_n^2 r dx$$

ifadesini verir. Sol taraf negatif olmayacağından,

$$\sum_{n=1}^k c_n^2 \int_I \varphi_n^2 r dx \leq \int_I f^2 r dx \tag{1.8.1}$$

olur. Bu eşitsizliğin ikinci taraftaki integral sonlu olup birinci taraftaki seri her k için üstten sınırlıdır. Böylece $k \rightarrow \infty$ için (1.8.1) eşitsizliği

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \int_I \varphi_n^2 r dx \leq \int_I f^2 r dx \tag{1.8.2}$$

olarak yazılabilir. Buna Bessel eşitsizliği denir. Eğer seri $f(x)$ fonksiyonuna ortalama yakınsak ise, diğer bir deyişle

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_I \left(f(x) - \sum_{n=1}^k c_n \varphi_n(x) \right)^2 r(x) dx = 0$$

ise o takdirde (1.8.2) yerine

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \int_I \varphi_n^2 r dx = \int_I f^2 r dx \quad (1.8.3)$$

özdeşliği elde edilir ki buna “Parseval Özdeşliği” denir.

Eğer her sürekli ve kare integrallenebilir bir $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

şeklinde bir sonsuz seriye açılabilirse, o takdirde r ağırlık fonksiyonuna göre dik olan $\{\varphi_n\}$ kare integrallenebilir ve sürekli fonksiyonlarının dizisi “Tam”dır denir.

1.9. Adjoint Formlar ve Lagrange Özdeşliği

Bir I aralığı üzerinde tanımlanmış

$$L[y] = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (1.9.1)$$

denklemini göz önüne alalım. $z \in C^2(I)$ olmak üzere

$$za_0 y'' = (za_0 y')' - (za_0)' y' = (za_0)'' y - ((za_0')y)' + (za_0 y')'$$

$$za_1 y' = (za_1 y)' - (za_1)' y$$

$$za_2 y = (za_2) y$$

yazılabilirler. Buradan

$$\begin{aligned} zL[y] &= (za_0)'' y - ((za_0')y)' + (za_0 y')' - (za_1)' y + (za_1 y)' + (za_2) y \\ &= [(za_0)'' - (za_1)' + (za_2)] y + \frac{d}{dx} [za_0 y' - (za_0')y + za_1 y] \end{aligned} \quad (1.9.2)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} L^*[z] &= (za_0)'' - (za_1)' + (za_2) \\ &= a_0 z'' + (2a_0' - a_1) z' + (a_0'' - a_1' + a_2) z \end{aligned} \quad (1.9.3)$$

tanımını yapılırsa (1.9.2) ifadesi

$$zL[y] - yL^*[z] = \frac{d}{dx} [a_0(y'z - yz') + (a_1 - a_0')yz] \quad (1.9.4)$$

şeklini alır. Bu ifade L operatörü için Lagrange özdeşliği olarak bilinir. L^* operatörüne L nin adjoint operatörü denir. L^* ın adjointinin L olduğunu görmek kolaydır. Yani $L^{**} = L$ dir.

Eğer $L = L^*$ ise L ye self-adjoint operatör denir. (1.9.1) denkleminin self-adjoint olabilmesi için gerek ve yeter koşul (1.9.1) ve (1.9.3)'den görüldüğü gibi,

$$a_1 = 2a_0' - a_1, \quad a_2 = a_0'' - a_1' + a_2$$

koşulunu sağlamasıdır. Bu iki koşul birlikte $a_1 = a_0'$ olmasına denktir. Böylece, eğer L self-adjoint ise

$$L[y] = a_0 y'' + a_0' y' + a_2 y = (a_0 y')' + a_2 y \quad (1.9.5)$$

olarak yazılabilir.

Genel olarak, L nin self-adjoint olmadığı hallerde

$$h(x) = \frac{1}{a_0} \exp \left\{ \int^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt \right\} \quad (1.9.6)$$

ile çarpıldığında $h(x)L[y]$ ifadesi self-adjoint olur. O halde ikinci basamaktan (1.9.1) tipindeki her lineer diferansiyel denklem $h(x)$ ile çarpılarak,

$$\frac{d}{dx} \left[p \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = 0$$

self-adjoint formuna getirebilir. Burada,

$$p(x) = \frac{1}{a_0} \left\{ \int_0^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt \right\}$$

$$q(x) = \frac{a_2}{a_0} \left\{ \int_0^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt \right\}$$

dir. Bu sonuçlar bize bir düzgün Sturm-Liouville denkleminin self-adjoint olduğunu da vermektedir. Örneğin, Legendre denklemi olarak bilinen

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

diferansiyel denklemi self-adjoint formdadır. Çünkü,

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + n(n+1)y = 0$$

olarak yazılabilmektedir. Bessel denklemi olarak bilinen

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

diferansiyel denkleminin self-adjoint formu

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(x - \frac{v^2}{x} \right) y = 0$$

şeklinde ifade edilir. Şimdi de (1.9.4) Lagrange özdeşliğinin $[a, b]$ de integrali alınır,

Bu takdirde,

$$\int_a^b (zL[y] - yL^*[z]) dx = [a_0(y'z - yz') + (a_1 - a'_0)yz] \Big|_a^b \quad (1.9.7)$$

Green özdeşliği elde edilir. L operatörü self-adjoint olduğu zaman bu bağıntı,

$$\int_a^b (zL[y] - yL[z]) dx = [a_0(y'z - yz')] \Big|_a^b \quad (1.9.8)$$

şeklini alır (Akulenko and Nesterov, 2005).

Örnek 1.9.1: $(L^*)^* = L$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $L[y] = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$

denklemini ele alalım. $D = \frac{dy}{dx}$ olmak üzere

$$L^* = a_0 D^2 + (2a'_0 - a_1)D + (a''_0 - a'_1 + a_2)$$

olduğundan

$$(L^*)^* = b_0 D^2 + (2b'_0 - b_1)D + (b''_0 - b'_1 + b_2)$$

şeklinde elde edilir.

$$(L^*)^* = L$$

olabilmesi için

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ 2b'_0 - b_1 &= a_1 \\ b''_0 - b'_1 + b_2 &= a_2 \end{aligned} \right\}$$

olmalıdır. Burada $b_0 = a_0$ olduğu kabul edildiğinden

$$2b'_0 - b_1 = 2a'_0 - (2a'_0 - a_1) = a_1$$

$$b''_0 - b'_1 + b_2 = a''_0 - (2a'_0 - a_1) + (a''_0 + a'_1 + a_2) = a_2$$

bulunur. Böylece $(L^*)^* = L$ dir.

Örnek 1.9.2: $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$; $n = 1, 2, \dots$ Laguerre denklemini self-adjoint forma getiriniz

Çözüm: $a'_0 = a_1 \Rightarrow 1 \neq (1-x)$ olduğundan self-adjoint değildir. Buradan

$$h(x) = \frac{1}{a_0} \exp \left\{ \int^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt \right\} = \frac{1}{x} \exp \left\{ \int^x \frac{1-t}{t} dt \right\} = \frac{1}{x} x \exp(-x) = e^{-x}$$

biçiminde elde edilir. Denklem $h(x)$ ile çarpılırsa self-adjoint olur. Böylece

$$xe^{-x}y'' + (1-x)e^{-x}y' + ne^{-x}y = 0$$

Laguerre denklemi self-adjoint formuna getirilmiş olur. Gerçekten bu denklem sonuçta

$$\frac{d}{dx}(xe^{-x}y') + ne^{-x}y = 0$$

şeklinde yazılır.

Örnek 1.9.3: $y'' - 2xy' + 2ny = 0$; $n = 1, 2, \dots$ Hermite Denklemini self-adjoint forma getiriniz

Çözüm: $a'_0 \neq a_1$ olduğundan self-adjoint değildir. Buradan

$$h(x) = \frac{1}{a_0} \exp \left\{ \int^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt \right\} = \frac{1}{x} \exp \left\{ \int^x -2t dt \right\} = e^{-x^2}$$

şeklinde bulunur. Denklem $h(x)$ ile çarpılırsa self-adjoint olur. Böylece

$$e^{-x^2} y'' + 2e^{-x^2} y' + 2ne^{-x^2} y = 0$$

elde edilir. Bu takdirde Hermite denklemi self-adjoint formunda ifade edilmiş olur. Gerçekten de

$$\frac{d}{dx}(e^{-x^2} y') + 2ne^{-x^2} y = 0$$

biçiminde yazılır.

Örnek 1.9.4: $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$; $n = 1, 2, \dots$ Legendre Denklemini self-adjoint forma getiriniz

Çözüm: $a'_0 = -2x = a_1$ olduğundan denklem self-adjointtır. Böylece denklem

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)y') + n(n+1)y = 0$$

biçiminde yazılır.

1.10. Aykırı (Singüler) Sturm-Liouville Sistemleri

Eğer bir Sturm-Liouville sisteminde aşağıdaki durumlardan herhangi biri varsa, o sisteme aykırı Sturm-Liouville sistemi denir.

- i) Tanım aralığı yarı sonsuz ya da sonsuzdur.
- ii) $p(x)$ veya $r(x)$ fonksiyonları verilen aralıkta köklere (sıfır yerlerine) sahiptir.
- iii) Aralık sonludur fakat katsayılarından en az biri aralığın uçlarından birinde veya her ikisinde sonsuz olur.

Bir aykırı Sturm-Liouville sisteminde çoğu kez aykırılığın var olduğu uç noktalarda $y(x)$ fonksiyonunun sınırlı kalmasını sağlayacak ek koşullara ihtiyaç vardır. Bir Sturm-Liouville sisteminin $x = a$ uç noktasında aykırı durumuna sahip olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $y(x), z(x) \in C^2((a, b))$ olmak üzere (1.9.8) bağıntısından

$$\int_{a+\varepsilon}^b \{ zL[y] - yL[z] \} dx = p(b)[y'(b)z(b) - y(b)z'(b)] \\ - p(a+\varepsilon)[y'(a+\varepsilon)z(a+\varepsilon) - y(a+\varepsilon)z'(a+\varepsilon)].$$

yazılır. Burada ε yeteri kadar küçük olan pozitif bir sayıdır.

Eğer y ve z fonksiyonları için

$$\lim_{x \rightarrow a^+} p(x)[y'(x)z(x) - y(x)z'(x)] = 0 \quad (1.10.1)$$

$$p(b)[y'(b)z(b) - y(b)z'(b)] = 0 \quad (1.10.2)$$

koşulları geçerli ise, o takdirde

$$\int_{a+\varepsilon}^b \{ zL[y] - yL[z] \} dx = 0$$

sağlanır. Örneğin, $p(a) = 0$ olduğu zaman ki bir aykırı Sturm-Liouville sisteminde (1.10.1) ve (1.10.2) koşulları yerlerini aşağıdaki koşullara bırakır.

1. $x \rightarrow a$ için $y(x)$ ve $y'(x)$ sonludur.
2. $b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0$ dır.

Bu sonuçlardan bir aykırı Sturm-Liouville sisteminin her zaman self-adjoint olmadığı görülmektedir.

Eğer sınır koşullarını gerçekleyen herhangi iki $y(x)$ ve $z(x)$ fonksiyonu

$$\int_a^b \{ zL[y] - yL[z] \} dx = 0$$

bağıntısını gerçekleştiriyorsa, o takdirde aykırı Sturm-Liouville sistemine self-adjoint'dir denir (Hassani, 2002).

1.11. Sturm-Liouville Denkleminin Serilerle Çözümü

(1.1.11) Sturm-Liouville denklemini

$$f(x) = \frac{P(x)}{\frac{dP(x)}{dx}}; \quad g(x) = \frac{Q(x) + \lambda R(x)}{\frac{dP(x)}{dx}}$$

kabulüyle

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + f(x) \frac{dy(x)}{dx} + g(x)y(x) = 0 \quad (1.11.1)$$

şekline indirgemek mümkündür. Verilen $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları eğer, sınırlı sayıda kutup noktası hariç olmak üzere, analitik fonksiyonlarsa x_0 ile bunların kutup noktalarından farklı bir noktayı göstererek, $x = x_0$ 'ın göz önüne alınan diferansiyel denklemin adi bir noktası olduğu söylenir. Böyle bir adi nokta civarında diferansiyel denklemin bir kuvvet serisi şeklinde çözümünü oluşturmak mümkündür. Geleneği bozmaksızın $x_0 = 0$ kabul edilebilir. Gerçekten de $x = x_0$ adi bir nokta olmak üzere her zaman $\xi = x - x_0$ şeklinde yeni bir bağımsız değişken oluşumuyla (1.11.1) denkleminin orijinde adi bir noktaya sahip olması sağlanabilir.

Böylece genel olarak $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının $x_0 = 0$ noktasında analitik olmaları nedeniyle bu nokta civarında bunları

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \quad (1.11.2)$$

şeklinde Taylor serilerine açmak mümkün olur. Bunların ortak yakınsaklık daireleri ise $|x| = R$ olsun. Bu takdirde (1.11.1) in genel çözümü için

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (1.11.3)$$

kabul edilebilirdir. (1.11.2) ve (1.11.3) ifadeleri (1.11.1) denkleminde yerine yazılıp x 'in çeşitli kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$\begin{aligned} 2c_2 + a_0c_1 + b_0c_0 &= 0 \\ 6c_3 + 2a_0c_2 + a_1c_1 + b_0c_1 + b_1c_0 &= 0 \\ 12c_4 + 3a_0c_3 + 2a_1c_2 + a_2c_1 + b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 &= 0 \\ \dots\dots\dots &= 0 \end{aligned}$$

bağlantıları elde edilir. Burada c_0 ile c_1 'e keyfi değerler verilmek suretiyle c_2 katsayısı birinci denklemden tespit edilir. Sonra ikinci denklemden c_3 katsayısı c_0, c_1 ve c_2 'nin fonksiyonu olarak elde edilir ve bu böyle devam eder.

Eğer $x = x_0$ noktası $f(x)$ ve $g(x)$ 'in bir kutup noktası ise x_0 'ın, diferansiyel denklemin bir tekil noktasını teşkil ettiği söylenir. Diğer yandan, eğer $(x - x_0)f(x)$ ve $(x - x_0)^2g(x)$ ifadeleri $x = x_0$ analitik iseler, x_0 noktasına düzenli tekil nokta, aksi halde ise düzensiz tekil nokta denir.

Düzenli bir tekil nokta civarında göz önüne alınan diferansiyel denklemin çözümünü yine bir kuvvet serisi şeklinde inşa etmek mümkündür. Bunun için $x_0 = 0$ kabul edilir ve denklem x^2 ile çarpılırsa buna göre,

$$x^2 \frac{d^2y(x)}{dx^2} + [xf(x)] \left[x \frac{dy(x)}{dx} \right] + x^2 g(x)y(x) = 0 \quad (1.11.4)$$

olur. $xf(x)$ ve $x^2g(x)$, $x_0 = 0$ 'ın düzenli tekil bir nokta olması sebebiyle, $x = 0$ noktasında analitik olduklarından bu nokta civarında

$$xf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x^2g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \quad (1.11.5)$$

şeklinde Taylor serilerine açılabilirler. Bunların ortak yakınsaklık dairesi yine $|x| = R$ olsun. Bu takdirde (1.11.4) denkleminin

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\alpha} \quad (1.11.6)$$

şeklinde bir çözümü olduğunu kabul edelim. (1.11.6) ve (1.11.5) ifadeleri (1.11.4) denkleminde yerine yazılırsa ve x 'in çeşitli kuvvetlerinin katsayıları da sıfıra eşitlenirse

$$\left. \begin{aligned} c_0 [\alpha(\alpha-1) + \alpha a_0 + b_0] &= 0 \\ c_k [(\alpha+k)(\alpha+k-1) + a_0(\alpha+k) + b_0 + \\ &+ \sum_{j=0}^{k-1} c_j [(\alpha+j)a_{k-j} + b_{k-j}] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.11.7)$$

$(k = 1, 2, \dots)$

bağıntıları elde edilir. Bunlardan birincisi olan c_0 'ın keyfi olduğuna ve α 'nın da

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha a_0 + b_0 = 0 \quad (1.11.8)$$

indis denklemi'nin bir çözümü olması gerektiği göstermektedir. Bu denklem ise α cinsinden ikinci dereceden bir denklemdir. Bunun kökleri α_1 ve α_2 olsunlar. Eğer $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ise ve üstelik $(\alpha_1 - \alpha_2)$ farkı da bir tamsayı değilse (1.11.7)'nin ikinci denklemi (1.11.4)'ün birbirinden bağımsız iki özel çözümünü temin eder. Bunların lineer kombinezonu serilerin yakınsak olmaları şartı altında denklemin genel çözümünü verir.

Fakat eğer $\alpha_1 = \alpha_2$ ise yani indis denklemi bir çifte köke sahip ise bu metot ancak bir tek özel çözüm verir. Diğer taraftan n ile bir tamsayıyı göstermek üzere eğer $\alpha_2 = \alpha_1 + n$ ise $k = n$ hali göz önüne alındığında, (1.11.7) denklemleri α_1 ve α_2 için aşağıdaki gibidir:

$$k = n, (n = 1, 2, \dots), \alpha_1 \text{ için:}$$

$$c_0 [\alpha_1(\alpha_1-1) + \alpha_1 a_0 + b_0] = 0 \quad (1.11.8)$$

$$c_n[(\alpha_1 + n)(\alpha_1 + n - 1) + a_0(\alpha_1 + n) + b_0] + \sum_{j=0}^{n-1} c_j[(\alpha_1 + j)a_{n-j} + b_{n-j}] = 0 \quad (1.11.9)$$

$k = n, (n = 1, 2, \dots), \alpha_2 = \alpha_1 + n$ için :

$$c_0[(\alpha_1 + n)(\alpha_1 + n - 1) + a_0(\alpha_1 + n) + b_0] = 0 \quad (1.11.10)$$

$$c_n[(\alpha_1 + 2n)(\alpha_1 + 2n - 1) + a_0(\alpha_1 + 2n) + b_0] + \sum_{j=0}^{n-1} c_j[(\alpha_1 + n + j)a_{n-j} + b_{n-j}] = 0 \quad (1.11.11)$$

(1.11.10) ve (1.11.11) denklemleri $\alpha_2 = \alpha_1 + n$ için göz önüne alınmış olan diferansiyel denklemin lineer bağımsız iki çözümünden birini sonsuz bir polinom şeklinde tayin ederler. Ancak indis denkleminin α_1 köküne tekabül eden ikinci çözümün bu metot yardımıyla her zaman inşa edilemeyeceği aşikârdır. Gerçekten de, indis denkleminin α_2 köküne tekabül eden çözümü temin eden denklemlerden (1.11.10) yardımıyla, α_1 köküne tekabül eden sonsuz polinom şeklindeki çözümün katsayılarının, (1.11.11) bağıntısına göre,

$$\sum_{j=1}^{n-1} c_j[(\alpha_1 + n + j)a_{n-j} + b_{n-j}] = 0 \quad (1.11.12)$$

$(n = 1, 2, \dots)$

şeklindeki bağıntıları gerçeklemeleri gerektiği görülmektedir; halbuki α_1, a_{n-1} 'ler ve b_{n-j} 'ler önceden bilindiğine göre c katsayılarının fevkalade sınırlı özel haller dışında ve bir de bütün c_j 'lerin sıfır olması hali hariç olmak üzere bu bağıntıları gerçeklemeleri beklenemez. Bu itibarla fevkalade sınırlı belki birkaç özel hal dışında genel olarak bütün katsayılar sıfır olacaklardır. Bu keyfiyet ise göz önüne alınıp olduğumuz metodun bu hale tekabül eden ikinci lineer bağımsız çözümün inşasındaki güçsüzlüğünü ortaya koymaktadır.

Eğer $\alpha_1 = \alpha_2$ ise ve üstelik $(\alpha_2 - \alpha_1)$ farkı da pozitif bir tamsayı değilse gerek α_1 ve gerekse α_2 için elde edilen iki ortak özel çözümün aynı $|x| = R$ yakınsaklık dairesi içinde yakınsak oldukları ispatlanır.

Eğer metot iki bağımsız özel çözüm vermiyorsa, bu takdirde $u(x)$ diferansiyel denklemin çözümünü göstermek üzere

$$y(x) = u(x)v(x)$$

biçiminde yazılacağını kabul edelim. Bu takdirde $v(x)$ in gerçekleyeceği diferansiyel denklemin

$$v'' + \left(\frac{2u'}{u} + f \right) v' = 0 \quad (1.11.13)$$

şeklinde olduğu görülür. Bu ise v' cinsinden birinci dereceden bir denklem olup

$$\frac{dv}{dx} = \frac{A}{u^2} \exp \left\{ - \int f(x) dx \right\} \quad (1.11.14)$$

şeklinde bir çözümü mümkündür. Buradan

$$v(x) = A \int \left\{ u^{-2} \exp \left[- \int_0^x f(x') dx' \right] \right\} dx + B \quad (1.11.15)$$

ve

$$y = uv = Au(x) \int \left\{ \frac{1}{[u(x)]^2} \exp \left[- \int_0^x f(x') dx' \right] \right\} dx + Bu(x) \quad (1.11.16)$$

olur ki bu da tam çözümü göstermektedir. Buna göre ikinci bağımsız çözüm

$$u \int \frac{1}{u^2} \exp \left[- \int_0^x f(x') dx' \right] dx \quad (1.11.17)$$

şeklindedir. (Özemre, 1971)

Örnek 1.11.1: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $1 \leq x \leq e^\pi$ fonksiyonunu $\frac{d}{dx} \left[x \frac{dy}{dx} \right] + \frac{\lambda y}{x} = 0$;

$y(1) = y(e^\pi) = 0$ Sturm-Liouville sisteminin özfonksiyonları cinsinden seriye açınız.

Çözüm: $xy'' + y' + \frac{\lambda y}{x} = 0$ denklemini x ile çarpılırsa $x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0$ biçiminde

Euler denklemini elde edilir. Burada $x = e^t$ dönüşümü uygulanırsa $\frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda y = 0$

denkleminin karakteristik denklemini

$$\alpha^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \mp \sqrt{-\lambda}$$

şeklinde elde edilir.

Durum I: $\lambda > 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \mp i \sqrt{\lambda}$ şeklinde olup denklemin genel çözümü

$$y(t) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} t + c_2 \sin \sqrt{\lambda} t$$

$$x = e^t \Rightarrow t = \ln x \text{ ise } y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} \ln x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} \ln x)$$

biçimindedir. Koşullar genel çözüme uygulandığında

$$y(1) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow y(x) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda} \ln x)$$

$$y(e^\pi) = 0 \Rightarrow c_2 \sin(\sqrt{\lambda} \ln e^\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} \pi = n\pi, \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

elde edilir ve bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar,

$$\varphi_n(x) = \sin(n \ln x), \quad n \in \mathbb{N}$$

Diğer durumlarda özdeğer dolayısıyla özfonksiyon yoktur. $\frac{d}{dx} \left[x \frac{dy}{dx} \right] + \frac{\lambda y}{x} = 0$,

Sturm-Liouville denkleminde $p(x) = x$, $r(x) = \frac{1}{x}$ olup $1 \leq x \leq e^\pi$ aralığında pozitiftir.

Dolayısıyla verilen Sturm-Liouville sistemi düzgündür.

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonu düzgün Sturm-Liouville sisteminin özfonksiyonları cinsinden seriye açılımı;

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n \ln x)$$

şeklinde olup katsayıları,

$$c_n = \frac{\int_a^b f \varphi_n r dx}{\int_a^b \varphi_n^2 r dx} = \frac{\int_1^{e^\pi} \frac{1}{x^2} \sin(n \ln x) \frac{1}{x} dx}{\int_1^{e^\pi} \sin^2(n \ln x) \frac{1}{x} dx} = \frac{I}{I_1}$$

şeklinde dir. Burada I için $t = \ln x$ alınırsa $dt = \frac{1}{x} dx$, $x = 1 \Rightarrow t = 0$ ve $x = e^\pi \Rightarrow t = \pi$

$$I = \int_0^\pi e^{-2t} \sin(nt) dt$$

$$= \left\{ \frac{-\cos nt}{n} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\cos nt}{n} e^{-2t} dt \right\} = \left\{ \frac{-\cos nt}{n} e^{-2t} \Big|_0^\pi - \frac{2}{n} \left[\frac{e^{-2t} \sin nt}{n} + \int_0^\pi 2 \frac{\sin nt}{n} e^{-2t} dt \right] \right\}$$

$$= -\frac{1}{n} (\cos n\pi e^{-2\pi} - 1) - \frac{2}{n^2} (e^{-2\pi} \sin n\pi) - \frac{4}{n^2} \int_0^\pi \sin nt e^{-2t} dt$$

$$I = \frac{1 + (-1)^{n+1} e^{-2\pi}}{n} - \frac{4}{n^2} I$$

$$\Rightarrow I = \frac{n(1 + (-1)^{n+1} e^{-2\pi})}{4 + n^2}$$

şeklinde elde edilir. I_1 için de $\ln x = t$ alınırsa,

$$I_1 = \int_0^{\pi} \sin^2 nt \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2nt) \, dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{\sin 2nt}{2n} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

şeklinde olup, buradan katsayıları

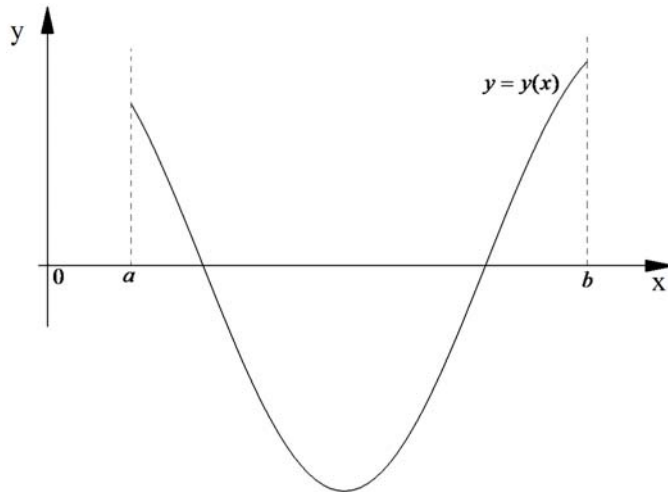
$$c_n = \frac{I_1}{I} = \frac{2n}{(4+n^2)\pi} (1 + (-1)^{n+1} e^{-2\pi}); \quad n = 1, 2, \dots$$

biçiminde bulunur.

1.12. Salınımlı Çözümler

$$L[y] = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = 0$$

denklemini ve $a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0$, $b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0$ sınır koşulları ile verilen bir homojen sınır değer probleminin çözümleri $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlardır. Bu fonksiyonların herhangi birinin bir $x_0 \in [a, b]$ de sıfır yerine sahip olması $x = x_0$ noktasında bir köke sahip olması demektir. Yani $y(x_0) = 0$ dır. Sistemin herhangi bir $y(x)$ çözümü $[a, b]$ aralığında en az iki sıfır yerine sahipse $y(x)$ fonksiyonuna sistemin $[a, b]$ aralığında bir “salınımlı çözümü” denir.



Teorem 1.12.1:
$$L[y] = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = 0 \quad (1.12.1)$$

denkleminin $[a, b]$ aralığında tanımlı herhangi iki çözümü $u(x)$ ve $v(x)$ olsunlar.

i) Eğer $u(x)$ ve $v(x)$, $[a, b]$ aralığında bir ortak sıfır yerine sahipse o takdirde lineer bağımlıdır.

ii) Eğer $u(x)$ ve $v(x)$, $[a, b]$ aralığında aşikâr olmayan iki lineer bağımlı çözüm iseler o takdirde $x_0 \in [a, b]$ bunlardan birinin sıfır yeri diğ erinin de sıfır yeridir.

İspat: i) Teoremin bu kısmını ispatlamak için

$$p(x)[u(x)v'(x) - u'(x)v(x)] = k \text{ sabit} \quad (1.12.2)$$

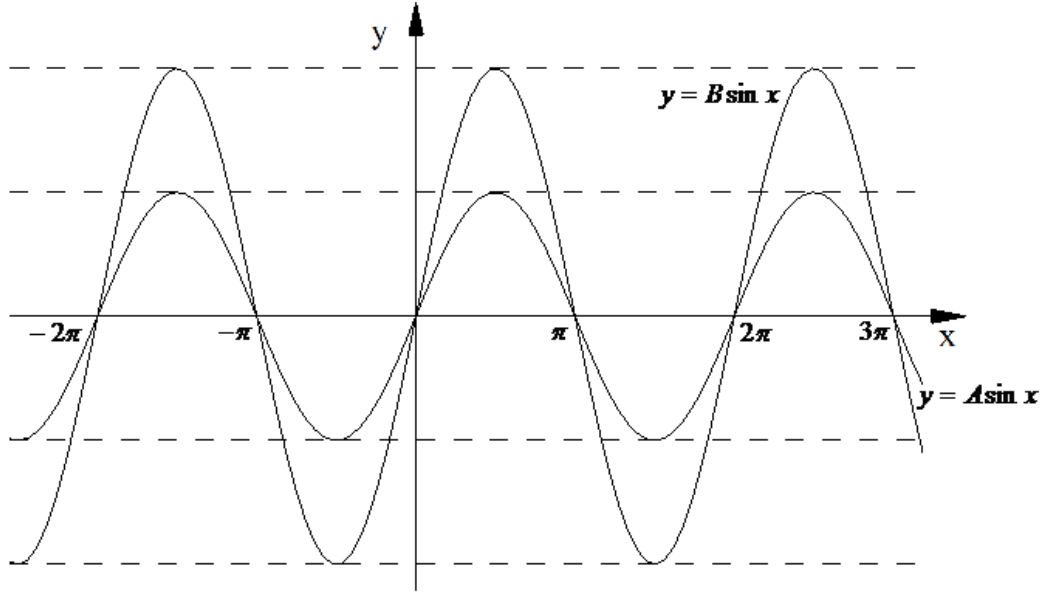
Abel formülünü kullanalım. Önce $x_0 \in [a, b]$ noktasının u ve v nin ortak bir sıfır yeri olduğunu kabul edelim. (1.12.2) de x yerine x_0 alınırsa k sabitinin sıfıra eşit olduğu görülür. $p(x_0) > 0$ ve de (1.12.2) ifadesi bir özdeşlik olduğundan parantez iç i sıfıra özdeş tir. Yani $u(x)$ ve $v(x)$ in Wronskian determinanı özdeş olarak sıfırdır. O halde $u(x)$ ve $v(x)$ lineer bağımlıdır.

ii) $u(x)$ ve $v(x)$, $[a, b]$ aralığında lineer bağımlı olsunlar. O halde

$$c_1 u(x) + c_2 v(x) = 0, \quad a \leq x \leq b \quad (1.12.3)$$

sağlanacak biçimde her ikisi birden sıfır olmayan c_1 ve c_2 sabitleri vardır. $u(x)$ ve $v(x)$ in verilen aralıkta sıfıra özdeş olmadıkları (aşikâr olmayan çözümler) kabul edildiklerinden (1.12.3) ifadesi c_1 ve c_2 nin her ikisinin de sıfırdan farklı olduğunu gösterir. Böylece yine (1.12.3)'den eğer $u(x_0) = 0$ ise bu takdirde $v(x_0) = 0$ olmak zorundadır. Bu ise ispatı tamamlar.

Örnek 1.12.1: $y'' + y = 0$ denklemi $\frac{d}{dx}\left(1 \cdot \frac{dy}{dx}\right) + 1 \cdot y = 0$ şeklinde yazılabildiğinden dolayı bu (1.12.1) tipindedir. Keyfi bir $[a, b]$ aralığı üzerinde $p(x) = q(x) = 1$ dir. A ve B sabitler olmak üzere $u(x) = A \sin x$ ve $v(x) = B \sin x$ lineer bağımlı çözümleri $x = \mp n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ortak sıfır yerlerine sahip olup başka bir sıfır yeri yoktur.



1.13. Bir Yarı Eksen Üzerinde Salınlı Çözümler

Bu bölümde ifadelerini vereceğimiz teoremler $0 < x < \infty$ yarı-sonsuz aralığında (1.12.1) denkleminin çözümlerinin sıfır yerlerinin sayısı ile ilgili olacaktır.

Teorem 1.13.1: $0 < x < \infty$ aralığında $p(x)$ ve $q(x)$ sürekli fonksiyonlar ve de $p(x) > 0$ olsun. Eğer aşağıdaki genelleştirilmiş integrallerle ilgili

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{p(x)} = +\infty, \quad \int_1^{\infty} q(x) dx = +\infty \quad (1.13.1)$$

eşitlikleri geçerli oluyorsa o takdirde (1.13.1) denkleminin her $y(x)$ çözümü $1 < x < \infty$ aralığında sonsuz sayıda sıfır yerine sahiptir. Benzer şekilde eğer;

$$\int_0^1 \frac{dx}{p(x)} = +\infty, \quad \int_0^1 q(x) dx = +\infty \quad (1.13.2)$$

eşitlikleri geçerli oluyorsa o takdirde (1.12.1) denkleminin her $y(x)$ çözümü $0 < x < 1$ açık aralığında sonsuz sayıda sıfır yerine sahiptir.

Örnek 1.13.1: $y'' + a^2 y = 0$ denkleminin çözümlerinin $1 < x < \infty$ aralığında salınımlılık durumunu inceleyiniz.

Çözüm: Verilen diferansiyel denklem

$$y'' + a^2 y = \frac{d}{dx} \left(1 \cdot \frac{dy}{dx} \right) + a^2 y = \frac{d}{dx} \left(p \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = 0$$

şeklinde yazılırsa, $a \neq 0$ olmak üzere $q(x) = a^2$ ve $p(x) = 1 > 0$ dır. Verilen aralıkta $p(x)$ sürekli ve pozitif, $q(x)$ ise sürekli. Diğer yandan

$$\int_1^\infty \frac{dx}{p(x)} = \int_1^\infty \frac{dx}{1} = x \Big|_1^\infty = +\infty, \quad \int_1^\infty q(x) dx = \int_1^\infty a^2 dx = a^2 x \Big|_1^\infty = +\infty$$

ise Teorem (1.13.1)'den dolayı verilen denklemin $1 < x < \infty$ aralığında aşık olmaya her $y(x)$ reel çözümü bu aralıkta sonsuz sayıda sıfır yerine sahiptir. Yani çözümler salınımlıdır.

Gerçekten verilen denklemin çözümü

$$y(x) = c_1 \sin a x + c_2 \cos a x$$

biçiminde olup, $1 < x < \infty$ aralığında sonsuz sayıda reel köke sahip fonksiyonlardır.

Teorem 1.13.2: Eğer $L[y] = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = 0$ denklemindeki $p(x)$ ve $q(x)$ katsayıları için

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{p(x)} < +\infty, \quad \left| \int_a^x q(x) dx \right| < m \quad (a \leq x < \infty)$$

genelleştirilmiş integralleri geçerli oluyorsa o takdirde diferansiyel denkleminin aşıkâr olmayan her çözümü $a \leq x < \infty$ aralığında en çok sonlu sayıda sıfır yerine sahiptir. Burada m pozitif bir sabittir.

Örnek 1.13.2: $x^2 y'' + xy' + y = 0$ denkleminin reel çözümleri $1 < x < \infty$ aralığında salınımlı mıdır? İnceleyiniz. Ayrıca $0 < x < 1$ aralığında $y(x)$ çözümlerinin sıfır yerlerinin sayısını belirleyiniz.

Çözüm: Verilen diferansiyel denklem $\frac{d}{dx} \left(x \cdot \frac{dy}{dx} \right) + \frac{1}{x} y = 0$ şeklinde yazılabildiğinden

$p(x) = x$, $q(x) = \frac{1}{x}$ dir. $1 < x < \infty$ aralığında $p(x) > 0$ ve $p(x)$ ile $q(x)$ sürekli olup, eğer

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{p(x)} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{\infty} = +\infty, \quad \int_1^{\infty} q(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$$

ise Teorem (1.13.1)'den verilen denklemin her bir reel çözümü $1 < x < \infty$ aralığında sonsuz sayıda sıfır yerine sahiptir. Yani çözümler salınımlıdır. Diğer taraftan $0 < x < 1$ aralığında

$$\int_0^1 \frac{dx}{p(x)} = \int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_0^1 = +\infty, \quad \int_0^1 q(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty$$

ise Teorem (1.13.1)'den verilen denklemin çözümleri olan fonksiyonlar $(0,1)$ açık aralığında sonsuz sayıda sıfır yerine sahiptir.

Gerçekten, verilen diferansiyel denklem bir Euler denklemi olup reel çözümlerinden bir tanesi $y_1(x) = \sin(\ln x)$ dir. $x \in (0,1)$ olduğunda $\sin(\ln x)$

fonksiyonu sonsuz sayıda sıfır yerine sahiptir. Diğer reel ve lineer bağımsız çözüm ise $y_2(x) = \cos(\ln x)$ olup, $x \in (0,1)$ için $\cos(\ln x)$ fonksiyonunun sonsuz sayıda sıfır yerine sahip olduğu bilinmektedir.

1.14. Sturm Ayırma ve Karşılaştırma Teoremleri

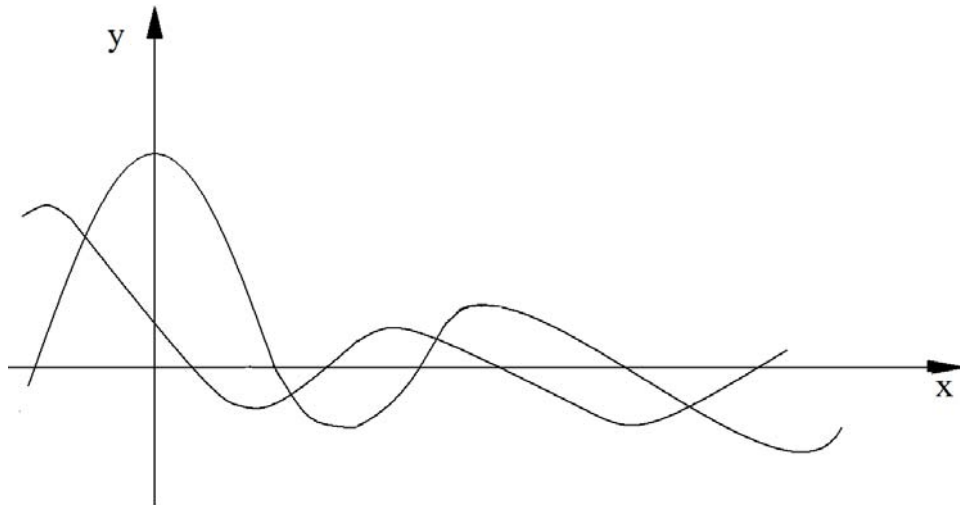
Ön adı “Jacques Charles Francois” olan STRUM’ un kendi adıyla verilmiş önemli teoremlerden ikisi ayırma ve karşılaştırma teoremleri olup, bu teoremlerin ifadeleri aşağıda verilmektedir.

Teorem 1.14.1: (Sturm Ayırma Teoremi)

$u(x)$ ve $v(x)$ bir $[a, b]$ aralığında

$$L[y] = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = 0$$

denkleminin lineer bağımsız iki çözümü iseler, o takdirde $u(x)$ in ardışık iki sıfır yeri arasında $v(x)$ in kesin ve tam olarak bir sıfır yeri vardır. Yani $u(x)$ ve $v(x)$ lineer bağımsız çözümlerinden her birinin sıfır yerleri diğer çözümün sıfır yerlerini ayırır. Bu durum aşağıdaki şekil üzerinde görülmektedir.



Örnek 1.14.1: $y'' + y = 0$ denklemi $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) + y = 0$ şeklinde yazılabildiğinden

Teorem (1.14.1)'de ifade edilen tipten bir denklemdir. $u(x) = \sin x$ ve $v(x) = \cos x$ bu denklemin lineer bağımsız çözümleridir. $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarından birinin ardışık iki sıfır yeri arasında diğerinin kesin ve tam olarak bir sıfır yerinin olduğu bilinmektedir. Bu denklemin çözümleri olan $u(x) = \sin x$ ve $v(x) = 3 \sin x + 5 \cos x$ fonksiyonları da lineer bağımsız olup $\sin x = 0$ 'ın kökleri $x = \mp n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$ dir. Teorem (1.14.1)'den söyleyebiliriz ki $3 \sin x + 5 \cos x = 0$ denkleminin $n\pi$ ve $(n+1)\pi$, $n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$ ler arasında kesin ve tam olarak bir kökü olduğu söylenir.

Teorem 1.14.2: (Sturm Karşılaştırma Teoremi)

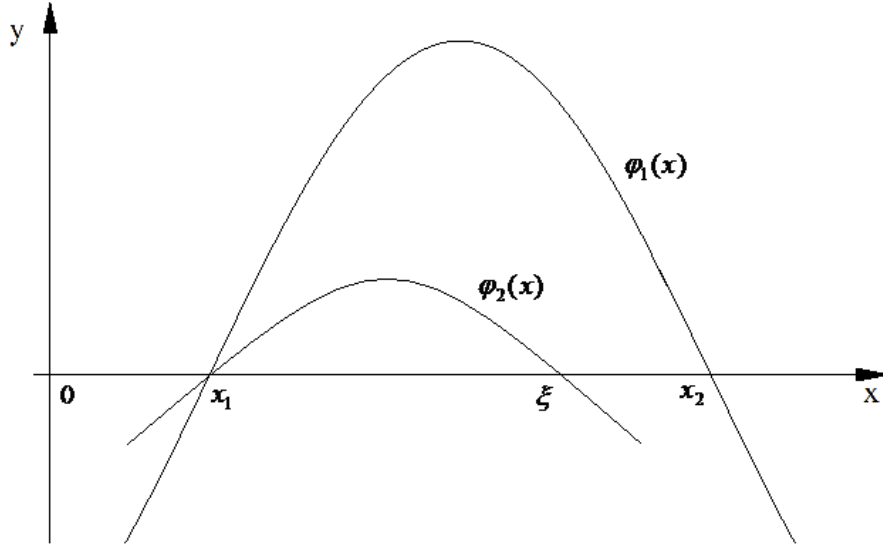
Bir $[a, b]$ aralığında $p(x) > 0$ ve $p(x)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$ sürekli fonksiyonlar ve $q_2(x) > q_1(x)$ olsunlar. Ayrıca $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ 'lerin sırasıyla

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q_1(x)y = 0 \quad (1.14.1)$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q_2(x)y = 0 \quad (1.14.2)$$

denklemlerinin birer reel çözümleri olduğunu kabul edelim. Eğer x_1 ve x_2 , $\varphi_1(x)$ 'in ardışık iki sıfır yeri ise, o takdirde $\varphi_2(x)$ çözümü $x_1 < x < x_2$ açık aralığında en az bir sıfır yerine sahiptir.

Yukarıda ifadesi verilen Sturm Karşılaştırma teoreminin özel bir durumu şöyledir: Teorem (1.14.2)'nin koşullarının gerçekleştiğini ve x_1 değerinin φ_1 ve φ_2 'nin her ikisinin de sıfır yeri olduğunu kabul edelim. O takdirde x_2 ve ξ sırasıyla φ_1 ve φ_2 'nin bir sonraki sıfır yerleri iseler $\xi < x_2$ dir. Bu durum aşağıdaki şekil üzerinde görülmektedir.



Örnek 1.14.2: A ve B sabitler ve $0 < A < B$ olmak üzere $\frac{d^2y}{dx^2} + Ay = 0$ ve

$\frac{d^2y}{dx^2} + By = 0$ denklemlerini göz önüne alalım. $\varphi_1(x) = \sin Ax$ ve $\varphi_2(x) = \sin Bx$

fonksiyonları sırasıyla bu denklemlerin birer çözümüdür. $\sin Ax$ 'in ardışık sıfır yerleri,

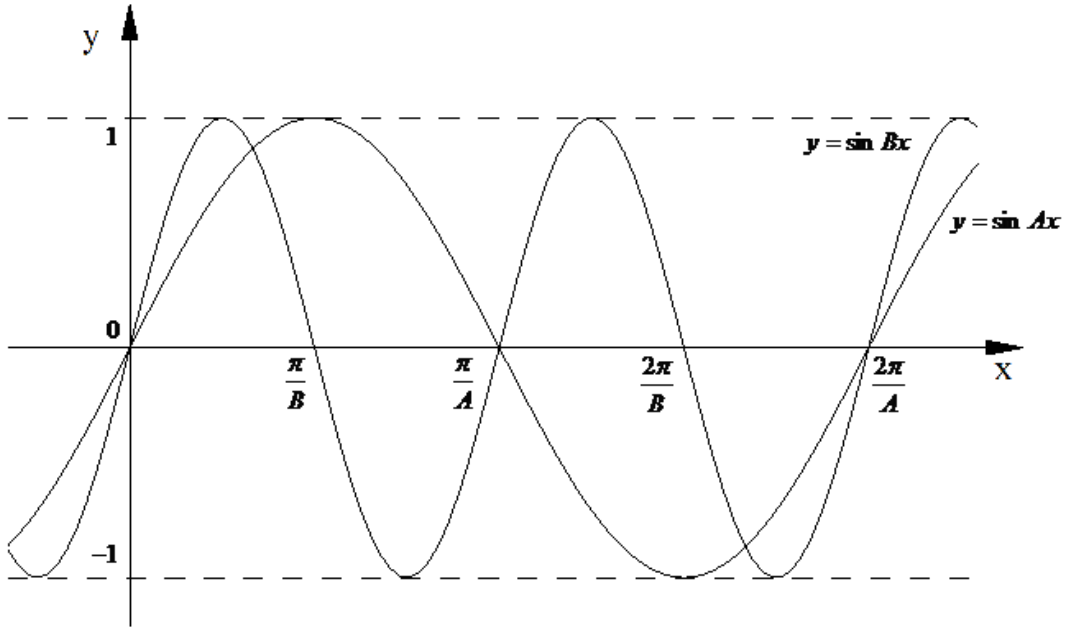
$$\frac{n\pi}{A} \text{ ve } \frac{(n+1)\pi}{A}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

şeklindedir. Teorem (1.14.2)'nin koşulları ifade eder ki bu köklerin herhangi ikisi arasında $\sin Bx$ en az bir ξ_n sıfır yerine sahiptir, öyle ki

$$\frac{n\pi}{A} < \xi_n < \frac{(n+1)\pi}{A}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

dir. Özel halde, $x = 0$ değeri $\sin Ax$ ve $\sin Bx$ 'in her ikisinin de bir sıfır yeridir.

$\sin Bx$ 'in bir sonraki sıfır yeri $\frac{\pi}{B}$ iken, $\sin Ax$ 'in bir sonraki sıfır yeri $\frac{\pi}{A}$ olup $\frac{\pi}{B} < \frac{\pi}{A}$ olduğu açıktır.



1.15. Liouville Normal Form

(1.1.11) denkleminde bağımlı ve bağımsız değişkenleri değiştirebiliriz. Yani

$$y(x) = u(x)w(t), \quad t = \int h(x)dx, \quad u(x) > 0, \quad h(x) > 0 \quad (1.15.1)$$

Olup, eğer $u(x)$ ve $h(x)$ verilen aralıkta pozitif ve sürekli ise ikinci yer değiştirme ilgili değişmeyen aralıklarda mertebe korunmasına rağmen bağımsız değişkenlerin aralığı değişirken bu aralıktaki sıfırların sayısı invaryant (değişmeden) kaldığında ilk yer değiştirmede değişmeyen sıfırlar onun yerini alır. Benzerlikten $w(t)$ ve t de eşdeğer diferansiyel denklem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} = h(x) \frac{d}{dt} &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = h(x) \frac{dy}{dt} \\ &= h(x) \frac{d}{dt}(u(x)w(t)) \\ &= h(u_t w + u w_t) \end{aligned} \quad (1.15.2)$$

biçiminde elde edilir. (1.15.2) denklemini (1.1.11) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{d}{dx}(phu_t w + phuw_t) + (\lambda r - q)uw = 0 \quad (1.15.3)$$

bulunur. Bu denklem de $\frac{d}{dx} = h(x) \frac{d}{dt}$ biçiminde yazılır ve türev açılımları yapılırsa,

$$h \frac{d}{dt}(phu_t w + phuw_t) + (\lambda r - q)uw = 0 \quad (1.15.4)$$

$$h[p_t hu_t w + ph_t u_t w + phu_u w + phu_t w_t + p_t huw_t + ph_t uw_t + phu_t w_t + phuw_u] + (\lambda r - q)uw = 0$$

$$h[phuw_u + w_t(p_t hu + ph_t u + 2phu_t) + w(p_t hu_t + ph_t u_t + phu_u)] + (\lambda r - q)uw = 0$$

$$h[phuw_u + w_t((hp)_t u + 2phu_t) + w(hpu_t)_t] + (\lambda r - q)uw = 0 \quad (1.15.5)$$

elde edilir. (1.15.5) denkleminin w_u değişkeninin katsayısı nominal olacak şekilde $h, u \in C^2$ için ph^2u ile bölündüğünde

$$w_u + (phu)^{-1}[(hp)_t u + 2phu_t]w_t + [(phu)^{-1}(hpu_t)_t + h^{-2}p^{-1}(\lambda r - q)]w = 0 \quad (1.15.6)$$

yazılır. Bu denklemde $w_t \neq 0$ olduğundan $(phu)^{-1}[(hp)_t u + 2phu_t] = 0$ dır. Böylece,

$$\begin{aligned} (phu)^{-1}[(hp)_t u + 2phu_t] &= \frac{(hp)_t}{hp} + \frac{2u_t}{u} = 0 \\ &\Rightarrow \ln(hp) + 2\ln(u) = \ln 1 \\ &\Rightarrow hpu^2 = 1 \\ &\Rightarrow u^2 = (hp)^{-1} \end{aligned} \quad (1.15.7)$$

olup, buradan

$$w_u + \left[\frac{(hpu_t)_t}{(phu)} + \frac{1}{h^2 p} (\lambda r - q) \right] w = 0 \quad (1.15.8)$$

elde edilir. Burada

$$\frac{r}{h^2 p} = 1 \Rightarrow h^2 = \frac{r}{p}. \quad (1.15.9)$$

O halde, (1.15.7) denkleminde

$$u = (rp)^{-1/4} \quad (1.15.10)$$

bulunur. (1.15.9) ve (1.15.10) eşitlikleri (1.15.8) denkleminde yerine yazılırsa,

$$w_u + \left[\frac{(r^{1/2} p^{-1/2} p u_t)_t}{(p r^{1/2} p^{-1/2} r^{-1/4} p^{-1/4})} + \lambda \frac{r}{h^2 p} - \frac{q}{h^2 p} \right] w = 0 \quad (1.15.11)$$

elde edilir. (1.15.11) denkleminin λ değişkeninin katsayısı nominal olacak şekilde $\frac{r}{h^2 p}$ ile bölüldüğünde

$$w_u + \left[\frac{(r^{1/2} p^{1/2} u_t)_t}{(r^{1/4} p^{1/4})} + \lambda - \frac{q}{r} \right] w = 0 \quad (1.15.12)$$

olup, (1.15.10) eşitliğinde kullanılarak

$$w_u + \left[\frac{\left(\frac{u_t}{u^2} \right)_t}{\left(\frac{1}{u} \right)} + \lambda - \frac{q}{r} \right] w = 0 \quad (1.15.13)$$

yazılır. O halde,

$$y = uw = \frac{w}{[p(x)r(x)]^{1/4}} \quad \text{ve} \quad t = \int h(x) dx = \int \left(\frac{r(x)}{p(x)} \right)^{1/2} dx. \quad (1.15.14)$$

Teorem 1.18.1: Elde edilen (1.15.14) Liouville yer değiştirmesi

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + [\lambda - \hat{q}(t)] w = 0 \quad (1.15.15)$$

normal formun içindeki $q \in C$ ve $p(x), r(x) \in C^2$ olup, denklem Sturm-Liouville (1.1.11) denklemine dönüşür. Burada,

$$\begin{aligned}\hat{q}(t) &= u \left(\frac{u_t}{u^2} \right)_t + \frac{q}{r} \\ &= u \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{u} \right) + \frac{q}{r} \\ &= \frac{q}{r} + (pr)^{-1/4} \frac{d^2}{dt^2} [(pr)^{1/4}].\end{aligned}\tag{1.15.16}$$

Eğer (1.1.11) diferansiyel denklemi $a \leq x < b$ aralığında tanımlı ve t belirli bir integral ise

$$t = \int_a^x \left(\frac{r(s)}{p(s)} \right)^{1/2} ds.$$

O halde, eşdeğer (1.15.15) diferansiyel denklemi $[0, c)$ aralığında tanımlıdır ve

$$c = \int_a^b \left(\frac{r(x)}{p(x)} \right)^{1/2} dx$$

(Çelik, 1993).

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Legendre Polinomları ve Özellikleri

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0 \quad (2.1.1)$$

(2.1.1) Legendre diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümlerinden biri olan birinci tip Legendre polinomları

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{n!} \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \dots \right\} \quad (2.1.2)$$

şeklinde ifade edilir.

Buradan $P_n(x)$ n . dereceden bir polinomdur. İlk birkaç Legendre polinomları ise

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

biçimindedir (El-Mikkawy vd., 2005).

Ayrıca bu polinomlar, x 'in kuvvetleri şeklinde ifade edilirse,

$$x^0 = P_0(x)$$

$$x^1 = P_1(x)$$

$$x^2 = \frac{1}{3}[P_0(x) + 2P_2(x)]$$

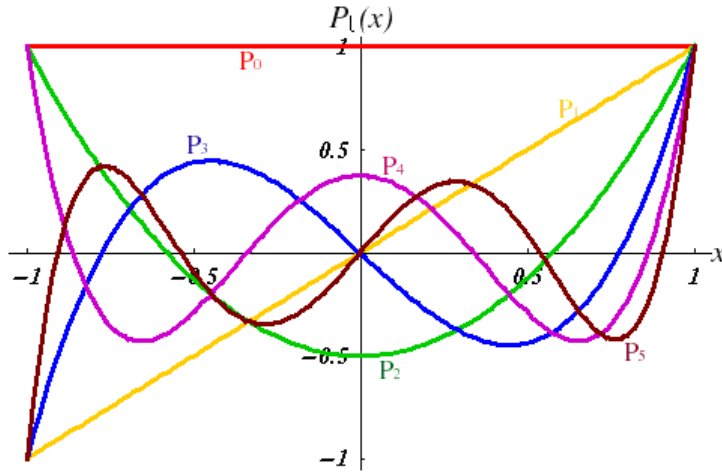
$$x^3 = \frac{1}{5}[3P_1(x) + 2P_3(x)]$$

$$x^4 = \frac{1}{35}[7P_0(x) + 20P_2(x) + 8P_4(x)]$$

$$x^5 = \frac{1}{63}[27P_1(x) + 28P_3(x) + 8P_5(x)]$$

$\vdots$

şeklindedir.



Şekil 2.1. Birinci tip Legendre polinomlarının grafiği

Bütün durumlarda $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$ 'dir.

Legendre polinomları ayrıca Rodriquez formülü ile de ifade edilir:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (\text{Spiegel, 1994}).$$

2.1.1 Rekürans (Tekrarlama) Bağlılıları (Spiegel, 1994)

Üreten fonksiyon Legendre polinomlarının tekrarlılama bağlılılarını türetmede yararlıdır. Bu bağlılılar x cinsinden özdeşliklerdir ve trigonometrik özdeşlikler gibi işimizi kolaylaştırması ispatlarda, türevlerde yardımcı olması için kullanılır. Bazı tekrarlılama bağlılıları ise

$$\bullet nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)$$

$$\bullet xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = nP_n(x)$$

$$\bullet P_n'(x) - xP_{n-1}'(x) = nP_{n-1}(x)$$

$$\bullet (1-x^2)P_n'(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x)$$

$$\bullet (2n+1)P_n(x) = P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)$$

$$\bullet P_{n+1}'(x) = (n+1)P_n(x) + xP_n'(x)$$

$$\bullet (1-x^2)P_n'(x) = (n+1)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x)$$

$$\bullet P_n'(x) - 2xP_{n-1}'(x) + P_{n-2}'(x) = P_{n-1}(x)$$

$$\bullet P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

biçimindedir.

2.2 Chebyshev Polinomları ve Özellikleri

$$(1-x^2)\frac{d^2T_n(x)}{dx^2} - x\frac{dT_n(x)}{dx} + n^2T_n(x) = 0 \quad (2.2.1)$$

Chebyshev diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümlerinden biri olan $r \geq 1$ için birinci tip Chebyshev polinomları

$$T_r(x) = \frac{1}{2} \left\{ (2x)^r - \left[2 \binom{r-1}{1} - \binom{r-2}{1} (2x)^{r-2} \right] + \dots \right\} \quad (2.2.2)$$

$$T_r^*(x) = \frac{1}{2} \left\{ 2^{2r} x^r - \left[2 \binom{2r-1}{1} - \binom{2r-2}{1} 2^{2r-2} x^{r-1} \right] + \dots \right\} \quad (2.2.3)$$

şeklindedir.

Tek değişkenli birinci tip Chebyshev polinomları, r herhangi bir tamsayı olmak üzere

$$T_r(x) = \cos r\theta, \quad \cos r\theta = x, \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$T_r^*(x) = \cos r\theta, \quad \cos r\theta = 2x - 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

bağıntıları ile tanımlanır.

Bu formüller yardımıyla Chebyshev polinomlarını bulabiliriz. Bunlardan ilk beş tanesi aşağıda verilmiştir.

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

ve

$$T_0^*(x) = 1$$

$$T_1^*(x) = 2x - 1$$

$$T_2^*(x) = 8x^2 - 8x + 1$$

$$T_3^*(x) = 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1$$

$$T_4^*(x) = 128x^4 - 256x^3 + 160x^2 - 32x + 1$$

$$T_5^*(x) = 512x^5 - 1280x^4 + 1120x^3 - 400x^2 + 50x - 1$$

x 'in kuvvetlerinin $T_r(x)$ ve $T_r^*(x)$ polinomları cinsinden yazılımı için genel bağıntılar:

$$x^r = \frac{1}{2^r} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} T_{2i-r}(x) \quad , \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$x^r = 2^{-2r+1} \sum_{k=0}^r \binom{2r}{k} T_{r-k}^*(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$$

şeklinde ifade edilir. Bunların ilk birkaç teriminin açık formda yazılışı aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$1 = T_0(x)$$

$$x = T_1(x)$$

$$2x^2 = T_0(x) + T_2(x)$$

$$4x^3 = 3T_1(x) + T_3(x)$$

$$8x^4 = 3T_0(x) + 4T_2(x) + T_4(x)$$

$$16x^5 = 10T_1(x) + 5T_3(x) + T_5(x)$$

ve

$$1 = T_0^*(x)$$

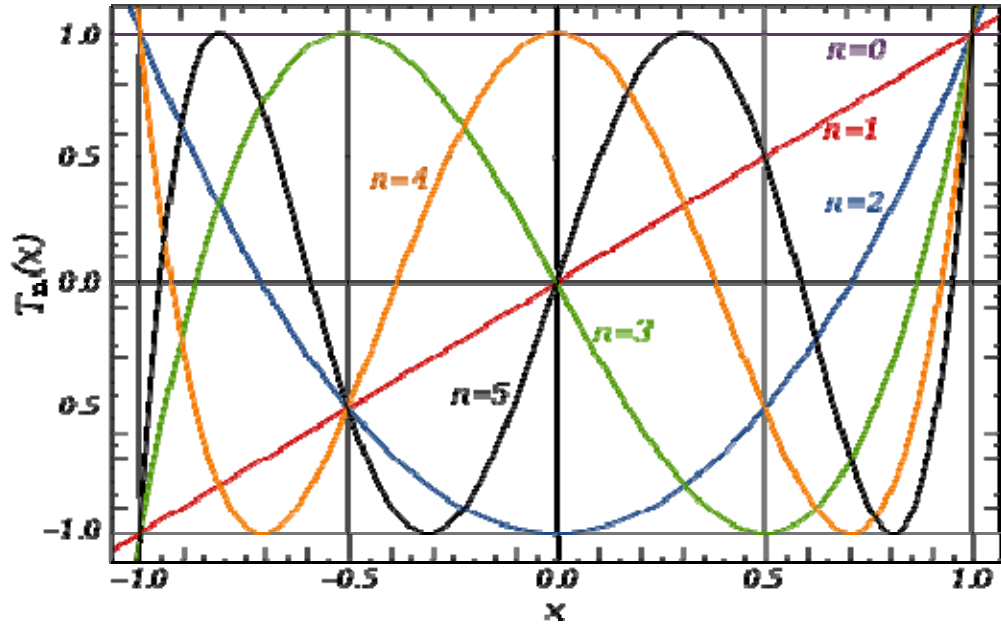
$$2x = T_0^*(x) + T_1^*(x)$$

$$8x^2 = 3T_0^*(x) + 4T_1^*(x) + T_2^*(x)$$

$$32x^3 = 10T_0^*(x) + 15T_1^*(x) + 6T_2^*(x) + T_3^*(x)$$

$$128x^4 = 35T_0^*(x) + 56T_1^*(x) + 28T_2^*(x) + 8T_3^*(x) + T_4^*(x)$$

$$512x^5 = 126T_0^*(x) + 210T_1^*(x) + 120T_2^*(x) + 45T_3^*(x) + 10T_4^*(x) + T_5^*(x)$$



Şekil 2.2. Chebyshev polinomlarının grafiği

Chebyshev polinomları ayrıca Rodriquez formülü ile de ifade edilir ve bu

$$T_n(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(-1)^n (2n-1)(2n-3)\dots 1} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

biçimindedir (Snyder, 1966) ve (Fox & Parker ,1968).

2.2.1 Rekürans (Tekrarlama) Bağlılıları

Trigonometrik özdeşliklerden faydalanarak

$$T_{r+1}(x) - 2xT_r(x) + T_{r-1}(x) = 0$$

$$T_{r+1}^*(x) - 2(2x-1)T_r^*(x) + T_{r-1}^*(x) = 0$$

rekürans bağıntıları bulunur.

Chebyshev polinomlarının özellikleri detaylarıyla Snyder (1966) ve Fox & Parker (1968) tarafından verilmiştir.

2.3 Boubaker Polinomları ve Özellikleri

$$(x^2 - 1)(3nx^2 + n - 2)y'' + 3x(nx^2 + 3n - 2)y' - n(3n^2x^2 + n^2 - 6n + 8)y = 0 \quad (2.3.1)$$

Boubaker diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümlerinden biri olan Boubaker polinomları

$$B_n(x) = x^n - (n-4)x^{n-2} + \sum_{p=2}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \left[\frac{(n-4p)}{p!} \prod_{j=p+1}^{2p-1} (n-j) \right] (-1)^p x^{n-2p}$$

bağıntısı ile tanımlanır.

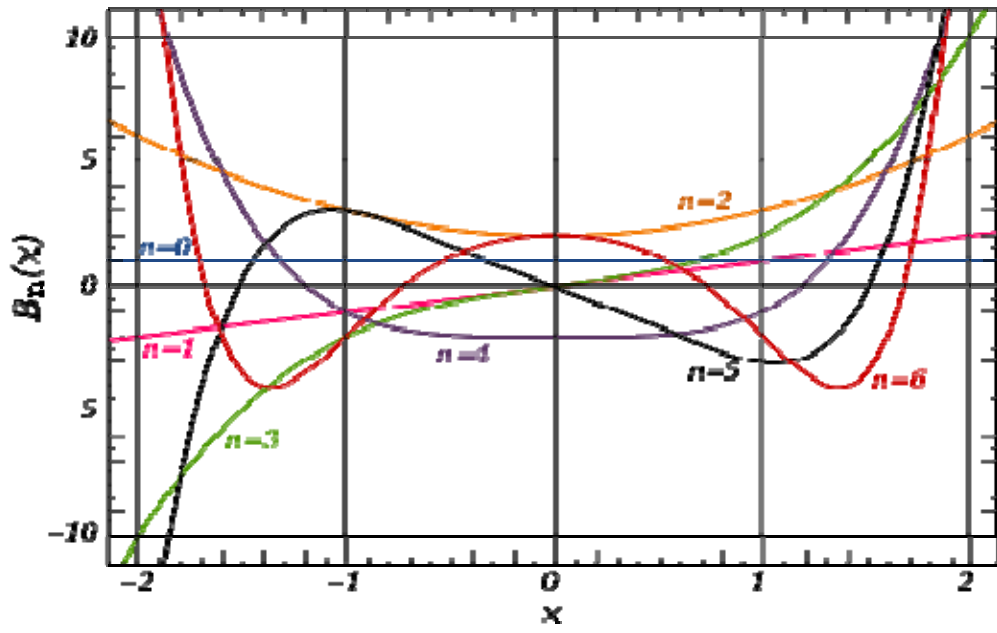
Bu formül yardımıyla Boubaker polinomlarını bulabiliriz. Bunlardan ilk beş tanesi aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1 \\ B_1(x) &= x \\ B_2(x) &= x^2 + 2 \\ B_3(x) &= x^3 + x \\ B_4(x) &= x^4 - 2 \\ B_5(x) &= x^5 - x^3 - 3x \end{aligned}$$

Ayrıca bu polinomları, x 'in kuvvetleri şeklinde ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned} x^0 &= B_0(x) \\ x^1 &= B_1(x) \\ x^2 &= B_2(x) - 2B_0(x) \\ x^3 &= B_3(x) - B_1(x) \\ x^4 &= B_4(x) + 2B_0(x) \\ x^5 &= B_5(x) + B_3(x) + 2B_1(x) \end{aligned}$$

(Labiadh et al.,2007)



Şekil 2.3. Boubaker polinomlarının grafiği

2.3.1 Rekürans (Tekrarlama) Bağlılıları

$$B_m(x) = xB_{m-1}(x) - B_{m-2}(x) \quad m > 2 \quad \text{için}$$

Boubaker polinomlarının özellikleri detaylarıyla Oyodum *et al* (2009) tarafından verilmiştir.

3. STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ İÇİN SIRALAMA (COLLOCATION) YÖNTEMİ

$$\sum_{k=0}^2 F_k(x_i) y^{(k)}(x_i) = g(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (3.1)$$

olmak üzere değişken katsayılı 2. mertebeden lineer Sturm- Liouville formundaki

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + (\lambda - q(x))y = G(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3.2)$$

diferansiyel denkleminin Kesim 1.2’te tanımlanan

$$\sum_{k=0}^1 [a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b)] = 0, \quad j = 0, 1 \quad (3.3)$$

koşulları altında

$$y_\ell(x) = \sum_{n=0}^N a_n P_n(x) \quad (3.4)$$

kesilmiş (sonlu) $y_\ell(x)$ Legendre serisi,

$$y_c(x) = \sum_{n=0}^N b_n T_n(x) \quad (3.5)$$

kesilmiş (sonlu) $y_c(x)$ Chebyshev serisi ve

$$y_b(x) = \sum_{n=0}^N c_n B_n(x) \quad (3.6)$$

kesilmiş (sonlu) $y_b(x)$ Boubaker serisi formunda yaklaşık çözümlerinin var olduğu kabul edilsin. Şimdi sıralama yöntemini üç ayrı polinom serisi için üç ayrı başlık altında inceleyelim.

3.1 Legendre Sıralama Yöntemi

(3.4) denklemi

$$[y_\ell(x)] = \mathbf{P}(x)\mathbf{A} \quad (3.1.1)$$

biçiminde matris formuna dönüştürülebilir. Burada $\mathbf{P}(x)$ ve $\mathbf{A}$ matrisleri

$$\mathbf{P}(x) = [P_0(x) \ P_1(x) \ \dots \ P_N(x)] \ , \quad \mathbf{A} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_N]^T.$$

olarak tanımlanır. Bu durumda (3.1)'nin matris formu,

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

sıralama noktalarında

$$[y_\ell(x_i)] = \mathbf{P}(x_i)\mathbf{A} \quad , \quad i = 0, 1, \dots, N$$

şekline gelir.

Kesim 2.1'te tanımlanan (El-Mikkawy vd., 2005)

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} x^{n-2k}, n = 0, 1, 2, \dots \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \frac{n}{2} & , \ n \text{ çift} \\ \frac{n-1}{2} & , \ n \text{ tek} \end{cases}$$

özelliğinden yararlanılarak Legendre polinomları aşağıdaki şekilde sırasıyla N 'in çift ve tek değerleri için matris formuna dönüştürülebilir.

N çift ise

$$\begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{N-1}(x) \\ P_N(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^0}{2^0} \binom{0}{0} \binom{0}{0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^0}{2^1} \binom{1}{0} \binom{2}{1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{(-1)^{\frac{N-2}{2}}}{2^{N-1}} \binom{N-1}{\frac{N-2}{2}} \binom{N}{N-1} & \dots & 0 \\ \frac{(-1)^{N/2}}{2^N} \binom{N}{N/2} \binom{N}{N} & 0 & \dots & \frac{(-1)^0}{2^N} \binom{N}{0} \binom{2N}{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{N-1} \\ x^N \end{bmatrix} \quad (3.1.2)$$

N tek ise

$$\begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{N-1}(x) \\ P_N(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^0}{2^0} \binom{0}{0} \binom{0}{0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^0}{2^1} \binom{1}{0} \binom{2}{1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}}{2^{N-1}} \binom{N-1}{\frac{N-1}{2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}}{2^N} \binom{N}{\frac{N-1}{2}} \binom{N+1}{N} & \dots & \frac{(-1)^0}{2^N} \binom{N}{0} \binom{2N}{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{N-1} \\ x^N \end{bmatrix} \quad (3.1.3)$$

şeklinde yazılır. Bu matris formu

$$\mathbf{X}(x) = [1 \ x \dots x^N]$$

olmak üzere

$$\mathbf{P}^T(x) = \mathbf{D} \mathbf{X}^T(x) \quad (3.1.4)$$

biçiminde ifade edilir. $\mathbf{D}$ matrisi N çift olduğunda (3.1.2), N tek olduğunda ise (3.1.3) ile ifade edildiği açıkça görülür. Buradan

$$\mathbf{X}^{(k)}(x) = [((x)^0)^{(k)} ((x)^1)^{(k)} \dots ((x)^N)^{(k)}]$$

olarak tanımlanır.

$k = 0$ için;

$$\mathbf{X}(x) = [((x)^0) ((x)^1) \dots ((x)^N)]$$

$k = 1$ için;

$$\mathbf{X}^{(1)}(x) = [((x)^0)^{(1)} ((x)^1)^{(1)} \dots ((x)^N)^{(1)}]$$

elde edilir ve

$$\begin{bmatrix} ((x)^0)^{(1)} \\ ((x)^1)^{(1)} \\ ((x)^2)^{(1)} \\ \vdots \\ ((x)^N)^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^N \end{bmatrix}$$

olarak matris formunda yazılır.

Burada

$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, kısaca

$$(\mathbf{X}^{(1)}(x))^T = \mathbf{M}^T (\mathbf{X}(x))^T$$

elde edilir. Böylece,

$$\mathbf{X}^{(1)}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^1$$

$$\mathbf{X}^{(2)}(x) = \mathbf{X}^{(1)}(x) \mathbf{M} = \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^2$$

$$\mathbf{X}^{(3)}(x) = \mathbf{X}^{(2)}(x) \mathbf{M} = \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^3.$$

$\vdots$

$$\mathbf{X}^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k-1)}(x) \mathbf{M} = \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^k \quad (3.1.5)$$

bulunur.

(3.1.1)'de ifade edilen matris formunun k . mertebeden türevi

$$[y_\ell^{(k)}(x)] = \mathbf{P}^{(k)}(x)\mathbf{A} \quad (3.1.6)$$

şeklindedir. (3.1.6)'da bazı işlemler yapılırsa

$$\mathbf{P}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{D}^T$$

ve

$$\mathbf{P}^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x)\mathbf{D}^T \quad (3.1.7)$$

bulunur. Böylece $0 \leq x \leq 1$ aralığı için aşağıdaki bağıntı verilebilir.

$$\mathbf{P}^*(x) = \mathbf{P}(\alpha_j x + \mu_j) \quad (3.1.8)$$

(3.1.5) bağıntısındaki gibi $\mathbf{X}^{(k)}(\alpha_j x + \mu_j)$ ve $\mathbf{X}(x)$ arasında aşağıdaki matris bağıntısı

$$\mathbf{X}(\alpha_j x + \mu_j) = [1 \ (\alpha_j x + \mu_j) \dots (\alpha_j x + \mu_j)^N] = \mathbf{X}(x)\mathbf{H}(\alpha_j, \mu_j) \quad (3.1.9)$$

biçiminde elde edilir. Buradan da

$$\mathbf{X}^{(k)}(\alpha_j x + \mu_j) = \mathbf{X}(\alpha_j x + \mu_j)\mathbf{M}^k \quad (3.1.10)$$

bulunur. O halde (3.1.9) ve (3.1.10)'dan

$$\mathbf{X}^{(k)}(\alpha_j x + \mu_j) = \mathbf{X}(x)\mathbf{H}(\alpha_j, \mu_j)\mathbf{M}^k. \quad (3.1.11)$$

yazılır.

Burada,

$$\mathbf{H}(\alpha_j, \mu_j) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0}(\alpha_j)^0(\mu_j)^0 & \binom{1}{0}(\alpha_j)^0(\mu_j)^1 & \binom{2}{0}(\alpha_j)^0(\mu_j)^2 & \cdots & \binom{N}{0}(\alpha_j)^0(\mu_j)^N \\ 0 & \binom{1}{1}(\alpha_j)^1(\mu_j)^0 & \binom{2}{1}(\alpha_j)^1(\mu_j)^1 & \cdots & \binom{N}{1}(\alpha_j)^1(\mu_j)^{N-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2}(\alpha_j)^2(\mu_j)^0 & \cdots & \binom{N}{2}(\alpha_j)^2(\mu_j)^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{N}{N}(\alpha_j)^N(\mu_j)^0 \end{bmatrix}.$$

dır. O halde,

$$\alpha = \frac{2}{b-a} \quad , \quad \mu = \frac{a+b}{a-b}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^*(x) &= \mathbf{P}(\alpha_j x + \mu_j) \\ &= \mathbf{X}(\alpha_j x + \mu_j) \mathbf{D}^T \\ &= \mathbf{X}(x) \mathbf{H}(\alpha_j, \mu_j) \mathbf{D}^T \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

elde edilir.

Böylece, $0 \leq x \leq 1$ için

$$\begin{aligned} y_\ell(x) &= \mathbf{P}^*(x) \mathbf{A} \\ &= \mathbf{P}(\alpha_j x + \mu_j) \mathbf{A} \\ &= \mathbf{X}(\alpha_j x + \mu_j) \mathbf{D}^T \mathbf{A} \\ &= \mathbf{X}(x) \mathbf{H}(\alpha_j, \mu_j) \mathbf{D}^T \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

$$\begin{aligned} y_\ell^{(k)}(x) &= \mathbf{X}^{(k)}(\alpha_j x + \mu_j) \mathbf{D}^T \mathbf{A} \\ &= \mathbf{X}(\alpha_j x + \mu_j) \mathbf{M}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} \\ &= \mathbf{X}(x) \mathbf{H}(\alpha_j, \mu_j) \mathbf{M}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad , \quad k = 0, 1, 2 \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

bulunur.

$x = x_i$ için (3.2) diferansiyel denklemi

$$\sum_{k=0}^2 F_k(x_i) y_\ell^{(k)}(x_i) = g(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (3.1.15)$$

olarak tanımlanır. (3.1.15) denklemi matris sistemine dönüştürülürse

$$\sum_{k=0}^2 \mathbf{F}_k \mathbf{Y}_\ell^{(k)} = \mathbf{G} \quad (3.1.16)$$

elde edilir. Burada $\mathbf{F}_2 = \mathbf{I}$, $\mathbf{F}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{F}_0 = (\lambda - q(x))$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Böylece

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} F_k(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_k(x_1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & F_k(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_\ell^{(k)} = \begin{bmatrix} y_\ell^{(k)}(x_0) \\ y_\ell^{(k)}(x_1) \\ \vdots \\ y_\ell^{(k)}(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}$$

Şeklinde olup, (3.1.14) denkleminde de $x = x_i$ yazılırsa

$$y_\ell^{(k)}(x_i) = \mathbf{X}(x_i) \mathbf{H}(\alpha_j, \mu_j) \mathbf{M}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (3.1.17)$$

bulunur. Bu ifade genişletilirse

$$\begin{bmatrix} y_\ell^{(k)}(x_0) \\ y_\ell^{(k)}(x_1) \\ \vdots \\ y_\ell^{(k)}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \\ \mathbf{X}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix} [\mathbf{H}(\alpha_j, \mu_j) \mathbf{M}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A}]$$

matrisi elde edilir.

Böylece

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \\ \mathbf{X}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^N \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^N \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. O halde (3.1.17) denklemi sonuçta

$$\mathbf{Y}_\ell^{(k)} = \mathbf{X} \mathbf{H}(\alpha_j, \mu_j) \mathbf{M}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (3.1.18)$$

olarak tanımlanır.

(3.1.18) ifadesi (3.1.16)'de yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^2 \mathbf{F}_k \mathbf{X} \mathbf{H}(\alpha_j, \mu_j) \mathbf{M}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (3.1.19)$$

temel matris denklemi elde edilir.

(3.1.19) denkleminde ise

$$\mathbf{W}_\ell = [\mathbf{w}_{ij}] = \sum_{k=0}^2 \mathbf{F}_k \mathbf{X} \mathbf{H}(\alpha_j, \mu_j) \mathbf{M}^k \mathbf{D}^T, \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

olarak adlandırılır.

(3.1.19) denklemi aynı zamanda

$$\mathbf{W}_\ell \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (3.1.20)$$

şeklinde ifade edilen (N+1) denklem ve (N+1) bilinmeyenden oluşan (3.1.20) cebirsel sistemine dönüştürülebilir.

(3.1.20) denkleminin artırılmış matrisi

$$[\mathbf{W}_\ell; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \dots & w_{0N}; & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \dots & w_{1N}; & g(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & \dots & w_{NN}; & g(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} \quad (3.1.21)$$

dir. (3.3)'de tanımlanan

$$\sum_{k=0}^1 [a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b)] = 0, \quad j = 0, 1$$

biçimindeki koşul denklemi ile (3.1.17) denkleminde

$$y_{\ell}^{(k)}(a) = \mathbf{X}(a) \mathbf{H}(\alpha_j, \mu_j) \mathbf{M}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A}$$

$$y_{\ell}^{(k)}(b) = \mathbf{X}(b) \mathbf{H}(\alpha_j, \mu_j) \mathbf{M}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A}$$

bulunur. Bu denklemler (3.3)'de tanımlanan koşul denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\mathbf{U}_{\ell,j} = \sum_{k=0}^1 [a_{jk} \mathbf{X}(a) + b_{jk} \mathbf{X}(b)] \mathbf{H}(\alpha_j, \mu_j) \mathbf{M}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} \equiv [u_{j0} \ u_{j1}, \dots, u_{jN}] \quad (3.1.22)$$

olmak üzere, (3.1.22) matris sistemi $j = 0, 1$ için

$$\mathbf{U}_{\ell,0} \mathbf{A} = [\lambda_0]$$

$$\mathbf{U}_{\ell,1} \mathbf{A} = [\lambda_1]$$

veya artırılmış matris formunda

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}}_{\ell,j} &= [\mathbf{U}_{\ell,j}; \lambda_j] \\ &= [u_{j0} \ u_{j1}, \dots, u_{jN}; \lambda_j] \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. O halde koşullarla ilgili artırılmış matris

$$[\mathbf{U}_{\ell,j}; \lambda_j] = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{00} & \mathbf{u}_{01} & \cdots & \mathbf{u}_{0N} & ; & \lambda_0 \\ \mathbf{u}_{10} & \mathbf{u}_{11} & \cdots & \mathbf{u}_{1N} & ; & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Şimdi (3.1.20) cebirsel sisteminde koşullarla ilgili arttırılmış matris son iki satır (veya herhangi iki satırı) silinerek yerine yazılırsa

$$[\overline{\mathbf{W}}_\ell; \overline{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdot & \cdot & \cdot & w_{0N} & ; & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & w_{1N} & ; & g(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & ; & \cdots \\ w_{N-2,0} & w_{N-2,1} & \cdot & \cdot & \cdot & w_{N-2,N} & ; & g(x_{N-2}) \\ u_{00} & u_{01} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{1N} & ; & \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (3.1.23)$$

elde edilir.

Bu arttırılmış matris

$$\overline{\mathbf{W}}_\ell \mathbf{A} = \overline{\mathbf{G}} \quad (3.1.24)$$

formunda matris denkleminin dönüştürülebiliridir. Eğer $\text{rank } \overline{\mathbf{W}}_\ell = \text{rank}[\overline{\mathbf{W}}_\ell; \overline{\mathbf{G}}] = N + 1$ ise yani $\det \overline{\mathbf{W}}_\ell \neq 0$ ise (3.1.24) matris denkleminin çözümü

$$\mathbf{A} = (\overline{\mathbf{W}}_\ell)^{-1} \overline{\mathbf{G}} \quad (3.1.25)$$

şeklinde olur. Böylece (3.1.25)'den

$$\mathbf{A} = [a_0 \ a_1 \dots a_N]^T.$$

bilinmeyen Legendre katsayılarının oluşturduğu sütun matrisi tek olarak bulunur. O halde verilen koşullara göre (3.2) diferansiyel denklemi tek çözüme sahip olur ve bu çözüm,

$$[y_\ell(x)] = \mathbf{P}(x) \mathbf{A}$$

ya da

$$y_\ell(x) = \sum_{n=0}^N a_n P_n(x)$$

şeklinde Legendre polinom çözümüdür.

3.2 Chebyshev Sıralama Yöntemi

(3.5) denklemi

$$[y_c(x)] = \mathbf{T}^*(x)\mathbf{B} \quad (3.2.1)$$

matris formuna dönüştürülebilirdir. Burada $\mathbf{T}^*(x)$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri

$$\mathbf{T}^*(x) = [T_0^*(x) \ T_1^*(x) \ \dots \ T_N^*(x)] \ , \quad \mathbf{B} = [\frac{b_0}{2}, b_1 \dots b_N]^T.$$

olarak tanımlanır. Bu durumda (3.2) matris formu,

$$x_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right) \ , \ -1 \leq x \leq 1$$
$$x_i = \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right) \right] \ , \ 0 \leq x \leq 1, \ i = 0, 1, \dots, N \quad (3.2.2)$$

olup, sıralama noktalarından ikincisi alınır ve bu durumda (3.2.1) ifadesi

$$[y_c(x_i)] = \mathbf{T}^*(x_i)\mathbf{B} \quad , \ i = 0, 1, \dots, N$$

şekline gelir.

Kesim 2.2’te tanımlanan (Snyder., 1966)

$$x^n = 2^{-2n+1} \sum_{k=0}^n \binom{2n}{k} T_{n-k}^*(x) \ , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.2.3)$$

özelliğinden yararlanılarak Chebyshev polinomları aşağıdaki şekilde matris formuna dönüştürülebilirdir;

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2^0 \binom{0}{0} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2^{-2} \binom{2}{1} & 2^{-1} \binom{2}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2^{-4} \binom{4}{2} & 2^{-3} \binom{4}{3} & 2^{-3} \binom{4}{4} & 0 & \dots & 0 \\ 2^{-6} \binom{6}{3} & 2^{-5} \binom{6}{4} & 2^{-5} \binom{6}{5} & 2^{-5} \binom{6}{6} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^{-2N} \binom{2N}{N} & 2^{-2N+1} \binom{2N}{N+1} & 2^{-2N+1} \binom{2N}{N+2} & 2^{-2N+1} \binom{2N}{N+3} & \dots & 2^{-2N+1} \binom{2N}{2N} \end{bmatrix} \quad (3.2.4)$$

Bu matris formu

$$\mathbf{X}(x) = [1 \ x \dots x^N]$$

olmak üzere

$$\mathbf{X}^T(x) = \mathbf{E}(\mathbf{T}^*(x))^T \Rightarrow \mathbf{X}(x) = \mathbf{T}^*(x)\mathbf{E}^T$$

yada

$$\mathbf{T}^*(x) = \mathbf{X}(x)(\mathbf{E}^{-1})^T \quad (3.2.5)$$

şeklinde ifade edilir.

(3.1.5)'de gösterildiği gibi

$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, böylece

$$\mathbf{X}^{(1)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^1$$

$$\mathbf{X}^{(2)}(x) = \mathbf{X}^{(1)}(x)\mathbf{M} = \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^2$$

$$\mathbf{X}^{(3)}(x) = \mathbf{X}^{(2)}(x)\mathbf{M} = \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^3.$$

$\vdots$

$$\mathbf{X}^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k-1)}(x)\mathbf{M} = \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^k \quad (3.2.6)$$

bulunur.

(3.2.1)'de ifade edilen matris formunun k. mertebeden türevi

$$[y_c^{(k)}(x)] = \mathbf{T}^{*(k)}(x)\mathbf{B} \quad (3.2.7)$$

şeklindedir. (3.2.7)'de bazı işlemler yapılırsa

$$\mathbf{T}^*(x) = \mathbf{X}(x)(\mathbf{E}^{-1})^T$$

ve

$$\mathbf{T}^{*(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x)(\mathbf{E}^{-1})^T, \quad k = 0,1,2 \quad (3.2.8)$$

olup, böylece

$$\begin{aligned} y_c^{(k)}(x) &= \mathbf{X}^{(k)}(x)(\mathbf{E}^{-1})^T \mathbf{B} \\ &= \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^k(\mathbf{E}^{-1})^T \mathbf{B}, \quad k = 0,1,2 \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

denkleminde $x = x_i$ yazılırsa, (3.2) diferansiyel denklemi

$$\sum_{k=0}^2 F_k(x_i) y_c^{(k)}(x_i) = g(x_i), \quad i = 0,1,...,N \quad (3.2.10)$$

şeklini alır. Böylece (3.2.10) denklemi matris sistemine dönüştürülürse

$$\sum_{k=0}^2 \mathbf{F}_k \mathbf{Y}_c^{(k)} = \mathbf{G} \quad (3.2.11)$$

elde edilir. Burada $\mathbf{F}_2 = 1$, $\mathbf{F}_1 = 0$, $\mathbf{F}_0 = (\lambda - q(x))$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Böylece

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} F_k(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_k(x_1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & F_k(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_c^{(k)} = \begin{bmatrix} y_c^{(k)}(x_0) \\ y_c^{(k)}(x_1) \\ \vdots \\ y_c^{(k)}(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. (3.2.9)'de ifade edilen denklem $x = x_i$ için

$$y_c^{(k)}(x_i) = \mathbf{X}(x_i) \mathbf{M}^k (\mathbf{E}^{-1})^T \mathbf{B} \quad (3.2.12)$$

halini alır. Bu ifade genişletilirse

$$\begin{bmatrix} y_c^{(k)}(x_0) \\ y_c^{(k)}(x_1) \\ \vdots \\ y_c^{(k)}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \\ \mathbf{X}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix} \left[\mathbf{M}^k (\mathbf{E}^{-1})^T \mathbf{B} \right]$$

matrisi elde edilir. Bu taktirde

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \\ \mathbf{X}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^N \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^N \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. O halde (3.2.12) ifadesi

$$\mathbf{Y}_c^{(k)} = \mathbf{X} \mathbf{M}^k (\mathbf{E}^{-1})^T \mathbf{B} \quad (3.2.13)$$

olarak tanımlanır.

(3.2.13)'de bulunan ifade (3.2.11)'de yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^2 \mathbf{F}_k \mathbf{X} \mathbf{M}^k (\mathbf{E}^{-1})^T \mathbf{B} = \mathbf{G} \quad (3.2.14)$$

temel matris denklemi elde edilir.

(3.2.14) denkleminde ise

$$\mathbf{W}_c = [\mathbf{w}_{ij}] = \sum_{k=0}^2 \mathbf{F}_k \mathbf{X} \mathbf{M}^k (\mathbf{E}^{-1})^T, \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

olarak adlandırılır.

Böylece (3.2.14) denklemi aynı zamanda

$$\mathbf{W}_c \mathbf{B} = \mathbf{G} \quad (3.2.15)$$

şeklinde ifade edilen $(N+1)$ denklem ve $(N+1)$ bilinmeyenden oluşan (3.2.15) cebirsel sistemine dönüştürülebilir.

(3.2.15) denkleminin artırılmış matrisi

$$[\mathbf{W}_c; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \dots & w_{0N}; & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \dots & w_{1N}; & g(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & \dots & w_{NN}; & g(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} \quad (3.2.16)$$

biçimindedir. (3.3)'de tanımlanan

$$\sum_{k=0}^1 [a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b)] = 0, \quad j = 0, 1$$

biçimindeki koşul denklemin ile (3.2.12) denkleminden

$$y_c^{(k)}(a) = \mathbf{X}(a) \mathbf{M}^k (\mathbf{E}^{-1})^T \mathbf{B}$$

$$y_c^{(k)}(b) = \mathbf{X}(b) \mathbf{M}^k (\mathbf{E}^{-1})^T \mathbf{B}$$

bulunur. Bu denklemler (3.3)'de tanımlanan koşul denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\mathbf{U}_{c,j} = \sum_{k=0}^1 [a_{jk} \mathbf{X}(a) + b_{jk} \mathbf{X}(b)] \mathbf{M}^k (\mathbf{E}^{-1})^T \mathbf{B} \equiv [u_{j0} \ u_{j1}, \dots, u_{jN}] \quad (3.2.17)$$

olmak üzere, (3.2.17) matris sistemi $j = 0, 1$ için

$$\mathbf{U}_{c,0} \mathbf{B} = [\lambda_0]$$

$$\mathbf{U}_{c,1} \mathbf{B} = [\lambda_1]$$

veya artırılmış matris formunda

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{U}}_{c,j} &= [\mathbf{U}_{c,j}; \lambda_j] \\ &= [u_{j0} \ u_{j1}, \dots, u_{jN}; \lambda_j]\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. O halde koşullarla ilgili artırılmış matris

$$[\mathbf{U}_{c,j}; \lambda_j] = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Şimdi (3.2.16) cebirsel sisteminde koşullarla ilgili arttırılmış matris son iki satır (veya herhangi iki satırı) silinerek yerine yazılırsa

$$[\overline{\mathbf{W}}_c; \overline{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & . & . & . & w_{0N} & ; & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & . & . & . & w_{1N} & ; & g(x_1) \\ \cdots & \cdots & . & . & . & \cdots & ; & \cdots \\ w_{N-2,0} & w_{N-2,1} & . & . & . & w_{N-2,N} & ; & g(x_{N-2}) \\ u_{00} & u_{01} & . & . & . & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & . & . & . & u_{1N} & ; & \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (3.2.18)$$

elde edilir.

Bu artırılmış matris

$$\overline{\mathbf{W}}_c \mathbf{B} = \overline{\mathbf{G}} \quad (3.2.19)$$

formunda matris denkleminde dönüştürülebilir. Eğer $\text{rank } \overline{\mathbf{W}}_c = \text{rank}[\overline{\mathbf{W}}_c; \overline{\mathbf{G}}] = N+1$ ise yani $\det \overline{\mathbf{W}}_c \neq 0$ ise (3.2.19) matris denkleminin çözümü

$$\mathbf{B} = (\overline{\mathbf{W}}_c)^{-1} \overline{\mathbf{G}} \quad (3.2.20)$$

şeklinde olur. Böylece (3.2.20)'den

$$\mathbf{B} = [\frac{b_0}{2}, b_1 \dots b_N]^T.$$

bilinmeyen Chebyshev katsayılarının oluşturduğu sütun matrisi tek olarak bulunur. O halde verilen koşullara göre (3.2) diferansiyel denklemi tek çözüme sahip olur ve bu çözüm,

$$[y_c(x)] = \mathbf{T}^*(x)\mathbf{B}$$

ya da

$$y_c(x) = \sum_{n=0}^N b_n T_n(x)$$

şeklinde Chebyshev polinom çözümüdür.

3.3 Boubaker Sıralama Yöntemi

(3.6) denklemi

$$[y_b(x)] = \mathbf{B}(x)\mathbf{C} \quad (3.3.1)$$

matris formuna dönüştürülebilir. Burada $\mathbf{B}(x)$ ve $\mathbf{C}$ matrisleri

$$\mathbf{B}(x) = [B_0(x) \ B_1(x) \dots B_N(x)] , \quad \mathbf{C} = [c_0, c_1 \dots c_N]^T.$$

olarak tanımlanır. Bu durumda (3.2) matris formu,

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i, \quad i = 0,1,\dots,N \quad (3.3.2)$$

olup, sıralama noktalarından (3.3.1) ifadesi

$$[y_b(x_i)] = \mathbf{B}(x_i)\mathbf{C} \quad , \quad i = 0,1,\dots,N$$

şekline gelir.

Kesim 2.3'te tanımlanan Oyodum et al (2009),

$$\varphi_{q,p} = \left[\frac{(n-4p)}{(n-p)} C_{n-p}^p \right] (-1)^p, \quad q = 0, 1, \dots, N. \quad (3.3.3)$$

özelliğinden yararlanılarak Boubaker polinomları aşağıdaki şekilde matris formuna dönüştürülebilir,

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \varphi_{0,0} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_{1,0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \varphi_{2,1} & 0 & \varphi_{2,0} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{2N,N} & 0 & \varphi_{2N,N-1} & 0 & \dots & \varphi_{2N,0} \\ 0 & \varphi_{2N+1,N} & 0 & \varphi_{2N+1,N-1} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.4)$$

Bu matris formu

$$\mathbf{X}(x) = [1 \ x \dots x^N]$$

olmak üzere

$$\mathbf{B}^T(x) = \mathbf{Z}\mathbf{X}^T(x) \Rightarrow \mathbf{B}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{Z}^T \quad (3.3.5)$$

şeklinde ifade edilir.

(3.1.5)'de gösterildiği gibi

$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{X}^{(1)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^1$$

$$\mathbf{X}^{(2)}(x) = \mathbf{X}^{(1)}(x)\mathbf{M} = \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^2$$

$$\mathbf{X}^{(3)}(x) = \mathbf{X}^{(2)}(x)\mathbf{M} = \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^3.$$

$\vdots$

$$\mathbf{X}^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k-1)}(x)\mathbf{M} = \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^k \quad (3.3.6)$$

bulunur.

(3.3.1)'de ifade edilen matris formunun k. mertebeden türevi

$$[y_b^{(k)}(x)] = \mathbf{B}^{(k)}(x)\mathbf{C} \quad (3.3.7)$$

şeklindedir. (3.3.7)'de bazı işlemler yapılırsa

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{Z}^T$$

ve

$$\mathbf{B}^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x)\mathbf{Z}^T, \quad k = 0,1,2 \quad (3.3.8)$$

olup, böylece

$$\begin{aligned} y_b^{(k)}(x) &= \mathbf{X}^{(k)}(x)\mathbf{Z}^T\mathbf{C} \\ &= \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^k\mathbf{Z}^T\mathbf{C}, \quad k = 0,1,2 \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

denkleminde $x = x_i$ yazılırsa (3.2) diferansiyel denklemi

$$\sum_{k=0}^2 F_k(x_i)y_b^{(k)}(x_i) = g(x_i), \quad i = 0,1,\dots,N \quad (3.3.10)$$

Şeklini alır. Böylece (3.3.10) denklemi matris sistemine dönüştürülürse

$$\sum_{k=0}^2 \mathbf{F}_k \mathbf{Y}_b^{(k)} = \mathbf{G} \quad (3.3.11)$$

elde edilir. Burada $\mathbf{F}_2 = 1$, $\mathbf{F}_1 = 0$, $\mathbf{F}_0 = (\lambda - q(x))$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Böylece

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} F_k(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_k(x_1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & F_k(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_b^{(k)} = \begin{bmatrix} y_b^{(k)}(x_0) \\ y_b^{(k)}(x_1) \\ \vdots \\ y_b^{(k)}(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. (3.3.9)'da ifade edilen denklem $x = x_i$ için

$$y_b^{(k)}(x_i) = \mathbf{X}(x_i) \mathbf{M}^k \mathbf{Z}^T \mathbf{C} \quad (3.3.12)$$

halini alır. Bu ifade genişletilirse

$$\begin{bmatrix} y_b^{(k)}(x_0) \\ y_b^{(k)}(x_1) \\ \vdots \\ y_b^{(k)}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \\ \mathbf{X}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix} [\mathbf{M}^k \mathbf{Z}^T \mathbf{C}]$$

matrisi elde edilir. Bu taktirde

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \\ \mathbf{X}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^N \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^N \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. O halde (3.3.12) ifadesi

$$\mathbf{Y}_b^{(k)} = \mathbf{X} \mathbf{M}^k \mathbf{Z}^T \mathbf{C} \quad (3.3.13)$$

olarak tanımlanır.

(3.3.13)'de bulunan ifade (3.3.11)'de yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^2 \mathbf{F}_k \mathbf{X} \mathbf{M}^k \mathbf{Z}^T \mathbf{C} = \mathbf{G} \quad (3.3.14)$$

temel matris denklemi elde edilir.

(3.3.14) denkleminde ise

$$\mathbf{W}_b = [\mathbf{w}_{ij}] = \sum_{k=0}^2 \mathbf{F}_k \mathbf{X} \mathbf{M}^k \mathbf{Z}^T, \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

olarak adlandırılır. Böylece (3.3.14) denklemi aynı zamanda

$$\mathbf{W}_b \mathbf{C} = \mathbf{G} \quad (3.3.15)$$

şeklinde ifade edilen (N+1) denklemler ve (N+1) bilinmeyenden oluşan (3.3.15) cebirsel sistemine dönüştürülebilir.

(3.3.15) denkleminin artırılmış matrisi

$$[\mathbf{W}_b; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \dots & w_{0N}; & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \dots & w_{1N}; & g(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & \dots & w_{NN}; & g(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} \quad (3.3.16)$$

biçimindedir. (3.3) de tanımlanan

$$\sum_{k=0}^1 [a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b)] = 0, \quad j = 0, 1$$

tanımlanan koşul denklemleri ile (3.3.12) denklemlerinden

$$y_b^{(k)}(a) = \mathbf{X}(a) \mathbf{M}^k \mathbf{Z}^T \mathbf{C}$$

$$y_b^{(k)}(b) = \mathbf{X}(b) \mathbf{M}^k \mathbf{Z}^T \mathbf{C}$$

bulunur. Bu denklemler (3.3) de tanımlanan koşul denklemlerinde yerlerine yazılırsa

$$\mathbf{U}_{b,j} = \sum_{k=0}^1 [a_{jk} \mathbf{X}(a) + b_{jk} \mathbf{X}(b)] \mathbf{M}^k \mathbf{Z}^T \mathbf{C} \equiv [u_{j0} \ u_{j1}, \dots, u_{jN}] \quad (3.3.17)$$

olmak üzere, (3.3.17) matris sistemi $j = 0, 1$ için

$$\mathbf{U}_{b,0} \mathbf{C} = [\lambda_0]$$

$$\mathbf{U}_{b,1} \mathbf{C} = [\lambda_1]$$

veya artırılmış matris formunda

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{U}}_{b,j} &= [\mathbf{U}_{b,j}; \lambda_j] \\ &= [u_{j0} \ u_{j1}, \dots, u_{jN}; \lambda_j]\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. O halde koşullarla ilgili artırılmış matris

$$[\mathbf{U}_{b,j}; \lambda_j] = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Şimdi (3.3.16) cebirsel sisteminde koşullarla ilgili arttırılmış matris son iki satır (veya herhangi iki satırı) silinerek yerine yazılırsa

$$[\overline{\mathbf{W}}_b; \overline{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdot & \cdot & \cdot & w_{0N} & ; & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & w_{1N} & ; & g(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & ; & \cdots \\ w_{N-2,0} & w_{N-2,1} & \cdot & \cdot & \cdot & w_{N-2,N} & ; & g(x_{N-2}) \\ u_{00} & u_{01} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{1N} & ; & \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (3.3.18)$$

elde edilir.

Bu artırılmış matris

$$\overline{\mathbf{W}}_b \mathbf{C} = \overline{\mathbf{G}} \quad (3.3.19)$$

formunda matris denkleminde dönüştürülebilir. Eğer $\text{rank } \overline{\mathbf{W}}_b = \text{rank} [\overline{\mathbf{W}}_b; \overline{\mathbf{G}}] = N + 1$ ise yani $\det \overline{\mathbf{W}}_b \neq 0$ ise (3.2.19) matris denkleminin çözümü

$$\mathbf{C} = (\overline{\mathbf{W}}_b)^{-1} \overline{\mathbf{G}} \quad (3.3.20)$$

şeklinde olur. Böylece (3.2.20)'den

$$\mathbf{C} = [c_0, c_1 \dots c_N]^T.$$

bilinmeyen Boubaker katsayılarının oluşturduğu sütun matrisi tek olarak bulunur. O halde verilen koşullara göre (3.2) diferansiyel denklemi tek çözüme sahip olur ve bu çözüm,

$$[y_b(x)] = \mathbf{B}(x)\mathbf{C}$$

ya da

$$y_b(x) = \sum_{n=0}^N c_n B_n(x)$$

şeklinde Boubaker polinom çözümüdür.

4. UYGULAMA

Bu çalışmada verilen Legendre, Chebyshev ve Boubaker Sıralama Yöntemlerini, Sturm-Liouville Problemin, verilen koşullarına göre yaklaşık çözümünü bulmak için kullanabiliriz. Bunu aşağıdaki örnekle açıklayalım.

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + y = 1, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$y'(0) = 0, \quad y'(1) + y(1) = 0.$$

olmak üzere homojen olmayan sabit katsayılı Sturm-Liouville problemi göz önüne alınsın (LL. G. Chambers, 1994)). Problemin tam çözümü $y = 1 - e^{-1} \cosh x$ dir. Burada $\lambda = 1$, $q(x) = 0$ için $F_2(x) = -1$, $F_1(x) = 0$, $F_0(x) = 1$, $g(x) = 1$ olduğuna dikkat edelim.

İlk olarak, $y(x)$ çözümüne

$$y_\ell(x) = \sum_{n=0}^N a_n P_n(x) \quad (4.1)$$

kesilmiş (sonlu) $y_\ell(x)$ Legendre serisiyle $N=5$ olacak şekilde yaklaşalım. Legendre sıralama noktalarını, $N=5$ için Kesim 2.1'den,

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = \frac{2}{5}, x_3 = \frac{3}{5}, x_4 = \frac{4}{5}, x_5 = 1$$

olarak alınır. Diğer yandan,

$$F_2(x) = -1, F_1(x) = 0, F_0(x) = 1, g(x) = 1$$

olduğundan, bu fonksiyonların matris formundaki gösterimi (3.1.19) bağıntısından

$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/5 & 1/25 & 1/125 & 1/625 & 1/3125 \\ 1 & 2/5 & 4/25 & 8/125 & 16/625 & 32/3125 \\ 1 & 3/5 & 9/25 & 27/125 & 81/625 & 243/3125 \\ 1 & 4/5 & 16/25 & 64/125 & 256/625 & 1024/3125 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 & 5/2 & 0 & 0 \\ 3/8 & 0 & -15/4 & 0 & 35/8 & 0 \\ 0 & 15/8 & 0 & -35/4 & 0 & 63/8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}(2,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 24 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 32 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}.$$

şeklindedir. $N = 5$ için (3.1.19) matris denkleminde

$$\sum_{k=0}^2 \mathbf{F}_k \mathbf{X} \mathbf{H}(\alpha_j, \mu_j) \mathbf{M}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.2)$$

yazılır.

Burada $\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{G}, \mathbf{X}, \mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{H}(\alpha_j, \mu_j)$ matrisleri yukarıda tanımlanan matrislerdir.

(4.2) denkleminde bu matrisler yerlerine yazılıp düzenlenirse bu taktirde (3.1.21) bağıntısı kullanılarak artırılmış matris

$$[\mathbf{W}_\ell; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -11 & -59 & -179 & -419 & ; & 1 \\ 1 & 7/5 & -239/25 & -1981/25 & -46471/125 & -4417973/3125 & ; & 1 \\ 1 & 9/5 & -191/25 & -2403/25 & -77031/125 & -9984411/3125 & ; & 1 \\ 1 & 11/5 & -131/25 & -2717/25 & -112711/125 & -18529489/3125 & ; & 1 \\ 1 & 13/5 & -59/25 & -2899/25 & -151831/125 & -30437927/3125 & ; & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -117 & -1539 & -14697 & ; & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

biçiminde bulunur. Koşullarla ilgili arttırılmış matris ise (3.1.22) denkleminde

$$\bar{\mathbf{U}}_{\ell,0} = [\mathbf{U}_{\ell,0}; \lambda_0] = [0, 2, 6, 12, 20, 30 ; 0] \quad (4.4)$$

ve

$$\bar{\mathbf{U}}_{\ell,1} = [\mathbf{U}_{\ell,1}; \lambda_1] = [1, 5, 31, 195, 1221, 7593 ; 0] \quad (4.5)$$

şeklinde elde edilir. (4.3) matrisinin son iki satırının (veya herhangi iki satır) yerine (4.4) ve (4.5) satır matrisleri yerine yazılırsa, (3.1.23) denklemi ile ifade edilen artırılmış matris

$$[\bar{\mathbf{W}}_\ell; \bar{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -11 & -59 & -179 & -419 & ; & 1 \\ 1 & 7/5 & -239/25 & -1981/25 & -46471/125 & -4417973/3125 & ; & 1 \\ 1 & 9/5 & -191/25 & -2403/25 & -77031/125 & -9984411/3125 & ; & 1 \\ 1 & 11/5 & -131/25 & -2717/25 & -112711/125 & -18529489/3125 & ; & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 12 & 20 & 30 & ; & 0 \\ 1 & 5 & 31 & 195 & 1221 & 7593 & ; & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

olarak bulunur. Bunun çözümünden

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -11 & -59 & -179 & -419 \\ 1 & 7/5 & -239/25 & -1981/25 & -46471/125 & -4417973/3125 \\ 1 & 9/5 & -191/25 & -2403/25 & -77031/125 & -9984411/3125 \\ 1 & 11/5 & -131/25 & -2717/25 & -112711/125 & -18529489/3125 \\ 0 & 2 & 6 & 12 & 20 & 30 \\ 1 & 5 & 31 & 195 & 1221 & 7593 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.56787 \\ 0.097520 \\ -0.034575 \\ 0.0013392 \\ -0.00017733 \\ -0.0000037211 \end{bmatrix}$$

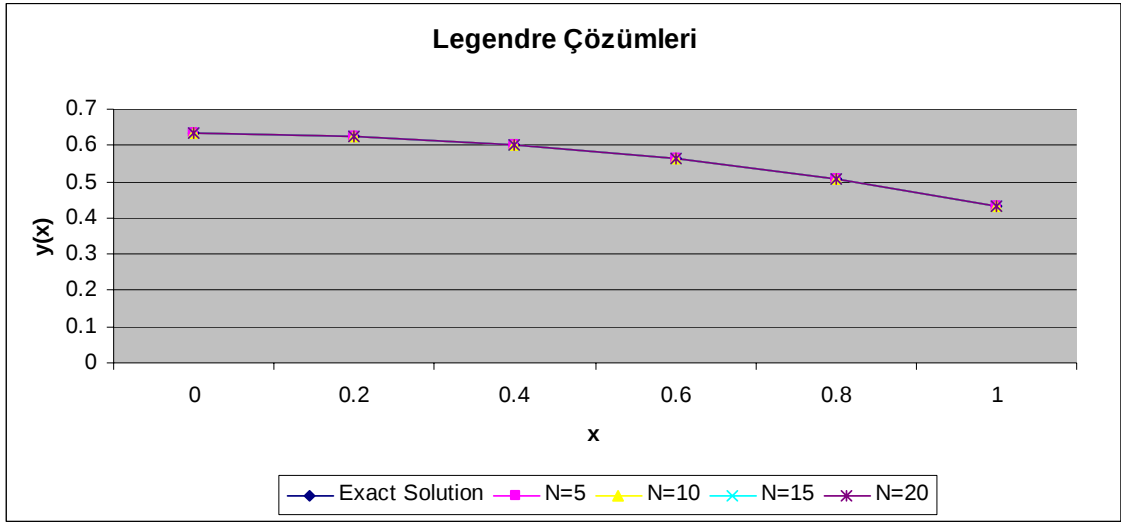
bulunur. Böylece bu katsayılar (4.1)'de yerine yazılarak, probleminin çözümü

$$y_\ell(x) = 0.63198 - 0.18401.x^2 - 0.000126.x^3 - 0.014757.x^4 - 0.00093772.x^5$$

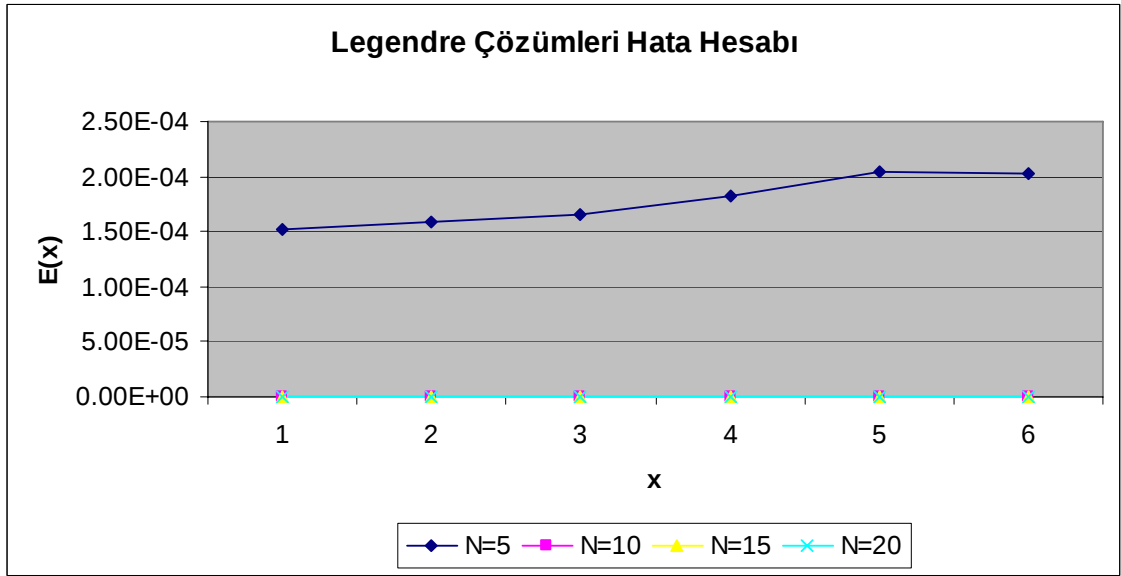
biçiminde elde edilir.

Çizelge 3.1. N = 5, 10, 15, 20 için Legendre Hata Hesapları

	N = 5	N = 10	N = 15	N = 20
x	$y_\ell(x)$	$y_\ell(x)$	$y_\ell(x)$	$y_\ell(x)$
0.0	1.52E-04	2.97E-11	2.54E-13	5.00E-15
0.2	1.59E-04	3.03E-11	2.57E-13	6.00E-15
0.4	1.66E-04	3.21E-11	2.77E-13	4.00E-15
0.6	1.82E-04	3.52E-11	2.99E-13	8.00E-15
0.8	2.04E-04	3.97E-11	3.41E-13	2.00E-15
1.0	2.02E-04	4.28E-11	3.79E-13	2.00E-15



Şekil 3.1. $y = 1 - e^{-1} \cosh x$ ile $N = 5, 10, 15, 20$ için Bulunan Legendre Çözümlerin Karşılaştırılması



Şekil 3.2. $y = 1 - e^{-1} \cosh x$ ile $N = 5, 10, 15, 20$ için Bulunan Legendre Çözümlerin Hata Grafiği

İkinci olarak, $y(x)$ çözümüne

$$y_c(x) = \sum_{n=0}^N b_n T_n(x) \quad (4.7)$$

kesilmiş (sonlu) $y_c(x)$ Chebyshev serisiyle $N=5$ olacak şekilde yaklaşalım. Chebyshev sıralama noktalarını, $N=5$ için Kesim 2.2'den,

$$x_0 = 1, x_1 = 0.90451, x_2 = 0.65452, x_3 = 0.34548, x_4 = 0.09549, x_5 = 0$$

olarak alınır. Burada

$$\mathbf{F}_2(x) = -1, \mathbf{F}_1(x) = 0, \mathbf{F}_0(x) = 1, g(x) = 1$$

olduğuna göre, bu fonksiyonların matris formundaki gösterimi (3.2.14) bağıntısından

$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0.90451 & 0.81814 & 0.74001 & 0.66935 & 0.60543 \\ 1 & 0.65452 & 0.42840 & 0.28039 & 0.18352 & 0.12012 \\ 1 & 0.34548 & 0.11936 & 0.041235 & 0.014246 & 0.0049217 \\ 1 & 0.09549 & 0.0091183 & 0.00087071 & 0.000083144 & 0.0000079394 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/8 & 1/2 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 5/16 & 15/32 & 3/16 & 1/32 & 0 & 0 \\ 35/128 & 7/16 & 7/32 & 1/16 & 1/128 & 0 \\ 63/256 & 105/256 & 15/64 & 45/512 & 5/526 & 1/512 \end{bmatrix}.$$

olarak ifade edilir. Böylece $N = 5$ için (3.2.14) matris denklemi

$$\sum_{k=0}^2 \mathbf{F}_k \mathbf{X} \mathbf{M}^k (\mathbf{E}^{-1})^T \mathbf{B} = \mathbf{G} \quad (4.8)$$

olur.

Burada $\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{G}, \mathbf{X}, \mathbf{M}, \mathbf{E}$ matrisleri yukarıda tanımlanan matrislerdir.

(4.2) denkleminde bu matrisler yerlerine yazılıp düzenlenirse, bu taktirde (3.2.16) bağıntısı kullanılarak artırılmış matris

$$[\mathbf{W}_c; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -15 & -95 & -319 & -799 & ; & 1 \\ 1 & 0.8090 & -15.691 & -77.980 & -118.20 & -290.01 & ; & 1 \\ 1 & 0.3090 & -16.809 & -30.480 & 27.590 & 111.60 & ; & 1 \\ 1 & -0.30904 & -16.809 & 30.476 & 27.640 & -111.55 & ; & 1 \\ 1 & -0.80902 & -15.691 & 77.975 & -188.15 & 290.45 & ; & 1 \\ 1 & -1 & -15 & 95 & -319 & 799 & ; & 1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

biçiminde bulunur. Koşullarla ilgili arttırılmış matris ise (3.2.17) denkleminde

$$\overline{\mathbf{U}}_{c,0} = [\mathbf{U}_{c,0}; \lambda_0] = [0, 2, -8, 18, -32, 50 ; 0] \quad (4.10)$$

ve

$$\overline{\mathbf{U}}_{c,1} = [\mathbf{U}_{c,1}; \lambda_1] = [1, 3, 9, 19, 33, 51 ; 0] \quad (4.11)$$

Şeklinde elde edilir. (4.9) matrisinin son iki satırının (veya herhangi iki satır) yerine (4.10) ve (4.11) satır matrisleri yerine yazılırsa, (3.2.18) denklemi ile ifade edilen artırılmış matris

$$[\overline{\mathbf{W}}_c; \overline{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -15 & -95 & -319 & -799 & ; & 1 \\ 1 & 0.8090 & -15.691 & -77.980 & -118.20 & -290.01 & ; & 1 \\ 1 & 0.3090 & -16.809 & -30.480 & 27.590 & 111.60 & ; & 1 \\ 1 & -0.30904 & -16.809 & 30.476 & 27.640 & -111.55 & ; & 1 \\ 0 & 2 & -8 & 18 & -32 & 50 & ; & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 19 & -33 & 51 & ; & 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

olarak bulunur. Bunun çözümünden

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -15 & -95 & -319 & -799 \\ 1 & 0.8090 & -15.691 & -77.980 & -188.20 & -290.01 \\ 1 & 0.3090 & -16.809 & -30.480 & 27.590 & 111.60 \\ 1 & -0.30904 & -16.809 & 30.476 & 27.640 & -111.55 \\ 0 & 2 & -8 & 18 & -32 & 50 \\ 1 & 3 & 9 & 19 & 33 & 51 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.55856 \\ -0.098754 \\ -0.026480 \\ -0.0010188 \\ -0.00013279 \\ -0.0000048144 \end{bmatrix}$$

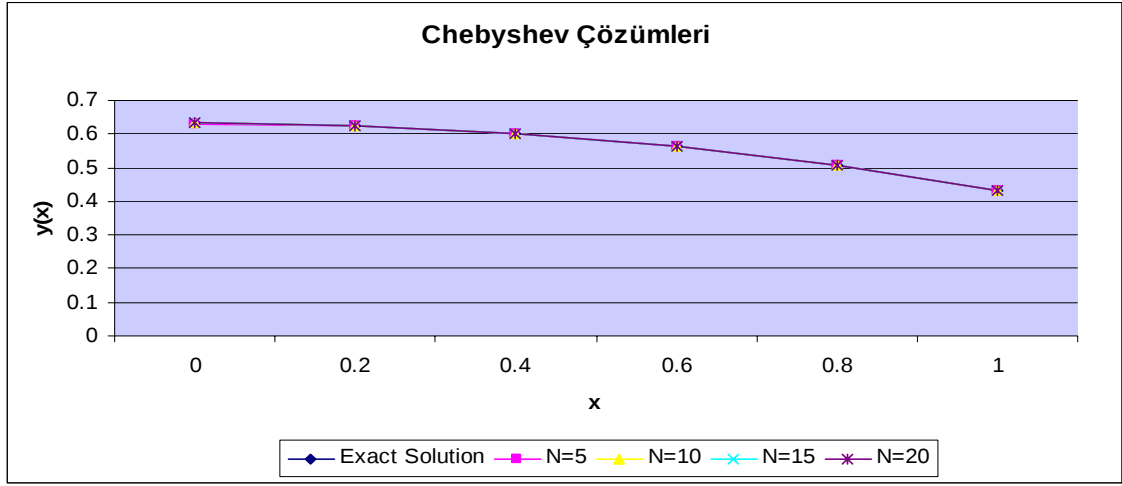
bulunur. Böylece bu katsayılar (4.1)'de yerine yazılarak, probleminin çözümü

$$y_c(x) = 0.63172 - 0.18226.x^2 - 0.004000.x^3 - 0.010835.x^4 - 0.0024650.x^5$$

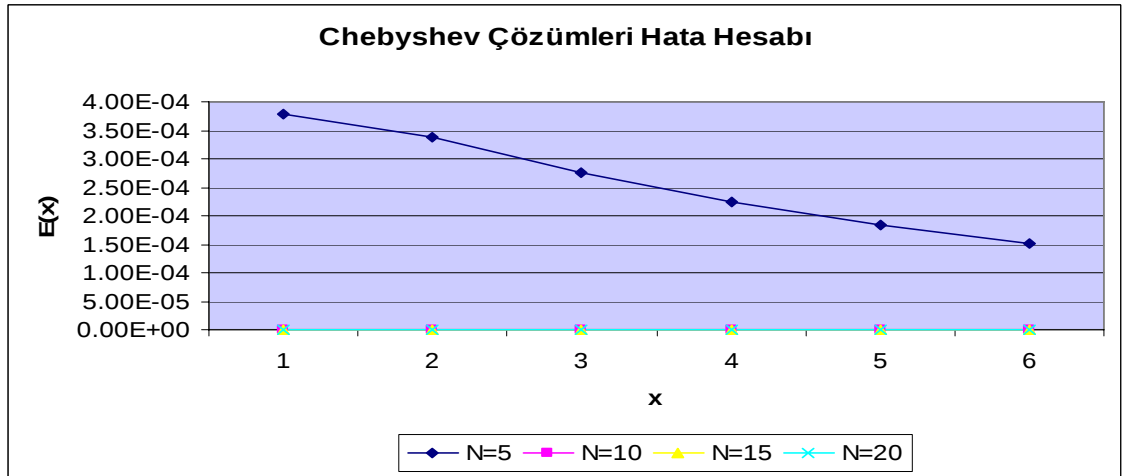
biçiminde elde edilir.

Çizelge 3.2. $N = 5, 10, 15, 20$ için Chebyshev Hata Hesapları

	$N = 5$	$N = 10$	$N = 15$	$N = 20$
x	$y_c(x)$	$y_c(x)$	$y_c(x)$	$y_c(x)$
0.0	3.79E-04	2.58E-11	1.00E-14	6.00E-15
0.2	3.38E-04	2.15E-11	6.00E-15	6.00E-15
0.4	2.76E-04	1.76E-11	9.00E-15	1.00E-15
0.6	2.25E-04	1.44E-11	4.00E-15	4.00E-15
0.8	1.85E-04	1.18E-11	7.00E-15	2.00E-15
1.0	1.51E-04	9.68E-12	6.00E-15	0.00



Şekil 3.3. $y = 1 - e^{-1} \cosh x$ ile $N = 5, 10, 15, 20$ için Bulunan Chebyshev Çözümlerin Karşılaştırılması



Şekil 3.4. $y = 1 - e^{-1} \cosh x$ ile $N = 5, 10, 15, 20$ için Bulunan Chebyshev Çözümlerin Hata Grafiği

Son olarak, aynı şekilde $y(x)$ çözümüne

$$y_b(x) = \sum_{n=0}^N c_n B_n(x) \quad (4.13)$$

kesilmiş (sonlu) $y_b(x)$ Boubaker serisiyle $N=5$ olacak şekilde yaklaşalım. Boubaker sıralama noktalarını, $N=5$ için Kesim 2.3'den,

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = \frac{2}{5}, x_3 = \frac{3}{5}, x_4 = \frac{4}{5}, x_5 = 1$$

olarak alınır. Burada

$$\mathbf{F}_2(x) = -1, \mathbf{F}_1(x) = 0, \mathbf{F}_0(x) = 1, g(x) = 1$$

olduğuna göre, bu fonksiyonların matris formundaki gösterimi (3.3.14) bağıntısından

$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/5 & 1/25 & 1/125 & 1/625 & 1/3125 \\ 1 & 2/5 & 4/25 & 8/125 & 16/625 & 32/3125 \\ 1 & 3/5 & 9/25 & 27/125 & 81/625 & 243/3125 \\ 1 & 4/5 & 16/25 & 64/125 & 256/625 & 1024/3125 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

olarak ifade edilir. Böylece $N = 5$ için (3.3.14) matris denklemi

$$\sum_{k=0}^2 \mathbf{F}_k \mathbf{X} \mathbf{M}^k \mathbf{Z}^T \mathbf{C} = \mathbf{G} \quad (4.14)$$

olur.

Burada $\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{G}, \mathbf{X}, \mathbf{M}, \mathbf{Z}$ matrisleri yukarıda tanımlanan matrislerdir.

(4.2) denkleminde bu matrisler yerlerine yazılıp düzenlenirse, bu taktirde (3.3.16) bağıntısı kullanılarak artırılmış matris

$$[\mathbf{W}_b; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & ; & 1 \\ 1 & 1/5 & 1/25 & -124/125 & -1549/625 & 1351/3125 & ; & 1 \\ 1 & 2/5 & 4/25 & -242/125 & -2434/625 & -418/3125 & ; & 1 \\ 1 & 3/5 & 9/25 & -348/125 & -3869/625 & -8307/3125 & ; & 1 \\ 1 & 4/5 & 16/25 & -436/125 & -5794/625 & -25076/3125 & ; & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & -13 & -17 & ; & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

biçiminde bulunur. Koşullarla ilgili arttırılmış matris ise (3.3.17) denkleminde

$$\bar{\mathbf{U}}_{b,0} = [\mathbf{U}_{b,0}; \lambda_0] = [0, 1, 0, 1, 0, -3 ; 0] \quad (4.16)$$

ve

$$\bar{\mathbf{U}}_{b,1} = [\mathbf{U}_{b,1}; \lambda_1] = [1, 2, 5, 6, 3, -4 ; 0] \quad (4.17)$$

şeklinde elde edilir. (4.15) matrisinin son iki satırının (veya herhangi iki satır) yerine (4.16) ve (4.17) satır matrisleri yerine yazılırsa, (3.3.18) denklemi ile ifade edilen artırılmış matris

$$[\overline{\mathbf{W}}_b; \overline{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & ; & 1 \\ 1 & 1/5 & 1/25 & -124/125 & -1549/625 & 1351/3125 & ; & 1 \\ 1 & 2/5 & 4/25 & -242/125 & -2434/625 & -418/3125 & ; & 1 \\ 1 & 3/5 & 9/25 & -348/125 & -3869/625 & -8307/3125 & ; & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & ; & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 3 & -4 & ; & 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

olarak bulunur. Bunun çözümünden

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1/5 & 1/25 & -124/125 & -1549/625 & 1351/3125 \\ 1 & 2/5 & 4/25 & -242/125 & -2434/625 & -418/3125 \\ 1 & 3/5 & 9/25 & -348/125 & -3869/625 & -8307/3125 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.97049 \\ -0.0017503 \\ -0.18402 \\ -0.0010658 \\ -0.014756 \\ -0.00093869 \end{bmatrix}$$

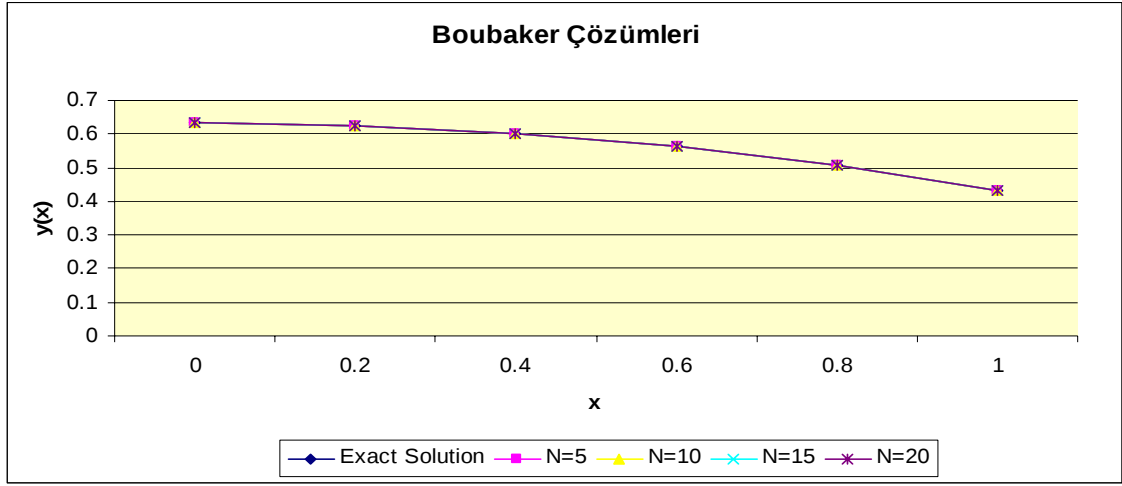
bulunur. Böylece bu katsayılar (4.13)'de yerine yazılarak, probleminin çözümü

$$y_b(x) = 0.63196 - 0.18402.x^2 - 0.00012711.x^3 - 0.014756.x^4 - 0.00093869.x^5$$

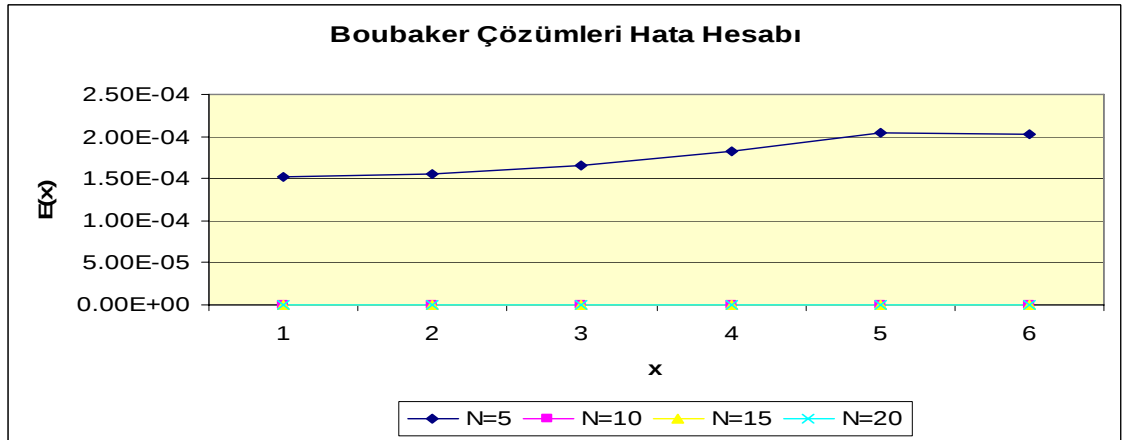
biçiminde elde edilir.

Çizelge 3.3. N = 5, 10, 15, 20 için Boubaker Hata Hesapları

	N = 5	N = 10	N = 15	N = 20
x	$y_b(x)$	$y_b(x)$	$y_b(x)$	$y_b(x)$
0.0	1.52E-04	2.97E-11	1.90E-14	1.00E-15
0.2	1.56E-04	3.03E-11	1.90E-14	4.00E-15
0.4	1.66E-04	3.21E-11	2.30E-14	2.00E-15
0.6	1.82E-04	3.52E-11	2.20E-14	3.00E-15
0.8	2.04E-04	3.97E-11	2.60E-14	1.00E-15
1.0	2.02E-04	4.28E-11	3.10E-14	0.00



Şekil 3.5. $y = 1 - e^{-1} \cosh x$ ile N = 5, 10, 15, 20 için Bulunan Boubaker Çözümlerin Karşılaştırılması



Şekil 3.6. $y = 1 - e^{-1} \cosh x$ ile N = 5, 10, 15, 20 için Bulunan Boubaker Çözümlerin Hata Grafiği

Çizelge 3.4. $N = 5$ için Legendre, Chebyshev ve Boubaker Nümerik Sonuçların Referans Sonuçlarla Karşılaştırması

x	Exact Solution	LL.G.Chambers	Present Method		
			$N = 5$ $y_\ell(x)$	$N = 5$ $y_c(x)$	$N = 5$ $y_b(x)$
0.0	0.63212055	0.64285714	0.63196816	0.63174121	0.63196816
0.2	0.62473841	0.63428571	0.62458260	0.62440004	0.62458260
0.4	0.60229569	0.60857143	0.60213012	0.60201971	0.60213012
0.6	0.56389171	0.56571428	0.56370962	0.56366645	0.56370962
0.8	0.50798517	0.50571428	0.50778127	0.50780021	0.50778127
1.0	0.43233235	0.42857143	0.43213048	0.43218094	0.43213048

5. Sonuç

Sturm Liouville denklemlerini analitiksel çözmek oldukça zordur. O zaman yaklaşık çözümlerin bulunması istenir. Bu amaç için, Legendre, Chebyshev ve Boubaker polinomlarına dayalı sunulan metod yaklaşık çözümü bulmada kullanılır. Üstelik $F_k(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları dönüşebilen Boubaker serilerine genişletildiği zaman bu metodun en iyi avantajını gösterdiği görülür. Bu metodun diğer bir avantajı da, çözümün Legendre, Chebyshev ve Boubaker katsayılarının bilgisayar programları kullanılarak kolayca bulunabilmesidir Bundan dolayı, bu işlem diğer metodlardaki işlemlerden daha hızlı olur.

Sunulan yöntem $[a,b]$ aralığında tanımlanan $F_2(x) = -1$, $F_1(x) = 0$, $F_0(x) = (\lambda - q(x))$, $g(x) = 1$ olacak şekilde

$$\sum_{k=0}^2 F_k(x_i) y^{(k)}(x_i) = g(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N$$

bir diferansiyel denkleminin

$$\sum_{k=0}^1 [a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b)] = 0, \quad j = 0, 1 \quad (3.3)$$

koşulları altında

$$y_b(x) = \sum_{n=0}^N c_n B_n(x), \quad y_c(x) = \sum_{n=0}^N b_n T_n(x), \quad y_\ell(x) = \sum_{n=0}^N a_n P_n(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

formlarındaki Legendre, Chebyshev ve Boubaker polinomlarının terimleri şeklinde çözümleri elde edilir. Bu yöntem, lineer olmayan Volterra ve Fredholm integro-diferansiyel denklem sistemlerine de genişletilebilir.

Ayrıca kısmi diferansiyel ve diferansiyel-cebirsal denklem sistemlerinin de bu yöntem ile çözülebileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Akça, H.** (1986) Sturm-Liouville Arkadaşlığı, Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 2, 143-154.
- Akulenko L. D. and Nesterov S. V.** (2005) High Precision Methods in Eigenvalue Problems, Cilt 6, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, pp.1-18.
- Boyce W. E. and DiPrima R. C.** (2000) Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, John Wiley&Sons, Inc.,New York, pp.621-638.
- Çelik İ.** (1993) Approximate Computation of Higher Sturm–Liouville Eigenvalues, Izmir.
- Duffy D. G.** (1997) Advanced Engineering Mathematics, CRC Press, Boca Raton, pp. 269- 283.
- El-Mikkawy,M.E.A., Cheon, G.S.** (2005) Combinatorial and Hypergeometric Identities via the Legendre Polynomials- a Computational Approach, Appl. Math. Comput., 166, 181-195.
- Fox, L., Parker, I.** (1968) Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis, Clarendon Pres., Oxford.
- Hassani S.** (2002) Mathematical Physics a Modern Introduction to Its Foundations, New York.
- Labiadh, H. and K. Boubaker** (2007) A Sturm-Liouville Shaped Characteristic Differential Equation as a Guide to Establish a Quasi-polynomial Expression to the Boubaker Polynomials . Diff. Eq. and Control Proc., 2, 117-133.

LL. G. Chambers (1994) A Quick Way of Obtaining an Approximate Solution to a Sturm-Liouville Problem, Math. Comp., 62, 577-579.

Özemre A.Y. (1971) Fizikte Matematik Metotlar, T.C. İstanbul Teknik Üniversitesi Kütüphanesi, Cilt: 1, Sayı:166.

Pinchover Y. and Rubinstein J. (2005) An Introduction to Partial Differential Equations, Cambridge University Press, New York, pp.130-159.

Pryce John D. (1993) Numerical Solution of Sturm-Liouville Problems, Clarendon Pres, Oxford, pp.1-29, 281-295.

Oyodum, O.D., Awojoyogbe, O.B., Dada, M.K., Magnuson, J.N. (2009) On the Earliest Definition of the Boubaker Polynomials, Eur. Phys. J. Appl. Phys. 46, 21201–21202.

Spiegel, M.R. (1994) Schaum's Outline of Theory and Problems of Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems.

Snyder, M.A. (1966) Chebyshev Methods in Numerical Approximation, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

Sezer M. (1996) A Method for Approximate Solution of the Second Order Linear Differential Equations in Terms of Taylor Polynomials, Int. J. Math. Educ.Sci. Technol. 27, 6, 821-834.

Watts R. G. (2007) Essentials of Applied Mathematics for Scientists and Engineers, Morgan&Claypool Publishers, California, pp.40-41.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Tuğçe AKKAYA

Baba Adı : Ömer

Ana Adı : Mediha

Doğum Yeri : İzmir

Doğum Tarihi : 1987

EĞİTİM VE AKADEMİK BİLGİLER

Lise : Karşıyaka Gazi Lisesi 2001-2004

Lisans : Celal Bayar Üniv. Fen Edebiyat Fak. Matematik Bölümü
2004-2008

Yabancı Dil : İngilizce