

**T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK MATRİSİ  
VE KLÂSİK DİZİ UZAYLARI**

**Tezi Hazırlayan  
Murat KİRİŞÇİ**

**Tezi Yöneten  
Prof. Dr. Feyzi BAŞAR**

**Matematik Ana Bilim Dalı  
Doktora Tezi**

**Mayıs 2010  
KAYSERİ**



**T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK MATRİSİ  
VE KLÂSİK DİZİ UZAYLARI**

**Tezi Hazırlayan  
Murat KİRİŞCİ**

**Tezi Yöneten  
Prof. Dr. Feyzi BAŞAR**

**Matematik Ana Bilim Dalı  
Doktora Tezi**

**Mayıs 2010  
KAYSERİ**

Prof. Dr. Feyzi BAŞAR danışmanlığında **Murat KİRİŞÇİ** tarafından hazırlanan “**Genelleştirilmiş Fark Matrisi ve Klasik Dizi Uzayları**” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora** tezi olarak kabul edilmiştir.

27.05.2010  
(Tez Savunma Sınav Tarihi)

**JÜRİ:**

Başkan: Prof. Dr. Osman MUCUK

Üye : Prof. Dr. Feyzi BAŞAR

Üye : Prof. Dr. Mehmet BARAN

Üye : Doç. Dr. Bilal ALTAY

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdalcabbar SÖNMEZ

**ONAY:**

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 29/06/2010 tarih ve 2010-621-06 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

29/06/2010



Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ  
Enstitü Müdürü

**TEŞEKKÜR**

“B(r,s) Genelleştirilmiş Fark Matrisinin Etki Alanı İle Türetilmiş Yeni Dizi Uzayları” konulu tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde, sonuçlandırılmasında ve sonuçlarının değerlendirilmesinde maddi ve manevi destek ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Prof. Dr. Feyzi BAŞAR’a teşekkür ederim.

Ayrıca tez çalışmamın başından tamamlanmasına kadar öneri, destek ve yardımlarını esirgemeyen İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi öğretim üyelerinden sayın Doç. Dr. Bilal ALTAY’a; resmi işlemlerimde bana yardımcı olan sayın Yrd. Doç. Dr. Abdülcabbar SÖNMEZ ve sayın Yrd. Doç. Dr. Muammer KULA’ya teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Eğitim hayatımın bugünlere gelmesi için büyük fedakârlıklar gösteren, maddi ve manevi her tür desteği veren aileme, her tür zorlukta yanımda olan eşime ve çocuklarıma da sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

# GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK MATRİSİ VE KLÂSİK DİZİ UZAYLARI

**Murat KİRİŐCI**

**Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü**

**Doktora Tezi, Mayıs 2010**

**Tez DanıŐmanı: Prof. Dr. Feyzi BAŞAR**

## ÖZET

Bu çalışmada; sınırlı, yakınsak, sıfıra yakınsak olan ve  $p$ -kuvvetten mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzaylarının  $B(r,s)$  genelleştirilmiş fark matrisi altındaki etki alanı ile yeni dizi uzayları tanımlanmaktadır. Daha sonra tanımlanan bu yeni dizi uzaylarının beta- ve gama- dualleri tayin edilecek ve Schauder tabanları bulunacaktır. Ayrıca bu uzayların bazı topolojik özellikleri incelenecektir. Son olarak elde edilen bu yeni dizi uzaylarından klasik dizi uzaylarına ve bu yeni dizi uzaylarından kendilerine matris sınıfları karakterize edilecektir.

**Anahtar Kelimeler:** Sonsuz matrislerin etki alanı, genelleştirilmiş fark matrisi, beta-dual, gama-dual, Schauder tabanı ve matris dönüşümü.

# GENERALIZED DIFFERENCE MATRIX AND CLASSICAL SEQUENCE SPACES

**Murat KİRİŞCİ**

**Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences**

**Ph. D. Thesis, May 2010**

**Thesis Supervisor: Prof. Dr. Feyzi BAŞAR**

## ABSTRACT

In the present thesis, the spaces obtained as a domain of the generalized difference matrix  $B(r,s)$  in the classical spaces of bounded, convergent, null and absolutely  $p$ -summable sequences are introduced. Furthermore, the beta- and gamma- duals of these spaces are determined and the Schauder bases for the convergent, null and absolutely  $p$ -summable sequences with respect to the generalized difference matrix  $B(r,s)$  are given and some topological properties of these spaces are examined. Finally, we characterize the matrix classes from new sequence spaces to classical sequence spaces and from new sequence spaces to itself.

**Keywords:** Matrix domain of a sequence space, generalized difference matrix, beta-dual, gamma-duals, Schauder bases and matrix transformations.

## İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY.....	i
TEŞEKKÜR.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
SİMGELER.....	v
1.BÖLÜM	
GİRİŞ.....	1
2. BÖLÜM	
BAZI ÜÇGEN MATRİSLERİN DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDEKİ ETKİ ALANLARI.....	8
3. BÖLÜM	
KLÂSİK DİZİ UZAYLARININ $B(r,s)$ GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK MATRİSİ ALTINDAKİ ETKİ ALANLARI.....	24
4. BÖLÜM	
$B(r,s)$ GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK MATRİSİ İLE TANIMLANAN DİZİ UZAYLARIYLA İLGİLİ BAZI MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ.....	37
KAYNAKLAR.....	45
ÖZGEÇMİŞ.....	50

## SİMGELER

$w$	Kompleks terimli bütün dizilerin vektör uzayı
$R$	Reel sayılar cümlesi
$N$	Doğal sayılar cümlesi
$C$	Kompleks sayılar cümlesi
$\ell_\infty$	Kompleks terimli sınırlı dizilerin uzayı
$c$	Kompleks terimli yakınsak dizilerin uzayı
$c_0$	Kompleks terimli sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
$\ell_p$	p-mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
$\ell_1$	Mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
$f$	Hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı
$bs$	Sınırlı serilerin uzayı
$cs$	Yakınsak serilerin uzayı
$bv$	Sınırlı salınımlı dizilerin uzayı
$bv_0$	$bv$ ve $c_0$ dizi uzaylarının kesişiminden ibaret olan dizilerin uzayı
$X^*$	X uzayının sürekli duali
$\Delta$	Fark operatörü
$\lambda_A$	A sonsuz matrisinin bir $\lambda$ dizi uzayı üzerindeki etki alanı
$E^r$	$r$ .mertebeden Euler ortalaması
$(R, t_n)$	$(t_n)$ dizisine karşılık gelen Riesz ortalaması
$(N, t_n)$	$(t_n)$ dizisine karşılık gelen Nörlund ortalaması
$(C, 1)$	1.mertebeden Cesàro ortalaması

# 1. BÖLÜM

## GİRİŞ

Bu bölümde; çalışmanın tamamı için gerekli temel tanım, teorem ve eşitsizlikleri vereceğiz.

**Tanım 1.1.**  $X$ , boş olmayan bir küme ve  $C$  de kompleks cisim olsun. Bu durumda;

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

ve

$$\cdot : C \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları, eğer her  $x, y, z \in X$  ve  $\lambda, \mu \in C$  için

$$L1) \quad x + y = y + x,$$

$$L2) \quad (x + y) + z = x + (y + z),$$

$$L3) \quad x + \theta = x \text{ olacak şekilde bir } \theta \in X \text{ mevcut,}$$

$$L4) \quad x + (-x) = \theta \text{ olacak şekilde bir } -x \in X \text{ mevcut,}$$

$$L5) \quad 1.x = x,$$

$$L6) \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y,$$

$$L7) \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x,$$

$$L8) \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$$

şartlarını sağlarsa,  $X$  kümesine  $C$  cismi üzerinde bir *lineer uzay* denir.

$X$ ,  $\mathbf{C}$  cismi üzerinde bir lineer uzay ve  $Y \subset X$  ise,  $Y$  cümlesinin de  $X$  cümlesi üzerinde tanımlanan  $+$  ve  $\cdot$  işlemleri altında lineer uzay olması için her  $\lambda \in \mathbf{C}$  ve  $y_1, y_2 \in Y$  bakımından  $\lambda y_1 + y_2 \in Y$  bulunması yeterlidir.

**Tanım 1.2.**  $X$  boş olmayan bir cümle ve  $d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$  bir fonksiyon olsun. Her  $x, y, z \in X$  için,

$$\text{M1)} \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$\text{M2)} \quad d(x,y) = d(y,x),$$

$$\text{M3)} \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

şartlarını sağlayan  $d$  fonksiyonuna  $X$  üzerinde bir **metrik** ve  $(X, d)$  ikilisine de bir **metrik uzay** denir.

**Tanım 1.3.**  $X$  bir lineer uzay ve  $g: X \rightarrow \mathbf{R}$  fonksiyonu, her  $x, y \in X$  vektörü ve  $\lambda_n \in \mathbf{C}$  skalarları için;

$$\text{P1)} \quad g(\theta) = 0,$$

$$\text{P2)} \quad g(x) = g(-x),$$

$$\text{P3)} \quad g(x+y) \leq g(x) + g(y),$$

$$\text{P4)} \quad \lambda_n \rightarrow \lambda \text{ ve } x_n \rightarrow x \text{ olması } g(\lambda_n x_n - \lambda x) \rightarrow 0 \text{ olmasını gerektirir}$$

şartlarını sağlıyorsa,  $g$  fonksiyonuna  $X$  üzerinde bir **paranorm** ve  $(X, g)$  ikilisine de bir **paranormlu uzay** denir.

**Tanım 1.4.**  $X$  bir lineer uzay ve  $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbf{R}$  olsun. Eğer  $x, y \in X$  vektörü ve her  $\lambda$  skaları için;

$$\text{N1)} \quad \| \theta \| = 0,$$

$$\text{N2)} \quad \| \lambda x \| = | \lambda | \cdot \| x \|,$$

$$\text{N3)} \quad \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$$

şartları sağlanıyorsa,  $\| \cdot \|$  fonksiyonuna  $X$  üzerinde bir **yarı-norm** ve  $(X, \| \cdot \|)$  ikilisine de bir **yarı-normlu uzay** denir.

Eğer  $X$  lineer uzayı üzerinde (N2) ve (N3) aksiyomlarıyla

$$\text{N1)'} \quad \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

aksiyomu sağlanıyorsa o zaman  $\| \cdot \|$  fonksiyonuna bir **norm** ve  $(X, \| \cdot \|)$  ikilisine de bir **normlu uzay** denir.

Artık, bir metrik uzaydaki Cauchy dizisi kavramını tanımlayabiliriz:

**Tanım 1.5.**  $(X, d)$  bir metrik uzay ve  $(x_n)$  de  $X$ 'deki noktaların bir dizisi olsun. Bu durumda; her  $\varepsilon > 0$  ve  $n, m \geq n_0$  olan bütün  $n, m \in \mathbb{N}$ 'ler için  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$  kalacak şekilde bir  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  bulunabiliyorsa o zaman “ $(x_n)$  dizisi  $(X, d)$  metrik uzayında bir **Cauchy dizisidir**” denir.

**Tanım 1.6.** Bir  $(X, d)$  metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise,  $X$  uzayına **tam metrik uzay** denir. Eğer  $X$  uzayı üzerindeki metrik bir normdan elde edilmiş ise, tam metrik uzaya **Banach uzayı** denir.

**Tanım 1.7.** Bir  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi verilsin. Bu durumda; bütün  $n \in \mathbb{N}$ 'ler için  $(Px)_n = x_{n+1}$  olacak şekilde  $w$  üzerinde tanımlı  $P$  operatörüne **öteleme operatörü** denir.

**Tanım 1.8.**  $L(Px) = L(x)$  ve  $L(e) = 1$  olacak şekildeki  $\ell_\infty$  üzerinde negatif olmayan bir  $L$  lineer fonksiyoneline bir **Banach limiti** denir.

**Tanım 1.9.**  $x = (x_k) \in \ell_\infty$  olsun.  $x$  dizisinin bütün Banach limitleri  $\alpha$  ise, bu durumda;  $x$  dizisi,  $\alpha$  genelleştirilmiş limitine **hemen hemen yakınsaktır** denir ve  $f\text{-}\lim x_k = \alpha$  şeklinde gösterilir.

$P^i$ ,  $P$  operatörünün kendisiyle  $i$  defa bileşkesini gösterebilir. Bu durumda;  $x = (x_k)$  dizisi için bir  $\{t_{mn}(x)\}$  çift dizisini,

$$t_{mn}(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m (P^i x)_n \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

eşitliği ile tanımlayalım. Lorentz, [42] numaralı çalışmada; “ $f\text{-}\lim x_k = \alpha$  olması için gerek ve yeter şart,  $\lim_{m \rightarrow \infty} t_{mn}(x) = \alpha$  ( $n$ 'ye düzgün olarak) olmasıdır” çift

gerektirmesini ispatladı. Yakınsak bir dizinin, alışılmış ve genelleştirilmiş limitleri eşit olacak şekilde hemen hemen yakınsak olduğu iyi bilinmektedir.

**Tanım 1.10.**  $w$  ile kompleks terimli bütün dizilerin vektör uzayını gösterelim. Bu durumda;  $w$  uzayının her alt uzayı, bir **dizi uzayı** olarak adlandırılır.

Aşağıda yaygın olarak kullanılan bazı dizi uzayları verilmiştir:

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

$$c = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_k x_k \text{ mevcut} \right\}$$

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_k x_k = 0 \right\}$$

$$\ell_p = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_k |x_k|^p < \infty, 1 \leq p < \infty \right\}$$

$$bs = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_n \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| < \infty \right\}$$

$$cs = \left\{ x = (x_k) \in w : \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) \in c \right\}$$

$$bv_p = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_k |x_k - x_{k-1}|^p < \infty \right\}$$

Ayrıca,  $bv$  ile  $(x_k - x_{k+1}) \in \ell_1$  olan bütün  $(x_k)$  sınırlı salınımlı dizilerinin uzayı ve  $bv_0$  ile de  $bv$  ve  $c_0$  dizi uzaylarının arakesitinden elde edilen dizi uzayı kast edilmektedir. Yani,

$$bv = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_k |x_k - x_{k+1}| < \infty \right\}, \quad bv_0 = bv \cap c_0.$$

**Tanım 1.11.**  $\lambda$ , normlu bir dizi uzayı olsun.  $\lambda$  dizi uzayı; her  $x \in \lambda$  için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - (\alpha_0 b_0 + \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n)\| = 0$$

olacak şekilde bir  $(b_n)$  dizisi ihtiva ediyorsa, bu durumda  $(b_n)$  dizisine  $\lambda$  dizi uzayı için bir **Schauder tabanıdır** ( ya da kısaca taban) denir.

**Tanım 1.12.**  $C$ , kompleks sayılar cümlesi ve  $N$  de doğal sayılar cümlesi olsun. Bütün  $i \in N$ ler için  $\lambda$  dizi uzayı üzerinde  $p_i(x) = x_i$  ile tanımlanan  $p_i : \lambda \rightarrow C$  koordinat dönüşümü sürekli ise o zaman  $\lambda$  dizi uzayına bir **K-uzayı** denir.

**Tanım 1.13.**  $\lambda$ , bir K-uzayı olsun. Üstelik,  $\lambda$  tam lineer metrik uzay ise bu uzaya bir **FK-uzayı** denir.

**Tanım 1.14.** Bir FK-uzayı, kendisine ait topoloji ile normlanabiliriyorsa bu uzaya **BK-uzayı** denir.

**Tanım 1.15.**  $X$ , bir Banach uzayı ve

$$t_k(z) = \frac{1}{k+1}(z_0 + z_1 + \dots + z_k); \quad (k \in N)$$

olsun.  $X$  uzayındaki her sınırlı  $(x_n)$  dizisi,  $\{t_k(z)\}$  dizisi  $X$ 'deki normla yakınsak olacak şekilde bir  $(z_n)$  altdizisine sahip ise  $X$  uzayına “**Banach – Saks özelliğine** sahiptir” denir.

Verilen bir  $(x_n) \subset X$  zayıf sıfır dizisi için,  $\{t_k(z)\}$  dizisi sıfıra kuvvetli yakınsak olacak şekilde  $(x_n)$  dizisinin  $(z_n)$  altdizisi mevcutsa  $X$  uzayına **zayıf Banach–Saks özelliğine** sahiptir denir.

**Tanım 1.16.**  $X$  bir Banach uzayı olsun.  $X$  uzayının zayıf kompakt konveks alt cümleleri üzerinde tanımlı genişlemeyen her self dönüşüm sabit bir noktaya sahipse  $X$  uzayına **zayıf sabit nokta özelliğine** sahiptir denir.

**Tanım 1.17.**  $\lambda$ , bir BK-uzayı olsun ve  $x^{[n]} = \sum_{k=0}^n x_k e^{(k)}$  da  $x = (x_k)$  dizisinin

$n$ .kısımını gösterebilir.  $\lambda \supset \phi$  olmak üzere,  $x = (x_k)$  dizisi;

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x^{[n]}\|_{\lambda} = 0$  oluyorsa **AK (abschnittskonvergenz) özelliğine** sahiptir,

- $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x^{[n]}\|_\lambda < \infty$  oluyorsa **AB** (abschnittsbeschränktheit) **özelliğine** sahiptir,
- $x \in \bar{\phi}$  ise **AD** (abschnittsdichte) **özelliğine** sahiptir,
- $e^{(k)}$ , her  $k \in \mathbb{N}$  için  $k$ .terimi 1 ve diğer bütün terimleri 0 olan dizi olmak üzere  $\{x_k e^{(k)}\}$  cümlesi  $\lambda$  uzayında sınırlı ise **KB** (koordinatenweise beschränkt) **özelliğine** sahiptir

denir.

**Tanım 1.18.** Bir  $\lambda$  dizi uzayının **solidlik** özelliğine sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart;

$$\tilde{\lambda} = \{(u_k) \in w : \text{her } k \in \mathbb{N} \text{ için } |u_k| \leq |x_k| \text{ olacak şekilde } \exists (x_k) \in \lambda\} \subset \lambda$$

kapsamasının geçerli olmasıdır.

**Tanım 1.19.**  $\lambda$ , bir dizi uzayı ve  $J, N$  cümlesinin bir dizisi olsun. Bu durumda;

$$\lambda_J = \{x = (x_k) : \text{her } n_i \in J \text{ için } x_i = y_{n_i} \text{ olan bir } y = (y_i) \in \lambda \text{ mevcuttur}\}$$

cümlesine,  $\lambda$  uzayının **J-basamak uzayı** veya **J-kesit alt uzayı** denir.

$x_J \in \lambda_J$  ise,  $\tilde{x}_J$  dizisi  $x_J$  dizisinin kanonik resmi olsun. Burada;  $\tilde{x}_J$  dizisi,  $J$ 'deki indisleri üzerinde  $x_J$  dizisiyle aynı ve diğer yerlerde sıfır olan dizidir.  $\lambda$  uzayı, bütün basamak altuzayların kanonik görüntülerini ihtiva ediyorsa bu durumda  $\lambda$  uzayı **monotondur** denir.

Toplanabilme, daha çok analiz ve uygulamalı matematikte kullanılan bir teodir. Toplanabilmenin önemli yükselişi 19. yüzyılın sonlarında başlamıştır. Sistematik olarak sonsuz serileri kullanan ilk matematikçiler Newton ve Leibniz'dir. Yakınsak seriler teorisi ise, ilk defa 1821 yılında Cauchy tarafından yazılan "Algebraic Analysis" isimli kitapta ortaya çıkmıştır. Daha sonra 1826 yılında Abel bu yakınsaklık teorisini daha da geliştirmiştir. Iraksak serileri kullanmada matematikçiler genel olarak istekli olmamalarına rağmen, Analiz inkişaf ettikçe bu

konuya istekleri artmış ve yaptıkları işlemler bağımsız elde edilebilecek birçok önemli sonuçlar doğurmuştur.

Toplanabilme teorisinde, genel olarak dizi uzayları ile ilgili problemler incelenmektedir. Toplanabilme teorisinde dizi uzayları ile ilgili olarak yapılan nitelikli çalışmalar;

- (i) Yeni bir dizi uzayı inşa etmek,
- (ii) Bu uzayın, üzerinde tanımlanan bir norma veya paranorma göre tamlığını göstermek,
- (iii) Bu uzayla, bilinen dizi uzayları arasındaki kapsama bağıntılarını incelemek,
- (iv) Varsa uzayın Schauder tabanını belirlemek,
- (v) Uzayın  $\alpha$ -,  $\beta$ - ve  $\gamma$ -duallerini ve sürekli dualini hesaplamak,
- (vi) Bu uzaydan, bilinen dizi uzaylarına ve bilinen uzaylardan, bu uzaya matris dönüşümlerini karakterize etmek

gibi problemlerin bir veya birkaçını ele alarak çözüme kavuşturur.

## 2. BÖLÜM

### BAZI ÜÇGEN MATRİSLERİN DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDEKİ ETKİ ALANLARI

Bu bölümde; bir sonsuz matrisin, bir dizi uzayı üzerindeki etki alanı kavramını tarif ettikten sonra bu konuda yapılan çalışmalardan bahs edecek, ilgili literatürü vereceğiz.

Önce, bir dizinin bir sonsuz matrisle elde edilen dönüşüm dizisini tanımlayalım.

**Tanım 2.1.** Bir  $\lambda$  dizi uzayındaki bir  $x=(x_k)$  dizisinin, bir  $A=(a_{nk})$  sonsuz matrisi altındaki  $Ax=\{(Ax)_n\}$  **dönüşüm dizisi**,

$$(2.1) \quad \{(Ax)_n\} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \right)_{n=0}^{\infty}$$

olarak tanımlanır. Buradan,  $Ax$  dönüşüm dizisinin mevcudiyetinin (2.1) eşitliğinin sağ tarafındaki sonsuz serilerin her bir sabit  $n \in \mathbb{N}$  için yakınsaklığını yani  $A$  sonsuz matrisinin bütün satır vektörlerinin  $\lambda$  uzayının  $\beta$ -dualinde yatması gerektiği sonucunu gerektirdiği anlaşılır.  $\lambda$  ve  $\mu$ , iki dizi uzayı olsun. Bir  $A=(a_{nk})$  sonsuz matrisini göz önüne alalım. Eğer her  $x \in \lambda$  için  $Ax$  mevcut ve  $Ax \in \mu$  ise o zaman  $A: \lambda \rightarrow \mu$  yazılır.  $\lambda$  dizi uzayındaki bütün dizileri  $\mu$  dizi uzayındaki dizilere taşıyan böyle bütün matrislerin ailesi  $(\lambda : \mu)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.2.** Bir  $A=(a_{nk})$  sonsuz matrisinin bir  $\lambda$  dizi uzayı üzerindeki  $\lambda_A$  **etki alanı**,

$$(2.2.) \quad \lambda_A = \{x = (x_k) \in w : Ax \text{ mevcut ve } \in \lambda\}$$

cümlesiyle tarif edilir.

$\lambda_A$  cümlesinin  $\lambda$  bir dizi uzayı iken, dizilerin koordinatsal toplama ve skalarla çarpma işlemleriyle bir dizi uzayı teşkil ettiği ve  $A$ , tersi mevcut bir matris veya üçgen bir matris iken de  $\lambda_A$  ve  $\lambda$  uzaylarının lineer olarak izomorfik oldukları bilinmektedir. Bunlara ilâveten,  $\lambda$  uzayı bir Schauder tabanına haiz iken  $\lambda_A$  uzayının da bir Schauder tabana sahip bulunduğu bilinmektedir, (bkz. [37, Remark 2.4]).

Birçok Matematikçi bu alanda çalışmalar yapmıştır. Bu konudaki çalışmaların bazıları aşağıdaki tabloda gösterilmiştir:

$\lambda$ , bir dizi uzayı ve  $A$  sonsuz bir matris olsun.

$\lambda$	$A$	$\lambda_A$	Kaynak
$l_p$	$N_q$	$(l_p)_{Nq}$	[67]
$l_p, (1 \leq p \leq \infty)$	$C$	$X_p, X_\infty$	[59]
$X_p, (1 \leq p \leq \infty)$	$\Delta^m$	$C_p(\Delta^m), C_\infty(\Delta^m)$	[31]
$c_0, c, l_\infty$	$R^q$	$(\bar{N}, q)_0, (\bar{N}, q), (\bar{N}, q)_\infty$	[49]
$c_0, c, l_\infty$	$\Delta^{(1)}$	$c_0(\Delta), c(\Delta), l_\infty(\Delta)$	[40]
$c_0, c, l_\infty$	$\Delta^2$	$c_0(\Delta^2), c(\Delta^2), l_\infty(\Delta^2)$	[30]
$c_0, c, l_\infty$	$u\Delta^2$	$c_0(u; \Delta^2), c(u; \Delta^2), l_\infty(u; \Delta^2)$	[56]
$c_0, c, l_p$	$G(u, v)$	$Z(u, v; c_0), Z(u, v; c), Z(u, v; l_p)$	[50]
$c_0, c$	$C$	$\tilde{c}_0, \tilde{c}$	[65]
$c_0, c$	$E^r$	$e_0^r, e_c^r$	[4]
$c_0, c$	$G(u, v)$	$(c_0)_{G(u, v)}, (c)_{G(u, v)}$	[62]
$c_0, c$	$A_1^r$	$a_0^r, a_c^r$	[12]

$l_p, (1 \leq p \leq \infty)$	$A_1^r$	$a_p^r, a_\infty^r$	[15]
$l_p, (1 \leq p \leq \infty)$	$E^r$	$e_p^r, e_\infty^r$	[6, 57]
$a_0^r, a_c^r$	$\Delta^1$	$a_0^r(\Delta), a_c^r(\Delta)$	[14]
$l_p, (1 \leq p < \infty)$	$G(u, v)$	$l_A^p$	[39]
$l_p, (1 \leq p < \infty)$	$\Delta^{(1)}$	$bv_p$	[21, 29]
$l_p, (0 < p < 1)$	$\Delta^{(1)}$	$bv_p$	[10]
$c_0, c, l_\infty$	$\Delta^m$	$c_0(\Delta^m), c(\Delta^m), l_\infty(\Delta^m)$	[32, 28]
$l_p, (1 \leq p < \infty)$	$\Delta^{(m)}$	$l_p(\Delta^{(m)})$	[2]
$c_0, c, l_\infty$	$\Delta^{(m)}$	$c_0(\Delta^{(m)}), c(\Delta^{(m)}), l_\infty(\Delta^{(m)})$	[54]
$e_0^r, e_c^r$	$\Delta^{(m)}$	$e_0^r(\Delta^{(m)}), e_c^r(\Delta^{(m)})$	[60]
$l_\infty(p)$	$S$	$bs(p)$	[17, 20]
$l(p)$	$A_u^r$	$a^r(u, p)$	[16]
$l(p)$	$S$	$\overline{l(p)}$	[27]
$c_0(p), c(p), l_\infty(p)$	$\Delta$	$\Delta c_0(p), \Delta c(p), \Delta l_\infty(p)$	[1]
$c_0(p), c(p), l_\infty(p)$	$u\Delta$	$c_0(u, \Delta, p), c(u, \Delta, p), l_\infty(u, \Delta, p)$	[11]
$c_0(p), c(p), l_\infty(p)$	$u\Delta^2$	$c_0(u, \Delta^2, p), c(u, \Delta^2, p), l_\infty(u, \Delta^2, p)$	[25]
$c_0(p), c(p), l_\infty(p)$	$G(u, v)$	$C_0(u, v, p), c(u, v, p), l_\infty(u, v, p)$	[7]
$l(p)$	$G(u, v)$	$l(u, v, p)$	[8]
$l(p), l_\infty(p)$	$A^z$	$bv(z, p), bv_\infty(z, p)$	[22]
$c_0(u, p), c(u, p)$	$A_1^r$	$a_0^r(u, p), a_c^r(u, p)$	[13]
$l(p)$	$R^t$	$r^t(p)$	[3]
$c_0(p), c(p), l_\infty(p)$	$R^t$	$r_0^t(p), r_c^t(p), r_\infty^t(p)$	[5]

$c_0(p), c(p), \ell_\infty(p)$	$\Delta^m$	$\Delta^m c_0(p), \Delta^m c(p), \Delta^m l_\infty(p)$	[33]
$c_0(p), c(p), \ell_\infty(p)$	$u\Delta^m$	$\Delta_u^{(m)} c_0(p), \Delta_u^{(m)} c(p), \Delta_u^{(m)} l_\infty(p)$	[52]
$f$	$B(r,s)$	$\hat{f}$	[23]

Bir sonsuz matrisin bir dizi uzayı üzerindeki etki alanı kavramını kullanarak literatürde mevcut normlu veya paranormlu dizi uzaylarını, özel limitleme metodlarına karşılık gelen sonsuz matrisler yardımıyla onları ihtiva eden veya onlar tarafından ihtiva edilen yeni dizi uzaylarına dönüştürebiliriz. Bu durum, genel olarak seçilen limitleme metoduna bağlıdır. Gerçekten de  $k, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$  için

$$s_{nk} = \begin{cases} 1, & (0 \leq k \leq n), \\ 0, & (k > n), \end{cases} \text{ ve } t_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k}, & (n-1 \leq k \leq n), \\ 0, & (0 \leq k \leq n-2 \text{ veya } k > n), \end{cases}$$

olarak tarif edilen  $S=(s_{nk})$  ve  $T=(t_{nk})$  üçgen matrisleri göz önüne alındığında

$$cs = c_s \subset c \quad \text{ve} \quad bs = (\ell_\infty)_s \subset \ell_\infty$$

kapsamalarının geçerliliği kolayca görülür. Bunun gibi,

$$c_T = c(\Delta) \supset c \quad \text{ve} \quad (\ell_\infty)_T = \ell_\infty(\Delta) \supset \ell_\infty$$

kapsamaları da mevcut ve kesin olarak geçerlidir.

Hâlbuki,  $\lambda$  ve  $\lambda_A$  uzayları daima birbirini kapsamak zorunda değildirler. Gerçekten de  $z = (z_k) = \{(-1)^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  olmak üzere  $\lambda = c_0 \oplus \text{span}\{z = (z_k)\}$  ile  $\lambda$  dizi uzayını ve  $n$ .satırı  $A_n = (-1)^n e^{(n)}$  olan  $A$  sonsuz matrisini tarif ettiğimiz zaman  $s \in c_0$  ve  $\alpha \in \mathbb{C}$  iken “ $x \in \lambda$  ancak ve ancak  $x = s + \alpha z$ ” çift gerektirmesinin sağlandığı ve

$$Ae = z \in \lambda \quad \text{fakat} \quad Az = e \notin \lambda$$

bulunduğu, yani

$$z \in \lambda - \lambda_A \quad \text{ve} \quad e \in \lambda_A - \lambda$$

olduğu anlaşılır. Burada  $e^{(n)}$  ve  $e$ , sırasıyla birim matrisin  $n$ .sütun vektörünü ve bütün terimleri 1 olan diziyi göstermektedir.

$\ell_\infty$ ,  $c$ ,  $c_0$  ve  $\ell_p$  ile sırasıyla kompleks terimli sınırlı, yakınsak, sifira yakınsak dizilerin ve  $p$ . kuvvetten mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin normlu klâsik dizi uzaylarını gösterelim.  $C=(c_{nk})$  matrisi,

$$c_{nk} = \begin{cases} 1/(1+n), & (0 \leq k \leq n), \\ 0, & (k > n), \end{cases}$$

olarak tarif edilen 1.mertebeden Cesàro ortalamasını gösterebiliriz. Bu durumda;

$$(\ell_\infty)_C = X_\infty \quad \text{ve} \quad (\ell_p)_C = X_p, \quad (1 \leq p < \infty)$$

uzayları “mutlak olmayan tipten Cesàro dizi uzayları” diye adlandırılmış ve Ng ve Lee tarafından [59] numaralı kaynakta incelenmişlerdir. Daha sonra,

$$c_C = \tilde{c} \quad \text{ve} \quad (c_0)_C = \tilde{c}_0$$

mutlak olmayan tipten Cesàro dizi uzayları da Şengönül ve Başar tarafından [65] numaralı kaynakta incelenmiştir. Wang da [67] numaralı kaynakta Nörlund ortalamasını kullanarak  $(\ell_\infty)_{Nq}$  ve  $(\ell_p)_{Nq}$  uzaylarını inşa etmiş ve yeni teşkil ettiği bu dizi uzaylarının çeşitli özelliklerini incelemiştir.

Başar tarafından [17] numaralı kaynakta tanımlanan  $bs$  uzayına karşılık gelen  $bs(p)$  paranormlu uzayı ise Başar ve Altay tarafından [20] numaralı kaynakta esaslı olarak ele alınmıştır. Bunlara ilâve olarak  $c$  ve  $c_0$  normlu klâsik dizi uzaylarının  $A^r$  matrisi altındaki  $a_c^r$  ve  $a_0^r$  etki alanları, Aydın ve Başar tarafından [12] numaralı kaynakta ve  $\ell_\infty$  ile  $\ell_p$  normlu klâsik dizi uzaylarının  $A^r$  matrisi altındaki  $a_\infty^r$  ve  $a_p^r$  etki alanları, Aydın ve Başar tarafından [15] numaralı kaynakta esaslı bir şekilde incelenmiştir.  $a_c^r$ ,  $a_0^r$ ,  $a_\infty^r$  ve  $a_p^r$  normlu uzaylarına karşılık gelen paranormlu uzaylar da yine Aydın ve Başar tarafından [13,14,16] numaralı kaynaklarda çalışılmıştır. Malkowsky, Riesz ortalamasını kullanarak [49] numaralı kaynakta  $(c_0)_{Rt}=r_0^t$ ,  $(c)_{Rt}=r^t$ ,  $(\ell_\infty)_{Rt}=r_\infty^t$ , uzaylarını inşa etmiştir. Altay ve Başar da Riesz ortalamasını kullanarak [3] numaralı kaynakta  $[\ell(p)]_{Rt}=r^t(p)$  uzayını inşa etmiştir. Yine Altay ve Başar;  $c_0(p)$ ,  $c(p)$  ve  $\ell_\infty(p)$  paranormlu Maddox uzaylarının Riesz ortalaması altındaki etki alanlarını [5] numaralı kaynakta incelemiş ve tanımlanan

Riesz dizi uzaylarının Maddox uzaylarına lineer olarak izomorfik olduğu gösterilmiştir. Bu uzayların  $\alpha$ -,  $\beta$ - ve  $\gamma$ -dualleri hesaplanmış ve  $(c_0)_{Rt} = r_0'$ ,  $(c)_{Rt} = r'$  normlu uzaylarının tabanları verilmiştir. Ayrıca Riesz dizi uzaylarından Maddox dizi uzaylarına matris dönüşümleri karakterize edilmiştir. Altay, Başar ve Mursaleen,  $0 < r < 1$  olmak üzere  $r$ .mertebeden  $E^r$  Euler ortalamasını kullanarak, inşa ettikleri  $(\ell_p)_{E^r} = e_p^r$  ( $1 \leq p < \infty$ ) ve  $(\ell_\infty)_{E^r} = e_\infty^r$  dizi uzaylarının özelliklerini izomorfizm yardımıyla [6] numaralı kaynakta incelemişlerdir. Yine Mursaleen, Başar ve Altay, [6] numaralı kaynakta tanımladıkları Euler dizi uzaylarıyla ilgili matris dönüşümlerinin karakterizasyonlarını verip, bu uzayların  $p$  tipten Banach Saks özelliği, zayıf sabit nokta özelliği, konvekslik gibi bazı topolojik ve geometrik özelliklerini [57] numaralı kaynakta incelemişlerdir.

$\ell_\infty$ ,  $c$  ve  $c_0$  normlu klâsik dizi uzaylarının  $T$  matrisi altındaki etki alanları, “*fark dizi uzayları*” olarak isimlendirilmiş ve Kızmaz tarafından [40] numaralı kaynakta ele alınmıştır. Kızmaz’ın [40] numaralı kaynakta tanımladığı fark dizi uzayları,

$$\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normuyla Banach uzaylarıdır. Yine Kızmaz [40];  $E$ ,  $l_\infty$ ,  $c_0$  veya  $c$  uzaylarından herhangi biri olmak üzere  $E \subset E(\Delta)$  olduğunu gösterdi. Yani,  $\Delta x_k = -1$  aldığımızda  $x = (x_k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) dizisi yakınsak olmamasına rağmen bu dizi  $\Delta$  - yakınsaktır. Ayrıca, Kızmaz bu uzayların bazı topolojik özelliklerini çalıştı,  $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\gamma$ -duallerini hesapladı ve  $(E(\Delta), F)$  ve  $(E, F(\Delta))$  matris sınıflarını tanımladı. Burada  $E$  ve  $F$ ,  $l_\infty$  ve  $c$  uzaylarını göstermektedir.

$\ell_p$  uzayına karşılık gelen fark dizi uzayı ise Başar ve Altay tarafından “*p.mertebeden sınırlı salınımlı dizilerin uzayı*” diye adlandırılarak, [21] numaralı kaynakta cebir ve topolojik cihetlerle incelenmiştir. Aynı uzay, daha sonra Çolak, Et ve Malkowsky tarafından [29] numaralı kaynakta da ele alınmıştır. Kızmaz tarafından [40] numaralı kaynakta tanımlanan fark dizi uzaylarının paranormlu karşılıkları, Ahmad ve Mursaleen tarafından [1] numaralı kaynakta çalışılmıştır.

Bunun gibi, Başar ve Altay tarafından [21] numaralı kaynakta çalışılan  $p$ .mertebeden sınırlı salınımlı dizilerin  $bv_p$  uzayı da Başar, Altay ve Mursaleen tarafından  $bv(u,p)$  paranormlu uzayına genişletilerek bu uzayın cebirsel, topolojik ve geometrik özellikleri [22] numaralı kaynakta çalışılmıştır. Sarıgöl [63] numaralı kaynaktaki çalışmasında, Kızmaz'ın tanımladığı fark dizi uzaylarını

$$E(\Delta_r) = \{x \in w : r < 1 \text{ için } \Delta_r x \in E\} \quad E \in \{l_\infty, c, c_0\}$$

şeklinde genelleştirdi. Burada  $\Delta_r x = (k^r \Delta x_k)$  ve  $E, l_\infty$  ve  $c_0$  uzaylarını göstermektedir. Sarıgöl genelleştirilmiş bu uzayların  $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\gamma$ -dullerini hesapladı.  $0 < r < 1$  alınırsa  $E(\Delta_r) \subset E(\Delta)$  ve  $r < 0$  alınırsa,  $E(\Delta) \subset E(\Delta_r)$  olur. Malkowsky [47],  $l_\infty(p, \Delta)$  and  $c_0(p, \Delta)$  uzaylarının Köthe-Toeplitz duallerini tanımladı ve bu uzayların [1] numaralı kaynaktaki matris dönüşümlerinin yeni ispatlarını verdi. Choudhary ve Mishra[27],  $r \geq 1$  için  $c_0(\Delta_r)$  uzayının bazı özelliklerini çalıştı. Mishra [55],

$$sE(\Delta) = \{x \in w : (\Delta x_k) \in E, x_1 = 0\} \quad E \in \{l_\infty, c_0\}$$

matris dönüşümlerinin terimlerinde  $sc_0(\Delta)$  uzayına izomorfik altuzay içeren BK – uzaylarının bir karakterizasyonunu ve  $sl_\infty(\Delta)$  uzayından bir BK-uzayına matris dönüşümü için yeterli şartları verdi. Mishra [55]  $sl_\infty(\Delta)$  uzayından,  $sl_\infty(\Delta)$  uzayına izomorfik herhangi bir alt uzay içermeyen BK-uzayına matris dönüşümünün kompakt olduğunu da gösterdi. Mursaleen, Gaur ve Saifi [58],

$$l_\infty(p, \Delta_r) = \{x \in w : r > 0 \text{ için } \Delta_r x \in l_\infty(p)\}$$

dizi uzayını tanımladı ve çeşitli özelliklerini çalıştı.

Gnanaseelan ve Srivastava [35],  $u$  dizisine bağlı olarak  $E(u, \Delta)$  uzayını tanımladı ve çalıştı. Burada  $u$  dizisi için aşağıdaki şartlar verilmiştir:

$$(i) \text{ Bütün } k\text{'lar için } \frac{|u_k|}{|u_{k+1}|} = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$(ii) k^{-1}|u_k| \sum_{i=0}^k |u_i|^{-1} = O(1)$$

$$(iii) (k^{-1}|u_k^{-1}|), \text{ monoton olarak sonsuza doğru artan pozitif sayılar dizisidir.}$$

Malkowsky [48], keyfi seçilmiş herhangi bir  $u$  dizisi için  $E(u, \Delta)$  uzayını tanımladı. Burada  $u$  dizisi üzerine herhangi bir kısıtlama konulmamıştır. Malkowsky,  $E(u, \Delta)$  uzayının,

$$\|x\| = \sup_{k \geq 1} |u_{k-1}(x_{k-1} - x_k)|, \quad u_0 = 1, \quad x_0 = 1$$

normuyla BK – uzayı olduğunu ispatlamıştır. Gaur ve Mursaleen [34],  $S_r(\Delta)$  uzayını  $S_r(p, \Delta)$  uzayına genişletti ve  $(S_r(p, \Delta), l_\infty)$  ve  $(S_r(p, \Delta), l_1)$  matris sınıflarını karakterize etti. Burada,

$$S_r(p, \Delta) = \{x \in w : r \geq 1 \text{ için } (k^r |\Delta x_k|) \in c_0(p)\}.$$

Malkowsky, Mursaleen ve Qamaruddin [53] ve bağımsız olarak Asma ve Çolak [11],  $E(u, \Delta)$  uzayını  $E(p, u, \Delta)$  uzayına genişletti ve bu uzayın Köthe-Toeplitz duallerini hesapladılar. Burada  $E, l_\infty, c$  ve  $c_0$  uzaylarını göstermektedir. Malkowsky ve Mursaleen [51],  $(\Delta E, F)$  ve  $(\Delta E, \Delta F)$  matris sınıflarını karakterize ettiler. Burada,  $E = c_0(p), c(p), l_\infty(p)$  ve  $F = c_0(q), c(q), l_\infty(q)$ .

Et, [30] numaralı çalışmada, Kızmaz tarafından [40] numaralı kaynakta tanımlanan fark dizi uzaylarını, 2.mertebeden  $c_0(\Delta^2), c(\Delta^2)$  ve  $l_\infty(\Delta^2)$  fark uzaylarına genişletti. Mursaleen ise, Et tarafından [30] numaralı kaynakta tarif edilip, incelenen 2.mertebeden fark dizi uzaylarını, [56] numaralı kaynakta  $u\Delta^2$  ile genelleştirip  $c_0(u, \Delta^2), c(u, \Delta^2)$  ve  $l_\infty(u, \Delta^2)$  uzaylarını inşa etmiştir. Yine Et, [31] numaralı kaynakta  $C_p(\Delta^m), C_\infty(\Delta^m)$  m.mertebeden genelleştirilmiş Cesàro fark dizi uzaylarını inşa etti. Çolak ve Et, [32, 28] numaralı çalışmalarında Kızmaz tarafından [40] numaralı kaynakta tanımlanan fark dizi uzaylarını m.mertebeden teşmil ederek  $c_0(\Delta^m), c(\Delta^m)$  ve  $l_\infty(\Delta^m)$  uzaylarını elde ettiler. m.mertebeden genelleştirilmiş fark dizi uzaylarını kullanarak Altay, [2] numaralı çalışmasında  $l_p(\Delta^{(m)})$  dizi uzayını incelemiştir. [54] numaralı kaynakta da m.mertebeden  $c_0(\Delta^m), c(\Delta^m)$  ve  $l_\infty(\Delta^m)$  dizi uzayları ve ilgili matris dönüşümleri, Malkowsky ve Parashar tarafından çalışılmıştır. Polat ve Başar, [60] numaralı çalışmada Altay, Başar ve Mursaleen tarafından [6] numaralı kaynakta ve Altay ve Başar tarafından [4] numaralı

kaynakta tanımlanan Euler dizi uzaylarını m.mertebeden genelleştirilmiş fark dizi uzaylarına genişleterek çeşitli özelliklerini incelediler. Sırasıyla  $\Delta^{(m)}c_0(p)$ ,  $\Delta^{(m)}c(p)$ ,  $\Delta^{(m)}\ell_\infty(p)$  ve  $\Delta_u^{(m)}c_0(p)$ ,  $\Delta_u^{(m)}c(p)$ ,  $\Delta_u^{(m)}\ell_\infty(p)$  m.mertebeden genelleştirilmiş fark dizi uzayları, teşkil edilip bu uzayların çeşitli özellikleri çalışılmış ve matris dönüşümleri Et ve Başarır tarafından [33] numaralı kaynakta ve Malkowsky, Mursaleen ve Suantai tarafından [52] numaralı kaynakta karakterize edilmiştir.

$x$  ve  $y$  kompleks diziler ve  $X, Y \subset w$  olsun. Buradan  $xy = (x_k y_k)_{k=0}^\infty$  ve  $x^{-1} * Y = \{y \in w: xy \in Y\}$  alırsak, bu durumda

$$M(X, Y) = \bigcap_{x \in X} x^{-1} * Y = \{a \in w: ax \in Y, \forall x \in X\}$$

yazabiliriz.

$m$ , keyfi pozitif bir tamsayı,  $\Delta^m$  operatörü,  $(\Delta^m)^{-1}: w \rightarrow w$  olmak üzere

$$\Delta x = (\Delta x)_k = (x_k - x_{k+1}), \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\Delta^2 x = (\Delta^2 x)_k = (\Delta x_k - \Delta x_{k+1}), \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\Delta^{-1} x = (\Delta^{-1} x)_k = \left( \sum_{j=1}^{k+1} x_j \right), \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(\Delta^2)^{-1} x = (\Delta^{-2} x)_k = \left( \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{i=1}^{j-1} x_i \right), \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\Delta^m = \Delta \circ \Delta^{m-1} \quad \text{ve} \quad (\Delta^m)^{-1} = \sum^m = \sum \circ \sum^{m-1} \quad (m \geq 2),$$

$$\Delta^m \circ \sum^m = \sum^m \circ \Delta^m = I \quad (I, w\text{'nin birimidir})$$

şeklinde tanımlı olsun.

$\Delta^m$  ve  $\sum^m$  operatörleri, sırasıyla

$$\Delta_{nk}^m = \begin{cases} (-1)^{k-n} \binom{m}{k-n}, & (\max\{0, n-m\} \leq k \leq n) \\ 0, & k < n \end{cases}$$

$$\sum_{nk}^m = \begin{cases} \binom{m+k-n-1}{k-n}, & 1 \leq n \leq k \\ 0, & k < n \end{cases}$$

matrisleri ile tanımlıdır.  $w$ 'nin herhangi bir  $E$  alt cümlesi için,

$$E(\Delta^m) = \{x \in w: (\Delta^m x) \in E\},$$

$$E(p, \Delta^m) = \{x \in w: (\Delta^m x) \in E(p)\},$$

$$E(u, \Delta^m) = (u^{-1} * E)(\Delta^m) = \{x \in w: (u_k \Delta^m x_k)_{k=0}^{\infty} \in E\},$$

$$E(p, u, \Delta^m) = (u^{-1} * E(p))(\Delta^m) = \{x \in w: (u_k \Delta^m x_k)_{k=0}^{\infty} \in E(p)\}$$

cümlelerini yazabiliriz. Burada  $m \in \mathbf{N}$ , bütün  $k \in \mathbf{N}$  için,  $\Delta^m x_k = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+i}$

ve  $\Delta^0 x_k = x_k$  şeklindedir.

Özel olarak  $m = 1$  ve  $m = 2$  alırsak, yukarıdaki uzaylar sırasıyla,  $E(\Delta)$ ,  $E(\Delta^2)$ ,  $E(p, \Delta)$ ,  $E(p, \Delta^2)$ ,  $E(u, \Delta)$ ,  $E(u, \Delta^2)$ ,  $E(p, u, \Delta)$  ve  $E(p, u, \Delta^2)$  olur. Yine  $u = e$  alırsak,  $E(u, \Delta) = E(\Delta)$ ,  $E(u, \Delta^2) = E(\Delta^2)$ ,  $E(p, u, \Delta) = E(p, \Delta)$  ve  $E(p, u, \Delta^2) = E(p, \Delta^2)$  olacaktır.

$r, s \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  alalım. Genelleştirilmiş  $B(r, s) = (b_{nk})$  fark matrisini bütün  $k, n \in \mathbf{N}$ 'ler için

$$(2.3) \quad b_{nk} = \begin{cases} r, & (k = n), \\ s, & (k = n - 1), \\ 0, & (0 \leq k < n - 1 \text{ ya da } k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada  $r = 1$  ve  $s = -1$  alacak olursak,  $B(r,s)$  matrisi  $\Delta^{(1)}$  fark matrisine indirgenir. Bu sebeple;  $B(r,s)$  matrisinin etki alanıyla ilgili sonuçlar,  $\Delta^{(1)}$  fark matrisinin etki alanına dair sonuçlardan çok daha genel ve şumullüdür.

Başar ve Kirişçi tarafından [23] numaralı kaynakta hemen hemen yakınsak dizilerin  $f$  uzayının  $B(r,s)$  genelleştirilmiş fark matrisi altındaki  $\hat{f}$  etki alanı incelenmektedir. Başar ve Kirişçi[23]'yi takip ederek  $\lambda$ ;  $\ell_\infty$ ,  $c$ ,  $c_0$  ve  $\ell_p$  klâsik dizi uzaylarından birini göstermek üzere, bu çalışmada amacımız,  $\lambda$  uzayının  $B(r,s)$  matrisi altındaki etki alanı ile yeni dizi uzayları tanımlamak, bu yeni dizi uzaylarının  $\beta$ - ve  $\gamma$ -duallerini tayin etmek, AK-, AB-, AD-, KB-, solidlik ve monotonluk gibi bazı topolojik özelliklerini incelemektir. Ayrıca  $c_{B(r,s)}$ ,  $(c_0)_{B(r,s)}$  ve  $(\ell_p)_{B(r,s)}$  uzaylarının Schauder tabanlarını hesaplayacağız ve  $\lambda_{B(r,s)}$  uzayı üzerindeki matris dönüşümlerinin bazı sınıflarını karakterize edeceğiz.

**Tanım 2.3.** Bir  $X$  normlu uzayı üzerindeki bütün sınırlı lineer fonksiyonların  $X^*$  cümlesi,  $X$  uzayının **sürekli duali** olarak bilinir. Bir  $\lambda$  dizi uzayının  $\lambda_A$  etki alanının  $\lambda_A^*$  sürekli duali,

$$\lambda_A^* = \{f : f = g \circ A, \quad g \in \lambda^*\}$$

olarak tanımlanır.

**Tanım 2.4.**  $\lambda$  ve  $\mu$  herhangi iki dizi uzayı olsun.  $S(\lambda, \mu)$  cümlesini,

$$(2.4) \quad S(\lambda, \mu) = \{z = (z_k) \in w : \text{her } x \in \lambda \text{ için } xz = (x_k z_k) \in \mu\}$$

şeklinde tanımlayalım. (2.4) gösterimi ile sırasıyla,  $\lambda$  dizi uzayının  $\alpha$ -,  $\beta$ - ve  $\gamma$ -dualleri,

$$\lambda^\alpha = S(\lambda, \ell_1), \quad \lambda^\beta = S(\lambda, cs) \quad \text{ve} \quad \lambda^\gamma = S(\lambda, bs)$$

cümleleri ile tanımlanır. Buna göre;

$$\lambda^\alpha = \left\{ x = (x_k) \in w : \text{bütün } y = (y_k) \in \lambda \text{ için } \sum_{k=0}^{\infty} |x_k y_k| < \infty \right\},$$

$$\lambda^\beta = \left\{ x = (x_k) \in w : \text{bütün } y = (y_k) \in \lambda \text{ için } \left( \sum_{k=0}^n x_k y_k \right)_{n=0}^\infty \in c \right\}$$

ve

$$\lambda^\gamma = \left\{ x = (x_k) \in w : \text{bütün } y = (y_k) \in \lambda \text{ için } \left( \sum_{k=0}^n x_k y_k \right)_{n=0}^\infty \in \ell_\infty \right\}$$

**Tanım 2.5.**  $A = (a_{nk})$  bir matris olsun.  $k > n$  olan bütün  $n \in \mathbb{N}$ 'ler için  $a_{nk} = 0$  ve bütün  $n \in \mathbb{N}$ 'ler için  $a_{nn} \neq 0$  ise o zaman,  $A$  matrisine **üçgen matris** denir.

$x$  bir dizi,  $A$  ve  $B$  üçgen matrisler olmak üzere  $A(Bx) = (AB)x$  eşitliği sağlanır.

$U$  üçgen matrisi, daima  $U^{-1} = V$  olacak şekilde bir  $V$  ters matrisine sahip olup  $V$  ters matrisi de bir üçgen matristir. Bu durumda; bütün  $x \in w$  dizileri için  $U(Vx) = (UV)x$  eşitliği geçerlidir.

**Tanım 2.6.**  $r$ .mertebeden  $E^r$  Euler ortalaması, her bir  $k, n \in \mathbb{N}$  için,

$$e_{nk}^r = \begin{cases} \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k, & (0 \leq k \leq n) \\ 0, & (k > n) \end{cases}$$

olan  $E^r = (e_{nk}^r)$  matrisiyle tanımlanır.  $c$ ,  $c_0$ ,  $\ell_p$  ve  $\ell_\infty$  klâsik dizi uzaylarının  $E^r$  dönüşümü ile teşkil edilen **Euler dizi uzayları**, sırasıyla

$$e_c^r = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k x_k \text{ mevcut} \right\}$$

$$e_0^r = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k x_k = 0 \right\}$$

$$e_p^r = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_n \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k x_k \right|^p < \infty \right\} \quad (1 \leq p < \infty)$$

$$e_\infty^r = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k x_k \right| < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Bu uzayları ayrıca, (2.2) gösterimiyle

$$e_c^r = \{c\}_{E^r}; \quad e_0^r = \{c_0\}_{E^r}; \quad e_p^r = \{\ell_p\}_{E^r}; \quad e_\infty^r = \{\ell_\infty\}_{E^r}$$

şeklinde de ifade edebiliriz.

**Tanım 2.7.**  $A^r = (a_{nk}^r)$  matrisi; her bir  $k, n \in \mathbb{N}$  için,

$$a_{nk}^r = \begin{cases} \frac{1+r^k}{n+1}, & (0 \leq k \leq n) \\ 0, & (k > n) \end{cases}$$

ile Başar tarafından [19] numaralı kaynakta tanımlanmıştır.  $c, c_0, \ell_p$  ve  $\ell_\infty$  klâsik dizi uzaylarının  $A^r$  matrisi altındaki etki alanları, sırasıyla

$$a_c^r = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (1+r^k)x_k \text{ mevcut} \right\}$$

$$a_0^r = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (1+r^k)x_k = 0 \right\}$$

$$a_p^r = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_n \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (1+r)x_k \right|^p < \infty \right\} \quad (1 \leq p < \infty)$$

$$a_\infty^r = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (1+r^k)x_k \right| < \infty \right\}$$

cümleleriyle tanımlıdır.

Bu uzayları da (2.2) gösterimiyle

$$a_c^r = \{c\}_{A^r}; \quad a_0^r = \{c_0\}_{A^r}; \quad a_p^r = \{\ell_p\}_{A^r}; \quad a_\infty^r = \{\ell_\infty\}_{A^r}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

**Tanım 2.8.**  $t=(t_k)$  pozitif terimli bir dizi ve  $n \in \mathbb{N}$  için

$$T_n = \sum_{k=0}^n t_k$$

olsun. Bu durumda;  $t=(t_k)$  dizisine karşılık gelen  $R^t$  Riesz ortalaması,  $R^t = \{r_{nk}^t\}$  matrisiyle tarif edilir. Burada  $r_{nk}^t$ ;  $k, n \in \mathbb{N}$  için

$$r_{nk}^t = \begin{cases} \frac{t_k}{T_n}, & (0 \leq k \leq n) \\ 0, & (k > n) \end{cases}$$

ile tanımlanır.

Klâsik  $c$ ,  $c_0$ ,  $\ell_p$  ve  $\ell_\infty$  dizi uzaylarının  $R^t$  ortalaması altındaki etki alanı ile tanımlı

**Riesz dizi uzayları**, sırasıyla

$$r_c^t = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{T_n} \sum_{k=0}^n t_k x_k \right| \text{ mevcut} \right\}$$

$$r_0^t = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{T_n} \sum_{k=0}^n t_k x_k \right| = 0 \right\}$$

$$r_p^t = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_n \left| \frac{1}{T_n} \sum_{k=0}^n t_k x_k \right|^p < \infty \right\} \quad (1 \leq p < \infty)$$

$$r_\infty^t = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{T_n} \sum_{k=0}^n t_k x_k \right| < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Bu uzayları, (2.2) gösterimiyle

$$r_c^t = \{c\}_{R^t}; \quad r_0^t = \{c_0\}_{R^t}; \quad r_p^t = \{\ell_p\}_{R^t}; \quad r_\infty^t = \{\ell_\infty\}_{R^t}$$

şeklinde de ifade edebiliriz.

**Tanım 2.9.**  $t=(t_k)$  pozitif terimli bir dizi ve  $n \in \mathbb{N}$  için

$$T_n = \sum_{k=0}^n t_k$$

olsun. Bu durumda;  $t=(t_k)$  dizisine karşılık gelen  $N^t$  Nörlund ortalaması,  $N^t = \{a_{nk}^t\}$  matrisiyle tarif edilir. Burada  $a_{nk}^t$ ;  $k, n \in N$  için

$$a_{nk}^t = \begin{cases} \frac{t_{n-k}}{T_n}, & (0 \leq k \leq n) \\ 0, & (k > n) \end{cases}$$

ile tanımlanır.

$\ell_p$  ve  $\ell_\infty$  klâsik dizi uzaylarının  $N^t$  ortalaması altındaki etki alanı ile tanımlı

**Nörlund dizi uzayları**, sırasıyla

$$a_p^t = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_n \left| \frac{1}{T_n} \sum_{k=0}^n t_{n-k} x_k \right|^p < \infty \right\}, \quad (1 \leq p < \infty)$$

$$a_\infty^t = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{n \in N} \left| \frac{1}{T_n} \sum_{k=0}^n t_{n-k} x_k \right| < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

$a_p^t$  ve  $a_\infty^t$  uzayları, (2.2) gösterimiyle

$$a_p^t = \{\ell_p\}_{N^t} \quad \text{ve} \quad a_\infty^t = \{\ell_\infty\}_{N^t}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

**Tanım 2.10.** 1.mertebeden **(C,1) Cesaro ortalaması**,  $C = \{c_{nk}\}$  matrisiyle tarif

edilir. Burada  $c_{nk}$ ;  $k, n \in N$  için,

$$c_{nk} = \begin{cases} 1/(1+n), & (0 \leq k \leq n), \\ 0, & (k > n), \end{cases}$$

ile tanımlanmaktadır.

Bütün  $k \in \mathbb{N}$ ler için  $u_k \neq 0$  olacak şekilde  $u = (u_k)$  dizilerinin cümlesini  $U$  ile gösterelim.  $u \in U$  için  $1/u = (1/u_k)$  yazalım.  $z, u, v \in U$  olmak üzere  $S = (s_{nk})$  toplam matrisi,  $\Delta = (\delta_{nk})$  fark matrisi,  $G(u,v) = (g_{nk})$  genelleştirilmiş ağırlıklı ortalama matrisi ve  $\Delta^{(m)} = (\Delta_{nk}^{(m)})$  m.mertebeden fark matrisi,  $A_u^r = (a_{nk}^r)$  ve  $A^z = (a_{nk}^z)$  matrisleri, bütün  $k, m, n \in \mathbb{N}$ ler için

$$s_{nk} = \begin{cases} 1, & (0 \leq k \leq n), \\ 0, & (k > n), \end{cases}$$

$$\delta_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k}, & (n-1 \leq k \leq n), \\ 0, & (0 \leq k \leq n-1 \text{ ya da } k > n), \end{cases}$$

$$g_{nk} = \begin{cases} u_n v_k, & (0 \leq k \leq n), \\ 0, & (k > n), \end{cases}$$

$$\Delta_{nk}^{(m)} = \begin{cases} (-1)^{n-k} \binom{m}{n-k}, & (\max\{0, n-m\} \leq k \leq n), \\ 0, & (0 \leq k < \max\{0, n-m\} \text{ ya da } k > n), \end{cases}$$

$$a_{nk}^r = \begin{cases} \frac{1+r^k}{n+1} u_k, & (0 \leq k \leq n), \\ 0, & (k > n), \end{cases}$$

ve

$$a_{nk}^z = \begin{cases} (-1)^{n-k} z_k, & (n-1 \leq k \leq n), \\ 0, & (0 \leq k \leq n-1 \text{ ya da } k > n) \end{cases}$$

eşitlikleriyle tanımlanır. Burada  $u_n$ , yalnız  $n$ 'ye bağlı,  $v_k$  da sadece  $k$ 'ye bağlıdır.

Aksi belirtilmedikçe bu çalışma boyunca  $p, q > 1$  ve  $p^{-1} + q^{-1} = 1$  olarak kabul edilecektir. Yine negatif indisli herhangi bir terim, sıfıra eşit kabul edilecektir.

### 3. BÖLÜM

#### KLÂSİK DİZİ UZAYLARININ B(r,s) GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK MATRİSİ ALTINDAKİ ETKİ ALANLARI

Bu bölümde;  $\hat{\ell}_\infty$ ,  $\hat{c}$ ,  $\hat{c}_0$  ve  $\hat{\ell}_p$  dizi uzaylarını tanımlayacağız. Ayrıca, bu uzayların  $\beta$ - ve  $\gamma$ -duallerini hesaplayacağız.

$\hat{\ell}_\infty$ ,  $\hat{c}$ ,  $\hat{c}_0$  ve  $\hat{\ell}_p$  uzaylarını, B(r,s) genelleştirilmiş fark matrisi altındaki dönüşümü, sırasıyla,  $\ell_\infty$ ,  $c$ ,  $c_0$  ve  $\ell_p$  klâsik dizi uzaylarında yatan dizilerin uzayı olarak tanımlıyoruz. Yani,

$$\hat{\ell}_\infty = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{k \in \mathbb{N}} |sx_{k-1} + rx_k| < \infty \right\},$$

$$\hat{c} = \left\{ x = (x_k) \in w : \exists l \in C \ni \lim_{k \rightarrow \infty} |sx_{k-1} + rx_k - l| = 0 \right\},$$

$$\hat{c}_0 = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{k \rightarrow \infty} |sx_{k-1} + rx_k| = 0 \right\}$$

ve

$$\hat{\ell}_p = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_k |sx_{k-1} + rx_k|^p < \infty \right\}.$$

(2.2) gösterimini kullanarak  $\hat{\ell}_\infty$ ,  $\hat{c}$ ,  $\hat{c}_0$  ve  $\hat{\ell}_p$  dizi uzaylarını;

$$\hat{\ell}_\infty = \{\ell_\infty\}_{B(r,s)}, \quad \hat{c} = \{c\}_{B(r,s)}, \quad \hat{c}_0 = \{c_0\}_{B(r,s)} \quad \text{ve} \quad \hat{\ell}_p = \{\ell_p\}_{B(r,s)}$$

şeklinde yeniden ifade edebiliriz.

$x = (x_k)$  dizisinin  $B(r,s)$ -dönüşümü ile bir  $y = (y_k)$  dizisini tanımlayalım. Yani;  $k \in \mathbb{N}$  için,

$$(3.1) \quad y_k = \{B(r,s)x\}_k = sx_{k-1} + rx_k$$

olsun.

Artık; henüz tarif ettiğimiz  $\hat{\ell}_\infty$ ,  $\hat{c}$ ,  $\hat{c}_0$  ve  $\hat{\ell}_p$  dizi uzaylarının sırasıyla  $\ell_\infty$ ,  $c$ ,  $c_0$  ve  $\ell_p$  klâsik dizi uzaylarına lineer olarak izomorfik olduğuna dair teoremimizi verebiliriz:

**Teorem 3.1.**  $\lambda \in \{\ell_\infty, c, c_0, \ell_p\}$  olmak üzere  $\lambda_{B(r,s)}$  ve  $\lambda$  uzayları lineer olarak izomorfiktir. Yani;  $\hat{\ell}_\infty \cong \ell_\infty$ ,  $\hat{c} \cong c$ ,  $\hat{c}_0 \cong c_0$  ve  $\hat{\ell}_p \cong \ell_p$ .

**İspat :**  $\lambda_{B(r,s)}$  ve  $\lambda$  uzaylarının lineer olarak izomorfik olduklarını göstermek için, bu uzaylar arasında bire-bir, üzerine bir lineer dönüşümün varlığını ispat etmemiz gerekmektedir.

Benzer muhakeme ile  $\hat{c}$ ,  $\hat{c}_0$  ve  $\hat{\ell}_p$  uzayları için de ispat yapılabileceğinden teoremi yalnız  $\hat{\ell}_\infty$  uzayı için ispatlayacağız.

$\hat{\ell}_\infty \cong \ell_\infty$  olduğunu gösterelim. Bunun için, önce  $\hat{\ell}_\infty$  uzayından  $\ell_\infty$  uzayına bir  $T$  dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$T: \hat{\ell}_\infty \rightarrow \ell_\infty$$

$$x \rightarrow Tx = B(r,s)x = y.$$

Bu durumda;  $x=(x_k), u=(u_k) \in \hat{\ell}_\infty$  için,

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \{B(r,s)(x+u)\}_n &= s(x_{n-1} + u_{n-1}) + r(x_n + u_n) = sx_{n-1} + rx_n + su_{n-1} + ru_n \\ &= \{B(r,s)x\}_n + \{B(r,s)u\}_n \end{aligned}$$

olur. Şimdi herhangi bir  $\alpha \in \mathbf{C}$  için  $B(r,s)(\alpha x) = \alpha B(r,s)x$  olduğunu gösterelim.

$$(3.3) \quad \{B(r,s)(\alpha x)\}_n = s(\alpha x_{n-1}) + r(\alpha x_n) = \alpha(sx_{n-1} + rx_n) = \alpha \{B(r,s)x\}_n$$

olur. (3.2) ve (3.3) eşitlikleri sağlandığından dolayı T dönüşümü,  $\hat{\ell}_\infty$  uzayı üzerinde lineerdir.

Şimdi,  $Tx = B(r,s)x = 0$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda; her  $n \in \mathbf{N}$  için,

$$(3.4) \quad \{B(r,s)x\}_n = sx_{n-1} + rx_n = 0$$

eşitliği sağlanır.  $n = 0$  için (3.4) eşitliğinden

$$x_0 = 0$$

buluruz.  $n = 1$  için, (3.4) eşitliğinden

$$sx_0 + rx_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

elde ederiz. Bu işleme devam ettiğimizde n.adımda

$$sx_{n-1} + rx_n = 0 \Rightarrow x_n = 0$$

elde ederiz. O zaman, her  $n \in \mathbf{N}$  için  $x_n = 0$  ve şu hâlde  $x = 0$  olmalıdır. Bu da bize T lineer dönüşümünün “  $Tx=0 \Rightarrow x=0$  ” şartlı önermesini sağlaması sebebiyle birebir olduğunu gösterir.

Son olarak T dönüşümünün örten olduğunu gösterelim. Keyfi bir  $y = (y_k) \in \ell_\infty$  noktası alalım. Şimdi, bir  $x=(x_k)$  dizisini;  $y=(y_k)$  dizisi yardımıyla  $k \in \mathbf{N}$  için

$$x_k = \frac{1}{r} \sum_{j=0}^k \left( -\frac{s}{r} \right)^j y_{k-j}$$

eşitliği ile tarif edelim. Bu durumda;  $k \in \mathbb{N}$  için,

$$\begin{aligned} sx_{k-1} + rx_k &= \frac{s}{r} \sum_{j=0}^{k-1} \left(-\frac{s}{r}\right)^j y_{k-1-j} + \sum_{j=0}^k \left(-\frac{s}{r}\right)^j y_{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \left(-\frac{s}{r}\right)^j \left(\frac{s}{r} y_{k-1-j} + y_{k-j}\right) + \left(-\frac{s}{r}\right)^k y_0 = y_k \end{aligned}$$

olduğundan bu eşitliğe  $\|\cdot\|_\infty$  normunu uygulayarak

$$\|x\|_{\hat{\ell}_\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |rx_k + sx_{k-1}| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |y_k| = \|y\|_\infty < \infty$$

olduğunu görürüz. Şu hâlde,  $x \in \hat{\ell}_\infty$  olur. Böylece,  $\hat{\ell}_\infty$  ve  $\ell_\infty$  uzayları arasında normları koruyan birebir, üzerine bir lineer dönüşümün mevcut olduğu görüldüğünden teoremin ispatı,  $\hat{\ell}_\infty$  ve  $\ell_\infty$  uzayları bakımından tamamlanmış olur.

Artık  $\hat{\ell}_\infty$ ,  $\hat{c}$ ,  $\hat{c}_0$  ve  $\hat{\ell}_p$  dizi uzaylarına dair bazı kapsama bağıntılarını verebiliriz:

**Teorem 3.2.**  $\lambda \in \{\ell_\infty, c, c_0, \ell_p\}$  ve  $B = B(r,s)$  alalım. Bu durumda,

- (i)  $\left|\frac{s}{r}\right| < 1$  ise  $\lambda = \lambda_B$  olur.
- (ii)  $\left|\frac{s}{r}\right| \geq 1$  ise  $\lambda \subset \lambda_B$  kesin kapsamı mevcuttur.

**İspat.**  $\lambda \in \{\ell_\infty, c, c_0, \ell_p\}$  ve  $B = B(r,s)$  alalım. Bu durumda; B matrisi,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |b_{nk}| = |r| + |s|,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{nk} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k b_{nk} = r + s$$

ve

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_n |b_{nk}| = |r| + |s|$$

şartlarını sağladığından dolayı  $B \in (\lambda : \lambda)$  olur. Yani, herhangi bir  $x \in \lambda$  dizisi için  $Bx \in \lambda$  ve dolayısıyla  $x \in \lambda_B$  olur. Bu da  $\lambda \subset \lambda_B$  olduğunu gösterir.

(i)  $\left| \frac{s}{r} \right| < 1$  olsun.  $B$  matrisinin  $B^{-1} = D = (d_{nk})$  tersi matrisinin  $k, n \in \mathbb{N}$  için,

$$d_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{r} \left( \frac{-s}{r} \right)^{n-k}, & (0 \leq k \leq n), \\ 0, & (k > n), \end{cases}$$

eşitliği ile verildiği doğrudan hesaplama yoluyla kolayca görülür.  $D$  matrisi;

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |d_{nk}| = \left| \frac{1}{r} \right| \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^n \left| \frac{s}{r} \right|^{n-k} < \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{nk} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \left( \frac{-s}{r} \right)^{n-k} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k d_{nk} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{r} \left( \frac{-s}{r} \right)^{n-k} \text{ mevcut}$$

ve

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |d_{nk}| = \left| \frac{1}{r} \right| \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k \left| \frac{s}{r} \right|^{n-k} < \infty$$

şartlarını sağladığından dolayı  $B^{-1} \in (\lambda : \lambda)$  olur.

Buradan,  $x \in \lambda_B$  ise  $y = Bx \in \lambda$  ve  $x = B^{-1}y \in \lambda$  olur. Bu durumda  $\lambda_B \subset \lambda$  kapsamı ispatlanmış ve böylece (i) şikkinin ispatı tamamlanmış olur.

(ii)  $u^1 = \{(-s/r)^n / r\}$ ,  $u^2 = (n/r)$ ,  $u^3 = \{(-1)^n(n+1)\}$  ve  $u^4 = \{[1+(-1)^n]/2\}$  dizilerini göz önüne alalım.  $\left|\frac{s}{r}\right| > 1$  olması hâlinde  $Bu^1 = e^{(0)} = (1,0,0,\dots) \in \lambda$  olur. Böylece  $u^1$

$\in \lambda_B \setminus \lambda$  bulunur.

$\left|\frac{s}{r}\right| = 1$  olduğunu kabul edelim.

(a)  $\lambda = c_0$ ,  $\ell_p$  ise,  $u^1 \in \lambda_B \setminus \lambda$  olur.

(b)  $\lambda = c$ ,  $\ell_\infty$  alalım.  $s = -r$  ise, bu durumda  $Bu^2 = e \in \lambda$  olur. Böylece,  $u^2 \in \lambda_B \setminus \lambda$  olur.  $s=r$  ise, bu durumda  $Bu^3 = \{r(-1)^n\} \in \ell_\infty$  ve  $Bu^4 = (r,r,r,\dots) \in c$  olur. Buradan da  $u^3 \in (\ell_\infty)_B \setminus \ell_\infty$  ve  $u^4 \in c_B \setminus c$  bulunur.

Bu adım ispatı tamamlar. □

Şimdi,  $\hat{\ell}_\infty$ ,  $\hat{c}$ ,  $\hat{c}_0$  ve  $\hat{\ell}_p$  dizi uzaylarının  $\beta$ - ve  $\gamma$ -duallerini hesaplayacağız. Bunun için, aşağıdaki yardımcı teoremlere ihtiyaç duyacağız:

**Yardımcı Teorem 3.3.** [38]  $\lambda$  ve  $\mu$  iki dizi uzayı ve  $\xi = \alpha, \beta$  veya  $\gamma$  olsun.  $\lambda \subset \mu$  ise,  $\mu^\xi \subset \lambda^\xi$  kapsaması mevcuttur.

**Yardımcı Teorem 3.4.** [38]  $\xi = \alpha, \beta$  veya  $\gamma$  ise,  $c^\xi = \{\ell_\infty\}^\xi = \ell_1$  eşitlikleri geçerlidir.

**Yardımcı Teorem 3.5.** [63]

(i)  $A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty : \ell_\infty) = (c : \ell_\infty) = (c_0 : \ell_\infty) \Leftrightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty$

(ii)  $A = (a_{nk}) \in (\ell_p : \ell_\infty) \Leftrightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}|^q < \infty$

$$(iii) A = (a_{nk}) \in (\ell_1 : \ell_\infty) \Leftrightarrow \sup_{k,n \in \mathbf{N}} |a_{nk}| < \infty$$

$$(iv) A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty : c) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = \alpha_k, & (k \in \mathbf{N}) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k |a_{nk}| = \sum_k |\alpha_k| \end{cases}$$

$$(v) A = (a_{nk}) \in (c : c) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = \alpha_k, & (k \in \mathbf{N}) \\ \sup_{n \in \mathbf{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k a_{nk} = \alpha \end{cases}$$

$$(vi) A = (a_{nk}) \in (c_0 : c) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = \alpha_k, & (k \in \mathbf{N}) \\ \sup_{n \in \mathbf{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty \end{cases}$$

$$(vii) A = (a_{nk}) \in (\ell_p : c) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = \alpha_k, & (k \in \mathbf{N}) \\ \sup_{n \in \mathbf{N}} \sum_k |a_{nk}|^q < \infty \end{cases}$$

$$(viii) A = (a_{nk}) \in (\ell_1 : c) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = \alpha_k, & (k \in \mathbf{N}) \\ \sup_{k,n \in \mathbf{N}} |a_{nk}| < \infty \end{cases}$$

**Yardımcı Teorem 3.6.** [9]  $C = (c_{nk})$  matrisini, her  $k, n \in \mathbf{N}$

$$c_{nk} = \begin{cases} \sum_{j=k}^n a_j v_{jk}, & (0 \leq k \leq n) \\ 0, & (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada  $a = (a_k) \in w$  ve  $V = (v_{nk})$ ,  $U = (u_{nk})$  üçgen matrisinin tersini göstermektedir. Bu durumda,

$$\{\lambda_U\}^Y = \{a = (a_k) \in w : C \in (\lambda : \ell_\infty)\}$$

ve

$$\{\lambda_U\}^B = \{a = (a_k) \in w : C \in (\lambda : c)\}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Artık, Yardımcı Teorem 3.5 ve Yardımcı Teorem 3.6'yı kullanarak aşağıdaki sonucu verebiliriz:

**Teorem 3.7.**  $d_1(r,s)$ ,  $d_2(r,s)$ ,  $d_3(r,s)$ ,  $d_4(r,s)$ ,  $d_5(r,s)$ ,  $d_6(r,s)$  ve  $d_7(r,s)$  cümlelerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$d_1(r,s) = \left\{ a = (a_k) \in w : \sup_{n \in N} \sum_{k=0}^n \left| \frac{1}{r} \sum_{j=k}^n \left( \frac{-s}{r} \right)^{j-k} a_j \right|^q < \infty \right\},$$

$$d_2(r,s) = \left\{ a = (a_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=k}^n \left( \frac{-s}{r} \right)^{j-k} a_j \text{ mevcut} \right\},$$

$$d_3(r,s) = \left\{ a = (a_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left| \frac{1}{r} \sum_{j=k}^n \left( \frac{-s}{r} \right)^{j-k} a_j \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \sum_{j=k}^n \left( \frac{-s}{r} \right)^{j-k} a_j \right| \right\},$$

$$d_4(r,s) = \left\{ a = (a_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left[ \frac{1 - \left( \frac{-s}{r} \right)^{k+1}}{1 + \frac{s}{r}} \right] a_k \text{ mevcut} \right\},$$

$$d_5(r,s) = \left\{ a = (a_k) \in w : \sup_{k, n \in N} \left| \sum_{j=k}^n \left( \frac{-s}{r} \right)^{j-k} a_j \right| < \infty \right\},$$

$$d_6(r,s) = \left\{ a = (a_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left| \sum_{i=n}^{\infty} \left( \frac{-s}{r} \right)^{i-k} a_i \right| = 0 \right\},$$

$$d_7(r, s) = \left\{ a = (a_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{1}{r} a_k - \frac{r+s}{rs} \sum_{i=k+1}^{\infty} \left( \frac{-s}{r} \right)^{i-k} a_i \right| = 0 \right\}.$$

Buradan,  $\hat{\ell}_\infty$ ,  $\hat{c}$ ,  $\hat{c}_0$  ve  $\hat{\ell}_p$  dizi uzaylarının  $\beta$ - ve  $\gamma$ -dualleri;

- (i)  $q = 1$  için,  $\{\hat{\ell}_\infty\}^\gamma = \hat{c}^\gamma = \{\hat{c}_0\}^\gamma = d_1(r, s)$
- (ii)  $\{\hat{\ell}_p\}^\gamma = d_1(r, s)$
- (iii)  $\{\hat{\ell}_1\}^\gamma = d_5(r, s)$
- (iv)  $q = 1$  için,  $\{\hat{c}_0\}^\beta = d_1(r, s) \cap d_2(r, s)$
- (v)  $q = 1$  için,  $\hat{c}^\beta = d_1(r, s) \cap d_2(r, s) \cap d_4(r, s)$
- (vi)  $\{\hat{\ell}_p\}^\beta = d_1(r, s) \cap d_2(r, s)$
- (vii)  $\{\hat{\ell}_1\}^\beta = d_2(r, s) \cap d_5(r, s)$
- (viii)  $\{\hat{\ell}_\infty\}^\beta = d_2(r, s) \cap d_3(r, s)$

eşitlikleri ile verilir.

**İspat: (i)** Burada sadece  $\hat{c}_0$  uzayının  $\gamma$ -duali için ispatı vereceğiz.

$a=(a_k) \in w$  olsun. Şimdi, (3.1) eşitliğiyle tanımlanan  $y = (y_k)$  dizisini göz önüne alalım. Bu durumda;

$$(3.5) \quad \sum_{k=0}^n a_k x_k = \sum_{k=0}^n \left[ \sum_{j=k}^n \frac{1}{r} \left( \frac{-s}{r} \right)^{j-k} a_j \right] y_k = \sum_{k=0}^n d_{nk}(r, s) y_k = (Dy)_n; \quad (n \in \mathbf{N})$$

eşitliğini elde ederiz. (3.5) eşitliğinde  $D = \{d_{nk}(r, s)\}$  matrisi, her  $k, n \in \mathbf{N}$  için

$$(3.6) \quad d_{nk}(r, s) = \begin{cases} \sum_{j=k}^n \frac{1}{r} \left( \frac{-s}{r} \right)^{j-k} a_j, & (0 \leq k \leq n), \\ 0, & (k > n) \end{cases}$$

eşitliği ile tanımlıdır. Böylece, (3.5) eşitliğinden; “ $x = (x_k) \in \hat{c}_0$  aldığımızda  $ax = (a_k x_k) \in bs$  olması için gerek ve yeter şart,  $y = (y_k) \in c_0$  aldığımızda  $Dy \in l_\infty$  olmasıdır” çift gerektirmesini elde ederiz. Burada;  $D = \{d_{nk}(r,s)\}$  matrisi, (3.6) ile tanımlıdır. Bu durumda,  $q=1$  için Yardımcı Teorem 3.5’in (iii) şikkından dolayı  $\{\hat{c}_0\}^\gamma = d_1(r,s)$  olur. Bu da ispatı tamamlar.

(ii) ve (iii) şıkları da benzer şekilde ispatlanabileceğinden teferruatlı ispat verilmeyecektir.

(iv)  $a = (a_k) \in w$  olsun. Yine (3.1) eşitliği ile tanımlanan  $y = (y_k)$  dizisini göz önüne alalım. Bu durumda (3.5) ile Yardımcı teorem 3.5’in (vi) şikkından  $x = (x_k) \in \hat{c}_0$  aldığımızda  $ax = (a_k x_k) \in cs$  olması için gerek ve yeter şartın  $y = (y_k) \in c$  aldığımızda  $Dy \in c$  olacağı sonucunu çıkarabiliriz. Burada;  $D = \{d_{nk}(r,s)\}$  matrisi, (3.6) eşitliği ile tanımlıdır. Buradan her  $k \in N$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{nk}(r,s) \text{ mevcut ve } \sup_{n \in N} \sum_{k=0}^n |d_{nk}(r,s)| < \infty$$

olur. Böylece,  $q = 1$  için,  $\{\hat{c}_0\}^\beta = d_1(r,s) \cap d_2(r,s)$  sonucunu elde ederiz.

(v) şikkı da benzer şekilde ispatlanabilir.

(vi)  $a = (a_k) \in w$  olsun. Yine (3.1) eşitliği ile tanımlanan  $y = (y_k)$  dizisini göz önüne alalım. Bu durumda (3.5) ile Yardımcı teorem 3.5. (i)’ den  $x = (x_k) \in \hat{\ell}_p$  aldığımızda  $ax = (a_k x_k) \in cs$  olması için gerek ve yeter şartın  $y = (y_k) \in \ell_p$  aldığımızda  $Dy \in c$  olacağı sonucunu çıkarabiliriz. Burada  $D = \{d_{nk}(r,s)\}$  matrisi (3.10)’daki gibi tanımlıdır. Bu ise; “ $a = (a_k) \in \{\hat{\ell}_p\}^\beta$  olması için gerek ve yeter şart,  $D = \{d_{nk}(r,s)\} \in (\ell_p : c)$  olmasıdır” çift gerektirmesine denktir. Böylece, Yardımcı Teorem 3.5’in (vii) şikkına dayanarak  $a = (a_k) \in d_1(r,s) \cap d_2(r,s)$  olduğunu anlarız. Bu da,  $\{\hat{\ell}_p\}^\beta = d_1(r,s) \cap d_2(r,s)$  sonucunu verir.

(vii) ve (viii) şıkları da benzer şekilde ispatlanabilir.  $\square$

$A = (a_{nk})$  bir üçgen matris olmak üzere, normlu bir  $\lambda$  dizi uzayının  $\lambda_A$  etki alanının bir tabana sahip olabilmesi için gerek ve yeter şartın  $\lambda$  dizi uzayının bir tabana sahip olması olduğu bilinmektedir, (bkz. [37, Remark 2.4]). Bu düşünceden yola çıkarak aşağıdaki sonucu verebiliriz:

**Sonuç 3.8.**  $z = (z_n)$  ve her bir sabit  $k \in \mathbb{N}$  için  $b^{(k)}(r, s) = \{b_n^{(k)}(r, s)\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizilerini;

$$z_n = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^n \left( \frac{-s}{r} \right)^k$$

ve

$$b_n^{(k)}(r, s) = \begin{cases} 0, & (n < k) \\ \frac{1}{r} \left( \frac{-s}{r} \right)^n, & (n \geq k) \end{cases}$$

eşitlikleriyle tanımlayalım. Bu durumda,

(a)  $\{b_n^{(k)}(r, s)\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi,  $\hat{c}_0$  ve  $\hat{\ell}_p$  uzayları için bir tabandır. Her  $x \in \hat{c}_0$  ya da  $x \in \hat{\ell}_p$  dizisi,

$$x = \sum_k \alpha_k(r) b^{(k)}(r, s)$$

şeklinde birtek gösterime sahiptir. Burada, her  $k \in \mathbb{N}$  için  $\alpha_k(r) = \{B(r, s)x\}_k$  eşitliği mevcuttur.

(b)  $\{z, b_n^{(k)}(r, s)\}_{n \in \mathbb{N}}$  cümlesi  $\hat{c}$  için bir tabandır. Her  $x \in \hat{c}$  dizisi,

$$x = lz + \sum_k [\alpha_k(r) - l] b^{(k)}(r, s)$$

şeklinde tek bir gösterime sahiptir. Burada,  $l = \lim_{k \rightarrow \infty} \{B(r, s)x\}_k$  eşitliği mevcuttur.  $\square$

**Yardımcı Teorem 3.9.** [9]  $\lambda$  ve  $\mu$ , BK-uzayları olsun.  $U=(u_{nk})$ , bir üçgen matris ve  $\alpha = (\alpha_k) \in \mu$  dizisi ile bir  $C_\mu^U = (c_{nk})$  matrisi, her  $k, n \in N$  için

$$c_{nk} = \sum_{j=k}^n \alpha_j u_{nj} v_{jk}$$

eşitliği ile tanımlansın. Bu durumda;  $C_\mu^U$  matrisinin  $\lambda$  dizi uzayındaki etki alanı aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (i) KB özelliğine sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart,  $C_{l_1}^U \in (\lambda : \lambda)$  olmasıdır.
- (ii) AB özelliğine sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart,  $C_{bv_0}^U \in (\lambda : \lambda)$  olmasıdır.
- (iii) Monotonluk özelliğine sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart,  $C_{m_0}^U \in (\lambda : \lambda)$  olmasıdır.
- (iv) Solidlik özelliğine sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart,  $C_{\ell_\infty}^U \in (\lambda : \lambda)$  olmasıdır.

Yardımcı Teorem 3.9'dan aşağıdaki sonucu elde edebiliriz:

**Sonuç 3.10.**  $\left| \frac{s}{r} \right| = 1$  ise, bu durumda  $\hat{\ell}_1$  dizi uzayı KB- ve AB- özelliklerine sahiptir.

**Yardımcı Teorem 3.11.** [9]  $\lambda$ , AK-özelliğine sahip bir BK-uzayı,  $U$  bir üçgen matris ve  $\lambda_U \supset \phi$  olsun. Bu durumda,  $\lambda_U$  dizi uzayının AD-özelliğine sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart, “ $t \in \lambda^\beta$  için  $tU = \theta \Rightarrow t = \theta$ ” şartlı önermesinin geçerli olmasıdır.

$c_0$  ve  $\ell_p$ , AK-özelliğine sahip olduğundan Yardımcı Teorem 3.11'deki  $U$  matrisini  $B(r,s)$  genelleştirilmiş fark matrisi olarak aşağıdaki sonuca ulaşırız:

**Sonuç 3.12.**  $\hat{c}_0$  ve  $\hat{\ell}_p$  ( $p>1$ ) uzaylarının AD – özelliğine sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart  $\left| \frac{s}{r} \right| \leq 1$  olmasıdır.

## 4. BÖLÜM

### B(r,s) GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK MATRİSİ İLE TANIMLANAN DİZİ UZAYLARIYLA İLGİLİ BAZI MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde, 3.bölümde tanımladığımız ve bazı özelliklerini incelediğimiz yeni dizi uzaylarıyla ilgili bazı matris dönüşümlerini karakterize edeceğiz.

**Teorem 4.1.**  $\lambda$  bir FK-uzayı,  $U$  bir üçgen matris,  $V$ ,  $U$  matrisinin tersi ve  $\mu$ ,  $w$  dizi uzayının keyfi bir alt uzayı olsun. Bu durumda;  $A \in (\lambda_U : \mu)$  olması için gerek ve yeter şart,

$$(4.1) \quad C^{(n)} = (c_{mk}^{(n)}) \in (\lambda : c), \quad (\text{her bir } n \in N \text{ için})$$

ve

$$(4.2.) \quad C = (c_{nk}) \in (\lambda : \mu)$$

olmasıdır. Burada  $C^{(n)}$  ve  $C$  matrisleri;  $k, m, n \in N$  için

$$c_{mk}^{(n)} = \begin{cases} \sum_{j=k}^m a_{nj} v_{jk}, & (0 \leq k \leq m) \\ 0, & (k > m) \end{cases}$$

ve

$$c_{nk} = \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} v_{jk}$$

eşitlikleriyle tanımlanmaktadır.

**İspat.**  $A = (a_{nk}) \in (\lambda_U : \mu)$  ve  $x = (x_k) \in \lambda_U$  olsun. Bu durumda, bütün  $m, n \in \mathbb{N}$ ler için,

$$(4.3) \quad \sum_{k=0}^m a_{nk} x_k = \sum_{k=0}^m a_{nk} \left( \sum_{j=0}^k v_{kj} y_j \right) = \sum_{k=0}^m \left( \sum_{j=k}^m a_{nj} v_{jk} \right) y_k = \sum_{k=0}^m c_{mk}^{(n)} y_k$$

eşitliği geçerlidir.  $Ax$  mevcut olduğundan  $C^{(n)}$ ,  $(\lambda : c)$  sınıfına ait olmak zorundadır. (4.3) eşitliğinde  $m \rightarrow \infty$  için limit aldığımızda,  $Ax = Cy$  elde ederiz.  $Ax \in \mu$  olduğundan  $Cy \in \mu$  olur. Yani,  $C \in (\lambda : \mu)$  olur.

Tersine (4.1) ve (4.2) şartları geçerli ve  $x \in \lambda_U$  olsun. Bu durumda, bütün  $n \in \mathbb{N}$ ler için  $(a_{nk})_{k \in \mathbb{N}} \in \lambda_U^\beta$  ve (4.1) ile birlikte  $(c_{nk})_{k \in \mathbb{N}} \in \lambda^\beta$  sonucuna ulaşırız. Böylece,  $Ax$  mevcut olur. Bu durumda;  $m \rightarrow \infty$  için limit aldığımızda (4.3) eşitliğinden  $Ax = Cy$  elde ederiz. Bu da  $A \in (\lambda_U : \mu)$  olduğunu gösterir.

Böylece, teoremin ispatı tamamlanır. □

Şimdi kullanacağımız bazı şartları aşağıda liste edelim:

$$(4.4) \quad \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^m \left| \frac{1}{r} \sum_{j=k}^m \left( \frac{-s}{r} \right)^{j-k} a_{nj} \right|^q < \infty$$

$$(4.5) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \sum_{j=k}^m \left( \frac{-s}{r} \right)^{j-k} a_{nj} = c_{nk}$$

$$(4.6) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \left| \frac{1}{r} \sum_{j=k}^m \left( \frac{-s}{r} \right)^{j-k} a_{nj} \right| = \sum_k |c_{nk}| \quad (\text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için})$$

$$(4.7) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{1}{r} \left[ \frac{1 - \left( \frac{-s}{r} \right)^{k+1}}{1 + \frac{s}{r}} \right] a_{nk} = \alpha_n \quad (\text{her } n \in \mathbf{N} \text{ için})$$

$$(4.8) \quad \sup_{k, m \in \mathbf{N}} \left| \frac{1}{r} \sum_{j=k}^m \left( \frac{-s}{r} \right)^{j-k} a_{nj} \right| < \infty$$

$$(4.9) \quad \sup_{n \in \mathbf{N}} \sum_k |c_{nk}|^q < \infty$$

$$(4.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_{nk} = \beta_k$$

$$(4.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k |c_{nk}| = \sum_k |\beta_k|$$

$$(4.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k c_{nk} = \beta$$

$$(4.13) \quad \sup_{k, n \in \mathbf{N}} |c_{nk}| < \infty$$

$$(4.14) \quad \sup_{k \in \mathbf{N}} \sum_n |c_{nk}| < \infty$$

$$(4.15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k c_{nk} = 0$$

$$(4.16) \quad \sup_{N, K \in F} \left| \sum_{n \in N} \sum_{k \in K} c_{nk} \right| < \infty$$

$$(4.17) \quad \sup_{N \in F} \sum_k \left| \sum_{n \in N} c_{nk} \right|^q < \infty$$

Burada  $F, N$  cümlesinin bütün sonlu alt cümlelerinin ailesini göstermektedir.

Teorem 4.1.'den aşağıdaki sonucu yazabiliriz:

- Sonuç 4.2.**  $\lambda \in \{ \hat{\ell}_\infty, \hat{c}, \hat{c}_0 \text{ ve } \hat{\ell}_p \}$  ve  $\mu \in \{ \ell_\infty, c, c_0, \ell_1 \}$  olmak üzere  $A \in (\lambda : \mu)$  olması için gerek ve yeter şartlar aşağıda verilmektedir:
- (i)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{\ell}_\infty : \ell_\infty)$  olması için; (4.5) ve (4.6) şartlarıyla  $q = 1$  için (4.9) şartının sağlanması gerek ve yeterdir.
  - (ii)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{c} : \ell_\infty)$  olması için; (4.5) ve (4.7) şartlarıyla  $q = 1$  için (4.4) ve (4.9) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.
  - (iii)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{c}_0 : \ell_\infty)$  olması için; (4.5) şartıyla  $q = 1$  için (4.4) ve (4.9) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.
  - (iv)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{\ell}_p : \ell_\infty)$  olması için; (4.4), (4.5) ve (4.9) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.
  - (v)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{\ell}_1 : \ell_\infty)$  olması için; (4.5), (4.8) ve (4.13) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.
  - (vi)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{\ell}_\infty : c)$  olması için; (4.5), (4.6), (4.10) ve (4.11) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.
  - (vii)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{c} : c)$  olması için; (4.5), (4.7), (4.10) ve (4.12) şartlarıyla  $q = 1$  için (4.4) ve (4.9) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.
  - (viii)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{c}_0 : c)$  olması için; (4.5) ve (4.10) şartlarıyla  $q = 1$  için (4.4) ve (4.9) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.
  - (ix)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{\ell}_p : c)$  olması için; (4.4), (4.5), (4.9) ve (4.10) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

- (x)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{\ell}_1 : c)$  olması için; (4.5), (4.8), (4.9) ve (4.10) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.
- (xi)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{\ell}_\infty : c_0)$  olması için; (4.5), (4.6) ve (4.15) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.
- (xii)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{c} : c_0)$  olması için;  $\beta_k = 0$  için (4.5), (4.7), (4.10) ve (4.12) şartlarıyla  $\beta = 0$  için (4.12) ve  $q = 1$  için (4.4) ve (4.9) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.
- (xiii)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{c}_0 : c_0)$  olması için;  $\beta_k = 0$  için (4.5) ve (4.10) şartlarıyla  $q = 1$  için (4.4) ve (4.9) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.
- (xiv)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{\ell}_p : c_0)$  olması için; (4.4), (4.5) ve (4.9) şartlarıyla  $\beta_k = 0$  için (4.10) şartının sağlanması gerek ve yeterdir.
- (xv)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{\ell}_1 : c_0)$  olması için;  $\beta_k = 0$  için (4.5), (4.8), (4.10) ve (4.13) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.
- (xvi)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{\ell}_\infty : \ell_1)$  olması için; (4.5), (4.6) ve (4.16) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.
- (xvii)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{c} : \ell_1)$  olması için; (4.5), (4.7) ve (4.16) şartlarıyla  $q = 1$  için (4.4) şartının sağlanması gerek ve yeterdir.
- (xviii)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{c}_0 : \ell_1)$  olması için; (4.5) ve (4.16) şartlarıyla  $q = 1$  için (4.4) şartının sağlanması gerek ve yeterdir.
- (xix)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{\ell}_p : \ell_1)$  olması için; (4.4), (4.5) ve (4.17) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.
- (xx)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{\ell}_1 : \ell_1)$  olması için; (4.5), (4.8) ve (4.14) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

Şimdi, Başar ve Altay tarafından [21] numaralı kaynakta verilen ve Sonuç 4.2'den yeni matris sınıflarının karakterizasyonlarını elde etmeği mümkün kılan yardımcı teoremi verelim:

**Yardımcı Teorem 4.3.**  $\lambda$  ve  $\mu$  iki dizi uzayı,  $A$  bir sonsuz matris ve  $U$  bir üçgen matris olsun. Bu durumda;  $A \in (\lambda: \mu_U)$  olması için gerek ve yeter şart,  $UA \in (\lambda: \mu)$  olmasıdır.

**İspat.**  $A$  bir sonsuz matris,  $U$  bir üçgen matris ve  $x = (x_k) \in \lambda$  olsun. Bu durumda; Wilansky [67, Teorem 1.1.4]'e dayanarak  $U(Ax) = (UA)x$  yazabiliriz. Bu ise;

$$“x \in \lambda \text{ için } Ax \in \mu_U \Leftrightarrow x \in \lambda \text{ için } (UA)x \in \mu”$$

çift gerektirmesini verir ki istenen de budur.  $\square$

Böylece, Sonuç 4.2’de bütün  $k, n \in \mathbb{N}$  ‘ler için  $a_{nk}$  yerine  $ra_{nk} + sa_{n-1,k}$  yazıp  $U = B(r,s)$  almakla Yardımcı Teorem 4.3’den  $\lambda, \mu \in \{\ell_\infty, c, c_0, \ell_p\}$  olmak üzere  $(\hat{\lambda} : \hat{\mu})$  sınıfını karakterize eden aşağıdaki sonuca sahip olabiliriz:

**Sonuç 4.4.**  $A = (a_{nk})$ , kompleks cisim üzerindeki bir matris ve  $C = (c_{nk})$  de bütün  $k, n \in \mathbb{N}$ ’ler için  $c_{nk} = ra_{nk} + sa_{n-1,k}$  ile tarif edilen matris olsun. Bu durumda;

- (i)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{\ell}_\infty : \hat{\ell}_\infty)$  olması için; (4.5) ve (4.6) şartlarıyla  $q = 1$  için (4.9) şartının  $a_{nk}$  yerine  $c_{nk}$  için sağlanması gerek ve yeterdir.
- (ii)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{c} : \hat{\ell}_\infty)$  olması için; (4.5) ve (4.7) şartlarıyla  $q = 1$  için (4.4) ve (4.9) şartlarının  $a_{nk}$  yerine  $c_{nk}$  için sağlanması gerek ve yeterdir.
- (iii)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{c}_0 : \hat{\ell}_\infty)$  olması için; (4.5) şartıyla  $q = 1$  için (4.4) ve (4.9) şartlarının  $a_{nk}$  yerine  $c_{nk}$  için sağlanması gerek ve yeterdir.
- (iv)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{\ell}_p : \hat{\ell}_\infty)$  olması için; (4.4), (4.5) ve (4.9) şartlarının  $a_{nk}$  yerine  $c_{nk}$  için sağlanması gerek ve yeterdir.
- (v)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{\ell}_1 : \hat{\ell}_\infty)$  olması için; (4.5), (4.8) ve (4.13) şartlarının  $a_{nk}$  yerine  $c_{nk}$  için sağlanması gerek ve yeterdir.
- (vi)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{\ell}_\infty : \hat{c})$  olması için; (4.5), (4.6), (4.10) ve (4.11) şartlarının  $a_{nk}$  yerine  $c_{nk}$  için sağlanması gerek ve yeterdir.

- (vii)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{c} : \hat{c})$  olması için; (4.5), (4.7), (4.10) ve (4.12) şartlarıyla  $q = 1$  için (4.4) ve (4.9) şartlarının  $a_{nk}$  yerine  $c_{nk}$  için sağlanması gerek ve yeterdir.
- (viii)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{c}_0 : \hat{c})$  olması için; (4.5) ve (4.10) şartlarıyla  $q = 1$  için (4.4) ve (4.9) şartlarının  $a_{nk}$  yerine  $c_{nk}$  için sağlanması gerek ve yeterdir.
- (ix)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{\ell}_p : \hat{c})$  olması için; (4.4), (4.5), (4.9) ve (4.10) şartlarının  $a_{nk}$  yerine  $c_{nk}$  için sağlanması gerek ve yeterdir.
- (x)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{\ell}_1 : \hat{c})$  olması için; (4.5), (4.8), (4.9) ve (4.10) şartlarının  $a_{nk}$  yerine  $c_{nk}$  için sağlanması gerek ve yeterdir.
- (xi)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{\ell}_\infty : \hat{c}_0)$  olması için; (4.5), (4.6) ve (4.15) şartlarının  $a_{nk}$  yerine  $c_{nk}$  için sağlanması gerek ve yeterdir.
- (xii)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{c} : \hat{c}_0)$  olması için;  $\beta_k = 0$  için (4.5), (4.7), (4.10) ve (4.12) şartlarıyla  $\beta = 0$  için (4.12) şartının ve  $q = 1$  için (4.4) ve (4.9) şartlarının  $a_{nk}$  yerine  $c_{nk}$  için sağlanması gerek ve yeterdir.
- (xiii)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{c}_0 : \hat{c}_0)$  olması için;  $\beta_k = 0$  için (4.5) ve (4.10) şartlarıyla  $q = 1$  için (4.4) ve (4.9) şartlarının  $a_{nk}$  yerine  $c_{nk}$  için sağlanması gerek ve yeterdir.
- (xiv)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{\ell}_p : \hat{c}_0)$  olması için; (4.4), (4.5) ve (4.9) şartlarıyla  $\beta_k = 0$  için (4.10) şartının  $a_{nk}$  yerine  $c_{nk}$  için sağlanması gerek ve yeterdir.
- (xv)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{\ell}_1 : \hat{c}_0)$  olması için;  $\beta_k = 0$  için (4.5), (4.8), (4.10) ve (4.13) şartlarının  $a_{nk}$  yerine  $c_{nk}$  için sağlanması gerek ve yeterdir.
- (xvi)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{\ell}_\infty : \hat{\ell}_1)$  olması için; (4.5), (4.6) ve (4.16) şartlarının  $a_{nk}$  yerine  $c_{nk}$  için sağlanması gerek ve yeterdir.
- (xvii)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{c} : \hat{\ell}_1)$  olması için; (4.5), (4.7) ve (4.16) şartlarıyla  $q = 1$  için (4.4) şartının  $a_{nk}$  yerine  $c_{nk}$  için sağlanması gerek ve yeterdir.
- (xviii)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{c}_0 : \hat{\ell}_1)$  olması için; (4.5) ve (4.16) şartlarıyla  $q = 1$  için (4.4) şartının  $a_{nk}$  yerine  $c_{nk}$  için sağlanması gerek ve yeterdir.
- (xix)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{\ell}_p : \hat{\ell}_1)$  olması için; (4.4), (4.5) ve (4.17) şartlarının  $a_{nk}$  yerine  $c_{nk}$  için sağlanması gerek ve yeterdir.

(xx)  $A = (a_{nk}) \in (\hat{\ell}_1 : \hat{\ell}_1)$  olması için; (4.5), (4.8) ve (4.14) şartlarının  $a_{nk}$  yerine  $c_{nk}$  için sağlanması gerek ve yeterdir.

## KAYNAKLAR

1. Ahmad, Z. U., Mursaleen, *Köthe-Toeplitz duals of some new sequence spaces and their matrix maps*, Publ. Inst. Math. (Beograd) 42, 57-61, 1987.
2. Altay, B., *On the space of  $p$ -summable difference sequences of order  $m(1 \leq p < \infty)$* , Stud. Sci. Math. Hungar. 43(4), 387-402, 2006.
3. Altay, B., Başar, F., *On the paranormed Riesz sequence spaces of non-absolute type*, Southeast Asian Bull. Math. 26(5), 701-715, 2002.
4. Altay, B., Başar, F., *Some Euler Sequence Spaces of non-absolute type*, Ukrainian Math. J. 57(1), 1-17, 2005.
5. Altay, B., Başar, F., *Some paranormed Riesz sequence spaces of non-absolute type*, Southeast Asian Bull. Math. 30(5), 591-608, 2006
6. Altay, B., Başar, F., Mursaleen, M., *On the Euler sequence spaces which include the spaces  $l_p$  and  $l_\infty I$* , Inform. Sci. 176(10), 1450-1462, 2006.
7. Altay, B., Başar, F., *Some paranormed sequence spaces of non-absolute type derived by weighted mean*, J. Math. Anal. Appl. 319(2), 494-508, 2006.
8. Altay, B., Başar, F., *Generalisation of the sequence space  $l(p)$  derived by weighted mean*, J. Math. Anal. Appl. 330(1), 174-185, 2007.
9. Altay, B., Başar, F., *Certain topological properties and duals of the matrix domain of a triangle matrix in a sequence spaces*, J. Math. Anal. Appl. 336(1), 632-645, 2007.
10. Altay, B., Başar, F., *The matrix domain and the fine spectrum of the difference operator  $\Delta$  on the sequence spaces  $l_p$ , ( $0 < p < 1$ )*, Commun. Math. Anal. 2(2), 1-11, 2007.

11. Asma, Ç., Çolak, R., On the Köthe-Toeplitz duals of some generalized sets of difference sequences, *Demonstratio Math.*, 33, 797-803, 2000.
12. Aydın, C., Başar, F., *On the new sequence spaces which include the spaces  $c_0$  and  $c$* , *Hokkaido Math. J.* 33(2), 383-398, 2004.
13. Aydın, C., Başar, F., *Some new paranormed sequence spaces*, *Inform. Sci.* 160 (1-4), 27-40, 2004.
14. Aydın, C., Başar, F., *Some new difference sequence spaces*, *Appl. Math. Comput.* 157(3), 677-693, 2004.
15. Aydın, C., Başar, F., *Some new sequence spaces which include the spaces  $\ell_p$  and  $\ell_\infty$* , *Demonstratio Math.* 38(3), 641-656, 2005.
16. Aydın, C., Başar, F., *Some generalizations of the sequence space  $a_p^r$* , *Iran. J. Sci. Technol. Trans. A, Sci.* 30, No. A2, 175-190, 2006.
17. Başar, F., *Infinite matrices and almost boundedness*, *Boll. Un. Mat. Ital.* A(7)6, no.3, 395-402, 1992.
18. Başar, F., *Infinite matrices and Cesàro sequence spaces of non-absolute type*, *Math. J. Ibaraki Univ.* 31, 1-12, 1999.
19. Başar, F., *A note on the triangle limitation methods*, *Fırat Üniv. Fen & Müh. Bil. Dergisi* 5(1), 113-117, 1993.
20. Başar, F., Altay, B., *Matrix mappings on the space  $bs(p)$  and its  $\alpha$ -,  $\beta$ - and  $\gamma$ -duals*, *Aligarh Bull. Math.* 21(1), 79-91, 2001.
21. Başar, F., Altay, B., *On the space of sequences of  $p$ -bounded variation and related matrix mappings*, *Ukrainian Math. J.* 55(1), 136-147, 2003.
22. Başar, F., Altay, B., Mursaleen, M., *Some generalizations of the space  $bv_p$  of  $p$ -bounded variation sequences*, *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.* 68(2), 273-287, 2008.
23. Başar, F., Kirişci, M., *Almost convergence and generalized difference matrix*, yazışma safhasında.
24. Başarıır, M.; *On some new sequence spaces and related matrix transformations*, *Indian J. Pure Appl. Math.* 26(10), 1003-1010, 1995.

25. Bektaş, Ç.A., *On some new generalized sequence spaces*, J. Math. Anal. Appl. 277, 681-688, 2003.
26. Choudhary, B., Mishra, S.K., *On the Köthe-Toeplitz duals of certain sequence spaces and their matrix transformations*, Indian J. Pure Appl. Math. 24(5), 291-301, 1993.
27. Choudhary, B., Mishra, S.K., *A note on certain sequence spaces*, J. Analysis 1, 139-148, 1993.
28. Çolak, R., Et, M., *On some generalized difference sequence spaces and related matrix transformations*, Hokkaido Math. J. 26(3), 483-492, 1997.
29. Çolak, R., Et, M., Malkowsky, E., *Some Topics of Sequence Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Firat Univ., Firat Univ. Press, Elâzığ, Turkey, 2004.
30. Et, M., *On some difference sequence spaces*, Turkish J. Math. 17, 18-24, 1993.
31. Et, M., *On some generalized Cesàro difference sequence spaces*, İstanbul Üniv. Fen Fak. Mat. Derg. 55-56, 221-229, 1996-1997.
32. Et, M., Çolak, R., *On some generalized difference sequence spaces*, Soochow J. Math. 21(4), 377-386, 1995.
33. Et, M., Başarır, M., *On some new generalized difference sequence spaces*, Period. Math. Hung. 35(3), 169-175, 1997.
34. Gaur, A. K., Mursaleen, M., *Difference sequence spaces*, Internat. J. Math. Math. Sci. 21(4), 701—706, 1998.
35. Gnanaseelan, C., Srivastava, P. D., *The  $\alpha^-$ ,  $\beta^-$  and  $\gamma^-$  duals of some generalised difference sequence spaces*, Indian J. Math. 38(2), 111—120, 1996.
36. Grosse-Erdmann, K.-G., *On  $l^1$ -invariant sequence spaces*, J. Math. Anal. Appl., 262, 112-132, 2001.
37. Jarrah, A.M., Malkowsky, E., *BK spaces, bases and linear operators*, Rendiconti Circ. Mat. Palermo II 52, 177-191, 1990.
38. Kamthan, P.K., Gupta, M., *Sequence Spaces and Series*, Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 1981.
39. Khan, F.M., Rahman, M.F., *Matrix transformations on Cesàro sequence spaces of non-absolute type*, J. Analysis 4, 97-101, 1996.
40. Kızmaz, H., *On certain sequence spaces*, Canad. Math. Bull. 24(2), 169-176, 1981.

41. Lascarides, C.G., Maddox, I.J., *Matrix transformations between some classes of sequences*, Proc. Camb. Phil. Soc., 68, 99-104, 1970.
42. Lorentz, G.G., *A contribution to the theory of divergent sequences*, Acta Math. 80, 167-190, 1948.
43. Maddox, I.J., *Spaces of strongly summable sequences*, Quart. J. Math., Oxford (2), 18, 345-355, 1967.
44. Maddox, I.J., *Paranormed sequence spaces generated by infinite matrices*, Proc. Camb. Phil. Soc., 64, 335-340, 1968.
45. Maddox, I.J., *Elements of Functional Analysis*, The University Press, 2<sup>nd</sup> ed. Cambridge, 1988.
46. Malafosse, B. de, *Properties of some sets of sequences and application to the spaces of bounded difference sequences of order  $\mu$* , Hokkaido Math. J. 31, 283-299, 2002.
47. Malkowsky, E., *Absolute and ordinary Köthe-Toeplitz duals of some sets of sequences and matrix transformations*, Publ. Inst. Math. (Beograd) 46(60), 97-103, 1989.
48. Malkowsky, E., *A note on the Köthe-Toeplitz duals of generalized sets of bounded and convergent difference sequences*, J. Anal. 4, 81—91, 1996.
49. Malkowsky, E., *Recent results in the theory of matrix transformations in sequence spaces*, Mat. Vesnik 49, 187-196, 1997.
50. Malkowsky, E., Savaş, E., *Matrix transformations between sequence spaces of generalized weighted means*, Appl. Math. Comput. 147, 333-345, 2004.
51. Malkowsky, E., Mursaleen, M., *Some matrix transformations between the difference sequence spaces  $\Delta c_0(p)$ ,  $\Delta c(p)$  and  $\Delta l_\infty(p)$* , Filomat No. 15, 353—363, 2001.
52. Malkowsky, E., Mursaleen, M., Suantai, S., *The dual spaces of sets of difference sequences of order  $m$  and matrix transformations*, Acta Math. Sin. Eng. Ser. 23(3), 521-532, 2007.
53. Malkowsky, E., Mursaleen, M., Qamaruddin, *Generalized sets of difference sequences, their duals and matrix transformations*, Sequence spaces and applications, Narosa, New Delhi, 1999.

54. Malkowsky, E., Parashar, S. D., *Matrix transformations in space of bounded and convergent difference sequence of order  $m$* , Analysis 17, 87-97, 1997.
55. Mishra, S.K., *Matrix maps involving certain sequence spaces*, Indian J. Pure Appl. Math. 24(2), 125—132, 1993.
56. Mursaleen, M., *Generalized spaces of difference sequences*, J. Math. Anal. Appl. 203(3), 738-745, 1996.
57. Mursaleen, M., Altay, B., Başar, F., *On the Euler sequence spaces which include the spaces  $l_p$  and  $l_\infty$  II*, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 65(3), 707-717, 2006.
58. Mursaleen, M., Gaur, A.K., Saifi, A.H., *Some new sequence spaces and their duals and matrix transformations*, Bull. Calcutta Math. Soc. 88(3), 207—212, 1996.
59. P.-N. Ng, P.-Y. Lee, *Cesàro sequence spaces of non-absolute type*, Comment. Math. Prace Mat. 20(2), 429-433, 1978.
60. Polat, H., Başar, F., *Some Euler spaces of difference sequences of order  $m$* , Acta Math. Sci. 27B(2), 254-266, 2007.
61. Powell, R.E., Shah, S.M., *Summability Theory and Its Applications*, Van Nostrand Reinhold Company, London-New York-Cincinnati-Toronto-Melbourne, 1972.
62. Rhoades, B.E., *Some sequence spaces which include  $c_0$  and  $c$* , Hokkaido Math. J. 35, 587-599, 2006.
63. Sarıgöl, M.A., *On Difference Sequence Spaces*, J. Karadeniz Tech. Univ. Fac. Arts Sci. Ser. Math.-Phys. 10, 63-71, 1987.
64. Stieglitz, M., Tietz, H., *Matrix transformationen von folgenräumen eine ergebnisübersicht*, Math. Z. 154, 1-16, 1977.
65. Şengönül, M., Başar, F., *Some new Cesàro sequence spaces of non-absolute type which include the spaces  $c_0$  and  $c$* , Soochow J. Math. 31(1), 107-119, 2005.
66. Siddiqi, J.A., *Infinite matrices summing every almost periodic sequences*, Pac. J. Math., 39(1), 235-251, 1971.
67. Wang, C.-S., *On Nörlund sequence spaces*, Tamkang J. Math. 9, 269-274, 1978.
68. Willansky, A., *Summability through Functional Analysis*, North-Holland Mathematics Studies, Amsterdam-New York-Oxford, 1984.

**ÖZGEÇMİŞ**

Murat KİRİŞCİ, 1971 yılında İstanbul'da doğmuştur. İlk ve orta öğrenimini İstanbul'da tamamladı. Atatürk Üniversitesi Fen - Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1993 yılında mezun oldu. 1993 – 1999 yılları arasında Harran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalıştı. Yüksek lisansını, 1995 yılında Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda "Orlicz Dizi Uzayları" adlı tez ile tamamladı. 1996 yılında Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne doktora öğrencisi olarak kabul edildi. Hâlen İstanbul'da kamu idarecisi olarak görev yapmaktadır.

**İletişim Bilgileri:**

Mehmet Akif Mh. Hicret Sk. 25/16  
Ümraniye/İSTANBUL

Tel: 0 216 527 66 93

e-posta : mkirisci@hotmail.com