

**T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**NEWTONYEN OLMAYAN YENİ BİR AKIŞKAN MODELİNDE
KARARSIZ AKIŞ İÇİN SINIR TABAKASI DENKLEMLERİNİN
BENZERLİK ÇÖZÜMLERİNİN ARAŞTIRILMASI**

ALİ KEÇEBAŞ

Danışman: Prof. Dr. Mustafa BAYHAN

II. Danışman: Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY

**DOKTORA TEZİ
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
ISPARTA – 2011**

TEZ ONAYI

Ali KEÇEBAŞ tarafından hazırlanan “**Newtonyen Olmayan Yeni Bir Akışkan Modelinde Kararsız Akış için Sınır Tabakası Denklemlerinin Benzerlik Çözümlerinin Araştırılması**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Süleyman Demirel Üniversitesi Makina Mühendisliği Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Mustafa BAYHAN
Süleyman Demirel Üniversitesi Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

II. Danışman : Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY
Afyon Kocatepe Üniversitesi Otomotiv Mühendisliği Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri :
Prof. Dr. Mustafa ACAR
Süleyman Demirel Üniversitesi Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Prof. Dr. Osman İPEK
Süleyman Demirel Üniversitesi Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Doç. Dr. Yılmaz İÇAĞA
Afyon Kocatepe Üniversitesi Yapı Eğitimi Anabilim Dalı

Doç. Dr. Ali BOLATTÜRK
Süleyman Demirel Üniversitesi Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Yrd. Doç. Dr. Mustafa Reşit USAL
Süleyman Demirel Üniversitesi İmalat Mühendisliği Anabilim Dalı

Prof. Dr. Mustafa KUŞCU

Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	i
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
SİMGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. MATERYAL VE YÖNTEM	9
2.1. Hareket Denklemleri	9
2.1.1. Tensörel formda hareket denklemleri	9
2.2.2. Kartezyen koordinat sistemine göre hareket denklemleri.....	11
2.2. Sınır Tabakası Denklemleri.....	21
2.2.1. Üçüncü dereceden Power-Law akışkanları için sınır tabakası denklemleri.....	22
2.2.2. İkinci dereceden Power-Law akışkanları için sınır tabakası denklemleri.....	27
2.3. Üçüncü Dereceden Power-Law Akışkanına Ait Sınır Tabakası Denklemlerinin Lie Grup Analizi	30
2.3.1. Lie Grup Analizi	31
2.3.1.1. Ölçekleme dönüşümü.....	46
2.3.1.2. Öteleme dönüşümü	50
2.3.2. İkinci defa Lie Grup Analizi	51
2.4. İkinci Dereceden Power-Law Akışkanına Ait Sınır Tabakası Denklemlerinin Benzerlik Çözümleri	56
2.4.1. Benzerlik dönüşümü	57
3. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	61
3.1. Üçüncü Dereceden Power-Law Akışkanına Ait Sınır Tabakası Denklemlerinin Nümerik Çözümleri	61
3.2. İkinci Dereceden Power-Law Akışkanına Ait Sınır Tabakası Denklemlerinin Nümerik Çözümleri	84
4. SONUÇ	91
5. KAYNAKLAR	95

EKLER.....	99
ÖZGEÇMİŞ	102

ÖZET

Doktora Tezi

NEWTONYEN OLMAYAN YENİ BİR AKIŞKAN MODELİNDE KARARSIZ AKIŞ İÇİN SINIR TABAKASI DENKLEMLERİNİN BENZERLİK ÇÖZÜMLERİNİN ARAŞTIRILMASI

Ali KEÇEBAS

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa BAYHAN

Bu çalışmada, Newtonyen olmayan yeni bir akışkan modeli için iki boyutlu, kararsız akışlı, laminar sınır tabakası denklemleri ele alınmıştır. Bu model, Power-Law akışkan modeli ile ikinci ve üçüncü derece akışkan modellerinin bir birleşimidir. İlk önce yeni modele ait genel hareket denklemleri çıkartılmıştır. Sonra, sınır tabakası yaklaşımı kullanılarak ikinci dereceden Power-Law ve üçüncü dereceden Power-Law akışkanlarına ait sınır tabakası denklemleri elde edilmiştir. Sonuçların genel olabilmesi için denklemler ve sınır şartları boyutsuzlaştırılmıştır. Üçüncü dereceden Power-Law akışkanına ait sınır tabakası denklemlerinin çözümleri gerçekleştirilmiştir. Çözüm için denklemlere Lie Grup analizi uygulanmıştır. Lie Grup analizi uygulanarak denklemlerin kabul ettiği infinitesimal jeneratörler bulunmuştur. Ölçekleme ve öteleme simetrileri kullanarak denklemler iki değişkenli kısmi diferansiyel denklemlere dönüştürülmüştür. Elde edilen bu denklemlere yeniden Lie Grubu analizi uygulanmıştır. Elde edilen yeni simetriler ile denklemler iki farklı adi diferansiyel denklem sistemine dönüşmüştür. Sonuçta bu iki farklı adi diferansiyel denklem sistemi Runge-Kutta algoritması ile nümerik olarak çözülmüştür. Nümerik çözümlerde sınır değer problemi olarak hareketli yüzey üzerindeki emme-püskürtmeli akış problemi incelenmiştir. Çözümlerde iki farklı denklem sisteminde de aynı nümerik sonuçlar görülmüştür. Kabaran veya incelen bir akışkanda Newtonyen olmayan etkiler arttığında, sınır tabakasının kalınlaştığı sonucuna varılmıştır. Newtonyen olmayan akışkan katsayısının küçük değerlerinde Power-Law akışkanının özellikleri de görülmektedir. Tezin sonraki bölümünde ikinci dereceden Power-Law akışkanına ait sınır tabakası denklemlerinin çözümü yapılmıştır. Bu akışkana ait sınır tabakası denklemleri kısmi diferansiyel denklem olup benzerlik dönüşümleri ile denklemler adi diferansiyel denklem formuna indirgenmiştir. Klasik sınır tabakası şartları için adi diferansiyel denklem sistemi, sonlu farklar algoritması kullanılarak nümerik olarak çözülmüştür. Elde edilen çözümlere göre ikinci derece katsayı değerleri arttığında sınır tabakasının kalınlaştığı gözlenmektedir. Power-Law üssünün kayma kalınlaşması durumundaki değerleri arttıkça sınır tabakasının incelendiği görülmüştür. Halbuki, Power-Law üssünün kayma incilmesi durumunda sınır tabakasının kalınlaştığı görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Newtonyen olmayan akışkan, sınır tabakası akışı, kararsız akış, benzerlik çözümü.

2011, 105 sayfa

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

INVESTIGATION OF SIMILARITY SOLUTIONS OF BOUNDARY LAYER EQUATIONS FOR UNSTEADY FLOW IN A NEW NON-NEWTONIAN FLUID MODEL

Ali KEÇEBAŞ

**Süleyman Demirel University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mechanical Engineering**

Supervisor: Prof. Mustafa BAYHAN

In this study, two dimensional, unsteady flow, laminar boundary layer equations for a new non-Newtonian fluid model are treated. This model is a combination of Power-Law fluid model, second and third grade fluid models. First of all, the general equations of motion regarding this new model are derived. Then, by using boundary layer approach, the boundary layer equations for Power-Law of second grade and Power-Law of third grade fluids are obtained. To be able to generalize results, these equations and boundary conditions have been made dimensionless. Solutions of the boundary layer equations for Power-Law of third grade fluids are performed. For solution, the Lie Group analysis is applied. The infinitesimal generators accepted by the equations are calculated by using Lie Group analysis. By using scaling and translation symmetries, equations are transformed into partial differential equations with two variables. Lie Groups are further applied to these equations obtained. When using the infinitesimal generators of these equations, equations are transformed into two different ordinary differential systems. Finally, two different ordinary differential systems are solved with Runge-Kutta algorithm numerically. The flow over a moving surface, with suction or injection is examined as the boundary value problem in numeric solutions. For these two different systems from the solutions, it is seen in same numerical results. It is seen that the boundary layer becomes thicker when the third grade fluid coefficient increases. It is deduced that in a fluid exhibited shear thinning and shear thickening behaviors, the boundary layer gets thicker when non-Newtonian effects increase. In the minor values of non-Newtonian fluid coefficient, Power-Law fluid behaviors are also seen. In the following of the theses, solutions of the boundary layer equations for Power-Law of second grade fluids are performed. These equations are partial differential equation system and are transformed into an ordinary differential equation system via similarity transformation. For classical boundary layer conditions, these equations are solved by using finite difference algorithm numerically. According to the obtained solutions, it is observed that the boundary later gets thicker when the second grade fluid coefficient increases. Thinning the boundary layer is observed for increasing values in shear thickening case of Power-Law exponent. Whereas, in shear thinning case of its, thickening the boundary layer is observed.

Key Words: Non-Newtonian fluid, boundary layer flow, unsteady flow, similarity solution.

2011, 105 pages

TEŞEKKÜR

Bu çalışma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli danışman hocam Prof. Dr. Mustafa BAYHAN'a çok teşekkür ederim. Saygıdeğer hocam ve ikinci tez danışmanım Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY hem tezle ilgili ön bilgiyi vermiş hem de tez sırasında mükemmel yönlendirme ve katkılarıyla çalışmanın kısa sürede bitmesine yardımcı olmuştur. Değerli hocamın en zor ve sıkıntılı anlardaki yardımları benim için büyük bir güç kaynağı olmuştur. Bundan sonraki çalışmalarında kendisinden öğrendiklerim bana iyi bir rehber olacaktır ve kendisine sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Araştırmanın yürütülmesinde maddi ve manevi yardımlarını gördüğüm Yrd. Doç. Dr. Mustafa Reşit USAL hocama ve araştırma görevlisi arkadaşlarım Mehmet YUMURTACI, Özgür VERİM, Muhammet KAYFECİ ve Engin GEDİK olmak üzere burada adlarını sayamadığım bilgi, kaynak ve görüşleriyle her zaman yardımcı olmaya çalışan tüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi borç bilirim.

Tezimin her aşamasında beni yalnız bırakmayan değerli eşim Pınar KEÇEBAŞ'a ve Mart ayında doğacak kızıma sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Ali KEÇEBAŞ
ISPARTA, 2011

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.	Sınır tabakası akışı	22
Şekil 2.2.	Hareket eden emme veya püskürtmeli yatay plaka üzerinde akış.....	26
Şekil 2.3.	Sabit yatay plaka üzerinde akış	29
Şekil 3.1.	Farklı pozitif m değerleri için μ ile M fonksiyonun değişimi ($k=0.5$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=2$).....	63
Şekil 3.2.	Farklı pozitif m değerleri için μ ile M fonksiyonun değişimi ($k=0$, $c_1=1$, $c_2=-1$, $c_3=2$)	63
Şekil 3.3.	Farklı pozitif m değerleri için μ ile M fonksiyonun değişimi ($k=3$, $c_1=1$, $c_2=-1$, $c_3=2$)	64
Şekil 3.4.	Farklı pozitif m değerleri için μ ile M' fonksiyonun değişimi ($k=0.5$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=2$).....	64
Şekil 3.5.	Farklı negatif m değerleri için μ ile M fonksiyonun değişimi ($k=0$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=2$).....	65
Şekil 3.6.	Farklı negatif m değerleri için μ ile M fonksiyonun değişimi ($k=0.5$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=2$).....	65
Şekil 3.7.	Farklı negatif m değerleri için μ ile M fonksiyonun değişimi ($k=3$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=2$).....	66
Şekil 3.8.	Farklı negatif m değerleri için μ ile M' fonksiyonun değişimi ($k=0.5$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=2$).....	66
Şekil 3.9.	Farklı c_2 değerleri için μ ile M fonksiyonun değişimi ($k=0.5$, $m=0.6$, $c_1=1$, $c_3=2$; $c_2=1$ (_ _ _), $c_2=-1$ (____))	67
Şekil 3.10.	Farklı c_2 değerleri için μ ile M fonksiyonun değişimi ($k=0.5$, $m=-0.6$, $c_1=1$, $c_3=2$; $c_2=1$ (_ _ _), $c_2=-1$ (____)).....	67
Şekil 3.11.	Farklı k değerleri için μ ile M fonksiyonun değişimi ($m=0.4$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=2$).....	68
Şekil 3.12.	Farklı k değerleri için μ ile M fonksiyonun değişimi ($m=-0.4$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=2$)	68
Şekil 3.13.	Farklı k değerleri için μ ile M fonksiyonun değişimi ($m=0.4$, $c_1=1$, $c_2=-1$, $c_3=2$)	69
Şekil 3.14.	Farklı k değerleri için μ ile M fonksiyonun değişimi ($m=-0.4$, $c_1=1$, $c_2=-1$, $c_3=2$).....	69
Şekil 3.15.	Farklı pozitif m değerleri için α ile K fonksiyonun değişimi ($k=0.5$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=2$).....	72
Şekil 3.16.	Farklı pozitif m değerleri için α ile K fonksiyonun değişimi ($k=0$, $c_1=1$, $c_2=-1$, $c_3=2$)	72

Şekil 3.17. Farklı pozitif m değerleri için α ile K fonksiyonun değişimi ($k=3, c_1=1, c_2=-1, c_3=2$)	73
Şekil 3.18. Farklı pozitif m değerleri için α ile L fonksiyonun değişimi ($k=0.5, c_1=1, c_2=1, c_3=2$)	73
Şekil 3.19. Farklı pozitif m değerleri için α ile K' fonksiyonun değişimi ($k=0.5, c_1=1, c_2=1, c_3=2$)	74
Şekil 3.20. Farklı negatif m değerleri için α ile K fonksiyonun değişimi ($k=0, c_1=1, c_2=1, c_3=2$)	74
Şekil 3.21. Farklı negatif m değerleri için α ile K fonksiyonun değişimi ($k=0.5, c_1=1, c_2=1, c_3=2$)	75
Şekil 3.22. Farklı negatif m değerleri için α ile K fonksiyonun değişimi ($k=3, c_1=1, c_2=1, c_3=2$)	75
Şekil 3.23. Farklı negatif m değerleri için α ile L fonksiyonun değişimi ($k=0.5, c_1=1, c_2=1, c_3=2$)	76
Şekil 3.24. Farklı negatif m değerleri için α ile K' fonksiyonun değişimi ($k=0.5, c_1=1, c_2=1, c_3=2$)	76
Şekil 3.25. Farklı c_2 değerleri için α ile K fonksiyonun değişimi ($k=0.5, m=0.6, c_1=1, c_3=2; c_2=1$ (_ _ _), $c_2=-1$ (____))	77
Şekil 3.26. Farklı c_2 değerleri için α ile K fonksiyonun değişimi ($k=0.5, m=-0.6, c_1=1, c_3=2; c_2=1$ (_ _ _), $c_2=-1$ (____))	77
Şekil 3.27. Farklı c_2 değerleri için α ile L fonksiyonun değişimi ($k=0.5, m=0.6, c_1=1, c_3=2; c_2=1$ (_ _ _), $c_2=-1$ (____))	78
Şekil 3.28. Farklı c_2 değerleri için α ile L fonksiyonun değişimi ($k=0.5, m=-0.6, c_1=1, c_3=2; c_2=1$ (_ _ _), $c_2=-1$ (____))	78
Şekil 3.29. Farklı k değerleri için α ile K fonksiyonun değişimi ($m=0.4, c_1=1, c_2=1, c_3=2$)	79
Şekil 3.30. Farklı k değerleri için α ile K fonksiyonun değişimi ($m=-0.4, c_1=1, c_2=1, c_3=2$)	79
Şekil 3.31. Farklı k değerleri için α ile K fonksiyonun değişimi ($m=0.4, c_1=1, c_2=-1, c_3=2$)	80
Şekil 3.32. Farklı k değerleri için α ile K fonksiyonun değişimi ($m=-0.4, c_1=1, c_2=-1, c_3=2$)	80
Şekil 3.33. Farklı k değerleri için α ile L fonksiyonun değişimi ($m=0.4, c_1=1, c_2=1, c_3=2$)	81
Şekil 3.34. Farklı k değerleri için α ile L fonksiyonun değişimi ($m=-0.4, c_1=1, c_2=1, c_3=2$)	81
Şekil 3.35. Farklı k değerleri için α ile L fonksiyonun değişimi ($m=0.4, c_1=1, c_2=-1, c_3=2$)	82

Şekil 3.36. Farklı k değerleri için α ile L fonksiyonun değişimi ($m=-0.4$, $c_1=1$, $c_2=-1$, $c_3=2$)	82
Şekil 3.37. x bileşenindeki hızla ilgili olan benzerlik fonksiyonu üzerine k ikinci derece katsayısının etkisi ($m=0.1$)	86
Şekil 3.38. Y bileşenindeki hızla ilgili olan benzerlik fonksiyonu üzerine k ikinci derece katsayısının etkisi ($m=0.1$)	87
Şekil 3.39. x bileşenindeki hızla ilgili olan benzerlik fonksiyonu üzerine m pozitif Power-Law üssünün etkisi ($k=1$)	87
Şekil 3.40. Y bileşenindeki hızla ilgili olan benzerlik fonksiyonu üzerine m pozitif Power-Law üssünün etkisi ($k=1$)	88
Şekil 3.41. x bileşenindeki hızla ilgili olan benzerlik fonksiyonu üzerine m negatif Power-Law üssünün etkisi ($k=0.2$)	88
Şekil 3.42. Y bileşenindeki hızla ilgili olan benzerlik fonksiyonu üzerine m negatif Power-Law üssünün etkisi ($k=0.2$)	89

SİMGELER DİZİNİ

A_1, A_2	Rivlin Ericksen tensörleri
t	Kayma gerilmesi
x, y	Mekan koordinatları
u	Sınır tabakası içinde akış hızının x yönündeki bileşeni
v	Sınır tabakası içinde akış hızının y yönündeki bileşeni
ρ	Akışkan yoğunluk
ν	Kinematik viskozite
μ	Dinamik viskozite
μ, α	İkinci defa Lie Grup dönüşümündeki benzerlik değişkenleri (Dördüncü Bölüm)
$\alpha_1, \alpha_2, \beta$	Newtonyen olmayan akışkan sabitleri
grad	Gradyan operatörü
div	Diverjans operatörü
$\mathbf{v}$	Hız vektörü
$\mathbf{L}$	Hız vektörünün gradyanı
t	Zaman
p	Basınç
$\mathbf{I}$	Birim matris
m	Power-Law akışkan üssü
tr, T	Bir matrisin transpozese
$\mathbf{v}_t$	Hız vektörünün zamana göre türevi
ω	Hızın rotasyonu
∇	Gradyan operatörü
Y	Sınır tabakası içerisinde genişletilmiş düşey koordinat (Üçüncü Bölüm)
X, Y, Z	İnfinitesimal jeneratörler (Dördüncü Bölüm)
δ	Sınır tabakasının kalınlığı (Üçüncü Bölüm)
δ, β	Ölçekleme dönüşümündeki benzerlik değişkenleri (Dördüncü Bölüm)
ε	μ dinamik viskozite ile ilgili boyutsuz parametre
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$	Sırasıyla α_1 ve α_2 ile ilgili boyutsuz parametre
ε_3	β ile ilgili boyutsuz parametre

V_0	Karakteristik hız
L	Karakteristik uzunluk (Üçüncü Bölüm)
M, N, K, L	İkinci defa Lie Grup dönüşümündeki mertebesi indirilmiş denklemlerdeki bağımlı değişkenler (Dördüncü Bölüm)
U	Sınır tabakası dışında x yönündeki hız dağılımı
A	Hareketli plakanın x yönündeki hızı
V	Hareketli plakanın emme veya püskürtme hızı
k_1	ε_1 ve ε_2 ile ilgili boyutsuz ikinci dereceden akışkan katsayısı
k_3	ε_3 ile ilgili boyutsuz üçüncü dereceden akışkan katsayısı
k	Newtonyen olmayan boyutsuz akışkan katsayısı
D_i	Türev operatörü
ξ_i, η^μ	Jeneratör bileşenleri (Dördüncü Bölüm)
ξ	Benzerlik değişkeni (Beşinci Bölüm)
a	Ölçekleme parametresi
$\mathbf{b}$	Birim kütle başına düşen dış kuvvet (İkinci Bölüm)
b	Öteleme parametresi (t koordinatında) (Dördüncü Bölüm)
f	Sınır tabakası dışındaki hız dağılımı ile ilgili keyfi fonksiyon (Dördüncü Bölüm)
f, g	Benzerlik fonksiyonları (Beşinci Bölüm)
h_1, h_2	Sonsuz parametre Lie Grup dönüşümüne karşılık gelen fonksiyonlar
γ, λ	Öteleme dönüşümündeki benzerlik değişkenleri (Dördüncü Bölüm)
λ	Keyfi sabit (Beşinci Bölüm)
P, Q, R, S	İlk Lie Grup analizinde mertebesi indirilmiş denklemlerdeki bağımlı değişkenler

1. GİRİŞ

Günümüzde gelişen bilgi ve teknoloji ile akışkanlar mekaniğinin öneminin ne kadar büyük olduğu görülmektedir. İnsandaki kan dolaşımından roketlere kadar çok çeşitli alanlarla doğrudan doğruya ilgili olan akışkanlar mekaniği, bütün mühendislik alanlarında ve bilim dallarında kaçınılmaz bir bilgi kaynağı durumuna gelmiştir. Yakın tarihe kadar akışkanlar mekaniği bilimi, hidrolik adı altında ele alınmaktaydı. Hidroliğin genellikle su ile uğraşması, kapsadığı akışkan sorunlarının çok sınırlı kalması ve deneysel sonuçların matematik temelinden yoksun olması dolayısı ile genelleştirilememesi ve olayların nedenlerine inilememesi gibi gerekçeler nedeniyle hidrolik bilimi hızla gelişen tekniğin getirdiği sorunlara karşılık veremez duruma gelmiştir. Böylece akışkanlar mekaniği ve hidrolik bilimi kısmen ayrılmıştır. Şimdilerde ise akışkanlar mekaniği, diğer bilim ve mühendislik dallarında olduğu gibi o kadar genişlemiştir ki akışkanlar mekaniği başlı başına incelenebilecek bir alana dönüşmüştür.

Akışkan, günlük hayatta her ne kadar konulduğu kabın şeklini alan maddeler olarak tarif edilse de bugün teknik bilimde en küçük bir kayma gerilmesi uygulandığında sürekli deforme olan madde olarak tanımlanmaktadır. Yapılan çalışmalar sonucunda birçok gerçek akışkanın, özellikle düşük moleküler ağırlığa sahip olanların mekanik davranışları Navier-Stokes teorisi tarafından doğru olarak belirlenmektedir. Bu teorinin uygulanabildiği akışkanlar Newtonyen akışkanlar olarak adlandırılmaktadır. Kararlı bir halde akan akışkanda, hız değişimi ile uygulanan kayma gerilimi arasındaki ilişki lineer olan akışkanlar Newtonyen akışkanlar olarak da tanımlanabilir. Newtonyen olmayan akışkanlarda ise hız değişimi ile uygulanan kayma gerilimi arasındaki ilişki lineer değildir. Aldığımız nefes, hava, su, süt ve benzin Newtonyen akışkanlara örnek verilebilir. Bunun yanında Newtonyen olmayan akışkanlar da günlük hayatta oldukça fazla karşılaştığımız akışkanlardır. Örnek olarak bal, hamur, sulandırılmış nişasta, yumurta akı, bitkisel yağlar bu gruba girerler. Her yerde kullanılan boya ve günlük hayatta oldukça sık rastladığımız asfalt, zift, tutkal gibi maddeler de Newtonyen olmayan akışkanlardır.

19. yüzyılın başında aerodinamik alanında yapılan çalışmalara önem verilmesi Newtonyen akışkanlara verilen önemin azalmasına neden olmuştur. Özellikle 1904'te Lunding Prandtl tarafından ortaya atılan sınır tabası kavramı ve gelişen uçak endüstrisi sayesinde bir cisim etrafında hareket eden akış için geniş çalışmalar yapılmıştır. Sınır tabakasının en önemli uygulaması ise madde akışı ile moleküler yapı arasında ilişki kurmak isteyen fiziksel kimyacıların, polimerik malzeme üzerine yapmış olduğu testler bu konuda öncü rolü oynamıştır. Polimerik malzemelerin ticari olarak önem kazanması bu konudaki araştırmaları arttırmıştır. Madde akışını inceleyen bir bilim dalı olan reoloji, Newtonyen olmayan akışkanları sınıflandırmıştır. Sınır tabakaları üzerine temel çalışmanın örnekleri Schlichting (1951) tarafından yazılan bir kitapta yer almıştır.

Newtonyen olmayan akışkanlar genelde viskoelastik terimi ile ifade edilirler. Çünkü bu sıvılar hem viskoziteli akışkan hem de elastik katı davranışını birlikte gösterirler. Newtonyen akışkanlardan alışık olduğumuz bazı özellikleri bu akışkanlar göstermezler. Bunlara birkaç örnek verilirse normalde aşağıya doğru akan bir sıvının çapı yere yaklaştıkça momentum korunumundan dolayı azalır. Halbuki Newtonyen olmayan akışkanlarda tam tersi olmaktadır yani, çap yere yaklaştıkça artmaktadır. Bunun sebebi de elastik kuvvetlerin çıkışta serbest kalması ve genişlemeyi sağlamasıdır. Bu nedenle, Newtonyen olmayan akışkanların davranışını açıklamak için birçok kayma gerilmesi modeli önerilmiştir. Bunlar arasında; Power-Law, diferansiyel ve türev tipli modeller daha fazla kabul görmüşlerdir.

Uygulamada oldukça sık kullanılan Newtonyen olmayan akışkanların başında Power-Law akışkan modeli gelmektedir. Bu akışkanlarda viskozite, hız gradyanının üssel bir değişimi olarak görülmektedir. Power-Law akışkan modeli kullanılarak sınır tabakası ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları, Acrivos et al. (1960) ve Schowalter (1960)'in yaptığı çalışmalardır. Acrivos et al. (1960) ısı transferi içeren yatay düz bir plakadan akan akışı detaylı olarak incelemiştir. Schowalter (1960) iki ve üç boyutlu sınır tabakası denklemlerini geliştirmiş ve denklemlerin bazı benzerlik çözümlerini bulmuştur. Lee and Ames (1966) çalışmalarında Powell-Eyring ve Power-Law modellerine aynı çalışmada yer vererek

kararlı yapıdaki sınır tabakası denklemlerini çözmüşlerdir. Çalışmada ölçekleme dönüşümü (Lie Grup dönüşümü) kullanılmıştır. Denklemler kısmi diferansiyel denklemden dönüşüm sayesinde adi diferansiyel denklem formuna indirilmiş ve bu denklemler nümerik olarak çözülmüştür. Na and Hansen (1967) Power-Law akışkanlarına ait üç boyutlu sınır tabakası denklemlerinin benzerlik çözümlerini ayrıntılarıyla incelemişlerdir. Mansutti and Rajagopal (1991) Power-Law akışkanları için gerilme bünye denklemini elde etmişlerdir. Pakdemirli (1993) Power-Law akışkanları için sınır tabakası denklemlerini özel bir koordinat sistemi kullanarak çıkarmıştır. Bu denklemleri, durgun nokta akışı ve düz plaka akışı durumları için çözmüştür. Son zamanlarda ise kararsız iki boyutlu sınır tabakası durumunda Lie Grup analizinin kullanılması incelenmiştir (Yürüsoy and Pakdemirli, 1996). Yürüsoy (2006) kararsız sınır tabakası denklemlerini Power-Law modeli için ele alarak çözmüştür. Çözüm için özel bir dönüşüm kullanarak denklemleri adi diferansiyel denklem biçimine indirgemıştır. Keçebaş and Yürüsoy (2006) çalışmalarında yine kararsız sınır tabakası denklemini ele almışlardır. Çok özel Lie Grup dönüşümleri sayesinde denklemler iki alternatif ile adi diferansiyel denklem formuna indirgenmiş ve nümerik olarak çözülmüştür. Bu çalışmada da yine Power-Law modeli ele alınmıştır.

Diferansiyel tip akışkanlar için sınır tabakaları üzerine ilk çalışma Srivastava (1985) ve Rajaswari and Rathna (1962)'nın yaptığı çalışmalardır. Srivastava (1958) Karmen-Pohlhausen metodunu kullanarak durgun nokta akışını incelemiştir. Rajaswari and Rathna (1962) ikinci derece akışkanlar için sınır tabakası denklemlerini türetmiştir. Türev tipli akışkanlar için ilk çalışma Beard and Walters (1964) ve Astin et al. (1973)'ın çalışmalarıdır. Beard and Walters (1964) genelleştirilmiş bir Oldroyd B tipi akışkan için sınır tabakası eşitlikleri geliştirmiş ve durgun nokta akışı durumu için denklemleri nümerik olarak çözmüşlerdir.

Power-Law akışkan modelleri kullanılarak incelen (shear thinning) ve kabaran (shear thickening) akışkanlar doğru olarak modellenebilmektedir. Ancak bu modeller elastik özellikler içeren bazı akışkan tiplerinde akışkanı tam olarak modelleyememektedir. Mile tırmanma ve sifon etkisi gibi bazı fiziksel olaylar elastik

özellikler içeren akışkanlarda meydana gelen durumlara örnektir. Bu tip az rastlanan olayların modellenmesi oldukça ilginç çalışmaları beraberinde getirmiştir. Bu çalışmalardan başlıcaları Reiner (1945), Rivlin (1948), Oldroyd (1950) ve Noll (1955) tarafından yapılan çalışmalardır. Bahsedilen tipteki akışkan modellerinin en önemlileri Coleman-Noll, Rivlin-Ericksen, Green-Rivlin ve Oldroyd modelleridir.

Bahsedilen modellerden Rivlin-Ericksen modelinin özel bir türü, ikinci ve üçüncü derece akışkan modelleridir. Bu modellerle ilgili kartezyen koordinatlarda yapılan çalışmalar şöyledir: İkinci derece akışkanlar için sınır tabakası teorisinin uygulanması ile ilgili ilk çalışmalar, Karmen-Pohlhausen metodunu kullanarak durgun nokta akışını incelemesiyle Srivastava (1958) ve Coleman and Noll (1960)'un yaptığı çalışmalardır. Durgun nokta akışında ikinci derece akışkanlar için sınır tabakası denklemleri türeten Rajeswari and Rathna (1962)'ya ait referanstır. Dunn and Fosdick (1974) ikinci derece akışkanlar için detaylı termodinamik ve stabilite analizleri yapmışlar ve bu akışkanın çözümlerinin termodinamikle uyumlu ve çözümlerin kararlı olabilmesi için bazı şartların sağlanması gerektiğini göstermişlerdir. Fosdick and Rajagopal (1978) daimi akım için sürüklenmeyi incelemiştir. Mishra and Panda (1979) kanalın giriş bölgesindeki enjeksiyonun akıma etkilerini incelemiştir.

İkinci derece akışkanlar için sınır tabakası teorisi ve bu teoriye ait kısıtlamalar Rajagopal et al. (1980) tarafından gösterilmiştir. Rajagopal and Gupta (1981a) ikinci derece akışkanların hareket denklemleri için bazı tam çözüm sınıflarını vermişlerdir. Yine Rajagopal and Gupta (1981b) çakışık olmayan eksenlerde dönen iki paralel plaka arasındaki akışı ve bu akışın kararlılığını incelemiştir. Rajagopal et al. (1983) ikinci derece akışkanın köşe akışına çalışmış ve perturbasyon yaklaşımı kullanarak benzersizlik çözümünü elde etmişlerdir. Rajagopal et al. (1984) gerdirilmiş plaka üzerindeki ikinci derece akışkana yaklaşık bir çözüm önermişlerdir. Siddiqui and Kaloni (1986) ikinci derece akışkanlar için bazı ters çözümleri göstermişlerdir. Mcleod and Rajagopal (1987) çalışmalarında gerdirilmiş plakadan dolayı oluşan ikinci derece akışkanın hareketi ve Navier-Stokes çözümlerinin teklik durumlarını incelenmişlerdir. Troy et al. (1987) klasik ikinci derece akışkanın tek

parametreye bağılı çözümler ailesini bulmuşlardır. Emme-püskürtmenin Falkner-Skan akışına olan etkilerini Massoidi and Ramezan (1989) incelemişlerdir. Garg and Rajagopal (1990) ikinci derece akışkanın durgun nokta akışını incelemişler ve kayma gerilmesi ikinci derece olarak azaldığında etkilerinin arttığını bulmuşlardır. Garg and Rajagopal (1991) kama etrafındaki ikinci derece akışkanların akışını incelemişlerdir. Pakdemirli and Suhubi (1992a) eşlenmiş asimtotik açılım yöntemi kullanarak ikinci derece akışkanlar için sınır tabakası denklemlerini türetmişlerdir. Çıkarılan bu denklemlerin simetri grubu Pakdemirli and Suhubi (1992b) tarafından bulunmuş ve denklemler çözülmüştür.

Rivlin-Ericksen modelinin diğer özel bir türü olan üçüncü derece akışkan modelidir. Bu modelle ilgili kartezyen koordinatlarda yapılan çalışmalar şöyledir: Üçüncü derece akışkanlar modeli Fosdick and Rajagopal (1980) tarafından elde edilmiştir. Ayrıca bu akışkanlar için ise detaylı termodinamik ve stabilite analizleri yapmışlardır. Pakdemirli (1992c) tarafından üçüncü derece akışkanlara ait sınır tabakası denklemleri özel bir koordinat sistemi kullanılarak çıkarılmıştır. Pakdemirli (1994) bu akışkanlara ait çok katmanlı sınır tabakası denklemlerini incelemiştir. Yürüsoy and Pakdemirli (1999) üçüncü derece akışkanlara ait iki boyutlu sınır tabakası denklemlerini Lie Grup analizini kullanarak denklemleri adi diferansiyel denklem formuna indirgemişlerdir. Adi türevli denklemler Runge-Kutta algoritması kullanılarak nümerik olarak çözülmüştür.

Rivlin-Ericksen modelinin özel bir türü olan, diğer bir adıyla ikinci derece akışkan modeli, Newtonyen özellikteki viskozite ve elastik etkileri içerse de kabaran ve incelen akışkanları temsil etmekte yetersiz kalmaktadır. Bu akışkan modelinin eksikliğini gidermek için Man and Sun (1987) tarafından yeni bir model ortaya atılmıştır. Bu modelde, teorik olarak ele alınan ve ifade edilen ikinci derece akışkanlar ile deneysel sonuçlarla ifade edilen Power-Law tipindeki akışkanları birleştirmek için uğraşmışlardır. Bu çalışmalar ışığında bahsedilen modellerin buzul biliminde uygulamasını bulmuşlardır. Çalışmalarında “genelleştirilmiş ikinci derece akışkan” ve “ikinci derece Power-Law akışkanı” olarak farklı iki model

önermişlerdir. Yani bu modellerde ikinci derece akışkan ile Power-Law tipindeki akışkanlar birleştirilmiştir.

Man (1992) tarafından genelleştirilmiş ikinci derece akışkan modeli kararsız kanal akışının varlık ve teklik durumları ve asimptotik stabilite çözümleri incelenmiştir. Genelleştirilmiş ikinci derece akışkan için Gupta and Massoudi (1993) bu akışkan modelini ısıtılmış plakalar arasındaki akış için incelemişlerdir. Massoudi and Phuoc (2001) viskozitenin sıcaklığa bağlı olduğu aynı akışkanın ısıtılmış eğik plakalar arasındaki akışını incelemişlerdir. Hayat and Khan (2005) akışkanın gözenekli plaka üzerindeki akışını incelemişlerdir.

Bu tez çalışmasında üçüncü derece akışkanlar için Fosdick and Rajagopal (1980) tarafından elde edilen modele ek olarak Power-Law modeli düşünülmüştür. Bu model, Power-Law modeli ile ikinci ve üçüncü derece akışkan modellerinin bir bileşkesidir. Çok yakın zamanda bu modele ait kararlı akış için sadece ikinci derece akışkanlar ele alınarak, sınır tabakası denklemleri çıkartılmış ve çözülmüştür. Pakdemirli et al. (2008) tarafından yapılmış olan ikinci derece Power-Law akışkanları için sınır tabakası denklemlerine Lie Grupları uygulanarak, denklemlerin simetrileri bulunmuştur. Bulunan bu simetriler sayesinde denklemler adi diferansiyel denklem formuna indirgenmiş ve sonlu farklar kullanılarak nümerik olarak çözülmüştür. Abbasbandy et al. (2008) aynı denklemleri HAM (Homotopy Analiz Metodu) metodu kullanarak çözmüş ve sonuçları sonlu farklar yöntemi çözümleri ile karşılaştırmıştır. Sonuçlarda mükemmel bir uyum görülmüştür.

Bu tez çalışmasında, Power-Law akışkan ile ikinci ve üçüncü derece akışkanları birleştiren Newtonyen olmayan bir akışkan modeline ait iki boyutlu ve kararsız akışı ifade eden sınır tabakası denklemlerinin benzerlik çözümleri yapılmıştır. Bölüm 2’de Power-Law akışkan ile ikinci ve üçüncü derece akışkanlarını birleştiren modele ait iki boyutlu ve kararsız akışa ait sınır tabakası denklemleri adi diferansiyel denklem şekline dönüştürülmüştür. Burada Newtonyen olmayan yeni bir akışkan modeline ait hareket denklemleri çıkartılmıştır. Hareket denklemlerinin çıkışında Rivlin-Ericksen tensörleri kullanılmıştır. İvme terimleri, viskoz terimleri, ikinci ve üçüncü derece

akışkan terimlerinin çıkışı detaylı olarak anlatılmıştır. Daha sonra elde edilen hareket denklemlerine, sınır tabakası yaklaşımı uygulanmış ve sınır tabakası denklemlerine ait matematiksel modeller elde edilmiştir. Elde edilen bu denklemler iki tane olup ilki ikinci dereceden Power-Law ve diğeri ise üçüncü dereceden Power-Law akışkan denklemleridir. Her iki denklem de zaman terimleri mevcut olup kararsız akışı ifade etmektedir.

İlk önce, üçüncü dereceden Power-Law akışkanına ait sınır tabakası denklemleri ele alınmıştır. Bu denklemlerin adi diferansiyel denklem formuna indirgenebilmesi için Lie Grup analizi kullanılmıştır. Lie Grup analizi ile ilgili daha detaylı bilgi Bluman and Kumei (1989) ve Stephani (1989) kaynaklarından elde edilebilir. Lie Grup analizi uygulanarak denklemlerin kabul ettiği simetriler bulunmuştur. Lie Grup analizinde önce denklemler için invaryantlık şartları yazılmış, sonra bu şartlar için gerekli olan infinitesimaller türetilmiştir. Bu infinitesimaller, invaryantlık şartlarında yerine yazıldığında iki ayrı denklem bloğu elde edilmiştir. Bu denklem blokları katsayılarına göre ayrıştırılarak bir kısmi diferansiyel denklem sistemi elde edilmiştir. Bu denklem sistemi çözülerek denklemlerin kabul ettiği simetriler bulunmuştur. Bulunan bu simetriler ile denklemler ve sınır şartları üç değişkenli kısmi diferansiyel denklemden iki değişkenli kısmi diferansiyel denkleme indirgenmiştir. İndirgenen bu denklemler, ölçekleme ve öteleme dönüşümleri sayesinde iki tane bulunmuştur. Elde edilen iki değişkenli bu iki ayrı denklemlere yeniden Lie Grubu analizi uygulanmıştır. Böylece iki değişkenli kısmi diferansiyel denklemler, bir değişkenli adi diferansiyel denklemler formuna indirgenmiştir. Çalışmada sınır değer problemi olarak hareketli yüzey üzerindeki emme-püskürtmeli akış ele alınmıştır. Sonuç olarak ele alınan hareket denklemi, üç bağımsız değişkenden oluştuğu için iki defa Lie Grup analizi uygulamak sureti ile adi diferansiyel denklem formuna indirgenmiştir.

Daha sonra ikinci dereceden Power-Law akışkanına ait sınır tabakası denklemleri adi diferansiyel denklem şekline dönüştürülmüştür. Bu akışkana ait terimlerden elde edilen zamana bağlı kısmi diferansiyel denklem sistemi iki bağımlı ve üç bağımsız değişkenden oluşan bir kısmi diferansiyel denklem sistemidir. Bağımsız değişkenler

x , y ve t değişkenleridir. Bağımlı değişkenler ise $u(x,y,t)$ ve $v(x,y,t)$ hız değişkenleridir. Bu denklemlerin çözümü için Yürüsoy (2006)'un çalışmasındaki özel bir dönüşüm kullanılmıştır. Bu dönüşüm üzerinde bazı küçük değişiklikler yapılmış ve elde edilen yeni dönüşüm, klasik sınır şartlarında denklemlere uygulanmıştır. Böylece denklemler adi diferansiyel formuna indirgenmiştir. Bu dönüşüm, denklemleri aynı zamanda boyutsuzlaştırmıştır.

Bölüm 3'te ikinci bölümde elde edilen üçüncü dereceden Power-Law akışkanın sınır tabakasına ait adi diferansiyel denklemler Runge-Kutta algoritması kullanılarak nümerik olarak çözülmüştür. Ayrıca, ikinci dereceden Power-Law akışkanın sınır tabakasına ait adi diferansiyel denklem sisteminin çözümü içinde sonlu fark algoritması ile çalışan bir program yazılmıştır. Ancak bu program sayesinde denklemlerin nümerik çözümleri mümkün olmuştur. Bölüm sonunda denklemlerin çözümlerinde gerek Power-Law üssünün gerekse ikinci ve üçüncü dereceden akışkan sabitlerinin sınır tabakası üzerindeki etkisi açıkça çözümlerde gösterilmiştir. Ayrıca Newtonyen ile Newtonyen olmayan akışkanlara ait sınır tabakaları arasındaki değişim de gösterilmiştir. Son bölümde ise çalışma ile ilgili sonuçlar belirtilmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Hareket Denklemleri

Çalışmada öncelikle kartezyen koordinatlarda Power-Law akışkan ile ikinci ve üçüncü derece akışkanlarını birleştiren bir modele ait iki boyutlu ve kararsız akışı ifade eden hareket denklemleri çıkartılacaktır. Denklemlerin çıkarılışında Rivlin-Ericksen tensörleri kullanılacaktır. Daha sonra bu denklemler vektörel formda ifade edilecektir. Önce ivme terimleri sonra viskoz terimler ve ikinci ve üçüncü derece akışkan terimlerinin çıkışı detaylı olarak anlatılacaktır.

2.1.1. Tensörel Formda Hareket Denklemleri

Power-Law akışkan ile ikinci ve üçüncü derece akışkanları birleştiren modele ait hareket denklemi tensörel formda aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \text{div } \mathbf{t} + \rho \mathbf{b} \quad (2.1)$$

Burada; $\mathbf{t}$ gerilme tensörü, $\mathbf{b}$ birim kütle başına düşen dış kuvvet, ρ yoğunluk, $\mathbf{v}$ hız vektörü ve $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ ivmedir. Sıkıştırılmaz akışkan kabulü ile süreklilik denklemi

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (2.2)$$

gibi ifade edilir.

Power-Law akışkan ile ikinci ve üçüncü derece akışkanları birleştiren Newtonyen olmayan akışkanlara ait bünye denklemi

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \Pi^{m/2} \left(\mu \mathbf{A}_1 + \alpha_1 \mathbf{A}_2 + \alpha_2 \mathbf{A}_1^2 + \beta |\mathbf{A}_1|^2 \cdot \mathbf{A}_1 \right) \quad (2.3)$$

şeklindedir. Burada

$$\Pi = \left(\frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{A}_1^2 \right) \quad (2.4)$$

biçimindedir. p basınç, $\mathbf{I}$ birim matrisi, μ viskozite katsayısı, α_1 , α_2 ve β Newtonyen olmayan akışkan sabitleri, m Power-Law akışkan sabiti olup, $m < 0$ olması halinde incelen akışkanları, $m > 0$ olması durumunda ise kabaran akışkanları ifade eder. $\mathbf{A}_1$ ve $\mathbf{A}_2$ ilk iki Rivlin-Ericksen tensörleridir. Bu tensörler

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \\ \mathbf{A}_2 &= \dot{\mathbf{A}}_1 + \mathbf{A}_1 \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \mathbf{A}_1 \\ \dot{\mathbf{A}}_1 &= (\mathbf{A}_1)_t + (\text{grad } \mathbf{A}_1) \mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.5)$$

biçiminde tanımlanmaktadır.

Denklem (2.5)'teki ifadelerde $\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v}$ olarak tanımlanmaktadır. Denklem (2.3)'ün türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{t} &= -\text{grad } p + \text{div} \left(\frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{A}_1^2 \right)^{m/2} \left(\mu \mathbf{A}_1 + \alpha_1 \mathbf{A}_2 + \alpha_2 \mathbf{A}_1^2 + \beta |\mathbf{A}_1|^2 \cdot \mathbf{A}_1 \right) \\ &+ \left(\frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{A}_1^2 \right)^{m/2} \text{div} \left(\mu \mathbf{A}_1 + \alpha_1 \mathbf{A}_2 + \alpha_2 \mathbf{A}_1^2 + \beta |\mathbf{A}_1|^2 \cdot \mathbf{A}_1 \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

denklemini elde edilir. Burada, $\text{div} \left(\frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{A}_1^2 \right)^{m/2}$ ifadesi aşağıdaki gibi de yazılabilir.

$$\text{div} \left(\frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{A}_1^2 \right)^{m/2} = \text{grad} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1|^2 \right)^{m/2} \quad (2.7)$$

Ayrıca tensörel formdaki hareket denkleminin ivme terimi vektörel olarak

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v}_t + \frac{1}{2} \text{grad}|\mathbf{v}|^2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (2.8)$$

şeklinde yazılır. Burada, $\mathbf{v}_t$ hızın zamana göre türevi ve $\boldsymbol{\omega} = \text{curl } \mathbf{v}$ 'dir.

Denklemler (2.6) ve (2.8) göz önüne alınır ve $\mathbf{b}=0$ yazılırsa başlangıçtaki hareket denklemini (2.1) aşağıdaki gibi vektörel forma dönüştür.

$$\begin{aligned} \rho \left(\mathbf{v}_t + \frac{1}{2} \text{grad}|\mathbf{v}|^2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \right) = & -\text{grad } p + \text{grad} \left[\left(\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1|^2 \right)^{m/2} \right] \\ & \left(\mu \mathbf{A}_1 + \alpha_1 \mathbf{A}_2 + \alpha_2 \mathbf{A}_1^2 + \beta |\mathbf{A}_1|^2 \cdot \mathbf{A}_1 \right) + \left(\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1|^2 \right)^{m/2} \\ & \left[\mu \nabla^2 \mathbf{v} + \alpha_1 \nabla^2 \mathbf{v}_t + \alpha_1 (\nabla^2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) + \alpha_1 \text{grad}(\mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v}) \right. \\ & + \frac{1}{4} (2\alpha_1 + \alpha_2) \text{grad}|\mathbf{A}_1|^2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \{ \mathbf{A}_1 \cdot \nabla^2 \mathbf{v} \\ & \left. + 2 \text{div}[(\text{grad } \mathbf{v})(\text{grad } \mathbf{v})^T] \} + \beta \mathbf{A}_1 \cdot \text{grad}|\mathbf{A}_1|^2 + \beta |\mathbf{A}_1|^2 \cdot \nabla^2 \mathbf{v} \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Böylece hareket denklemleri vektörel formda elde edilmiş oldu.

2.1.2. Kartezyen Koordinat Sistemine Göre Hareket Denklemleri

Çalışmanın bu kısmında kartezyen koordinat sistemine göre denklem (2.9) yeniden yazılacaktır. Öncelikle denklem (2.9)'daki terimler aşağıdaki gibi tek tek hesaplanacaktır.

Hız ve gradyan operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathbf{v} = u(x, y, t)\mathbf{i} + v(x, y, t)\mathbf{j} \quad (2.10)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i}, \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} \right) \quad (2.11)$$

Hız operatöründeki u , x yönündeki vektörel hızı ifade ederken; v , y yönündeki hızı ifade etmektedir.

Hızın zamana göre türevi, $\mathbf{v}_t$;

$$\mathbf{v}_t = \frac{\partial u}{\partial t} \mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial t} \mathbf{j} \quad (2.12)$$

gibi tanımlanır.

Denklem (2.9)'da hız operatörünün karesi $|\mathbf{v}|^2$ aşağıdaki denklemde belirtildiği gibi ifade edilmektedir.

$$|\mathbf{v}|^2 = u^2 + v^2 \quad (2.13)$$

Denklem (2.13)'te yer alan $|\mathbf{v}|^2$ ifadesinin gradyanı alınır

$$\nabla |\mathbf{v}|^2 = \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2) \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} (u^2 + v^2) \mathbf{j} \quad (2.14)$$

ifadesi elde edilir ve bu ifade 2'ye bölünürse

$$\frac{1}{2} \nabla |\mathbf{v}|^2 = \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \mathbf{j} \quad (2.15)$$

şeklinde olur. $\boldsymbol{\omega}$ ifadesi ise aşağıdaki gibidir.

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (2.16)$$

$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ ifadesi ise denklem (2.16) ile denklem (2.10)'un vektörel çarpımıdır. Çarpım sonucu ise şu şekildedir.

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = -\omega v \mathbf{i} + \omega u \mathbf{j} = \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{j} \quad (2.17)$$

Basınç gradyanı ise

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} \quad (2.18)$$

şeklinde yazılır.

Şimdi de denklem (2.9)'da yer alan $|\mathbf{A}_1|^2$ 'sinin hesaplanması yapılacaktır. $|\mathbf{A}_1|$ 'in eşiti aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{L} + \mathbf{L}^T = \text{grad } \mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})^T \quad (2.19)$$

Yukarıdaki ifade de $\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v}$ 'dir. $\mathbf{L}$ ve $\mathbf{v}$, denklem (2.19)'da yerine yerleştirilirse $\mathbf{A}_1$ 'in eşiti aşağıdaki gibi bulunur.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$|\mathbf{A}_1|^2$ ifadesi aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\mathbf{A}_1^2 = \begin{bmatrix} 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 & 2 \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Çarpım işlemi yapıp köşegen elemanları toplanırsa $|\mathbf{A}_1|^2$ aşağıdaki gibi bulunmuş

olur.

$$|\mathbf{A}_1|^2 = 8\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \quad (2.22)$$

Buradan da $\left(\frac{1}{2}|\mathbf{A}_1|^2\right)^{m/2}$,nin eşiti aşağıdaki gibi bulunur.

$$\left(\frac{1}{2}|\mathbf{A}_1|^2\right)^{m/2} = \left[4\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]^{m/2} \quad (2.23)$$

Denklem (2.23)'ün gradyanı alınırsa

$$\begin{aligned} \text{grad}\left(\frac{1}{2}|\mathbf{A}_1|^2\right)^{m/2} &= \frac{m}{2} \left[4\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{m}{2}-1} \left\{ \left[8\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \right. \\ &+ 2\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\Bigg]\mathbf{i} + \left[8\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \right. \\ &\left. \left.\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right]\mathbf{j} \right\} \end{aligned} \quad (2.24)$$

ifadesi elde edilir.

Denklem (2.9)'da $\nabla^2 \mathbf{v}$ terimi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{v} &= -\text{rot}(\text{rot } \mathbf{v}) = -\text{rot } \boldsymbol{\omega} = -\frac{\partial \omega}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial \omega}{\partial x}\mathbf{j} \\ &= \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\mathbf{j} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Süreklilik denklemi (2.2)'nin gradyanı alınıp denklem (2.25)'te yerine yazıldığında aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \mathbf{j} \quad (2.26)$$

Denklem (2.9)'da $\nabla^2 \mathbf{v}_t$ 'nin eşiti, denklem (2.12)'nin laplasyeni alınarak

$$\nabla^2 \mathbf{v}_t = \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial t} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial t} \right) \mathbf{j} \quad (2.27)$$

şeklinde bulunur.

$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ teriminin eşitini bulmak için öncelikle $\nabla^2 \boldsymbol{\omega}$ 'ın değeri bulunmuştur. Bu terimin değeri aşağıdaki gibidir.

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = -\text{rot}(\text{rot } \boldsymbol{\omega}) = \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \mathbf{k} = \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \mathbf{k} \quad (2.28)$$

Denklem (2.27)'de süreklilik denkleminde gelen $-\frac{\partial u}{\partial x}$ yerine $\frac{\partial v}{\partial y}$ yazıldığında aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \mathbf{k} \quad (2.29)$$

Denklem (2.29) ile denklem (2.10) vektörel olarak çarpılırsa

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -v \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \mathbf{i} + u \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \mathbf{j} \quad (2.30)$$

ifadesi oluşur.

$\text{grad}(\mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v})$ 'in eşitini bulmak için önce $\mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v}$ bulunmalıdır ve bu terim değeri

aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} = u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.31)$$

Denklem (2.31)'in gradyanı alınırsa $\text{grad}(\mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v})$ 'in eşiti

$$\begin{aligned} \text{grad}(\mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v}) = & \left[\frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) \right. \\ & + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) \Big] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right. \\ & + u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) \Big] \mathbf{j} \end{aligned} \quad (2.32)$$

şeklinde ifade elde edilir.

Denklem (2.9)'da $\text{grad}|\mathbf{A}_1|^2$ 'in değeri, denklem (2.22)'nin gradyanı alınarak bulunur ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\begin{aligned} \text{grad}|\mathbf{A}_1|^2 = & \left[16 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] \mathbf{i} \\ & + \left[16 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \mathbf{j} \end{aligned} \quad (2.33)$$

$\mathbf{A}_1 \cdot \nabla^2 \mathbf{v}$ 'in eşiti, $\mathbf{A}_1$ ile denklem (2.26) çarpılmasıyla bulunur. Çarpım sonucu

$$\mathbf{A}_1 \cdot \nabla^2 \mathbf{v} = \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] \mathbf{i} + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] \mathbf{j} \quad (2.34)$$

şeklinde ifade edilir.

Şimdi de denklem (2.9)'da $\text{div}[(\text{grad } \mathbf{v})(\text{grad } \mathbf{v})^T]$ terimini hesaplayalım. İlk önce $(\text{grad } \mathbf{v})(\text{grad } \mathbf{v})^T$ teriminin değerleri yazılır ve matris çarpımı aşağıdaki gibi oluşur.

$$\begin{aligned} (\text{grad } \mathbf{v})(\text{grad } \mathbf{v})^T &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 & \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} & \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Denklem (2.35)'in diverjansı alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\text{div}[(\text{grad } \mathbf{v})(\text{grad } \mathbf{v})^T] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 & \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} & \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Bu ifadenin matris çarpımı yapılırsa

$$\text{div}[(\text{grad } \mathbf{v})(\text{grad } \mathbf{v})^T] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

elde edilir.

Şimdi ise denklem (2.9)'da $\mathbf{A}_1 \cdot \text{grad}|\mathbf{A}_1|^2$ 'in değeri hesaplanacaktır. Bu ifade için denklem (2.20)'nin (2.33) ile skaler çarpılmasından

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 \cdot \text{grad} |\mathbf{A}_1|^2 = & \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ 8 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 8 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y^2} \end{bmatrix} \\
& + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 8 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
& + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y^2} \end{aligned} \quad (2.38)
\end{aligned}$$

şekilde elde edilir. Matris çarpımı yapılırsa aşağıdaki ifade elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 \cdot \text{grad} |\mathbf{A}_1|^2 = & \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} \left(8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right. \\ \left. + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 8 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right. \\ \left. + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y^2} \right) \mathbf{i} \\ \left. + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \left(8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 8 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y^2} \right) \right] \mathbf{j} \end{bmatrix} \quad (2.39)
\end{aligned}$$

Hareket denkleminin elde edilmesi için gereken en son terim olan $|\mathbf{A}_1|^2 \cdot \nabla^2 \mathbf{v}$ 'nin hesaplanması yapılacaktır. Bu ifade de açıkça görüldüğü gibi denklem (2.22) ile (2.26)'nın çarpımı şeklindedir. Çarpım yapılırsa

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}_1|^2 \cdot \nabla^2 \mathbf{v} = & \left(4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \mathbf{i} \\
& + \left(4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \mathbf{j} \end{aligned} \quad (2.40)$$

elde edilir.

Hesaplanan bütün terimler, denklem (2.9)'da yerleştirilir ve bu ifadelerin x ile y bileşenleri için ayrıştırılması sonucunda aşağıdaki denklemlere ulaşılır.

x - yönünde hareket denklemi:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{m}{2} \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{m}{2}-1} \left\{ \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \right. \\
& + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \left. \right] \left[2v \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\alpha_1}{\rho} \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + 2u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \right. \\
& + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left. \right] + \frac{\alpha_2}{\rho} \left(4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \\
& + \frac{\beta}{\rho} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \left(8 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \right) \left. \right] + \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right. \\
& \left. \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \left[v \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\alpha_1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right. \right. \\
& + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \left. \right) \\
& + \frac{\beta}{\rho} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(8 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \right) \left. \right\} \\
& + \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{m}{2}} \left\{ v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\alpha_1}{\rho} \left(2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial t} \right. \right. \\
& + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial t} - v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + 13 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
& + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \left. \right) \\
& + \frac{\alpha_2}{\rho} \left(8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \\
& + \frac{\beta}{\rho} \left(40 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 6 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 6 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 24 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
& + 24 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \Bigg\}
\end{aligned}$$

y - yönünde hareket denklemi:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{m}{2} \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{m}{2}-1} \left\{ \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \right. \\
& + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \Bigg] \left[v \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\alpha_1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right. \right. \\
& + u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \Bigg) \\
& + \frac{\beta}{\rho} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(8 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \right) \Bigg] + \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \\
& + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \Bigg] \left[2v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\alpha_1}{\rho} \left(2 \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + 2u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right. \right. \\
& + 2v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \Bigg] + \frac{\alpha_2}{\rho} \left(4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right. \\
& + \left. \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{\beta}{\rho} \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} \left(8 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \right) \Bigg] \Bigg\} \\
& + \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{m}{2}} \left\{ v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\alpha_1}{\rho} \left(2 \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial t} \right. \right. \\
& + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial t} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \\
& + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 13 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\
& + 3 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \Bigg) + \frac{\alpha_2}{\rho} \left(8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right. \\
& + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \Bigg) + \frac{\beta}{\rho} \left(40 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}
& + 8 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 6 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 6 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
& + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 12 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\
& + 24 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 24 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Bigg\}
\end{aligned}$$

Süreklilik denklemi ise

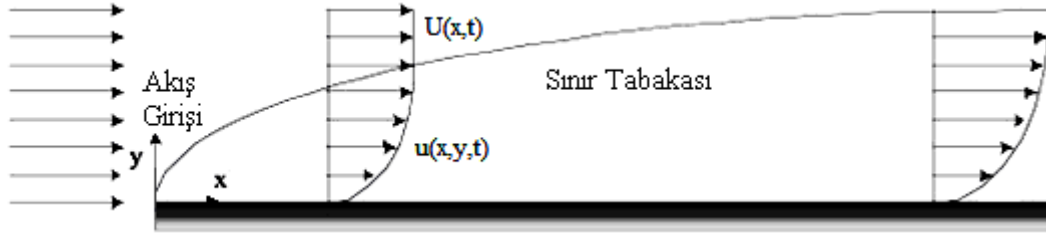
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.43)$$

şeklindedir.

Elde edilen (2.41), (2.42) ve (2.43) ifadeleri, kartezyen koordinat sistemine göre herhangi bir Power-Law ile ikinci ve üçüncü derece akışkanların hareketini belirleyen denklemlerdir. Bu denklemlerden bir sonraki kısımda ikinci dereceden Power-Law ve üçüncü dereceden Power-Law akışkanlarının ayrı ayrı sınır tabakası denklemleri elde edilecektir.

2.2. Sınır Tabakası Denklemleri

Sınır tabakası teorisi ilk defa 1904 yılında Prandtl tarafından ortaya atılmıştır. Bu teori ile akışkanlar mekaniğinde yeni bir çığır açılmıştır. Kanat etrafındaki akış gibi birçok teknolojik problem, bu sayede daha kolay çözülebilir hale gelmiştir. Bu akışta sınır tabakası içerisinde kalan akışın karakteristiği, sınır tabakası dışında kalan akıştan farklıdır. Bu sebeple katı yüzeyindeki akışkanın hızı katı yüzey durgunsa sıfır, katı yüzey hareketli ise katı ile aynı hızda olmaktadır. Akışkan, katı yüzey ile temas ettiği noktadan (sınırdan) uzaklaştıkça akım serbest akım hızına doğru değişim gösterir. Akışkan ve katı cismin temasından dolayı katı yüzeye çok yakın bir bölgede oluşan akım, sınır tabakası akışı olarak bilinmektedir. Klasik bir sınır tabakası akışı Şekil 2.1’de görülmektedir.



Şekil 2.1. Sınır tabakası akışı

Prandtl'ın teorisi Newtonyen akışkanlar için geçerlidir. Bu teori sayesinde akışkan hareket denklemleri (Navier-Stokes) basitleştirilip çözülebilmesi kolaylaştırılmıştır. Benzer bir yaklaşımın Newtonyen olmayan akışkanlar mekaniğine uygulaması 1960'lar da gerçekleşmiştir. Rivlin-Ericksen akışkanları, Oldroyd akışkanları, Power-Law akışkanları vb. gibi değişik modeller için sınır tabakası denklemleri çıkartılıp çözülmüştür. Newtonyen olmayan akışkanın sınır tabakası akışının mühendislik uygulamalarında birçok örnekleri bulunmaktadır. Örneğin, bir kalıptan polimer levhanın ekstrüzyonu veya plastik filmlerin çekilmesidir. Ayrıca konveyör bantları üzerinde sıcak işlenmiş malzemeler de sınır tabakası akışına iyi bir örnektir. Bu işlemler sonunda üretilen malzemenin mekanik özellikleri gerilme ve soğutma oranlarına bağlı olmaktadır.

Sınır tabakası içindeki akış için hareket denklemleri (2.41), (2.42) ve (2.43) bazı kabuller altında basitleştirilecektir. Standart ikinci ve üçüncü derece akışkanlar için sınır tabakası denklemleri sırasıyla Dunn and Fosdick (1974) ve Rajagopal and Fosdick (1980)'te detaylı olarak incelenmişlerdir. Bu tez çalışmasında akışkanlar hem ikinci dereceden Power-Law hem de üçüncü dereceden Power-Law akışkanı olarak ele alınacaktır. İlk önce üçüncü dereceden Power-Law akışkanları için sınır tabakası denklemleri çıkartılacaktır.

2.2.1. Üçüncü Dereceden Power-Law Akışkanları İçin Sınır Tabakası Denklemleri

Denklem (2.41) ve (2.42)'deki ikinci derece akışkanı ifade eden katsayı $\alpha_1=0$ ve $\alpha_2=0$ kabulü edilirse denklemler üçüncü dereceden Power-Law akışkanına ait hareket denklemleri olacaktır. Sınır tabakası içinde hareket denklemlerinin ve çözümlerinin

akışkanın fiziksel özelliklerinden bağımsız olması ve elde edilen sonuçların genel olabilmesi için boyutsuzlaştırma işlemi yapılacaktır. Boyutlu ve boyutsuz büyüklükler arasındaki ilişki aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$u = \frac{\bar{u}}{V_0}, \quad v = \frac{\bar{v}}{V_0}, \quad x = \frac{\bar{x}}{L}, \quad y = \frac{\bar{y}}{L}, \quad t = \frac{\bar{t}}{L/V_0}, \quad U = \frac{\bar{U}}{V_0}, \quad p = \frac{\bar{p}}{\rho V_0^2} \quad (2.44)$$

Burada, V_0 referans sabit hızı ve L referans uzunluğu ifade etmektedir. Denklem (2.44)'teki ifadeler $\alpha_1=0$ ve $\alpha_2=0$ olarak kabul edilen denklem (2.41) ve (2.42)'de yerine konulur ise boyutsuz denklemler aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

Süreklilik denklemi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.45)$$

x - yönünde hareket denklemi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{m}{2} \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{m}{2}-1} \\ & \left\{ \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] \right. \\ & \left. \left[2 \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon_3 \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \left(8 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \right) \right] \right. \\ & + \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \left[\varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right. \\ & + \left. \left. \varepsilon_3 \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(8 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \right) \right] \right\} \\ & + \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{m}{2}} \left\{ \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right. \\ & + \varepsilon_3 \left(40 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 6 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right. \\ & + \left. 6 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 24 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned}
& + 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 24 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
& + 12 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \Bigg\}
\end{aligned}$$

y - yönünde hareket denklemi:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{m}{2} \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{m}{2}-1} \\
& \left\{ \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] \left[\epsilon \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \epsilon_3 \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(8 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \right) \right] \right. \\
& \left. + \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \right. \\
& \left. \left[2\epsilon \frac{\partial v}{\partial y} + \epsilon_3 \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} \left(8 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \right) \right] \right\} \quad (2.47) \\
& + \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{m}{2}} \left\{ \epsilon \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \epsilon_3 \left(40 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right. \right. \\
& + 8 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 6 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 6 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\
& + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 12 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 24 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
& \left. \left. + 24 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

Burada ϵ ve ϵ_3 boyutsuz katsayılar aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\epsilon = \frac{\mu}{\rho V_0 L} \left(\frac{V_0}{L} \right)^m, \quad \epsilon_3 = \frac{\beta_3 V_0}{\rho L^3} \left(\frac{V_0}{L} \right)^m \quad (2.48)$$

Boyutsuzlaştırılan üçüncü dereceden Power-Law akışkanına ait hareket

denklemlerine (Denklem (2.45), (2.46) ve (2.47)) sınır tabakası yaklaşımı uygulanır. Sınır tabakası içerisinde y koordinatı, δ sınır tabakası kalınlığına bölünerek genişletilir.

$$Y = \frac{y}{\delta} \quad (2.49)$$

Akım çizgileri boyunca x bileşeni, u ve p mertebesi olarak bir ve v ise δ mertebededir. Bir iç ve bir dış destenin standart sınır tabakası için boyutsuz katsayıları aşağıdaki gibi olması istenir.

$$\varepsilon = \delta^{m+2}, \quad \varepsilon_3 = k_3 \delta^{m+4} \quad (2.50)$$

Denklem (2.50)'deki kabuller, süreklilik ve x momentumda 1 mertebeli ve y momentumda $1/\delta$ mertebeli terimleri koruyarak aşağıdaki ifadeleri elde ederiz.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial Y} = 0 \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial Y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + (m+1) \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^m \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \\ + 2(m+3)k_3 \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^{m+2} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial p}{\partial Y} = 0 \quad (2.53)$$

$\partial p / \partial Y = 0$ durumunda ise $p = p(x, t)$ 'dir. Dış açılımla uyum sağlaması için

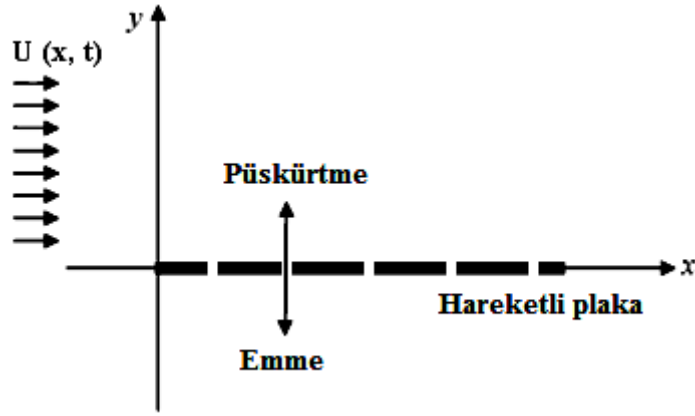
$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial t} - U \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.54)$$

olmalıdır. Sonra bulunan bu ifade denklem (2.52)'de yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial Y} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + (m+1) \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^m \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \\ + 2(m+3)k_3 \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^{m+2} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \end{aligned} \quad (2.55)$$

elde edilir.

Sınır tabakası denklemlerini çözmek için (x,y) kartezyen koordinatlarında sınır şartlarının çıkartılması gerekmektedir. x-y düzleminde ele alınan problem, Şekil 2.2’de gösterilmiştir.



Şekil 2.2. Hareket eden emme veya püskürtmeli yatay plaka üzerinde akış

Bu sınır değer problemi, hareket eden yüzeyin yanı sıra emme veya püskürtmeli levhaya ait sınır tabakası problemini de modelleyebilmektedir. Bu problem için sınır şartları aşağıdaki gibidir.

$$u(x,0,t) = A(x,t), \quad v(x,0,t) = \mp V(x,t), \quad u(x,\infty,t) = U(x,t) \quad (2.56)$$

Burada; akışkanın üzerinde bulunduğu yüzeyin $A(x,t)$ hız bileşeni ile x yönündeki hareketini ve $\mp V(x,t)$ yüzeydeki emme veya püskürtme (eksi işaret emme, artı işaret püskürtme) hızlarını ifade etmektedir. Sınır tabakası denklemi, $m=0$ için standart üçüncü derece akışkanını ve $k_3=0$ için ise Power-Law akışkanını ifade etmektedir.

2.2.2. İkinci Dereceden Power-Law Akışkanları İçin Sınır Tabakası Denklemleri

Denklem (2.41) ve (2.42)'deki üçüncü derece akışkanı ifade eden katsayı $\beta=0$ kabulü edilirse denklemler ikinci dereceden Power-Law akışkanına ait hareket denklemleri olacaktır. Elde edilen ikinci dereceden Power-Law akışkanına ait hareket denklemlerine sınır tabakası yaklaşımını uygulayalım. Sınır tabakası içerisinde y koordinatı δ sınır tabakası kalınlığına bölünerek genişletilir.

$$Y = \frac{y}{\delta} \quad (2.57)$$

Akım çizgileri boyunca x bileşeni, u ve p mertebe olarak bir ve v ise δ mertebededir. Bir iç ve bir dış destenin standart sınır tabakası için boyutsuz katsayıların

$$v = \bar{v}\delta^{m+2}, \quad \alpha_1 = \varepsilon_1\delta^{m+2}, \quad \alpha_2 = \varepsilon_2\delta^{m+2} \quad (2.58)$$

gibi olması istenir.

Yukarıdaki kabuller, süreklilik ve x momentumda 1 mertebeli ve y momentumda $1/\delta$ mertebeli terimleri koruyarak sonuçta aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial Y} = 0 \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial Y} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{m}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{m}{2}-1} \left\{ 2\varepsilon_2 \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} \right. \\ & + 2 \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \left[\bar{v} \frac{\partial u}{\partial Y} + \varepsilon_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial Y \partial t} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial Y} \right) \right] \Big\} \\ & + \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^m \left\{ \bar{v} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \varepsilon_1 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial Y^2 \partial t} + v \frac{\partial^3 u}{\partial Y^3} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial Y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + 3 \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} \right) + 2\varepsilon_2 \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} \right\} \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial Y} + (m+2)(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^{m+1} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \quad (2.61)$$

Denklem (2.61)'in integrali alınırsa yeni bir basınç fonksiyonu

$$\bar{p} = p - (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^{m+2} \quad (2.62)$$

elde edilir.

Bu durumda $\partial \bar{p} / \partial Y = 0$ elde edilir. Yani, $\bar{p} = \bar{p}(x, t)$ 'dir. Dış açılımla uyum sağlaması için

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial t} - U \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.63)$$

olmalıdır.

Denklem (2.62), x'e göre türetilirse

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} - (m+2)(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^{m+1} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} \quad (2.64)$$

ifadesi bulunur. Denklem (2.63), denklem (2.64)'ün içersine yerleştirilirse

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} - (m+2)(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^{m+1} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} \quad (2.65)$$

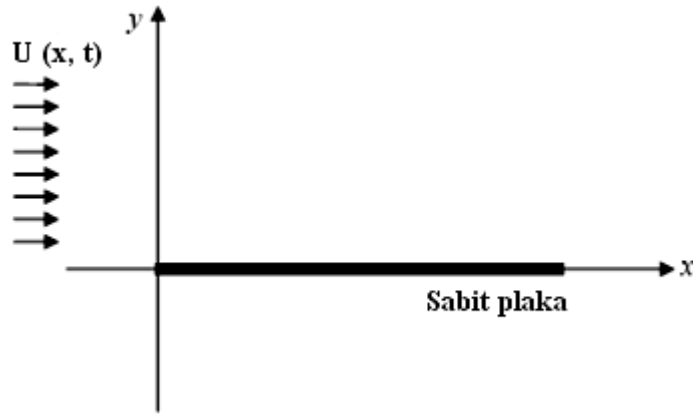
elde edilir.

Sonra bulunan bu ifade denklem (2.60)'da yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial Y} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{v}(m+1) \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^m \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \frac{\varepsilon_1}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^{m-1} \\
\left\{ m \left[\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial Y \partial t} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial Y} \right) - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} \right] \right. \\
\left. + \frac{\partial u}{\partial Y} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial Y^2 \partial t} + v \frac{\partial^3 u}{\partial Y^3} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial Y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} - \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} \right) \right\}
\end{aligned} \quad (2.66)$$

nihai sınır tabakası denkleminde ulaşılmış olur.

İkinci dereceden Power-Law akışkanına ait sınır tabakası denklemleri, yüksek non-lineeriteye sahip kısmi diferansiyel denklemler olduğundan çözümleri çok zordur. Bu nedenle çok iyi konumlanmış bir probleme sahip olmak için sınır şartlarına ihtiyaç vardır. Sınır tabakası denklemlerini çözmek için (x,y) kartezyen koordinatlarında sınır şartlarının çıkartılması gerekmektedir. x-y düzleminde ele alınan problem Şekil 2.3'te gösterilmiştir.



Şekil 2.3. Sabit yatay plaka üzerinde akış

Bu problem için sınır şartları aşağıdaki gibidir.

$$u(x,0,t) = 0, \quad v(x,0,t) = 0, \quad u(x,\infty,t) = U(x,t), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,\infty,t) = 0 \quad (2.67)$$

Burada, $U(x,t)$ sınır tabakası dışındaki hızdır. $m=0$ için denklemler standart ikinci

derece akışkanın sınır tabakası ve $\varepsilon_1=0$ için ise Power-Law akışkanın sınır tabakasını ifade eder.

2.3. Üçüncü Dereceden Power-Law Akışkanına Ait Sınır Tabakası Denklemlerinin Lie Grup Analizi

Lie Grup analizi, diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmakta kullanılan genel bir metottur. Metodun uygulanması üzerine literatürde çok çalışma bulunmaktadır. Pratik ve mühendisliğe uygun bir analiz de Bluman and Kumai (1989)'nin çalışmalarında bulunmaktadır. Burada üçüncü dereceden Power-Law akışkanına ait sınır tabakası denklemlerine Lie Grup analizi uygulanacaktır. Ele alınan sınır tabakası denklemleri kısmi diferansiyel denklemlerdir ve bu denklemlerin çözümleri oldukça zor ve uğraştırıcıdır. Bu denklemlerin çözümünü yapabilmek için, denklemler adi diferansiyel denklem formuna indirgenecektir. Bu indirgeme işlemi için denklem (2.51) ve (2.55)'e Lie Grup analizi uygulanmıştır. Bu analiz ile denklemlerin kabul ettiği simetriler bulunmuştur. Lie Grup analizinde önce denklemler için invaryantlık şartları yazılmış, sonra bu şartlar için gerekli olan infinitesimaller türetilmiştir. Bu infinitesimaller, invaryantlık şartlarında yerine yazıldığında iki ayrı denklem sistemi elde edilmiştir. Bu denklem sistemleri katsayılarına göre ayrıştırılarak bir kısmi diferansiyel denklem sistemi elde edilmiştir. Bu denklem sistemi çözülerek denklemlerin kabul ettiği simetriler bulunmuştur. Bulunan bu simetriler ile denklemler üç değişkenli kısmi diferansiyel denklemden, iki değişkenli kısmi diferansiyel denkleme indirgenmiştir. İndirgeme işlemi ölçekleme ve öteleme dönüşümleri ile sağlanmıştır. Yani iki ayrı kısmi diferansiyel denklem sistemi elde edilmiştir. Sınır şartlarında en az kısıtlayıcılık, hareketli yüzey üzerindeki emme-püskürtme durumu olduğu için çalışmada bu fiziksel problem ele alınmıştır. Elde edilen bu iki bağımsız değişkenli iki ayrı diferansiyel denklemlere ikinci kez Lie Grubu analizi uygulanmıştır. Böylece iki değişkenli kısmi diferansiyel denklemler, bir değişkenli adi diferansiyel denklem formuna indirgenmiştir.

2.3.1. Lie Grup Analizi

Lie Grubu analizini uygulamak için önce denklem (2.51) ve (2.55)'teki terimler yeni değişkenlerle aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} x_1 &= x, & x_2 &= y, & x_3 &= t, & u^1 &= u, & u^2 &= v, \\ u_1^1 &= \frac{\partial u^1}{\partial x_1}, & u_2^1 &= \frac{\partial u^1}{\partial x_2}, & u_2^2 &= \frac{\partial u^2}{\partial x_2}, & u_3^1 &= \frac{\partial u^1}{\partial x_3}, \\ u_{22}^1 &= \frac{\partial^2 u^1}{(\partial x_2)^2} \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$f(x_1, x_3) = U \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_3} \quad (2.69)$$

Denklem (2.51) ve (2.55) yeni değişkenler cinsinden aşağıdaki cebirsel denklemlere dönüştürülmüş olur.

$$u_1^1 + u_2^2 = 0 \quad (2.70)$$

$$u_3^1 + u^1 u_1^1 + u^2 u_2^1 = |u_2^1|^m u_{22}^1 \left((m+1) + 2k_3(m+3)(u_2^1)^2 \right) + f(x_1, x_3) \quad (2.71)$$

Denklemlerle irtibatlı infinitesimal jeneratör

$$X = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu} \quad (2.72)$$

şeklinde yazılabilir. Tekrarlı indisler üzerinde toplam uygulanacaktır. Denklem (2.72) jeneratörünü denklem (2.70) ve (2.71)'e uygulamak için birinci ve ikinci dereceye genişletilmesi ($i, j=1, 2, 3; \mu=1, 2$) gerekmektedir.

$$X^{(i)} = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu} + \eta_j^{(i)\mu} \frac{\partial}{\partial u_j^\mu} \quad (2.73)$$

$$X^{(2)} = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu} + \eta_j^{(1)\mu} \frac{\partial}{\partial u_j^\mu} + \eta_{ij}^{(2)\mu} \frac{\partial}{\partial u_{ij}^\mu} \quad (2.74)$$

Çözümleri üretecek olan bu infinitesimal jeneratörlerin denklem tarafından kabul edilebilmesi için aşağıdaki bağıntılar sağlanmalıdır.

$$X^{(1)}(u_1^1 + u_2^2) = 0 \quad (2.75)$$

$$X^{(2)}(u_3^1 + u^1 u_1^1 + u^2 u_2^1 - |u_2^1|^m u_{22}^1 ((m+1) + 2k_3(m+3)(u_2^1)^2) - f) = 0 \quad (2.76)$$

Denklem (2.73) ile (2.75)'te ve denklem (2.74) ile (2.76)'da gerekli işlemler yapıldığında aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\eta_1^{(1)1} + \eta_2^{(1)2} = 0 \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} & \eta_3^{(1)1} + u_1^1 \eta_1^1 + u^1 \eta_1^{(1)1} + u_2^1 \eta_2^2 + u^2 \eta_2^{(1)1} - m u_{22}^1 ((m+1) + 2k(m+3)(u_2^1)^2) \\ & |u_2^1|^{m-1} \eta_2^{(1)1} - |u_2^1|^m ((m+1) + 2k_3(m+3)(u_2^1)^2) \eta_{22}^{(2)1} \\ & - 4k(m+3) |u_2^1|^m u_2^1 u_{22}^1 \eta_2^{(1)1} - \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - \xi_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \end{aligned} \quad (2.78)$$

Denklem (2.77) ve (2.78)'de mevcut olan $\eta_1^{(1)1}, \eta_2^{(1)2}, \eta_3^{(1)1}, \eta_2^{(1)1}, \eta_{22}^{(2)1}$ ifadelerinin ξ_i ve η^μ cinsinden ifade edilmeleri gerekmektedir. Bu ifadelerin hesaplanması ile ilgili denklemler, Bluman and Kumei (1989)'de mevcuttur.

$$\eta_i^{(1)\mu} = D_i \eta^\mu - (D_i \xi_j) u_j^\mu \quad (2.79)$$

Denklem (2.79)'daki (D_i) türev operatörünün eşiti

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu} \quad (2.80)$$

şeklindedir.

Denklem (2.79)'da tekrarlı indisler üzerinde toplam olduğu göz önüne alınarak $i=1$ ve $\mu=1$ alındığında denklem (2.79) ve (2.80)'nin formülasyonu

$$\eta_1^{(1)1} = D_1 \eta^1 - (D_1 \xi_1) u_1^1 - (D_1 \xi_2) u_2^1 - (D_1 \xi_3) u_3^1 \quad (2.81)$$

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + u_1^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + u_1^2 \frac{\partial}{\partial u^2} \quad (2.82)$$

biçimini almaktadır.

Denklem (2.82), denklem (2.81)'in içine yerleştirilirse $\eta_1^{(1)1}$ 'in eşiti şu şekilde elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned} \eta_1^{(1)1} = & \frac{\partial \eta^1}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right) u_1^1 + \frac{\partial \eta^1}{\partial u^2} u_1^2 - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} u_2^1 - \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} u_3^1 - \frac{\partial \xi_1}{\partial u^1} (u_1^1)^2 \\ & - \frac{\partial \xi_1}{\partial u^2} u_1^1 u_1^2 - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} u_1^1 u_2^1 - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^2} u_2^1 u_1^2 - \frac{\partial \xi_3}{\partial u^1} u_1^1 u_3^1 - \frac{\partial \xi_3}{\partial u^2} u_1^2 u_3^1 \end{aligned} \quad (2.83)$$

Benzer şekilde denklem (2.79) ve (2.80) kullanılarak diğer birinci dereceye genişletilmiş infinitesimaller de aşağıdaki gibi bulunur.

$\eta_2^{(1)1}$ ifadesi için

$$\eta_2^{(1)1} = D_2 \eta^1 - (D_2 \xi_1) u_1^1 - (D_2 \xi_2) u_2^1 - (D_2 \xi_3) u_3^1 \quad (2.84)$$

$$D_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + u_2^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + u_2^2 \frac{\partial}{\partial u^2} \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} \eta_2^{(1)1} = & \frac{\partial \eta^1}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) u_2^1 + \frac{\partial \eta^1}{\partial u^2} u_2^2 - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} u_1^1 - \frac{\partial \xi_1}{\partial u^1} u_1^1 u_2^1 - \frac{\partial \xi_1}{\partial u^2} u_1^1 u_2^2 \\ & - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} (u_2^1)^2 - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^2} u_2^1 u_2^2 - \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} u_3^1 - \frac{\partial \xi_3}{\partial u^1} u_2^1 u_3^1 - \frac{\partial \xi_3}{\partial u^2} u_2^2 u_3^1 \end{aligned} \quad (2.86)$$

şeklinde elde edilir.

$\eta_2^{(1)2}$ ifadesi için

$$\eta_2^{(1)2} = D_2 \eta^2 - (D_2 \xi_1) u_2^1 - (D_2 \xi_2) u_2^2 - (D_2 \xi_3) u_3^2 \quad (2.87)$$

$$D_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + u_2^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + u_2^2 \frac{\partial}{\partial u^2} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} \eta_2^{(1)2} = & \frac{\partial \eta^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \eta^2}{\partial u^1} u_2^1 + \left(\frac{\partial \eta^2}{\partial u^2} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) u_2^2 - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} u_1^2 - \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} u_3^2 - \frac{\partial \xi_1}{\partial u^1} u_2^1 u_1^2 \\ & - \frac{\partial \xi_1}{\partial u^2} u_2^2 u_1^2 - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} u_2^1 u_2^2 - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^2} (u_2^2)^2 - \frac{\partial \xi_3}{\partial u^1} u_2^1 u_3^2 - \frac{\partial \xi_3}{\partial u^2} u_2^2 u_3^2 \end{aligned} \quad (2.89)$$

şeklinde olur.

$\eta_3^{(1)1}$ ifadesi de

$$\eta_3^{(1)1} = D_3 \eta^1 - (D_3 \xi_1) u_1^1 - (D_3 \xi_2) u_2^1 - (D_3 \xi_3) u_3^1 \quad (2.90)$$

$$D_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + u_3^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + u_3^2 \frac{\partial}{\partial u^2} \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned} \eta_3^{(1)1} = & \frac{\partial \eta^1}{\partial x_3} + \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \right) u_3^1 + \frac{\partial \eta^1}{\partial u^2} u_3^2 - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} u_1^1 - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} u_2^1 - \frac{\partial \xi_1}{\partial u^1} u_1^1 u_3^1 \\ & - \frac{\partial \xi_1}{\partial u^2} u_1^1 u_3^2 - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} u_2^1 u_3^1 - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^2} u_2^2 u_3^1 - \frac{\partial \xi_3}{\partial u^1} (u_3^1)^2 - \frac{\partial \xi_3}{\partial u^2} u_3^1 u_3^2 \end{aligned} \quad (2.92)$$

olarak bulunmuş olur.

Denklem (2.78) ifadesinde $\eta_{22}^{(2)1}$, ın değeriinin bulunması gerekmektedir. Bunun için yine Bluman and Kumai (1989)'de verilen aşağıdaki formül kullanılacaktır.

$$\eta_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{(k)\mu} = D_{i_k} \eta_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}^{(k-1)\mu} - (D_{i_k} \xi_j) u_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, j}^\mu \quad (2.93)$$

Burada; $k=2$, $i_k=i_2=2$, $i_1=2$ ve $\mu=1$ 'dir. Bu değerler denklem (2.93)'te yerine konulursa

$$\eta_{22}^{(2)1} = D_2 \eta_2^{(1)1} - (D_2 \xi_j) u_{2j}^1 \quad (2.94)$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca j indisi üzerinde toplam olacağı dikkate alınırsa ifadenin açık şekli aşağıdaki gibi olur.

$$\eta_{22}^{(2)1} = D_2 \eta_2^{(1)1} - (D_2 \xi_1) u_{21}^1 - (D_2 \xi_2) u_{22}^1 - (D_2 \xi_3) u_{23}^1 \quad (2.95)$$

Denklem (2.95)'teki (D_2) türev operatörü

$$D_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + u_2^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + u_2^2 \frac{\partial}{\partial u^2} + u_{21}^1 \frac{\partial}{\partial u_1^1} + u_{22}^1 \frac{\partial}{\partial u_1^2} + u_{21}^2 \frac{\partial}{\partial u_1^2} + u_{22}^2 \frac{\partial}{\partial u_2^2} \quad (2.96)$$

olarak tanımlanır.

Denklem (2.96) ve önceden bulunmuş olan $\eta_2^{(1)1}$ ifadesi denklem (2.95)'te yerine konup gerekli türevler alınırsa $\eta_{22}^{(2)1}$ 'in eşiti aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} \eta_{22}^{(2)1} = & \frac{\partial^2 \eta^1}{(\partial x_2)^2} + \left(2 \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x_2 \partial u^1} - \frac{\partial^2 \xi_2}{(\partial x_2)^2} \right) u_2^1 + 2 \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial u^2 \partial x_2} u_2^2 - \frac{\partial^2 \xi_1}{(\partial x_2)^2} u_1^1 \\ & - 2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^1 \partial x_2} u_1^1 u_2^1 - 2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2 \partial x_2} u_1^1 u_2^2 - \left(2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u^1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \eta^1}{(\partial u^1)^2} \right) (u_2^1)^2 \\ & - \left(\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u^2 \partial x_2} - 2 \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial u^2 \partial u^1} \right) u_2^2 u_2^1 - \frac{\partial^2 \xi_3}{(\partial x_2)^2} u_3^1 - 2 \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial u^1 \partial x_2} u_2^1 u_3^1 \\ & - 2 \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial u^2 \partial x_2} u_2^2 u_3^1 - \frac{\partial^2 \xi_1}{(\partial u^1)^2} u_1^1 (u_2^1)^2 - 2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2 \partial u^1} u_2^2 u_1^1 u_2^1 - \frac{\partial^2 \xi_2}{(\partial u^1)^2} (u_2^1)^3 \\ & - 2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u^2 \partial u^1} u_2^2 (u_2^1)^2 - \frac{\partial^2 \xi_3}{(\partial u^1)^2} u_3^1 (u_2^1)^2 - 2 \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial u^2 \partial u^1} u_2^2 u_3^1 u_2^1 + \frac{\partial^2 \eta^1}{(\partial u^2)^2} (u_2^2)^2 \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial^2 \xi_1}{(\partial u^2)^2} u_1^1 (u_2^2)^2 - \frac{\partial^2 \xi_2}{(\partial u^2)^2} u_2^1 (u_2^2)^2 - \frac{\partial^2 \xi_3}{(\partial u^2)^2} u_3^1 (u_2^2)^2 - 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} u_{21}^1 \\
& - 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial u^1} u_{21}^1 u_2^1 - 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial u^2} u_{21}^1 u_2^2 + \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - 2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) u_{22}^1 - \frac{\partial \xi_1}{\partial u^1} u_{22}^1 u_1^1 \\
& - 3 \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} u_{22}^1 u_2^1 - 2 \frac{\partial \xi_2}{\partial u^2} u_{22}^1 u_2^2 - \frac{\partial \xi_3}{\partial u^1} u_{22}^1 u_3^1 - 2 \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} u_{23}^1 - 2 \frac{\partial \xi_3}{\partial u^1} u_{23}^1 u_2^1 \\
& - 2 \frac{\partial \xi_3}{\partial u^2} u_{23}^1 u_2^2 + \frac{\partial \eta^1}{\partial u^2} u_{22}^2 - \frac{\partial \xi_1}{\partial u^2} u_{22}^2 u_1^1 - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^2} u_{22}^2 u_2^1 - \frac{\partial \xi_3}{\partial u^2} u_{22}^2 u_3^1
\end{aligned}$$

Denklem (2.77) ve (2.78) için gerekli ifadeler elde edilmiş olur. Şimdi denklem (2.77)'deki süreklilik denkleminde bu ifadeler kullanılıp ve süreklilik denklemindeki u_2^2 görülen yere $-u_1^1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \eta^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta^2}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \eta^2}{\partial u^2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) u_1^1 + \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^2} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right) u_1^2 \\
& + \left(\frac{\partial \eta^2}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right) u_2^1 - \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} u_3^1 + \left(-\frac{\partial \xi_1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^2} \right) (u_1^1)^2 \\
& + \left(-\frac{\partial \xi_1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^2} \right) u_2^1 u_1^2 - \frac{\partial \xi_3}{\partial u^1} u_1^1 u_3^1 - \frac{\partial \xi_3}{\partial u^2} u_2^1 u_3^1 - \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} u_3^2 \\
& - \frac{\partial \xi_3}{\partial u^1} u_2^1 u_3^2 + \frac{\partial \xi_3}{\partial u^2} u_1^1 u_3^2 = 0
\end{aligned} \tag{2.98}$$

denklem bloğu elde edilir. Denklem bloğuna dikkat edilecek olur ise u^1 ve u^2 'nin türevleri cinsinden bir polinom olduğu görülür. Polinomun sıfıra eşit olabilmesi ancak ve ancak katsayıların ayrı ayrı sıfıra eşit olması ile mümkündür. Böylece aşağıda yazılan denklem sistemlerini elde ederiz.

$$\frac{\partial \eta^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta^2}{\partial x_2} = 0 \tag{2.99}$$

$$\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \eta^2}{\partial u^2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = 0 \tag{2.100}$$

$$\frac{\partial \eta^1}{\partial u^2} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = 0 \quad (2.101)$$

$$\frac{\partial \eta^2}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = 0 \quad (2.102)$$

$$-\frac{\partial \xi_1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^2} = 0 \quad (2.103)$$

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} = 0 \quad (2.104)$$

$$-\frac{\partial \xi_3}{\partial u^1} = 0 \quad (2.105)$$

$$-\frac{\partial \xi_3}{\partial u^2} = 0 \quad (2.106)$$

$$-\frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} = 0 \quad (2.107)$$

Denklem (2.104)-(2.107)'den $\xi_3 = \xi_3(x_3)$ olur. Geriye kalan denklem (2.99)-(2.103) ise daha sonraki kısımda kullanılacaktır.

Momentum denklemi için ise denklem (2.83), (2.86), (2.89), (2.92) ve (2.97) ikinci invaryantlık koşulu olan denklem (2.78)'e yerleştirilir, $u_2^2 = -u_1^1$ ve

$$u_{22}^1 = \frac{u_1^3 + u^1 u_1^1 + u^2 u_2^1 - f}{|u_2^1|^m \left[(m+1) + 2k_3(m+3)(u_2^1)^2 \right]} \text{ ifadeleri gerekli yerlerde kullanılır ve ayrıca}$$

$\xi_3 = \xi_3(x_3)$ unutulmaz ise aşağıdaki denklem bloğu elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \eta^1}{\partial x_3} + \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \right) u_3^1 + \frac{\partial \eta^1}{\partial u^2} u_3^2 - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} u_1^1 - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} u_2^1 - \frac{\partial \xi_1}{\partial u^1} u_1^1 u_3^1 \\
& - \frac{\partial \xi_1}{\partial u^2} u_1^1 u_3^2 - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} u_2^1 u_3^1 - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^2} u_2^1 u_3^2 + u_1^1 \eta^1 + u^1 \left[\frac{\partial \eta^1}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right) u_1^1 \right. \\
& + \left. \frac{\partial \eta^1}{\partial u^2} u_1^2 - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} u_2^1 - \frac{\partial \xi_1}{\partial u^1} (u_1^1)^2 - \frac{\partial \xi_1}{\partial u^2} u_1^1 u_2^1 - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} u_1^1 u_2^1 - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^2} u_2^1 u_1^2 \right] \\
& + u_2^1 \eta^2 + u^2 \left[\frac{\partial \eta^1}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) u_2^1 + \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^2} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right) u_1^1 \right. \\
& + \left. \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial u^2} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u^1} \right) u_1^1 u_2^1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial u^2} (u_1^1)^2 - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} (u_2^1)^2 \right] - m \left[\frac{u_3^1 + u^1 u_1^1 + u^2 u_2^1 - f}{u_2^1} \right] \\
& \left\{ \frac{\partial \eta^1}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) u_2^1 + \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^2} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right) u_1^1 - \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial u^2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial u^1} \right) u_1^1 u_2^1 \right. \\
& - \left. \frac{\partial \xi_1}{\partial u^2} (u_1^1)^2 - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} (u_2^1)^2 \right\} - |u_2^1|^m \left[(m+1) + 2k_3(m+3)(u_2^1)^2 \right] \\
& \left\{ \frac{\partial^2 \eta^1}{(\partial x_2)^2} + \left(2 \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x_2 \partial u^1} - \frac{\partial^2 \xi_2}{(\partial x_2)^2} \right) u_2^1 + \left(2 \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial u^2 \partial u^1} - \frac{\partial^2 \xi_1}{(\partial x_2)^2} \right) u_1^1 \right. \\
& - \left(2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2 \partial u^1} + \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2 \partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial u^2 \partial u^1} \right) u_1^1 u_2^1 + \left(\frac{\partial^2 \eta^1}{(\partial u^2)^2} - 2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2 \partial u^2} \right) (u_1^1)^2 \\
& - \left(2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2 \partial u^1} - \frac{\partial^2 \eta^1}{(\partial u^1)^2} \right) (u_2^1)^2 - \left(\frac{\partial^2 \xi_1}{(\partial u^1)^2} + 2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u^2 \partial u^1} \right) u_1^1 (u_2^1)^2 \\
& - 2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2 \partial u^1} (u_1^1)^2 u_2^1 - \frac{\partial^2 \xi_2}{(\partial u^1)^2} (u_2^1) - \frac{\partial^2 \xi_1}{(\partial u^2)^2} (u_1^1)^3 - \frac{\partial^2 \xi_2}{(\partial u^2)^2} u_2^1 (u_1^1)^2 \\
& - 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} u_{21}^1 - 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial u^1} u_{21}^1 u_2^1 - 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial u^2} u_{21}^1 u_1^1 + \frac{u_3^1 + u^1 u_1^1 + u^2 u_2^1 - f}{|u_2^1|^m \left[(m+1) + 2k_3(m+3)(u_2^1)^2 \right]} \\
& \left[\left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - 2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial \xi_1}{\partial u^1} u_1^1 - 3 \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} u_2^1 - 2 \frac{\partial \xi_2}{\partial u^2} \right] + \frac{\partial \eta^1}{\partial u^2} u_{22}^2 - \frac{\partial \xi_1}{\partial u^2} u_{22}^2 u_1^1 \\
& - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^2} u_{22}^2 u_2^1 \left\} - 4k_3(m+3)(u_2^1) \left(\frac{u_3^1 + u^1 u_1^1 + u^2 u_2^1 - f}{\left[(m+1) + 2k_3(m+3)(u_2^1)^2 \right]} \right) \left\{ \frac{\partial \eta^1}{\partial x_2} \right.
\end{aligned}
\tag{2.108}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) u_2^1 + \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^2} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right) u_1^1 - \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial u^1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial u^2} \right) u_1^1 u_2^1 - \frac{\partial \xi_1}{\partial u^2} (u_1^1)^2 \\
& - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} (u_2^1)^2 \Big\} - \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - \xi_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0
\end{aligned}$$

Yukarıdaki denklem bloğunun karmaşıklığından dolayı terimler kolayca ayrıklaşmaz. Ayrışan az sayıdaki terimler şunlardır.

$$-2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = 0 \quad (2.109)$$

$$-2 \frac{\partial \xi_1}{\partial u^1} = 0 \quad (2.110)$$

$$-2 \frac{\partial \xi_1}{\partial u^2} = 0 \quad (2.111)$$

$$\frac{\partial \eta^1}{\partial u^2} = 0 \quad (2.112)$$

$$-\frac{\partial \xi_2}{\partial u^2} = 0 \quad (2.113)$$

Denklem (2.109)-(2.113)'ten ξ_i ve η^u fonksiyonlarının bazı değişkenlere olan bağımlılığı ortadan kalkacaktır. Şimdiye kadar elde edilen sonuçlar

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \xi_1(x_1, x_3), \quad \xi_2 = \xi_2(x_1, x_2, x_3, u^1), \quad \xi_3 = \xi_3(x_3), \\
\eta^1 &= \eta^1(x_1, x_2, x_3, u^1), \quad \eta^2 = \eta^2(x_1, x_2, x_3, u^1, u^2)
\end{aligned} \quad (2.114)$$

şeklinde özetlenir.

Denklem (2.114)'teki kısıtlamalar kullanılarak denklem (2.108) aşağıdaki şekilde basitleşmiş olur.

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\partial \eta^1}{\partial x_3} + \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \right) u_3^1 - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} u_1^1 - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} u_2^1 - \frac{\partial \xi_1}{\partial u^1} u_1^1 u_3^1 - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} u_2^1 u_3^1 \right. \\
& + u_1^1 \eta^1 + \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + u^1 \left[\frac{\partial \eta^1}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right) u_1^1 - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} u_2^1 \right. \\
& \left. \left. - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} u_1^1 u_2^1 \right] + u_2^1 \eta^2 + u^2 \left[\frac{\partial \eta^1}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) u_2^1 - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} (u_2^1)^2 \right] \right\} \\
& - m \left[\frac{u_3^1 + u^1 u_1^1 + u^2 u_2^1 - f}{u_2^1} \right] \left\{ \frac{\partial \eta^1}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) u_2^1 - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} (u_2^1)^2 \right\} \\
& - |u_2^1|^m \left[(m+1) + 2k_3(m+3)(u_2^1)^2 \right] \left\{ \frac{\partial^2 \eta^1}{(\partial x_2)^2} + \left(2 \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x_2 \partial u^1} - \frac{\partial^2 \xi_2}{(\partial x_2)^2} \right) u_2^1 \right. \\
& \left. - \left(2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2 \partial u^1} - \frac{\partial^2 \eta^1}{(\partial u^1)^2} \right) (u_2^1)^2 - \frac{\partial^2 \xi_2}{(\partial u^1)^2} (u_2^1)^3 \right\} \\
& - \left[u_3^1 + u^1 u_1^1 + u^2 u_2^1 - f \right] \left\{ \frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - 2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} - 3 \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} u_2^1 \right\} - 4k_3(m+3)(u_2^1) \\
& \left(\frac{u_3^1 + u^1 u_1^1 + u^2 u_2^1 - f}{[(m+1) + 2k_3(m+3)(u_2^1)^2]} \right) \left\{ \frac{\partial \eta^1}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) u_2^1 - \frac{\partial \xi_1}{\partial u^2} (u_1^1)^2 \right\} = 0
\end{aligned} \tag{2.115}$$

Bu durumda denklem (2.115)'teki tüm terimlerin ayrışması sonucunda aşağıdaki terimler elde edilecektir.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \eta^1}{\partial x_3} + \frac{\partial \eta^1}{\partial x_1} u^1 + (1-m) \frac{\partial \eta^1}{\partial x_2} u^2 + m f \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) + f \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - 2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) \\
& - \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - \xi_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0
\end{aligned} \tag{2.116}$$

$$\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} - m \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) - \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - 2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) = 0 \tag{2.117}$$

$$- \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} + \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right) u^1 + \eta^1 - m \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) u^1 - \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - 2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) u^1 = 0 \tag{2.118}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} u^1 + \eta^2 + \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) u^2 - m f \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} - m \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) u^2 \\
& - f \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} - \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - 2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) u^2 - 3 f \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} = 0
\end{aligned} \tag{2.119}$$

$$-\frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} + m \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} + 3 \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} = 0 \tag{2.120}$$

$$-\frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} u^1 + m \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} u^1 + 3 \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} = 0 \tag{2.121}$$

$$-\frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} u^2 + m \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} u^2 + 3 \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} = 0 \tag{2.122}$$

$$\frac{\partial^2 \eta^1}{(\partial x_2)^2} = 0 \tag{2.123}$$

$$2 \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x_2 \partial u^1} - \frac{\partial^2 \xi_2}{(\partial x_2)^2} = 0 \tag{2.124}$$

$$2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2 \partial u^1} - \frac{\partial^2 \eta^1}{(\partial u^1)^2} = 0 \tag{2.125}$$

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{(\partial u^1)^2} = 0 \tag{2.126}$$

$$\frac{\partial \eta^1}{\partial \xi_2} = 0 \tag{2.127}$$

$$\frac{\partial \eta^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = 0 \tag{2.128}$$

$$-\frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} = 0 \tag{2.129}$$

Süreklilik denklemlerinden (2.99)-(2.103) ile momentum denklemlerinden (2.116)-

(2.129)'u birlikte çözülür.

Denklem (2.123), (2.126), (2.127) ve (2.129)'dan

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi_1(x_1, x_3), & \xi_2 &= \xi_2(x_1, x_2, x_3), & \xi_3 &= \xi_3(x_3), \\ \eta^1 &= \eta^1(x_1, x_3, u^1), & \eta^2 &= \eta^2(x_1, x_2, x_3, u^1, u^2)\end{aligned}\quad (2.130)$$

kısıtları elde edilir. Denklem (2.125) ve (2.124) çözülürse

$$\eta^1 = c_1(x_1, x_3)u^1 + c_2(x_1, x_3) \quad (2.131)$$

$$\xi_2 = c_3(x_1, x_3)x_2 + c_4(x_1, x_3) \quad (2.132)$$

denklemleri elde edilir. Denklem (2.128) çözülürse

$$c_1(x_1, x_3) = c_3(x_1, x_3) \quad (2.133)$$

eşitliği bulunur ve denklem (2.132) yeniden yazılırsa

$$\xi_2 = c_1(x_1, x_3)x_2 + c_4(x_1, x_3) \quad (2.134)$$

olur. Denklem (2.117) çözülürse

$$\xi_3 = 2c_1(x_1)x_3 + c_5 \quad (2.135)$$

ifadesine ulaşılır. Denklem (2.118)'de u^1 ve sabit cinsinden bir polinom olduğu görülmektedir. Polinomun katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\xi_1 = 3c_1(x_3)x_1 + c_6(x_3) \quad (2.136)$$

$$c_2(x_1, x_3) = 3 \frac{\partial c_1(x_1)}{\partial x_3} x_1 + \frac{\partial c_6}{\partial x_3} \quad (2.137)$$

Denklem (2.119) çözülürse

$$\eta^2 = -c_1(x_1, x_3)u^2 + \left[\frac{\partial c_1(x_3)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial c_4(x_3)}{\partial x_1} \right] u^1 + \frac{\partial c_1(x_1)}{\partial x_3} x_2 + \frac{\partial c_4(x_1)}{\partial x_3} \quad (2.138)$$

denklemini elde edilir. Şimdiye kadar elde edilen kısıtlar ve denklemler, denklem (2.120)-(2.122) ile süreklilik denkleminin (2.100)-(2.103)'ü sağlamaktadır. Süreklilik denkleminin kalan denklem (2.98)'de çözülürse

$$c_1 = a \quad (2.139)$$

gibi bir sabite eşit olduğu bulunur. Son olarak momentum denkleminin denklem (2.116)'da çözülürse

$$\frac{\partial^2 c_6}{\partial x_3^2} = af + \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} \quad (2.140)$$

ifadesi bulunur. Sonuçta bulunan bu ifadelerde $c_6(x_3)$ yerine $h_1(t)$, $c_4(x_1, x_3)$ yerine $h_2(x, t)$ ve c_5 yerine b yazılırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir

$$\xi_1 = 3ax + h_1(t) \quad (2.141)$$

$$\xi_2 = ay + h_2(x, t) \quad (2.142)$$

$$\xi_3 = 2at + b \quad (2.143)$$

$$\eta^1 = au + h_1'(t) \quad (2.144)$$

$$\eta^2 = -av + \frac{\partial h_2}{\partial x} u + \frac{\partial h_2}{\partial t} \quad (2.145)$$

f fonksiyonun yapısını veren denklem ise

$$h_1''(t) = af + [3ax + h_1(t)] \frac{\partial f}{\partial x} + [2at + b] \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.146)$$

şeklindedir. Elde edilen ifadeler incelendiğinde denklemlerin a ve b parametrelerine bağlı olarak iki parametrelili Lie Grup dönüşümünü kabul ettiği görülmektedir. Ayrıca $h_1(t)$ ve $h_2(x, t)$ 'ye karşılık gelen sonsuz parametre Lie Grup dönüşümleri de bulunmaktadır. a parametresi ölçekleme dönüşümünü ve b parametresi ise t koordinatlarındaki ötelemeyi gösterir.

Bu sınır tabakası problemine ait sınır şartları aşağıdaki gibidir.

$$u(x, 0, t) = A(x, t), \quad v(x, 0, t) = \mp V(x, t), \quad u(x, \infty, t) = U(x, t) \quad (2.147)$$

Sınır şartlarının infinitesimal jeneratöre ne gibi kısıtlamalar getirdiğinin tespit edilmesi gerekmektedir. İnfinitesimal jeneratör ise aşağıdaki gibi yazılır.

$$X = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial y} + \xi_3 \frac{\partial}{\partial t} + \eta^1 \frac{\partial}{\partial u} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial v} \quad (2.148)$$

Jeneratörü sınır değerlerine ve sınır şartlarına uygulayalım.

$$y = 0 \text{ 'da } X[y = 0]$$

$$h_2(x, t) = 0 \quad (2.149)$$

$$y = \infty \text{ 'da } X[y = \infty]$$

Herhangi bir kısıtlama gelmemiştir.

$y = 0$ ve $u(x,0,t) = A(x,t)$ 'de

$$\eta^1 = \xi_1 \frac{\partial A}{\partial x} + \xi_3 \frac{\partial A}{\partial t} \text{ veya } aA + h_1'(t) = [3ax + h_1(t)] \frac{\partial A}{\partial x} + [2at + b] \frac{\partial A}{\partial t} \quad (2.150)$$

$y = 0$ ve $v(x,0,t) = \mp V(x,t)$ 'de

$$\eta^2 = \mp \xi_1 \frac{\partial V}{\partial x} \mp \xi_3 \frac{\partial V}{\partial t} \text{ veya } -aV = \mp [3ax + h_1'(t)] \frac{\partial V}{\partial x} \mp [2at + b] \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.151)$$

$y = \infty$ ve $u(x,\infty,t) = U(x,t)$ 'de

$$\eta^1 = \xi_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \xi_3 \frac{\partial U}{\partial t} \text{ veya } aU + h_1'(t) = [3ax + h_1(t)] \frac{\partial U}{\partial x} + [2at + b] \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2.152)$$

Böylece sınır şartlarının infinitesimal jeneratöre ne gibi kısıtlamalar getirdiğini tespit etmiş olduk. Denklem (2.141)-(2.146) aşağıdaki hali almıştır.

$$\xi_1 = 3ax + h_1(t) \quad (2.153)$$

$$\xi_2 = ay \quad (2.154)$$

$$\xi_3 = 2at + b \quad (2.155)$$

$$\eta^1 = au + h_1'(t) \quad (2.156)$$

$$\eta^2 = -av \quad (2.157)$$

$$af + [3ax + h_1(t)] \frac{\partial f}{\partial x} + [2at + b] \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (2.158)$$

Denklem (2.153)-(2.158)'deki simetriler kullanılarak denklemlerin bağımsız değişken sayısında indirgemeye gidilecektir. İki değişik indirgeme yapılacaktır.

Birincisinde a parametresine ait ölçekleme jeneratörü, ikincisinde b ve $h_1(t)$ parametrelerine ait öteleme jeneratörü kullanılacaktır.

2.3.1.1. Ölçekleme Dönüşümü

Denklem (2.153)-(2.157)'de $a=1$ ve $b=h_1(t)=0$ alındığında jeneratör ile ilgili invaryant çözümleri veren denklem sistemini aşağıdaki şekilde yazmak mümkündür.

$$\frac{dt}{2t} = \frac{dx}{3x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} = \frac{dv}{-v} \quad (2.159)$$

Denklem sistemi (2.159) çözülürse benzerlik değişkenleri ve fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\delta = \frac{x}{t^{3/2}}, \quad \beta = \frac{y}{t^{1/2}}, \quad u = t^{1/2} P(\delta, \beta), \quad v = t^{-1/2} Q(\delta, \beta) \quad (2.160)$$

$A(x, t)$ fonksiyonunun benzerlik dönüşümlerini kabul edebilmesi için gerekli yapı denklem (2.150)'de verilmiştir. Bu yapı $a=1$ ve $b=h_1(t)=0$ altında aşağıdaki formu alır.

$$A = 3x \frac{\partial A}{\partial x} + 2t \frac{\partial A}{\partial t} \quad (2.161)$$

Denklem (2.161)'deki ifade birinci mertebeden lineer kısmi türevli denklem olduğundan dolayı

$$\frac{dA}{A} = \frac{dx}{3x} = \frac{dt}{2t} \quad (2.162)$$

şeklinde ifade edilir. Denklem (2.162) çözülürse A fonksiyonunun yapısı aşağıdaki gibi bulunur.

$$A = t^{1/2} A(\delta) \quad (2.163)$$

$V(x, t)$ fonksiyonunun yapısını veren denklem (2.151), $a = 1$ ve $b = h_1(t) = 0$ altında şu şekle dönüşür.

$$-V = 3x \frac{\partial V}{\partial x} + 2t \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.164)$$

Denklem (2.164)'te ki ifade

$$\frac{dV}{-V} = \frac{dx}{3x} = \frac{dt}{2t} \quad (2.165)$$

şeklini alır ve bu denklem çözülürse V fonksiyonunun yapısı

$$V = t^{-1/2} V(\delta) \quad (2.166)$$

şeklinde bulunur.

$U(x, t)$ fonksiyonunun yapısını veren denklem (2.152) ise ölçekleme dönüşümü ile aşağıdaki gibi olur.

$$U = 3x \frac{\partial U}{\partial x} + 2t \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2.167)$$

Denklem (2.167)

$$\frac{dU}{U} = \frac{dx}{3x} = \frac{dt}{2t} \quad (2.168)$$

şeklinde yazılır ve çözülürse, U fonksiyonunun yapısı aşağıdaki gibi bulunmuş olur.

$$U = t^{1/2} U(\delta) \quad (2.169)$$

$f(x, t)$ fonksiyonunun yapısı, denklem (2.158)'in $a = 1$ ve $b = h_1(t) = 0$ ölçekleme dönüşümü altında

$$-f = 3x \frac{\partial f}{\partial x} + 2t \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.170)$$

şeklini alır. Denklem (2.170) aşağıdaki gibi de yazılır.

$$\frac{df}{-f} = \frac{dx}{3x} = \frac{dt}{2t} \quad (2.171)$$

Denklem (2.171) çözüldüğünde

$$f = t^{-1/2} f(\delta) \quad (2.172)$$

yapısı bu şekilde elde edilmiş olur.

$A(x, t)$, $V(x, t)$, $U(x, t)$ ve $f(x, t)$ fonksiyonlarının $a = 1$ ve $b = h_1(t) = 0$ ölçekleme dönüşümü altında benzerlik fonksiyonları aşağıda yeniden yazılmıştır.

$$U = t^{1/2} U(\delta), \quad V = t^{-1/2} V(\delta), \quad A = t^{1/2} A(\delta), \quad f = t^{-1/2} f(\delta) \quad (2.173)$$

Denklem (2.160) ve (2.173) kullanılarak denklem (2.51) ve (2.55)'te değişken sayısında indirgemeye gidilecektir. Bunun içinde denklemlerde bulunan türevler hesap edilmelidir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{P}{t^{1/2}} - \frac{3}{2} \frac{\partial P}{\partial \delta} \frac{x}{t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial \beta} \frac{y}{t} \quad (2.174)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial \delta} \frac{1}{t} \quad (2.175)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial \beta} \quad (2.176)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial \beta^2} \frac{1}{t^{1/2}} \quad (2.177)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial \beta} \frac{1}{t} \quad (2.178)$$

Türevler alındıktan sonra ifadeler denklem (2.51) ve (2.55)'te yerine konulursa yeni denklemler

$$P_{\delta} + Q_{\beta} = 0 \quad (2.179)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}P - \frac{3}{2}\delta P_{\delta} - \frac{1}{2}\beta P_{\beta} + PP_{\delta} + QP_{\beta} = & P_{\beta\beta} \left((m+1)|P_{\beta}|^m + 2k_3(m+3)|P_{\beta}|^{m+2} \right) \\ & + f(\delta) \end{aligned} \quad (2.180)$$

şeklinde elde edilir. Denklem (2.147)'deki sınır şartları, denklem (2.160) ve (2.173) kullanılarak

$$P(\delta,0) = A(\delta), \quad Q(\delta,0) = \mp V(\delta), \quad P(\delta,\infty) = U(\delta) \quad (2.181)$$

şekline dönüşmüş ve $f(\delta)$ ile $U(\delta)$ arasındaki ilişki ise

$$f(\delta) = \frac{1}{2}U(\delta) - \frac{3}{2}\delta U'(\delta) + U(\delta)U'(\delta) \quad (2.182)$$

şeklinde elde edilmiştir.

2.3.1.2. Öteleme Dönüşümü

Şimdi ise denklem (2.153)-(2.157)'yi öteleme dönüşümü altında indirgeyelim. Bunun için $a = 0$ ve $b = h_1(t) = 1$ alındığında jeneratör ile ilgili invaryant çözümleri veren denklem sistemini aşağıdaki şekilde yazmak mümkündür.

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{du}{0} = \frac{dv}{0} \quad (2.183)$$

Denklem sistemi (2.183) çözülürse benzerlik değişkenleri ve fonksiyonları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\gamma = x - t, \quad \lambda = y, \quad u = R(\gamma, \lambda), \quad v = S(\gamma, \lambda) \quad (2.184)$$

$A(x, t)$, $V(x, t)$, $U(x, t)$ ve $f(x, t)$ fonksiyonlarının benzerlik dönüşümlerini kabul edebilmesi için gerekli yapılar, denklem (2.150)-(2.153) ve (2.158)'de verilmiştir. Bu yapılar $a = 0$ ve $b = h_1(t) = 1$ öteleme dönüşümü altında benzerlik fonksiyonları

$$U = U(\gamma), \quad V = V(\gamma), \quad A = A(\gamma), \quad f = f(\gamma) \quad (2.185)$$

gibi elde edilmiştir. Bu benzerlik fonksiyonlarının bulunuşu ölçekleme dönüşümünde yapılan işlemlerin aynısıdır. Denklem (2.184) ve (2.185) kullanılarak denklem (2.51) ve (2.55)'te değişken sayısında indirgemeye gidilecektir. Bunun içinde denklemde bulunan türevler hesap edilmelidir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial R}{\partial \gamma} \quad (2.186)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial \gamma} \quad (2.187)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial \lambda} \quad (2.188)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 R}{\partial \lambda^2} \quad (2.189)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial \lambda} \quad (2.190)$$

Türevler alındıktan sonra denklem (2.51) ve (2.55)'te yerine konulursa yeni denklemler şu şekilde elde edilir.

$$R_\gamma + S_\lambda = 0 \quad (2.191)$$

$$-R_\gamma + RR_\gamma + SR_\lambda = R_{\lambda\lambda} \left((m+1)|R_\lambda|^m + 2k_3(m+3)|R_\lambda|^{m+2} \right) + f(\gamma) \quad (2.192)$$

Denklem (2.184) ve (2.185) kullanılarak, denklem (2.147)'de ki sınır şartları

$$R(\gamma, 0) = A(\gamma), \quad S(\gamma, 0) = \mp V(\gamma), \quad R(\gamma, \infty) = U(\gamma) \quad (2.193)$$

elde edilir ve $f(\gamma)$ ile $U(\gamma)$ arasındaki ilişki ise

$$f(\gamma) = -U'(\gamma) + U(\gamma)U'(\gamma) \quad (2.194)$$

şeklindedir.

Üçüncü dereceden Power-Law akışkanlarına ait sınır tabakası denklemleri ölçekleme ve öteleme dönüşümü (Lie Grup analizi) altında üç değişkenli kısmi diferansiyel denklemden, iki değişkenli kısmi diferansiyel denklem sistemine indirgenmiştir. Bu denklem sistemlerini adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürmek için her iki denklem sistemine yeniden Lie Grup analizi uygulanacaktır.

2.3.2. İkinci Defa Lie Grup Analizi

Yukarıda ölçekleme (denklem (2.179) ve (2.180)) ve öteleme (denklem (2.191) ve

(2.192)) dönüşümlerinden elde edilen iki değişkenli kısmi diferansiyel denklem sistemlerine tekrar Lie Grup analizi uygulanacaktır. Bu sayede, bu iki farklı kısmi diferansiyel denklem sistemleri adi diferansiyel denklem sistemlerine indirgenecektir. İlk önce, ölçekleme dönüşümünden elde edilen denklem sistemine Lie Grup analizi uygulanacaktır.

Denklemlerle irtibatlı infinitesimal jeneratör ise aşağıdaki gibi yazılır.

$$Y = \xi_1 \frac{\partial}{\partial \delta} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \beta} + \eta^1 \frac{\partial}{\partial P} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial Q} \quad (2.195)$$

Ölçekleme dönüşümünden elde edilen iki değişkenli kısmi diferansiyel denklem sistemi (2.179) ve (2.180)'e tekrar Lie Grup analizi uygulanmış ve denklemlerin kabul ettiği en genel infinitesimal jeneratörler şöyle elde edilmiştir.

$$\xi_1 = 2a, \quad \xi_2 = 2h_2(\delta), \quad \eta^1 = 3a, \quad \eta^2 = 2h'(\delta)P + h(\delta) - 3ah'(\delta) \quad (2.196)$$

f fonksiyonun yapısını veren denklem ise

$$f(\delta) = \frac{3}{4}\delta + b \quad (2.197)$$

şeklindedir.

Bu sınır tabakası problemine ait sınır şartları aşağıdaki gibidir.

$$P(\delta, 0) = A(\delta), \quad Q(\delta, 0) = \mp V(\delta), \quad u(\delta, \infty) = U(\delta) \quad (2.198)$$

Jeneratörü sınır değerlerine ve sınır şartlarına uygulayalım. Böylece sınır şartlarının infinitesimal jeneratöre ne gibi kısıtlamalar getirdiği tespit edilmiş olur. Bu durumda denklem (2.196) aşağıdaki hali alır.

$$\xi_1 = 2a, \quad \xi_2 = 0, \quad \eta^1 = 3a, \quad \eta^2 = 0 \quad (2.199)$$

Denklem (2.199)'da $a = 1$ alındığında jeneratör ile ilgili invaryant çözümleri veren denklem sistemini, aşağıdaki şekilde yazmak mümkündür.

$$\frac{d\delta}{2\delta} = \frac{d\beta}{0} = \frac{dP}{3P} = \frac{dQ}{0} \quad (2.200)$$

Denklem sistemi (2.200) çözülürse benzerlik değişkenleri ve fonksiyonları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\beta = \mu, \quad P = \frac{3}{2}\delta + M(\mu), \quad Q = N(\mu) \quad (2.201)$$

$A(\delta)$, $V(\delta)$, $U(\delta)$ ve $f(\delta)$ fonksiyonlarının $a = 1$ altında benzerlik fonksiyonlarının yapıları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$A = \frac{3}{2}\delta + c_1, \quad V = c_2, \quad U = \frac{3}{2}\delta + c_3, \quad c_3 = \frac{b}{2} \quad (2.202)$$

Denklem (2.179) ve (2.180)'de değişken sayısında indirgemeye gidilecektir. Bunun içinde denklemde bulunan türevleri hesap edelim.

$$\frac{\partial P}{\partial \delta} = \frac{3}{2} \quad (2.203)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta} = N' \quad (2.204)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = M' \quad (2.205)$$

$$\frac{\partial^2 P}{(\partial \eta)^2} = M'' \quad (2.206)$$

Türevler alındıktan sonra elde edilen denklem (2.203)-(2.206), denklem (2.179) ve (2.180)'de yerine konulursa yeni denklemler şu şekilde elde edilir.

$$N' + \frac{3}{2} = 0 \quad (2.207)$$

$$2M + M' \left(N - \frac{1}{2} \mu \right) = M'' \left((m+1) |M'|^m + 2k_3 (m+3) |M'|^{m+2} \right) + 2c_3 \quad (2.208)$$

Sınır şartları ise

$$M(0) = c_1, \quad N(0) = \mp c_2, \quad M(\infty) = c_3 \quad (2.209)$$

şeklinde bulunur. Denklem (2.209)'daki sınır şartlarıyla birlikte denklem (2.207) çözüldüğünde aşağıdaki ifade elde edilir.

$$N = -\frac{3}{2} \mu \mp c_2 \quad (2.210)$$

Denklem (2.208)'in içine denklem (2.210) yerleştirildiğinde aşağıdaki denklem ve sınır şartları elde edilir.

$$2M + M'(-2\mu \mp c_2) = M'' \left((m+1) |M'|^m + 2k_3 (m+3) |M'|^{m+2} \right) + 2c_3 \quad (2.211)$$

$$M(0) = c_1, \quad M(\infty) = c_3 \quad (2.212)$$

Sonuçta üçüncü dereceden Power-Law akışkanlarına ait sınır tabakası denklemlerine iki kez Lie Grup analizi uygulanarak denklem (2.211)'deki adi diferansiyel denklem ve denklem (2.212)'deki sınır şartları elde edilmiş olur.

Şimdi ise öteleme dönüşümünden elde edilen iki değişkenli kısmi diferansiyel denklem sistemi için infinitesimal jeneratör

$$Z = \xi_1 \frac{\partial}{\partial \gamma} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \lambda} + \eta^1 \frac{\partial}{\partial R} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial S} \quad (2.213)$$

şeklinde yazılır. Denklem (2.191) ve (2.192)'ye tekrar Lie Grup analizi uygulanmış ve denklemlerin kabul ettiği en genel infinitesimal jeneratörler

$$\xi_1 = 3a\gamma + b, \quad \xi_2 = a\lambda + h(\gamma), \quad \eta^1 = a(R-1), \quad \eta^2 = -aS + (R-1)h'(\gamma) \quad (2.214)$$

formda elde edilmiştir. Sınır tabakası problemine ait sınır şartları aşağıdaki gibidir.

$$R(\gamma, 0) = A(\gamma), \quad S(\gamma, 0) = \mp V(\gamma), \quad R(\gamma, \infty) = U(\gamma) \quad (2.215)$$

Jeneratörü sınır değerlerine ve sınır şartlarına uygulayalım. Böylece sınır şartlarının infinitesimal jeneratöre ne gibi kısıtlamalar getirdiği tespit edilmiş olur. Bu durumda, denklem (2.214) aşağıdaki hali alır.

$$\xi_1 = 3a\gamma + b, \quad \xi_2 = a\lambda, \quad \eta^1 = a(R-1), \quad \eta^2 = -aS \quad (2.216)$$

Denklem (2.216)'da $a=1$ ve $b=0$ alındığında jeneratör ile ilgili invariant çözümleri veren denklem sistemini aşağıdaki gibi yazmak mümkündür.

$$\frac{d\gamma}{3\gamma} = \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dR}{R-1} = \frac{dS}{-S} \quad (2.217)$$

Denklem sistemi çözülürse benzerlik değişkenleri ve fonksiyonları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\alpha = \frac{\lambda}{\gamma^{3/2}}, \quad R = \gamma^{1/3} K(\alpha) + 1, \quad S = \gamma^{-1/3} L(\alpha) \quad (2.218)$$

$A(\delta)$, $V(\delta)$, $U(\delta)$ ve $f(\delta)$ fonksiyonlarının $a=1$ ve $b=0$ altında benzerlik fonksiyonlarının yapıları aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$A = c_1 \gamma^{1/3} + 1, \quad V = c_2 \gamma^{-1/3}, \quad U = c_3 \gamma^{1/3} + 1, \quad f = c_4 \gamma^{-1/3} \quad (2.219)$$

Denklem (2.191) ve (2.192)'de değişken sayısında indirgemeye gidilecektir. Bunun için denklemde bulunan türevleri hesap edelim.

$$\frac{\partial R}{\partial \gamma} = \frac{1}{3} K \gamma^{-2/3} - \frac{1}{3} K' \frac{\lambda}{\gamma} \quad (2.220)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda} = K' \quad (2.221)$$

$$\frac{\partial^2 R}{(\partial \lambda)^2} = K'' \frac{1}{\gamma^{1/3}} \quad (2.222)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = L' \frac{1}{\gamma^{2/3}} \quad (4.223)$$

Türevler alındıktan sonra denklem (2.220)-(2.223), denklem (2.191) ve (2.192)'de yerine konulursa yeni denklemler řu şekilde elde edilir.

$$K - \alpha K' + 3L' = 0 \quad (2.224)$$

$$K^2 - \alpha K K' + 3L K' = 3 K'' \left((m+1) |K'|^m + 2k_3 (m+3) |K'|^{m+2} \right) + c_3^2 \quad (2.225)$$

Sınır şartları ise

$$K(0) = c_1, \quad L(0) = \mp c_2, \quad K(\infty) = c_3 \quad (2.226)$$

şeklindedir. Böylece iki farklı yoldan iki değişkenli kısmi diferansiyel denklem sistemi, adi diferansiyel denklem sistemine başarılı bir şekilde dönüştürülmüş oldu.

2.4. İkinci Dereceden Power-Law Akışkanına Ait Sınır Tabakası Denklemlerinin Benzerlik Çözümleri

Tezin bu kısmında ikinci dereceden Power-Law akışkanlarına ait sınır tabakası

denklemlerinin benzerlik çözümleri yapılacaktır. İkinci dereceden Power-Law akışkanlarına ait sınır tabakası denklemleri iki bağımlı ve üç bağımsız değişkenden oluşan bir kısmi diferansiyel denklem sistemidir. Bu sistem, benzerlik çözümü sayesinde adi diferansiyel denklemlere dönüştürülecektir. Bağımsız değişkenler x , y ve t ve bağımlı değişkenler ise u ve v hız değişkenleridir.

Bir denklemin kabul edebildiği genel benzerlik dönüşümleri Lie Grup analizi ile bulunmaktadır. Birçok denklemde iyi sonuçlar veren özel dönüşümler de bulunmaktadır. Bu dönüşümler; i) ölçekleme, ii) öteleme, iii) spiral grup, ve iv) bu dönüşümleri içeren özel bir dönüşümdür. Bu dönüşümler sayesinde sınır tabakası akışını ifade eden kısmi diferansiyel denklem sistemi, adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülür. Bu çalışmada ise Yürüsoy (2006)'un çalışmasındaki özel bir dönüşüm kullanılmıştır. Bu dönüşüm üzerinde bazı küçük değişiklikler yapılmış ve sınır tabakası denklemleri (2.59) ve (2.66)'ya uygulanmıştır. Ayrıca, bu dönüşüm sayesinde denklemler boyutsuzlaşmıştır.

2.4.1. Benzerlik Dönüşümü

İkinci dereceden Power-Law akışkanına ait sınır tabakası denklemleri (2.59) ve (2.66)'nın çözümü yapılacaktır. Fakat denklemlerin kısmi diferansiyel denklemler olduğu görülmekte ve böyle denklemlerin çözümleri oldukça zor olmaktadır. Bu çalışmada öncelikle denklemler adi diferansiyel denklem şekline dönüştürülecektir. Sınır tabakası denklemlerimize Yürüsoy (2006)'un çalışmasındaki özel bir dönüşüm uygulanmıştır. Bu dönüşüm üzerinde bazı küçük değişiklikler yapılmıştır. İkinci dereceden Power-Law akışkanına ait sınır tabakası denklemleri bu dönüşüm sayesinde boyutsuz hale gelmiştir. Elde edilen yeni dönüşüm için benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\xi = \bar{v}^{-\frac{1}{m+2}} t^{\frac{m-1}{m+2}} x^{-\frac{m}{m+2}} Y, \quad u = \frac{x}{t} f(\xi), \quad v = \bar{v}^{-\frac{1}{m+2}} t^{\frac{2m+1}{m+2}} x^{\frac{m}{m+2}} g(\xi),$$

$$U = \lambda \frac{x}{t}$$
(2.227)

Burada, λ sabittir. Bu dönüşüm iki boyutlu ve kararsız ikinci dereceden Power-Law akışkanının sınır tabakası denklemleri için kullanılmıştır.

Denklem (2.59) ve (2.66)'nın kısmi türevli terimlerinin tek tek hesaplanması gerekmektedir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{x}{t^2}f + \left(\frac{m-1}{m+2}\right)\bar{v}^{-\frac{1}{m+2}}t^{-\frac{m+5}{m+2}}x^{\frac{2}{m+2}}Yf' \quad (2.228)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{t}f - \left(\frac{m}{m+2}\right)\bar{v}^{-\frac{1}{m+2}}t^{-\frac{3}{m+2}}x^{-\frac{m}{m+2}}Yf' \quad (2.229)$$

$$\frac{\partial v}{\partial Y} = t^{-1}g' \quad (2.230)$$

$$\frac{\partial u}{\partial Y} = \bar{v}^{-\frac{1}{m+2}}t^{-\frac{3}{m+2}}x^{\frac{2}{m+2}}f' \quad (2.231)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = \bar{v}^{-\frac{2}{m+2}}t^{-\frac{m-4}{m+2}}x^{\frac{2-m}{m+2}}f'' \quad (2.232)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial Y^3} = \bar{v}^{-\frac{3}{m+2}}t^{-\frac{2m-5}{m+2}}x^{\frac{2-m}{m+2}}f''' \quad (5.233)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial Y} = \left(-\frac{3}{m+2}\right)\bar{v}^{-\frac{1}{m+2}}t^{-\frac{m+5}{m+2}}x^{\frac{2}{m+2}}f' + \left(\frac{m-1}{m+2}\right)\bar{v}^{-\frac{2}{m+2}}t^{-\frac{6}{m+2}}x^{\frac{2-m}{m+2}}Yf'' \quad (2.234)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} = \left(\frac{2}{m+2}\right)\bar{v}^{-\frac{1}{m+2}}t^{-\frac{3}{m+2}}x^{-\frac{m}{m+2}}f' - \left(\frac{m}{m+2}\right)\bar{v}^{-\frac{2}{m+2}}t^{-\frac{m+4}{m+2}}x^{-\frac{2}{m+2}}Yf'' \quad (2.235)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial Y^2} = \left(\frac{m-4}{m+2}\right)\bar{v}^{-\frac{2}{m+2}}t^{-\frac{6}{m+2}}x^{\frac{2-m}{m+2}}f'' + \left(\frac{m-1}{m+2}\right)\bar{v}^{-\frac{3}{m+2}}t^{-\frac{m-7}{m+2}}x^{\frac{2-2m}{m+2}}Yf''' \quad (2.236)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial Y^2} = \left(\frac{2-m}{m+2} \right) \bar{v}^{-\frac{2}{m+2}} t^{\frac{2m}{m+2}} x^{\frac{m-4}{m+2}} f'' - \left(\frac{m}{m+2} \right) \bar{v}^{-\frac{3}{m+2}} t^{\frac{2m-5}{m+2}} x^{\frac{3}{m+2}} Y f''' \quad (2.237)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\lambda \frac{x}{t^2} \quad (2.238)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\lambda}{t} \quad (2.239)$$

Bulunan bu denklemler, denklem (2.59) ve (2.66)'ya yerleştirilirse aşağıdaki adi diferansiyel denklem sistemi elde edilmiş olur.

$$f - \frac{m}{m+2} \xi f' + g' = 0 \quad (2.240)$$

$$\begin{aligned} & -f + \frac{m-1}{m+2} \xi f' + f^2 - \frac{m}{m+2} \xi f f' + g f' = (m+1) |f'|^{m-1} f' f'' \\ & + k_1 |f'|^{m-1} \left[-2f' f'' + \frac{m^2 - m}{m+2} \xi f''^2 + 2(m+1) f f' f'' - \frac{m^2}{m+2} \xi f f''^2 \right. \\ & \left. + m g f''^2 - 2 \frac{2m+1}{m+2} f'^3 + g f' f''' - \frac{m}{m+2} \xi f f' f''' + \frac{m-1}{m+2} \xi f' f''' \right] - \lambda + \lambda^2 \end{aligned} \quad (2.241)$$

Burada; üstler, ξ benzerlik değişkenine göre türevi ifade eder ve $k_1 = \varepsilon_1 / \rho \bar{v} t$ boyutsuz ikinci derece parametredir.

İkinci dereceden akışkanlara ait sınır tabakası denklemlerine benzerlik dönüşümleri uygulanarak adi diferansiyel denklemlere dönüştürülmüştür. Elde edilen denklemleri çözebilmek için aşağıda verilen klasik sınır şartları kullanılmıştır.

$$u(x,0,t) = 0, \quad v(x,0,t) = 0, \quad u(x,\infty,t) = U(x,t), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,\infty,t) = 0 \quad (2.242)$$

Bu denklemlerin çözümleri için de sınır şartlarında yeni değişkenler ile ifade edilmesi gerekmektedir. Benzerlik dönüşümleri altında uygun sınır şartları aşağıdaki

gibi olmaktadır.

$$f(0) = 0, \quad g(0) = 0, \quad f(\infty) = \lambda, \quad f'(\infty) = 0 \quad (2.243)$$

Böylece ikinci dereceden Power-Law akışkanlarına ait sınır tabakası denklemleri, yüksek non-lineriteye sahip adi diferansiyel denklem sistemi olarak elde edilmiş oldu.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde, üçüncü dereceden Power-Law ile ikinci dereceden Power-Law akışkanlarına ait sınır tabakası denklemlerinin nümerik çözümleri yapılmıştır. İkinci bölümde üçüncü dereceden Power-Law akışkanına ait sınır tabakası denklemleri adi diferansiyel denklem haline dönüştürülmüştür. Ortaya çıkan adi diferansiyel denklemler (ölçekleme dönüşümü ile (2.207) ve (2.208); öteleme dönüşümü ile (2.224) ve (2.225)) Runge-Kutta algoritması kullanılarak çözülmüştür. İki farklı dönüşümle (ölçekleme ve öteleme) elde edilen denklemlerin nümerik çözümleri yorumlanmıştır. Çözümler üçüncü derece akışkan katsayısı ve Power-Law üssünün pozitif ve negatif değerleri için yapılmıştır. Analiz sonucunda Power-Law üssünün pozitif ve negatif olarak artması sonucunda sınır tabakasının nasıl değişim gösterdiği grafiklerle ifade edilmiştir. Sonra yine ikinci bölümde benzerlik dönüşümleri kullanılarak ikinci dereceden Power-Law akışkanlarına ait sınır tabakası denklemleri adi diferansiyel denklem haline dönüştürülmüştür. Elde edilen adi diferansiyel denklem sistemi ((2.240) ve (2.241)) sonlu farklar algoritması kullanılarak nümerik olarak çözülecektir. Elde edilen çözümler ile ikinci derece akışkan katsayısı ve Power-Law üssünün farklı değerleri için sınır tabakasının nasıl değiştiği grafiklerle gösterilmiştir.

3.1. Üçüncü Dereceden Power-Law Akışkana Ait Sınır Tabakası Denklemlerinin Nümerik Çözümleri

Ölçekleme dönüşümü sonucu elde edilen denklem (2.207) ve (2.208), denklem (2.209)'daki sınır şartlarına uygun olarak Runge-Kutta algoritması ile çözülecektir. Bunun için öncelikle denklem (2.207) ve (2.208)'in birinci mertebeden denklemlere indirgenmesi gerekmektedir.

$$f_1(\mu) = M(\mu) \quad (3.1)$$

$$f_2(\mu) = N(\mu) \quad (3.2)$$

$$f_3(\mu) = M'(\mu) \quad (3.3)$$

Bu ifadeler denklem (2.207) ve (2.208)'e yerleştirilirse

$$f_1' = f_3 \quad (3.4)$$

$$f_2' = -\frac{3}{2} \quad (3.5)$$

$$f_3' = \frac{2f_1 + f_3 \left(f_2 - \frac{t}{2} \right) - 2c_3}{\left(m + 1 + 2k_3(m + 3)f_3^2 \right) f_3^m} \quad (3.6)$$

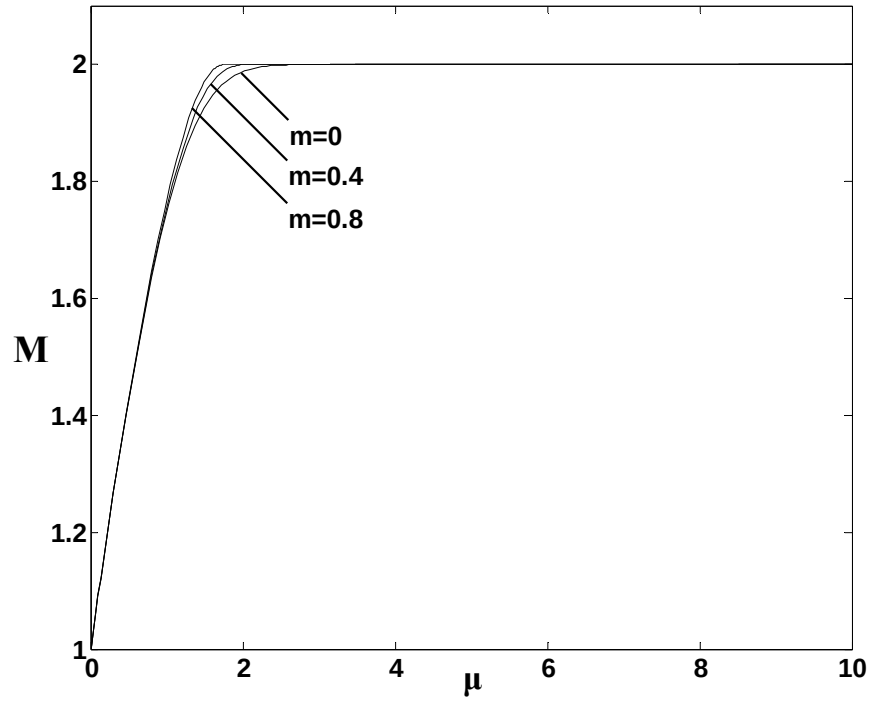
ifadeleri elde edilir. Başlangıç ve sınır şartları ise aşağıdaki gibidir.

$$f_1(0) = c_1 \quad (3.7)$$

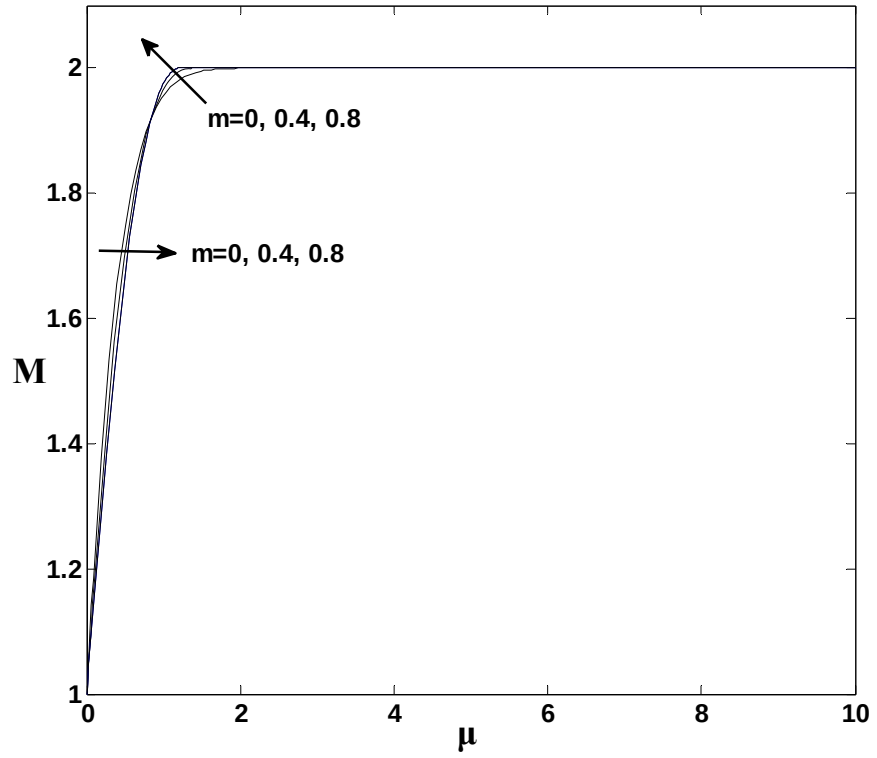
$$f_2(0) = \mp c_2 \quad (3.8)$$

$$f_3(\infty) = c_3 \quad (3.9)$$

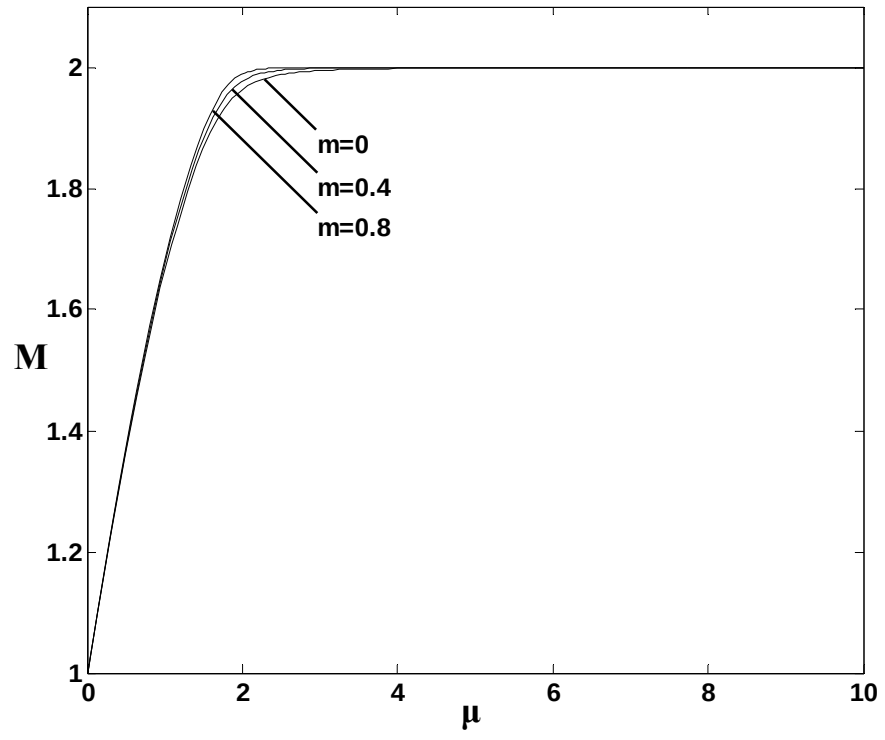
Yukarıdaki ifadeler MATLAB programında **EK-1**'deki gibi yazılarak nümerik çözümler yapılmıştır. Çözümlerde $c_1=1$ ve $c_3=2$ değerleri alınmıştır. Nümerik çözümlerin sonsuzda sınır şartını sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmiştir. Bunun için $M'(0)$ 'ın uygun bir değerini bulana kadar işleme devam edilmiştir. Elde edilen çözümler Şekiller 3.1-3.14'te gösterilmiş ve grafiklerde k_3 değeri k olarak ifade edilmiştir.



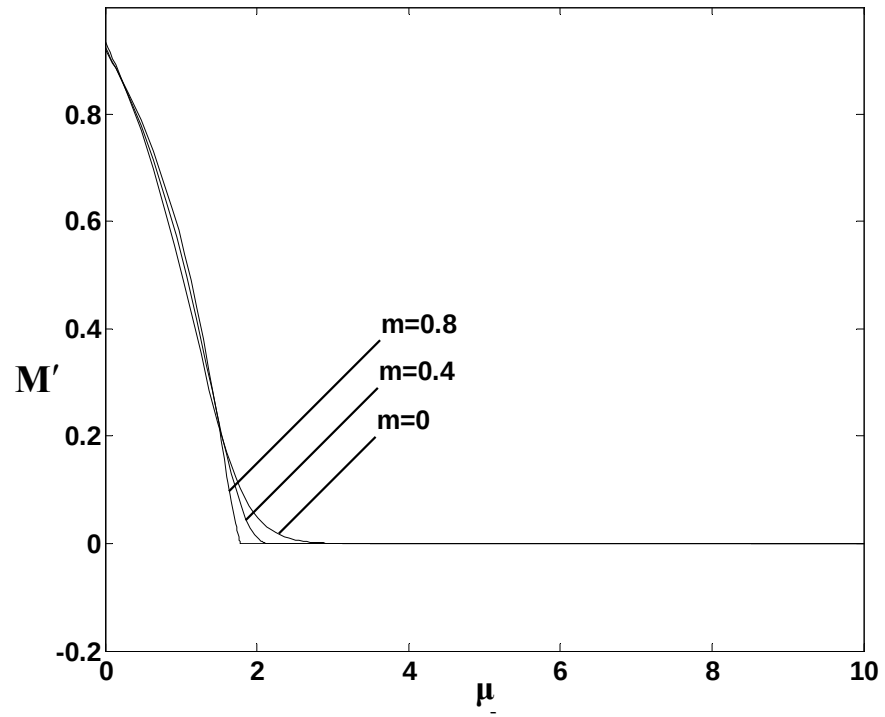
Şekil 3.1. Farklı pozitif m değerleri için μ ile M fonksiyonun değişimi
($k=0.5$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=2$)



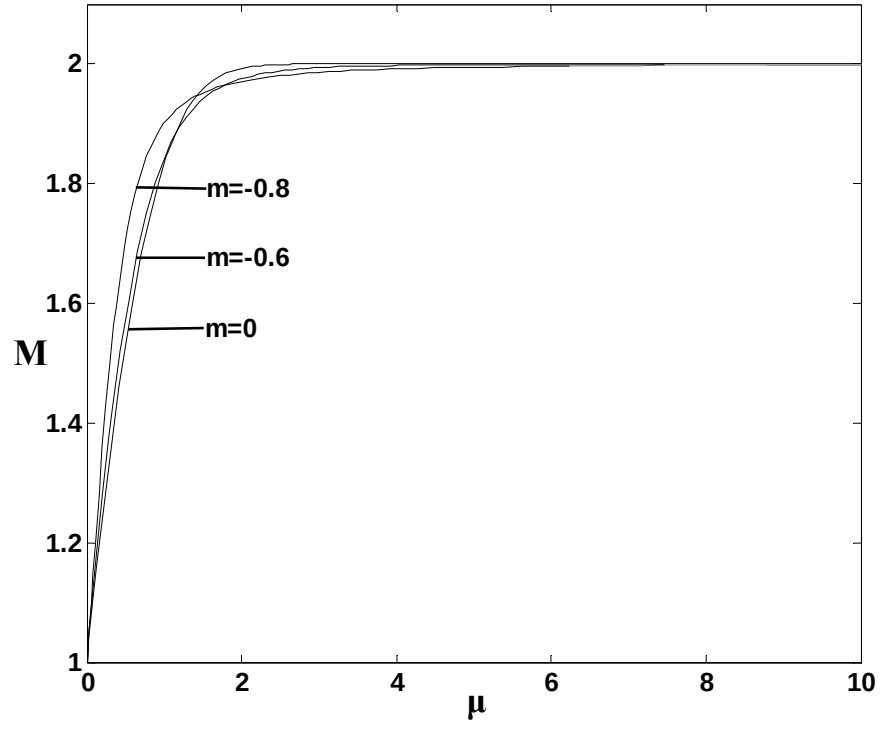
Şekil 3.2. Farklı pozitif m değerleri için μ ile M fonksiyonun değişimi
($k=0$, $c_1=1$, $c_2=-1$, $c_3=2$)



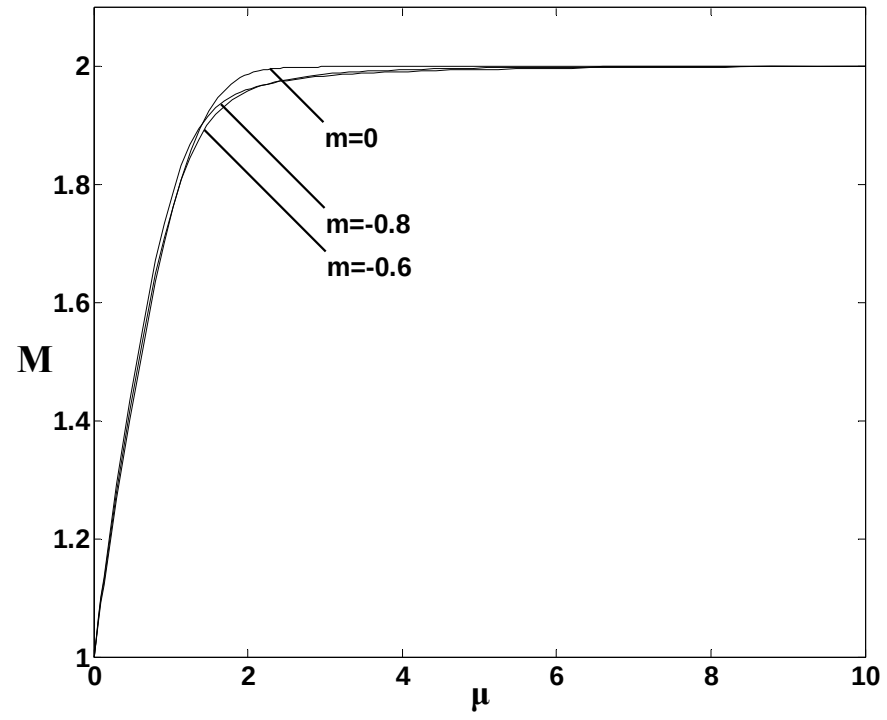
Şekil 3.3. Farklı pozitif m değerleri için μ ile M fonksiyonunun değişimi
($k=3$, $c_1=1$, $c_2=-1$, $c_3=2$)



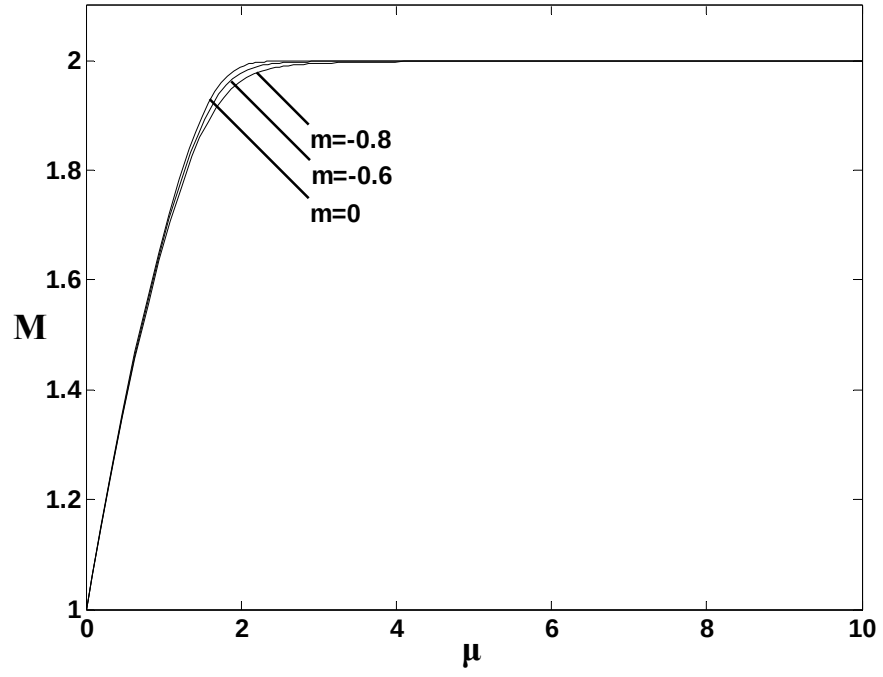
Şekil 3.4. Farklı pozitif m değerleri için μ ile M' fonksiyonunun değişimi
($k=0.5$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=2$)



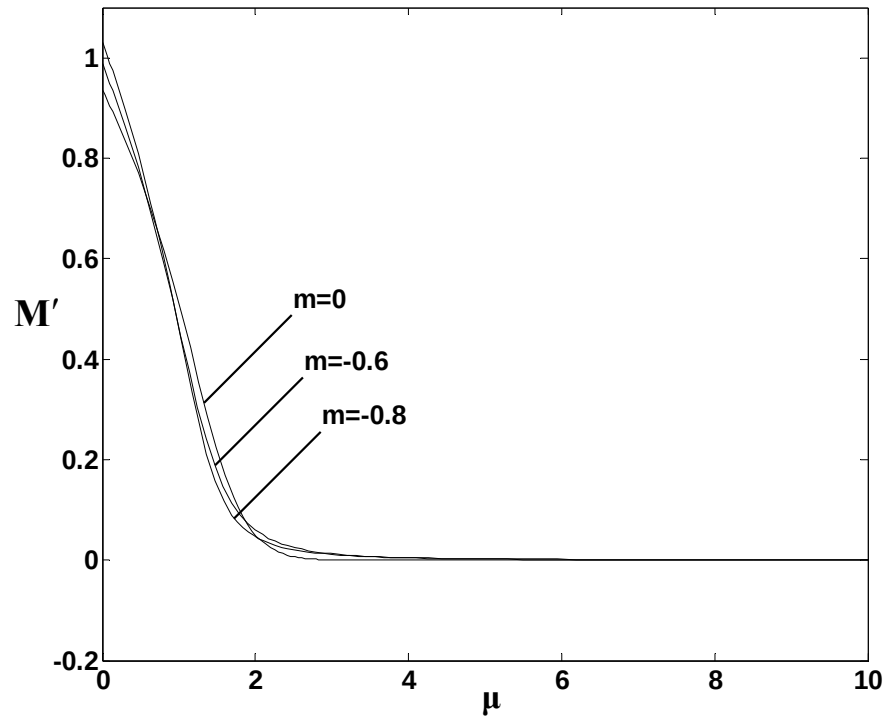
Şekil 3.5. Farklı negatif m değerleri için μ ile M fonksiyonun değişimi
($k=0, c_1=1, c_2=1, c_3=2$)



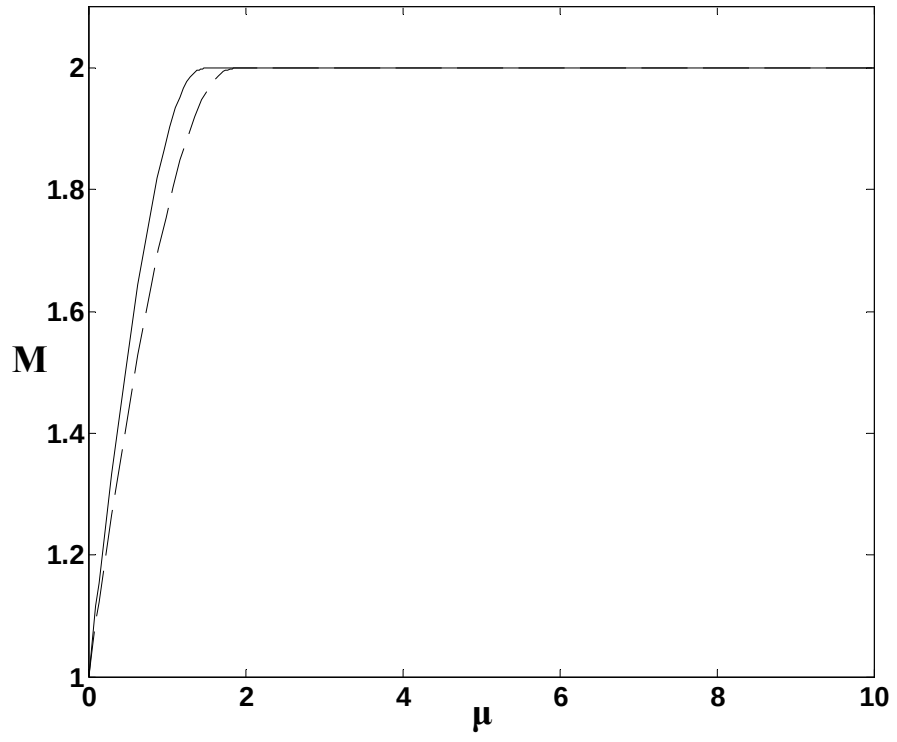
Şekil 3.6. Farklı negatif m değerleri için μ ile M fonksiyonun değişimi
($k=0.5, c_1=1, c_2=1, c_3=2$)



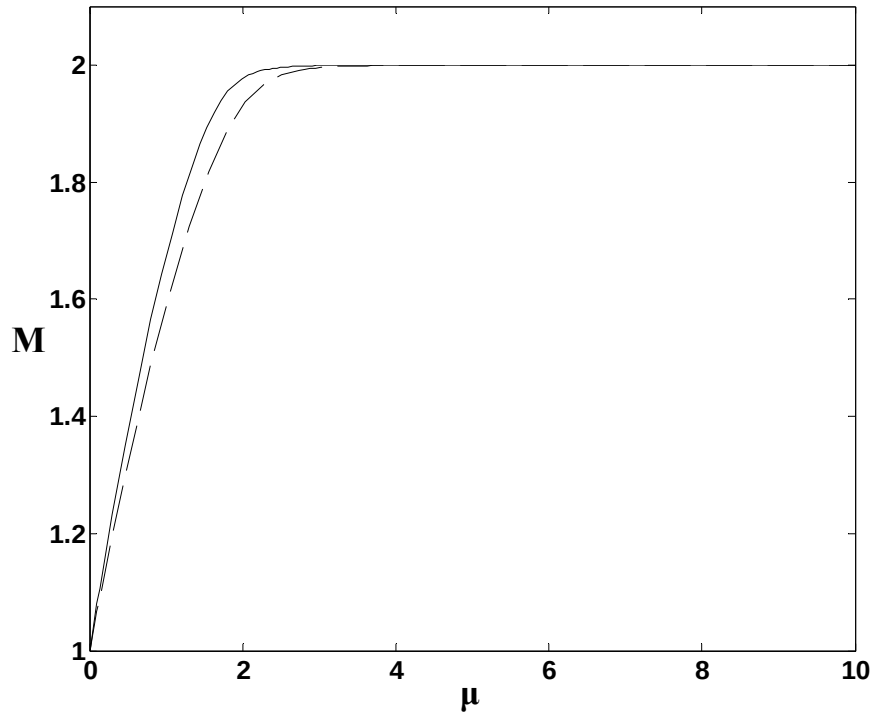
Şekil 3.7. Farklı negatif m değerleri için μ ile M fonksiyonun değişimi
($k=3$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=2$)



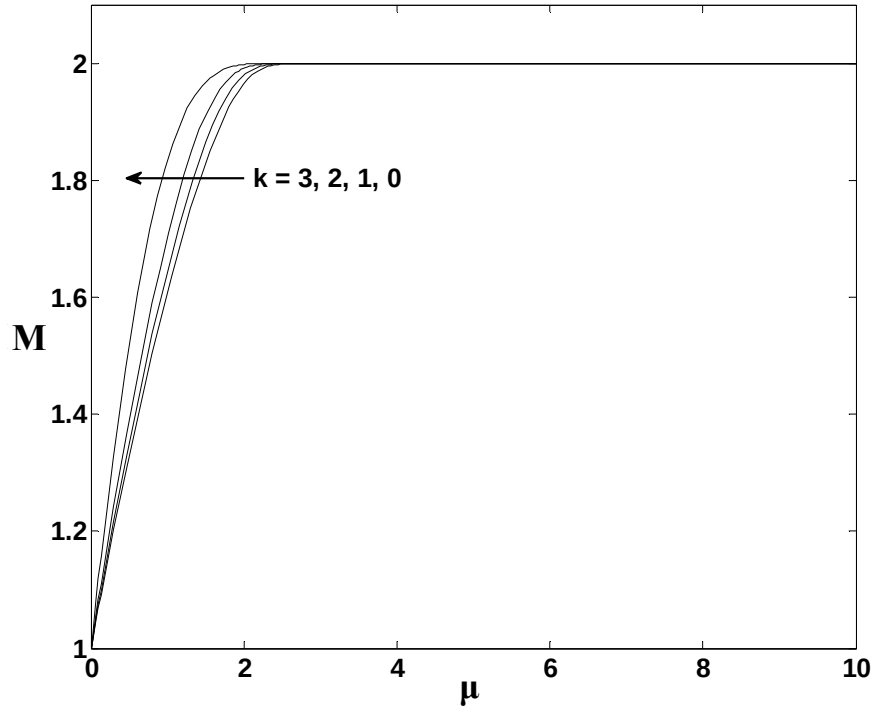
Şekil 3.8. Farklı negatif m değerleri için μ ile M' fonksiyonun değişimi
($k=0.5$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=2$)



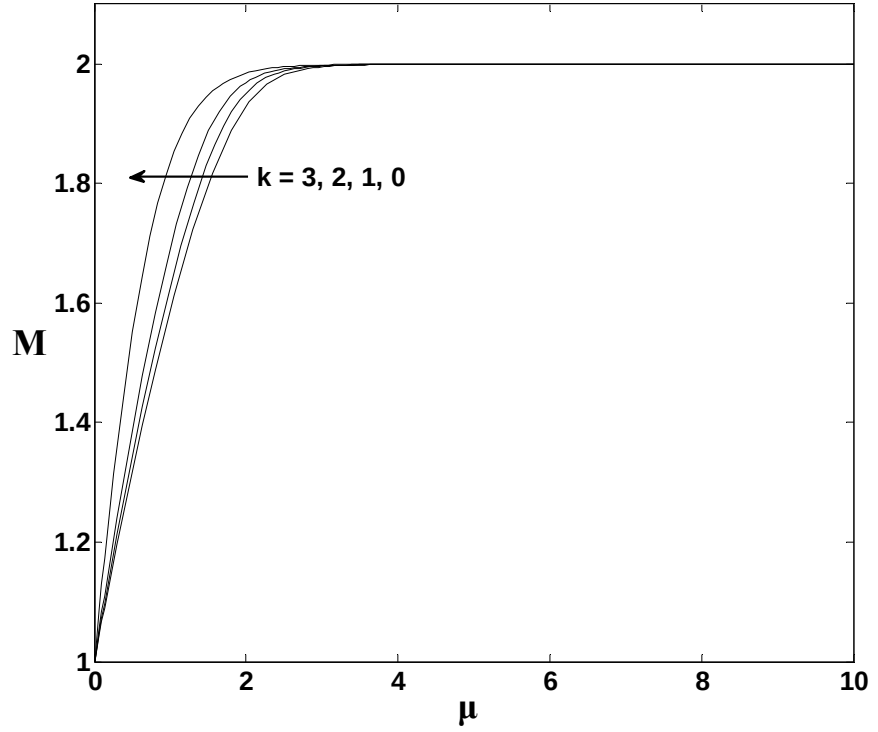
Şekil 3.9. Farklı c_2 değerleri için μ ile M fonksiyonun değişimi
($k=0.5$, $m=0.6$, $c_1=1$, $c_3=2$; $c_2=1$ (_ _ _), $c_2=-1$ (____))



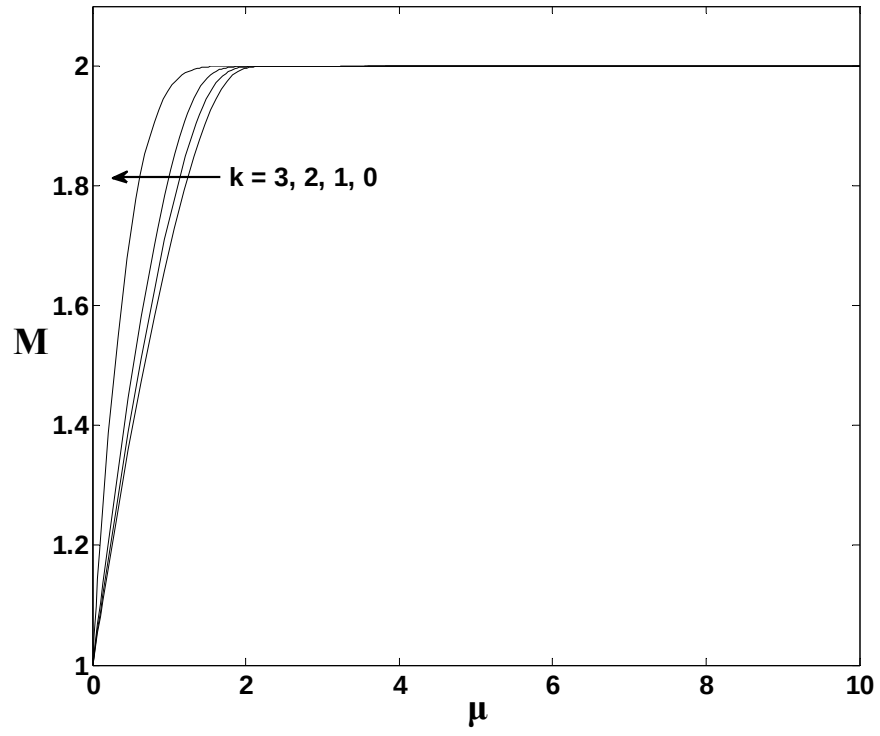
Şekil 3.10. Farklı c_2 değerleri için μ ile M fonksiyonun değişimi
($k=0.5$, $m=-0.6$, $c_1=1$, $c_3=2$; $c_2=1$ (_ _ _), $c_2=-1$ (____))



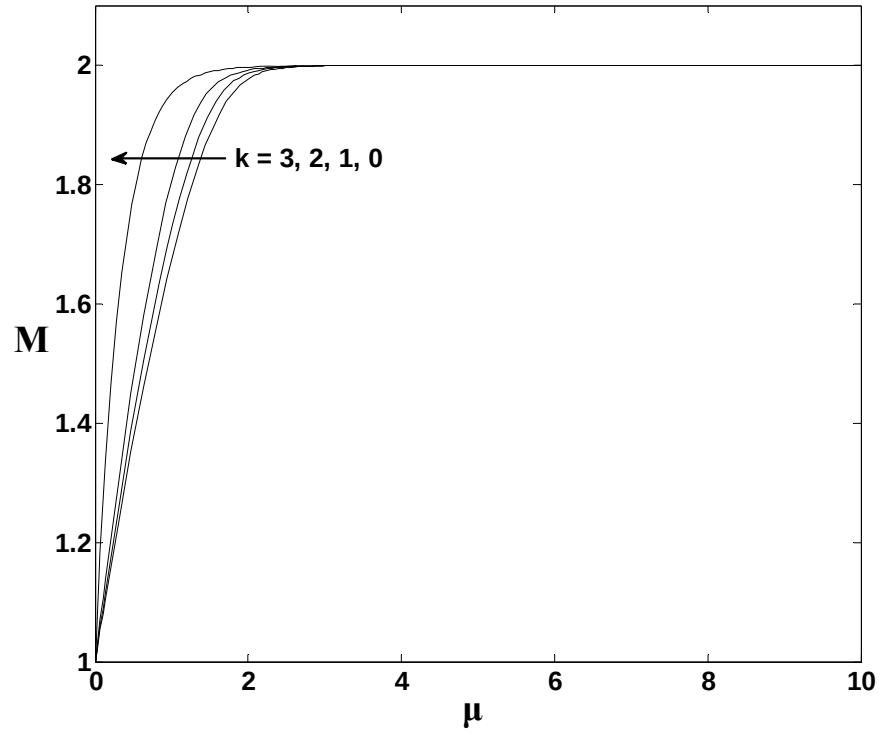
Şekil 3.11. Farklı k değerleri için μ ile M fonksiyonun değişimi
($m=0.4$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=2$)



Şekil 3.12. Farklı k değerleri için μ ile M fonksiyonun değişimi
($m=-0.4$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=2$)



Şekil 3.13. Farklı k değerleri için μ ile M fonksiyonun değişimi
($m=0.4$, $c_1=1$, $c_2=-1$, $c_3=2$)



Şekil 3.14. Farklı k değerleri için μ ile M fonksiyonun değişimi
($m=-0.4$, $c_1=1$, $c_2=-1$, $c_3=2$)

Şekil 3.1, 3.2, 3.3 ve 3.4'te m 'nin pozitif değerleri ($m>0$) için hız profilleri çizilmiştir. Şekil 3.1'de püskürtme durumu için M hızının benzerlik değişkenine göre değişimi çizdirilmiştir. Grafikten m 'nin pozitif değerleri arttıkça sınır tabakası kalınlığının azaldığı görülmektedir. Şekil 3.2'de emme durumu için M hızının benzerlik değişkenine göre değişimi gösterilmiştir. Grafiğe dikkat edilirse hız profilleri yaklaşık $\mu=1.4$ değeri civarında kesişmektedir. $1.4<\mu<10$ arasında m 'nin artan değerleri için sınır tabakasının incelendiği görülmektedir. Bu durum Şekil 3.3'te görüldüğü gibi k 'nın 3 değerinde düzeltilmektedir. Grafik 3.3'te de m 'nin artan pozitif değerlerinde sınır tabakasının incelendiği görülmektedir. Şekil 3.4'te ise M 'nin türevinin (M') benzerlik değişkenine göre değişimi çizdirilmiştir.

Şekil 3.5, 3.6, 3.7 ve 3.8'de m 'nin negatif değerleri ($m<0$) için sınır tabakası profilleri elde edilmiştir. Şekil 3.5'te püskürtme durumu için M hızının benzerlik değişkenine göre değişimi görülmektedir. Grafiğe dikkat edilirse Power-Law akışkanı ($k=0$) için hız profilleri birbirleriyle kesişmiştir. Şekil 3.6'dan bu durumun k 'nın 0.5 değeri için de devam etmekte olduğu görülmektedir. Fakat Şekil 3.7'de ise k 'nın 3 değeri için hız profillerinin kesişmediği gözlenmektedir. Grafikten m 'nin negatif değerleri mutlak olarak arttıkça sınır tabakasının kalınlaştığı görülmektedir. Burada bahsedilen durum, emme durumu içinde benzer şekilde gerçekleşmektedir. Şekil 3.8'te M' 'nin benzerlik değişkenine göre değişim grafikleri görülmektedir.

Şekil 3.9'da $m=0.6$ değerinde püskürtme ve emme sınır şartları için M hızının benzerlik değişkeni ile değişimi gösterilmiştir. Şekil 3.10 ise $m=-0.6$ değeri için çizdirilmiştir. Her iki şekilde de püskürtme sınır şartındaki sınır tabakası kalınlığı, emme sınır şartındakinden daha kalın olduğu gözlenmiştir.

Şekil 3.11-14'te farklı k değerleri için M hızının benzerlik değişkeni ile değişimi çizdirilmiştir. Grafiklerden k değerleri arttıkça sınır tabakasının kalınlaştığı görülmektedir.

Tezin bundan sonraki kısmında ise öteleme dönüşümü sonucunda elde edilen denklemlerin ((2.224), (2.225)) nümerik çözümleri ve yorumları yapılacaktır. Bu

denklemler aşağıdaki gibi birinci mertebeden denklemlere indirgenmiştir.

$$f_1(\alpha) = K(\alpha) \quad (3.10)$$

$$f_2(\alpha) = L(\alpha) \quad (3.11)$$

$$f_3(\alpha) = K'(\alpha) \quad (3.12)$$

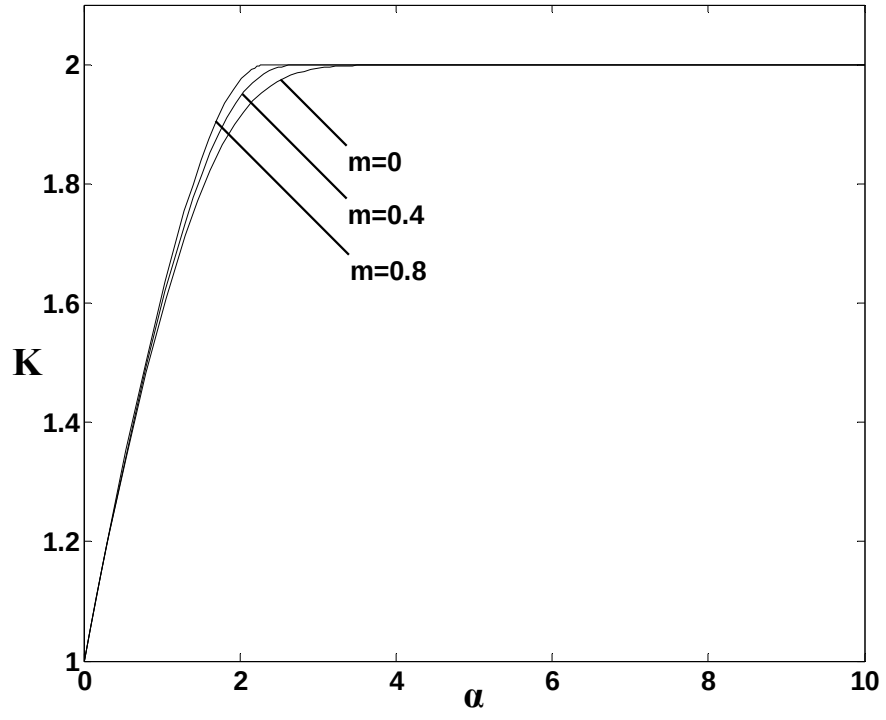
Denklem (3.10)-(3.12), denklem (2.224) ve (2.225)'e yerleştirilirse

$$f_1' = f_3 \quad (3.13)$$

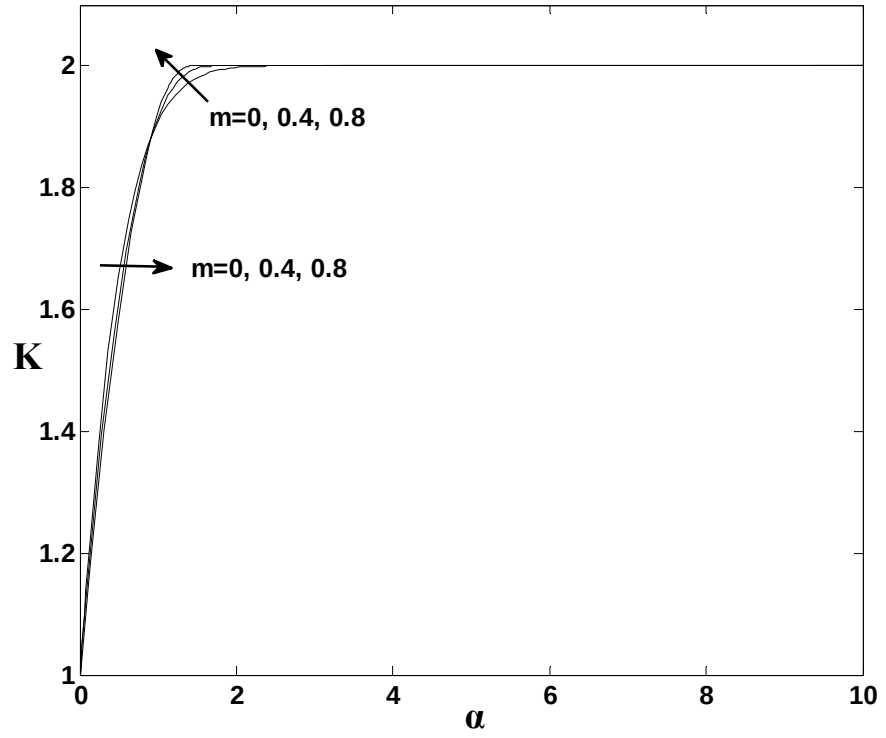
$$f_2' = -\frac{1}{3}f_1 + \frac{1}{3}tf_3 \quad (3.14)$$

$$f_3' = \frac{f_1^2 - tf_1f_3 + 3f_2f_3 - c_3^2}{3(m+1+2k_3(m+3)f_3^2)f_3|^m} \quad (3.15)$$

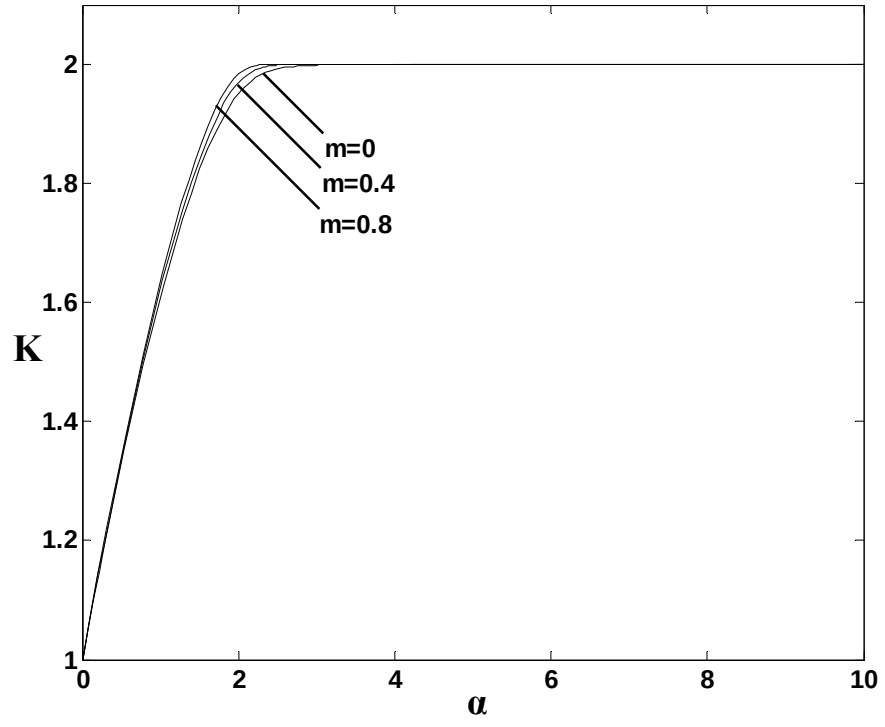
elde edilir. Bu denklem sistemi için de ölçekleme dönüşümdeki başlangıç ve sınır şartları (3.7)-(3.9) geçerli olmuştur. İfadeler MATLAB programında **EK-1**'deki gibi yazılarak nümerik olarak çözümler yapılmıştır. Çözümlerde $c_1=1$ ve $c_3=2$ değerleri alınmıştır. Elde edilen çözümler Şekil 3.15-3.36'da gösterilmiş ve grafiklerde k_3 değeri k olarak ifade edilmiştir.



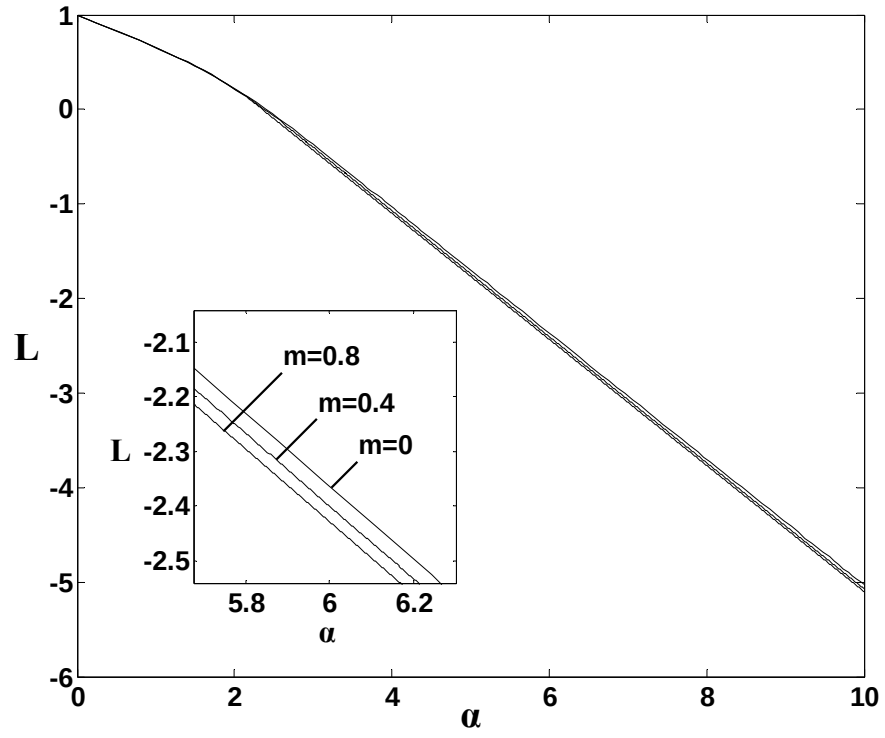
Şekil 3.15. Farklı pozitif m değerleri için α ile K fonksiyonun değişimi
($k=0.5$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=2$)



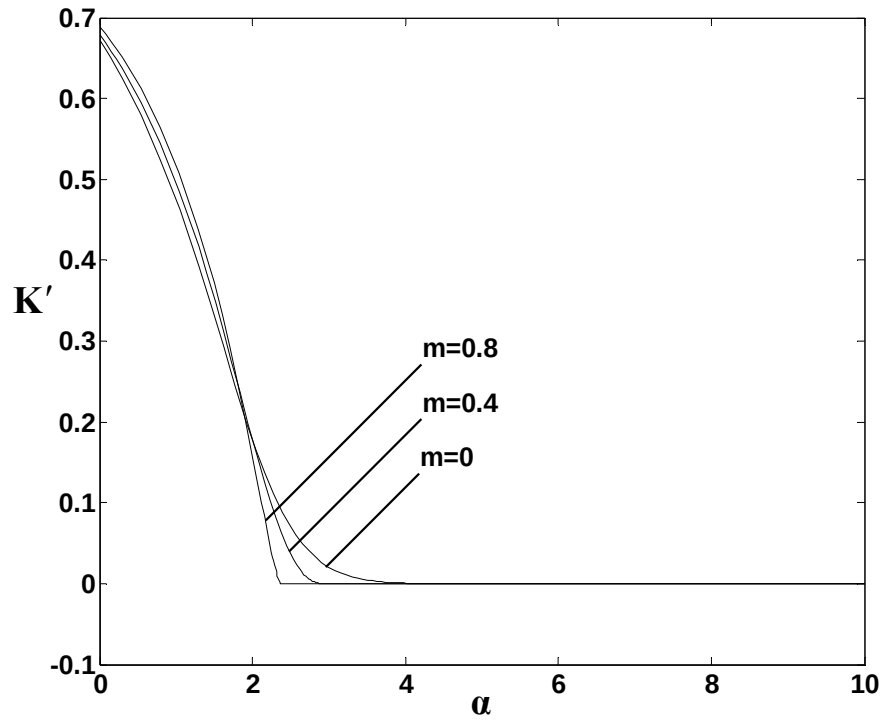
Şekil 3.16. Farklı pozitif m değerleri için α ile K fonksiyonun değişimi
($k=0$, $c_1=1$, $c_2=-1$, $c_3=2$)



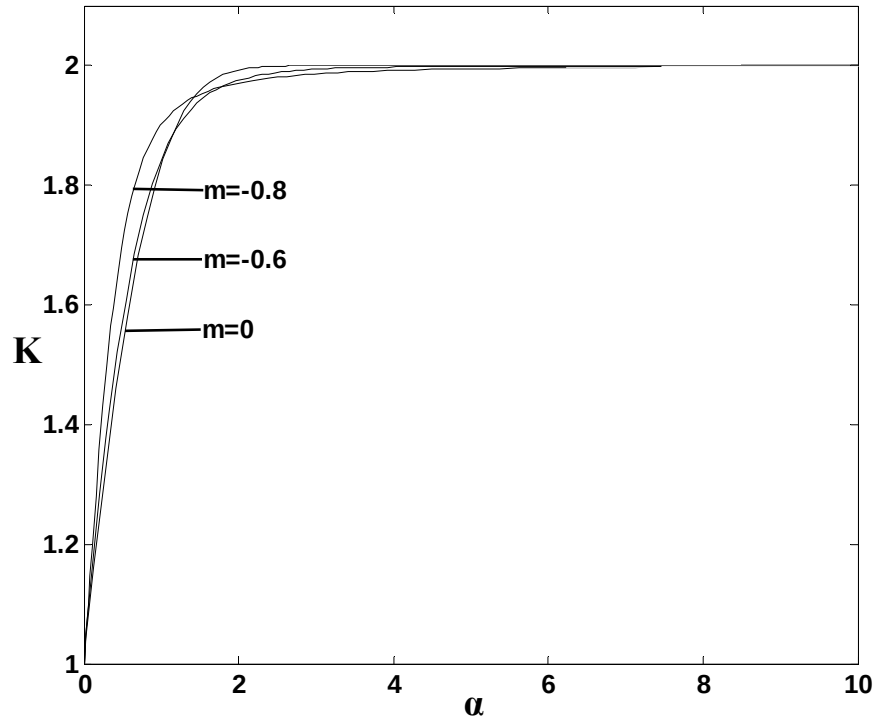
Şekil 3.17. Farklı pozitif m değerleri için α ile K fonksiyonunun değişimi
($k=3$, $c_1=1$, $c_2=-1$, $c_3=2$)



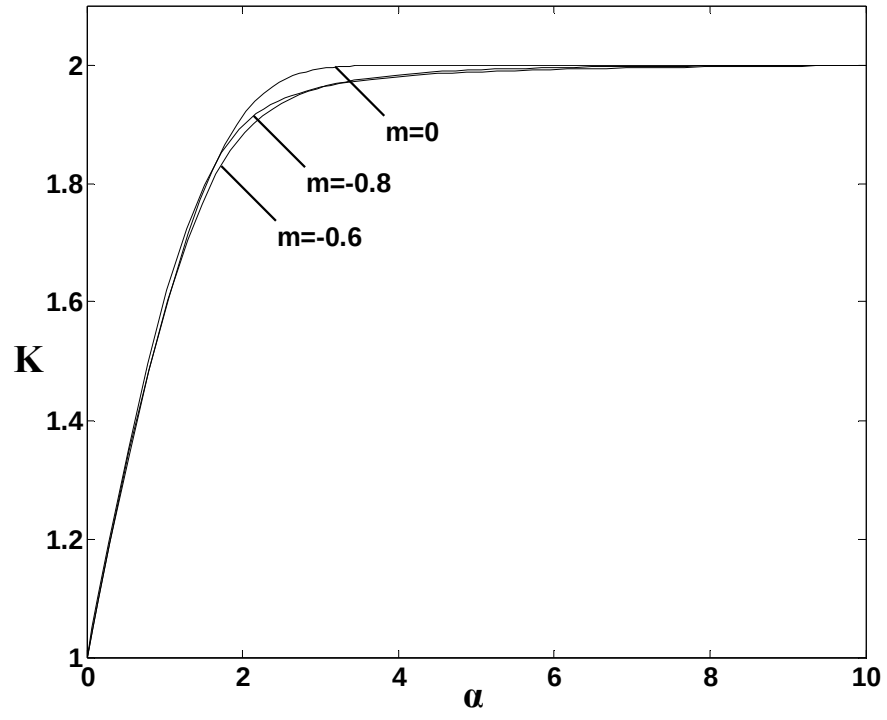
Şekil 3.18. Farklı pozitif m değerleri için α ile L fonksiyonunun değişimi
($k=0.5$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=2$)



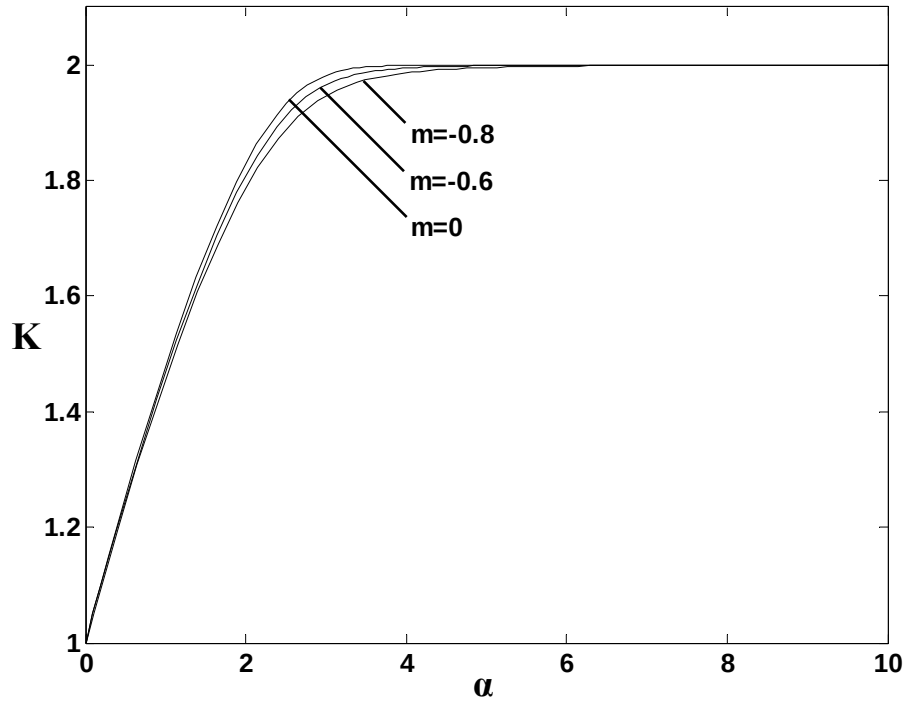
Şekil 3.19. Farklı pozitif m değerleri için α ile K' fonksiyonun değişimi
($k=0.5$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=2$)



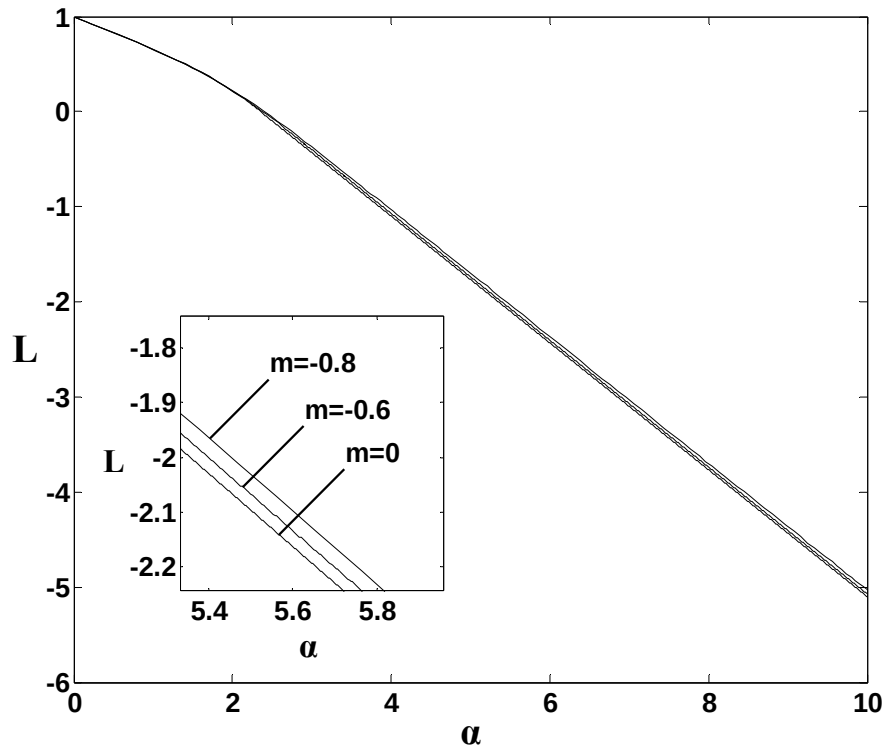
Şekil 3.20. Farklı negatif m değerleri için α ile K fonksiyonun değişimi
($k=0$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=2$)



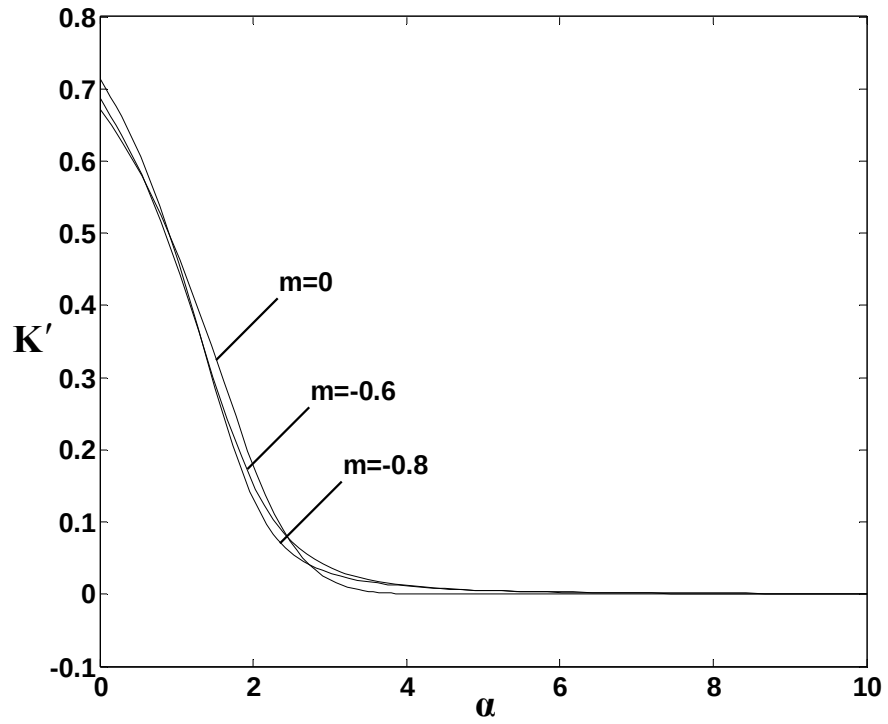
Şekil 3.21. Farklı negatif m değerleri için α ile K fonksiyonun değişimi
($k=0.5, c_1=1, c_2=1, c_3=2$)



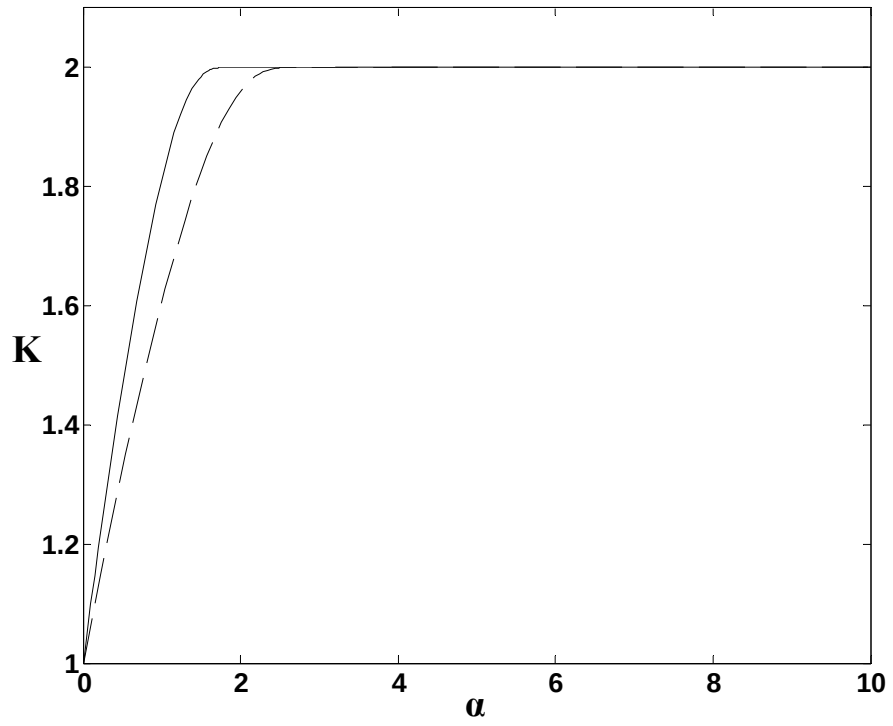
Şekil 3.22. Farklı negatif m değerleri için α ile K fonksiyonun değişimi
($k=3, c_1=1, c_2=1, c_3=2$)



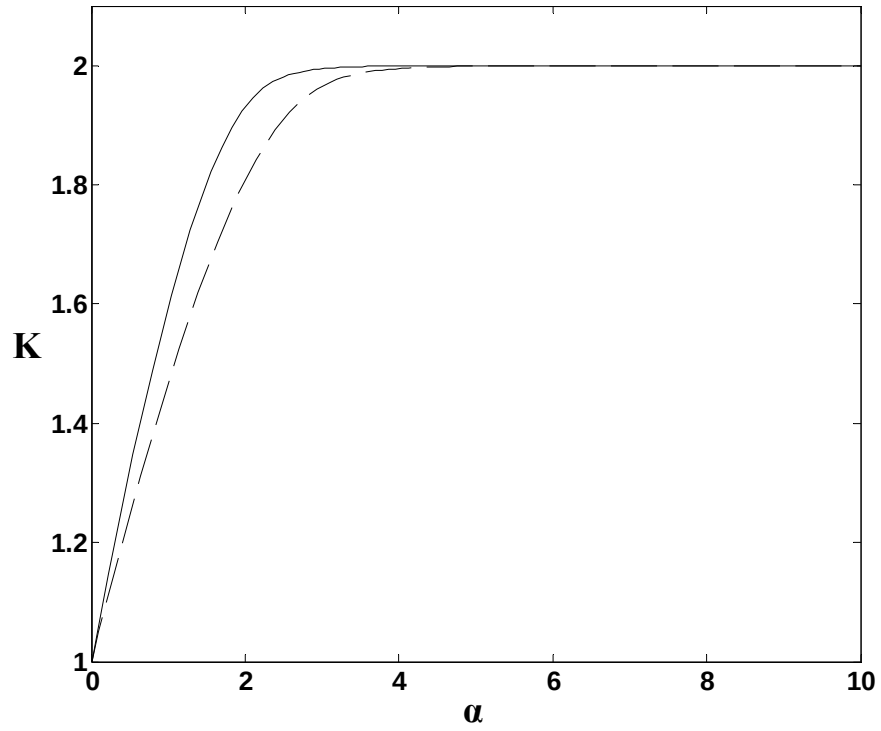
Şekil 3.23. Farklı negatif m değerleri için α ile L fonksiyonun değişimi
($k=0.5$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=2$)



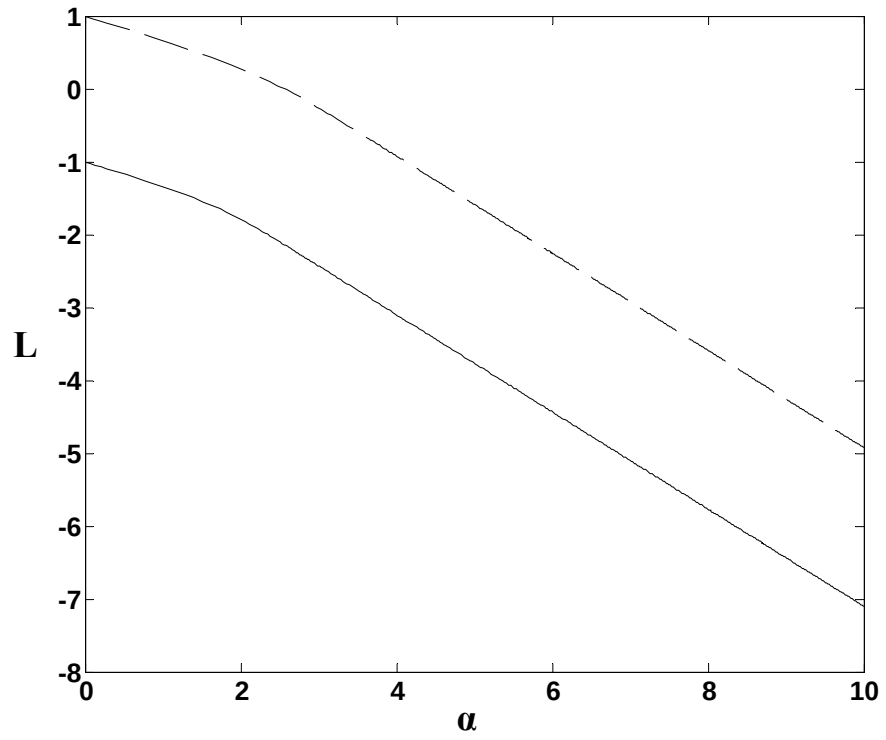
Şekil 3.24. Farklı negatif m değerleri için α ile K' fonksiyonun değişimi
($k=0.5$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=2$)



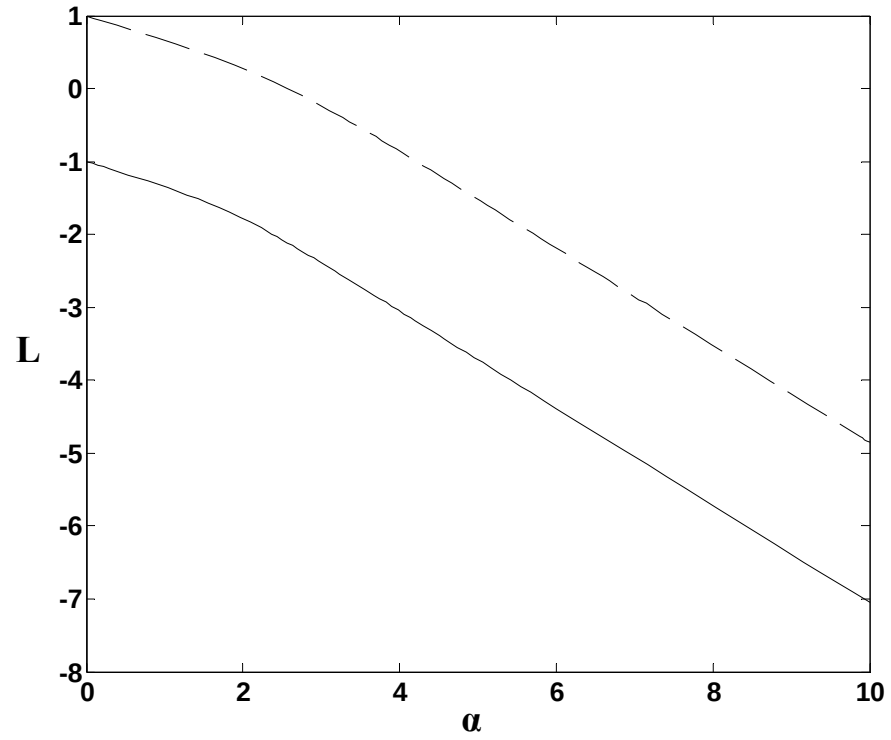
Şekil 3.25. Farklı c_2 değerleri için α ile K fonksiyonun değişimi
($k=0.5$, $m=0.6$, $c_1=1$, $c_3=2$; $c_2=1$ (_ _ _), $c_2=-1$ (____))



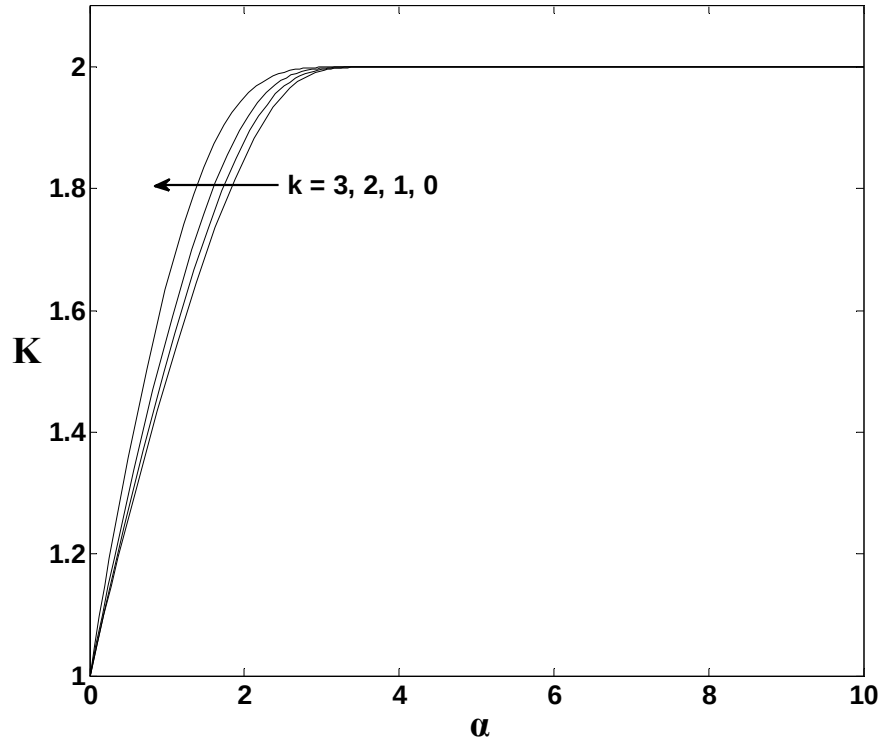
Şekil 3.26. Farklı c_2 değerleri için α ile K fonksiyonun değişimi
($k=0.5$, $m=-0.6$, $c_1=1$, $c_3=2$; $c_2=1$ (_ _ _), $c_2=-1$ (____))



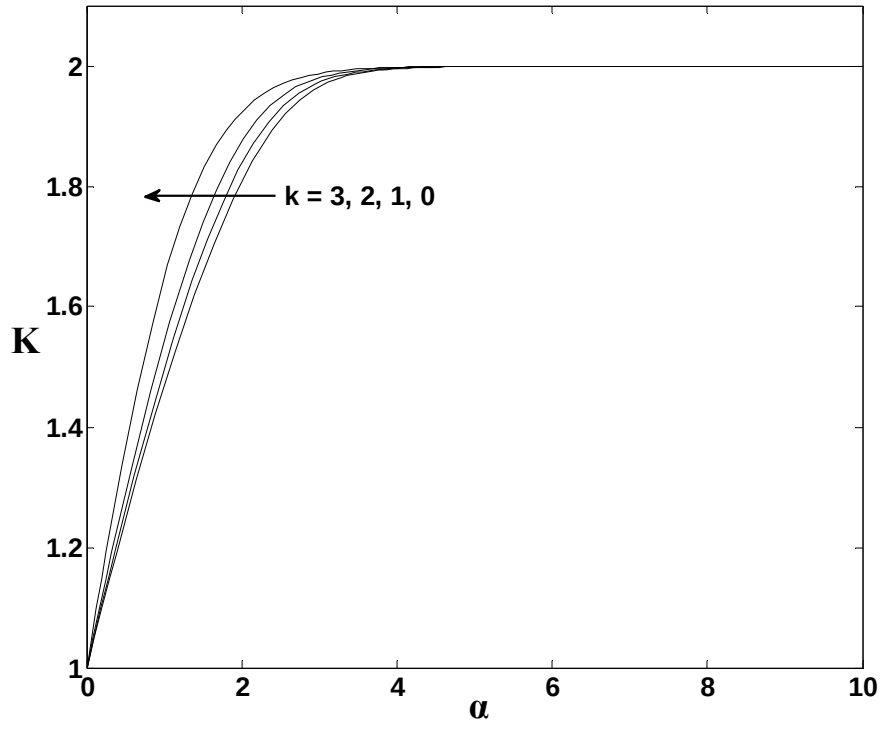
Şekil 3.27. Farklı c_2 değerleri için α ile L fonksiyonun değişimi
 ($k=0.5$, $m=0.6$, $c_1=1$, $c_3=2$; $c_2=1$ (_ _ _), $c_2=-1$ (____))



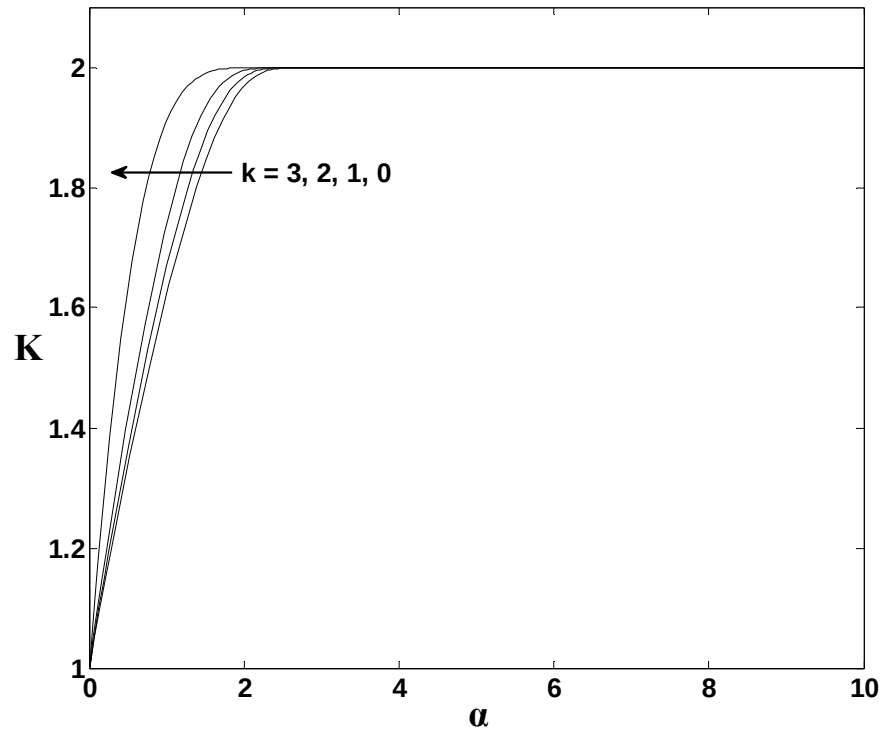
Şekil 3.28. Farklı c_2 değerleri için α ile L fonksiyonun değişimi
 ($k=0.5$, $m=-0.6$, $c_1=1$, $c_3=2$; $c_2=1$ (_ _ _), $c_2=-1$ (____))



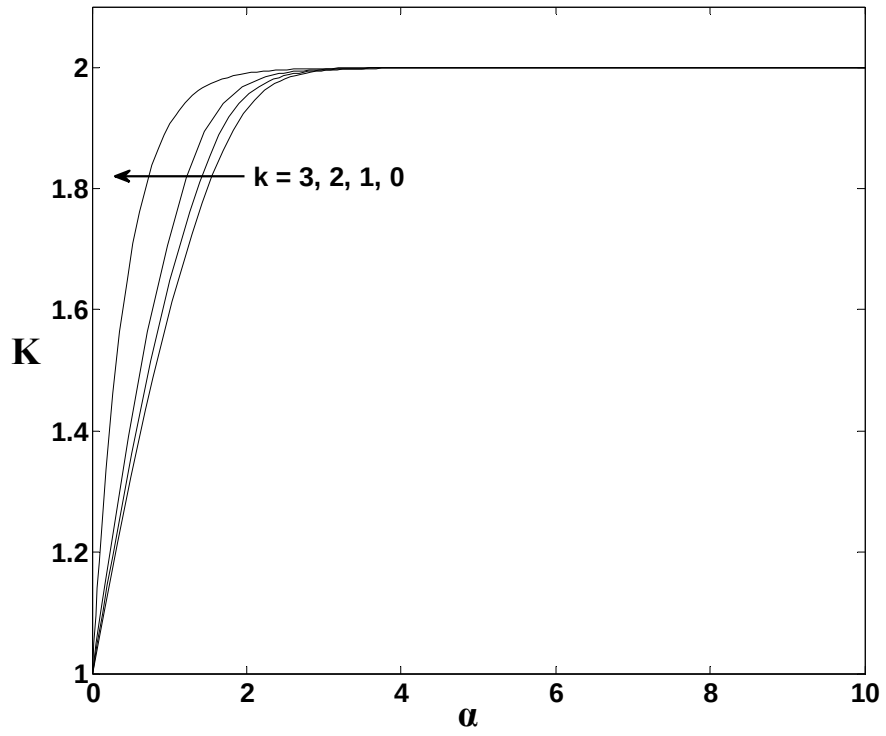
Şekil 3.29. Farklı k değerleri için α ile K fonksiyonun değişimi
($m=0.4$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=2$)



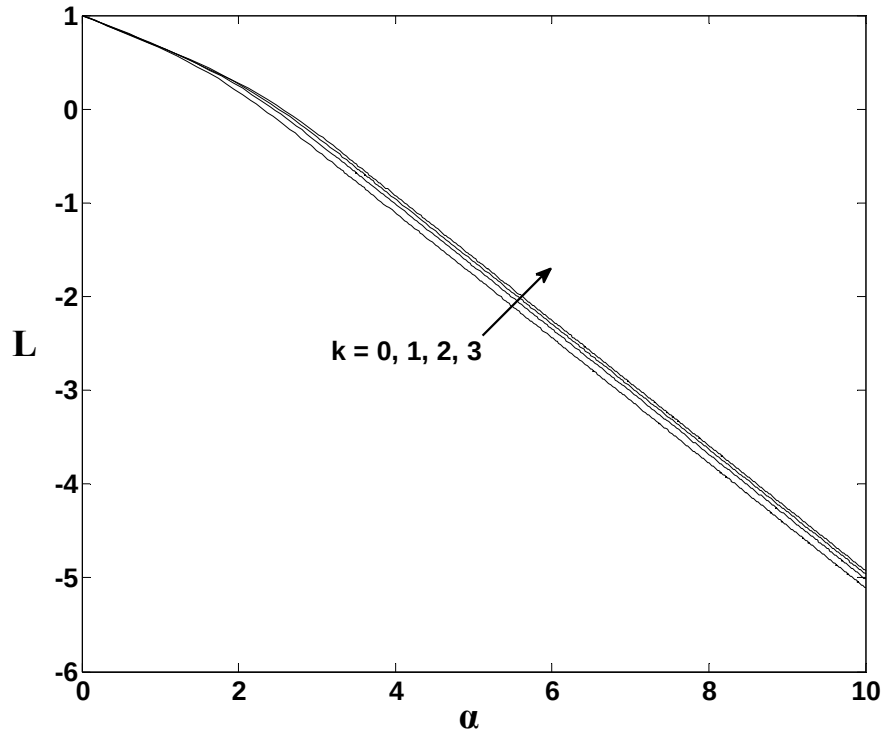
Şekil 3.30. Farklı k değerleri için α ile K fonksiyonun değişimi
($m=-0.4$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=2$)



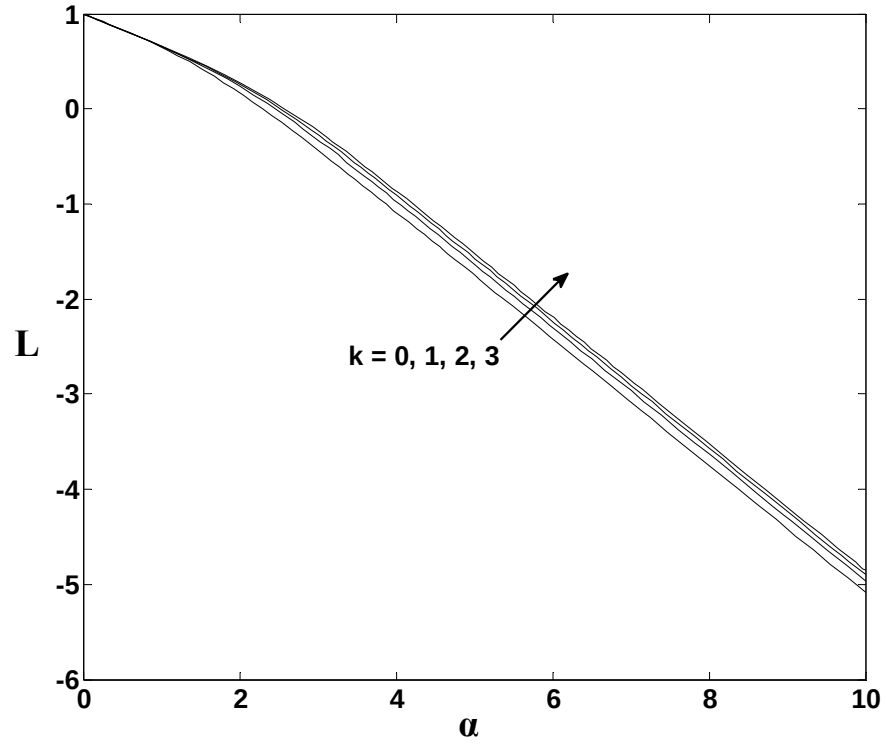
Şekil 3.31. Farklı k değerleri için α ile K fonksiyonun değişimi
($m=0.4$, $c_1=1$, $c_2=-1$, $c_3=2$)



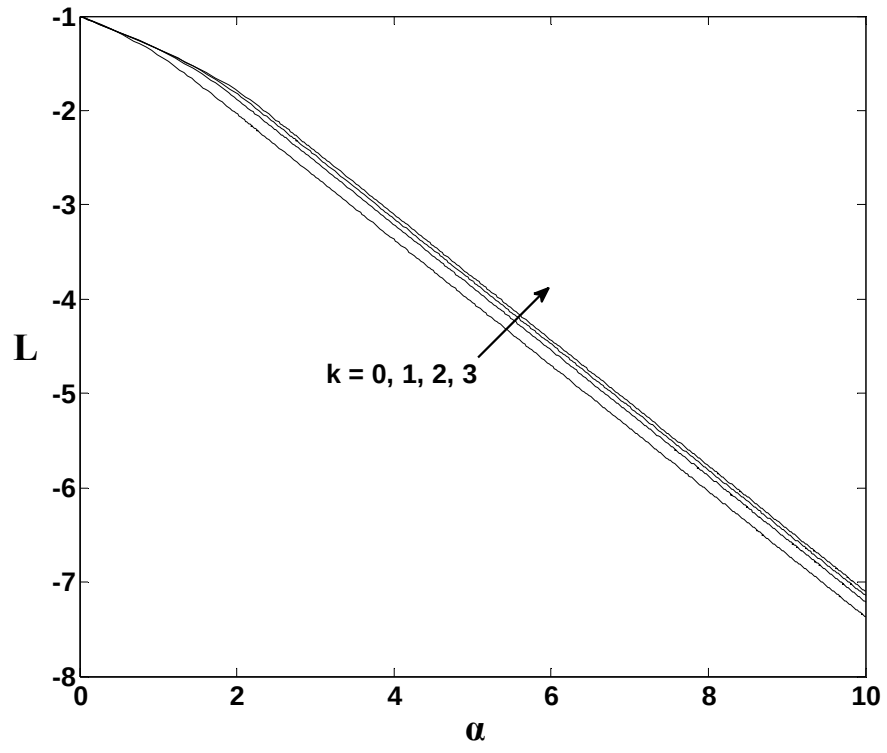
Şekil 3.32. Farklı k değerleri için α ile K fonksiyonun değişimi
($m=-0.4$, $c_1=1$, $c_2=-1$, $c_3=2$)



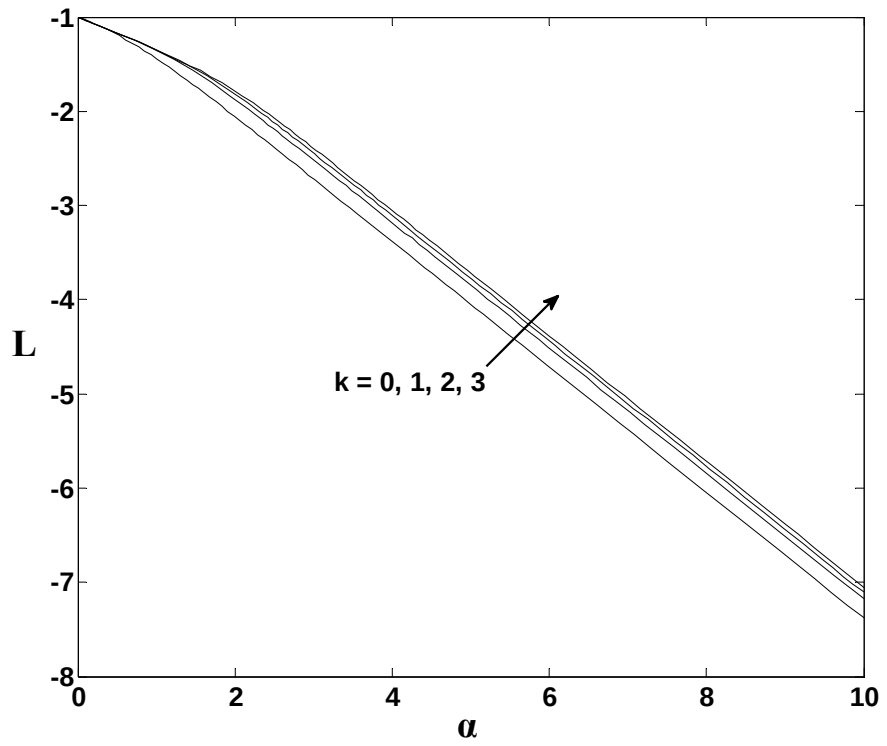
Şekil 3.33. Farklı k değerleri için α ile L fonksiyonun değişimi
($m=0.4$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=2$)



Şekil 3.34. Farklı k değerleri için α ile L fonksiyonun değişimi
($m=-0.4$, $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=2$)



Şekil 3.35. Farklı k değerleri için α ile L fonksiyonunun değişimi
($m=0.4$, $c_1=1$, $c_2=-1$, $c_3=2$)



Şekil 3.36. Farklı k değerleri için α ile L fonksiyonunun değişimi
($m=-0.4$, $c_1=1$, $c_2=-1$, $c_3=2$)

Şekil 3.15-3.19'da m 'nin pozitif değerleri ($m>0$) için hız profilleri elde edilmiştir. Şekil 3.15'te püskürtme durumu için K hızının benzerlik değişkenine göre değişimi görülmektedir. Şekilde m 'nin pozitif değerleri arttıkça sınır tabakası kalınlığının azaldığı görülmektedir. Şekil 3.16'da ise emme durumu için K hızının benzerlik değişkenine göre değişimi gösterilmiştir. Grafiğe dikkatle bakılırsa hız profillerinin yaklaşık $\mu=1.5$ değeri civarında kesiştiği gözlenmiştir. $1.5<\mu<10$ arasında m 'nin artan değerlerinde sınır tabakasının incelendiği görülmektedir. Bu durum Şekil 3.17'de görüldüğü gibi k 'nın 3 değerinde düzeltilmektedir. Bu grafikten de m 'nin pozitif değerleri arttıkça sınır tabakasının incelendiği görülmektedir. Şekil 3.18'de L hızının benzerlik değişkeni ile değişimi gösterilmiştir. Şekil 3.19'da ise K 'nın türevinin (K') benzerlik değişkeni ile değişimi çizdirilmiştir.

Şekil 3.20-3.24'te m 'nin negatif değerleri ($m<0$) için sınır tabakası profilleri görülmektedir. Şekil 3.20'de püskürtme durumu için K hızının benzerlik değişkenine göre değişimi çizdirilmiştir. Grafikte Power-Law akışkanı ($k=0$) için hız profillerinin kesiştiği görülmektedir. Şekil 3.21'den bu durumun $k=0.5$ değeri için de devam etmekte olduğu görülmektedir. Ancak Şekil 3.22'de ise $k=3$ değeri için bu durum düzelmiştir. Bu grafikten m 'nin negatif değerleri mutlak olarak arttıkça sınır tabakasının kalınlaştığı görülmektedir. Burada bahsedilen durum, emme durumu içinde benzer şekilde gerçekleşmektedir. Şekil 3.23, L hızının benzerlik değişkenine göre değişimini göstermektedir. Şekil 3.24'de ise K' 'nin benzerlik değişkenine göre değişimini veren grafikler verilmiştir.

Şekil 3.25'te m 'nin 0.6 değerinde püskürtme ve emme sınır şartları için K hızının benzerlik değişkeni ile değişimi gösterilmiştir. Şekil 3.26'da ise m 'nin -0.6 değeri için çizdirilmiştir. Her iki şekilde de püskürtme sınır şartındaki sınır tabakası kalınlığı, emme sınır şartındakinden daha kalın olduğu gözlenmiştir. Şekiller 3.27 ve 3.28'de sırasıyla püskürtme ve emme durumları için L hızının benzerlik değişkeni ile değişimi gösterilmiştir.

Şekil 3.29-32'de farklı k değerleri için K hızının benzerlik değişkeni ile değişimi çizdirilmiştir. Grafiklerden k değerleri arttıkça sınır tabakasının kalınlaştığı

görülmektedir. Şekil 3.33-3.36’da ise L hızının benzerlik değişkenine göre değişimi gösterilmiştir.

Sonuç olarak üçüncü dereceden Power-Law akışkana ait sınır tabakası denklemlerine Lie Grup analizi uygulanmıştır. İlk uygulanan Lie grup analizi ile denklemler, iki değişkenli kısmi diferansiyel denklemler biçimine indirgenmiştir. İndirgenen bu denklemler ölçekleme ve öteleme dönüşümleri için ayrı ayrı olup iki tanedir. Sonrasında bu iki kısmi diferansiyel denklem sistemine ikinci kez Lie Grup analizi uygulanarak bulunan yeni simetriler ile denklemler adi diferansiyel denklem formuna indirgenmiştir. Bu sayede üç değişkenli kısmi diferansiyel denklem sistemi, iki ayrı adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülmüştür. Bu iki ayrı denklem sistemi sınır şartları altında Runge-Kutta algoritması ile nümerik olarak çözülmüştür. Çözümler sonucunda bu iki ayrı denklem sisteminde de aynı nümerik sonuçlar görülmüştür. Şöyle ki; üçüncü derece akışkan katsayısının artan değerlerinde sınır tabakasının kalınlaştığı görülmüştür. Üçüncü derece akışkan katsayısının yanı sıra Power-Law üssünün sınır tabakasına etkileri de gösterilmeye çalışılmıştır. Püskürtme durumu için Power-Law üssünün artan pozitif değerlerinde sınır tabakasının incelendiği görülmüştür. Emme durumunda ise üçüncü derece akışkan katsayısının 3’ten büyük değerlerinde sınır tabakası incelmektedir. Power-Law üssünün negatif değerleri mutlak olarak arttığında sınır tabakasının kalınlaştığı gözlenmiştir. Ancak sınır tabakasındaki kalınlaşma üçüncü derece akışkan katsayısının 3’ten büyük değerlerinde olmuştur. Bu durum, hem püskürtme hem de emme durumunda da görülmektedir. Buradan, kabaran (shear thickening) veya incelen (shear thinning) bir akışkanda Newtonyen olmayan etkiler arttığında sınır tabakasının kalınlaştığı sonucuna varılabilir. Ancak Newtonyen olmayan akışkan katsayısının küçük değerlerinde Power-Law akışkanının özellikleri görülmektedir.

3.2. İkinci Dereceden Power-Law Akışkana Ait Sınır Tabakası Denklemlerinin Nümerik Çözümleri

Newtonyen olmayan akışkanlara ait benzerlik dönüşümleri ile elde edilen adi diferansiyel denklemleri çözmek oldukça zor ve çok zaman almaktadır. Bu türden denklemlerin analitik çözümü için Perturbasyon teknikleri, Laplace dönüşümleri ve

Homotopy analiz (HAM) gibi metotlar tavsiye edilebilir. Nümerik çözümler olarak da sonlu farklar, Runge-Kutta algoritması ve shooting metodu gibi teknikler sıklıkla kullanılmaktadır. Birçok diferansiyel denklem analitik metotlarla çözülemedikleri için nümerik teknikler kullanılmaktadır. Bu çalışmada, denklem (2.243)'teki sınır şartlarına bağlı olarak denklem (2.240) ve (2.241)'de verilen yüksek non-lineeriteye sahip adi diferansiyel denklemin çözümünde sonlu farklar metodu kullanılmıştır.

Sonlu farklar metodu sürekli bir sistem olarak tanımlanan sınır değer problemini, düğüm noktası olarak adlandırılan N tane noktaya bölerek kesikli bir sistem haline dönüştürür. Böylelikle diferansiyel denklem eşitliği olarak tanımlanan sınır değer problemi, bir grup çözülmesi gereken cebirsel eşitlik haline gelir.

Sonlu farklar metodunda ilk olarak yapılması gereken, problemin tanım aralığı olan $[a,b]$ aralığında, aralığın sınır değerleri de dahil olmak üzere adım aralıkları $h=(b-a)/(N-1)$ olan N adet eşit aralıklı nokta (t_i) belirlemektir. Bu noktalar belirlendikten sonra, diferansiyel denklemde bulunan türev ifadeleri Taylor serileri kullanılarak elde edilen ve merkezi, ileri, geri sonlu fark bölümleri olarak adlandırılan yaklaşık değer ifadeleri ile değiştirilir.

Sonlu fark türevleri kullanılarak elde edilen yaklaşık sonuç eşitliği, t_i noktalarına uygulanarak sonlu sayıda bilinmeyenden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Bu sistem çözülerek t_i noktalarındaki yaklaşık çözüm değerleri bulunmuş olur.

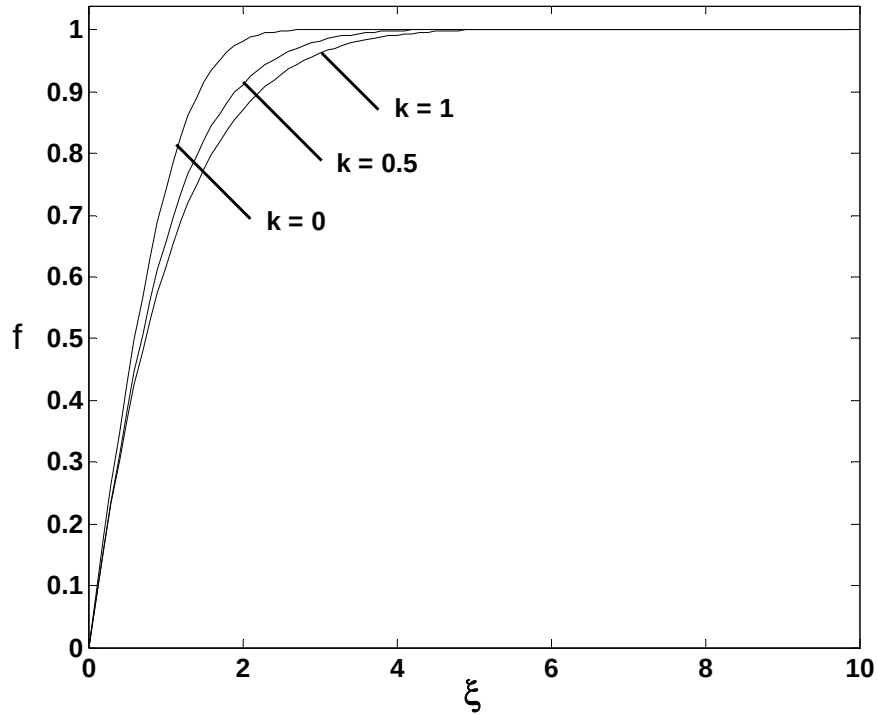
Bu tez çalışmasında kullanılan merkezi fark türevleri

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad (3.16)$$

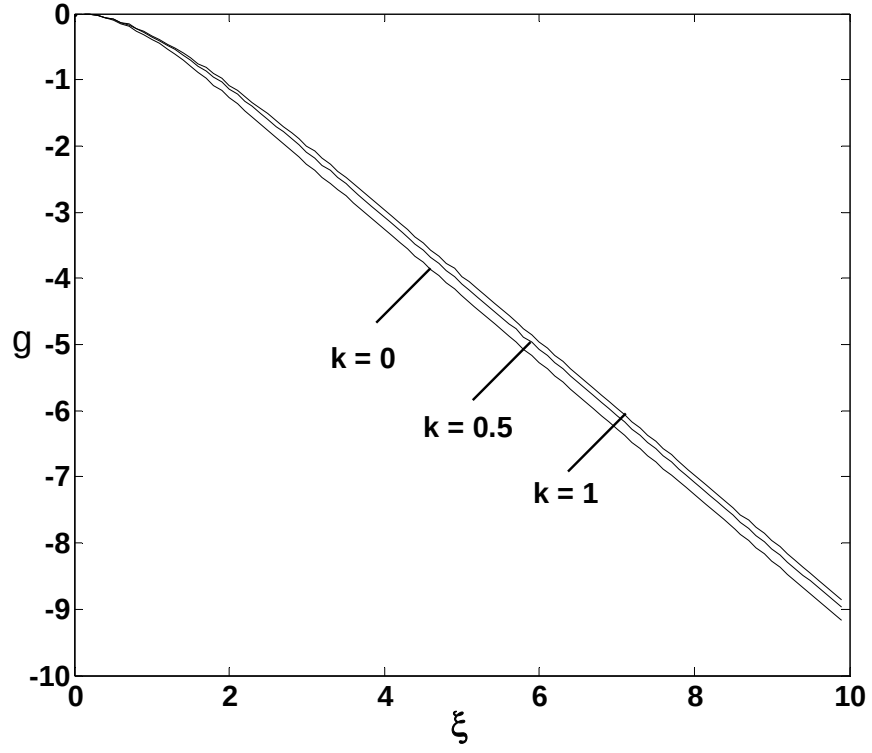
$$f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \quad (3.17)$$

$$f'''_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3} \quad (3.18)$$

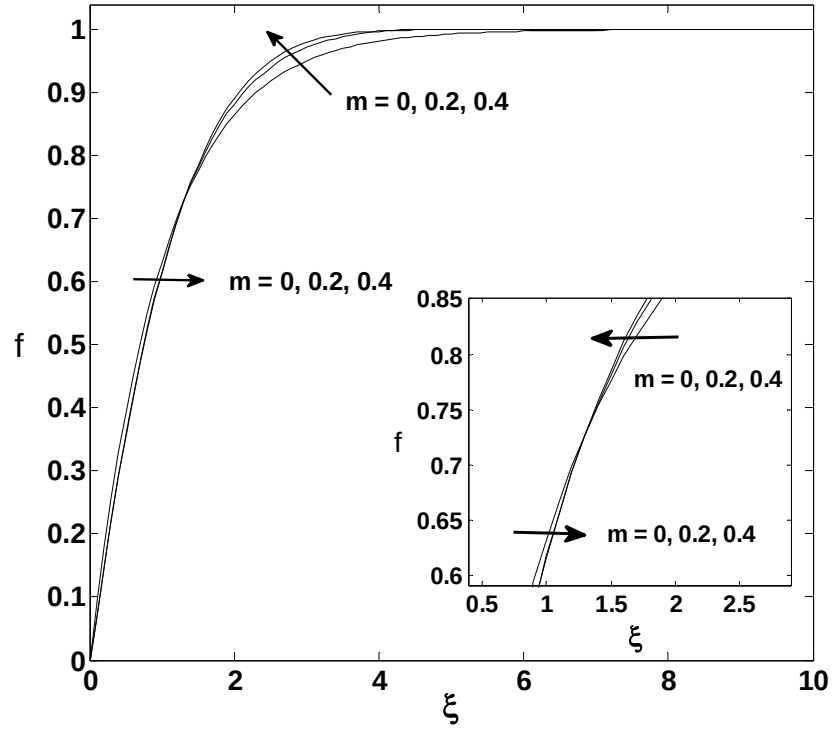
şeklindedir. Denklem (2.240) ve (2.241)'deki türev ifadeleri yerlerine denklem (3.16)-(3.18)'de bulunan ifadeler yerleştirilmiştir. Elde edilen ifadeler kullanılarak MATLAB programında **EK-2**'deki gibi sonlu fark tabanlı bir kod yazılmıştır. Bu kod sayesinde adi diferansiyel denklem sisteminin nümerik çözümü yapılmıştır. Hesaplama, yüz düğüm noktası için $\xi = [0,10]$ ve $h=0.1$ olarak alınmıştır. Elde edilen çözümler Şekil 3.37-3.42'de verilmiş ve grafiklerde k_1 değeri k olarak ifade edilmiştir.



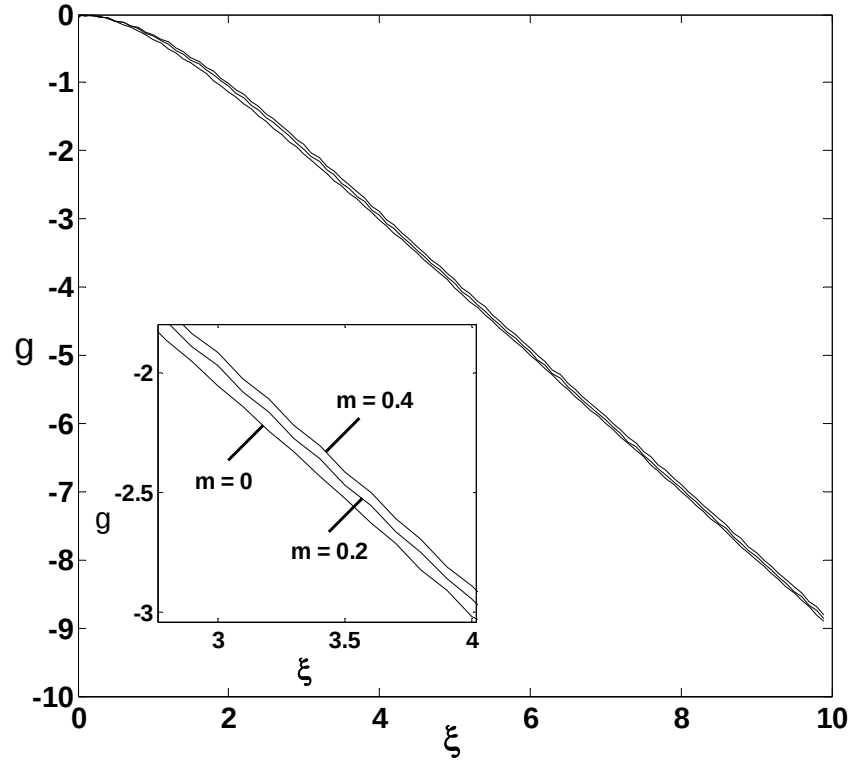
Şekil 3.37. x bileşenindeki hızla ilgili olan benzerlik fonksiyonu üzerine k ikinci derece katsayısının etkisi ($m=0.1$)



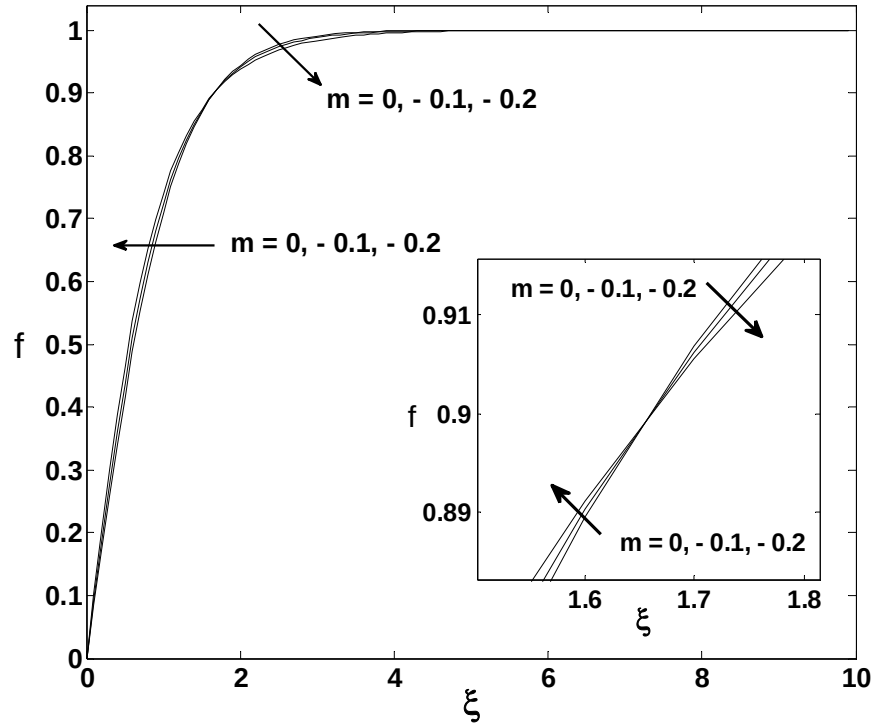
Şekil 3.38. Y bileşenindeki hızla ilgili olan benzerlik fonksiyonu üzerine k ikinci derece katsayısının etkisi ($m=0.1$)



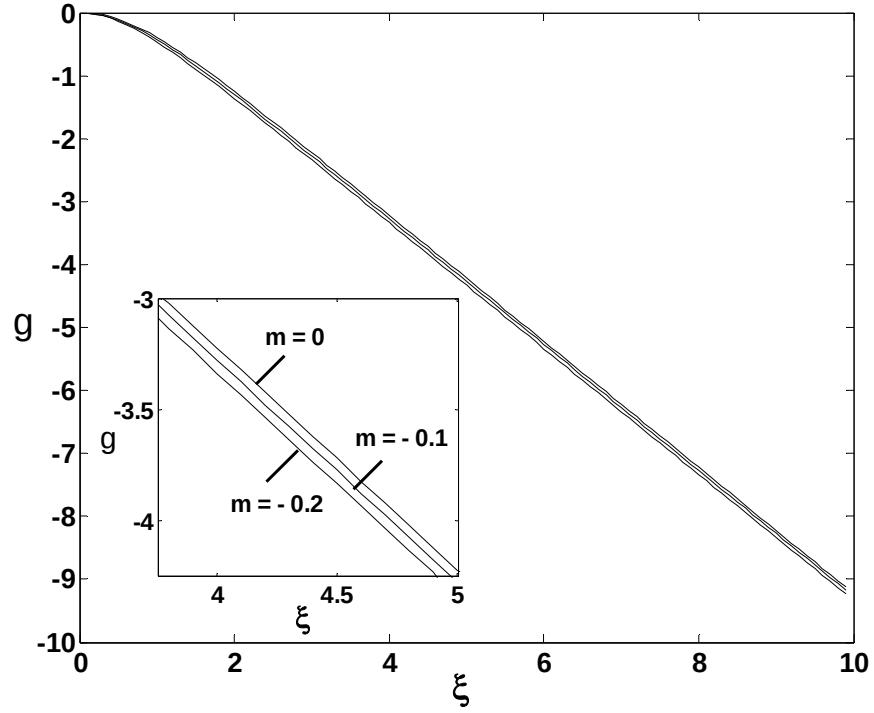
Şekil 3.39. x bileşenindeki hızla ilgili olan benzerlik fonksiyonu üzerine m pozitif Power-Law üssünün etkisi ($k=1$)



Şekil 3.40. Y bileşenindeki hızla ilgili olan benzerlik fonksiyonu üzerine m pozitif Power-Law üssünün etkisi ($k=1$)



Şekil 3.41. x bileşenindeki hızla ilgili olan benzerlik fonksiyonu üzerine m negatif Power-Law üssünün etkisi ($k=0.2$)



Şekil 3.42. Y bileşenindeki hızla ilgili olan benzerlik fonksiyonu üzerine m negatif Power-Law üssünün etkisi ($k=0.2$)

Şekil 3.37’de farklı k değerleri için hızın x bileşeni ile ilgili olan f fonksiyonun benzerlik değişkeni ile değişimi çizdirilmiştir. Burada Power-Law üssü 0.1 olarak alınmıştır. Grafikten k değerleri arttıkça sınır tabakasının kalınlaştığı görülmektedir. Şekil 3.38’de ise hızın Y bileşeni ile ilgili olan g fonksiyonun benzerlik değişkenine göre değişimi gösterilmiştir. Bu şekilden k değerlerinin artan değerlerinde g hızının arttığı görülmektedir.

Şekil 3.39 ve 3.40’da, m ’nin pozitif değerleri ($m>0$) için sınır tabakası profilleri elde edilmiştir. Şekil 3.39’da ikinci derece akışkan katsayısının 1 değeri için f hızının benzerlik değişkenine göre değişimi çizdirilmiştir. Grafiğe dikkat edilirse hız profilleri yaklaşık $\xi = 1.7$ değeri civarında kesişmektedir. Benzerlik değişkeninin $1.7 < \xi < \infty$ arasında m değerlerinin artmasıyla sınır tabakasının incelendiği görülmektedir. Şekil 3.40’da ise g hızının benzerlik değişkeni ile değişimi gösterilmiştir. Grafikten m ’nin artan pozitif değerlerinde g hızının arttığı gözlenmiştir.

Şekil 3.41-3.42’de, m ’nin negatif değerleri ($m < 0$) için hız profilleri çizdirilmiştir. Şekil 3.41’de ikinci derece akışkan katsayısının 0.2 değeri için f hızının benzerlik değişkeni ile değişimi gösterilmiştir. Şekilden hız profillerinin yaklaşık $\xi = 1.8$ değeri civarında kesiştiği görülmektedir. $1.8 < \xi < \infty$ arasında m değerlerinin mutlak olarak artmasıyla sınır tabakasının kalınlaştığı görülmektedir. Şekil 3.42 ise g hızının benzerlik değişkenine göre değişimini göstermektedir. Grafiğe dikkat edilirse Power-Law üssünün negatif değerleri mutlak olarak arttıkça g hızının azaldığı görülmektedir.

Sonuç olarak ikinci dereceden Power-Law akışkanına ait sınır tabakası denklemleri benzerlik dönüşümü ile adi diferansiyel denklem haline indirgenmiştir. Daha sonra sonlu fark algoritması ile çalışan bir kod yazılmış ve bu kod sayesinde elde edilen adi diferansiyel denklem sistemi nümerik olarak çözülmüştür. Çözümler sonucunda ikinci derece akışkan katsayısının artan değerlerinde, sınır tabakasının kalınlaştığı görülmüştür. Benzerlik değişkeninin 1.7 değerinden sonraki değerleri için Power-Law üssünün artan pozitif değerlerinde sınır tabakasının incelendiği gözlenmiştir. Benzerlik değişkeninin 1.8’den sonraki değerleri için Power-Law üssünün negatif değerleri mutlak olarak arttığında ise sınır tabakasının kalınlaştığı görülmüştür.

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında yeni bir Newtonyen olmayan akışkan modeli ele alınarak bu modele ait kararsız akış için sınır tabakası denklemleri elde edilmiş ve bu denklemlerin çözümleri yapılmıştır. Ele alınan model, Power-Law akışkan ile ikinci ve üçüncü derece akışkan modelinin birleşimi biçimindedir. Daha önce yapılan çalışmalar incelendiğinde bu çalışmaların sadece Power-Law akışkan modeli, ikinci veya üçüncü derece akışkan modeli gibi modeller üzerinde yapıldığı görülmektedir. Literatürde bu üç Newtonyen olmayan akışkan modeli ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Değişik akış problemleri ele alınıp incelenmiştir.

Tez çalışmasında, akışkanlar mekaniğinde çok önemli bir yere sahip olan sınır tabakası akışları bu yeni model için ele alınıp incelenmiştir. Tezde öncelikle akışkan modeline ait en genel hareket denklemleri çıkartılmıştır. İvme terimleri, viskoz terimler, Power-Law terimi, ikinci ve üçüncü derece akışkan terimleri ayrı ayrı elde edilmiştir. Bu hareket denklemlerinde üçüncü derece akışkan katsayısı sıfır ($\beta=0$) alındığında denklemler sadece Power-Law üssü ve ikinci dereceden akışkan terimini ihtiva eden hareket denklemlerine dönüşmektedir. Eğer denklemlerde ikinci derece akışkan katsayıları sıfır ($\alpha_1=\alpha_2=0$) alınır ise hareket denklemleri Power-Law üssü ve üçüncü dereceden akışkan terimini ihtiva eden denklemler haline gelmektedir. Tüm Newtonyen olmayan katsayılar sıfır ($\alpha_1=\alpha_2=\beta=0$) kabul edilir ise denklemler Power-Law akışkanın hareket denklemleri haline dönüşmektedir. Eğer $\alpha_1=\alpha_2=\beta=0$ ve $m=0$ alınır ise hareket denklemleri Newtonyen akışkanlara indirgenmiş olmaktadır. Tezin sonraki kısmında ise sınır tabakası yaklaşımı kullanılarak ikinci dereceden Power-Law ve üçüncü dereceden Power-Law akışkanlarına ait iki boyutlu ve kararsız akış için sınır tabakası denklemleri elde edilmiştir. Sınır tabakası yaklaşımında t zamanı, p basınç terimi, x koordinatı ve bu yöndeki u hızı bir mertebesinde, y koordinatı ve bu yöndeki v hızı δ mertebesinde alınmıştır. Bu yaklaşım ile sınır tabakası denklemleri elde edilmiştir.

Sınır tabakası yaklaşım ile elde edilen ikinci dereceden Power-Law ve üçüncü dereceden Power-Law akışkanlarına ait sınır tabakası denklemlerinin çözümüne

geçilmiştir. Öncelikle üçüncü dereceden Power-Law akışkanına ait sınır tabakası denklemlerinin çözümleri yapılmıştır. Bu akışa ait sınır tabakası denklemleri kısmi diferansiyel denklem sistemi biçimindedir. Bu denklemlerin çözümleri oldukça zor ve uğraştırıcıdır. Bu nedenle, denklemlerin çözümünü yapabilmek için denklemlerimiz adi diferansiyel denklem formuna indirgenmiştir. İndirgeme işlemi için Lie Grup analizi kullanılmıştır. Lie Grup analizinde önce denklemler için invaryantlık şartları yazılmıştır. Sonrasında ise bu şartlar için gerekli olan infinitesimaller türetilmiştir. Bu infinitesimaller, invaryantlık şartlarında yerine yazıldığında iki ayrı denklem sistemi elde edilmiştir. Bu denklem sistemleri katsayılarına göre ayrıştırılarak bir kısmi diferansiyel denklem sistemi elde edilmiştir. Bu denklem sistemi çözülerek denklemlerin kabul ettiği simetriler bulunmuştur. Bulunan bu simetriler ile denklemler üç değişkenli kısmi diferansiyel denklem sisteminden, iki değişkenli kısmi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülmüştür. İndirgeme işlemi ölçekleme ve öteleme dönüşümleri ile sağlanmıştır. Yani iki farklı kısmi diferansiyel denklem sistemi elde edilmiştir. Sınır şartlarında en az kısıtlayıcılık, hareketli yüzey üzerindeki emme-püskürtme durumu olduğu için bu fiziksel problem ele alınmıştır. Elde edilen bu iki bağımsız değişkenli iki ayrı kısmi diferansiyel denklem sistemlerine ikinci kez Lie Grubu analizi uygulanmıştır. Böylece iki değişkenli kısmi diferansiyel denklemler, bir değişkenli adi diferansiyel denklem formuna indirgenmiştir. Ölçekleme dönüşümü sayesinde oluşan denklemlerde x koordinatı yönündeki hız fonksiyonu M , y koordinatı yönündeki hız fonksiyonu N olarak belirlenmiştir. N fonksiyonu analitik olarak çözülmüş olup doğrusal bir değişim göstermiştir. Öteleme dönüşümü sonucunda ise x koordinatındaki hız fonksiyonu K , y koordinatındaki hız fonksiyonu ise L olarak verilmiştir.

Tez çalışmasında sınır tabakası yaklaşımı ile elde edilen ikinci dereceden Power-Law akışkanına ait sınır tabakası denklemlerinin çözümleri de yapılmıştır. Bu denklemlere ait sınır şartı olarak literatürde de çok sık yer alan klasik sınır şartları kullanılmıştır. Denklemlerin çözümü için öncelikle, denklemlerimiz adi diferansiyel denklem haline getirilmiştir. Bunun için Yürüsoy (2006)'un çalışmasındaki özel bir dönüşüm kullanılmıştır. Bu dönüşüm üzerinde bazı küçük değişiklikler yapılmış ve

sınır tabakası denklemlerine uygulanmıştır. Bu yeni değişkenler, denklemde yerlerine yazılarak kısmi diferansiyel denklem sisteminin adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülmesi sağlanmıştır. Denklemler adi diferansiyel denklem formuna inerken sınır şartları da başarı ile adi diferansiyel forma indirgenmiştir. Bu dönüşüm kullanılarak denklemin çözümü için büyük bir avantaj elde edilmiştir. Çünkü her zaman için bir kısmi diferansiyel denklemi çözmek bir adi diferansiyel denklemi çözmekten zordur. Bu dönüşüm sayesinde denklemler hem adi diferansiyel denklemlere dönüştürülmüş hem de boyutsuzlaştırılmıştır. Elde edilen adi diferansiyel denklemlerde x koordinatı yönündeki hız fonksiyonu f , y koordinatı yönündeki hız fonksiyonu g olarak belirlenmiştir.

Bundan sonraki kısımda, üçüncü dereceden Power-Law akışkanına ait sınır tabakası için elde edilen iki ayrı adi diferansiyel denklem sistemlerinin nümerik çözümleri yapılmıştır. Nümerik çözüm için Runge-Kutta algoritması kullanılmıştır. İki farklı dönüşümle (ölçekleme ve öteleme) elde edilen denklemlerin nümerik çözümleri grafiklerle ifade edilmiş ve yorumlanmıştır. Grafiklerde power-law üssünün ve üçüncü derece akışkan katsayısının çeşitli değerleri için hız fonksiyonlarının değişimi gösterilmiştir.

Grafiklerden anlaşıldığı gibi bu iki ayrı denklem sisteminde de aynı nümerik sonuçlar elde edilmiştir. Üçüncü derece akışkan katsayısının artan değerlerinde sınır tabakasının kalınlaştığı görülmüştür. Power-Law üssünün sınır tabakasına etkileri de gösterilmiştir. Püskürtme durumu için Power-Law üssünün artan pozitif değerlerinde sınır tabakasının incelendiği görülmüştür. Emme durumunda ise üçüncü derece akışkan katsayısının 3'ten büyük değerlerinde sınır tabakası incelmektedir. Power-Law üssünün negatif değerleri mutlak olarak arttığında, sınır tabakasının kalınlaştığı gözlenmiştir. Ancak sınır tabakasındaki kalınlaşma üçüncü derece akışkan katsayısının 3'ten büyük değerlerinde olmuştur. Bu durum hem püskürtme hem de emme durumunda da görülmektedir. Buradan, kabaran (shear thickening) veya incelen (shear thinning) bir akışkanda Newtonyen olmayan etkiler arttığında, sınır tabakasının kalınlaştığı sonucuna varılmıştır. Newtonyen olmayan akışkan katsayısının küçük değerlerinde Power-Law akışkanının özellikleri de görülmektedir. Ayrıca M

ve K fonksiyonunun türevlerine ait grafiklere de yer verilmiştir. Bu grafikler kayma gerilmesinin hesap edilmesinde kullanılmaktadır.

Tezin bu aşamasında ikinci dereceden Power-Law akışkanın sınır tabakası için elde edilen adi diferansiyel denklem sisteminin çözümleri üzerinde durulmuştur. Çözüm için sonlu farklar metodu tercih edilmiştir. 100 düğüm noktası için çözüm yapılmıştır. MATLAB programında sonlu farklar tabanlı bir kod yazılmıştır. Bu kod sayesinde adi diferansiyel denklem sistemi başarı ile çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar grafiklerle ifade edilmiştir. Grafikler power-law üssünün ve ikinci derece akışkan katsayısının çeşitli değerleri için hız fonksiyonlarının değişimini göstermektedir.

İkinci dereceden akışkan katsayısının çeşitli değerleri için elde edilen çözümler incelendiğinde, artan ikinci derece katsayı değerlerine karşılık sınır tabakasının kalınlaştığı gözlenmektedir. Kabaran (shear thickening) akış için elde edilen çözümler incelendiğinde Power-Law üssünün artan pozitif değerlerinde, sınır tabakasının incelendiği gözlenmiştir. İncelen (shear thinning) akış için elde edilen çözümler incelendiğinde ise Power-Law üssünün negatif değerleri mutlak olarak arttığında, sınır tabakasının kalınlaştığı görülmüştür.

5. KAYNAKLAR

- Abbasbandy, S., Yürüsoy, M., Pakdemirli, M., 2008. The analysis approach of boundary layer equations of Power-Law fluids of second grade. *Zeitschrift Fur Naturforschung Section A-A Journal of Physical Sciences*, 63 (9), 564-570.
- Acrivos, A.M., Shah, J., Petersen, E., 1960. Momentum and heat transfer in laminar boundary-layer flows of non-Newtonian fluids past external surfaces. *American Institute of Chemical Engineers*, 6 (2), 312-317.
- Astin, J., Jones, R.S., Lockyer, P., 1973. Boundary layers in non-Newtonian fluids. *Journal de Mécanique*, 12, 527-539.
- Beard, D.W., Walters, K., 1964. Elastico-viscous boundary layer flows. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 60 (3), 667-674.
- Bluman, G.W., Kumei, S., 1989. *Symmetries and differential equations*. Springer Verlag, New York.
- Coleman, B.D., Noll, W., 1960. An approximation theorem for functionals with applications in continuum mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 6 (1), 355-370
- Dunn, J.E., Fosdick, R.L., 1974. Thermodynamics stability and boundedness of fluids of complexity 2 and fluids of second grade. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 56 (3), 191-252.
- Fosdick, R.L., Rajagopal, K.R., 1978. Uniqueness and drag for fluids of second grade in steady motion. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 13 (3), 131-137.
- Fosdick, R.L., Rajagopal, K.R., 1980. Thermodynamics and stability of fluids of third grade. *Proceedings of the Royal Society of London Series A - Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 339 (1738), 352-377.
- Garg, V.K., Rajagopal, K.R., 1990. Stagnation point flow of a non-Newtonian fluid. *Mechanics Research Communications*, 17 (6), 415-442.
- Garg, V.K., Rajagopal, K.R., 1991. Flow of a non-Newtonian fluid past a wedge. *Acta Mechanica*, 88 (1-2), 113-123.
- Gupta, G., Massoudi, M., 1993. Flow of a generalized second grade fluid between heated plates. *Acta Mechanica*, 99 (1-4), 21-33.
- Hayat, T., Khan, M., 2005. Homotopy solutions for a generalized second-grade fluid past a porous plate. *Nonlinear Dynamics*, 42 (4), 395-405.
- Keçebaş, A., Yürüsoy, M., 2006. Similarity solution of unsteady boundary layer equations of a special third grade fluid. *International Journal of Engineering Science*, 44 (11-12), 721-729.
- Lee, S.Y., Ames, W.F., 1966. Similarity solutions for non-Newtonian fluids. *American Institute of Chemical Engineers*, 12 (4), 700-708.

- Man, C.S., Sun, Q.X., 1987. On the significance of normal stress effects in the flow of glaciers. *Journal of Glaciology*, 33 (115), 268-273.
- Man, C.S., 1992. Nonsteady channel flow of ice as a modified second-order fluid with power-law viscosity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 119 (1), 35-57.
- Mansutti, D., Rajagopal, K.R., 1991. Flow of a shear thinning fluid between intersecting planes. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 26, (5) 769-775.
- Massoudi, M., Phuoc, T.X., 2001. Fully developed flow of a modified second grade fluid with temperature dependent viscosity. *Acta Mechanica*, 150 (1-2), 23-37.
- Massoidi, M., Ramezan, M., 1989. Effect of injection or suction on the Falkner-Skan flows of second grade fluids. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 24 (3), 221-227.
- McLeod, J.B., Rajagopal, K.R., 1987. On the uniqueness of flow of the Navier-Stokes fluid due to a stretching boundary. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 98 (4), 385-393.
- Mishra, S.P., Panda, T.CH., 1979. Effect of injection on the flow of second order fluid in the inlet region of a channel. *Acta Mechanica*, 32 (1-3), 11-17.
- Na ,T.Y., Hansen, A.G., 1967. Similarity solutions of a class of laminar three dimensional boundary layer equations of power-law fluids. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2 (4), 373-385.
- Noll, W., 1955. On the continuity of the solid and fluid states. *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, 4, 3-81.
- Oldroyd, J.G., 1950. On the formulation of rhological equations of state. *Proceedings of the Royal Society of London Series A - Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 200 (1063), 523-541.
- Pakdemirli, M., Suhubi, E.S., 1992a. Boundary layer theory for second order fluids. *International Journal of Engineering Science*, 30 (4), 523-532
- Pakdemirli, M., Suhubi, E.S., 1992b. Similarity solutions of boundary layer equations for second order fluids. *International Journal of Engineering Science*, 30 (5), 611-629.
- Pakdemirli, M., 1992. The boundary layer equations of third grade fluids. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 27 (5), 785-793.
- Pakdemirli, M., 1993. Boundary layer flow of power-law fluids past arbitrary profiles. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 50 (2), 133-148.
- Pakdemirli, M., 1994. Conventional and multiple deck boundary layer approach to second and third grade fluids. *International Journal of Engineering Science*, 32 (1), 141-154.
- Pakdemirli, M., Aksoy, Y., Yürüsoy, M., Khalique, C.M., 2008. Symmetries of boundary layer equations of power-law fluids of second grade. *Acta Mechanica Sinica*, 24 (6), 661-670.

- Rajagopal, K.R., Gupta, A.S., Wineman, A.S., 1980. On a boundary layer theory for non-Newtonian fluids. *International Journal of Engineering Science*, 18 (6), 875-883.
- Rajagopal, K.R., Gupta, A.S., 1981a. On a class of exact solutions to the equations of motion of a second grade fluid. *International Journal of Engineering Science*, 19 (7), 1009-1014.
- Rajagopal, K.R., Gupta, A.S., 1981b. Flow and stability of a second grade fluid between two parallel plates rotating about noncoincident axes. *International Journal of Engineering Science*, 19 (11), 1401-1409.
- Rajagopal, K.R., Gupta, A.S., Na, T.Y., 1983. A note on the Falkner-Skan flow of a non-Newtonian fluid. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 18 (4), 313-319.
- Rajagopal, K.R., Na, T.Y., Gupta, A.S., 1984. Flow of a viscoelastic fluid over a stretching sheet. *Rheologica Acta*, 23 (2), 213-215.
- Rajagopal, K.R., Szeri, A.Z., Troy, W., 1986. An existence theorem for the flow of a non-Newtonian fluid past an infinite porous plate. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 21 (4), 279-289.
- Rajesvari, G.K., Rathna, S.L., 1962. Flow of a particular class of non-Newtonian visco-elastic and visco-inelastic fluids near a stagnation point. *ZAMP*, 13 (1), 43-57.
- Reiner, M., 1945. Mathematical Theory of Dilatancy. *Am J. Math.*, 67, 350-362
- Rivlin, R.L., 1948. The hydrodynamics of non-Newtonian fluids. *Proc R. Soc. London A*, 193, 260-281.
- Prater, K.R., 1969. A boundary layer in an elastico-viscous fluid. *ZAMP*, 20 (5), 712-721.
- Schlichting, H., 1951. *Boundary-Layer Theory*. McGraw Hill, New York.
- Schowalter, W.R., 1960. The application of boundary layer theory to power-law pseudoplastic fluids: Similarity solutions. *American Institute of Chemical Engineers*, 6 (1), 24-28.
- Siddiqui, A.M., Kaloni, P.N., 1986. Certain inverse solutions of a non-Newtonian fluid. *Mechanics International Journal of Non-Linear Mechanics*, 21 (6), 459-473.
- Srivastava, A.C., 1958. The flow of a non-Newtonian liquid near a stagnation point. *ZAMP*, 9 (1), 80-84.
- Stephani, H., 1989. *Differential equations: Their solution using symmetries*. Cambridge University Press, New York.
- Troy, W.C., Overman, E.A., Ermentrout, G.B., Keener J.P., 1987. Uniqueness of a flow a second order fluid past a stretching sheet. *Quarterly Of Applied Mathematics*, 44 (4), 753-755
- Yürüsöy, M., Pakdemirli, M., 1996. Group-theoric approach to unsteady boundary layer equations of some non-Newtonian fluids. *Modern Group Analysis VI*, Johannesburg, South Africa.

- Yürüsoy, M., Pakdemirli, M., 1999. Exact solutions of boundary layer equations of a special non-Newtonian fluid over a stretching sheet. *Mechanics Research Communications*, 26 (2), 171-175.
- Yürüsoy, M., 2006. Unsteady boundary layer flow of power-law fluid on stretching sheet surface. *International Journal of Engineering Science*, 44 (5-6), 325-332.

EKLER

EK-1

RUNGE-KUTTA ALGORİTMASINI KULLANAN PROGRAMLAR

M ve N hızları için

```
function fdot = MNhizlari(t,f)
m=-0.8;
k=1;
c3=2;
fdot=[f(3);(-3/2);((2*f(1)+f(3))*(f(2)-1/2*t)-
2*c3)/(((m+1)+2*k*(m+3)*(f(3))^(2))*(abs(f(3)))^(m)))];
```



```
clear all
t0=0;tf=10;
f0=[1 1 1.9065]';
[t,f0]=ode45('MNhizlari',t0,tf,f0);
f11=f0(:,1);
hold on
plot(t,f11,'b')
```

K ve L hızları için

```
function fdot = KLhizlari(t,f)
m=-0.8;
k=1;
c=2;
fdot=[f(3);((-f(1)+t*f(3))/3);(((f(1))^2-
(t*f(1)*f(3))+3*f(2)*f(3))-
c^2)/(3*((m+1)+2*k*(m+3)*(f(3))^(2))*(abs(f(3)))^(m)))];
```



```
clear all
t0=0;tf=10;
f0=[1 1 0.7864]';
[t,f0]=ode45('KLhizlari',t0,tf,f0);
f11=f0(:,1);
hold on
plot(t,f11,'r')
```


EK-2

SONLU FARKLAR METODUNU KULLANAN PROGRAM

```
clear all

h=0.1;

f0=[0:1/98:1 0:-5/98:-5];
options=optimset('Display','iter','TolFun',1e35,'MaxFunEvals',1e8,'MaxIter',30,'TolX',1e38,'LargeScale','on','PrecondBandWidth',inf);
[f,fval,exitflag,output,JAC] = fsolve(@doktora,f0,options);

for i=1:99
    p1(i,:)=f(i);
end

for i=100:198
    r1(i-99,:)=f(i);
end

t1=0:0.1:9.8;

figure(1)
plot(t1,p1,'k')
hold on

figure(2)
plot(t1,r1,'k')
hold on
```

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ali KEÇEBAŞ
Doğum Yeri ve Yılı : Fethiye / 30.10.1980
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce



Eğitim Durumu

Lise : Aydın / Söke Ziraat Teknik Lisesi, 1995-1999

Lisans : Z.K.Ü., Tek. Eğt. Fak., Makine Eğitimi ABD, 1999-2003

Yüksek Lisans : Z.K.Ü., Fen Bil. Enst., Makine Eğitimi A.B.D., 2003-2005

Çalıştığı Kurum ve Yıl : Afyon Kocatepe Üniversitesi, 2005-

Yayınları

A. Uluslararası hakemli dergilerde yayınlanan makaleler

- 1- Keçebaş, A., Yürüsoy, M., 2006. Similarity solutions of unsteady boundary layer equations of a special third grade fluid. International Journal of Engineering Science, 44 (11-12), 721-729.
- 2- Gedik, E., Keçebaş, A., Öz, E.S., 2008. Effect to the performance of different type absorber plates on the solar air collectors. Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 23 (4), 777-784.
- 3- Keçebaş, A., Alkan, M.A., 2009. Educational and consciousness-raising movements for renewable energy in Turkey. Energy Education Science and Technology Part B Social and Educational Studies. 1 (3-4), 157-170.
- 4- Keçebaş, A., Kayfeci, M., 2010. Effect on optimum insulation thickness, cost and saving of storage design temperature in cold storage in Turkey. Energy Education Science and Technology Part A Energy Science and Research. 25 (1-2), 117-127.

- 5- Keçebaş, A., 2011. Performance and thermo-economic assessments of geothermal district heating system: A case study in Afyon, Turkey. Renewable Energy, 36 (1), 77-83.
- 6- Yumurtacı, M., Keçebaş, A., 2011. Renewable energy and its university level education in the Turkey. Energy Education Science and Technology Part B Social and Educational Studies. 3 (1-2), 143-152.
- 7- Keçebaş, A., Çimen, H., Oğuz, M., 2011. A study on controlling of stoker-fired boilers. Energy Education Science and Technology Part A Energy Science and Research. 27 (1), 1-14.
- 8- Caner, M., Gedik, E., Keçebaş, A., 2011. Thermal performances of various type absorber plates on the solar air collector by using artificial neural network. Expert Systems with Applications, 38 (3), 1668-1674.
- 9- Karabulut, A., Gedik, E., Keçebaş, A., Alkan, M.A., 2011. An investigation on renewable energy education at the university level in Turkey. Renewable Energy, 36 (4), 1293-1297.
- 10- Keçebaş, A., Yürüsoy, M., 2011. Numerical solutions of unsteady boundary layer equations for a generalized second grade fluid. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 49 (1), 71-82.
- 11- Keçebaş, A., Kayfeci, M. and Gedik, E., 2011. Performance investigation of the Afyon geothermal district heating system for building applications: Exergy analysis. Applied Thermal Engineering, (Basımda).

B. Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında basılan bildiriler

- 1- Alkan, M.A., Tan, M., Keçebaş, A., 2008. Energy and environment in Turkey. The Third Business and Economy International Workshop, Giresun, Turkey.
- 2- Keçebaş, A., Kayfeci, M., 2009. Automatic control of stoker fired boilers. The Fifth International Advanced Technologies Symposium, Karabuk, Turkey.
- 3- Gedik, E., Kayfeci, M., Keçebaş, A., Kurt, H., 2009. Magnetic refrigeration technology on near-room temperature applications. The Fifth International Advanced Technologies Symposium, Karabuk, Turkey.

- 4- Yumurtacı, M., Keçebaş, A., 2009. Smart building technologies and its automation systems. The Fifth International Advanced Technologies Symposium, Karabuk, Turkey.
- 5- Yumurtacı, M., Keçebaş, A., Alkan, M.A., 2009. Turkey's renewable energy sources in the global financial crisis. The First International Conference on Critical Issues in Business and Economics, Gumushane, Turkey.
- 6- Özbaş, E., Keçebaş, A., Gedik, E., 2010. The effects of various stoker mechanism used in coal stoves on the air pollution. The Eleventh International Combustion Symposium, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina.
- 7- Keçebaş, A., Gedik, E., Kayfeci, M., 2010. Investigation of the energy and exergy performance of a solar ejector cooling system using various working fluids. The Fifth International Ege Energy Symposium and Exhibition, Denizli, Turkey.
- 8- Keçebaş, A., Gedik, E., 2010. The effect on environment of geothermal district heating systems: A case example from Afyon, Turkey. The Fifth International Ege Energy Symposium and Exhibition, Denizli, Turkey.
- 9- Keçebaş, A., Gedik, E., 2010. First and second law analysis of the geothermal district heating systems: Sandıklı and Afyon example. The Tenth International Conference on Clean Energy, Famagusta, North Cyprus.

C. Ulusal hakemli dergilerde yayınlanan makaleler

- 1- Yılmaz, S., Kayfeci, M., Keçebaş, A., 2010. Çift fazlı (ısı borulu) güneş kolektörlerinin konut ısıtmasında kullanımının deneysel olarak incelenmesi. Tesisat Mühendisliği, 116 (16), 5-10.
- 2- Keçebaş, A., Gedik, E., Kayfeci, M., 2010. Fosil yakıtların kullanımından kaynaklanan hava kirliliği üzerine jeotermal enerji ve doğalgaz kullanımının etkisi: Afyon örneği. Makine Teknolojileri Elektronik Dergisi, 7 (3), 23-30.
- 3- Keçebaş, A., Kayfeci, M., Gedik, E., 2010. Afyon'da ölçülen sülfür dioksit ve partikül madde değişimleri üzerine değerlendirme. Mühendis ve Makina, 51 (610), 14-19.

D. Ulusal bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında basılan bildiriler

- 1- Yürüsoy, M., Kapucu, M., Keçebaş, A., 2007. İki boru arasındaki non-Newtonyen akışkan akışında entropi analizi. 16. Ulusal Isı Bilimi ve Tekniği Kongresi, Kayseri.
- 2- Alkan, M.A., Gedik, E., Keçebaş, A., 2007. Türkiye'deki güneş enerjisi eğitiminden beklentiler ve öneriler. 3. Güneş Enerjisi Sistemleri Sempozyumu ve Sergisi, Mersin.
- 3- Çimen, H., Yumurtacı, M., Neşe, S.V., Keçebaş, A., 2007. Elektrik-elektronik eğitiminde kullanılan simülasyon programları. Ulusal Teknik Eğitim, Mühendislik ve Eğitim Bilimleri Genç Araştırmacılar Sempozyumu, İzmit.
- 4- Keçebaş, A., Kayfeci, M., 2008. Alternatif evsel klima sistemlerinin klasik buhar sıkıştırırmalı sistemlerle karşılaştırılması. 7. Ulusal Temiz Enerji Sempozyumu, İstanbul.
- 5- Tan, M., Keçebaş, A., Acar, M., 2009. Muğla TOKİ evlerinde güneş enerjisinin temiz sıcak su ve elektrik enerjisi üretiminde uygulanabilirliğinin araştırılması ve ekonomik analizi. 4. Güneş Enerjisi Sistemleri Sempozyumu ve Sergisi, Mersin.