

T.C.  
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**FUZZY NÖRMLÜ LİNEER UZAYLARDA İKİNCİ DERECEDEKİ  
FONKSİYONEL DENKLEMLERİN KARARLILIĞI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Raşit KARAKAYA  
DANIŞMAN: Yrd. Doç. Dr. Hamdullah ŞEVLİ

VAN-2010

T.C.  
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**FUZZY NÖRMLÜ LİNEER UZAYLARDA İKİNCİ DERECEDE  
FONKSİYONEL DENKLEMLERİN KARARLILIĞI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Raşit KARAKAYA

VAN-2010

## KABUL ve ONAY SAYFASI

Yrd. Doç. Dr. Hamdullah ŞEVLİ danışmanlığında, Raşit KARAKAYA tarafından hazırlanan “*Fuzzy Normlu Lineer Uzaylarda İkinci Dereceden Fonksiyonel Denklemlerin Kararlılığı*” isimli bu çalışma ....../...../2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı’nda *Yüksek Lisans Tezi* olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Tunay BİLGİN..... İmza:

Üye : Prof. Dr. Heybetkulu Seferoğlu MUSTAFAYEV... İmza:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hamdullah ŞEVLİ ..... İmza:

Üye :..... İmza:

Üye :..... İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’ nun ....../...../..... Gün ve.....  
.....sayılı kararı ile onaylanmıştır.

.....  
Enstitü Müdürü

## ÖZET

### FUZZY NORMLU LİNEER UZAYLARDA İKİNCİ DERECEDE FONKSİYONEL DENKLEMLERİN KARARLILIĞI

KARAKAYA, Raşit

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Hamdullah ŞEVLİ

Aralık 2010, 70 Sayfa

Altı bölümden oluşan bu çalışmada bazı fonksiyonel denklemlerin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı incelenmiştir.

Bu çalışmanın birinci ve ikinci bölümlerinde konuya giriş yapılmış ve literatüre değinilmiştir. Üçüncü bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde Cauchy fonksiyonel denkleminin ve ikinci dereceden bazı fonksiyonel denklemlerin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı incelenmiştir.

Bu çalışmanın beşinci bölümünde öncelikle quasi-norm ve quasi-Banach kavramları verilerek ikinci dereceden ve toplamsal fonksiyonlardan türetilen bir fonksiyonel denklemin çözümü ve bu fonksiyonel denklemin quasi-Banach uzaylarında Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı ele alınmıştır.

Bu çalışmanın son bölümünde ise fuzzy normlu uzaylarda toplamsal ve ikinci dereceden fonksiyonel denklemlerin kararlılığı araştırılmıştır.

**Anahtar kelimeler:** Fonksiyonel denklemlerin kararlılığı, Fuzzy norm, Hyers-Ulam-Rassias kararlılık.

## ABSTRACT

### THE STABILITY OF QUADRATIC FUNCTIONAL EQUATIONS ON THE FUZZY NORMED LINEER SPACES

KARAKAYA, Raşit

MSc, Mathematics Science

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Hamdullah ŞEVLİ

December 2010, 70 pages

In this study which consists of six chapters, the Hyers-Ulam-Rassias stability of some functional equations has been investigated.

After giving a short introduction and a notification of references in the first chapter and the second one, in the third chapter essential theorems and definitions related topic have been given.

In the fourth chapter, the Hyers-Ulam-Rassias stability of Cauchy functional equation and of some quadratic functional equations have been investigated.

In the fifth chapter, after giving the quasi-norm and quasi-Banach concepts, the solution of a functional equation which derived from additional quadratic functions and the Hyers-Ulam-Rassias stability of this function in the quasi-Banach spaces have been searched.

In the last chapter of this study, the stability of additional quadratic functional equations in the fuzzy normed spaces has been investigated.

**Key words:** Fuzzy norm, The Hyers-Ulam-Rassias stability, The stability of functional equations.

## ÖNSÖZ

Fonksiyonel denklemler pratikte her yerde bulunabilir. Fonksiyonel denklemlerin uygulamaları, analiz, iç çarpım uzayları, eşitsizlikler, polinomlar, uygulamalı bilimler, geometri, bilgisayar bilimleri, mühendislik, bilgi teorisi, biyoloji, kombinatorik, fizik, istatistik, psikoloji v.b. gibi geniş bir uygulama alanına sahiptir. Matematiksel analizde şu kararlılık problemi ile karşılaşabiliriz: “Bir fonksiyonun bazı şartlar altında yaklaşık olarak bir fonksiyonel denklemi sağladığını kabul edelim. Bu fonksiyonel denklemi tam olarak sağlayan ve bu fonksiyona yakın olan başka bir fonksiyon bulmak mümkün müdür?” Bu çalışmada fonksiyonel denklemler teorisi, Hyers-Ulam-Rassias kararlılık teorisi ve fuzzy normlu uzaylar teorisi arasındaki ilişkiler incelenecektir. Quasi-Banach uzaylarında ikinci dereceden ve toplamsal fonksiyonlardan türetilen bir fonksiyonel denklem için ve fuzzy normlu lineer uzaylarda bir fonksiyonel denklem için genelleştirilmiş Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı araştırılacaktır.

Çalışmalarımnda benden yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Hamdullah ŞEVLİ' ye ve her konuda bana destek olan aileme sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Raşit KARAKAYA



## İÇİNDEKİLER

|  | <b>Sayfa</b> |
|--|--------------|
| ÖZET   | i            |
| ABSTRACT   | iii          |
| ÖNSÖZ  | v            |
| İÇİNDEKİLER  | vii          |
| SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ   | ix           |
| 1. GİRİŞ   | 1            |
| 2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ   | 2            |
| 3. TEMEL TANIM ve TEOREMLER  | 7            |
| 4. TOPLAMSAL DENKLEMLERİN KARARLILIĞI  | 18           |
| 5. QUASİ-BANACH UZAYLARINDA, İKİNCİ DERECEDEDEN ve TOPLAMSAL<br>FONKSİYONLARDAN TÜRETİLEN FONKSİYONEL BİR EŞİTLİĞİN<br>KARARLILIĞI | 31           |
| 6. SONLU BOYUTLU FUZZY NÖRMLÜ LİNEER UZAYLARDA<br>TOPLAMSAL İKİNCİ DERECEDEDEN FONKSİYONEL DENKLEMLERİN<br>FUZZY KARARLILIĞI       | 41           |
| KAYNAKLAR  | 60           |
| ÖZGEÇMİŞ   | 63           |

## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

### Simgeler

|       |   |
|-------|---|
| N     | : Doğal Sayılar                         |
| R     | : Reel Sayılar                          |
| C     | : Kompleks Sayılar                      |
| X     | : Reel Lineer Uzay                      |
| $E_1$ | : Normlu Uzay                           |
| $E_2$ | : Banach Uzayı                          |
| F     | : Reel/Kompleks Sayıların bir cismi     |
| A     | : Fuzzy Kümesi                          |
| G     | : Abel Grubu                            |
| K     | : $\ \cdot\ $ un iç bükeyliğinin modülü |
| S     | : Keyfi bir yarı grup                   |

## 1. GİRİŞ

Bu çalışmada fonksiyonel denklemler teorisi, Hyers-Ulam-Rassias kararlılık teorisi ve fuzzy normlu uzaylar teorisi arasındaki ilişkiler ele alınacaktır.

Fonksiyonel denklemlerin etkisi ve uygulamaları her alanda hissedilebilir ve tüm alanlar, fonksiyonel denklemlerin ilişkisi, kullanışı ve tekniğinden yararlanır.

Ulam, Wisconsin Üniversitesi Matematik kulübüne 1940 yılında verdiği meşhur konuşmasında birçok çözülmemiş problem sunmuştur. Bu fonksiyonel denklemlerin kararlılık teorisinin başlangıç noktası olmuştur. Günümüz araştırmalarını buraya yönlendiren bu soru günümüzde “kararlılık problemi” olarak bilinmektedir. Matematik problemlerinin kararlılık kavramı daha genel bir bakış açısıyla şu şekilde verilmiştir:

Bir teoremin hipotezlerinde ufak bir değişiklik yaparak teoremin ana sonucunun doğru ya da yaklaşık olarak doğru kaldığını hangi durumlarda söyleyebiliriz?

Kararlılık kavramı doğal olarak mekanik problemlerinde ortaya çıkmıştır. Matematiksel olarak ifade etmek gerekirse, buradaki çıkış bir problemin çözümünün başlangıç parametrelerine bağlı olarak sürekliliği ile alakalıdır. Bu süreklilik değişik şekillerde tanımlanabilir. Çoğu zaman çözümlerin çok büyük zaman aralıklarında sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. Yani burada sistemi temsil eden noktanın herhangi bir zamanda başlangıç noktasına olan uzaklığının sınırlılığı kastedilmektedir.

Genel fonksiyon denklemleri için aşağıdaki soru sorulabilir:

Birbirinden çok az farklı olan iki fonksiyonel denklemin çözümlerinin de birbirlerine çok yakın olması ne zaman doğrudur?

Benzer şekilde verilen bir fonksiyonel denklem bir fonksiyonel eşitsizlik ile değiştirildiğinde eşitsizliğin çözümlerinin denklemin çözümlerine yakın olması gerektiği ne zaman iddia edilebilir?

Bir yıl sonra Hyers, Ulam’ın sorusuna kısmen olumlu bir cevap verdi. Hyers’in teoremi daha sonraları toplamsal dönüşümler için Aoki ve lineer dönüşümler için Cauchy farkını sınırsız alarak Rassias tarafından genelleştirildi. Rassias’ın çalışması bu konunun gelişmesinde büyük bir etki sağladığından bu teori fonksiyonel denklemlerin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı olarak adlandırılmaktadır.

Fuzzy teori matematik ve mühendisliğin birçok dalında en aktif araştırma alanı olmuştur. Bu teori 1965 yılında L. A. Zadeh tarafından takdim edilmiştir. O zamandan bu güne fuzzy küme ve fuzzy sayı kavramları kullanılarak çok sayıda araştırma makaleleri yayınlanmış ve birçok klasik teori fuzzy teorisine uyarlanmıştır. Bu teori aynı zamanda çeşitli alanlarda faydalı uygulamalara da sahiptir.

Toplamsal, stel, logaritmik, ikinci dereceden, toplamsal ve ikinci dereceden fonksiyonel denklemler gibi farklı fonksiyonel denklemlerin Hyers-Ulam-Rassias kararlılık problemi birçok araştırmacı tarafından ele alınmıştır. Ayrıca bazı araştırmacılar bu problemi normlu uzaylar, quasi-normlu uzaylar ve fuzzy normlu uzaylar gibi farklı uzaylarda incelemişlerdir.

Bu çalışmada quasi-normlu uzaylar ve fuzzy normlu uzaylar ele alınarak bu uzaylarda toplamsal ve ikinci dereceden bazı fonksiyonel denklemlerin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı araştırılacaktır.

## 2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

En önemli fonksiyonel denklem

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (2.1)$$

Cauchy fonksiyonel denklemdir. Bu denklemin herhangi bir çözümü toplamsal olarak adlandırılır. Reel sayılarda bu denklemin çözümü oldukça zordur. Rasyonel sayılarda ise temel cebirsel işlemler kullanılarak keyfi bir  $C$  sabiti için bir tek  $f(x) = cx$  çözüm ailesinin varlığı gösterilebilir. Kannappan'da (2009) belirtildiğine göre Cauchy (1821), (2.1) denklemini sağlayan reel değişkenli ve reel değerli bir fonksiyon sürekli ise bu fonksiyonun her  $x \in R$  için

$$f(x) = cx \quad (2.2)$$

Formunda olduğunu göstermiştir. Daha sonra Darboux (1875), fonksiyonun bir noktada sürekli olduğunun yeterli olduğunu göstererek  $f$  nin süreklilik şartını zayıflatmıştır. (2.1) fonksiyonel denkleminin çözümünün her  $x \in R$  iken (2.2) olması için literatürde bilinen çok sayıda şart mevcuttur. Bu şartlar süreklilik şartının oldukça zayıflatılmasıyla elde edilmiştir.

$f: R \rightarrow R$ , (2.1) denklemini sağlayan ve  $c = f(1) > 0$  ile verilen bir fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki şartlar birbirine denktir (Kannappan, 2009).

1.  $f$  bir  $x_0$  noktasında süreklidir.
2.  $f$  monoton artandır.
3. Negatif olmayan  $x$  ler için  $f$  negatif değildir.
4. Sonlu bir aralıkta  $f$  üstten sınırlıdır.
5. Sonlu bir aralıkta  $f$  alttan sınırlıdır.
6. Pozitif Lebesgue ölçümüne sahip sınırlı bir kümede  $f$  üstten (alttan) sınırlıdır.
7. Pozitif Lebesgue ölçümüne sahip sınırlı bir kümede  $f$  sınırlıdır.
8. Sonlu bir aralıkta  $f$  sınırlıdır.
9.  $f(x) = cx$  dir.
10.  $f$  yerel Lebesgue integrallenebilirdir.
11.  $f$  türevlenebilirdir.
12.  $f$  Lebesgue ölçülebilirdir.

Ulam (1940) tarafından ortaya atılan genel problem aşağıda verilmiştir:

$(G_1, \cdot)$  bir grup ve  $(G_2, *)$ ,  $d(\cdot, \cdot)$  metriği ile bir metrik grup olsun.  $\varepsilon > 0$  sayısı verilsin. Her  $x, y \in G_1$  için

$$d(h(x \cdot y), h(x) * h(y)) < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan  $h: G_1 \rightarrow G_2$  bir dönüşüm ise her  $x \in G_1$  için  $d(h(x), H(x)) < \varepsilon$  ile  $H: G_1 \rightarrow G_2$  bir homomorfizmi olacak şekilde bir  $\delta > 0$  sayısı var mıdır?

Diğer bir deyişle hangi şartlar altında bir yaklaşım homomorfizmine yaklaşan bir homomorfizm vardır.

Hyers (1941),  $E$  ve  $E'$  Banach uzayları için Ulam'ın (1940) sorusuna ilk defa uygun bir cevap verdi.

$f: E \rightarrow E'$ , her  $x, y \in E$  ve bazı  $\delta > 0$  için;

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta$$

olacak şekilde Banach uzayları arasında bir dönüşüm olsun. Bu takdirde her  $x \in E$  için

$$\|f(x) - T(x)\| \leq \delta$$

olacak şekilde bir tek  $T: E \rightarrow E'$  toplamsal dönüşümü vardır.

Her  $x \in E$  için;  $T: E \rightarrow E'$  fonksiyonu

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} f(2^n x)$$

limiti var olacak şekilde elde edilmiştir.

Eğer yukarıda verilen  $f$  fonksiyonu  $X$  de ki bir noktada sürekli ise  $T$  dönüşümü  $X$  de her yerde süreklidir.

Hyers'in (1941) bu önemli sonucu aşağıdaki şekilde açıklanabilir:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

toplamsal Cauchy fonksiyon denklemi Banach uzayının herhangi bir çifti için karardır.

$$(x, y) \mapsto f(x + y) - f(x) - f(y)$$

fonksiyonu Cauchy farkı olarak adlandırılır.

Rassias (1978) Hyers (1941) teoreminin bir genellemesini Cauchy farkını sınırsız alarak aşağıda verilen teoremle ispatladı.

$f: E \rightarrow E'$ , her  $x, y \in E$  için  $\varepsilon \geq 0$  ve  $0 \leq p < 1$  olmak üzere

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

olacak şekilde Banach uzayları arasında bir dönüşüm olsun.

Bu taktirde her  $x \in E$  için

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} f(2^n x)$$

limiti vardır ve  $k = \frac{2}{2-2^p}$  iken

$$\|f(x) - T(x)\| \leq k\varepsilon\|x\|^p$$

olacak şekilde bir tek  $T: E \rightarrow E'$  toplamsal dönüşümü vardır.

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) \quad (2.3)$$

fonksiyonel denkleminin ikinci dereceden fonksiyonel denklem denir.

Bu denklem,  $f$  reel değişkenli bir fonksiyon olduğunda  $c$  keyfi bir sabit olmak üzere  $f(x) = cx^2$  gibi bir çözüme sahiptir. İkinci Dereceden fonksiyonel denklemler Aczel ve Dhombres (1989), Amir (1986) ile Jordan ve Von Neumann (1935) çalışmalarında iç çarpım uzaylarını karakterize etmek için kullanıldı. Bu denklemler, diğer birçok fonksiyonel denklemlerde iç çarpım uzaylarını karakterize etmek için kullanıldı. Bir iç çarpım uzayı üzerinde karesel norm paralelkenar kuralı olarak bilinen;

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

ifadesini sağlar.

(2.3) ikinci dereceden fonksiyonel denklemi, bir simetrik iki-toplamsal fonksiyonu ile ilişkilidir. Reel vektör uzayları arasındaki bir  $f$  fonksiyonunun ikinci dereceden olması için gerek ve yeter şartın her  $x$  için  $f(x) = B(x, x)$  olacak şekilde bir tek simetrik ve iki-toplamsal olan  $B$  fonksiyonunun var olması gerektiği bilinmektedir (Aczel ve Dhombres, 1989; Kannapan, 1995).

$B$  iki-toplamsal fonksiyonu,

$$B(x, y) = \frac{1}{4}(f(x+y) - f(x-y))$$

ile verilmiştir. (2.3) ikinci dereceden fonksiyon denklemi için bir Hyers-Ulam kararlılık problemi Skof (1983) tarafından  $E_1$  bir normlu uzay ve  $E_2$  bir Banach uzayı olmak üzere  $f: E_1 \rightarrow E_2$  fonksiyonları için ispatlanmıştır. Cholewa (1984), Skof'un (1983) teoreminin  $E_1$  bağlantılı tanım bölgesinin bir Abel grup ile değiştirildiğinde yine doğru kalacağına dikkat çekmiştir. Czwerwik (1992) çalışmasında (2.3) ikinci dereceden fonksiyonel denkleminin genelleştirilmiş Hyers-Ulam kararlılığını ispatladı. Grabiec (1996) bu sonuçları genelleştirdi. Ayrıca burada Moszner (1985), Forti (1987), Rassias (1990), Gajda(1991), Jun ve Lee (2001) çalışmalarına değinilmiştir.

Bu çalışmada literatür ayrıntılı olarak ele alınarak Najati ve Moghami (2008) tarafından çalışılan quasi-Banach uzaylarında ikinci dereceden ve toplamsal

fonksiyonlardan türetilen bir fonksiyonel denklem için genelleştirilmiş Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı elde edilecektir.

İlk defa Katsaras (1984) bir vektör uzayı üzerinde fuzzy norm kavramını fuzzy topolojik vektör uzayları üzerinde kendi çalışmalarını düzenlemek suretiyle ele almıştır. Vektör uzayları üzerinde fuzzy metrik kavramını çalışan Felbin (1992), Kaleva ve Seikkala'nın (1984) fuzzy uzaklık kavramını uygulamak suretiyle fuzzy normlu lineer uzay kavramını genişleterek sonlu boyutlu fuzzy normlu lineer uzayları araştırmıştır. Xiao ve Zhu (2002), fuzzy normlu lineer uzaylar arasındaki bir lineer operatörün fuzzy normunun Felbin tanımını bir parça genişleterek fuzzy normlu uzayların özellikleri ile topolojik özelliklerini incelemiştir. Ayrıca Cheng ve Mordeson (1994); Kramosil ve Michalek (1975) tipi fuzzy metrik kavramı ile ilişkili bir vektör uzayı üzerinde fuzzy normlu uzayı tanımladı. Bag ve Samanta (2003), Cheng ve Mordeson'un (1994) fuzzy normlu lineer uzay tanımını bir şartı kaldırarak yeniden düzenledi.

$X$  bir reel lineer uzay olsun. Her  $x, y \in X$  ve her  $a, b \in R$  için aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise bir  $N: X \times R \rightarrow [0,1]$  fonksiyonuna  $X$  üzerinde bir fuzzy norm denir.

$$(N_1) \quad a \leq 0 \text{ için } N(x, a) = 0$$

$$(N_2) \quad x = 0 \Leftrightarrow \text{her } a > 0 \text{ için } N(x, a) = 1$$

$$(N_3) \quad a \neq 0 \text{ ise } N(ax, b) = N\left(x, \frac{b}{|a|}\right)$$

$$(N_4) \quad N(x + y, a + b) \geq \min\{N(x, a), N(y, b)\}$$

$$(N_5) \quad N(x, \cdot), R \text{ üzerinde azalmayan bir fonksiyondur ve } \lim_{a \rightarrow \infty} N(x, a) = 1$$

dir.

$(X, N)$  ikilisine bir fuzzy normlu lineer uzay denir.

Ayrıca Gordji ve ark. (2009) tarafından çalışılan ve ikinci dereceden ve toplamsal fonksiyonlardan elde edilen

$$f(2x + y) + f(2x - y) = f(x + y) + f(x - y) + 2f(2x) - 2f(x) \quad (2.4)$$

fonksiyonel denklemi ele alınacaktır. Kolaylıkla görülebilir ki,  $f(x) = ax^2 + bx + c$  fonksiyonu bu fonksiyonel denkleminin bir çözümüdür.

Bu çalışmanın altıncı bölümünde fuzzy normlu lineer uzaylarda (2.4) fonksiyonel denklemi için genelleştirilmiş Hyers-Ulam-Rassias kararlılığının bazı versiyonları araştırılacaktır.

### 3. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde, daha sonraki kısımlarda kullanılacak olan sürece yönelik bilgilerle temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

#### Tanım 3.1.

$X \neq \emptyset$  bir küme ve  $F$  (reel/kompleks) sayıların bir cismi olsun.

$$\begin{array}{ll} +: X \times X \rightarrow X & \cdot: F \times X \rightarrow X \\ (x, y) \rightarrow x + y & (\lambda, x) \rightarrow \lambda x \end{array}$$

fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlıyorsa,  $X$  kümesine  $F$  cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) denir.  $\forall x, y, z \in X$  ve  $\lambda, \mu \in F$  için;

$$L1. x + y = y + x$$

$$L2. x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$L3. x + \theta = x \text{ olacak şekilde bir } \theta \in X \text{ vardır.}$$

$$L4. Her bir  $x \in X$  için  $x + (-x) = \theta$  olacak şekilde  $(-x) \in X$  vardır.$$

$$L5. Her  $x \in X$  için  $1 \cdot x = x$$$

$$L6. \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

$$L7. (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

$$L8. \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$$

#### Tanım 3.2.

$X \neq \emptyset$  bir küme ve  $d: X \times X \rightarrow R$ ,  $(x, y) \rightarrow d(x, y)$  biçiminde fonksiyonu verilsin. Her  $x, y, z \in X$  için,

$$M1. d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$M2. d(x, y) = d(y, x)$$

$$M3. d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (üçgen eşitsizliği)}$$

özelliklerini sağlıyorsa  $d$  ye  $X$  üzerinde bir metrik (uzaklık fonksiyonu) denir.  $(X, d)$  ikilisine metrik uzay denir.

### Tanım 3.3.

Bir  $(X, d)$  metrik uzayı üzerinde  $(x_n)$  dizisi verilsin.  $\forall \varepsilon > 0$  için  $m, n > n_0$  iken  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$  olacak şekilde  $n_0 \in \mathbb{N}$  varsa yani  $m, n \rightarrow \infty$  iken  $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$  oluyorsa  $(x_n)$  dizisine bir Cauchy dizisi denir.

### Tanım 3.4.

Bir  $(X, d)$  metrik uzayındaki her Cauchy dizisi  $X$  içinde bir limite sahipse, bu  $(X, d)$  metrik uzayına tam metrik uzay denir.

### Tanım 3.5.

$U, F$  cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|\cdot\|: U \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \rightarrow \|x\|$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm ve  $(U, \|\cdot\|)$  ikilisine de normlu uzay denir.  $\forall x, y \in U$  için;

$$N1. \|x\| \geq 0$$

$$N2. \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$N3. \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \text{ (}\alpha \text{ skaler)}$$

$$N4. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

### Tanım 3.6 (Banach uzayı)

$X$  bir normlu uzay ve elemanları  $X$ 'den alınan bir  $\{x_n\}$  dizisi verilsin. Eğer  $m, n \rightarrow \infty$  iken  $\|x_m - x_n\| \rightarrow 0$  olması durumunda  $n \rightarrow \infty$  iken  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$  olacak şekilde bir  $x \in X$  varsa  $X$  uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı denir.

### Tanım 3.7.

Elemanları  $x$  ile gösterilen genel  $X$  noktalar kümesi verilsin.  $X$ 'de bir  $A$  fuzzy kümesi;  $X$ 'deki her bir noktayı,  $[0,1]$  aralığının bir noktasına karşılık getiren  $u$  üyelik fonksiyonu ile karakterize eder. Yani,  $u: X \rightarrow [0,1]$  fonksiyonu için burada  $u(x)$  değeri  $A$  da  $x$  in üyelik derecesini,  $u(x)$  in 1 e en yakın değeri de  $A$  da  $x$  in en yüksek üyelik derecesini göstermektedir.

$A$  adi anlamda bir küme olduğu zaman üyelik fonksiyonu sadece 0 ve 1 değerlerini alır.  $u(x) = 1$ ,  $x$  in  $A$  ya ait olması ve  $u(x) = 0$  ise  $x$  in  $A$  ya ait olmaması anlamındadır.

Bu durumda  $u$  bir  $A$  kümesinin bilinen karakteristik fonksiyonudur.  $X$  boş olmayan noktaların kümesi olmak üzere  $A$ ,  $X$ 'in bir alt kümesi iken  $X$ 'den  $[0,1]$  kapalı aralığına tanımlı olan  $u$  fonksiyonu ile belirtilen kümeye  $X$  içinde tanımlı fuzzy kümesi denir.

Böyle kümelerle fuzzy kümeler arasında ayırım yapma ihtiyaç doğarsa üyelik fonksiyonu iki değerli karakteristik fonksiyon olanlar adi kümeler veya basit kümeler olarak değerlendirilebilir (Zadeh, 1965).

### Örnek 3.1.

$A$ , 1 den çok büyük olan reel sayıların bir fuzzy kümesi olsun. Bu durumda, her ne kadar göreceli olsa da  $A$  nın karakterizasyonu  $R$  de  $u$  ile verilebilir. Böyle bir

fonksiyonun gösterdiği değerler  $u(0) = 0$ ;  $u(1) = 0,05$ ;  $u(10) = 0,2$ ;  $u(100) = 0,95$ ;  $u(500) = 1$  olabilir.

### Örnek 3.2.

$$u(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 1 \text{ ise} \\ \frac{1}{99}(x - 1) & , 1 < x \leq 100 \text{ ise} \\ 1 & , x > 100 \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlı  $u: R \rightarrow [0,1]$  üyelik fonksiyonu,  $x \gg 1$  olan reel sayıların fuzzy kümesini gösterir.

### Tanım 3.8.

$R$  reel sayılar kümesi ,  $N$  pozitif tamsayılar kümesi ve  $F(R)$  de  $R$  üzerindeki bütün fuzzy kümelerinin kümesini olsun.  $u \in F(R)$  için  $u$ 'nun  $\lambda$ -seviye kümesi,

$$[u]_{\lambda} = \begin{cases} \{x \in R : u(x) \geq \lambda\} & , 0 < \lambda \leq 1 \\ \{x \in R : u(x) > 0\} & , \lambda = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır (Fang, 2002).

### Tanım 3.9.

Aşağıdaki şartları sağlayan  $R$  üzerindeki bir  $u: R \rightarrow [0,1]$  fuzzy kümesine  $\bar{u}$  biçiminde fuzzy sayısı denir.

(i)  $u$ , normaldir. Yani en az bir  $x_0 \in R$  için  $u(x_0) = 1$  dir.

(ii)  $u$ , konvektir. Yani  $\forall x, y \in R$  ve  $\forall \lambda \in [0,1]$  için,

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$$

(iii)  $u$ , üstten yarı süreklidir. Yani  $\forall \alpha \in R$  için,

$u^{-1}(-\infty, \alpha) = \{x \in \mathbb{R} : u(x) < \alpha\}$  kümesi,  $R$ 'deki alışılmış topolojiye göre açıktır.

(iv)  $[u]_0 = \overline{\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}}$  kompakt bir kümedir.

### Örnek 3.3.

Herhangi bir  $r$  reel sayısı,

$$\bar{u}_r(t) = \begin{cases} 1 & , t = r \\ 0 & , t \neq r \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bir  $\bar{u}_r$  veya  $\bar{r}$  fuzzy sayısı gibi düşünülebilir.  $R$  üzerindeki bütün fuzzy sayılarının kümesini  $F(\bar{u})$  ile gösterilir ve fuzzy sayı uzayı olarak isimlendirilir (Fang, 2002).

### Örnek 3.4.

$\bar{3}: R \rightarrow [0,1]$  üzerinde herhangi bir reel sayısı;

$$\bar{3}(t) = \begin{cases} 1, t = 3 \text{ ise} \\ 0, t \neq 3 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bir  $\bar{r}$  fuzzy sayısı gibi düşünülebilir.

\*  $\bar{3}$  normaldir.  $\bar{3}(3) = 1$  olacak şekilde  $3 \in R$  var.

\*  $\bar{3}$  konvektir.  $\forall x, y \in R$  ve  $\lambda \in [0,1]$  için;

$$\bar{3}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{\bar{3}(x), \bar{3}(y)\}$$

olduğu açıktır.

\* $\bar{3}$  üstten yarı süreklidir.  $\forall \alpha \in R$  için  $\bar{3}(-\infty, \alpha) = \{x \in R: \bar{3}(x) < \alpha\}$

$$*[\bar{3}]_0 = \overline{\{x \in R; \bar{3}(x) = 0\}} = \{\bar{3}\} = 3$$

### Tanım 3.10.

$U$ , bir  $R$  cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. ( $F = R$  ve  $C$ ), ( $R$ : Reel sayılar cismi,  $C$ : Kompleks sayılar cismi)  $N$  de,  $U \times R$  nin bir fuzzy altkümesi olsun.

Bu durumda  $\forall x, u \in U$  ve  $\forall c \in F$  için aşağıdaki şartlar sağlandığında  $N$  ye,  $U$  üzerinde bir fuzzy norm denir.

- (i)  $\forall t \in R, t \leq 0, N(x, t) = 0$
- (ii)  $\forall t \in R, t > 0, N(x, t) = 1 \Leftrightarrow x = 0$
- (iii)  $\forall t \in R, t > 0, c \neq 0$  ise  $N(cx, t) = N\left(x, \frac{t}{|c|}\right)$ ,  $c = 0$  ise  $N(cx, t) = 1$
- (iv)  $\forall t, s \in R, N(x + u, t + s) \geq \min\{N(x, t), N(u, s)\}$
- (v)  $N(x, \cdot)$  soldan sürekli ve  $R$  nin  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = 1$  şartını sağlayan bir azalmayan fonksiyondur.

$(U, N)$  ikilisi, fuzzy normlu lineer uzay olarak alınacaktır (Cheng ve Mordeson, 1994).

### Tanım 3.11.

$U, F$  üzerinde bir lineer uzay olsun. ( $F$ , reel/kompleks sayılar cismi)  $U \times R$  nin bir  $N$  fuzzy alt kümesinin,  $U$  üzerinde bir fuzzy norm olarak adlandırılabilmesi için gerek ve yeter şart  $\forall x, u \in U$  ve  $\forall c \in F$  için aşağıdaki şartların sağlanmasıdır.

$$(N1) \quad \forall t \in R, t \leq 0, N(x, t) = 0$$

$$(N2) \quad \forall t \in R, t > 0, N(x, t) = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(N3) \quad \forall t \in R, t > 0, c \neq 0 \text{ ise } N(cx, t) = N\left(x, \frac{t}{|c|}\right)$$

$$(N4) \quad \forall s, t \in R, x, u \in U, N(x + u, s + t) \geq \min\{N(x, s), N(u, t)\}$$

$$(N5) \quad N(x, \cdot) R \text{ nin azalmayan bir fonksiyonu ve } \lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = 1 \text{ dir.}$$

$(U, N)$  ikilisi, fuzzy normlu lineer uzay olarak alınacaktır (Bag ve Samanta, 2005).

### **Teorem 3.1 (Cauchy yakınsaklık testi)**

Sonsuz serilerin yakınsaklığını bulmak için kullanılan test yöntemlerinden biridir.

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

serisi ancak ve ancak şu koşulda yakınsaktır.

Her  $\varepsilon > 0$  için bir  $N \in N$  sayısı vardır öyle ki;

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

ifadesi  $n > N$  olan tüm  $n$  ler ve  $p \geq 1$  için sağlanır. Bu testin işleyişinde bir problem yoktur çünkü seriler ancak ve ancak

$$s_n = \sum_{i=0}^n a_i$$

kısmi toplamları bir Cauchy dizisiyse yakınsaktır.

Seride Cauchy dizisinin tanımı ise şudur:

Her  $\varepsilon > 0$  için bir  $N$  sayısı vardır öyle ki her  $n, m > N$  için;

$$|s_m - s_n| < \varepsilon$$

sağlanır.

$m > n$  iken  $p = m - n$  olmak üzere seri ancak ve ancak

$$|s_{n+p} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

ise yakınsaktır.

### Tanım 3.12 (Yarı grup)

$G$  boştan farklı bir küme olmak üzere  $G$  üzerinde bir  $m: G \times G \rightarrow G$ ,  $(a, b) \rightarrow ab$  işlemi verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa  $G$  ye  $m$  işlemine göre bir yarı grup denir:

- (i) Her  $a, b \in G$  için  $ab \in G$
- (ii) Her  $a, b, c \in G$  için  $a(bc) = (ab)c$

### Tanım 3.13.

(i)  $G$  boş olmayan bir küme ve  $*$ ,  $G$  üzerinde bir ikili işlem olsun.  $(G, *)$  cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir grup denir.

G1:  $*$ ,  $G$  'de bir ikili işlemdir.

G2:  $*$  işleminin  $G$  'de birleşme özelliği vardır. Yani  $\forall a, b \in G$  için

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

yazılabilir.

G3:  $*$  işleminin  $G$  'de bir birim elemanı vardır. Yani  $\forall a \in G$  için

$$a * e = e * a$$

olacak şekilde  $\exists e \in G$  vardır.

G4:  $*$  işlemine göre  $G$  'deki her elemanın bir tersi vardır. Yani  $\forall a \in G$  için

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a$$

olacak şekilde  $\exists a^{-1} \in G$  bulunabilir.

(ii)  $G$  ve  $H$  birer grup ve  $*$  ile  $\Delta$  birer işlem olmak üzere  $g_1, g_2 \in G$  elemanları

$$f(g_1 * g_2) = f(g_1) \Delta f(g_2)$$

eşitliğini sağlıyorsa  $f: G \rightarrow H$  fonksiyonuna  $G$  den  $H$  a bir homomorfizm denir.

(iii) Boştan farklı bir  $G$  grubu üzerinde tanımlı bir herhangi  $d$  metriği verilsin.  $(G, d)$  metrik uzayına bir metrik grup denir.

**Tanım 3.14.**

$R$  reel sayılar kümesinin her bir  $A$  alt kümesi için  $A \subset \cup_n I_n$  olacak biçimde açık aralıkların  $A$  yı örten sayılabilir bir  $\{I_n\}$  sınıfını ve bu şekildeki her sınıf için sınıftaki aralıkların uzunlukları toplamını göz önüne alalım. Uzunluklar pozitif reel sayılar olduklarından dolayı bu toplam terimlerin sırasından bağımsız olarak tek türlü olarak tanımlıdır. Bu şekildeki bütün toplamların infimumuna  $A$  nın  $m^*(A)$  dış ölçüsü yada Lebesque dış ölçüsü denir.  $\ell(I_n)$ ,  $I_n$  aralığının boyunu göstermek üzere

$$m^*(A) = \inf \sum_{A \subset \cup_n I_n} \ell(I_n)$$

şeklinde ifade edilir. Eğer her bir  $A$  kümesi için

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

oluyorsa  $E$  kümesine ölçülebilir yada Lebesque ölçülebilir denir.

Açık aralıkların sayılabilir sayıda birleşim, kesişim ve fark işlemlerinin uygulanması ile elde edilen kümeye Borel kümesi denir ve her Borel kümesi ölçülebilirdir.

**Tanım 3.15.**

(i) Bir topolojik  $F$  cismi (çoğunlukla standart topolojileriyle reel yada kompleks sayılar cismi) üzerinde, bir  $X \times X \rightarrow X$  vektörel toplam ve bir  $F \times X \rightarrow X$  skaler çarpım sürekli fonksiyonları üzerinde bulunan topolojiyle kurulu bir  $X$  vektör uzayına bir topolojik vektör uzayı denir.

(iii) Bir  $(X, \tau)$  topolojik uzayı verilsin. Alışılmış topoloji ile kurulu  $X$  den birim aralığa soldan yarısürekli fonksiyonlardan oluşan  $X$  deki tüm fuzzy kümelerinin  $\omega(\tau)$  sınıfına bir fuzzy topoloji ve  $X$  e de bir fuzzy topolojik uzay denir. Alışılmış topolojisi ile genelleştirilmiş fuzzy topolojiye alışılmış fuzzy topoloji denir. Herhangi bir  $X$  vektör uzayı üzerinde alışılmış fuzzy topolojiye sahip bir  $F$  cismi üzerine kurulu ve uygun  $X \times X$  ile  $F \times X$  fuzzy çarpım topolojileri altında  $+: X \times X \rightarrow X, (x, y) \rightarrow x + y$ ,  $\cdot: F \times X \rightarrow X, (f, x) \rightarrow fx$  sürekli fonksiyonları ile beraber oluşturulmuş bir fuzzy topolojiye  $X$  üzerinde bir fuzzy vektörel topoloji ve bir fuzzy vektörel topolojik bir vektör uzayına da bir fuzzy (topolojik) vektör uzayı denir.

**Tanım 3.16 (Dizisel süreklilik)**

$(X, \tau)$  ,  $(Y, \tau^*)$  iki topolojik uzay ,  $f: X \rightarrow Y$  bir fonksiyon ve  $x_0 \in X$  olsun. Eğer  $X$  de  $x_n \rightarrow x_0$  koşulunu sağlayan her  $(x_n)$  dizisi için  $Y$  de  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  koşulu sağlanıyorsa  $f$  fonksiyonuna  $x_0$  noktasında dizisel süreklidir denir.

**Tanım 3.17 (Fonksiyon dizilerinin noktasal yakınsaklığı)**

Aynı tanım kümesini paylaşan fonksiyonların bir  $(f_n)$  dizisi verilsin. Tanım kümesinin her  $x$  elemanı için  $x$  e bağlı olarak  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  oluyorsa  $(f_n)$  ,  $f$  ye noktasal yakınsaktır denir.

**Tanım 3.18 (Fonksiyon dizilerinin düzgün yakınsaklığı)**

Aynı tanım kümesini paylaşan fonksiyonların bir  $(f_n)$  dizisi verilsin. Tanım kümesinin her  $x$  elemanı için  $x$  den bağımsız olarak  $f_n \rightarrow f$  oluyorsa  $(f_n)$  ,  $f$  ye düzgün yakınsaktır denir.

**Teorem 3.2 (Fonksiyon dizilerinin Cauchy yakınsaklık şartı)**

$A \subseteq R$  ve her  $n \in N$  için  $f_n : A \rightarrow R$  bir fonksiyon olmak üzere  $f_n$  dizisi verilsin. Bu durumda  $(f_n)$  dizisinin düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart her  $\varepsilon > 0$  için bir  $N \in N$  sayısının  $n, m \geq N$  özelliğindeki her  $n, m \in N$  ve her  $x \in A$  elemanı için burada  $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$  olacak şekilde var olmasıdır.

**Teorem 3.3 (Düzgün yakınsaklığın sürekliliği koruduğu teoremi)**

Reel sayılar kümesinin bir  $E$  alt kümesi üzerinde sürekli bir  $f$  fonksiyonuna düzgün yakınsak olan reel değerli fonksiyonların herhangi bir dizisi  $(f_n)$  olsun. Bu takdirde her  $x \in E$  ve  $E$  de  $x$  e yakınsayan her  $(x_n)$  dizisi için  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x)$  dir.

#### 4. TOPLAMSAL FONKSİYONEL DENKLEMLERİN KARARLILIĞI

Bu bölümde toplamsal fonksiyonel denklemlerin kararlılığı incelenecektir.

En meşhur bilinen fonksiyonel denklem, herhangi bir çözümü toplamsal olarak adlandırılan;

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (4.1)$$

şeklindeki Cauchy denklemdir. Reel ekseninde tanımlanan reel değerli fonksiyonlar için, (4.1) in her Lebesgue ölçülebilir çözümünün bazı  $c$  sabitleri için  $f(x) = cx$  formunda olduğu bilinmektedir. Ölçülemeyen çözümlerde vardır, fakat bunlar değişkendir. Yani her yerde süreksiz ve her aralıkta sınırsızdırlar. Bununla ilgili bir tartışma Aczel ve Dhombres'de (1989) bulunabilir.

Yukarıdaki eşitliğin ardışık yaklaşımı şeklinde bir eşitsizlikle fonksiyonel denklemi değiştirdiğimizde bir fonksiyonel denklem için kararlılık kavramı ortaya çıkar.

Kararlılık sorusu şudur:

Eşitsizliğin çözümünün, verilen fonksiyonel denklem çözümünden ne farkı vardır?

Bir reel normlu  $E_1$  vektör uzayında tanımlı fonksiyonlar ile bir  $E_2$  reel Banach uzayındaki değerleri ele alalım. Pozitif bir  $\varepsilon$  sayısı verilsin. Eğer bir  $f: E_1 \rightarrow E_2$  fonksiyonu

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon \quad (4.2)$$

eşitsizliğini,  $E_1$  deki her  $x$  ve  $y$  için sağlarsa bu fonksiyona  $\varepsilon$ -toplamsal denir.

Burada verilen  $\varepsilon$ -toplamsal  $f$  fonksiyonuna yakın bir  $g$  toplamsal fonksiyonunu arayalım. Bunun için (4.2) de  $y = x$  yazarak başlayalım. Sonrada her iki tarafı 2 ye bölersek

$$\left\| \frac{f(2x)}{2} - f(x) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.3)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.3) te  $x$  yerine  $2x$  yazıp, sonrada 2 ye bölünürse;

$$\left\| \frac{f(2^2x)}{2^2} - \frac{f(2x)}{2} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2^2} \quad (4.4)$$

olur. Üçgen eşitsizliği, (4.3) ve (4.4) den;

$$\left\| \frac{f(2^2x)}{2^2} - f(x) \right\| \leq \varepsilon \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \right) = \varepsilon(1 - 2^{-2})$$

elde elde edilir. Bunu ilerleterek, tümevarımla

$$\|2^{-n}f(2^n x) - f(x)\| \leq \varepsilon(1 - 2^{-n}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

olduğu ispatlanır.

$g_n(x) = 2^{-n}f(2^n x)$  fonksiyonlarının yakınsak dizi formunda olduğunu göstermek için, Cauchy yakınsaklık testini kullanalım. Gerçekten  $m$  keyfi bir pozitif tamsayı olmak üzere (4.5) te  $x$  yerine  $2^m x$  yazıp, sonucu  $2^m$  ye bölersek, bütün pozitif tamsayılar için

$$\|2^{-(m+n)}f(2^{m+n}x) - 2^{-m}f(2^m x)\| \leq 2^{-m} \varepsilon$$

eşitsizliği bulunur.

Böylece, Cauchy testinden  $E_1$  de ki her  $x$  için  $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$  limiti mevcuttur. (4.5) te  $n \rightarrow \infty$  için limit alırsak  $E_1$  de ki her  $x$  için  $\|g(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$  olduğu görülür.  $g$  nin (4.1) i sağladığını göstermek için (4.2) de  $x$  yerine  $2^n x$  ve  $y$  yerine  $2^n y$  yazıp  $2^n$  e bölersek

$$\|2^{-n}f(2^n(x+y)) - 2^{-n}f(2^n x) - 2^{-n}f(2^n y)\| \leq 2^{-n} \varepsilon$$

ü elde edilir.  $n \rightarrow \infty$  için limit alırsak  $g$  nin toplamsal olduğu görülür.

$c$  herhangi bir sabit ( $E_2$  de) ,  $\|c\| \leq \varepsilon$  ve  $g(x) = 0$  olmak üzere  $f(x) = c$  örneğinden

$$\|g(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğinin kesinliği görülür. Dahası  $E_1$  de ki her  $x$  için  $g$  fonksiyonu

$$\|g(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan tek toplamsal fonksiyondur. Gerçekten bu şekilde başka bir  $h: E_1 \rightarrow E_2$  fonksiyonu olduğunu farz edelim. Bu durumda  $E_1$  de ki bazı  $y$  ler için  $h(y) \neq g(y)$  dir. Her  $x$  için  $\|f(x) - h(x)\| \leq \varepsilon$  olduğundan  $E_1$  de ki her  $x$  için;

$$\|g(x) - f(x) + f(x) - h(x)\| \leq 2\varepsilon$$

dur.  $k\|g(y) - h(y)\| > 2\varepsilon$  i sağlayan pozitif bir  $k$  tamsayısı seçelim. O zaman hem  $g$  hem de  $h$  toplamsal olduğundan

$$\|g(ky) - h(ky)\| = k\|g(y) - h(y)\| > 2\varepsilon$$

çelişkisine düşülür. Dolayısıyla  $E_1$  de ki her  $x$  için  $h(x) = g(x)$  dir.

Hem  $f$  hem de  $g$  nin her yerde sürekli olması gerekir. Özel olarak  $f$  nin bir tek  $y$  noktasında sürekli olduğunu varsayalım. O zaman  $g$  nin her yerde sürekli olduğu ispat edilmelidir. Aksini farz edelim. O zaman  $g$  orijinde sürekli olmasın,  $n = 1,2,3, \dots$  için  $g(x_n) > \frac{1}{a}$  olacak şekilde  $E_1$  de sifıra yakınsayan  $x_n$  noktalarının bir dizisi ve  $a > 0$  tamsayısı var olur.  $m$ ,  $3a\varepsilon$  dan büyük bir tamsayı olsun. Bu durumda  $f$  nin sürekliliğinden dolayı  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(mx_n + y) = f(y)$  olduğundan yeterince büyük bir  $n$  için;

$$\begin{aligned} \|g(mx_n + y) - g(y)\| &\leq \|g(mx_n + y) - f(mx_n + y)\| \\ &+ \|f(mx_n + y) - f(y)\| + \|f(y) - g(y)\| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

dur. Diğer yandan

$$\|g(mx_n + y) - g(y)\| = \|g(mx_n)\| = m\|g(x_n)\| > 3\varepsilon$$

şeklinde bir çelişkiye düşülür. Böylece  $g$  her yerde süreklidir.

Son olarak  $R$  den  $E_2$  ye verilen  $t \rightarrow f(tx)$  dönüşümünün  $E_1$  deki her  $x$  sabiti için,  $t$  de sürekli olduğunu farz edelim. Bu durumda  $x$  sabitiyle birlikte  $g(tx): R \rightarrow E_2$  nin toplamsal olduğunu ve  $t$  de sürekli olduğunu söyleyebilmek için önceki sonuç uygulanır. Böylece her  $t$  reel için  $g(tx) = tg(x)$  dir ve  $g$  lineerdir. Dolayısıyla aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

#### **Teorem 4.1.**

$E_1$  bir normlu vektör uzayı;  $E_2$  bir Banach uzayı ve  $\varepsilon > 0$  bir sabit olmak üzere  $E_1$  deki her  $x$  ve  $y$  için  $f: E_1 \rightarrow E_2$  dönüşümü

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon \tag{4.6}$$

eşitsizliğini sağlasın. O zaman

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} f(2^n x) \tag{4.7}$$

limiti  $E_1$  deki her  $x$  için mevcuttur ve  $g$  fonksiyonu  $E_1$  deki bütün  $x$  ler için

$$\|f(x) - g(x)\| \leq \varepsilon \tag{4.8}$$

eşitsizliğini sağlayan tek toplamsal dönüşümdür (Hyers, 1941).

Ayrıca eğer her  $x$  için  $R$  den  $E_2$  ye verilen  $t \rightarrow f(tx)$  fonksiyonu sürekli ise, o zaman  $g$  lineerdir. Eğer  $f$ ,  $E_1$  in bir tek noktasında sürekli ise, o zaman  $g$ ,  $E_1$  de her yerde süreklidir. Dahası (4.8) kesindir.

Forti'nin (1987) de belirttiği gibi (4.7) ve (4.8) in ispatları, keyfi bir yarı gruptan bir Banach uzayına tanımlanan dönüşümler için benzer sonuçları ispatlamada kullanılabilir. Aşağıdaki sonuç temel olarak Forti'nin (1987) 1. önermesidir.

#### Sonuç 4.1.

$S$  keyfi bir yarı grup ve  $E$  de bir Banach uzayı olsun.  $F: S \rightarrow E$  dönüşümü  $S$  nin her  $x$  ve  $y$  elemanı için

$$\|f(xy) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda,  $S$  nin her  $x$  elemanı için

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} f(x^{2^n})$$

limiti mevcuttur ve (4.8) sağlanır. Ayrıca  $S$  de ki bütün  $x$  ler için

$$g(x^2) = 2g(x)$$

dir ve  $g$  hem bu özelliği hem de (4.8) i sağlayan tek fonksiyondur. Sonuç olarak yarı-grup değişmeli ise, o zaman

$$g(xy) = g(x) + g(y)$$

dir.

**İspat:** Yukarıda Teorem 4.1 in ispatında (4.7) ve (4.8) i göstermek için  $E_1$  de toplamanın değişme özelliği kullanılmamıştır. O yüzden benzer formüller burada da doğrudur.  $S$  de her  $x$  için

$$g(x^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} f(x^{2^{n+1}}) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-(n+1)} f(x^{2^{n+1}}) = 2g(x)$$

dir. Tek olduğunu ispatlamak için  $h: S \rightarrow E$  nin (4.8) i sağladığını ve  $S$  de ki bütün  $x$  ler için için  $h(x^2) = 2h(x)$  olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\|f(x^{2^n}) - h(x^{2^n})\| = \|f(x^{2^n}) - 2^n h(x)\| \leq \varepsilon$$

dir.  $2^n$  e bölüp  $n \rightarrow \infty$  alınırsa  $h(x) = g(x)$  e ulaşılır.

#### 4.1. Yaklaşık Toplamsal ve Yaklaşık Lineer Dönüşümler

Bundan önce kararlılık kavramından bahsedilmiş ve Cauchy fonksiyonel eşitliğine bir örnek verilmiştir. Metrik gruplar arasındaki homomorfizmlerin kararlılığının bir tanımı 1940 da Ulam ın oluşturduğu bir problem yardımıyla verildi. Bir  $(G_1, \cdot)$  grubu,  $d$  metriği ile bir  $(G_2, *)$  metrik grubu ve bir  $\eta$  pozitif sayısı verildiğinde eğer  $f: G_1 \rightarrow G_2$  ve  $G_1$  de ki bütün  $x$  ve  $y$  ler için

$$d(f(x \cdot y), f(x) * f(y)) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir  $\varepsilon = \varepsilon(\eta)$  pozitif sayısının var olduğunu kabul edelim.

Bu durumda

$$d(f(x), h(x)) < \eta$$

ile birlikte  $G_1$  deki bütün  $x$  ler için bir  $h: G_1 \rightarrow G_2$  homomorfizmi vardır. Bu durumda  $h(x \cdot y) = h(x) * h(y)$  homomorfizm eşitliğine kararlı denir. Teorem 4.1 de  $G_1 = E_1$  ,  $G_2 = E_2$  her bir durumdaki işlemin yerine toplama alındığında  $\eta = \varepsilon$  ile birlikte bu tanıma göre Cauchy'nin eşitliği kararlıdır. Litaratürde bulunan bazı kararlılık teoremlerinde bazı  $k$  sabitleri için,  $\eta$  ile  $\varepsilon$  arasındaki bağıntı  $\eta = k\varepsilon$  formundadır. Fonksiyonel eşitliklerinin kararlılığının birkaç tanımı, değişik yazarlar tarafından kullanıldı veya uygulandı. Bu kısım ile ilgili bir tartışma için Moszner (1985), Hyers ve Rassias'a (1992) bakılabilir.

Rassias (1978), Teorem 4.1 i genelleştirerek, Cauchy farkının aşağıdaki gibi sınırsızlaştırılmasına olanak tanımaktadır.

**Teorem 4.1.1.**

$\varepsilon$  ve  $p$  sabit,  $\varepsilon > 0$  ve  $p < 1$  olmak üzere  $f: E_1 \rightarrow E_2$  dönüşümü, bir  $E_1$  normlu vektör uzayından,  $E_2$  Banach uzayına tanımlı olsun ve

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon(\|x\|^p + \|y\|^p) \quad (4.9)$$

eşitsizliğini  $E_1$  in her  $x$  ve  $y$  elemanı için sağlasın. O zaman

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} f(2^n x)$$

limiti  $E_1$  de ki bütün  $x$  ler için mevcuttur ve  $k = \frac{2}{2-2^p}$  olmak üzere,  $E_1$  de ki bütün  $x$  ler için

$$\|f(x) - g(x)\| \leq k\varepsilon\|x\|^p \quad (4.10)$$

eşitsizliğini sağlayan tek toplamsal dönüşüm  $g$  dir. Eğer  $p < 0$  ise o zaman  $x, y \neq 0$  için (4.9) eşitsizliği sağlanır ve  $x \neq 0$  için (4.10) sağlanır (Rassias, 1978).

Rassias (1990), 27. Uluslararası Fonksiyonel Eşitlikler Sempozyumunda böyle bir teoremin  $p \geq 1$  için ispatlanıp ispatlanamayacağı sorusunu sordu. Gajda (1991), Rassias'ın (1978) yaklaşımına benzer bir yaklaşım takip ederek,  $p > 1$  için aşağıdaki teoremi ispatladı.

**Teorem 4.1.2.**

$\varepsilon > 0$  ve  $p > 1$  olmak üzere, bir  $E_1$  normlu vektör uzayından bir  $E_2$  Banach uzayına tanımlı ve her  $x, y \in E_1$  için (4.9) eşitsizliğini sağlayan bir  $f$  dönüşümü verilsin. O zaman  $E_1$  de ki bütün  $x$  ler için

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n f(2^{-n} x)$$

limiti mevcuttur ve  $k = \frac{2}{2^p-2}$  olmak şartıyla (4.10) ifadesini sağlayan tek toplamsal dönüşüm  $g$  dir.

**İspat:** (4.9) eşitsizliğinde hem  $x$  hem de  $y$  yerine  $\frac{x}{2}$  yazalım. Böylece

$$\|f(x) - 2f(2^{-1}x)\| \leq 2^{-(p-1)}\varepsilon\|x\|^p \quad (4.10)^a$$

olur. Tümevarımdan,

$$\|f(x) - 2^n f(2^{-n}x)\| \leq \varepsilon \|x\|^p \sum_{j=1}^n 2^{-j(p-1)} \quad (4.10)^b$$

elde edilir. (4.10)<sup>b</sup> de  $x$  yerine  $2^{-1}x$  yazıp, sonucu 2 ile çarparsak

$$\|2f(2^{-1}x) - 2^{n+1}f(2^{-(n+1)}x)\| \leq \varepsilon \|x\|^p \sum_{j=2}^{n+1} 2^{-j(p-1)} \quad (4.10)^c$$

elde edilir.

$n$  yerine  $n + 1$  yazıp (4.10)<sup>b</sup> iddiasının doğruluğunu göstermek için üçgen eşitsizliğini kullanarak (4.10)<sup>a</sup> ve (4.10)<sup>c</sup> yi birleştirelim. (4.10)<sup>a</sup> dan dolayı  $n = 1$  için (4.10)<sup>b</sup> doğrudur, dolayısıyla bütün  $n$  pozitif tamsayıları için  $E_1$  de ki bütün  $x$  ler için de doğrudur.  $p > 1$  olduğundan (4.10)<sup>b</sup> nin sağ tarafındaki seriler  $k = \frac{2}{2^{p-2}}$  ye yakınsar, o yüzden  $E_1$  de ki bütün  $x$  ler için

$$\|f(x) - 2^n f(2^{-n}x)\| \leq k\varepsilon \|x\|^p \quad (4.10)^d$$

dir.  $x$  yerine  $2^{-m}x$  yazıp (4.10)<sup>d</sup> nin her iki tarafını  $2^m$  ile çarptığımızda bütün pozitif  $m$  ve  $n$  tamsayıları için ve  $E_1$  de ki bütün  $x$  ler için

$$\|2^m f(2^{-m}x) - 2^{m+n} f(2^{-(m+n)}x)\| \leq 2^{-m(p-1)} k\varepsilon \|x\|^p$$

olduğu görülür.  $E_2$  bir Banach uzayı olduğundan

$$g_n(x) = 2^n f(2^{-n}x)$$

fonksiyonları  $E_1$  de ki bütün  $x$  ler için, bazı  $g(x)$  fonksiyonlarına yakınsar. (4.10)<sup>d</sup> deki limitte  $n \rightarrow \infty$  alırsak  $k = \frac{2}{2^{p-2}}$  olmak üzere (4.10) elde edilir.  $g$  nin toplamsallığını göstermek kolaydır.  $g$  nin tek olduğunu göstermek için aksini farz edelim. Yani (4.10) u sağlayan başka bir  $h: E_1 \rightarrow E_2$  toplamsal fonksiyon olduğunu ve  $y$  nin

$$a = \|g(y) - h(y)\| > 0$$

olacak şekilde  $E_1$  de bir nokta olduğunu varsayalım.  $y \neq 0$  olduğu açıktır. Hem  $g$  hem de  $h$  (4.10) yi sağladığından  $p > 1$  olmak üzere

$$a = \|g(y) - h(y)\| \leq 2 k\varepsilon \|y\|^p$$

dir.  $g$  ve  $h$  toplamsal olduklarından herhangi bir pozitif  $m$  tamsayısı için

$$g\left(\frac{y}{m}\right) = \frac{1}{m} g(y)$$

ve

$$h\left(\frac{y}{m}\right) = \frac{1}{m}h(y)$$

dir ve bütün pozitif  $m$  tamsayısı için

$$\frac{a}{m} = \left\| g\left(\frac{y}{m}\right) - h\left(\frac{y}{m}\right) \right\| \leq 2k\varepsilon \left\| \frac{y}{m} \right\|^p = \frac{2k\varepsilon\|y\|^p}{m^p},$$

$$\text{yani } a \leq \frac{2k\varepsilon\|y\|^p}{m^{p-1}}$$

sonucuna varılır. Böylece  $a = 0$  ve teklik ispatlanmış olur.

### Sonuç 4.1.1.

Eğer  $p \neq 1$  ve  $f, E_1$  in bir tek  $y \neq 0$  noktasında sürekli ise o zaman  $g$  her yerde süreklidir. Aynı zamanda  $p \neq 1$  ise ve  $t \rightarrow f(tx)$  dönüşümü, bütün reel  $t$  ler için ve  $E_1$  de ki  $x$  sabiti için sürekli ise o zaman  $g$  lineerdir.

Sonucun ispatı yukarıdaki Teorem 4.1 in ispatından kolayca görülebilir.

## 4.2. İkinci dereceden Fonksiyonel Denklemlerin Kararlılığı

İkinci dereceden;

$$f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) - 2f(y) = 0 \quad (4.11)$$

fonksiyonel denklemi  $f$  reel değişkenli bir fonksiyon olduğunda  $c$  keyfi bir sabit olmak üzere  $f(x) = cx^2$  gibi bir çözüme sahiptir. (4.11)'in herhangi bir çözümü ikinci dereceden bir fonksiyon tanımlar.

Bu kısımda  $E_1$  ve  $E_2$  vektör uzayları olmak üzere  $f: E_1 \rightarrow E_2$  fonksiyonu ile ilgilenilecektir.

Bir ikinci dereceden fonksiyon ile bir fonksiyonun kutupsalı olarak adlandırılan bir iki-toplamsal fonksiyon arasındaki ilişkileri içeren birkaç faktörde değinilecektir.  $E_2 = R$  durumu Aczel ve Dhombres'de (1989) açıklanmıştır. Benzer ispat  $f: E_1 \rightarrow E_2$  fonksiyonu içinde geçerlidir. Dolayısıyla  $f: E_1 \rightarrow E_2$  fonksiyonu ikinci derecedendir, ancak ve ancak  $f(x) = B(x, x)$  olacak şekilde sabit  $y$  ler için  $x$  e göre toplamsal olan bir tek  $B: E_1 \times E_1 \rightarrow E_2$  simetrik fonksiyonu vardır.

$B$  iki-toplamsal fonksiyonu yani  $f$  nin kutupsalı

$$B(x, y) = \left(\frac{1}{4}\right) (f(x + y) - f(x - y))$$

olarak verilir.

$X$  normlu uzay ve  $E$  Banach uzayı olduğunda  $f: X \rightarrow E$  fonksiyonları için (4.11) ikinci dereceden fonksiyonel denkleminin bir kararlılık teoremi Skof (1983) tarafından ispatlandı. Onun ispatı  $X$ , bir  $G$  Abel grubu ile yer değiştirdiğinde de sağlanır. Bu formda bu teorem Cholewa (1984) tarafından ispatlandı.

Verilen  $\delta > 0$  için;

$$\|f(x + y) + f(x - y) - 2f(x) - 2f(y)\| \leq \delta \quad (4.12)$$

eşitsizliğini sağlayan  $f: G \rightarrow E$  fonksiyonu  $\delta$ -ikinci dereceden olarak adlandırılır.

Skof-Cholewa teoreminin ifadesi aşağıda verilmiştir.

#### **Teorem 4.2.1.**

$G$ 'deki bütün  $x$  ve  $y$  ler için  $f: G \rightarrow E$  fonksiyonu  $\delta$ -ikinci dereceden ise, o zaman (4.11) i sağlayan ikinci dereceden bir  $g: G \rightarrow E$  fonksiyonu vardır. Bu  $g$  fonksiyonu  $G$ 'deki her  $x$  için

$$\|f(x) - g(x)\| \leq \frac{\delta}{2}$$

eşitsizliğini sağlayan tek ikinci dereceden fonksiyondur.  $G$ 'de ki her  $x$  için fonksiyon

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^{-n} f(2^n x) \quad (4.13)$$

şeklinde verilmiştir.

Bu teorem aşağıda verilen ve Czerwik (1992) tarafından ispatlanan Teorem 4.2.2 nin özel bir halidir.

#### **Teorem 4.2.2.**

$E_1$  bir normlu vektör uzayı,  $E_2$  bir Banach uzayı ve  $\varepsilon > 0$  ,  $p \neq 2$  birer reel sayı olsunlar.  $f: E_1 \rightarrow E_2$  fonksiyonu

$$\|f(x + y) + f(x - y) - 2f(x) - 2f(y)\| \leq \varepsilon(\|x\|^p + \|y\|^p) \quad (4.14)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda, eğer  $E_1$ 'de ki bütün  $x$ 'ler için  $p \geq 0$  ve her  $x \in E_1 \setminus \{0\}$  için  $p < 0$  ise;

$$\|g(x) - f(x)\| \leq c + k\varepsilon\|x\|^p \quad (4.15)$$

eşitsizliğini sağlayan tam olarak bir tane  $g: E_1 \rightarrow E_2$  ikinci dereceden fonksiyonu vardır. Burada  $p < 2$  iken  $c = \frac{\|f(0)\|}{3}$ ,  $k = \frac{2}{4-2^p}$  dir ve  $g$ , (4.13)'de verilmiştir.  $p > 2$  iken  $c = 0$ ,  $k = \frac{2}{4-2^p}$  dir ve  $E_1$ 'de ki her  $x$  için  $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n f(2^{-n}x)$  dir. Aynı zamanda eğer  $R$  den  $E_2$ 'ye verilen  $t \rightarrow f(tx)$  dönüşümü,  $E_1$ 'de ki her  $x$  sabiti için sürekli ise, o zaman  $R$ 'de ki bütün  $t$ 'ler için  $g(tx) = t^2 g(x)$ 'tir (Czerwik, 1992).

**İspat:** 2 durum söz konusudur:

**1. Durum:**  $p < 2$  olsun. (4.14)'te  $y = x \neq 0$  alalım ve  $4$ 'e bölelim. Üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\|4^{-1}f(2x) - f(x)\| \leq 4^{-1}\|f(0)\| + 4^{-1}(2\varepsilon\|x\|^p) \quad (4.16)$$

olduğu elde edilir. Tümevarım metodu uygulanırsa (4.16)'dan  $n = 1$  için doğru olan

$$\|4^{-n}f(2^n x) - f(x)\| \leq \|f(0)\| \sum_{k=1}^n 4^{-k} + 2\varepsilon\|x\|^p \sum_{k=1}^n 2^{(k-1)p} 4^{-k} \quad (4.17)$$

elde edilir.

(4.17)'nin doğru olduğunu varsayalım ve burada  $x$  yerine  $2x$  yazıp  $4$ 'e bölelim. Şimdi bütün pozitif  $n$  tamsayıları ve  $E_1$ 'de ki her  $x$  için (4.17) sağlanmak üzere  $n$  yerine  $(n+1)$  yazıldığında (4.17)'nin doğru kaldığını görmek için bu sonuç ile (4.16) yı birleştirelim. (4.17)'nin sağ tarafındaki serileri toplayarak  $k = \frac{2}{4-2^p}$  olmak üzere

$$\|4^{-n}f(2^n x) - f(x)\| \leq c + \frac{2\varepsilon\|x\|^p}{4-2^p} = c + k\varepsilon\|x\|^p \quad (4.18)$$

eşitsizliğini buluruz. ,  $g_n(x) = 4^{-n}f(2^n x)$  dizisinin yakınsaklığını göstermek için (4.18) eşitsizliğini  $4^m$  ile bölelim ve ayrıca (4.19) u bulmak için  $x$  yerine  $2^m x$  yazalım.

$$\begin{aligned} \|g_{m+n}(x) - g_m(x)\| &= \|4^{-(m+n)}f(2^{(m+n)}x) - 4^{-m}f(2^m x)\| \\ &\leq 4^{-m}c + 2^{-(2-p)m}k\varepsilon\|x\|^p \end{aligned} \quad (4.19)$$

$E_2$  bir Banach uzayı olduğundan,  $E_1$ 'de ki sıfırdan farklı her  $x$  için;

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^{-n}f(2^n x)$$

limiti vardır. (4.18)'de  $n \rightarrow \infty$  alırsak  $c = \frac{\|f(0)\|}{3}$  ve  $k = \frac{2}{4-2^p}$  olacak şekilde (4.15) formülüne ulaşılır.  $g$ 'nin ikinci dereceden olduğunu göstermek için (4.14)'te  $x$  yerine  $2^n x$  ve  $y$  yerine  $2^n y$  yazalım ve  $4^n$  e bölelim ki;

$\|g_n(x+y) + g_n(x-y) - 2g_n(x) - 2g_n(y)\| \leq 2^{-(2-p)n} \varepsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$  elde edilmiş olsun.  $n \rightarrow \infty$  için limit alınırsa  $x$  ve  $y$  sıfırdan farklı iken  $g$ 'nin (4.11) i sağladığı bulunmuş olur.

Şimdi  $E_1$  de ki her  $x$  için  $g(x)$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^{-n} f(2^n x)$  olarak tanımlayalım.  $g(0) = 0$  dir.(4.11) de  $f$  ,  $g$  ile değiştirildiğinde  $x = y = 0$  için (4.11) sağlanır.

$y = 0$  ve  $x \neq 0$  iken

$$g(x + 0) + g(x - 0) - 2g(x) - 2g(0) = 0$$

dir.  $x \neq 0$  ve  $y \neq 0$  için

$$g(x + y) + g(x - y) - 2g(x) - 2g(y) = 0$$

ve  $y = x$  alırsak,  $x \neq 0$  için  $g(2x) = 4g(x)$  olur. Ayrıca bu son eşitliğin  $x = 0$  içinde sağlandığı açıktır.

$y = -x \neq 0$  alınırsa

$$g(0) + g(2x) - 2g(x) - 2g(-x) = 0$$

olduğu elde edilir ve buda  $E_1$  de ki bütün  $x$  ler için sağlanan  $g(-x) = g(x)$ 'e dönüşür.

Son olarak  $x = 0$  ve  $y \neq 0$  için

$$g(0 + y) + g(0 - y) - 2g(0) - 2g(y) = 0$$

olur. Buradan  $g: E_1 \rightarrow E_2$  ,  $E_1$ 'de ikinci derecedendir.

**2. Durum:**  $p > 2$  olsun. (4.14)'te  $f(0) = 0$  olduğunu görmek için  $x = y = 0$  alalım. Sonra (4.20)'yi elde etmek için hem  $x$  hem de  $y$  yerine  $\frac{x}{2}$  yazılırsa

$$\|f(x) - 4f(2^{-1}x)\| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \|x\|^p 2^{-(p-2)} \quad (4.20)$$

elde edilir. Tümevarımdan  $E_1$ 'de ki her  $x$  için ve bütün  $n$  pozitif tamsayıları için;

$$\|f(x) - 4^n f(2^{-n}x)\| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \|x\|^p \sum_{k=1}^n 2^{-k(p-2)} \quad (4.21)$$

dir. (4.21)'de  $x$  yerine  $2^{-1}x$  yazıp 4 ile çarparsak;

$$\|4f(2^{-1}x) - 4^{n+1}f(2^{-(n+1)}x)\| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \|x\|^p \sum_{k=2}^{n+1} 2^{-k(p-2)}$$

olur.  $n$  yerine  $n + 1$  yazıldığında (4.21) in doğru olduğunu göstermek için, bu son eşitlik ile (4.20) yi birleştirirsek tümevarım ispatı tamamlanmış olur.

(4.21) in sağ tarafındaki serinin toplamını bulursak,  $k = \frac{2}{2^p-4}$  olmak üzere;

$$\|f(x) - 4^n f(2^{-n}x)\| \leq k\varepsilon \|x\|^p \quad (4.22)$$

elde edilir.

$h_n(x) = 4^n f(2^{-n}x)$  alalım. (4.22) yi  $4^m$  ile çarpıp  $x$  yerine  $2^{-m}x$  yazarsak;

$$\begin{aligned} \|h_m(x) - h_{m+n}(x)\| &= \|4^m f(2^{-m}x) - 4^{m+n} f(2^{-(m+n)}x)\| \\ &\leq 2^{-m(p-2)} k\varepsilon \|x\|^p \end{aligned} \quad (4.23)$$

elde edilir. Bu da  $\{h_m(x)\}$  in bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Böylece  $E_1$  de ki her  $x$  için  $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)$  olacak şekilde  $g: E_1 \rightarrow E_2$  vardır. (4.14) teki  $x$  ve  $y$  nin  $2^{-n}x$  ve  $2^{-n}y$  ile değiştirilip sonucun  $4^n$  ile çarpılması dışında  $g$  nin ikinci derecedenliğinin ispatı 1. duruma benzerdir.

(4.15) e bağlı  $g$  ikinci dereceden fonksiyonunun tek (yalnız) olduğunu göstermek için, (4.15) i sağlayan  $h: E_1 \rightarrow E_2$  şeklinde başka bir ikinci dereceden fonksiyon olduğunu varsayalım.

$E_1$ 'de  $a = \|g(y) - h(y)\| > 0$  sağlayacak şekilde bir  $y$  noktası alalım. Bu kısmın başında belirtildiği gibi; her bir ikinci dereceden fonksiyonu simetrik ve iki-toplamsal fonksiyon olarak bir tek şekilde temsil edilebilir. Bu yüzden  $B: E_1 \times E_1 \rightarrow E_2$  simetrik ve iki-toplamsal olmak üzere  $g(x) = B(x, x)$ 'dir. Böylece bütün  $r$  rasyonel sayıları için  $g(rx) = r^2g(x)$  dir.

Benzer şekilde  $r$  rasyonel sayısı için  $h(rx) = r^2h(x)$  dir.

Hem  $g$  hem de  $h$ , (4.15) i sağladığına göre  $E_1$  de ki her  $x$  için;  
 $\|g(x) - h(x)\| = \|g(x) - f(x) + f(x) - h(x)\| \leq 2c + 2k\epsilon\|x\|^p$   
 dir. Özel olarak  $r > 0$  için;  
 $r^2a = \|g(ry) - h(ry)\| \leq 2c + 2k\epsilon r^p\|y\|^p$  (4.24)  
 eşitsizliği elde edilir.

1. Durumda,  $p < 2$  iken (4.24) den dolayı, bütün  $r > 0$  rasyonel sayıları için;

$$a \leq \frac{2c}{r^2} + \frac{2k\epsilon\|y\|^p}{r^{2-p}} \quad \text{dir ve böylece } a = 0 \text{ olur.}$$

2. Durumda,  $p > 2$  iken  $c = 0$  dır.

(4.24)'te  $r = \frac{1}{s}$  alırsak;

$$\frac{a}{s^2} = \left\| g\left(\frac{y}{s}\right) - h\left(\frac{y}{s}\right) \right\| \leq \frac{2k\epsilon\|y\|^p}{s^p}$$

olur. Böylece her  $s > 0$  için  $a \leq \frac{2k\epsilon\|y\|^p}{s^{p-2}}$  olduğundan  $a = 0$  olduğu görülür.

Bütün  $t$  reelleri için  $g(tx) = t^2g(x)$  dir.

#### Sonuç 4.2.1.

Teorem 4.2.2 de ki  $f$  fonksiyonu  $E_1$  de her yerde sürekli ise, o zaman  $E_1$  deki bütün  $x \neq 0$  lar için  $g$  de sürekli dir.  $p > 0$  iken bu kısıtlamaya gerek yoktur.

## 5. QUASI-BANACH UZAYLARINDA İKİNCİ DERECEDEDEN VE TOPLAMSAL FONKSİYONLARDAN TÜRETİLEN FONKSİYONEL BİR EŞİTLİĞİN KARARLILIĞI

Bu bölümde;

$$f(2x + y) + f(2x - y) = f(x + y) + f(x - y) + 2f(2x) - 2f(x)$$

fonksiyonel denkleminin genel çözümü verilecek ve quasi-Banach uzaylarında bu denklemin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı araştırılacaktır.

İlk olarak Rolewicz (1984) ve Benyamini ve Lindenstrauss (2000) tarafından verilen quasi-norm ve quasi-Banach uzayı tanımları verilecektir.

### Tanım 5.1.

$X$  bir reel lineer uzay olsun.  $X$  üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan bir reel değerli fonksiyona quasi-norm denir:

(i) Her  $x \in X$  için  $\|x\| \geq 0$  ve  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  dir.

(ii) Her  $\lambda \in R$  ve her  $x \in X$  için;  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  dir.

(iii) Her  $x, y \in X$  için;  $\|x + y\| \leq K(\|x\| + \|y\|)$  şartını sağlayan bir  $K \geq 1$  sabiti vardır.

Yalnızca (iii) şartından hareketle, her  $n \geq 1$  tamsayısı ve tüm  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n+1} \in X$  ler için;

$$\left\| \sum_{i=1}^{2n} x_i \right\| \leq K^n \sum_{i=1}^{2n} \|x_i\|$$
$$\left\| \sum_{i=1}^{2n+1} x_i \right\| \leq K^{n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} \|x_i\|$$

elde edilir.

Eğer  $\|\cdot\|$ ,  $X$  üzerinde bir quasi-norm ise  $(X, \|\cdot\|)$  ikilisine quasi normlu uzay denir. Mümkün olan en küçük  $K$ 'ya  $\|\cdot\|$ 'un içbükeyliğinin modülü denir. Bir quasi-Banach uzayı, bir quasi tam normlu uzaydır.

**Tanım 5.2.**

Eğer her  $x, y \in X$  için,  $0 < p \leq 1$  olmak üzere

$$\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$$

ise  $\|\cdot\|$  quasi-normuna bir p-norm denir. Bu şartlardaki bir quasi-Banach uzayına bir p-Banach uzayı denir.

İkinci dereceden fonksiyonel denklemler Aczel ve Dhombres (1989), Amir (1986) ve Jordan ve Von Neumann (1935) çalışmalarında iç çarpım uzaylarını karakterize etmek için kullanıldı.

Diğer birçok fonksiyonel denklemlerde iç çarpım uzaylarının karakterize etmek için kullanıldı. Bir iç çarpım uzayı üzerinde karesel norm, paralelkenar eşitliği diye adlandırılan;

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

ifadesini sağlar.

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y) \tag{5.1}$$

fonksiyonel denklemi bir simetrik iki-toplamsal fonksiyonu ile ilişkilidir (Aczel ve Dhombres, 1989; Kannapan, 1995).

Özel olarak (5.1) ikinci dereceden denkleminin her bir çözümüne bir ikinci dereceden fonksiyon denir. Reel vektör uzayları arasındaki bir  $f$  fonksiyonunun ikinci dereceden olması için gerek ve yeter şartın her  $x$  için  $f(x) = B(x, x)$  olacak şekilde bir tek simetrik ve iki-toplamsal olan  $B$  fonksiyonunun var olması olduğu bilinmektedir (Aczel ve Dhombres, 1989; Kannapan, 1995).

$B$  iki-toplamsal fonksiyonu;

$$B(x, y) = \frac{1}{4}(f(x + y) - f(x - y)) \tag{5.2}$$

ile verilmiştir. (5.1) ikinci dereceden fonksiyonel denklemi için bir Hyers-Ulam kararlılık problemi Skof (1983) tarafından  $E_1$  bir normlu uzay ve  $E_2$  bir Banach uzayı olmak üzere  $f: E_1 \rightarrow E_2$  fonksiyonları için ispatlanmıştır.

Cholewa (1984), Skof'un (1983) teoreminin  $E_1$  in bir Abel grup ile değiştirildiğinde yine doğru kalacağına dikkat çekmiştir.

Czwerwik (1992) çalışmasında (5.1) ikinci dereceden fonksiyonel denkleminin genelleştirilmiş Hyers-Ulam kararlılığını ispatladı. Grabiec (1996) yukarıda bahsedilen bu sonuçları genelleştirdi.

$$f(x + y) + f(x - y) = 2g(x) + 2h(y)$$

fonksiyonel denkleminin  $f = g = h$  için bir ikinci dereceden fonksiyonel denklem yada bir Pexiderized ikinci dereceden fonksiyonel denklem denir. Jun ve Lee (2001) ise pexiderized ikinci dereceden denkleminin genelleştirilmiş Hyers-Ulam-Rassias kararlılığını ispatladı.

Bu bölümde ikinci dereceden ve toplamsal fonksiyonlardan türetilen aşağıdaki fonksiyonel eşitlikle ilgilenilecektir:

$$f(2x + y) + f(2x - y) = f(x + y) + f(x - y) + 2f(2x) - 2f(x) \quad (5.3)$$

$f(x) = ax^2 + bx + c$  fonksiyonun, (5.3) fonksiyonel eşitliğinin bir çözümü olduğu kolayca görülebilir. Bu kısmın asıl amacı Najati ve Moghimi (2008) tarafından verilen (5.3) eşitliğinin genel çözümünü ifade etmek ve (5.3) için Hyers-Ulam-Rassias kararlılığını incelemektir.

## 5. 1. (5.3) Fonksiyonel Denkleminin Çözümü

Bu kısımda  $X$  ve  $Y$  reel vektör uzayları olarak alınacaktır. Öncelikle Teorem 5.1.1 in ispatı için gerekli olan aşağıdaki iki lemmaya değinilecektir.

### Lemma 5.1.1.

$f(0) = 0$  olmak üzere eğer bir  $f: X \rightarrow Y$  çift fonksiyonu (5.3) denklemini her  $x, y \in X$  için sağlıyorsa, o zaman  $f$  ikinci derecedendir.

**İspat:**  $f$  çift fonksiyon olduğundan, her  $x \in X$  için  $f(-x) = f(x)$  dir. (5.3)'te  $y$  yerine  $x + y$  yazılırsa  $f$  nin çift oluşundan dolayı, her  $x, y \in X$  için;

$$f(3x + y) + f(x - y) = f(2x + y) + f(y) + 2f(2x) - 2f(x) \quad (5.4)$$

eşitliği elde edilir. (5.4) de  $y$  yerine  $-y$  yazılırsa,  $f$  nin çift oluşundan dolayı, her  $x, y \in X$  için;

$$f(3x - y) + f(x + y) = f(2x - y) + f(y) + 2f(2x) - 2f(x) \quad (5.5)$$

elde edilir. (5.4)'ü (5.5)' e eklersek ve (5.3) ü kullanırsak, her  $x, y \in X$  için;

$$f(3x + y) + f(3x - y) - 2f(y) = 6f(2x) - 6f(x) \quad (5.6)$$

elde edilir. (5.6)'da  $y = 0$  alırsak, her  $x \in X$  için;

$$2f(3x) = 6f(2x) - 6f(x) \quad (5.7)$$

olur. Yine (5.6)'da  $y = 3x$  alırsak, her  $x \in X$  için;

$$f(6x) - 2f(3x) = 6f(2x) - 6f(x) \quad (5.8)$$

olur. (5.7) ve (5.8) den dolayı, her  $x \in X$  için;

$$f(6x) = 4f(3x) \quad (5.9)$$

olur. Eğer (5.9) da  $x$  yerine  $\frac{x}{3}$  yazılırsa, her  $x \in X$  için;

$$f(2x) = 4f(x) \quad (5.10)$$

olur. (5.3) de  $y$  yerine  $2y$  yazıp, (5.3) ve (5.10) u kullanırsak, her  $x, y \in X$  için;

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y)$$

olur.

Böylece  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu ikinci derecedendir.

### Sonuç 5.1.1.

Eğer  $f: X \rightarrow Y$  çift fonksiyonu, her  $x, y \in X$  için (5.3) ü sağlarsa, bu durumda;

$$g(x) = f(x) - f(0)$$

şeklinde tanımlanan  $g: X \rightarrow Y$  fonksiyonu ikinci derecedendir.

### Lemma 5.1.2.

Eğer  $f: X \rightarrow Y$  tek fonksiyonu, her  $x, y \in X$  için (5.3) ü sağlarsa, o zaman  $f$  fonksiyonu toplamsaldır.

**İspat:**  $f$  tek olduğundan, her  $x \in X$  için;

$$f(-x) = -f(x)$$

dir. (5.3) de  $y = x$  alırsak, her  $x \in X$  için;

$$f(3x) = 3f(2x) - 3f(x) \quad (5.11)$$

elde edilir, (5.3)'de  $y = 3x$  alırsak,  $f$  nin tek oluşundan, her  $x \in X$  için;

$$f(5x) - f(4x) = f(2x) - f(x) \quad (5.12)$$

olur. Yine (5.3)'de  $y = 4x$  alırsak,  $f$  nin tek oluşundan dolayı, her  $x \in X$  için;

$$f(6x) - f(5x) = 3f(2x) - 2f(x) - f(3x) \quad (5.13)$$

olur. (5.12) yi , (5.13)'e ekleyip (5.11)'i kullanırsak;

$$f(6x) - f(4x) = f(2x)$$

olur.  $x$  yerine  $\frac{x}{2}$  yazdığımızda, her  $x \in X$  için;

$$f(3x) - f(2x) = f(x) \quad (5.14)$$

olur. (5.11) ve (5.14) den dolayı, her  $x \in X$  için;

$$f(2x) = 2f(x) \quad (5.15)$$

olur. Böylece (5.3) her  $x, y \in X$  için;

$$f(2x + y) + f(2x - y) = f(x + y) + f(x - y) + 2f(x) \quad (5.16)$$

şekline dönüşür. Eğer (5.16) da  $x$  yerine  $\frac{x}{2}$  yazıp, (5.16) nın her iki tarafını 2 ile çarparsak, her  $x, y \in X$  için;

$$f(x + 2y) - f(2y - x) = 2f(x + y) + 2f(x - y) - 2f(x) \quad (5.17)$$

olur. (5.16) da sırasıyla  $x$  yerine  $y$  ,  $y$  yerine  $x$  yazarsak, her  $x, y \in X$  için;

$$f(x + 2y) + f(2y - x) = f(x + y) - f(x - y) + 2f(y) \quad (5.18)$$

olur. (5.17) , (5.18) e eklenirse, her  $x, y \in X$  için;

$$2f(x + 2y) = 3f(x + y) + f(x - y) - 2f(x) + 2f(y) \quad (5.19)$$

elde edilir.(5.19) da  $y$  yerine  $-y$  yazıldığında, her  $x, y \in X$  için;

$$2f(x - 2y) = 3f(x - y) + f(x + y) - 2f(x) - 2f(y) \quad (5.20)$$

olur. Yine, eğer (5.19) da  $x$  yerine  $x - y$  yazıp (5.19) un her iki tarafını 2 ile çarparsak her  $x, y \in X$  için;

$$4f(x + y) = 6f(x) + 2f(x - 2y) - 4f(x - y) + 4f(y) \quad (5.21)$$

yi elde edilir. (5.20) ve (5.21) den her  $x, y \in X$  için;

$$3f(x + y) + f(x - y) = 4f(x) + 2f(y) \quad (5.22)$$

olur. (5.22) de  $y$  yerine  $-y$  yazarsak, her  $x, y \in X$  için;

$$3f(x - y) + f(x + y) = 4f(x) - 2f(y) \quad (5.23)$$

olur. (5.22) ve (5.23) den her  $x, y \in X$  için;

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

olur. Böylece  $f: X \rightarrow Y$  dönüşümü toplamsaldır.

Şimdi (5.3) ün genel çözümünü verebiliriz.

### **Teorem 5.1.1.**

Bir  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonunun her  $x, y \in X$  için (5.3) ü sağlaması için gerek ve yeter şart her  $x \in X$  için  $f(x) = B(x, x) + A(x) + f(0)$  olacak şekilde bir simetrik iki-toplamsal  $B: X \times X \rightarrow Y$  fonksiyonu ve  $A: X \rightarrow Y$  toplamsal fonksiyonunun bulunmasıdır.

### **İspat**

Eğer her  $x \in X$  için;

$$f(x) = B(x, x) + A(x) + f(0)$$

olacak şekilde, simetrik iki-toplamsal  $B: X \times X \rightarrow Y$  fonksiyonu ve  $A: X \rightarrow Y$  toplamsal fonksiyonu varsa her  $x, y \in X$  için;

$$\begin{aligned} f(2x + y) + f(2x - y) &= 8B(x, x) + 2B(y, y) + 4A(x) + 2f(0) \\ &= f(x + y) + f(x - y) + 2f(2x) - 2f(x) \end{aligned}$$

olduğu kolayca söylenebilir. Böylece  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu (5.3) ü sağlar.

Aksine her  $x \in X$  için  $f$  fonksiyonunu;

$$f_e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{ve} \quad f_0(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

şeklinde tek ve çift kısımlarına ayırılım. Her  $x \in X$  için  $f(x) = f_e(x) + f_0(x)$  olduğu kolayca söylenebilir.  $f_e$  ve  $f_0$  fonksiyonlarının (5.3) ü sağladığı kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla Sonuç 5.1.1 ve Lemma 5.1.2 den dolayı,  $f_e - f(0)$  ve  $f_0$  fonksiyonları sırasıyla ikinci dereceden ve toplamsaldır. Böylece, her  $x \in X$  için;

$$f_e(x) = B(x, x) + f(0)$$

olacak şekilde simetrik iki-toplamsal bir  $B: X \times X \rightarrow Y$  fonksiyonu vardır (Aczel ve Dhombres, 1989).

Dolayısıyla her  $x \in X$  için;  $A(x) = f_0(x)$  olmak üzere,

$$f(x) = B(x, x) + A(x) + f(0)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

### 5.1.2. (5.3) Fonksiyonel Denkleminin Hyers-Ulam-Rassias Kararlılığı

Bu kısım boyunca  $X$  in  $\|\cdot\|_X$  quasi-normu ile birlikte bir quasi-normlu uzay ve  $Y$  nin  $\|\cdot\|_Y$   $p$ -normu ile birlikte bir  $p$ -Banach uzayı olduğu kabul edilecektir.  $K, \|\cdot\|_Y$  nin içbükeyliğinin modülü olsun.

Bu kısımda Gavruta (1994) çalışmasından yararlanarak Najati ve Moghimi'nin (2008) elde ettikleri (5.3) denkleminin kararlılığı ispatlanacaktır.

Verilen bir  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu ve her  $x, y \in X$  için

$$Df(x, y) = f(2x + y) + f(2x - y) - f(x + y) - f(x - y) - 2f(2x) + 2f(x)$$

yazalım. Aşağıdaki lemma kullanılacaktır.

#### Lemma 5.2.1

$0 \leq p \leq 1$  ve  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  negatif olmayan reel sayılar olsunlar. Bu takdirde

$$(\sum_{i=1}^n x_i)^p \leq \sum_{i=1}^n x_i^p \quad (5.24)$$

dir.

**İspat:**  $a > 0$  olsun ve  $f, g: [0, \infty) \rightarrow R$  fonksiyonları

$$f(x) = (x + a)^p, \quad g(x) = x^p + a^p \quad (x \geq 0)$$

İle tanımlanmış olsunlar.  $x \geq 0$  için  $f'(x) \leq g'(x)$  olduğu açıktır.  $f(0) = g(0)$  olduğundan  $x \geq 0$  için  $f(x) \leq g(x)$  olur. Böylece  $n = 2$  için ispat tamamlanmış olur. Tümevarım yöntemiyle (5.24) elde edilir.

#### Teorem 5.2.1

$\varphi: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ , her  $x, y \in X$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \varphi\left(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}\right) = 0 \quad (5.25)$$

şartını sağlayan bir fonksiyon olsun ve her  $x \in X$  ve her  $y \in \{0, x, -2x, 3x, 4x\}$  için

$$\sum_{i=1}^{\infty} 4^{ip} \varphi^p \left( \frac{x}{2^i}, \frac{y}{2^i} \right) < \infty \quad (5.26)$$

sağlansın.  $f: X \rightarrow Y$ ,  $f(0) = 0$ , çift fonksiyonunun her  $x, y \in X$  için

$$\|Df(x, y)\|_Y \leq \varphi(x, y) \quad (5.27)$$

eşitsizliğini sağladığını kabul edelim. O zaman her  $x \in X$  için

$$Q(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n f \left( \frac{x}{2^n} \right) \quad (5.28)$$

limiti vardır ve

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}_e(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 4^{ip} \left\{ 2^p \varphi^p \left( \frac{x}{3.2^i}, \frac{x}{3.2^i} \right) + \varphi^p \left( \frac{x}{3.2^i}, \frac{x}{3.2^i} \right) + \varphi^p \left( \frac{x}{3.2^i}, \frac{4x}{3.2^i} \right) + \varphi^p \left( \frac{x}{3.2^i}, -\frac{2x}{3.2^i} \right) + \right. \\ \left. \varphi^p \left( \frac{x}{3.2^i}, 0 \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.29)$$

olmak üzere

$$\|f(x) - Q(x)\|_Y \leq \frac{K^3}{4} [\widetilde{\psi}_e(x)]^{\frac{1}{p}} \quad (5.30)$$

şartını sağlayan bir tek  $Q: X \rightarrow Y$  ikinci dereceden fonksiyonu vardır.

**İspat:** (5.27) de  $y$  yerine  $x + y$  yazılırsa her  $x, y \in X$  için

$$\|f(3x + y) + f(x - y) - f(2x + y) - f(y) - 2f(2x) + 2f(x)\|_Y \leq \varphi(x, x + y) \quad (5.31)$$

elde edilir. (5.31) de  $y$  yerine  $-y$  yazılırsa her  $x, y \in X$  için

$$\|f(3x - y) + f(x + y) - f(2x - y) - f(y) - 2f(2x) + 2f(x)\|_Y \leq \varphi(x, x - y) \quad (5.32)$$

olur. (5.27), (5.31) ve (5.32) den her  $x, y \in X$  için

$$\|f(3x + y) + f(3x - y) - 2f(y) - 6f(2x) + 6f(x)\|_Y \leq K^2 [\varphi(x, y) + \varphi(x, x + y) + \varphi(x, x - y)] \quad (5.33)$$

çıkar. (5.33) te  $y = 0$  ve  $y = 3x$  alınırsa her  $x \in X$  için

$$\|2f(3x) - 6f(2x) + 6f(x)\|_Y \leq K^2 [2\varphi(x, x) + \varphi(x, 0)] \text{ ve}$$

$$\|f(6x) - 2f(3x) - 6f(2x) + 6f(x)\|_Y \leq K^2 [\varphi(x, -2x) + \varphi(x, 3x) + \varphi(x, 4x)]$$

eşitsizlikleri bulunur. Bu eşitsizliklerden her  $x \in X$  için

$$\|f(6x) - 4f(3x)\|_Y \leq K^3 [2\varphi(x, x) + \varphi(x, 3x) + \varphi(x, 4x) + \varphi(x, -2x) + \varphi(x, 0)]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte  $x$  yerine  $\frac{x}{3}$  alınırsa her  $x \in X$  için

$$\psi(x) = 2\varphi \left( \frac{x}{3}, \frac{x}{3} \right) + \varphi \left( \frac{x}{3}, x \right) + \varphi \left( \frac{x}{3}, \frac{4x}{3} \right) + \varphi \left( \frac{x}{3}, -\frac{2x}{3} \right) + \varphi \left( \frac{x}{3}, 0 \right) \quad (5.34)$$

olmak üzere

$$\|f(2x) - 4f(x)\|_Y \leq K^3 \psi(x) \quad (5.35)$$

(5.35) de  $x$  yerine  $\frac{x}{2^{n+1}}$  yazılırsa ve (5.35) in her iki yanını  $4^n$  ile çarpılırsa her  $x \in X$  için veher negatif olmayan  $n$  tamsayısı için

$$\left\| 4^{n+1} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) - 4^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) \right\|_Y \leq K^3 4^n \psi\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \quad (5.36)$$

elde edilir.  $Y$  bir  $p$ - Banach uzayı olduğunda  $n \geq m$  olmak üzere negatif olmayan her  $m$  ve  $n$  tamsayıları ve her  $x \in X$  için

$$\begin{aligned} \left\| 4^{n+1} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) - 4^m f\left(\frac{x}{2^m}\right) \right\|_Y^p &\leq \sum_{i=m}^n \left\| 4^{i+1} f\left(\frac{x}{2^{i+1}}\right) - 4^i f\left(\frac{x}{2^i}\right) \right\|_Y^p \leq \\ &K^{3p} \sum_{i=m}^n 4^{ip} \psi^p\left(\frac{x}{2^{i+1}}\right) \end{aligned} \quad (5.37)$$

bulunur.  $0 < p \leq 1$  olduğundan Lemma 5.2.1 den ve (5.34) den her  $x \in X$  için

$$\psi^p(x) \leq 2^p \varphi^p\left(\frac{x}{3}, \frac{x}{3}\right) + \varphi^p\left(\frac{x}{3}, x\right) + \varphi^p\left(\frac{x}{3}, \frac{4x}{3}\right) + \varphi^p\left(\frac{x}{3}, -\frac{2x}{3}\right) + \varphi^p\left(\frac{x}{3}, 0\right) \quad (5.38)$$

elde edilir. Dolayısıyla (5.26) ve (5.38) den her  $x \in X$  için

$$\sum_{i=1}^{\infty} 4^{ip} \psi^p\left(\frac{x}{2^i}\right) < \infty \quad (5.39)$$

çıkar. Böylece (5.37) ve (5.39) dan  $\left\{4^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right\}$  dizisi her  $x \in X$  için bir Cauchy dizisidir.  $Y$  tam olduğundan  $\left\{4^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right\}$  dizisi her  $x \in X$  için yakınsaktır. Buradan her  $x \in X$  için (5.28) de verilen  $Q: X \rightarrow Y$  dönüşümü tanımlanabilir.

(5.37) de  $m = 0$  alınıp  $n \rightarrow \infty$  iken limite geçilirse her  $x \in X$  için

$$\|f(x) - Q(x)\|_Y^p \leq K^{3p} \sum_{i=0}^{\infty} 4^{ip} \psi^p\left(\frac{x}{2^{i+1}}\right) = \frac{K^{3p}}{4^p} \sum_{i=1}^{\infty} 4^{ip} \psi^p\left(\frac{x}{2^i}\right) \quad (5.40)$$

bulunur. Dolayısıyla (5.38) ve (5.40) dan (5.30) elde edilmiş olur. Şimdi  $Q$  nin ikinci dereceden olduğunu gösterelim. (5.25), (5.27) ve (5.28) den her  $x, y \in X$  için

$$\|DQf(x, y)\|_Y = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \left\| Df\left(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}\right) \right\|_Y \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \varphi\left(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}\right) = 0$$

olduğu görülür. Böylelikle  $Q: X \rightarrow Y$  dönüşümü (5.3) denklemini sağlar.  $Q(0) = 0$  olduğu için Lemma 5.2.1 den  $Q: X \rightarrow Y$  dönüşümünün ikinci dereceden olduğu ispatlanmış olur.

$Q$  nun tekliliğini ispatlamak için (5.30) şartını sağlayan başka bir  $T: X \rightarrow Y$  ikinci dereceden dönüşümünün var olduğunu kabul edelim. Her  $x \in X$  ve  $y \in \{0, x, -2x, 3x, 4x\}$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4^{np} \sum_{i=1}^{\infty} 4^{ip} \varphi^p\left(\frac{x}{2^{n+i}}, \frac{y}{2^{n+i}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} 4^{ip} \varphi^p\left(\frac{x}{2^i}, \frac{y}{2^i}\right) = 0$$

olduğundan her  $x \in X$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4^{np} \widetilde{\psi}_e\left(\frac{x}{2^n}\right) = 0 \quad (5.41)$$

olur. (5.30) ve (5.41) den her  $x \in X$  için

$$\|Q(x) - T(x)\|_Y^p = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^{np} \left\| f\left(\frac{x}{2^n}\right) - T\left(\frac{x}{2^n}\right) \right\|_Y^p \leq \frac{K^{3p}}{4^p} \lim_{n \rightarrow \infty} 4^{np} \widetilde{\psi}_e\left(\frac{x}{2^n}\right) = 0$$

olduğu çıkar. Böylece  $Q = T$  elde edilir.

## 6. SONLU BOYUTLU FUZZY NORMLU LİNEER UZAYLARDA TOPLAMSAL İKİNCİ DERECEDEKİ FONKSİYONEL DENKLEMLERİN FUZZY KARARLILIĞI

### 6. 1. Sonlu Boyutlu Fuzzy Normlu Lineer Uzaylar

#### Tanım 6.1.1.

$U$ , bir  $R$  cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. ( $F = R$  ve  $C$ ), ( $R$ : Reel sayılar cismi,  $C$ : Kompleks sayılar cismi)  $N$  de,  $U \times R$  nin bir fuzzy altkümesi olsun.

Bu durumda  $\forall x, u \in U$  ve  $\forall c \in F$  için aşağıdaki şartlar sağlandığında  $N$  ye,  $U$  üzerinde bir fuzzy norm denir.

- (i)  $\forall t \in R, t \leq 0, N(x, t) = 0$
- (ii)  $\forall t \in R, t > 0, N(x, t) = 1 \Leftrightarrow x = 0$
- (iii)  $\forall t \in R, t > 0, c \neq 0$  ise  $N(cx, t) = N\left(x, \frac{t}{|c|}\right)$ ,  $c = 0$  ise  $N(cx, t) = 1$
- (iv)  $\forall t, s \in R, N(x + u, t + s) \geq \min\{N(x, t), N(u, s)\}$
- (v)  $N(x, \cdot)$  soldan sürekli ve  $R$  nin  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = 1$  şartını sağlayan bir azalmayan fonksiyondur.

$(U, N)$  ikilisi, fuzzy normlu lineer uzay olarak alınacaktır (Cheng ve Mordeson, 1994).

#### Tanım 6.1.2.

$U, F$  üzerinde bir lineer uzay olsun. ( $F$ , reel/kompleks sayılar cismi)  $U \times R$  nin bir  $N$  fuzzy alt kümesinin,  $U$  üzerinde bir fuzzy norm olarak adlandırılabilmesi için gerek ve yeter şart  $\forall x, u \in U$  ve  $\forall c \in F$  için aşağıdaki şartların sağlanmasıdır.

$$(N1) \quad \forall t \in R, t \leq 0, N(x, t) = 0$$

$$(N2) \quad \forall t \in R, t > 0, N(x, t) = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(N3) \quad \forall t \in R, t > 0, c \neq 0 \text{ ise } N(cx, t) = N\left(x, \frac{t}{|c|}\right)$$

$$(N4) \quad \forall s, t \in R, x, u \in U, N(x + u, s + t) \geq \min\{N(x, s), N(u, t)\}$$

$$(N5) \quad N(x, \cdot) R \text{ nin azalmayan bir fonksiyonu ve } \lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = 1 \text{ dir.}$$

$(U, N)$  ikilisi, fuzzy normlu lineer uzay olarak alınacaktır (Bag ve Samanta, 2005).

### Örnek 6.1.1.

$(U, \|\cdot\|)$  bir normlu lineer uzay ve

$$N(x, t) = \frac{t}{t + \|x\|}, t(> 0) \in R, \forall x \in U$$
$$= 0 \quad (t \leq 0)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda  $(U, N)$  bir fuzzy normlu lineer uzaydır.

### Çözüm:

(N1),  $t \leq 0$  olmak üzere  $\forall t \in R$  için tanımdan dolayı  $N(x, t) = 0$  dir.

(N2),  $t > 0$  olmak üzere  $\forall t \in R$  için;

$$N(x, t) = 1 \Leftrightarrow \frac{t}{t + \|x\|} = 1 \Leftrightarrow \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ dir.}$$

(N3),  $t > 0$  olmak üzere  $\forall R$  için ve  $c(\neq 0) \in F$  (reel/kompleks sayılar cismi) için;

$$N(cx, t) = \frac{t}{t + \|cx\|} = N\left(x, \frac{t}{|c|}\right) \text{ dir.}$$

N(4) ,  $\forall s, t \in R, N(x + u, s + t) \geq \min\{N(x, s), N(u, t)\}$  olduğunu göstermeliyiz. Eğer ;

a)  $s + t < 0$

b)  $s = t = 0$

c)  $s + t > 0; s > 0, t < 0; s < 0, t > 0$  bu durumda bağıntı aşikârdır. Eğer,

d)  $s > 0, t > 0, s + t > 0$  ise bu durumda;

$$N(x + u, s + t) = \frac{s+t}{s+t+\|x+u\|} \geq \frac{s+t}{s+t+\|x\|+\|u\|} \text{ dir.}$$

Şimdi

$$\begin{aligned} \frac{s}{s + \|x\|} \geq \frac{t}{t + \|u\|} &\Rightarrow \frac{s}{s + \|x\|} - \frac{t}{t + \|u\|} \geq 0 \\ &\Rightarrow s\|u\| - t\|x\| \geq 0 \end{aligned} \quad (i)$$

Bu yüzden;

$$\frac{s+t}{s+t+\|x\|+\|u\|} - \frac{t}{t+\|u\|} = \frac{s\|u\| - t\|x\|}{(s+t+\|x\|+\|u\|)(t+\|u\|)} \geq 0 \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow \frac{s+t}{s+t+\|x\|+\|u\|} \geq \frac{t}{t+\|u\|}$$

Benzer şekilde;

$$\frac{t}{t+\|u\|} \geq \frac{s}{s+\|x\|} \Rightarrow \frac{s+t}{s+t+\|x\|+\|u\|} \geq \frac{s}{s+\|x\|}$$

Böylece  $N(x + u, s + t) \geq \min\{N(x, s), N(u, t)\}$  dir.

N(5) Eğer  $t_1 < t_2 \leq 0$  ise, o zaman  $N(x, t_1) = N(x, t_2) = 0$  dir.

Eğer  $t_2 > t_1 > 0$  ise o zaman;

$$\frac{t_2}{t_2 + \|x\|} - \frac{t_1}{t_1 + \|x\|} = \frac{\|x\|(t_2 - t_1)}{(t_2 + \|x\|)(t_1 + \|x\|)} \geq 0, \forall x \in U$$

$$\Rightarrow N(x, t_2) \geq N(x, t_1)$$

Öyleyse  $N(x, \cdot)$   $R$  nin azalmayan fonksiyonudur. Yine eğer  $x \neq 0$  ise

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{t + \|x\|} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\|x\|}{t}} = 1$$

Eğer  $x = 0$  ise o zaman;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} N(0, t) = 1 \text{ dir.}$$

Dolayısıyla,  $\forall x \in U$  için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = 1$$

dir. Böylece  $(U, N)$  bir fuzzy normlu lineer uzaydır.

### Örnek 6.1.2.

$(U, \|\cdot\|)$  bir normlu lineer uzay ve  $N: U \times R \rightarrow [0,1]$  olmak üzere  $N$ , eğer  $t \leq \|x\|$  ise  $N(x, t) = 0$ ,  $\|x\| < t$  ise  $N(x, t) = 1$  şeklinde tanımlansın.

Bu durumda  $N, U$  da bir fuzzy normdur ve  $(U, N)$  bir fuzzy normlu lineer uzaydır.

### Çözüm:

(N1)  $\forall x \in X$  ve  $\forall t \in R, t \leq 0$  için  $N(x, t) = 0$  dır.

(N2)  $\forall t \in R, t > 0$  için  $N(0, t) = 1$

Yine;

$$N(x, t) = 1, \forall t > 0 \Rightarrow \|x\| < t, \forall t(> 0) \in R \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$$

böylece,  $(\forall t > 0, \text{eğer } x = 0 \text{ ise } N(x, t) = 1 \text{ dir.}$

(N3)  $\forall t(> 0) \in R, c \neq 0$  için;

$$N(cx, t) = 0 \Leftrightarrow t \leq \|cx\| \Leftrightarrow t \leq |c|\|x\| \Leftrightarrow \frac{t}{|c|} \leq \|x\| \Leftrightarrow N\left(x, \frac{t}{|c|}\right) = 0$$

$$N(cx, t) = 1 \Leftrightarrow \|cx\| < t \Leftrightarrow |c|\|x\| < t \Leftrightarrow \|x\| < \frac{t}{|c|} \Leftrightarrow N\left(x, \frac{t}{|c|}\right) = 1$$

Böylece;  $N(cx, t) = N\left(x, \frac{t}{|c|}\right)$  dir.

(N4)  $\forall s, t \in R$  ve  $x, u \in U$  için;

$$N(x + u, s + t) = 0 \Leftrightarrow s + t \leq \|x + u\| \leq \|x\| + \|u\| \text{ dir.}$$

Eğer  $\|x\| < s$  ise o zaman  $\|u\| \nless t$ , eğer  $N(x, s) = 1$  ise, o zaman  $N(u, t) = 0$

Eğer  $\|u\| < t$  ise o zaman  $\|x\| \nless s$ , eğer  $N(u, t) = 1$  ise o zaman  $N(x, s) = 0$  dır. Böylece;

$$N(x + u, s + t) = 0 \Rightarrow \min\{N(x, s), N(u, t)\} = 0 \text{ dir.}$$

Benzer şekilde  $N(x + u, s + t) = 1 \Rightarrow N(x + u, s + t) \geq \min\{N(x, s), N(u, t)\}$  dir.

Böylece  $N(x + u, s + t) \geq \min\{N(x, s), N(u, t)\}$  dır.

(N5)  $N(U, .)$  nin  $R$  nin azalmayan bir fonksiyonu olduğu ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = 1$$

olduğu tanımdan dolayı aşıkardır. O zaman  $N, U$  üzerinde bir fuzzy normdur ve  $(U, N)$  fuzzy normlu lineer uzaydır.

### Teorem 6.1.1.

$(U, N)$  bir fuzzy normlu lineer uzay olsun.

(N6)  $N(x, t) > 0, \forall t > 0$  ve  $x = 0$  olmak üzere  $\|x\|_\alpha = \wedge \{t: N(x, t) \geq \alpha\}$ ,  $\alpha \in (0,1)$  şeklinde tanımlansın. Bu durumda  $\{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$   $U$  üzerindeki normların artan bir ailesidir.

$U$  üzerinde  $N$  fuzzy normu ile ilişkili olan bu normlara  $U$  üzerinde  $\alpha$ -normlar denir.

#### İspat:

N1:  $x \in U$  için

$N(x, t) = 0$  için  $t < 0 \Rightarrow \wedge \{t: N(x, t) \geq \alpha\} \geq 0, \alpha \in (0,1) \Rightarrow \|x\|_\alpha \geq 0, \alpha \in (0,1)$

N2: Eğer  $\|x\|_\alpha = 0$  ise

(N6) dan  $\wedge \{t: N(x, t) \geq \alpha\} = 0, \forall t \in R, t > 0, N(x, t) \geq \alpha > 0 \Rightarrow x = 0$  dir.

Diğer taraftan,

$x = 0 \Rightarrow N(x, t) = 1, \forall t > 0 \Rightarrow, \forall \alpha \in (0,1), \wedge \{t: N(x, t) \geq \alpha\} = 0, \|x\|_\alpha = 0$  dir.

N3: Eğer  $c \neq 0$  ise;

$$\|cx\|_\alpha = \wedge \{t: N(cx, t) \geq \alpha\} = \wedge \left\{t: N\left(x, \frac{t}{|c|}\right) \geq \alpha\right\}$$

$$= \wedge \{|c|t: N(x, t) \geq \alpha\} = |c| \wedge \{t: N(x, t) \geq \alpha\}$$

Dolayısıyla  $\|cx\|_\alpha = |c| \|x\|_\alpha$  elde edilir.

Eğer  $c = 0$  ise

$$\|cx\|_\alpha = \|0\|_\alpha = 0\|x\|_\alpha = |c|\|x\|_\alpha, \forall \alpha \in (0,1)$$

olduğu görülür.

N4:  $r = t + s$  olmak üzere,

$N(x, t) \geq \alpha, N(u, s) \geq \alpha \Rightarrow N(x + u, t + s) \geq \alpha$  olduğu için

$$\begin{aligned} \|x\|_\alpha + \|u\|_\alpha &= \wedge \{t: N(x, t) \geq \alpha\} + \wedge \{s: N(u, s) \geq \alpha\} \\ &= \wedge \{t + s: N(x, t) \geq \alpha, N(u, s) \geq \alpha\} \\ &\geq \wedge \{t + s: N(x + u, t + s) \geq \alpha\} \\ &\geq \wedge \{r: N(x + u, r) \geq \alpha\} \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\|x + u\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha + \|u\|_\alpha \text{ dır.}$$

Şimdi  $0 < \alpha_1 < \alpha_2$  alalım.

$$\|x\|_{\alpha_1} = \wedge \{t: N(x, t) \geq \alpha_1\}, \|x\|_{\alpha_2} = \wedge \{t: N(x, t) \geq \alpha_2\}$$

elde ederiz.  $\alpha_1 < \alpha_2$  olduğundan;

$$\begin{aligned} \{t: N(x, t) \geq \alpha_1\} &\subset \{t: N(x, t) \geq \alpha_2\} \\ &\Rightarrow \wedge \{t: N(x, t) \geq \alpha_2\} \geq \wedge \{t: N(x, t) \geq \alpha_1\} \\ &\Rightarrow \|x\|_{\alpha_2} \geq \|x\|_{\alpha_1} \end{aligned}$$

elde edilir.

## 6.2. Toplamsal İkinci dereceden Fonksiyonel Denklemlerin Fuzzy Kararlılığı

Bu bölümde;

$$f(2x + y) + f(2x - y) = f(x + y) + f(x - y) + 2f(2x) - 2f(x)$$

fonksiyonel denklemin genelleştirilmiş Hyers-Ulam kararlılığı Fuzzy-Banach uzaylarında ele alınacaktır.

Hyers (1941) ,  $E$  ve  $E'$  Banach uzayları için Ulam'ın (1940) sorusuna ilk defa uygun bir cevap verdi.

$f: E \rightarrow E'$  , her  $x, y \in E$  ve bazı  $\delta > 0$  için;

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta$$

olacak şekilde Banach uzayları arasında bir dönüşüm olsun. Bu takdirde her  $x \in E$  için

$$\|f(x) - T(x)\| \leq \delta$$

olacak şekilde bir tek  $T: E \rightarrow E'$  toplamsal dönüşümü vardır.

Şimdi kabul edelim ki  $E$  ve  $E'$  ,  $E'$  tam olmak üzere reel normlu uzaylar olsunlar.

Her bir  $x \in E$  için  $t \in R$  de  $t \rightarrow f(tx)$  sürekli dönüşüm olacak şekilde  $f: E \rightarrow E'$  bir dönüşüm olduğunu ve ayrıca her  $x, y \in E$  için

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

olacak şekilde  $\delta \geq 0$  ve  $p \neq 1$  in var olduğunu kabul edelim. Bu takdirde her  $x \in E$  için

$$\|f(x) - T(x)\| \leq \frac{2\delta\|x\|^p}{|2^p - 2|}$$

olacak şekilde bir tek  $T: E \rightarrow E'$  ne lineer dönüşümü vardır.

Diğer taraftan Rassias (1982, 1984, 1985, 1989) çalışmalarında Hyers kararlılık sonucunu normların farklı kuvvetlerini alarak daha zayıf bir şart altında sunarak genelleştirdi.

### Teorem 6.2.1.

Kabul edelim ki  $\theta \geq 0$  ve  $p_1, p_2 \in R$  sabitleri  $p = p_1 + p_2 \neq 1$  olacak şekilde  $f: E \rightarrow E'$  bir  $E$  normlu uzayından  $E'$  Banach uzayına dönüşümü;

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon\|x\|^{p_1}\|y\|^{p_2}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde her  $x, y \in E$  için var olsunlar. Bu takdirde her  $x \in E$  için;

$$\|f(x) - T(x)\| \leq \frac{\theta}{2 - 2^p} \|x\|^p$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir  $T: E \rightarrow E'$  toplamsal dönüşümü vardır.

Eğer ilave olarak her  $x \in E$  için her bir sabit  $x$  için  $t \in R$  de  $f(tx)$  sürekli ise  $T$  lineerdir.

Bu çalışmanın 5. bölümünde ayrıntılı olarak verildiği şekilde Najati ve Moghimi (2008) tarafından quasi-Banach uzaylarında ikinci dereceden ve toplamsal fonksiyonlardan türetilen bir fonksiyonel denklem için genelleştirilmiş Hyers-Ulam kararlılığı elde edildi.

Bu bölümde Gordji ve ark. (2009) tarafından çalışılan ve ikinci dereceden ve toplamsal fonksiyonlardan elde edilen ;

$$f(2x + y) + f(2x - y) = f(x + y) + f(x - y) + 2f(2x) - 2f(x) \quad (6.3)$$

fonksiyonel denklemi ele alınacaktır. Kolaylıkla görülebilir ki  $f(x) = ax^2 + bx + c$  fonksiyonu (6.3) fonksiyonel denkleminin bir çözümüdür.

Bu bölümde Fuzzy Normlu lineer uzaylarda (6.3) fonksiyonel denklemi için genelleştirilmiş Hyers-Ulam kararlılığının bazı versiyonları araştırılacaktır.

Bu bölüm boyunca  $X, (Y, N)$  ve  $(Z, N')$  nün sırasıyla lineer uzay, Fuzzy normlu uzay ve Fuzzy Banach uzayı olduğu kabul edilecektir.

Aşağıdaki teoremden Gordji ve ark. (2009) tarafından ispatlanan (6.3) fonksiyonel denklemi için bir fuzzy genelleştirilmiş Hyers-Ulam tipi teorem ispatlanacaktır.

### **Tanım. 6.2.1.**

$(Y, N)$  fuzzy normlu uzay ve  $\{x_n\}$  bu uzayda bir dizi olsun. Eğer her  $t \geq 0$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x, t) = 1$  olacak şekilde bir  $x \in Y$  varsa  $\{x_n\}$  dizisine yakınsaktır denir. Bu durumda  $x$  e  $\{x_n\}$  dizisinin fuzzy limiti denir ve  $N - \lim x_n = x$  ile gösterilir.

Eğer her  $\varepsilon > 0$  ve  $t > 0$  için  $N(x_{n+p} - x_n, t) > 1 - \varepsilon$  olacak şekilde her  $n \geq n_0$  ve  $p > 0$  için  $n_0$  sayısı bulunabiliyorsa  $X$  uzayındaki  $\{x_n\}$  dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanımdan bir fuzzy normlu uzaydaki her yakınsak dizinin bir Cauchy dizisi olduğu görülür. Eğer her Cauchy dizisi yakınsak ise fuzzy normlu uzaya bir fuzzy Banach uzayı denir.

**Teorem 6.2.2.**

$\varphi_1: X \times X \rightarrow Z$ , bazı  $0 < \alpha < 4$  için ve her  $x \in X, y \in \left\{0, \frac{x}{3}, \frac{4x}{3}, \frac{-2x}{3}, x\right\}$  ve  $a > 0$  için ;

$$N'(\varphi_1\left(\frac{2x}{3}, 2y\right), a) \geq N'(\alpha\varphi_1\left(\frac{x}{3}, y\right), a) \tag{6.4}$$

ü sağlayacak şekilde bir fonksiyon ve her  $x, y \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N'(\varphi_1(2^n x, 2^n y, 4^n a)) = 1$$

olsun. Ayrıca  $f: X \rightarrow Y, f(0) = 0$  her  $a > 0$  ve her  $x, y \in X$  için;

$$N(f(2x + y) + f(2x - y) - f(x + y) - f(x - y) - 2f(2x) + 2f(x), a) \geq N'(\varphi_1(x, y), a) \tag{6.5}$$

i sağlayan bir çift fonksiyon olsun, bu takdirde her  $x \in X$  ve her  $a > 0$  için;

$$N(Q(x) - f(x), a) \geq N_1''(x, \frac{a(4-\alpha)}{6}) \tag{6.6}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir  $Q: X \rightarrow Y$  ikinci dereceden dönüşümü vardır. Burada;

$$N_1''(x, a) =$$

$$\min \left\{ N'(\varphi_1\left(\frac{x}{3}, \frac{x}{3}\right), a), N'(\varphi_1\left(\frac{x}{3}, x\right), a), N'(\varphi_1\left(\frac{x}{3}, \frac{4x}{3}\right), a), N'(\varphi_1\left(\frac{x}{3}, \frac{-2x}{3}\right), a), N'(\varphi_1\left(\frac{x}{3}, 0\right), a) \right\}$$

dır.

**İspat:**

(6.5) te  $y$  yerine  $x + y$  yazılırsa  $a > 0$  ve her  $x, y \in X$  için;

$$N(f(3x + y) + f(x - y) - f(2x + y) - f(y) - 2f(2x) + 2f(x), a) \geq N'(\varphi_1(x, x + y), a) \tag{6.7}$$

elde edilir. (6.7) de  $y$  yerine  $-y$  alınırsa her  $x, y \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N(f(3x - y) + f(x + y) - f(2x - y) - f(y) - 2f(2x) + 2f(x), a) \geq N'(\varphi_1(x, x - y), a) \quad (6.8)$$

elde edilir. Böylece (6.5), (6.7) ve (6.8) den her  $x, y \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N(f(3x + y) + f(3x - y) - 2f(y) - 6f(2x) + 6f(x), 3a) \geq \min\{N'(\varphi_1(x, y), a), N'(\varphi_1(x, x + y), a), N'(\varphi_1(x, x - y), a)\} \quad (6.9)$$

elde edilir. (6.9) da  $y = 0$  yazılarak her  $x, y \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N(2f(3x) - 6f(2x) + 6f(x), 3a) \geq \min\{N'(\varphi_1(x, x), a), N'(\varphi_1(x, 0), a)\} \quad (6.10)$$

olur. (6.9) da  $y = 3x$  yazılarak her  $x, y \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N(f(6x) - 2f(3x) - 6f(2x) + 6f(x), 3a) \geq \min\{N'(\varphi_1(x, 3x), a), N'(\varphi_1(x, 4x), a), N'(\varphi_1(x, -2x), a)\} \quad (6.11)$$

olur. (6.10) ve fuzzy normun  $(N_3)$  şartından her  $x, y \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N(-2f(3x) + 6f(2x) - 6f(x), 3a) \geq \min\{N'(\varphi_1(x, x), a), N'(\varphi_1(x, 0), a)\} \quad (6.12)$$

elde edilir. Dolayısıyla (6.11) ve (6.12) den her  $x, y \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N(f(6x) - 4f(3x), 6a) \geq \min\{N'(\varphi_1(x, x), a), N'(\varphi_1(x, 3x), a), N'(\varphi_1(x, 4x), a), N'(\varphi_1(x, -2x), a), N'(\varphi_1(x, 0), a)\}$$

(6.13)

eşitsizliği çıkar. (6.13) te her  $x \in X$  ve  $a > 0$  için  $x$  yerine  $\frac{x}{3}$  yazılırsa;

$$N(f(2x) - 4f(x), 6a) \geq N_1''(x, a) \quad (6.14)$$

elde edilir. Böylece her  $x \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N\left(\frac{f(2x)}{4} - f(x), \frac{3a}{2}\right) \geq N_1''(x, a) \quad (6.15)$$

elde edilir. (6.15) te  $x$  yerine  $2^n x$  alınırsa her  $x \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N\left(\frac{f(2^{n+1}x)}{4} - f(2^n x), \frac{3a}{2}\right) \geq N_1''(2^n x, a) \quad (6.16)$$

elde edilir. (6.4) kullanılarak her  $x \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N\left(\frac{f(2^{n+1}x)}{4} - f(2^n x), \frac{3a}{2}\right) \geq N_1''\left(x, \frac{a}{\alpha^n}\right) \quad (6.17)$$

elde edilir.  $a$  yerine  $\alpha^n a$  alınarak her  $x \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N\left(\frac{f(2^{n+1}x)}{4^{n+1}} - \frac{f(2^n x)}{4^n}, \frac{3a\alpha^n}{2(4^n)}\right) \geq N_1''(x, a) \quad (6.18)$$

olduğu görülür.

$$\frac{f(2^n x)}{4^n} - f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(2^{i+1}x)}{4^{i+1}} - \frac{f(2^i x)}{4^i}$$

olduğundan ve (6.18) den her  $x \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N\left(\frac{f(2^n x)}{4^n} - f(x), \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3a\alpha^i}{2(4^i)}\right) \geq \min \cup_{i=0}^{n-1} \left\{ N\left(\frac{f(2^{i+1}x)}{4^{i+1}} - \frac{f(2^i x)}{4^i}, \frac{3a\alpha^i}{2(4^i)}\right) \right\} \geq N_1''(x, a) \quad (6.19)$$

ortaya çıkar. (6.19) da  $x$  yerine  $2^m x$  yazılırsa;

$$N\left(\frac{f(2^{n+m}x)}{4^{n+m}} - \frac{f(2^m x)}{4^m}, \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3a\alpha^i}{2(4^{i+m})}\right) \geq N_1''(2^m x, a) \geq N_1''\left(x, \frac{a}{\alpha^m}\right)$$

ve böylece her  $x \in X$  ve  $a > 0$  ve  $m, n \geq 0$  için;

$$N\left(\frac{f(2^{n+m}x)}{4^{n+m}} - \frac{f(2^m x)}{4^m}, \sum_{i=m}^{n+m-1} \frac{3a\alpha^i}{2(4^i)}\right) \geq N_1''(x, a)$$

elde edilir. Böylece her  $x \in X$  ve  $a > 0$  ve  $m, n \geq 0$  için;

$$N\left(\frac{f(2^{n+m}x)}{4^{n+m}} - \frac{f(2^m x)}{4^m}, a\right) \geq N_1''\left(x, \frac{a}{\sum_{i=m}^{n+m-1} \frac{3\alpha^i}{2(4^i)}}\right) \quad (6.20)$$

sonucu çıkar.  $0 < \alpha < 4$  ve  $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{4}\right)^i < \infty$  olduğundan yakınsaklığın Cauchy

kriterindenve fuzzy normun ( $N_5$ ) özelliğinden  $\left\{\frac{f(2^n x)}{4^n}\right\}$  dizisinin ( $Y, N$ ) fuzzy

normlu uzayında bir Cauchy dizisi olduğu elde edilir. ( $Z, N'$ ) fuzzy Banach uzayı

olduğu için bu dizi bir  $Q(x) \in Y$  ye yakınsaktır. Böylece  $Q: X \rightarrow Y$  dönüşümü

$Q(x) = N - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x)}{4^n}$  (her  $x \in X$  için) ile tanımlanabilir. (6.20) de  $m=0$  alınırsa,

her  $x \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N\left(\frac{f(2^n x)}{4^n} - f(x), a\right) \geq N_1''\left(x, \frac{a}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{3\alpha^i}{2(4^i)}}\right) \quad (6.21)$$

elde edilir.  $n \rightarrow \infty$  iken limit alınır ve fuzzy normun ( $N_6$ ) özelliği kullanılırsa

her  $x \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N(Q(x) - f(x), a) \geq N_1''\left(x, \frac{a(4-\alpha)}{6}\right)$$

elde edilir.

Şimdi  $Q$  nun ikinci dereceden olduğunu gösterelim. (6.5) te  $x$  ve  $y$  yerine sırasıyla  $2^n x$  ve  $2^n y$  yazılırsa her  $x, y \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N\left(\frac{f(2^n(2x+y))}{4^n} + \frac{f(2^n(2x-y))}{4^n} - \frac{f(2^n(x+y))}{4^n} - \frac{f(2^n(x-y))}{4^n} - \frac{2f(2^n(2x))}{4^n} + \frac{2f(2^n x)}{4^n}, a\right) \geq N'(\varphi_1(2^n x, 2^n y), 4^n a)$$

elde edilir.  $\lim_{n \rightarrow \infty} N'(\varphi_1(2^n x, 2^n y), 4^n a) = 1$  ve  $Q(0) = 0$  olduğundan  $Q: X \rightarrow Y$  dönüşümünün ikinci dereceden olduğu sonucu çıkar.

şimdi  $Q$  nun bir tek olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki  $Q': X \rightarrow Y$  (6.6) yı sağlayan başka bir ikinci dereceden dönüşüm olsun.  $x \in X$  i sabit alalım, her  $n \in N$  için;

$$Q(2^n x) = 4^n Q(x) \text{ ve } Q'(2^n x) = 4^n Q'(x)$$

olduğu açıktır.(6.6) dan;

$$\begin{aligned} N(Q(x) - Q'(x), a) &= N\left(\frac{Q(2^n x)}{4^n} - \frac{Q'(2^n x)}{4^n}, a\right) \\ &\geq \min\left\{N\left(\frac{Q(2^n x)}{4^n} - \frac{f(2^n x)}{4^n}, \frac{a}{2}\right), N\left(\frac{f(2^n x)}{4^n} - \frac{Q'(2^n x)}{4^n}, \frac{a}{2}\right)\right\} \\ &\geq N_1''(2^n x, \frac{a(4-\alpha)(4^n)}{12}) \geq N_1''(x, \frac{a(4-\alpha)(4^n)}{12\alpha^n}) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(4-\alpha)(4^n)}{12\alpha^n} = \infty \text{ olduğu için } \lim_{n \rightarrow \infty} N_1''(x, \frac{a(4-\alpha)(4^n)}{12\alpha^n}) = 1 \text{ elde edilir.}$$

Dolayısıyla her  $x \in X$  ve her  $a > 0$  için  $N(Q(x) - Q'(x), a) = 1$  olup

$Q(x) = Q'(x)$  elde edilir. O halde  $Q$  ikinci dereceden dönüşümü bir tekdir.

### **Teorem6.2.3.**

$$\varphi_2: X \times X \rightarrow Z \text{ fonksiyonu bazı } \alpha > 4 \text{ için her } x \in X, y \in \left\{0, \frac{x}{3}, \frac{4x}{3}, \frac{-2x}{3}, x\right\}$$

ve  $a > 0$  için;

$$N'\left(\varphi_2\left(\frac{x}{2(3)}, \frac{y}{2}\right), a\right) \geq N'\left(\varphi_2\left(\frac{x}{2(3)}, y\right), \alpha a\right)$$

olacak şekilde bir fonksiyon ve her  $x, y \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N'(4^n \varphi_2(2^{-n} x, 2^{-n} y), a) = 1$$

olsun.  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $f(0) = 0$  ve her  $x, y \in X$  ve her  $a > 0$  için çift fonksiyon olsun. Bu takdirde;

$$N_2''(x, a)$$

$$:= \min \left\{ N'(\varphi_2 \left( \frac{x}{3}, \frac{x}{3} \right), a), N'(\varphi_2 \left( \frac{x}{3}, x \right), a), N'(\varphi_2 \left( \frac{x}{3}, \frac{4x}{3} \right), a), N'(\varphi_2 \left( \frac{x}{3}, \frac{-2x}{3} \right), a), N'(\varphi_2 \left( \frac{x}{3}, 0 \right), a) \right\}$$

olmak üzere her  $x \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N(Q(x) - f(x), a) \geq N_2''(x, \frac{a(\alpha-4)}{6})$$

şartını sağlayan bir tek  $Q: X \rightarrow Y$  ikinci dereceden dönüşümü vardır.

**İspat:** Teorem 6.2.2 de ki benzer ispat teknikleri kullanılarak (6.14) elde edilir.

(6.14) te  $x$  yerine  $\frac{x}{2^{n+1}}$  yazılırsa;

$$N(4f(\frac{x}{2^{n+1}}) - f(\frac{x}{2^n}), 6a) \geq N_2''(\frac{x}{2^{n+1}}, a)$$

ve dolayısıyla her  $x \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N(4^{n+1}f(\frac{x}{2^{n+1}}) - 4^n f(\frac{x}{2^n}), 6(4^n)a) \geq N_2''(\frac{x}{2^{n+1}}, a) \quad (6.22)$$

elde edilir. Buradan her  $x \in X, n \geq 0, m \geq 0$  ve  $a > 0$  için;

$$N(4^{n+m}f(\frac{x}{2^{n+m}}) - 4^m f(\frac{x}{2^m}), a) \geq N_2''(x, \frac{a}{\sum_{i=1}^{n+m} 6(\frac{4}{\alpha})^i}) \quad (6.23)$$

çıkar. Böylece  $\{4^n f(\frac{x}{2^n})\}$  dizisi  $(Z, N')$  fuzzy Banach uzayında bir Cauchy dizisidir. Dolayısıyla;

$$Q(x) = N - \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n f(\frac{x}{2^n})$$

ile tanımlanan  $Q: X \rightarrow Y$  fonksiyonu vardır. (6.23) de  $m = 0$  alınırsa

her  $x \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N(Q(x) - f(x), a) \geq N_2''(x, \frac{a(4-\alpha)}{6})$$

elde edilir.

Q nun ikinci dereceden ve tek olduğu Teorem 6.2.2 dekine benzer şekilde gösterilir.

#### **Teorem 6.2.4.**

$$\varphi_3: X \times X \rightarrow Z \quad \text{fonksiyonu} \quad 0 < \alpha < 2 \quad \text{ve} \quad \text{her } x \in X, y \in \left\{ 0, \frac{x}{2}, \frac{3x}{2}, 2x \right\}$$

ve  $a > 0$  için;

$$N' \left( \varphi_3 \left( 2\left(\frac{x}{2}\right), 2y \right) \right) \geq N' \left( \alpha \varphi_3 \left( \frac{x}{2}, y \right) \right) \quad (6.24)$$

olacak şekilde bir fonksiyon ve  $her x, y \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N'(\varphi_3(2^n x, 2^n y), 2^n a) = 1$$

olsun. Ayrıca  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $her x, y \in X$  ve  $her a > 0$  için (6.5) i sağlayan bir tek fonksiyon olsun. Bu takdirde;

$$\begin{aligned} & N_3''(x, a) \\ &= \min \left\{ N'(\varphi_3(x, x), a), N'(\varphi_3\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right), a), N'(\varphi_3\left(\frac{x}{2}, 2x\right), a), N'(\varphi_3\left(\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}\right), a) \right\} \end{aligned}$$

olmak üzere  $her x \in X$  için,

$$N(A(x) - f(x), a) \geq N_3''\left(x, \frac{a(2-\alpha)}{4}\right) \quad (6.25)$$

sağlanacak şekilde bir tek  $A: X \rightarrow Y$  toplamsal dönüşümü vardır.

**İspat:** (6.5) de  $y$  yerine  $x$  yazılırsa  $her x \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N(f(3x) - 3f(2x) + 3f(x), a) \geq N'(\varphi_3(x, x), a) \quad (6.26)$$

elde edilir. Yine (6.5) de  $y$  yerine  $3x$  yazılırsa  $her x \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N(f(5x) - f(4x) - f(2x) + f(x), a) \geq N'(\varphi_3(x, 3x), a) \quad (6.27)$$

elde edilir. Ayrıca (6.5) de  $y$  yerine  $4x$  yazılırsa  $her x \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N(f(6x) - f(5x) + f(3x) - 3f(2x) + 2f(x), a) \geq N'(\varphi_3(x, 4x), a) \quad (6.28)$$

elde edilir. (6.26), (6.27) ve (6.28) den  $her x \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$\begin{aligned} & N(f(6x) - f(4x) - f(2x), 3a) \geq \\ & \min\{N'(\varphi_3(x, x), a), N'(\varphi_3(x, 3x), a), N'(\varphi_3(x, 4x), a)\} \end{aligned} \quad (6.29)$$

çıkar. (6.29) de  $x$  yerine  $\frac{x}{2}$  yazılırsa  $her x \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$\begin{aligned} & N(f(3x) - f(2x) - f(x), 3a) \geq \\ & \min \left\{ N'(\varphi_3\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right), a), N'(\varphi_3\left(\frac{x}{2}, 2x\right), a), N'(\varphi_3\left(\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}\right), a) \right\} \end{aligned} \quad (6.30)$$

elde edilir. (6.26) ve (6.30) dan  $her x \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N\left(\frac{f(2x)}{2} - f(x), 2a\right) \geq N_3''(x, a) \quad (6.31)$$

çıkar. (6.31) de  $x$  yerine  $2^n x$  yazılırsa  $her x \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N\left(\frac{f(2^{n+1}x)}{2} - f(2^n x), 2a\right) \geq N_3''(x, a)(2^n x, a) \quad (6.32)$$

elde edilir. (6.24) kullanılarak  $her x \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N\left(\frac{f(2^{n+1}x)}{2} - f(2^n x), 2a\right) \geq N_3''\left(x, \frac{a}{\alpha^n}\right) \quad (6.33)$$

elde edilir.  $a$  yerine  $\alpha^n a$  alınarak  $her x \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N\left(\frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} - \frac{f(2^n x)}{2^n}, \frac{2a\alpha^n}{2^n}\right) \geq N_3''(x, a) \quad (6.34)$$

olduğu görülür.

$$\frac{f(2^n x)}{2^n} - f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(2^{i+1}x)}{2^{i+1}} - \frac{f(2^i x)}{2^i}$$

olduğundan ve (6.34) den her  $x \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N\left(\frac{f(2^n x)}{2^n} - f(x), \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2a\alpha^i}{2^i}\right) \geq \min \cup_{i=0}^{n-1} \left\{ N\left(\frac{f(2^{i+1}x)}{2^{i+1}} - \frac{f(2^i x)}{2^i}, \frac{2a\alpha^i}{2^i}\right) \right\} \geq N_3''(x, a) \quad (6.35)$$

olur. (6.35) te  $x$  yerine  $2^m x$  yazılırsa;

$$N\left(\frac{f(2^{n+m}x)}{2^{n+m}} - \frac{f(2^m x)}{2^m}, \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2a\alpha^i}{2^{i+m}}\right) \geq N_3''(2^m x, a) \geq N_3''\left(x, \frac{a}{\alpha^m}\right)$$

ve böylece her  $x \in X$  ve  $a > 0$  ve  $m, n \geq 0$  için;

$$N\left(\frac{f(2^{n+m}x)}{2^{n+m}} - \frac{f(2^m x)}{2^m}, \sum_{i=m}^{n+m-1} \frac{2a\alpha^i}{2^i}\right) \geq N_3''(x, a)$$

elde edilir. Böylece her  $x \in X$  ve  $a > 0$  ve  $m, n \geq 0$  için;

$$N\left(\frac{f(2^{n+m}x)}{2^{n+m}} - \frac{f(2^m x)}{2^m}, a\right) \geq N_3''\left(x, \frac{a}{\sum_{i=m}^{n+m-1} \frac{2\alpha^i}{2^i}}\right) \quad (6.36)$$

olduğu çıkar. .  $0 < \alpha < 2$  ve  $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^i < \infty$  olduğu için Cauchy yakınsaklık

kriterinden ve fuzzy normun  $(N_5)$  özelliğinden  $(Y, N)$  de  $\left\{\frac{f(2^n x)}{2^n}\right\}$  dizisi bir

Cauchy dizisidir.  $(Z, N')$  bir fuzzy Banach uzayı olduğu için bu dizi  $A(x) \in Y$  ye yakınsaktır.

Dolayısıyla her  $x \in X$  için  $A: X \rightarrow Y$  dönüşümü  $A(x) = N - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$  ile tanımlanabilir. (6.36) da  $m = 0$  alınır;

$$N\left(\frac{f(2^n x)}{2^n} - f(x), a\right) \geq N_3''\left(x, \frac{a}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{2\alpha^i}{2^i}}\right) \quad (6.37)$$

elde edilir.  $n \rightarrow \infty$  iken limit alınırsa fuzzy normun  $(N_5)$  özelliği kullanılarak her  $x \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N(A(x) - f(x), a) \geq N_3''(x, a)$$

sonucu elde edilir.

Şimdi A'nın toplamsal olduğunu gösterelim.

(6.5) de  $x$  ve  $y$  yerine sırasıyla  $2^n x$  ve  $2^n y$  yazılırsa her  $x, y \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N\left(\frac{f(2^n(2x+y))}{2^n} + \frac{f(2^n(2x-y))}{2^n} - \frac{f(2^n(x+y))}{2^n} - \frac{f(2^n(x-y))}{2^n} - \frac{2f(2^n(2x))}{2^n} + \frac{2f(2^n x)}{2^n}, a\right) \geq N'(\varphi_3(2^n x, 2^n y), 2^n a)$$

elde edilir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N'(4^n \varphi_3(2^n x, 2^n y), 2^n a) = 1$$

olduğu için  $A: X \rightarrow Y$  dönüşümünün toplamsal olduğu elde edilir.

$A$ 'nın tekliğini göstermek için kabul edelim ki  $A': X \rightarrow Y$  dönüşümü (6.25) i sağlayan diğer bir toplamsal dönüşüm olsun.  $x \in X$  i sabit, her  $n \in N$  için;

$$A(2^n x) = 2^n A(x) \text{ ve } A'(2^n x) = 2^n A'(x)$$

olduğu açıktır.(6.25) den, her  $x \in X$  ve her  $a > 0$  için;

$$\begin{aligned} N(A(x) - A'(x), a) &= N\left(\frac{A(2^n x)}{2^n} - \frac{A'(2^n x)}{2^n}, a\right) \\ &\geq \min \left\{ N\left(\frac{A(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^n x)}{2^n}, \frac{a}{2}\right), N\left(\frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{A'(2^n x)}{2^n}, \frac{a}{2}\right) \right\} \\ &\geq N_3''(2^n x, \frac{2^n a(2-\alpha)}{8}) \geq N_3''(x, \frac{2^n a(2-\alpha)}{8\alpha^n}) \end{aligned}$$

olur.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(2^n)(2-\alpha)}{8\alpha^n} = \infty$  olduğu için  $\lim_{n \rightarrow \infty} N_3''(x, \frac{(2^n)a(2-\alpha)}{8\alpha^n}) = 1$  elde edilir. Dolayısıyla her  $x \in X$  ve her  $a > 0$  için  $N(A(x) - A'(x), a) = 1$  olup  $A(x) = A'(x)$  elde edilir. O halde  $A$  tekdir.

### **Teorem 6.2.5.**

$\varphi_4: X \times X \rightarrow Z$  fonksiyonu bazı  $\alpha > 2$  ler için ve her  $x \in X, y \in \left\{x, \frac{x}{2}, \frac{3x}{2}, 2x\right\}$

ve  $a > 0$  için;

$$N'\left(\varphi_4\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right), \frac{y}{2}\right), a\right) \geq N'\left(\varphi_4\left(\left(\frac{x}{2}\right), y\right), \alpha a\right)$$

olacak şekilde bir fonksiyon ve her  $x, y \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N'(2^n \varphi_4(2^{-n} x, 2^{-n} y), a) = 1$$

olsun. Ayrıca  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu her  $x, y \in X$  ve her  $a > 0$  için (6.5) i sağlayan bir tek fonksiyon olsun. Bu takdirde;

$$N_4''(x, a) = \min \left\{ N'(\varphi_4(x, x), a), N'(\varphi_4\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right), a), N'(\varphi_4\left(\frac{x}{2}, 2x\right), a), N'(\varphi_4\left(\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}\right), a) \right\}$$

olmak üzere her  $x \in X$  ve her  $a > 0$  için;

$$N(A(x) - f(x), a) \geq N_4''\left(x, \frac{a(\alpha-2)}{4}\right)$$

olacak şekilde bir tek  $A: X \rightarrow Y$  toplamsal dönüşümü vardır.

**İspat:** Teorem 6.2.4 de ki benzer ispat teknikleri kullanılarak (6.31) elde edilir.

(6.31) de  $x$  ile  $\frac{x}{2^{n+1}}$  rolleri değiştirilirse;

$$N\left(f\left(\frac{x}{2^n}\right) - 2f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right), a\right) \geq N_4''\left(\frac{x}{2^{n+1}}, a\right)$$

ve böylece her  $x \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N\left(2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) - 2^{n+1} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right), (2^n)a\right) \geq N_4''\left(\frac{x}{2^{n+1}}, a\right)$$

elde edilir. Buradan her  $x \in X, n \geq 0, m \geq 0$  ve  $a > 0$  için;

$$N\left(2^m f\left(\frac{x}{2^m}\right) - 2^{n+m} f\left(\frac{x}{2^{n+m}}\right), a\right) \geq N_4''\left(x, \frac{a}{\sum_{i=1}^{n+m} \frac{1}{\alpha^i}}\right) \quad (6.38)$$

olduğu çıkar. Böylece  $(Z, N')$  fuzzy Banach uzayında  $\left\{2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right\}$  dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu sonucuna varılır. Dolayısıyla;

$$A(x) = N - \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

ile tanımlı bir  $A: X \rightarrow Y$  fonksiyonu vardır. (6.38) de  $m = 0$  alınırsa

her  $x \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$N(A(x) - f(x), a) \geq N_4''(x, a)$$

elde edilir.

$A$  nın ikinci dereceden ve tek olduğu Teorem 6.2.3 dekine benzer şekilde gösterilebilir.

### **Teorem 6.2.6.**

$\varphi: X \times X \rightarrow Z$  fonksiyonu bazı  $0 < \alpha < 2$  ve

her  $x \in X, y \in \beta \left\{0, x, \frac{x}{2}, \frac{4x}{3}, \frac{-2x}{3}, \frac{x}{3}, \frac{3x}{2}, 2x\right\}$  ve  $a > 0$  için;

$$N' \left( \varphi \left( 2\left(\frac{x}{2}\right), 2y \right), a \right) \geq N' \left( \alpha \varphi \left( \left(\frac{x}{2}\right), y \right), a \right)$$

olacak şekilde bir fonksiyon olsun.  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu  $f(0) = 0$  olmak üzere ve her  $x, y \in X$  ve  $a > 0$  için (6.5) şartını sağlayan bir fonksiyon olsun.

Bu takdirde (6.3) ü ve her  $x \in X$  ve her  $a > 0$  için;

$$N(Q(x) - A(x) - f(x), a) \geq N''(x, a) \quad (6.39)$$

u sağlayan bir tek  $Q: X \rightarrow Y$  ikinci dereceden dönüşümü ve bir tek  $A: X \rightarrow Y$  toplamsal dönüşümü vardır. Burada;

$$N''(x, a) = \min \left\{ N_1'' \left( x, \frac{a(4-\alpha)}{12} \right), N_3'' \left( x, \frac{a(2-\alpha)}{8} \right) \right\}$$

ile tanımlanmıştır. Ayrıca  $N_1''$  ve  $N_3''$  ise Teorem6.2.1 ve Teorem6.2.4 deki gibi tanımlıdır.

### İspat:

Her  $x \in X$  için  $f_e(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$  olsun. Bu takdirde  $f_e(0) = 0$   $f_e(-x) = f_e(x)$  ve her  $x, y \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$\begin{aligned} & N(f_e(2x+y) + f_e(2x-y) - f_e(x+y) - f_e(x-y) - 2f_e(2x) + 2f_e(x), a) \\ &= N\left(\frac{1}{2}[f(2x+y) + f(2x-y) - f(x+y) - f(x-y) - 2f(2x) + 2f(x)] \right. \\ &+ \frac{1}{2}[f(-2x-y) + f(-2x+y) - f(-x-y) - f(-x+y) - 2f(-2x) + 2f(-x)], a) \\ &= N([f(2x+y) + f(2x-y) - f(x+y) - f(x-y) - 2f(2x) + 2f(x)] \\ &+ [f(-2x-y) + f(-2x+y) - f(-x-y) - f(-x+y) - 2f(-2x) + 2f(-x)], 2a) \\ &\geq \min\{N'(\varphi(x, y), a), N'(\varphi(-x, -y), a)\} \end{aligned} \quad (6.40)$$

olur. Böylece her  $x \in X$  ve her  $a > 0$  için;

$$N(Q(x) - f_e(x), a) \geq N_1'' \left( x, \frac{a(4-\alpha)}{6} \right) \quad (6.41)$$

i sağlayan bir tek ikinci dereceden  $Q: X \rightarrow Y$  fonksiyonu vardır. Her  $x \in X$  için;

$f_0(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$  olsun. Bu takdirde  $f_0(x) = 0, f_0(-x) = -f_0(x)$  ve her  $x, y \in X$  ve  $a > 0$  için;

$$\begin{aligned} & N(f_0(2x+y) + f_0(2x-y) - f_0(x+y) - f_0(x-y) - 2f_0(2x) + 2f_0(x), a) \\ &\geq \min\{N'(\varphi(x, y), a), N'(\varphi(-x, -y), a)\} \end{aligned}$$

olur. Teorem6.2.4 den her  $x \in X$  ve her  $a > 0$  için;

$$N(A(x) - f_0(x), a) \geq N_3'' \left( x, \frac{a(2-\alpha)}{4} \right) \quad (6.42)$$

yi sağlayan bir tek toplamsal  $A: X \rightarrow Y$  fonksiyonu vardır. Böylece (6.39) , (6.41) ve (6.42) den elde edilir ve ispat tamamlanır.

## KAYNAKLAR

- Aczel, J., Dhombres, J., 1989. *Functional Equations in Several Variables*, Cambridge Univ. Press.
- Amir, D., 1986. *Characterizations of Inner Product Spaces*, Birkhauser, Basel.
- Aoki, T., 1950. On the stability of the linear transformation in Banach spaces, *J. Math. Soc. Japan*, **2**: 64-66.
- Bag, T., Samanta, S. K., 2003. Finite dimensional fuzzy normed linear spaces, *J. Fuzzy Math.*, **11**(3): 687-705.
- Bag, T., Samanta, S. K., 2005. Fuzzy bounded linear operators, *Fuzzy Sets and Systems*, **151**: 513-547.
- Benyamini, Y. Lindenstrauss, J. 2000 Geometric Nonlinear Functional Analysis, Vol. 1, Colloq. Publ. 48, **Amer. Math. Soc.**, Providence.
- Cauchy, A. L. 1821. *Cours D'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, 1, Analyse Algebrique, V, Paris (1821) [Oeuvers, (2) 3, 98–103 and 220–229, Paris (1897)].
- Cheng, S. C., Mordeson, J. N., 1994. Fuzzy linear operator and fuzzy normed linear spaces, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **86** : 429-436.
- Cholewa, P. W. 1984. Remarks on the stability of functional equations, *Aequationes Math.*, **27**: 76-86.
- Czerwik, S., 1992. On the stability of the ikinci dereceden mapping in normed spaces, *Abh. Math. Sem. Univ.*, Hamburg **62**: 59-64.
- Darboux, G., 1875. Sur la composition des Forces on Statique, *Bull. Sci. Math.*, **1**(9): 281–288.
- Felbin, C., 1992. Finite dimensional fuzzy normed linear space, *Fuzzy Sets and Systems*, **48**(2): 239-248.
- Forti, G. L., 1987. The stability of homomorphisms and amenability, with applications to functional equations. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **57**: 215-226.
- Gajda, Z., 1991. On stability of additive mappings, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, **14**: 431–434.
- Gavruta, P., 1994. A generalization of the Hyers-Ulam-Rassias stability of approximately additive mappings, *J. Math. Anal. Appl.*, **184**: 431-436.

- Gordji, M. E., Ghobadipour, N., Rassias, J. M., 2009. Fuzzy stability of additive–ikinci dereceden functional equations, *ArXiv:0903.0842v1*.
- Grabiec, A., 1996. The generalized Hyers-Ulam stability of a class of functional equations, *Publ. Math. Debrecen*, **48**: 217-235.
- Hyers, D. H., 1941. On the stability of the linear functional equation, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **27**: 222-224.
- Hyers, D. H., Rassias, T. M., 1992. Approximate homomorphisms. *Aequationes Math.*, **44**(2-3): 125-153.
- Jordan, P., Von Neumann, J., 1935. On inner products in linear metric spaces, *Ann. of Math.*, **36**: 719-723.
- Jung, S. M., 1998. Hyers-Ulam-Rassias stability of Jensen's equation and its application, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126**: 3137-3143.
- Jun, K. W., Lee, Y. H., 2001. On the Hyers–Ulam–Rassias stability of a Pexiderized ikinci dereceden inequality. *Math. Inequal. Appl.*, **4**: 93–118.
- Kaleva, O., Seikkala, S., 1984. On fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, **12**: 215-229.
- Kannappan, Pl., 1995. İkinci dereceden functional equation and inner product spaces, *Results Math.*, **27**: 368-372.
- Kannappan, Pl., 2009. *Functional Equations and Inequalities with Applications*, Springer Monographs in Mathematics, London.
- Katsaras, A. K., 1984. Fuzzy topological vector spaces II., *Fuzzy Sets and Systems*, **12**(2): 143--154.
- Kramosil, I., Michalek, J., 1975. Fuzzy metric and statistical metric spaces, *Kybernetika*, **11**: 326-334.
- Kurepa, S., 1959. On the ikinci dereceden functional, *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci. Beograd*, **13**: 57-72.
- Mosznar, Z., 1985. Sur la stabilité de l'équation d'homomorphisme (French) [The stability of the homomorphism equation], *Aequationes Math.*, **29**(2-3): 290-306.
- Najati, A., Moghimi, M. B., 2008. Stability of a functional equation deriving from ikinci dereceden and additive functions in quasi-Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **337**: 399-415.

- Rassias, T. M., 1978. On the stability of the linear mapping in Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **72**: 297-300.
- Rassias, T. M., 1990. Problem 16; 2, Report of the 27th International Symp. on Functional Equations, *Aequationes Math.*, **39**:292–293;309.
- Rolewicz, S. , 1984 Metric Linear Spaces, **PWN-Polish Sci. Publ.**, Reidel and Dordrecht.
- Skof, F., 1983. Local properties and approximations of operators, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, **53**: 113-129.
- Ulam, S. M., 1940. *Problems in Modern Mathematics (Chapter VI, Some Questions in Analysis: Section 1, Stability)*. Science ed., John Wiley & Sons, New York.
- Xiao, J., Zhu, X., 2002. On linearly topological structure and property of fuzzy normed linear space. *Fuzzy Sets and Systems*, **125**(2): 153-161.
- Zadeh, L.A., 1965. Fuzzy Sets. *Infor. and Control*, 8:338-353.

## ÖZ GEÇMİŞ

1978 yılında Manisa'da doğdu. İlköğrenimini Manisa'nın Sarıgöl ilçesine bağlı Çimentepe köyünde, orta öğrenimini İzmir Atatürk Lisesi'nde tamamladı. 1996 yılında Malatya İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandı. 2000 yılında mezun oldu. Aynı yıl Malatya'da öğretmenliğe başladı.

Ağustos 2009 da Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisans öğrenimini kazandı. Halen Van'da Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

Raşit KARAKAYA