EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(DOKTORA TEZİ)

TRANSPORT OLAYININ İSTATİSTİKSEL MEKANİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

Hüseyin ŞİRİN

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Fevzi BÜYÜKKILIÇ

Fizik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 404.06.01
Sunuş Tarihi: 28.01.2011

Bornova-İZMİR

2011

Hüseyin ŞİRİN tarafından **DOKTORA TEZİ** olarak sunulan "**Transport Olayının İstatistiksel Mekanik Yöntemlerle İncelenmesi**" başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve **28.01.2011** tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:		**İmza**
Jüri Başkanı	**:** Prof. Dr. İsmail SÖKMEN	....
Raportör Üye	**:** Prof. Dr. Doğan DEMİRHAN	....
Üye	**:** Prof. Dr. Fevzi BÜYÜKKILIÇ	....
Üye	**:** Prof. Dr. Uğur TIRNAKLI	....
Üye	**:** Doç. Dr. Özhan KAYACAN	....

ÖZET

TRANSPORT OLAYININ İSTATİSTİKSEL MEKANİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

ŞİRİN, Hüseyin

Doktora Tezi, Fizik Anabilim Dalı
Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Fevzi BÜYÜKKILIÇ
Ocak 2011, 69 sayfa

Kompleks sistemlerdeki difüzyon olgusunu incelemek için standart yaklaşımlar yeterli olmamaktadır. Bu amaç ile, standart matematiğin açıklamakta yetersiz kaldığı kompleks sistemler içindeki normal olmayan difüzyon olgusunu aydınlatmak için, hesaplamalarda kesirsel matematik kullanılmaktadır. Kinetik denklemin ve benzeri olan difüzyon denkleminin çözümünün standart davranışlardan sapması, kesirsel matematik ve nonekstensif fizik çerçevesinde yapılan çalışmalarla ortaya konmaktadır. Ancak kesirsel matematikteki α-türev mertebesinin ve nonekstensif fizikteki q-entropi indisinin fiziksel orijini bilim çevrelerince merak konusudur. Bu tezde kesirsel matematik ve nonekstensif fizik çerçevesinde yapılan difüzyon denkleminin çözümleri bir model problem olarak gözden geçirilmektedir. Difüzyon denklemi kümülatif küçülmeler/büyümeler metodu ile çözülerek α ve q parametrelerinin fiziksel doğası, uzayın fraktallığı ve bellek etkisi ile açıklanmaktadır. Dağılım fonksiyonlarındaki standart davranışlardan sapmaların matematiksel temelinin kesirsel matematikle, fiziksel mekanizmasının ise kümülatif küçülmeler/büyümeler metodu ile ortaya konabileceği vurgulanmaktadır.

Anahtar Sözcükler: Riemann-Liouville kesirsel integrali, Caputo kesirsel türevi, Mittag-Leffler fonksiyonu, Kesirsel Kinetik Denklem, Kümülatif Küçülmeler/Büyümeler Metodu.

ABSTRACT

INVESTIGATION OF TRANSPORT PHENOMENA BY USING STATISTICAL MECHANICS METHODS

ŞİRİN, Hüseyin

Ph.D. Thesis in Department of Physics
Supervisor: Prof. Dr. Fevzi BÜYÜKKILIÇ
January 2011, 69 pages

Traditional mathematical approaches are not adequate to examine diffusion phenomena in complex systems. With this aim, in order to enlighten the anomalous diffusion phenomena in complex sytems which can not be explained by traditional mathematics, fractional calculus is used in calculations. The deviations from standard behaviors of the solutions for the kinetic equation and the analogous diffusion equation are put forward by investigations which are carried out in the frame of fractional mathematics and nonextensive physics. On the other hand, the physical origins of the order of derivative namely α in fractional mathematics and the entropy index q in nonextensive physics are existing as a topic of interest in scientific media. In this thesis, the solutions of the diffusion equation which have been obtained in the framework of fractional mathematics and nonextensive physics are revised. The diffusion equation is solved by the cumulative diminuation/growth method and physical nature of the parameters α and q are enlightened in connection with fractality of space and the memory effect. It has been emphasized that the mathematical basis of deviations from standard behavior in the distribution functions could be established by fractional mathematics where as the physical mechanism could be revealed using the cumulative diminuation/growth method.

Keywords: Riemann-Liouville fractional integral, Caputo fractional derivative, Mittag-Leffler function, Fractional Kinetic Equation, Cumulative Diminuation/Growth Method.

TEŞEKKÜR

Doktora tez çalışmama başladığım günden itibaren, tezimin planlanmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda, gerek engin bilgi ve tecrübelerini, gerekse manevi desteklerini esirgemeyen, karşılaştığım tüm sıkıntı ve engelleri aşmamı sağlayan değerli hocalarım, sayın Prof. Dr. Fevzi Büyükkılıç ve sayın Prof. Dr. Doğan Demirhan'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca, doktora tez çalışmalarım süresince kıymetli görüşlerinden yararlandığım sayın Doç. Dr. Özhan Kayacan'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında gerek bilimsel, gerek manevi desteğini aldığım sevgili arkadaşım Araş. Gör. Dr. Hüseyin Ertik'e, görüşlerine başvurduğum değerli arkadaşım Araş. Gör. Dr. A. Engin Çalık'a, ayrıca manevi desteklerini esirgemeyen arkadaşlarım Araş. Gör. Dr. İlker Sert, Araş. Gör. Buket Canbaz ve Araş. Gör. İbrahim Özken'e teşekkürü bir borç bilirim.

Bu günlere gelmeme vesile olan çok kıymetli annem Hasene Şirin, babam Mustafa Kemal Şirin ve ağabeyim Sinan Şirin'e de tez çalışmam boyunca bana verdikleri manevi destekten dolayı tüm kalbimle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Transport olayı zaman içindeki termodinamik değişkenlerin değişimi ve parçacıkların hareketi veya akısı ile ilişkilendirilmektedir. Transport olayı genel olarak, momentum, enerji, ısı ve kütle transferini içermektedir. Kütle, enerji, momentum, ısı transportu sadece bir kuvvet uygulandığı zaman ele alınmaktadır. Taşıma işlemi genellikle birim zaman veya alan başına taşınan kütle, enerji, momentum, sıcaklık, yük miktarı ve verilen bir akı "*J*" ile temsil edilmektedir. Taşıma miktarı uygulanan kuvvet ile doğru orantılıdır ve fenamolojik lineer bir denklem ile açıklanabilmektedir:

$$J = -A\frac{dX}{dx}$$

Burada, transport işleminin doğrultusu, x doğrultusudur. Kuvvet, transport yönüne paralel olan x ekseni boyunca X'in gradyenti olarak açıklanabilir. Transport işlemi her zaman yüksek konsantrasyon, sıcaklık, hız v.b. durumundan alçak konsantrasyon, sıcaklık, hız v.b. durumuna doğru olacaktır. A niceliği ise transport işleminin farklı çeşitleri için fiziksel terimlerle ilişkili olan bir sabittir.

Transport işlemlerinin bazı çeşitleri olarak, (1) Kütle transportu – difüzyon, (2) Enerji transportu – termal iletkenlik, (3) Momentum transportu – viskozite, (4) Elektrik transportu – iletkenlik sayılabilir.Bu tez çalışmasında kütle transportu yani difüzyon olgusu ele alınmaktadır. Difüzyon olgusu rasgele hareket eden parçacıkların istatistiğini anlamak için gerekli olmaktadır.

Gerçeğe yakın tasvir edilebilen fiziksel sistemlerde veya kompleks sistemlerde difüzyon olgusunu incelemek için ise standart matematik yeterli olmamaktadır. Fiziksel süreçler korunumlu olmayan ve sönümlü yapıya sahiptir. Fiziksel sistemler bazı dış ve iç etkenlerden dolayı belli kayıplar göstermektedir. Bu kayıpları standart denklemler ile tasvir etmek yerine kesikli yada kesirsel denklemlerle tasvir etmek daha doğrudur. Kesikli veya kesirsel denklemler fiziksel süreçlerin gerçeğe yakın tasvirinde büyük önem arz etmektedir. Bu nedenle birçok fiziksel olayın tasvirinde karşımıza çıkan standart Fokker-Planck denklemi, difüzyon denklemi, kinetik denklemlerin yerine bu denklemleri de genelleyecek alternatif yaklaşımlar yapılması gerekmektedir. Ayrıca standart matematik ile fiziksel süreçler incelendiğinde bellek etkileri ve uzayın fraktallığı ihmal edilmektedir. Uzayın yada zamanın fraktal olduğu durumlarda standart türev ve integraller yerine kesirsel yada kesikli türev yada integralleri kullanmak sistemin tasviri açısından daha doğru olmaktadır. Böylelikle elde olunan sonuçlar standart sonuçlardan farklı olmakla birlikte belli özel durumlarda standart sonuçları genellemekte ve kayıplardan yada sistemin bulunduğu ortamın fraktallığından meydana gelen etkileri incelemede yararlı olmaktadır.

Fiziksel bir süreci kesirsel matematik ile incelemek için standart türev operatörleri yerine kesirsel türev operatörleri kullanılmaktadır:

$$\frac{d}{dt} \to \frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}.$$

Peki, böyle bir dönüşümün geçerli bir fiziksel dayanağı var mıdır? Newton, zaman olgusunun mutlak ve homojen olduğunu varsaymıştır. Başka bir deyişle, bu kabule göre zaman, kendi doğası gereği dışarıdan herhangi bir etkenle ilişki kurmayarak değişmeden dengeli ve eşit miktarda akmaktadır. Zaman kavramı üzerine Newton'un yaptığı bu kabul, Einstein'in özel ve genel görecelilik teorileri üzerine yaptığı çalışmalara kadar genel kabul görmüştür. Çünkü Newton dinamik yasalarının gelişimi ve mekanik problemlerine uygulanabilirliği böyle bir kabulü gerekli kılmaktadır. Ancak, içinde yaşadığımız uzay Newton yasalarının fiziksel olayları açıklamada yeterli olduğu salt öklidyen bir uzay değildir. İçinde yaşadığımız evren statik bir yapıya sahip olmayıp büyük patlama teorisine göre sürekli genişlemektedir. Bu nedenle, evren sürekli genişlediği için bu evrenin bir parçası olan uzay ve zaman kavramları da değişmektedir (Podlubny, 1999; Hilfer, 2000).

Podlubny, zaman ölçeğinin homojen ve statik olmayıp sürekli değiştiğini yani dinamik olduğunu göz önüne alarak kesirsel integral ve türev işlemcilerine uygun fiziksel yorumlar getirdi. Bunun için, Riemann-Liouville kesirsel integralini basit bir matematiksel manipülasyon yardımıyla Stieltjes integrali formunda yazdı ve geometrik bir yaklaşımla homojen zaman (matematik zaman) ölçeği ile homojen olmayan zaman (fizik-kozmik zaman) ölçeği arasında bir ilişki ortaya koydu. Böylece kozmik zaman ölçeğindeki değişmenin, mutlak (homojen) zaman ölçeğine ve α kesirsel türev mertebesine bağlı olduğunu gösterdi (Podlubny, 1999). Podlubny' in yaptığı bu yorumlara ek olarak Hilfer, $t \geq 0$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere, zamana göre kesirsel türev işlemcilerinin, homojen olmayan kozmik zamanın (fizik zamanın) sonsuz küçük üreticileri olarak işlev gördüğünü matematiksel olarak gösterdi. Bu bağlamda, doğada tersinir olarak kabul edilen süreçlerin aslında tersinir olmayan doğaya sahip olduklarını ve tersinirlik olgusunun sadece bir idealleştirme olduğu sonucunu çıkardı (Hilfer, 2000).

Sonuç olarak denilebilir ki, homojen olmayan uzay-zaman içindeki bir sistemin, tersinir olmayan doğasını da içine alacak şekilde gerçek dinamiksel davranışı ancak kesirsel türevler kullanılarak tanımlanabilir. Standart türevlerin kullanıldığı öklidyen yaklaşım ise, uzayın statik ve zamanın homojen olduğu kabulüne dayanmakta ve gerçek sistemlere sadece bir idealleştirmedir.

Tez çalışmasının girişi takip eden ikinci bölümde, bu tez çalışması kapsamında kullanılan kesirsel matematik çerçevesinde, kesirsel integral ve türev işlemcileri kısaca tanıtılmaktadır. Üçüncü bölümde, normal olmayan difüzyon olgusu, kesirsel difüzyon denklemi ve Fokker-Planck denklemi hakkında bilgiler verilmektedir Dördüncü bölümde, difüzyon denkleminin bir benzeri olan kinetik denklem, hem kesirsel matematik hemde kümülatif küçülmeler/büyümeler metodu ile incelenmekte ve sonuçları açıklanmaktadır. Beşinci ve son bölümde ise, tez çalışması kapsamında ortaya çıkan sonuçlar irdelenmektedir.

2. KESİRSEL MERTEBELİ İNTEGRAL VE DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu bölümde, kesirsel matematik çerçevesinde kullanılan lineer formdaki kesirsel integral ve türev işlemcileri tanıtılmaktadır. Bu kesirsel işlemcilerin fizik ve diğer uygulamalı bilim dallarında kullanılabilir olmasını sağlayan Laplace integral dönüşüm tekniği üzerinde durulmaktadır. Bu teknik kullanılarak, kesirsel mertebeli lineer integral ve diferansiyel denklemlerin çözümleri analitik olarak elde edilmektedir. Mittag-Leffler fonksiyonunun bu çözümler üzerindeki temel rolü tartışılmaktadır. Bu bağlamda, (a) Laplace integral dönüşümünün temel formülleri kullanılarak kesirsel matematiğin ana unsurları, (b) birinci ve ikinci tür Abel integral denklemleri ve (c) rölaksasyon ve osilasyon tipindeki kesirsel diferansiyel denklemler ele alınmaktadır.

2.1. Kesirsel Matematiğe Genel Bir Bakış

Kesirsel matematiğin geçmişi Leibniz' e (1695) kadar uzanmaktadır. 18. yüzyılda, Euler (1730) ve Lagrange' ın (1772) katkılarından sonra bu konu üzerine en erken sistematik çalışmalar, 19. yüzyılda, Lacroix (1819), Liouville (1832), Riemann (1853), Holmgren (1864), Grünwald (1867) ve Krug (1890) tarafından yapılmıştır. Bunlara paralel olarak, aynı tarihlerde birçok uygulama da yapılmıştır. Bu uygulamalara, Abel (1823) tarafından çalışılan eşzaman (tautochrone) problemi ve Heaviside (1920) tarafından çalışılan elektromanyetik teorinin bazı problemleri örnek gösterilebilir (Oldham and Spanier, 1974).

Kesirsel matematik, tamsayı mertebeli türev ve integral işlemcilerinin kesirsel mertebeli olarak genelleştirilmesi ve uygulamalarıyla ilgili matematiğin bir dalıdır (Oldham and Spanier, 1974; Miller and Ross, 1993; Podlubny, 1999). Böyle bir genelleştirme, asıl önemini fizik ve mühendisliğin birçok dalındaki uygulamalarında göstermektedir. Fiziksel sistemleri incelemek için kullanılan birçok diferansiyel denklem, türev mertebeleri kesirsel olacak şekilde genelleştirilmektedir. Böylece, standart matematiksel yaklaşımların açıklamada yetersiz kaldığı fiziksel süreçler matematiksel bir teoriye dayandırılabilmektedir

(Hilfer, 2000; Tarasov, 2005a; 2005b; 2005c; 2005d). Günümüzde, kesirsel matematik, kompleks sistemler için fenomolojik teorilere uygulanmaktadır (Metzler and Klafter, 2000; Sokolov et al., 2002). Kesirsel matematik aynı zamanda, doğal sistemlerin kuvvet yasası formundaki davranışları ile bu formdan sapma gösterdikleri davranışları arasındaki ilişkiyi ortaya koyan iyi bir matematiksel araçtır (Saxena et al., 2002, 2004; Mathai et al., 2006).

Literatürde, birbirine denk olması gerekmeyen ve farklı amaçlar için kullanılan birçok kesirsel türev ve integral tanımı mevcuttur. Bunlardan en yaygın kullanılanları, Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Weyl ve Caputo tanımlarıdır. Grünwald-Letnikov tanımı nümerik hesaplamalar için, diğer tanımlar ise analitik hesaplamalar için daha uygundur. Genel olarak, Riemann-Liouville tanımı matematikçiler tarafından, Caputo tanımı ise fizikçiler tarafından kullanılmaktadır. Bu ayrımın oluşmasına iki faktör neden olmaktadır: (i) Bir sabitin Riemann-Liouville kesirsel türevi sıfırdan farklıdır ancak Caputo kesirsel türevi sıfırdır, (ii) Riemann-Liouville kesirsel türevi kullanılarak ele alınan problemlerin başlangıç koşulları genelde fiziksel olarak anlamlı değildir, Caputo kesirsel türevi kullanıldığında ise, fiziksel olarak kabul edilebilir başlangıç koşulları kullanılmaktadır (Podlubny, 1999).

2.1.1. Kesirsel integral

Riemann-Liouville yaklaşımına göre, kesirsel türev mertebesi $\alpha > 0$ olmak üzere, kesirsel integral gösterimi, bir $f(t)$ fonksiyonunun n katlı integralini tek katlı bir integrale dönüştüren

$$\begin{aligned} J^n f(t) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau,\ t>0,\ n\in N \\ &= g(t) * f(t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

formülünün doğal bir sonucudur, burada n pozitif bir tamsayı olmak üzere $g(t) = t^{n-1}/(n-1)!$ ile tanımlanmaktadır. (2.1) formülünde pozitif n tamsayı değerleri yerine, gama fonksiyonu kullanılarak herhangi pozitif reel bir sayı alınabilir. Böylece, bir fonksiyonun α mertebeden Riemann-Liouville kesirsel integrali

$$J^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0, \quad \alpha \in R^{+} \tag{2.2}$$

formülü ile verilmektedir, $\Gamma(\alpha)$ gama fonksiyonudur. (Podlubny, 1999; Carpinteri and Mainardi, 1997).

Riemann-Liouville kesirsel integral işlemcisinin bazı temel özellikleri söyledir:

i. $\alpha = 0$ için birim işlemci gibi etkimektedir, $J^0 f(t) = f(t)$.

ii. $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere, $J^{\alpha} J^{\beta} = J^{\alpha+\beta}$ bileşim kuralı sağlanmaktadır.

iii. $J^{\alpha} J^{\beta} = J^{\beta} J^{\alpha}$ komütasyon özelliği geçerlidir.

iv. $\gamma > -1$ olmak üzere, kuvvet formundaki fonksiyonlara etkisi $J^{\alpha} t^{\gamma} = (\Gamma(\gamma+1)/\Gamma(\gamma+1+\alpha)) t^{\gamma+\alpha}$ formülü ile tanımlanmaktadır.

v. Riemann-Liouville kesirsel integrali, $\phi_{\alpha}(t)$ ve $f(t)$ fonksiyonlarının Laplace konvülasyonu olarak ifade edilebilir, $J^{\alpha} f(t) = \phi_{\alpha}(t) * f(t)$. Burada $\phi_{\alpha}(t) = t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ genelleştirilmiş fonksiyonu R^{+} bölgesinde integrallenebilir bir fonksiyondur. Genelleştirilmiş fonksiyon için $\phi_{\alpha}(t) * \phi_{\beta}(t) = \phi_{\alpha+\beta}(t)$ bileşim kuralı geçerlidir.

vi. Kesirsel integralin Laplace dönüşümü $L\{J^{\alpha} f(t)\} = F(s)/s^{\alpha}$ ile verilmektedir, burada s, Laplace dönüşüm parametresidir.

Kesirsel integral işlemcisinin (2.2) tanımında alt limit $-\infty$ alınırsa, Weyl kesirsel integral tanımı elde edilir. Weyl kesirsel integral işlemcisi, etkidiği fonksiyonun periyodikliğini değiştirmediğinden, özellikle periyodik fonksiyonlar için çok kullanışlıdır (Podlubny, 1999).

2.1.2. Riemann-Liouville kesirsel türevi

Riemann-Liouville kesirsel türevi

$$ {}_0^{RL}D_t^{\alpha} f(t) = D^m J^{m-\alpha} f(t) \tag{2.3} $$

formülü ile tanımlanmaktadır. Burada *m*, kesirsel türev mertebesi α ’dan büyük olan en küçük tamsayıdır $m-1<\alpha<m$. Özel bir durum olarak, $\alpha=m$ olduğunda, kesirsel türev standart türeve dönüşmektedir $d^m f / dt^m$. (2.2) tanımı kullanılırsa, Riemann-Liouville kesirsel türevi daha açık olarak yazılabilir,

$$ {}_0^{RL}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{d^m}{dt^m}\left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau)\,d\tau\right]. \tag{2.4} $$

Riemann-Liouville kesirsel türev işlemcisinin önemli bazı özellikleri aşağıda verilmektedir (Oldham and Spanier, 1974; Miller and Ross, 1993; Carpinteri and Mainardi, 1997; Podlubny, 1999):

i. $\alpha=0$ için birim işlemci özelliği göstermektedir, $D^0 = J^0 = I$.

ii. Riemann-Liouville kesirsel türev ve integral işlemcileri birbiriyle komüt değildir, $\left(D^{\alpha} J^{\alpha} = I,\ J^{\alpha} D^{\alpha} \neq I\right)$. Burada, $J^{\alpha}\, {}_0^{RL}D_t^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!}\left[f^{(k)}(t)\right]_{t=0}$.

iii. $\gamma > -1$ olmak üzere, Riemann-Liouville kesirsel türev işlemcisinin kuvvet formundaki fonksiyonlara etkisi ${}_0^{RL}D_t^{\alpha} t^{\gamma} = \Gamma(\gamma+1) t^{\gamma-\alpha} / \Gamma(\gamma+1-\alpha)$ ifadesi ile verilmektedir.

iv. $\alpha \notin N$ ise, $f(t) \equiv 1$ sabit fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirsel türevi sıfıra eşit değildir, ${}_0^{RL}D_t^{\alpha} 1 = t^{-\alpha} / \Gamma(1-\alpha)$.

Kesirsel türev için bazı ilişkilere ihtiyaç duyulmasına rağmen, kesirsel integrasyon tamamen geliştirilmiş bir teoridir. $\beta \leq 0$ ya da $\alpha\beta \geq 0$ olmak üzere, kesirsel türev ve integraller genel olarak aşağıda verilen bileşim kuralına uymaktadırlar:

$$ {}_aD_t^{\alpha}\left\{ {}_aD_t^{\beta} f(t) \right\} = {}_aD_t^{\alpha+\beta} f(t). \tag{2.5} $$

2.1.3. Caputo kesirsel türevi

Kesirsel türevin diğer alternatif bir tanımı, özellikle fizikteki uygulamalarda sıklıkla kullanılan Caputo kesirsel türevidir ve $\alpha > 0$ olmak üzere,

$$ {}_0^{C}D_t^{\alpha} f(t) = J^{m-\alpha} D^m f(t) \tag{2.6} $$

ile tanımlanmaktadır. Burada *m*, kesirsel türev mertebesi α 'dan büyük olan en küçük tamsayıdır ve Riemann-Liouville kesirsel türev tanımında olduğu gibi $\alpha = m$ için tamsayı mertebeli standart türevlere dönülmektedir. (2.2) formülü kullanılırsa, Caputo kesirsel türevi daha açık bir şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$ {}_0^{C}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \ , \ (m-1 < \alpha < m). \tag{2.7} $$

Burada $f^{(m)}(\tau)$ türevinin integrallenebilir bir fonksiyon olması gerekir.

Riemann-Liouville ve Caputo kesirsel türev tanımları birbirine denk değildir, $D^m J^{m-\alpha} f(t) \neq J^{m-\alpha} D^m f(t)$. İki türev tanımı ancak $f(t)$ fonksiyonunun ve ilk $m-1$ türevinin $t = 0$ değerinde sıfır olması ile birbirine denk olabilir. Riemann-Liouville ve Caputo kesirsel türevleri arasında aşağıdaki ilişki mevcuttur:

$$ {}_{0}^{RL}D_{t}^{\alpha} f(t) = {}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha} f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \left[f^{(k)}(t) \right]_{t=0} . \qquad (2.8) $$

Riemann-Liouville kesirsel türevi için yukarıda verilen (iii) özelliği kullanılarak, (2.8) eşitliği sadeleştirilebilir,

$$ {}_{0}^{RL}D_{t}^{\alpha} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k}}{k!} \left[f^{(k)}(t) \right]_{t=0} \right) = {}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha} f(t) . \qquad (2.9) $$

Bu ifadeden, Caputo kesirsel türev işlemcisinin etkidiği fonksiyonun ve tamsayı mertebeden türevlerinin başlangıç değerlerini içerdiği anlaşılmaktadır. Son ifade incelendiğinde, bir sabitin Caputo kesirsel türevinin Riemann-Liouville kesirsel türevinden farklı olarak sıfır olduğu sonucuna varılmaktadır, ${}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha} 1 \equiv 0$. Bu nedenle, fizikteki uygulamalarda genelde Caputo kesirsel türev tanımı kullanılmaktadır (Miller and Ross, 1993; Carpinteri and Mainardi, 1997; Podlubny, 1999).

Literatürde, (2.4) ve (2.7) formülleri ile verilen kesirsel türev tanımları, sırasıyla sol Riemann-Liouville ve sol Caputo türevleri olarak bilinmektedir. Bunların yanı sıra, bazı problemlerde, sağ Riemann-Liouville ve sağ Caputo kesirsel türev tanımlarının da kullanılması gerekmektedir. Örneğin, kesirsel kısmi integrasyon bağıntısının kullanıldığı kesirsel varyasyonlar hesabı problemlerinde, sağ kesirsel türevler doğal olarak hesaplamalarda ortaya çıkmaktadır (Riewe, 1996, 1997; Muslih and Baleanu, 2005; Rabei et al., 2007). Sağ Riemann-Liouville ve sağ Caputo kesirsel türevleri aşağıda verilen formüllerle tanımlanmaktadır:

$$ {}_{t}^{RL}D_{b}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt} \right)^{m} \int_{t}^{b} (\tau - t)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau , \qquad (2.10) $$

$$ {}_{t}^{C}D_{b}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{t}^{b} (\tau - t)^{m-\alpha-1} \left(-\frac{d}{d\tau} \right)^{m} f(\tau) d\tau . \qquad (2.11) $$

Eğer *t* bir zaman ölçeği ise, $f(t)$ fonksiyonu zamanla gelişen bir dinamik süreci tanımlar. *t* şuandaki zaman olmak üzere, $f(\tau)$ durumu, $\tau < t$ için fiziksel sürecin geçmişine, $\tau > t$ için ise geleceğine aittir. Bu bakış açısından, sol kesirsel türevler fiziksel sürecin geçmişteki durumuna, sağ kesirsel türevler ise gelecekteki durumuna etki eden işlemcilerdir. Fiziksel nedensellik ilkesi gereği, $\tau = a$ anında başlayan bir fiziksel sürecin mevcut durumu $f(t)$, tüm geçmiş $f(\tau)$ durumlarına bağlıdır. Ancak, bir fiziksel sürecin mevcut durumu gelecekteki gelişiminin sonuçlarına bağlı olmadığından, hesaplamalarda sağ kesirsel türevler genellikle ihmal edilmektedir. Diğer taraftan, matematik bakış açısına göre, kesirsel diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinin teorisi, ancak sol ve sağ kesirsel türevlerinin beraber kullanımıyla geliştirilebilir (Podlubny, 1999).

2.1.4. Grünwald-Letnikov diferintegrali

Grünwald-Letnikov diferintegral tanımı, sıradan (tamsayı olmayan) mertebeli türev ve integral işlemcilerini tek bir formül altında birleştiren ve uygulandığı fonksiyonlar üzerine en az sınırlandırma getiren bir tanımdır. Bu tanıma göre, $f : IR \rightarrow IR$ olmak üzere, bir fonksiyonun α mertebeden diferintegrali

$$ {}_aD_t^{\alpha} f(t) = \lim_{N\to\infty} \left\{ \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \left[\frac{t-a}{N} \right]^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)} f\left(t - j\left[\frac{t-a}{N} \right] \right) \right\} \tag{2.12} $$

ile verilmektedir, $\alpha, a \in IR$. (2.12) formülü, tamsayı mertebeden türevleri tanımlamak için kullanılan

$$ \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{\Delta t\to 0} (\Delta t)^{-n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} f(t - m\Delta t) \tag{2.13} $$

formülünün türev mertebeleri kesirsel olacak şekilde genelleştirilmiş bir formudur, burada türev mertebesi *n*, bir tamsayıdır. (2.12) formülünden, $\alpha > 0$ için bir fonksiyonun kesirsel türevi, $\alpha < 0$ için ise kesirsel integrali tanımlanmaktadır.

Grünwald-Letnikov diferintegralinin en büyük avantajı, bir fonksiyonun türevlerine veya integrallerine gerek kalmadan, fonksiyonun sadece kendisinin aldığı değerler ile kesirsel türev yada integralinin hesaplanabilmesidir. Bu avantaja rağmen, basit fonksiyonlar hariç pratikteki uygulamaları oldukça sınırlıdır, genelde nümerik hesaplamalarda kullanılmaktadır. (2.12) tanımından, bir fonksiyonun kesirsel türevinin a alt limitine bağlı olduğu görülmektedir (Oldham and Spanier, 1974; Miller and Ross, 1993; Podlubny, 1999).

Riemann-Liouville, Caputo ve Grünwald-Letnikov tanımları, kesirsel integral ve türevlerin en temel tanımları olarak bilinmektedirler. Bunlara ek olarak, sadece bazı özel fonksiyonlar için geçerli olan kesirsel integral ve türev tanımları da mevcuttur. Bu tanımlar, diğer temel tanımlar kadar kullanışlı olmasalar da, değişik tanımların mümkün olduğunu ve doğru uygulandıkları takdirde temel tanımlarla uyuştuklarını göstermeleri açısından önemlidir. Bu bağlamda, Liouville (1832), Riemann (1853), Krug (1890), Weyl (1917), Civin (1941) ve Erdélyi (1964) değişik tipteki fonksiyonların kesirsel integral ve türevlerini veren tanımları geliştirmişlerdir (Oldham and Spanier, 1974).

2.1.5. Kesirsel türevlerin Laplace dönüşümleri

Kesirsel diferansiyel denklemlerin çözümü için sıklıkla kullanılan yöntemlerden biri Laplace integral dönüşümüdür. m tamsayısı için $m-1<\alpha<m$ olmak üzere, Riemann-Liouville ve Caputo kesirsel türevlerinin Laplace integral dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$L\left\{{}_{a}^{RL}D_{x}^{\alpha} f(x)\right\} = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{k}\left[{}_{a}^{RL}D_{x}^{\alpha-k-1} f(x)\right]_{x=a}, \tag{2.14}$$

$$L\left\{{}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha} f(x)\right\} = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1}\left[f^{(k)}(x)\right]_{x=a}, \tag{2.15}$$

burada s, Laplace dönüşüm parametresidir ve $F(s)$, $f(x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümüdür.

Yukarıdaki tanımlardan görüldüğü üzere, Riemann-Liouville kesirsel türevinin Laplace dönüşümü kesirsel türevli başlangıç koşullarını içerirken, Caputo kesirsel türevinin Laplace dönüşümü ise, tamsayı mertebeli bilinen türevleri içermektedir. Bu nedenle, bir kesirsel diferansiyel denklemde Riemann-Liouville kesirsel türevi kullanıldığında, denklemin çözümü için kesirsel başlangıç koşullarına ihtiyaç duyulurken, Caputo kesirsel türevi kullanıldığında ise bilinen başlangıç koşullarının kullanılması yeterli olmaktadır. Kesirsel türevlerin limit değerlerinin fiziksel yorumu sorun çıkardığından, fiziksel uygulamalarda Riemann-Liouville kesirsel türevinin pratik kullanımı sınırlıdır. Bilinen başlangıç koşulları ile tanımlı lineer kesirsel diferansiyel denklemlerin çözümü için Caputo türevinin ve Laplace dönüşümünün kullanılması oldukça kolaylık sağlamaktadır (Podlubny, 1999).

Bazı problemlerde Caputo kesirsel türevi kullanılmasına rağmen, kesirsel başlangıç koşullarına ihtiyaç duyulabilir. Örneğin, bir-boyutlu ısı iletim probleminde, sıcaklığın zamana göre 1/2. mertebeden Caputo kesirsel türevi yüzey boyunca ısı akısını tanımlamaktadır. Bu nedenle, Riemann-Liouville ve Caputo kesirsel türevlerinin avantajları ve dezavantajları arasındaki ayrım net değildir (Agrawal, 2002, 2006, 2007a; 2007b; Baleanu and Agrawal, 2006).

2.2. Kesirsel İntegral Denklemler

Bu altbölümde, birinci ve ikinci tür Abel integral denklemleri olarak en basit kesirsel mertebeden integral denklemler ele alınmaktadır. Tarihsel olarak ilk çalışmalar, birinci tür Abel integral denklemleri üzerine Abel (1826), ikinci tür Abel integral denklemleri üzerine ise Hille ve Tamarkin (1930) tarafından yapılmıştır. Burada, bu tarz kesirsel integral denklemlerin daha anlaşılabilir olması için Laplace dönüşüm metodu üzerinde durulmakta ve bazı uygulamalara yer verilmektedir.

2.2.1. Birinci tür Abel integral denklemi

Birinci tür Abel integral denklemi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\,d\tau = f(t) \quad , \quad 0<\alpha<1\,, \tag{2.16}$$

burada $f(t)$ verilen bir fonksiyondur. Bu denklemin kesirsel integral denklemi cinsinden ifade edilebileceği kolayca gösterilebilir

$$J^{\alpha}u(t) = f(t). \tag{2.17}$$

Bu denklemin çözümü $f(t)$ fonksiyonunun α mertebeden kesirsel türevine eşittir

$$\begin{aligned} D^{\alpha}J^{\alpha}u(t) &= D^{\alpha}f(t), \\ u(t) &= D^{\alpha}f(t). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Burada, kesirsel işlemcilerin $D^{\alpha}J^{\alpha} = I$ özelliği kullanılmaktadır. (2.16) denklemi, Laplace dönüşüm tekniğiyle de çözülebilir:

$$\begin{aligned} &J^{\alpha}u(t) = f(t), \\ &L\{J^{\alpha}u(t)\} = L\{f(t)\}, \\ &\frac{U(s)}{s^{\alpha}} = F(s) \quad , \quad U(s) = s^{\alpha}F(s). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Ters Laplace dönüşümünü almak için iki farklı yol takip edilebilir:

$$\begin{aligned} U(s) &= s\left[\frac{F(s)}{s^{1-\alpha}}\right] \\ u(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\,d\tau = D^{\alpha}f(t), \end{aligned} \tag{2.20a}$$

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{1}{s^{1-\alpha}}\left[sF(s) - f(0)\right] + \frac{f(0)}{s^{1-\alpha}} \\ u(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\,d\tau + f(0)\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \\ u(t) &= D_*^{\alpha}f(t) + f(0)D^{\alpha}1. \end{aligned} \tag{2.20b}$$

Görülmektedir ki, (2.20a) ve (2.20b) çözümleri Riemann-Liouville ve Caputo kesirsel türevleri cinsinden elde edilmektedir.

Burada özel olarak $0<\alpha<1$ durumu incelenmektedir. Ancak $m\in N$ olmak üzere, $m-1<\alpha\leq m$ durumu da incelenebilir. Bu durumda çözümleri yine Laplace dönüşüm tekniği kullanılarak elde etmek mümkündür.

2.2.2. İkinci tür Abel integral denklemi

İkinci tür Abel integral denklemi

$$u(t)+\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\,d\tau = f(t) \quad , \quad \alpha>0 \quad , \quad \lambda\in C \tag{2.21}$$

formunda ifade edilmektedir. (2.21) denklemi kesirsel integral işlemcileri cinsinden yazılabilir:

$$\left(1+\lambda J^{\alpha}\right)u(t)= f(t). \tag{2.22}$$

(2.22) denkleminin çözümü aşağıdaki formda ifade edilebilir:

$$u(t)=\left(1+\lambda J^{\alpha}\right)^{-1} f(t)=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-\lambda)^n J^{\alpha n}\right)f(t) \tag{2.23}$$

kesirsel integral işlemi için geçerli olan $J^{\alpha n} f(t)=\phi_{\alpha n}(t)* f(t)=\frac{t_+^{\alpha n-1}}{\Gamma(\alpha n)} * f(t)$ bağıntısı (2.23) denkleminde kullanılırsa

$$u(t)= f(t)+\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-\lambda)^n \frac{t_+^{\alpha n-1}}{\Gamma(\alpha n)}\right) * f(t), \tag{2.24}$$

çözümü elde edilir. Mittag-Leffler fonksiyonu kullanılarak aşağıdaki ilgili fonksiyon tanımlanabilir:

$$e_{\alpha}(t;\lambda):= E_{\alpha}\left(-\lambda t^{\alpha}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\lambda t^{\alpha}\right)^n}{\Gamma(\alpha n+1)} \ , \ t>0 \ , \ \alpha>0 \,. \tag{2.25}$$

Gama fonksiyonunun tekrarlama bağıntısı kullanılarak (2.24) denkleminde parantez içerisindeki ifadenin aşağıdaki Mittag-Leffler fonksiyonunun türevine eşit olduğu gösterilebilir

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n \frac{t_+^{\alpha n-1}}{\Gamma(\alpha n)} \right) = \frac{d}{dt} E_\alpha\left(-\lambda t^\alpha\right) = e'_\alpha(t;\lambda) \quad , \quad t > 0 . \tag{2.26}$$

Sonuç olarak, (2.21) denkleminin çözümü

$$u(t) = f(t) + e'_\alpha(t;\lambda) * f(t) \tag{2.27}$$

olarak elde edilir.

Burada, dikkat edilmesi gereken bir husus bulunmaktadır: (2.24) ve (2.26) denklemlerindeki sonsuz seri toplam içindeki gama fonksiyonlarının hızlı bir şekilde büyümesi çözümün ıraksamasına neden olmaktadır, bu nedenle, çözümdeki türev ve integrallerin terim terim alınması gerekmektedir.

(2.27) denklemini de kapsayan farklı bir formdaki çözüm, Laplace integral dönüşümü uygulanarak elde edilebilir. Bu maksatla, (2.21) denklemine Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\left[1 + \frac{\lambda}{s^\alpha}\right] U(s) = F(s) \quad ; \quad U(s) = \frac{s^\alpha}{s^\alpha + \lambda} F(s) \tag{2.28}$$

elde edilir. (2.28) ifadesinin ters Laplace dönüşümünü elde etmek için, Mittag-Leffler fonksiyonunun aşağıdaki Laplace dönüşümü ifadesi

$$L\{e_\alpha(t;\lambda)\} = L\{E_\alpha\left(-\lambda t^\alpha\right)\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} \tag{2.29}$$

kullanılabilir. Standart kuralları uygulayarak, birinci tür Abel integral denkleminde olduğu gibi, ters Laplace dönüşümünü elde etmek için iki farklı yol seçilebilir. (2.28) denklemi

$$U(s) = s\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+\lambda}F(s)\right] \tag{2.28a}$$

formunda yazılırsa,

$$u(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t f(t-\tau)e_{\alpha}(\tau;\lambda)d\tau \tag{2.30a}$$

çözümü elde edilir. Eğer (2.28) denklemi

$$U(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+\lambda}\left[sF(s) - f(0)\right] + f(0)\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+\lambda} \tag{2.28b}$$

formunda yazılırsa,

$$u(t) = \int_0^t f'(t-\tau)e_{\alpha}(\tau;\lambda)d\tau + f(0)e_{\alpha}(t;\lambda) \tag{2.30b}$$

çözümü elde edilir. Burada, $e_{\alpha}(t;\lambda)$ fonksiyonunun t' ye göre türevlenebilir bir fonksiyon olduğu ifade edilmelidir. Ayrıca, (2.28) denkleminin çözümü için alternatif olarak aşağıdaki gibi bir yaklaşım da kullanılabilir:

$$\begin{aligned} U(s) &= \left[s\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+\lambda} - 1\right]F(s) + F(s), \\ L\{e'_{\alpha}(t;\lambda)\} &= s\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+\lambda} - 1, \end{aligned} \tag{2.28c}$$

$$u(t) = \int_0^t f(t-\tau)e'_{\alpha}(\tau;\lambda)d\tau + f(t). \tag{2.30c}$$

(2.28c) çözümü başlangıçta bulunan (2.27) çözümü ile aynıdır. (2.30b) çözümü, $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü alınabilen bir türevlenebilir fonksiyon olması gerektiğinden, diğer çözümlere göre daha sınırlayıcıdır.

2.2.3. Abel integral denklemlerinin bazı uygulamaları

Abel integral denklemi mekaniğin iyi bilinen problemlerinden *tautochrone* problemine uygulanabilir. Tautochrone problemi, düşey düzlemdeki bir eğri boyunca hareket eden bir cismin harekete başladığı noktadan durduğu en alt noktaya gelinceye kadar geçen sürenin cismin harekete başladığı andaki yüksekliğine bağlı bir fonksiyonla ifade edilebildiği bir mekanik problemidir. Uygun değişken dönüşümleri yapıldıktan sonra $\alpha = 1/2$ için birinci tür Abel integral denklemi elde edilmektedir.

Mekaniğin önemli problemlerinden biri olan *isochrone* problemi de Abel integral denklemi yardımıyla çözülebilir ve tamsayı mertebeden olmayan kesirsel türev gösterimleriyle çözümler gösterilebilir.

Abel integral denklemleri fiziksel ölçümlerin hesaplanması gerektiği birçok durumda gözükmektedir. Bunların birçoğunda bağımsız değişken bir küre yada çemberin yarıçapıdır ve sadece bir değişken değişimi ile integral işlemcisi J^{α} formuna dönüşmektedir. Genellikle $\alpha = 1/2$ alınmaktadır ve problem birinci tür Abel integral denklemi ile ifade edilebilmektedir.

Abel integral denklemlerinin diğer genel uygulamaları ise şöyle sıralanabilir; silindirik gaz boşalımının spektroskopik ölçümlerinin hesabı, gezegen yada güneşle ilgili atmosfer çalışmaları, küre biçimindeki kümelerdeki yıldız yoğunluğunun aydınlatılması v.b.

Abel integral denklemlerinin genel olarak kullanıldığı diğer bir alan ise kısmi diferansiyel denklemlerdeki ters sınır değer problemleridir. Örnek olarak, yarı sonsuz bir tel boyunca ısı yayılımını tasvir eden denklem bu kapsamda incelenebilir. Isı yayılım denklemi genel olarak aşağıdaki forma sahiptir:

$$\begin{array}{cc} u_t - u_{xx} = 0 \quad , & u = u(x,t) \\ 0 < x < \infty \quad , & 0 < t < \infty \end{array} \tag{2.31}$$

Bu boyutsuz denklemde $u(x,t)$ fonksiyonu sıcaklığı temsil etmektedir. $x=0$ sınır noktasındaki ısı akısı ve telin içinde sınırın hemen yanındaki sıcaklık ise

$$\begin{aligned} -u_x(0,t) &= p(t) \\ u(0^+,t) &= \phi(t) \end{aligned} \tag{2.32}$$

ifadeleri ile verilmektedir. Bu koşullar altında ısı yayılım denkleminin çözümü

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{p(t)}{\sqrt{t-\tau}}e^{-x^2/[4(t-\tau)]}d\tau, \quad , \quad x>0 \ , \ t>0 \tag{2.33}$$

olarak verilmektedir. (2.32) denkleminde verilen koşullar (2.33) denkleminde kullanılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{p(t)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau = J^{1/2}p(t)=\phi(t) \quad , \quad t>0\,. \tag{2.34}$$

Eğer başlangıç noktasındaki sınır sıcaklığı $\phi(t)$ verilmiş ise, (2.34) denklemi, bilinmeyen $p(t)$ giriş akısının tanımlanması için birinci tür Abel integral denklemi olarak tanımlanabilir. Bu denklemin çözümü ise, sınırdaki sıcaklığın $1/2.$ mertebeden Riemann-Liouville kesirsel türevi olarak elde edilmektedir:

$$p(t)=D^{1/2}\phi(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\phi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau\,. \tag{2.35}$$

Problemi aydınlatmak için aşağıdaki özel durumlar incelenebilir.

$$\begin{aligned} \phi(t)=t \quad &\Rightarrow \quad p(t)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi t} \\ \phi(t)=1 \quad &\Rightarrow \quad p(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \end{aligned} \tag{2.36}$$

Yarı sonsuz telin iç sınır sıcaklığında doğrusal bir artış meydana gelmesi için akının sürekli olması ve sıfırdan sonsuza doğru artması gerekmektedir. Sınır sıcaklığının 0'dan 1'e ani olarak artması için ise, akının sonsuzdan sıfıra doğru azalması gerekmektedir.

Problemi ikinci tür Abel integral denklemine uyarlamak için, dışarıdaki sınır sıcaklığının bir sıvı banyosu ile $u\left(0^-,t\right)=\psi(t)$ olacak şekilde kontrol edildiği varsayılabilir. Newton'un radyasyon yasası uyarınca sınırdaki akı, iç ve dış sıcaklık değişimi ile orantılıdır:

$$p(t)=\lambda[\psi(t)-\phi(t)] \quad , \quad \lambda>0\,. \tag{2.37}$$

(2.37) denklemi (2.34) denkleminde kullanılırsa,

$$\left(1+\lambda J^{1/2}\right)\phi(t)=\lambda J^{1/2}\psi(t) \tag{2.38}$$

denklemi elde edilir. Eğer, dış sınır sıcaklığı $\psi(t)$ bilinirse, (2.38) denklemi $\phi(t)$ nin tanımlanması için kullanılan ikinci tür Abel integral denklemi olarak ele alınabilir.

$\alpha=1/2$ için (2.38) denklemi (2.22) denklemi formundadır ve çözümü ise (2.23) denklemi yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\phi(t)=\lambda\left(1+\lambda J^{1/2}\right)^{-1}J^{1/2}\psi(t)=-\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\lambda\right)^{m+1}J^{(m+1)/2}\psi(t). \tag{2.39}$$

Burada, $\psi(t)=1$ sabit dış sınır sıcaklığı durumu özel bir öneme sahiptir. Bu durumda,

$$J^{(m+1)/2}\psi(t)=\frac{t^{(m+1)/2}}{\Gamma\left((m+1)/2+1\right)} \tag{2.40}$$

bulunur. Böylece iç sınır sıcaklığı

$$\begin{aligned}\phi(t)&=1-\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\lambda\right)^{n}\frac{t^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}=1-E_{1/2}\left(-\lambda t^{1/2}\right)\\&=1-e_{1/2}(t;\lambda)\end{aligned} \tag{2.41}$$

olarak elde edilmektedir.

2.3. Kesirsel Diferansiyel Denklemler

Bu altbölümde, kesirsel mertebeli diferansiyel denklemler ele alınmaktadır. Bu bağlamda, literatürde sıkça çalışılan rölaksasyon ve titreşici tipi problemleri tanımlayan sıradan lineer diferansiyel denklemlerin kesirsel türevler yardımıyla nasıl genellendiğinin üzerinde durulmaktadır.

2.3.1. Kesirsel rölaksasyon ve titreşici denklemleri

Rölaksasyon ve titreşici problemleri sırasıyla birinci ve ikinci mertebeden sıradan lineer diferansiyel denklemler yardımıyla tanımlanmaktadır. $u = u(t)$ alan değişkeni ve $q(t)$ verilen sürekli bir fonksiyon olmak üzere, $t \geq 0$ için rölaksasyon diferansiyel denklemi

$$u'(t) = -u(t) + q(t) \tag{2.42}$$

ile verilmektedir. Bu denklemin, $u(0) = c_0$ başlangıç koşulu altında çözümü,

$$u(t) = c_0 e^{-t} + \int_0^t q(t-\tau) e^{-\tau} d\tau \tag{2.43}$$

denklemi formundadır.

Titreşici diferansiyel denklemi ise

$$u''(t) = -u(t) + q(t) \tag{2.44}$$

ile verilmektedir. Bu denklemin, $u(0) = c_0$, $u'(t)\big|_{t=0} = c_1$ başlangıç koşulları altında çözümü,

$$u(t) = c_0 \cos t + c_1 \sin t + \int_0^t q(t-\tau) \sin\tau \, d\tau \tag{2.45}$$

formunda elde edilmektedir.

(2.42) ve (2.44) denklemlerinin doğal bir genellemesi, tamsayı mertebeden türevlerle α mertebeli kesirsel türevlerin değiştirilmesi ile elde edilir. Klasik durumdaki başlangıç koşullarının yapısını değiştirmemek için, (2.42) ve (2.44) denklemlerindeki birinci ve ikinci mertebeden türevler sırasıyla $0<\alpha<1$ ve $1<\alpha<2$ mertebeden Caputo kesirsel türevleri ile değiştirilmektedir. Böylelikle, (2.42) ve (2.44) denklemlerine karşılık gelen kesirsel rölaksasyon ve titreşici denklemleri elde edilmektedir. Genel olarak, kesirsel rölaksasyon ve titreşici denklemleri, $\alpha>0$ olmak üzere, aşağıdaki denklemle ifade edilmektedir:

$$ {}_0^C D_t^\alpha u(t) = {}_0^{RL} D_t^\alpha u(t)\left(u(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} u^k(0) \right) = -u(t) + q(t). \tag{2.46} $$

Burada *m*, $m-1<\alpha\le m$ olacak şekilde bir tamsayıdır ve aynı zamanda problemin çözümü için gerekli olan başlangıç koşullarının sayısını vermektedir $u^{(k)}(t)\Big|_{t=0} = c_k$, $k=0,1,2,...m-1$. Burada amaçlanan, $t\ge 0,\ k=0,1,2,...m-1$ için $u^{(k)}(t)$ türevleri sürekli ve mevcut olan $u(t)$ çözümlerinin elde edilmesidir. Özel olarak, $m=1$ ve $m=2$ için sırasıyla kesirsel rölaksasyon ve kesirsel titreşici denklemleri elde edilmektedir. $\alpha=m$ olduğunda, (2.46) denklemi, çözümleri homojen denklemin *m* sayıda lineer bağımsız çözümleri ve homojen olmayan denklemin bir özel çözümünden oluşan sıradan bir diferansiyel denkleme dönüşmektedir. Literatürde bu tür sıradan diferansiyel denklemlerin çözümleri özetle şöyle verilmektedir:

$$ u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k u_k(t) + \int_0^t q(t-\tau) u_\delta(\tau) d\tau, \tag{2.47} $$

$$ u_k(t) = J^k u_0(t) \ , \ u_k^{(h)}(t)\Big|_{t=0} = \delta_{kh} \ , \ h,k = 0,1,...,m-1, \tag{2.48} $$

$$ u_\delta(t) = -u_0'(t). \tag{2.49} $$

Böylece, *m* sayıdaki $u_k(t)$ fonksiyonu, *m* mertebeden diferansiyel denklemin homojen kısmının lineer bağımsız çözümlerine karşılık gelen ve (2.48) koşullarını sağlayan temel çözümleri temsil eder. $q(t)$ fonksiyonu ile harmanlanması (konvülasyonu) verilen $u_\delta(t)$ fonksiyonu ise etki tepki çözümü olarak adlandırılmakta ve homojen olmayan denklemin özel bir çözümüne karşılık gelmektedir. Böylece, tamsayı mertebeli bilinen rölaksasyon ve titreşici denklemleri için sırasıyla, $u_0(t) = e^{-t} = u_\delta(t)$ ve $u_0(t) = \cos t$, $u_1(t) = Ju_0(t) = \sin t = u_\delta(t)$ olmaktadır.

(2.46) denklemi ile verilen kesirsel diferansiyel denklemin çözümü Laplace dönüşüm tekniği ile bulunabilir. Bunun için, doğrudan Caputo kesirsel türevine Laplace dönüşümü uygulanabilir yada alternatif olarak, uygun işlemler yapılarak denklem bir kesirsel integral denklem formuna dönüştürülebilir. Burada ikinci yol tercih edilerek aşağıdaki işlemler yapılmaktadır.

$$\begin{aligned}
&{}_0^C D_t^\alpha u(t) = -u(t) + q(t) \\
&J^{m-\alpha} D^m u(t) = -u(t) + q(t) \\
&J^\alpha J^{m-\alpha} D^m u(t) = -J^\alpha u(t) + J^\alpha q(t) \\
&J^m D^m u(t) = -J^\alpha u(t) + J^\alpha q(t)
\end{aligned}$$

Burada, $J^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(t)\Big|_{t=0}$, $t > 0$ özdeşliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
u(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} u^{(k)}(t)\Big|_{t=0} &= -J^\alpha u(t) + J^\alpha q(t) \\
u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} u^{(k)}(t)\Big|_{t=0} &- J^\alpha u(t) + J^\alpha q(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Başlangıç koşullarının $u^{(k)}(t)\Big|_{t=0} = c_k$, $k = 0,1,2,...m-1$ olduğu dikkate alınırsa,

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{t^k}{k!} - J^\alpha u(t) + J^\alpha q(t) \tag{2.50}$$

elde edilir. Denklemde eşitliğin her iki yanına zaman değişkenine göre Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
L\{u(t)\} &= \sum_{k=0}^{m-1} c_k L\left\{\frac{t^k}{k!}\right\} - L\{J^\alpha u(t)\} + L\{J^\alpha q(t)\} \\
U(s) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_k}{s^{k+1}} - \frac{U(s)}{s^\alpha} + \frac{Q(s)}{s^\alpha} \\
U(s) &= \sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha + 1} + \frac{1}{s^\alpha + 1} Q(s)
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

bulunur.

Son denkleme ters Laplace dönüşümü uygulamadan önce Mittag-Leffler tipi fonksiyonların aşağıdaki özeliklerinin dikkate alınması gerekmektedir:

$$
\begin{aligned}
&e_\alpha(t) \equiv e_\alpha(t;1) := E_\alpha(-t^\alpha) \\
&L\{E_\alpha(-t^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1},
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_k(t) := J^k e_\alpha(t) = J^k u_0(t) \ , \ k = 0,1,2,...m-1 \\
&L\{J^k e_\alpha(t)\} = \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha + 1} \quad , \quad u_0(t) = e_\alpha(t) \\
&L\{-e'_\alpha(t)\} = \frac{1}{s^\alpha + 1} \quad , \quad u'_0(t) = e'_\alpha(t).
\end{aligned}
\tag{2.53}
$$

Bu özellikler yardımıyla (2.51) denklemine ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
L^{-1}\{U(s)\} &= \sum_{k=0}^{m-1} c_k L^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha + 1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha + 1} Q(s)\right\} \\
u(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} c_k u_k(t) - \int_0^t q(t-\tau) u'_0(\tau) d\tau \quad , \quad u_k(t) = J^k u_0(t) \\
u(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} c_k \left(J^k e_\alpha(t)\right) - \int_0^t q(t-\tau) e'_\alpha(\tau) d\tau
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

elde edilir. (2.54) ile verilen çözüm, (2.43) ve (2.45) çözümlerine sırasıyla $\alpha = 1,2$ için indirgenmektedir.

$m-1<\alpha<m$ olacak şekilde α tamsayı olmadığında, $u(t)$ çözümünün teklik koşulunun sağlanması için gerekli ve yeterli başlangıç koşulları sayısı *m* kadardır. Bu nedenle, *m* sayıda $u_k(t)=J^k e_\alpha(t)$, $k=0,1,2,...m-1$ fonksiyonları, homojen denklemin

$$u_k^{(h)}(t)\Big|_{t=0}=\delta_{kh} \ , \ k,h=0,1,2,...,m-1 \tag{2.55}$$

koşullarını sağlayan özel çözümlerini temsil eder. Aynı zamanda bu fonksiyonlar (2.46) kesirsel diferansiyel denkleminin ($\alpha=m$ durumuna benzer olarak) temel çözümlerini temsil etmektedir. Bunun yanında, $u_\delta(t)=-u_0'(t)=-e_\alpha'(t)$ fonksiyonu ise, denklemin homojen olmayan kısmının etki tepki çözümünü temsil etmektedir. Ayrıca eklenmelidir ki, (2.54) çözümünün $k=0,1,2,...,m-1$ için, *m* sayıda $u^{(k)}(t)\Big|_{t=0}=c_k$ başlangıç koşulunu sağlayan $u^{(k)}(t)$ türevleri sürekli ve mevcut olmalıdır.

Son olarak, (a) $0<\alpha<1$ ve (b) $1<\alpha<2$ durumları için, homojen denklemin temel çözümlerini ve etki tepki çözümü incelenebilir. Bunun için, (2.54) çözümünde ortaya çıkan $e_\alpha(t)$ fonksiyonunun ilgili bazı özellikleri ters Laplace integral gösterimi kullanılarak ele alınmalıdır.

$$e_\alpha(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{Br} e^{st}\,\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+1}\,ds \tag{2.56}$$

Burada, *Br* kısaltması Bromwich eğrisini tanımlamaktadır ve $\mathrm{Re}(s)=\sigma,\sigma\geq 1$ ve $\mathrm{Im}(s)$ $-\infty$ dan $+\infty$ a uzanmaktadır. Problemi açık bir şekilde değerlendirmek için durumlar (a) $0<\alpha<1$ ve (b) $1<\alpha<2$ olmak üzere ayrı ayrı tartışılmalıdır. $e_\alpha(t)$ fonksiyonu temel ve genelleyici bir fonksiyondur ($e_1(t)=e^{-t}$ ve $e_2(t)=\cos t$). α tamsayı olmadığında, s^α kuvvet fonksiyonu kompleks *s*-düzleminde negatif reel ekseni ayıracak şekilde $s^\alpha=|s|^\alpha e^{i\arg s}$, $-\pi<\arg s<\pi$ gibi tanımlanmaktadır.

İlk adım, öncelikle $e_\alpha(t)$ fonksiyonunu $e_\alpha(t) = f_\alpha(t) + g_\alpha(t)$ şeklinde iki kısma ayırmaktır. (a) durumunda $f_\alpha(t)$ fonksiyonu, (b) durumunda $-f_\alpha(t)$ fonksiyonu tamamıyla monotondur ve her iki durumda da $t \to \infty$ için sıfıra yakınsamaktadır. (a) durumunda yukarıdan sıfıra doğru azalmakta, (b) durumunda ise aşağıdan sıfıra doğru yükselmektedir. $g_\alpha(t)$ fonksiyonu, (a) durumunda sıfırdır, (b) durumunda ise titreşici karakteri gereği genliği üstel olarak azalmaktadır.

$e_\alpha(t)$ fonksiyonunun uygun bir şekilde iki kısma ayrılması için Bromwich eğri integralinin kendisine denk olan Hankel eğrisine dönüştürülmesi gerekir. Bunun için, kompleks düzlemde negatif reel eksenin hemen altında $-\infty$ dan başlayıp $|s| = 1$ dairesel diskini pozitif yönde dolanıp tekrar reel eksenin hemen üstünde $-\infty$ da ilmeği bitirmeliyiz. Böylece,

$$e_\alpha(t) = f_\alpha(t) + g_\alpha(t) \ , \ t \geq 0 \tag{2.57}$$

$$f_\alpha(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha(\varepsilon)} e^{st}\, \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1}\, ds \tag{2.58}$$

bulunur. Burada, Hankel eğrisi $Ha(\varepsilon)$ küçük bir $|s| = \varepsilon , \varepsilon \to 0$ çemberi ve negatif reel eksenin hemen altında ve üstündeki iki kenarla oluşturulan bir ilmektir ve

$$g_\alpha(t) = \sum_h e^{s_h' t} \operatorname{Re} s\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1}\right]_{s_h'} = \frac{1}{\alpha}\sum_h e^{s_h' t} \tag{2.59}$$

ile verilmektedir. Burada s_h', $\dfrac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1}$ ifadesinin ilgili kutup noktalarıdır. $0 < \alpha < 1$ için herhangi bir kutup noktası mevcut değildir. Sonuç olarak,

$$g_\alpha(t) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad e_\alpha(t) = f_\alpha(t) \quad , \quad 0 < \alpha < 1 \tag{2.60}$$

yazılabilir. $1 < \alpha < 2$ için, sol yarı düzlemde bulunan iki kutup noktası $e^{(\pm i\pi/\alpha)}$ söz konusudur. Böylece,

$$g_\alpha(t) = \frac{2}{\alpha} e^{t\cos(\pi/\alpha)} \cos\left(t \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\right) \quad , \quad 1 < \alpha < 2 \tag{2.61}$$

elde edilmektedir. Bu fonksiyon, $\omega(\alpha) = \sin(\pi/\alpha)$ açısal frekanslı ve $\lambda(\alpha) = |\cos(\pi/\alpha)|$ oranıyla genliği üstel olarak azalan titreşimleri temsil etmektedir.

(2.58) denklemi ile verilen ifadeye $Ha(\varepsilon)$ eğrisinin katkısı aşağıdaki tanım ile sağlanmaktadır:

$$f_\alpha(t) := \int_0^\infty e^{-rt} K_\alpha(r) dr, \tag{2.62}$$

burada $K_\alpha(r)$,

$$K_\alpha(r) = \frac{1}{\pi} \frac{r^{\alpha-1} \sin(\alpha\pi)}{r^{2\alpha} + 2r^\alpha \cos(\alpha\pi) + 1} \tag{2.63}$$

temel spektral fonksiyon olarak adlandırılmaktadır. α tamsayı olduğunda bu ifade özdeş olarak sıfır olmaktadır. Eğer $0 < \alpha < 1$ ise, tüm r ler için pozitiftir, eğer $1 < \alpha < 2$ ise, tüm r ler için negatiftir. Bu nedenle, $f_\alpha(t)$ fonksiyonu yukarıda bahsedildiği gibi (a) durumunda sıfıra doğru azalmakta (b) durumunda ise sıfıra doğru artmaktadır.

(2.54) çözümünde kullanılan $u_0(t) = e_\alpha(t)$ fonksiyonuna ek olarak $u_\delta(t) = -D^1 e_\alpha(t)$ etki tepki çözümü de (a) ve (b) durumları için hesaplanmalıdır. Ayrıca, sadece (b) durumunda $u_1(t) = J^1 e_\alpha(t)$ ikinci temel çözüm de hesaplanmalıdır. Bunun için, genel olarak aşağıdaki denklem ve tanımların bilinmesi gerekir:

$$J^k f_\alpha(t) = \int_0^\infty e^{-rt} K_{\alpha,k}(r) dr, \tag{2.64}$$

$$K_{\alpha,k}(r) := (-1)^k r^{-k} K_\alpha(r) \quad ; \quad K_\alpha(r) = K_{\alpha,0}(r), \tag{2.65}$$

$$J^k g_\alpha(t) = \frac{2}{\alpha} e^{t\cos(\pi/\alpha)} \cos\left[t\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) - k\frac{\pi}{\alpha}\right]. \tag{2.66}$$

Sonuç olarak, kesirsel rölaksasyon ve titreşici denklemlerinin çözümleri aşağıdaki gibi verilmektedir.

(a) $0 < \alpha < 1$ durumu:

$$u(t) = c_0 u_0(t) + \int_0^t q(t-\tau) u_\delta(\tau) d\tau, \tag{2.67a}$$

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \int_0^\infty e^{-rt} K_{\alpha,0}(r) dr = e_\alpha(t), \\ u_\delta(t) &= -\int_0^\infty e^{-rt} K_{\alpha,-1}(r) dr = -u_0'(t) = -e_\alpha'(t). \end{aligned} \tag{2.68a}$$

Burada, etki tepki çözümü için D^1 türev işlemcisi J^{-1} integral işlemcisi gibi etkiyebilmektedir.

(b) $1 < \alpha < 2$ durumu:

$$u(t) = c_0 u_0(t) + c_1 u_1(t) + \int_0^t q(t-\tau) u_\delta(\tau) d\tau, \tag{2.67b}$$

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \int_0^\infty e^{-rt} K_{\alpha,0}(r) dr + \frac{2}{\alpha} e^{t\cos(\pi/\alpha)} \cos\left(t\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\right), \\ u_1(t) &= \int_0^\infty e^{-rt} K_{\alpha,1}(r) dr + \frac{2}{\alpha} e^{t\cos(\pi/\alpha)} \cos\left(t\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) - \frac{\pi}{\alpha}\right), \\ u_\delta(t) &= -\int_0^\infty e^{-rt} K_{\alpha,-1}(r) dr - \frac{2}{\alpha} e^{t\cos(\pi/\alpha)} \cos\left(t\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) + \frac{\pi}{\alpha}\right) \end{aligned} \tag{2.68b}$$

Sonuç olarak vurgulamak gerekirse, kesirsel rölaksasyon ve titreşici problemlerinde (a) ve (b) durumlarının tümünde $t \to \infty$ için temel ve etki tepki çözümlerinin tümü cebirsel olarak bir azalma sergilemektedir. Bu olgu, $u_0(t)$ fonksiyonunun asimptotik davranışı incelenerek görülebilir. Bunun için öncelikle $f_\alpha(t)$ fonksiyonunun bir asimptotik serisi türetilmelidir. (2.58) ifadesindeki

$$\frac{1}{s^\alpha + 1} = 1 - s^\alpha + s^{2\alpha} - s^{3\alpha} + ... + (-1)^{N-1} s^{(N-1)\alpha} + (-1)^N \frac{s^{N\alpha}}{s^\alpha + 1} \tag{2.69}$$

teriminin seri hali ve (1/gama) fonksiyonunun Hankel gösterimi kullanılırsa, α nın tamsayı olmadığı durumlar için $f_\alpha(t)$ nin asimptotik davranışı,

$$f_\alpha(t) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \frac{t^{-n\alpha}}{\Gamma(1-n\alpha)} + O\left(t^{-(N+1)\alpha}\right) \quad ; \quad t \to \infty \tag{2.70}$$

$f_\alpha(t)$ nin bu asimptotik davranışı $0 < \alpha < 2$ aralığında $u_0(t) = e_\alpha(t)$ fonksiyonunun asimptotik davranışı ile uyum içerisindedir. Gerçekten de $g_\alpha(t)$, $0 < \alpha < 1$ durumunda sıfır olmaktadır ve $1 < \alpha < 2$ durumunda $t \to \infty$ için üstel azalmakta ve sıfıra yaklaşmaktadır.

$u_1(t)$ ve $u_\delta(t)$ çözümlerinin asimptotik davranışı ise (2.70) ifadesinin terim terim sırayla integralinin ve türevinin *t* ye göre alınması ile elde edilir. Özel olarak (2.70) ifadesinin sadece ilk terimi alınarak çözümlerin asimptotik davranışları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u_0(t) \approx \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \; u_1(t) \approx \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \; u_\delta(t) \approx -\frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \; ; \; t \to \infty. \tag{2.71}$$

(2.71) ifadesinden rölaksasyon ve titreşici kesirsel diferansiyel denklemlerinin temel ve etki tepki çözümlerinin $t \to \infty$ için cebirsel olarak azaldığı anlaşılmaktadır.

2.4.Sonuçlar

Bu bölümde, kesirsel integral ve diferansiyel denklemlerin temel analitik teorileri incelenmektedir. Bu bağlamda, kesirsel integral denklemlerin incelenmesi için, birinci ve ikinci tür lineer Abel denklemlerinin ortaya koyduğu temel örnekler ele alınmaktadır. Her iki tür için de farklı yollardan çözümlerin nasıl elde edileceği üzerinde durulmakta ve ısı yayılım problemi bu kapsamda incelenmektedir.

Sıradan kesirsel diferansiyel denklemlerin çözümlerinin Caputo kesirsel türev işlemcisi kullanılarak nasıl bulunacağı üzerinde ayrıntılı olarak durulmaktadır. Bu kapsamda, kesirsel rölaksasyon ve titreşici problemleri örnek olarak seçilerek aralarındaki ilişkiler vurgulanmaktadır.

Basit kesirsel rölaksasyon ve titreşici denklemlerinin çözümlerinde bulunan temel ve etki-tepki çözümlerinin özellikleri ayrıntılı olarak ortaya konmaktadır. Tüm bu çözümler Mittag-Leffler fonksiyonları cinsinden açıkça yazılabilmektedir. Temel ve etki-tepki çözümlerinin tümü zamanla sıfıra doğru yakınsama eğilimindedirler. Bu çözümler, $0 < \alpha < 1$ durumu için monoton şekilde, $1 < \alpha < 2$ durumu için ise sıfır etrafında sonlu birçok titreşim yaparak sıfıra yakınsamaktadırlar. Rölaksasyon ve titreşim problemini tanımlayan (2.46) kesirsel diferansiyel denklemi, $1 < \alpha < 2$ durumu için, saf sinüzoidal titreşim $(\alpha = 2)$ ve üstel azalma $(\alpha = 1)$ arasında bulunan ortalama süreçlerin matematiksel olarak modellenmesinde kullanılmaktadır.

3. NORMAL OLMAYAN DİFÜZYON

Bu bölümde normal olmayan difüzyon süreçleri kesirsel matematik, kesirsel Fokker-Planck ve kesirsel difüzyon denklemleri aracılığı ile ele alınmaktadır. Normal olmayan difüzyon şaşırtıcı incelikleri ile kolayca anlaşılmayan bir alandır. Bundan dolayı, parametreler ve üsler zaman ile veya bir dış kuvvetin varlığında veya yokluğunda değişebilir.

Kompleks sistemler ve onların yapısal ve dinamik özellikleri fizikte önemli bir yere sahiptir. Kompleks sistemler ve onların incelenmesi doğa bilimi içinde önemli bir rol oynamaktadır. Örneğin; camlar, sıvı kristaller, polimerler, proteinler, biopolimerler, organizmalar ve hatta ekosistemler. Genel olarak, zaman evrimi ile böyle sistemler standart öngörülerinden saparlar. Farklı deneysel tekniklerin gelişmesiyle bu sapmalar daha önemli hale gelmektedir.

Kompleks sistemler içindeki rölaksasyon süreci, klasik exponansiyel Debye modelinden sapmaktadır. Benzer olarak, çeşitli kompleks sistemler içindeki difüzyon süreçleri Gaussian istatistiğine uymazlar ve Fick'in ikinci yasası transport davranışını açıklamada başarısız olur. Genellikle, ortalama kare yerdeğiştirmenin lineer zaman bağımlılığı,

$$\left\langle x^2(t)\right\rangle \sim Kt \tag{3.1}$$

ifadesi ile temsil edilmektedir, burada K difüzyon sabitidir ve $[K]=L^2T^{-1}$ boyutuna sahiptir. Bu Brown hareketinin karakteristiği, merkezsel limit teoreminin doğrudan bir sonucu ve stokastik süreçlerin temelinin Markovian doğası olmaktadır. Normal olmayan difüzyon olgusu, difüzyon olayının meydana geldiği fiziksel sistemlerde önemli bir yere sahiptir, bu sistemlerde zaman akışı içindeki ortalama kare yerdeğiştirme non-lineer olarak değişmektedir. Böylelikle (3.1) denklemi yerine kompleks sistemlerde geçerli olan ortalama kare yerdeğiştirme

$$\left\langle x^2(t)\right\rangle \sim K_\alpha t^\alpha \tag{3.2}$$

ifadesi ile verilmektedir, burada K_α genelleştirilmiş difüzyon sabitidir ve $[K_\alpha] = L^2 T^{-\alpha}$ boyutundadır. Normal olmayan difüzyon davranışı (3.2) denklemi ile açıkça ifade edilebilmekte ve uzun aralıklı korelasyonlara veya geniş dağılımlara sebep olmaktadır. Normal olmayan difüzyon, böyle durumlar için Lévy-Gnedenko genelleştirilmiş merkezsel limit teoreminin geçerliliğine bağlıdır (Meltzler ve Klafter, 2000).

3.1. Tarihsel Bir Bakış

Difüzyon denklemi, matematiksel fizikteki üç temel kısmi diferansiyel denklemden (difüzyon, dalga ve Laplace denklemi) biridir. Bu önemli denklem ısı iletim teorilerinde, nötron taşınmasında ve transport teorisinin diğer örneklerinde önemli bir rol oynar.

Difüzyon, rastgele molekül hareketlerinin bir sonucu olarak bir sistemden diğerine madde taşınmasıdır. Standart difüzyon denkleminde parçacıklar, moleküllerin birbirinden bağımsız ve rasgele çarpmaları sonucu hareket ederler. Isı transferi de rasgele molekül hareketlerinden dolayıdır ve iki sistem arasında açık bir benzerlik vardır. Bu ilk olarak Fourier tarafından belirtilmiş ve Fick ısı iletiminin matematiksel denklemini nicel bir temel üzerine oturtmuştur.

Bir rasgele yürüyüş sürecinin terimleri içindeki transport fenomeninin stokastik formülasyonu ve deterministik difüzyon denkleminin tanımı, normal ve normal olmayan difüzyon teorilerinin her ikisi içinde iki temel kavramdır. Aslında, kararsız hareket üzerine bu iki tanımlamanın tarihi ve olasılık yoğunluğu fonksiyonu için bir diferansiyel denklem olması oldukça ilginçtir.

Tarihsel bir açıdan bakacak olursak, ilk olarak alkol yüzeyi üzerindeki kömür tozu parçacıklarının küçük titreşimleri Hollandalı fizikçi Jan Ingenhousz tarafından 1785'in başlarında gözlemledi. 1827 de İskoç fizikçi Robert Brown bir mikroskop altındaki küçük polen tozlarının düzensiz hareketlerini gözlemledi. Aynı zamanda 1822 de Joseph Fourier ısı iletim denklemini buldu, bu temel üzerine Adolf Fick 1855 de difüzyon denklemini oluşturdu. Detaylı deneyler ise

Gouy tarafından 1863 de C. Wigner tarafından verilen kinetik teori açıklaması ile tanıtıldı (Meltzler ve Klafter, 2000).

Fick deneysel çalışamalar yapan bir fizikçiydi fakat difüzyon üzerine olan çalışmaları teoriktir ve onun yaklaşımı bugünlerde bile difüzyona uygulanır. Özet olarak, difüzyonun sonucu konsantrasyonların dengesi olarak bilinir. Öyleki, parçacık akımı konsantrasyonların gradyentine doğru akar. Yani parçacık akımı konsantrasyonun yüksek olduğu bölgelerden alçak olduğu bölgelere doğrudur. Örnek olarak elektrik akımı için ohm kanunu veya ısı akısı için Fourier kanunu verilebilir. Fick $\vec{j}$ akımının konsantrasyon gradiyenti ile doğru orantılı olduğunu

$$\vec{j}(\vec{x},t) = -K\nabla C(\vec{x},t) \tag{3.3}$$

kabul etmiştir ki, bu denklem Fick'in birinci kanunu olarak bilinmektedir, burada C ise konsantrasyondur. Bazı durumlarda, örneğin seyreltik çözeltilerde difüzyon sabiti sabit bir değer olarak alınabilir fakat yüksek polimerlerdeki difüzyonda Difüzyon sabiti konsantrasyona önemli derecede bağlıdır. (3.3) denklemindeki – işareti difüzyon konsantrasyonun artışına zıt yönde meydana geldiğini göstermektedir. (3.3) denklemi ile açıklanan durumlar sadece herhangi bir nokta komşuluğundaki difüzyonun özellikleri ve yapısı, tüm yönlerde aynı görelikte olan izotropik bir ortam için geçerlidir. Bu simetriden dolayı, herhangi bir noktadaki difüz eden maddenin akısı, nokta boyunca sabit konsantrasyonun yüzeyine normal doğrultudadır. Bu anizotropik ortamlar için geçerli değildir. Eğer ek olarak parçacıklar yaratılıp yok edilmiyorlar ise, süreklilik denklemine göre;

$$\frac{\partial C(\vec{x},t)}{\partial t} = -\nabla\vec{j}(\vec{x},t) \tag{3.4}$$

alınmaktadır, bu denklemin Fick'in birinci yasası ile birleşimi Fick'in ikinci yasasını başka bir tanımla difüzyon denklemini verir.

$$\frac{\partial C(\vec{x},t)}{\partial t} = K\nabla^2 C(\vec{x},t)$$

Bu konsantrasyonun zaman evrimi için kapalı bir denklemdir.

Fick'in fenamolojisi istatistiksel mekaniğin temelindeki olasılık bakış açısını ele almamaktadır. Albert Einstein'in Brown hareketi üzerindeki tezi ise, bu yaklaşımı değiştirmiştir. Einstein, 50 yıl sonra moleküler teorinin postülalarından difüzyon denklemini türetmiştir. Einstein, difüzyon problemlerindeki konsantrasyonun $C(\vec{x},t)$ aynı zamanda bir parçacığın verilen bir noktada ve zamanda bulunma olasılığıyla $W(\vec{x},t)$ orantılı olduğunu gösterdi. Dolayısıyla $W(\vec{x},t)$ ile ifade edilen olasılık dağılımı, konsantrasyon ile aynı diferansiyel denklemi sağlamaktadır.

Difüzyonun benzer bir açıklaması 1900 yılında kendi tezi içinde Fransız matematikçi Louis Bachelier tarafından, fiziksel nicelikleri içeren miktar değerleri terimleri ile türetildi. Einstein'in sonuçlarının önemli bir uygulaması Jean Baptiste Perrin, A. Westgren ve Eugen Kappler tarafından Avagodro sayısının ölçümüdür ve bu çalışma Perrin'e 1926 yılındaki Nobel ödülü kazandırmıştır (Meltzler ve Klafter, 2000).

Einstein'in Brown hareketlerinin rasgele yürüyüşünü incelemesinden çok sonra, ilk olarak Montroll ve Weiss tarafından 1965 yılında ortaya atılan sürekli zamanda rasgele yürüyüş (CTRW) teorisinde ise adımlar Einstein'in teorisinde olduğu gibi belli aralıklarla atılmak yerine $\psi(t)$ ile gösterilen ve zamanda bekleme dağılımı olarak bilinen bir dağılıma göre atılmaktadır (Montroll ve Weiss, 1965). Bu dağılım sistemdeki engelleri, gecikmeleri ve tuzakları içereceğinden bir anlamda sistemin hafızasının rasgele dolaşıma etkisi olarak başka bir deyiş ile bellek etkisi olarak düşünülebilir. Sistemin ortalama bekleme süresini veren

$$\tau = \int t\psi(t)dt$$

integrali ıraksak olursa, ortalama kare yerdeğiştirme bekleme dağılımına göre değişecektir. Bu amaçla:

$$\psi(t) \propto \frac{1}{(1+t/\tau)^{1+\alpha}} \qquad ; \qquad 0<\alpha<1$$

gibi bir zamanda bekleme dağılımı alırsak, $\langle r^2 \rangle \propto t^{\alpha}$ olacaktır, burada *t*, toplam geçen süre, τ, her adımda geçen bekleme süresi, t/τ ise toplam adım sayısıdır. Zamanla alınan yol, $\alpha < 1$ için subdifüzyon olarak bilinir ve Einstein' ın teorisinden daha az yol katedilir. $\alpha > 1$ hali ise, süperdifüzyon durumu olarak bilinir ve daha çok yol alınır. Subdifüzyon durumlarda, adımlar arası süre (kesirsel türev mertebesi olarak bilinen α nın değerine bağlı olarak) değişmekte ve bazı adımlardan önce sistem uzun süre bekleyebilmektedir (Meltzler ve Klafter, 2000).

3.2. Kesirsel Difüzyon Denklemleri

Kesirsel difüzyon denklemi son yıllarda çokça çalışılan konulardan biridir. Oldham ve Spainer kesirsel difüzyon denklemini konumu birinci mertebeden bir türev, zamanı ise 1/2. mertebeden türev alarak ele alarak bu kesirsel difüzyon denklemi ile standart difüzyon denklemi arasındaki ilişkileri incelemektedirler (Oldham ve Spanier, 1974). Nigmatullin ise akustik, mekanik ve elektromanyetik konularında difüzyon-dalga denkleminin kullanılmasını ve bu sistemlerin modellenmesini ele almaktadır (Nigmatullin, 1986). Wyss, Mellin dönüşüm teorisini kullanarak kesirsel difüzyon denklemini Fox fonksiyonları cinsinden elde etmektedir (Wyss, 1986). Wyss ayrıca, Schneider ile birlikte difüzyon ve dalga denklemlerini diferintegral denklemlerin terimleri cinsinden göstermekte ve Fox fonksiyonlarının terimleri ile bağlantılı olan Green fonksiyonları ile ilişkilendirmektedirler (. Schneider ve Wyss, 1989). Sanz-Serna bir kısmi diferintegral denklemin integrasyonu için bir nümerik metot geliştirmişlerdir (Sanz-Serna, 1988). Fujita, ısı ve dalganın yayılımının özelliklerini integro-diferansiyeller yardımıyla ele almaktadırlar (Fujita, 1990).

Ginoa ve arkadaşları, bir kesirsel difüzyon denkleminin, kompleks viskoelastik maddeler içindeki rölaksasyon fenomenini açıklayabildiğini göstermişlerdir (Ginoa et al., 1992). Roman ve Alemany fraktalar üzerindeki bir sürekli zamanda rasgele yürüyüş olayını aydınlatmışlardır. Ayrıca, ortalama olasılık yoğunluğunun, kesirsel zaman türevi terimine sahip difüzyon denklemi ile uyumlu olduğunu göstermişlerdir (Roman ve Alemany, 1994).

Mainardi ve Paradisi difüzyon denklemindeki birinci mertebeden zaman türevini α. mertebeden kesirsel türev ile değiştirerek genellemişlerdir. Bu şekilde difüzyon olayının α'nın farklı değerleri için farklı difüzyon olaylarını açıkladığını göstermişlerdir (Mainardi ve P. Paradisi, 1997).

Metzler ve Klafter, hem yansıma ve soğurma sınır koşulları için kesirsel difüzyon denklemini çözmek için Fourier dönüşüm tekniği ve görüntü yöntemini kullanmışlar hem de konum türevini de kesirsel alarak konum kesirsel difüzyon denklemini ele almışlardır. Hem yarı sonsuz, hem de sonlu uzay durumlarını ele almışlar ve ayrıca bir dış kaynak varlığındaki kesirsel difüzyon denklemini çözerken değişkenlerine ayırma metodunu kullanmışlardır (Meltzler, ve Klafter, 2000). Hilfer ise, kesirsel difüzyon denkleminin kapalı bir formunu H-fonksiyonlarının terimleri cinsinden vermiştir. Hilfer ayrıca farklı sistemler için normal olmayan difüzyon olayını ele almıştır (Hilfer, 2003).

Zaman veya konum kesirsel difüzyon denklemleri standart difüzyon denklemindeki birinci veya ikinci mertebeden zaman veya konum türev operatörleri yerine kesirsel türev operatörlerinin alınması ile elde edilmektedir.

Standart difüzyon denkleminde bulunan zamana bağlı türev operatörünün yerine zaman-kesirsel türev operatörü alınarak zaman kesirsel difüzyon denklemi:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = {}_0D_t^{1-\alpha} K_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x,t) \qquad 0<\alpha<1 \tag{3.5}$$

şeklinde tanıtılmaktadır(Meltzler, ve Klafter, 2000; Wyss, 1986). Burada,

$${}_0D_t^{1-\alpha} W(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t dt' \frac{W(x,t')}{(t-t')^{1-\alpha}}$$

Riemann-Liouville kesirsel türev operatörüdür. $W(x,t)$ nin konum uzayındaki çözümü ise Fox fonksiyonlarının ($H_{1,2}^{2,0}$) terimleri ile verilir

$$W(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi K_\alpha t^\alpha}} H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{x^2}{4K_\alpha t^\alpha} \middle| \begin{matrix} \left(1-\frac{\alpha}{2}, \alpha\right) \\ (0,1), \left(\frac{1}{2}, 1\right) \end{matrix} \right]. \tag{3.6}$$

Bu çözüm seri açılımı şeklinde,

$$W(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi K_{\alpha}t^{\alpha}}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!\Gamma(1-\alpha[n+1]/2)}\left(\frac{x^{2}}{K_{\alpha}t^{\alpha}}\right)^{n/2} \tag{3.7}$$

veyahutta asimptotik Gaussien davranışı ile,

$$\begin{aligned} W(x,t)\sim \frac{1}{\sqrt{4\pi K_{\alpha}t^{\alpha}}}\sqrt{\frac{1}{2-\alpha}}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{(1-\alpha)/(2-\alpha)}\left(\frac{|x|}{\sqrt{K_{\alpha}t^{\alpha}}}\right)^{-(1-\alpha)/(2-\alpha)} \\ \times\exp\left(-\frac{2-\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\alpha/(2-\alpha)}\right)\left[\frac{|x|}{\sqrt{K_{\alpha}t^{\alpha}}}\right]^{1/(1-\alpha/2)} \end{aligned} \tag{3.8}$$

ile verilmektedir. $\alpha \to 1$ Brown limitinde, Kesirsel difüzyon denkleminin çözümleri x ve t nin bütün değerleri için

$$W(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi K_{1}t}}\exp\left(-\frac{x^{2}}{4K_{1}t}\right) \tag{3.9}$$

standart çözümlere indirgenmektedir (Meltzler, ve Klafter, 2000).

3.2.1. Nigmatullin kesirsel difüzyon-dalga denklemi

Kesirsel difüzyon denklemlerine bir başka örnek olarak Nigmatullin tarafından önerilen difüzyon-dalga denklemi verilebilir;

$$\begin{aligned} &{}_{0}D_{t}^{\alpha}\,W(x,t)=K\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}W(x,t) \qquad t>0 \qquad -\infty<\alpha<\infty \\ &\lim_{x\to\pm\infty}W(x,t)=0 \quad ; \quad {}_{0}D_{t}^{\alpha-1}W(x,t)\Big|_{t=0}=\varphi(x) \qquad 0<\alpha<1 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Bu denklemde $\alpha=1$ durumunda standart difüzyon denklemi, $\alpha=2$ durumunda klasik dalga denklemi elde edildiğinden, denklem herhangi bir gerçel α değeri için Nigmatullin kesirsel difüzyon-dalga denklemi olarak adlandırılır (Nigmatullin, 1986). Fourier dönüşümü yapılacak olursa,

$$F\left\{ {}_0D_t^{\alpha}\, W(x,t) \right\} = K\, F\left\{ \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \right\}$$

$${}_0D_t^{\alpha}\, \overline{W}(k,t) + K\, k^2 \overline{W}(k,t) = 0$$

Başlangıç koşulu ifadesine de Fourier dönüşümü uygulayacak olursak,

$$F\left\{ {}_0D_t^{\alpha-1} W(x,t)\Big|_{t=0} \right\} = {}_0D_t^{\alpha-1} \overline{W}(k,t)\Big|_{t=0} = \overline{\varphi}(k)$$

Laplace dönüşümü ile,

$$L\left\{ {}_0D_t^{\alpha}\, \overline{W}(k,t) \right\} + K\, k^2 L\left\{ \overline{W}(k,t) \right\} = 0$$

bu ifadede Riemann-Liouville kesirsel türev operatörünün Laplace dönüşümünü kullanacak olursak,

$$s^{\alpha} \overline{W}(k,s) - {}_0D_t^{\alpha-1} \overline{W}(k,t)\Big|_{t=0} + Kk^2 \overline{W}(k,s) = 0$$
$$\overline{W}(k,s)\left\{ s^{\alpha} + Kk^2 \right\} = \varphi(k)$$

$$\overline{W}(k,s) = \frac{\overline{\varphi}(k)}{s^{\alpha} + Kk^2} \tag{3.11}$$

elde ederiz. Bu ifadeye ters Laplace dönüşümü uygulacak olursak,

$$L\left\{ \overline{W}(k,s);t \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{\overline{\varphi}(k)}{s^{\alpha} + Kk^2} \right\}$$

$$\overline{W}(k,t) = \overline{\varphi}(k) t^{\alpha-1} E_{\alpha}\left(-Kk^2 t^{\alpha} \right) \tag{3.12}$$

şeklinde Mittag-Leffler fonksiyonu cinsinden elde edilir. Eğer Fourier uzayında Mittag-Leffler fonksiyonu cinsinden elde ettiğimiz sonucun ters Fourier dönüşümünü alacak olursak konum uzayındaki sonucu elde ederiz. Burada α kesirsel türev mertebesinin $0 < \alpha < 1$ değerlerine sahip olduğu durum ultrayavaş difüzyon , $1<\alpha<2$ değerleri arasında olduğu durum ise ara prosesler olarak adlandırılmaktadır (Gorenflo ve Rutman, 1995).

3.2.2. Schneider – Wyss kesirsel difüzyon-dalga denklemi

Nigmatullin kesirsel difüzyon-dalga denkleminin kesirsel matematikte kullanılan genelleştirilmiş fonksiyonlar yaklaşımı (Podlubny, 1999) ile W.Wyss tarafından (Wyss, 1986) ve daha sonra W.R. Schneider ve W. Wyss (Schneider ve W. Wyss, 1989), ayrıca T.F. Nonnenmacher ve DJ.F. Nonnenmacher (Nonnenmacher ve Nonnenmacher, 1989) tarafından farklı bir yaklaşımla ele alınmıştır;

$$ {}_0J_t^{m-\alpha}\,{}_0D_t^m W(x,t)=K\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(x,t) $$

burada ${}_0J_t^{m-\alpha}\,{}_0D_t^m$ Caputo kesirsel türev operatörüdür. ${}_0J_t^{\alpha}$ ile çarpacak olursak,

$$ {}_0J_t^{m}\,{}_0D_t^m W(x,t)=K\,{}_0J_t^{\alpha}\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(x,t) $$

$$ W(x,t)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}W(x,0)=K\,{}_0J_t^{\alpha}\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(x,t) \quad m-1<\alpha<m \quad m=1\Rightarrow 0<\alpha<1 $$

$$ \lim_{x\to\pm\infty}W(x,t)=0 \quad W(x,0)=\varphi(x) $$

$$ W(x,t)=\varphi(x)+K\,{}_0J_t^{\alpha}\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(x,t) \qquad -\infty<x<\infty \quad t>0 \quad (3.13) $$

denklemi Schneider – Wyss kesirsel difüzyon denklemi olarak bilinir. Bu denklemi Nigmatullin kesirsel difüzyon denklemindeki gibi çözebiliriz. Önce Fourier dönüşümü yapacak olursak,

$$ F\{W(x,t);k\}=F\{\varphi(x);k\}+KF\left\{{}_0J_t^{\alpha}\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(x,t);k\right\} $$

$$ \overline{W}(k,t)=\overline{\varphi}(k)-Kk^2\,{}_0J_t^{\alpha}\overline{W}(k,t) $$

Laplace dönüşümü ile,

$$L\{\overline{W}(k,t);s\} = L\{\overline{\varphi}(k);s\} - Kk^2\, L\{{}_0 J_t^{\alpha}\overline{W}(k,t);s\}$$

$$\overline{W}(k,s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + Kk^2}\overline{\varphi}(k) \tag{3.14}$$

elde edilir. Ters Laplace dönüşümü alınırsa,

$$\overline{W}(k,t) = \overline{\varphi}(k)E_{\alpha}\left(-Kk^2 t^{\alpha}\right) \tag{3.15}$$

Mittag-Leffler fonksiyonu cinsinden elde edilmektedir.

3.3.Fokker-Planck Denklemi

Bu altbölümde, istatistiksel fizikteki denklemlerin içinde geniş kullanım alanına sahip olan Fokker-Planck denklemi ele alınmaktadır. Kesirsel Fokker-Planck denkleminin türetilmesi verilmekte ve standart Fokker-Planck denklemini genellediği gösterilmektedir.

Fokker-Planck denklemi stokastik kuvvetlerin etkisi altında kalan dinamik sistemlerin evrimi ile ilişkili olan problemlerin geniş bir kısmını tanımlar. Daha açık bir ifade ile, Fokker-Planck denklemi stokastik sistemlerin evrimini tasvir eder, denge durumunda olan veya olmayan sistemlere uygulanabilir. Bir parçacığın hız ve konumunun olasılık yoğunluk fonksiyonunun zaman evrimini tanımlar. Denklem, termal denge durumundan uzaktaki nonlineer sistemlerin istatistiği için kullanışlı bir araçtır. İlk olarak Fokker ve Planck tarafından, parçacıklarının Brown hareketini tanımlamakta kullanılmıştır. Brownian transportunun birçok durumunda standart Fokker-Planck denklemi, dış alanlar içindeki stokastik dinamiklerin açıklanması için kullanılabilmektedir. Bir dış alan etkisindeki normal difüzyon, genellikle standart Fokker-Planck denkleminin terimleri ile modellenir. Fokker-Planck denklemi Kolmogorov denkleminin özel bir hali olarak alınabilir (Hilfer, 2000). Bazı kaynaklarda Smoluchowski'nin özgün çalışmaları sebebi ile Smoluchowski denklemi olarak da adlandırılır. Standart Fokker-Planck denklemi,

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \left[\frac{\partial V'(x)}{\partial x m \eta_1} + K_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] W(x,t) \tag{3.16}$$

ifadesi ile verilmektedir, burada *m* difüz eden parçacığın kütlesi, η ise parçacık ile ortam arasındaki sürtünme sabitini gösterir. Fokker-Planck denklemi, yoğun madde fiziği, kuantum optiği, kimyasal fizik ve biyofizik gibi birçok alanında kullanılmaktadır (Sokolov et al., 2002).

Kesirsel Fokker-Planck denklemi ise genellikle, bir Langevin denkleminden türetilebilmektedir. Normal olmayan difüzyon içeren sistemlerdeki durumlar için de kesirsel Fokker-Planck denklemi kullanılabilmektedir.

Kesirsel Fokker-Planck denklemi, standart Fokker-Planck denklemindeki türev operatörünün yerine zaman kesirsel türev operatörünün konulması ile elde edilebilmektedir.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = {}_0D_t^{1-\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{V'(x)}{m\eta_\alpha} + K_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] W(x,t) \tag{3.17}$$

$$L_{FP} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{V'(x)}{m\eta_\alpha} + K_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{3.18}$$

L_{FP}, Fokker-Planck operatörü, K_α genelleştirilmiş difüzyon sabiti ve η_α ise $[\eta_\alpha] = s^{\alpha-2}$ boyutunda genelleştirilmiş sürtünme sabitidir. Kesirsel Fokker-Planck denklemi, difüzyon denklemini ve standart Fokker-Planck denklemini kesirsel türev mertebesi α ya bağlı olarak genellemektedir. $\alpha \to 1$ durumunda KFPD, standart Fokker-Planck denklemi haline indirgenir. $V(x) = \text{sabit}$ durumunda ise kesirsel difüzyon denklemine indirgenir (Meltzler ve Klafter, 2000).

Kuvvetin olmadığı limitte ise, standart Fokker-Planck denklemi, Fick'in ikinci yasasına indirgenir ve böylelikle ortalama kare yerdeğiştirmenin zaman evrimi lineer bir hal alırken, kesirsel Fokker-Planck denklemi,

$$\left\langle x^2(t) \right\rangle_0 = \frac{2K_\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha$$

ortalama kare yerdeğiştirmesine bağlı subdifüzyon ile açıklanmaktadır, burada Γ, Gamma fonksiyonudur. Ortalama kare yerdeğiştirme, zamanın α. üssü ile orantılı olmaktadır (Meltzler ve Klafter, 2000).

3.4.Sonuçlar

Gaussian difüzyonuna karşın, kesirsel difüzyon α kesirsel türev mertebesinde bir parametre içerdiğinden yaygın değildir. Deneysel sonuçlar ve doğa ise Gaussian yaygınlığını sık sık bozar. Başka bir deyişle, gerçeğe yakın olarak tasvir edilebilen fiziksel sistemlerde meydana gelen difüzyon olgusu gaussian bir yapıda değildir. Kesirsel difüzyon denklemleri ise bu noktada devreye girmektedirler ki, birçok sistemde gözlenen normal olmayan davranışları açıklamakta gayet başarılı olmaktadırlar. Bu şekilde normal olmayan difüzyon, kesirsel rastgele yürüyüş ve subdiffusive olaylar gibi fiziksel sistemleri incelemek olası olmaktadır. Normal olmayan difüzyon olgusunu tasvir eden kesirsel denklemler için elde olunan sonuçlar özel durumlarda, homojen ve izotropik bir ortam üzerinde rasgele yürüyüş modellerinden bulunanlara eşdeğer olmaktadırlar.

Kesirsel difüzyon denklemlerinin görünümünün standart difüzyon denklemlerine yakınlığı çok ilgi çekicidir. Örneğin; Kesirsel Fokker-Planck denklemi, bir Langevin denkleminden türetilebilmektedir. Genelleştirilmiş Langevin denklemleri, zamandan bağımsız katsayılar içeren ve zaman içinde bölgesel olan Fokker-Planck denklemlerine karşılık gelmektedirler. Kesirsel Fokker-Planck denklemleri de, standart hallerinde olduğu gibi Kesirsel difüzyon denklemine indirgenebilmektedir. Diğer taraftan, Brownian transport fenomeninin birçok durumunda, deterministik Fokker-Planck denklemleri dış alanlar içindeki stokastik dinamiklerin açıklanması için kullanılabilir. Benzer olarak, normal olmayan difüzyon olgusunu içeren sistemlerdeki durumlar için kesirsel Fokker-Planck denklemini kullanmak olası olmaktadır. Bu yaklaşım ile fiziksel mekanizmalar kesirsel kinetiklere ulaşmaktadır. Kesirsel kinetik denklemler ise fiziksel sistemlere farklı bir bakış açısı ile gerçeğe yakın fiziksel sistemleri tasvirinde güçlü bir yol olmaktadırlar.

Difüzyonun kesirsel kinetik denklemleri, difüzyon-iletim(advection) ve Fokker-Planck tipi, eksponansiyel olmayan rölaksasyon işlemleri ve normal olmayan difüzyon ile tanımlanan kompleks sistemler içindeki transport dinamiklerinin açıklanması için faydalı bir yaklaşım olarak belirtilir. Bu kesirsel kinetik denklemler temel rastgele yürüyüş problemlerinden veya Langevin denkleminden elde edilebilmektedirler.

Fokker-Planck denklemi ise çeşitli potansiyeller ile çalışılmıştır ve geniş bir uygulama alanına sahiptir. Kesirsel Fokker-Planck denklemi de bir dış alanın yokluğundaki normal olmayan transportu tanımlamaktadır.

4. KİNETİK DENKLEM

Bu bölümde kinetik denklemin kesirsel matematik, kümülatif küçülmeler/büyümeler metodu ve q-matematik ile çözümleri verilmektedir. Elde olunan sonuçlar ise gerek kesirsel türev mertebesi α , gerekse entropi indisi q ile ilişkili durumlarda incelenmektedir. α ve q parametrelerinin fiziksel orijinine değinilmektedir. Bu bağlamda, rölaksasyon mekanizmasının anlaşılabilmesi için, kinetik denklemin özel bir hali ve rölaksasyon denklemine benzer olan Fourier uzayındaki difüzyon denkleminin çözümleri hem kesirsel matematik hem de kümülatif küçülmeler/büyümeler metodu kullanılarak elde edilmektedir. Difüzyon denkleminin genelleştirilmiş istatistiksel fizik ve kesirsel matematik çerçevesindeki çözümleri ele alınmakta, bunların birbirleriyle ilişkisi ortaya konmakta, standart çözümün yetersizliği fiziksel mekanizması basit bir kümülatif küçülmeler/büyümeler metodu ile ele alınarak açıklanmaktadır. Bir başka örnek olarak protein dinamiği ele alınmaktadır; proteinlerde myoglobin ve hemoglobin gibi demir ligandları, belli bir sıcaklıkta foto-ayrışmaya uğradıklarında, zamanın fonksiyonu olarak anormal (üstel yerine kuvvet yasası formuna uyan) bir yeniden birleşme davranışı sergilerler. Bu davranışı da kesirsel matematik, kümülatif küçülmeler metodu yada q-matematikle ele almak daha doğru olmaktadır.

Temel fizik yasalarının birçoğu fiziksel bir niceliğin zaman içindeki evrimini tanımlayan diferansiyel denklemler ile formüle edilir. Bu tür diferansiyel denklemler literatürde kinetik denklemler olarak da adlandırılmaktadır (Saxena et al., 2002; Saxena et al., 2004; Mathai et al., 2006; Sokolov et al., 2002).

Kinetik denkleme örnek olarak rölaksasyon denklemi ve rölaksasyon süreçleri verilebilmektedir. Rölaksasyon süreçleri fizikte birçok sistemde gözlemlenebilir. Örneğin amorf yarıiletkenler içindeki yük transportu (Hilfer, 2000). Cole-Cole bağıntısı (Hilfer, 2003), LC - RC devreleri (Rousan et al., 2006), v.b. birçok fiziksel olay rölaksasyon süreçlerine örnek olarak verilebilir.

$W = W(t)$ zamana bağlı olarak değişen fiziksel bir nicelik olmak üzere kinetik denklem aşağıdaki formda verilir

$$\frac{dW(t)}{dt} = aW(t). \tag{4.1}$$

Burada, $t \in R$ bağımsız değişkeni zaman niceliğidir, a ise lineer ya da lineer olmayan (nonlineer) bir işlemci ya da denklemi boyutsuz hale getiren bir sabit olabilir. Kinetik denklemlerin çözümleri ise eksponansiyel (üstel) azalan/artan formdadır

$$W(t) = W(0)e^{at}. \tag{4.2}$$

Burada, $W(0)$ ilgili problemin başlangıç koşuludur.

$W(t)$ niceliğinin ortalama değeri $\langle W(t) \rangle$ olmak üzere $\langle W(t) \rangle = \langle W(0) \rangle \exp\{-t/\tau\}$ ile verilir, burada $a = -1/\tau$, fiziksel olaya özgü karakteristik zaman ölçeğidir. Rölaksasyon denklemi (Hilfer, 2000) bu kapsamda ele alınabilir.

Öklidiyen uzayda gelişen, zamanın homojen olduğu durumlarda standart kinetik denklemin tasvirinde standart türev kullanılabilir. Standart kinetik denklemin kesirsel formdaki hali ise kesirsel kinetik denklem olarak adlandırılır ve literatürde çalışmalarda çözümü yapılmaktadır (Saxena et al., 2002; Saxena et al., 2004; Mathai et al., 2006; Sokolov et al., 2002). Bu maksatla literatürde, standart türev işlemcisi yerine

$$\frac{d}{dt} \to \frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}$$

alınır, burada α kesirsel türev mertebesidir.

Standart kinetik denkleminin, standart türev işlemcisinin yerine kesirsel türev işlemcisi alarak yada kümülatif küçülmeler/büyümeler metodu ile çözümlerini yapmak mümkün olmaktadır. Kesirsel kinetik denklemle ilişkili olan, denge durumunda olmayan, fiziksel süreçlerin matematiksel olarak modellenmesinde kullanılan bir diğer denklem de difüzyon denklemidir. Difüzyon denkleminin Fourier uzayındaki formu ise rölaksasyon denkleminin özel bir halidir. Kinetik denklem ile difüzyon denkleminin Fourier uzayındaki dönüşümü birbirine benzerdir. Tek boyutta difüzyon denklemi

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = K\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \tag{4.3}$$

ile verilir. Burada $W(x,t)$ olasılık fonksiyonu, K ise difüzyon sabitidir. Difüzyon denkleminin Fourier uzayındaki hali ise;

$$\frac{\partial W(k,t)}{\partial t} = -Kk^2 W(k,t)$$

denklemidir. Burada k dalga sayısı olmak üzere, bu denklem rölaksasyon denkleminin bir benzeridir (Meltzler ve Klafter, 2000). Fourier uzayında difüzyon denkleminin çözümü ise;

$$W(k,t) = \exp\left(-Kk^2 t\right). \tag{4.4}$$

şeklinde elde edilir. Kesirsel matematik ve q-matematikteki çözümler standart sonuçları genellemek amacındadır. Difüzyon denkleminin Fourier uzayındaki çözümleri kesirsel matematikle(Meltzler ve Klafter, 2000) ve q-matematikle (Boon ve Lutsko, 2000) yapılmakta ve sonuçlar standart durumlarla karşılaştırılarak incelenmektedir. Ancak nonekstensif fizikteki q-indisinin fiziksel kaynağı merak konusudur.

4.1.q-matematikle Çözüm

Fourier uzayında q-difüzyon denklemi J.P.Boon tarafından difüzyon denklemi klasik istatistik mekanikteki ortalama saçılma fonksiyonu kullanılarak matematiksel olarak türetilmiş ve Fourier uzayında çözümü yapılmıştır. Başka bir deyişle nonekstensif istatistiksel mekanik kullanılarak difüzyon denkleminin bir genelleştirilmesi elde edilmiştir. q-difüzyon denklemi Fourier uzayında,

$$\frac{\partial W(k,t)}{\partial t} = -Kk^2 W^q(k,t) \tag{4.5}$$

olarak tanımlanmakta, bu denklemin çözümü ise,

$$W(k,t) = \left[1-(1-q)Kk^2 t\right]^{\frac{1}{(1-q)}} \tag{4.6}$$

şeklinde elde edilmektedir (Boon ve Lutsko, 2000).

Bu fonksiyonun ters Fourier dönüşümünün alınması ile q-difüzyon denklemi elde edilmektedir. Saçılma fonksiyonu gerçel ve pozitif olması gerektiğinden köşeli parantezler içindeki ifadenin pozitif olması gereklidir. Bu $q>1$ için her zaman geçerlidir fakat $q<1$ için saçılma fonksiyonunun bir basamak fonksiyonu içermesi gerekmektedir;

$$W(k,t) = \left[1-(1-q)Kk^2 t\right]^{\frac{1}{1-q}} \Theta\left(1-(1-q)Kk^2 t\right)$$

burada $y>1$ için $\Theta(y)=1$ ve diğer durumlarda $\Theta(y)=0$ dır. Bir boyutta, q-eksponansiyel fonksiyonun ters Fourier dönüşümü ile $q>1$ durumu için,

$$G_{q>1}(x,t) = \frac{\Gamma^{-1}\left(1/(q-1)\right)}{\sqrt{\pi}\sqrt{(q-1)Kt}} \left(\frac{r}{2}\right)^{1/(q-1)-1/2} K_{1/(q-1)-1/2}(r)$$

elde edilir, burada $r = x\big/\sqrt{(q-1)Kt}$ ve $K_\nu(r)$ ise ikinci tip modifiye edilmiş Bessel fonksiyonudur. Standart difüzyon denkleminin genel çözümleri de Bessel fonksiyonları cinsinden verildiği için bu sonuç şaşırtıcı değildir. Benzer şekilde $q \to 1$ durumunda;

$$G_{q\to 1}(x,t) \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi Kt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Kt}\right)$$

denklemi haline gelir. Aynı düşünce ile $q<1$ q-exp fonksiyonun ters Fourier dönüşümü ile,

$$G_{q<1}(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(1/(q-1)+1)}{\sqrt{(1-q)Kt}}\left(\frac{r}{2}\right)^{1/(q-1)-1/2}J_{1/(q-1)-1/2}(r)$$

şeklinde elde edilir, burada $r=x\big/\sqrt{(q-1)Kt}$ ve J_ν ise birinci tip Bessel fonksiyonudur (Boon ve Lutsko, 2000).

4.2.Kesirsel Mtematik ile Çözüm

Kesirsel difüzyon denkleminin Fourier uzayındaki çözümü, kesirsel kinetik denkleminin çözümüne karşılık gelmektedir. Difüzyon denkleminin Fourier uzayındaki zaman kesirsel çözümünü ele alalım. Caputo kesirsel türevi kullanılarak difüzyon denklemi zaman kesirsel olarak,

$$ {}_0^cD_t^\alpha W(x,t)=K\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(x,t) \tag{4.7}$$

şeklinde yazılabilir, burada K difüzyon katsayısıdır. Bu denklem literatürde zaman kesirsel difüzyon denklemi olarak bilinir. ${}_0^cD_t^\alpha={}_0J_t^{m-\alpha}\;{}_0D_t^m$ yazılacak olursa,

$$ {}_0J_t^{m-\alpha}\;{}_0D_t^mW(x,t)=K\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(x,t) \tag{4.8}$$

$$W(x,t)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}W^{(k)}(x,t)\Big|_{t=0}={}_0J_t^\alpha\left\{K\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(x,t)\right\}\qquad 0<\alpha<1 \tag{4.9}$$

haline gelir. $W(x,t)\big|_{t=0}=W_0(x)$ ilk hali ile,

$$W(x,t)=W_0(x)+{}_0J_t^\alpha\left\{K\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(x,t)\right\} \tag{4.10}$$

elde edilir. Bu ifadeye Fourier dönüşümü uygulayacak olursak,

$$F\{W(x,t);k\} = F\{W_0(x);k\} + F\left\{ {}_0J_t^{\alpha}\left\{ K\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(x,t)\right\};k\right\}$$
$$W(k,t) = W_0(k) - Kk^2\, {}_0J_t^{\alpha}W(k,t) \tag{4.11}$$

elde edilir. Bu ifadeye Laplace dönüşümü uygulayacak olursak,

$$W(k,u) = W_o(k)\frac{u^{\alpha-1}}{u^{\alpha}+Kk^2} \tag{4.12}$$

elde edilir. Bu ifadeye ters Laplace dönüşümü uygulanacak olursa,

$$W(k,t) = W_0(k)E_{\alpha}\left(-Kk^2t^{\alpha}\right) \tag{4.13}$$

şeklinde Mittag-Leffler fonksiyonu cinsinden elde edilir. τ karakteristik zaman olmak üzere, $Kk^2 = \dfrac{1}{\tau}$ alınırsa,

$$W(t) = W_0\, E_{\alpha}\left\{-\frac{1}{\tau}t^{\alpha}\right\} \tag{4.14}$$

Standart kinetik denklemin kesirsel çözümü de denklem (4.14) ile verilen sonuca götürür. Caputo kesirsel türev tanımını kullanılarak kesirsel kinetik denklem,

$$\begin{aligned} {}^{c}D^{\alpha}W(t) &= aW(t) \\ J^{1-\alpha}DW(t) &= aW(t) \end{aligned} \qquad 0 < \alpha \le 1 \tag{4.15}$$

şeklinde verilir, burada $a = -\dfrac{1}{\tau}$ ve $0 < \alpha \le 1$ dir. Eşitliğin her iki tarafına Riemann-Liouville kesirsel integral işlemcisi J^{α} uygulanır ve kesirsel işlemcilerin bileşim kuralı kullanılırsa (Podlubny, 1999; Oldham ve Spanier, 1974; Miller ve Ross, 1993).

$$J\,DW(t) = aJ^{\alpha}W(t) \tag{4.16}$$

denklemi elde edilir. $y(0) = 1$ başlangıç koşulu ile daha açık bir biçimde

$$W(t) = 1 + aJ^{\alpha}W(t) \tag{4.17}$$

denklemiyle yazılabilir. (4.17) denkleminde eşitliğin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$w(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - a} \tag{4.18}$$

bulunur. Burada, $w(s)$ fonksiyonu $W(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümüdür ve s Laplace dönüşüm parametresidir. (4.18) denkleminin ters-Laplace dönüşümü alınırsa (Podlubny, 1999), (4.15) kesirsel kinetik denkleminin çözümü

$$W(t) = W_0\,E_{\alpha}\left(at^{\alpha}\right) = W_0\,E_{\alpha}\left\{-\frac{1}{\tau}t^{\alpha}\right\} \tag{4.19}$$

Mittag-Leffler fonksiyonu cinsinden elde edilir.

İncelenen karmaşık sistemin zamana bağlı difüzyon davranışları Mittag-Leffler fonksiyonu ile gerçeğe yakın tasvir edilmektedir. Tamsayı mertebeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinde sıklıkla karşılaşılan üstel fonksiyonun yetersizliği kesirsel yaklaşımda kullanılan Mittag-Leffler fonksiyonu ile telafi edilmektedir. (4.19) denklemi seri toplam formunda $W_0 = 1$ için,

$$E_{\alpha}\left(-\frac{1}{\tau}t^{\alpha}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{\tau}t^{\alpha}\right)^{n}}{\Gamma(\alpha n + 1)} \tag{4.20a}$$

yazılabilir, burada Γ Gama fonksiyonudur (Wiman, 1905). Asimptotik kuvvet yasası formunda Mittag-Leffler fonksiyonu

$$W(t) \sim -\frac{\tau}{t^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)} \tag{4.20b}$$

formunu alır. Sayısal uygulamalarda kullanılmak üzere (4.20a) denklemi ile verilen çözüm açık olarak

$$E_{\alpha}\left(-\frac{1}{\tau}t^{\alpha}\right) \approx 1 - \frac{t^{\alpha}}{\tau\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\tau^{2}\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\tau^{3}\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{t^{4\alpha}}{\tau^{4}\Gamma(4\alpha+1)} + \ldots \tag{4.20c}$$

formunda yazılabilir. $t << 1$ için

$$E_{\alpha}\left(-\frac{t^{\alpha}}{\tau}\right) \approx 1 - \frac{t^{\alpha}}{\tau^{2}\,\Gamma(\alpha+1)} \tag{4.20d}$$

yazılabilir. Difüzyon denkleminin (4.14) ve (4.19) denklemleri ile verilen çözümü $\alpha = 1$ durumunda standart matematikle elde olunan

$$\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad W(t,\tau) = W_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{4.21}$$

standart çözümü verir.

4.3. Toplanabilir Olmayan Termoistatistik ve *q*-genelleştirilmiş Kinetik Denklem

Enerji kayıpları ve sıcaklık fülüktüasyonları gibi kuvvet yasası formu ile üstel yasa formu arasında davranışlar sergileyen fiziksel sistemler Tsallis termoistatistiği çerçevesinde ele alınmaktadır (Tsallis, 2002; Tsallis, 2004; Tsallis ve Borges, 2003; Tsallis et al., 1999). Tsallis toplanabilir olmayan termoistatistiğinde kullanılan *q*-üstel fonksiyonunun yapısı, kuvvet yasası formu ile eksponansiyel yasa formu arasında bir doğaya sahiptir.

Termodinamik toplanabilirliğin geçerli olduğu fiziksel sistemleri incelemek için Boltzmann-Gibbs istatistiği yeterli ve oldukça kullanışlıdır. Moleküler bakış açısından, moleküller arası kuvvetlerin kısa erişim karakterli olduğu kabul edilirse, çok parçacıklı sistemler için toplanabilir olma ve homojenlik olguları akla uygun yaklaşımlardır. Ancak doğadaki birçok fiziksel sistemin tanımlanması için Boltzmann-Gibbs istatistiği yetersiz kalmaktadır. Örneğin, uzun erişim kuvvetlerinin varlığı, termodinamikte önemli değişikliklere neden olmaktadır. Boltzmann-Gibbs istatistiğinin işlevselliğini yitirmesine neden olan tek mekanizma uzun erişim etkileşmeleri değildir. Bunun yanı sıra, mezoskobik kayıplı sistemler de termoistatistiksel anormallikler sergiler. Bu tarz sistemleri oluşturan parçacıkların hız dağılımları Gauss dağılımından oldukça büyük sapmalar göstermektedir. Genel olarak multifraktal yapılı sistemler standart durumlardan farklı olarak anormallikler sergiler. Ayrıca bellek etkilerinin görüldüğü non-Markovian süreçler de standart termoistatistiksel yasalara uymazlar (Tsallis, 2002).

Boltzmann-Gibbs istatistiğinin kullanılabilmesi için mikroskobik etkileşmelerin erişim uzaklığı ve mikroskobik belleğin zaman aralığı çok kısa olmalıdır. Ayrıca, sistem evrimini fraktal olmayan, öklidyen ve homojen bir uzay-zaman içinde geçirmelidir. Bu koşullardan bir ya da bir kaçı sağlanmadığı takdirde, ele alınan sistemi, Boltzmann-Gibbs istatistiği çerçevesinde incelemek mümkün değildir. Bu koşulları sağlamayan sistemler toplanabilir olmayan sistemler olarak adlandırılmaktadır. Toplanabilir olmayan sistemlerin özelliklerinin aydınlatılması için ise, toplanabilir olmayan bir termoistatistiksel formalizme ihtiyaç duyulmaktadır (Tsallis, 1998; Curado ve Tsallis, 1991; Tırnaklı et al., 1998).

Bu ihtiyaç nedeniyle, fraktal uzay için uygun olan termoistatistiğin oluşturulması ve öklidyen uzay yaklaşımında kullanılan standart termoistatistikle uyumunun sağlanması için bir dizi çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalardan literatürde en çok karşılaşılanlara örnek olarak, kesirsel dışarlama istatistiği (Haldane, 1991) ve Tsallis' in ortaya koyduğu toplanabilir olmayan termoistatistik gösterilebilir (Tsallis, 1998). Bu altbölümde kısaca Tsallis' in ortaya koyduğu toplanabilir olmayan termoistatistik tanıtılacak ve q-genelleştirilmiş kinetik denklemle olan ilişkisi üzerinde durulacaktır.

Genelleştirilmiş termoistatistik, Tsallis tarafından toplanabilir olmayan doğaya sahip bir entropi tanımı yapılarak ortaya konmuştur(Tsallis, 1998; Curado ve Tsallis, 1991). Bu yeni formalizm sadece istatistiksel termodinamikte değil aynı zaman da Boltzmann-Gibbs istatistiğinin sonuç vermediği birçok fiziksel sistem için etkin olarak kullanılmaktadır (Abe ve Okamoto, 2001). Bu sistemlerden bir kaçı şöyle sıralanabilir: uzun erişim etkili sistemler, uzun mesafe bellek etkisinin görüldüğü non-markovian stokastik süreçler, Levy süreçlerinin gözlendiği anormal difüzyon olayı, granular sistemler, karadelikler, temel parçacıkların yüksek enerji çarpışmaları.

Toplanabilir olmayan Tsallis termoistatistiği iki aksiyom üzerine kurulmuştur. Bunlar: (i) Sistemin entropisi

$$S_q = k\frac{1-\sum_{i=1}^{W} p_i^q}{q-1} \tag{4.22}$$

ifadesi ile verilir. Burada *k*, pozitif bir sabit olan Boltzmann sabitidir, p_i sistemin bir mikrodurumda bulunma olasılığıdır ve *W* ise sistemin bulunabileceği toplam mikrodurum sayısıdır. (ii) Herhangi bir *A* gözlenebilirinin *q*-beklenen değeri aşağıdaki ifadeyle verilir

$$\langle A \rangle_q = \sum_{i=1}^{W} p_i^q A_i . \tag{4.23}$$

Diğer taraftan, toplanabilir olmayan doğaya sahip genelleştirilmiş termoistatistik $q \to 1$ limit durumunda Boltzmann-Gibbs istatistiğini içermektedir. Bu durumda (4.22) denklemi iyi bilinen Shannon entropisine $S = -\sum_i p_i \ln p_i$ dönüşmektedir. Tsallis entropisi sadece ve sadece $q \to 1$ için toplanabilir yapıya sahip olur. Bu nedenle $(1-q)$ sistemin toplanabilirlikten uzaklığının bir ölçüsü olarak yorumlanabilir (Tırnaklı et al., 1997).

Tsallis' in ortaya koyduğu toplanabilir olmayan entropi ifadesi, *q*-Gaussien bir dağılım vermektedir.

$$p_q(x) = \left[1-(1-q)x^2 / k_B T\right]^{1/(1-q)} = e_q\left(-\frac{x^2}{k_B T}\right)$$

Burada, k_B Boltzmann sabitidir ve *q*-eksponansiyel fonksiyon $e_q(w) = [1+(1-q)w]^{1/(1-q)}$ ile tanımlanmaktadır. Bu dağılım, $q=1$ için Gauss dağılımını ve $q=2$ için Cauchy-Lorentz dağılımını vermektedir. Tsallis aynı zamanda q eksponansiyel dağılımın $q > 5/3$ için Levy dağılımını verdiğini göstermiştir (Meltzler ve Klafter, 2000). Buraya kadar anlatılan bilgiler ışığında denilebilir ki, termoistatistiğin Boltzmann-Gibbs formalizmi sadece eksponansiyel denge dağılımlarını sağlar. Toplanabilir olmayan termoistatistik ise, kuvvet yasası dağılımlarını sağlar ve aynı zamanda $q \to 1$ limit durumunda Boltzmann-Gibbs istatistiğinin sonuçlarını da verir. Dolayısıyla daha genelleyici bir yapıya sahiptir.

Kinetik denklemin *q*-genelleştirilmiş formunu kullanarak, toplanabilir olmayan termoistatistik ile *q*-genelleştirilmiş kinetik denklem arasındaki ilişkiyi ortaya konmakta ve *q*-genelleştirilmiş kinetik denklem

$$\frac{dy}{dx} = a_q y^q \tag{4.24}$$

ifadesi ile verilmektedir. Burada yine x değişkeninin fiziksel bir boyut taşıdığı varsayılmakta ve $a_q y^q$ boyutsuz bir değişken olarak alınmaktadır. (4.24) ile verilen nonlineer kinetik denklemin çözümü, $y(0)=1$ başlangıç koşulu altında aşağıdaki gibi elde edilir

$$y = e_q(a_q x) = [1+(1-q)a_q x]^{1/(1-q)}. \tag{4.25}$$

Açıkça görülmektedir ki, $\frac{dy}{dx} = ay$ standart kinetik denklem, $\frac{dy}{dx} = a_q y^q$ q-genelleştirilmiş kinetik denklemi ile yakından ilişkilidir (Tsallis ve Borges, 2003).

Tsallis bu iki denklemi daha genelleyici bir denklemde birleştirmiş ve sarmal yapıya sahip proteinlerin davranışlarını fraktal olguyu da göz önüne alarak aydınlatmıştır (Tsallis, 1999).

4.4. Kümülatif Küçülmeler/Büyümeler Metoduyla Çözüm

Bu altbölümde, q-entropi indisinin fiziksel orjinini ortaya koymak için kümülatif küçülmeler/büyümeler metodu ile difüzyon olayı ele alınmaktadır.

Bir yangının sönmesi/yanması, paranın enflasyon ile değer kaybetmesi/kazanması, bir popülasyonun azalışı/artışı gibi yaşamda rastlanılan durumlar ile Fibonacci'nin tavşan üreme problemi ve bu problemin tersi yani zaman içinde belli miktardaki tavşanlarının sayılarının azalması da kümülatif küçülmeler/büyümelere örnek olarak verilebilir. Bu sayede sadece fizikte değil, fen ve mühendislikten sanata kadar bir çok alanda karşımıza çıkan altın oranın ortaya çıkışı bir kümülatif küçülme yapan bir fiziksel prosese ait bir mekanizma ile ortaya konmaktadır. Burada altın oranın proseslerin kümülatif olarak ilerlemesi ile yakın ilgili olduğu ortaya konmakta, altın oran bir azalma/yada artma oranına bağlanabilmektedir. Bu oran ise prosesin fraktal boyutuyla ilişkilendirilmektedir. Fiziksel bir sistemde öklidiyen geometrinin ele alınması ile birlikte uzun erişimli bellek etkileri ve fraktal geometri göz ardı edilmektedir. Kümülatif küçülmeler/büyümeler yaklaşımı ise uzayın parçalı oluşunu ve bellek etkisini içermektedir. Kümülatif küçülmeler/büyümeler, zaman içinde aşınan, evrim gösteren, belli oranlarda azalan/artan sistemlere uygulanabilir. En genel ifade ile kümülatif küçülme/büyüme mekanizması, başlangıçta belli bir miktara sahip olan sistemin zamanla belli bir yüzde ile kümülatif olarak azalması/çoğalması mekanizması olarak modellenir (Büyükkılıç ve Demirhan, 2008, 2009). Bu bağlamda difüzyon olgusu, özel durumlar için kümülatif küçülme/büyüme sürecine benzer bir süreç olarak ele alınabilir. Böylece, Fourier uzayında difüzyon denklemi kümülatif küçülme/büyüme yapan fiziksel bir sürece ait mekanizmaya benzer şekilde ele alınabilir.

W_0 ile temsil edilen olasılık fonksiyonunun $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t$ sürelerinde ulaşacağı büyüklükler sıra ile $W_0, W_1, W_2, \dots, W_n$ miktarları olsun. Difüzyon süreci başlamadan önce olasılık fonksiyonu $W(k,t)$ nin W_0 ile temsil edildiğini ve her Δt zamanında *k* dalgasayısı, *K* difüzyon katsayısı ve τ karakteristik zaman olmak üzere, $\frac{1}{\tau} = Kk^2$ miktarında azaldığını düşünelim. (Büyükkılıç ve Demirhan, 2008, 2009) referansındaki yöntemi izleyerek, olasılık fonksiyonunun zamanla gelişimi tümevarımla

Zaman	Olasılık Fonksiyonu
0	W_0
Δt	$W_1 = \left(1 - \frac{1}{\tau}\Delta t\right) W_0$
$2\Delta t$	$W_2 = \left(1 - \frac{1}{\tau}\Delta t\right)^2 W_0$
.	.
.	.
.	.
$r\Delta t$	$W_r = \left(1 - \frac{1}{\tau}\Delta t\right)^r W_0$
.	.
.	.
.	.
$n\Delta t$	$W_n = \left(1 - \frac{1}{\tau}\Delta t\right)^n W_0$ (4.26)

formunda ifade edilir. *r*. adım için (4.26) denklemi genelleştirilirse,

$$W_r = W_0 \left(1 - \frac{1}{\tau}\Delta t\right)^r \tag{4.27}$$

olur.

$$\Delta t = \frac{t}{r} \tag{4.28}$$

alınırsa

$$W_r = W_0\left(1-\frac{1}{\tau}\frac{t}{r}\right)^r \tag{4.29}$$

yazılabilir. Bu denklem sonsuz adım yaklaşıklığında ($r \to \infty$)

$$W(t,\tau) = W_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{4.30}$$

olur, bu ise (4.21) denklemi ile aynıdır. Sonsuz adım yaklaşıklığında yazılan ifadeyi çözüm olarak veren diferansiyel denklem, uzayın kesikliliği itibara alınmazsa

$$dW = -\frac{1}{\tau}Wdt \tag{4.31}$$

biçimindedir(Büyükkılıç ve Demirhan, 2008, 2009). Bu denklemin çözümü $t = 0$ iken $W(0,\tau) = W_0$ başlangıç koşulu göz önüne alınırsa, (4.30) denklemi ile aynı olur. Bu davranış, adım sayısının çok büyüdüğü durumlarda asimptotik davranış olarak sergilenir. Öte yandan asimptotik davranıştan sapmalar nonekstensif termoistatistikteki q-exp fonksiyonu,

$$e_q(x) = [1+(q-1)x]^{\frac{1}{q-1}}$$

ile verilir. r adım sayısı ile q ilişkilendirilirse, adım sayısı r ;

$$r = \frac{1}{q-1} \tag{4.32}$$

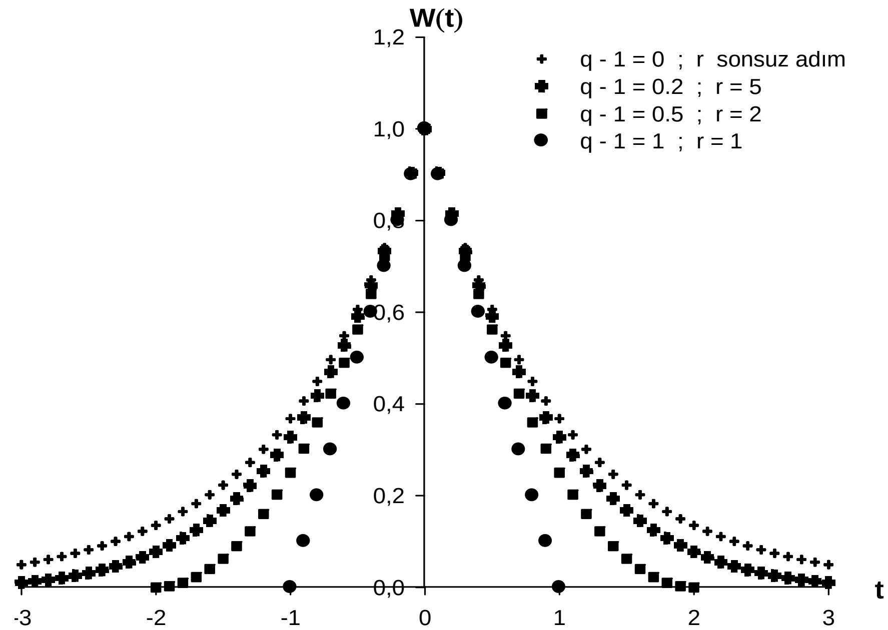
olur. $q=1$ için $r \to \infty$, $q = 2$ için $r = 1$, $q = 1/2$ için $r = 2$ olur. O halde $1 \le r \le \infty$ olduğu durumlar $1 \le q \le 2$ olmak üzere

$$W_r = W_0\left(1-(q-1)\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{1}{q-1}} \tag{4.33}$$

denklemi yazılabilir. (4.33) denklemi, $q \to 1$ durumunda, $r \to \infty$ iken, (4.30) denklemi ile aynı olur.

4.5. Olasılığın Grafiksel Gösterimi

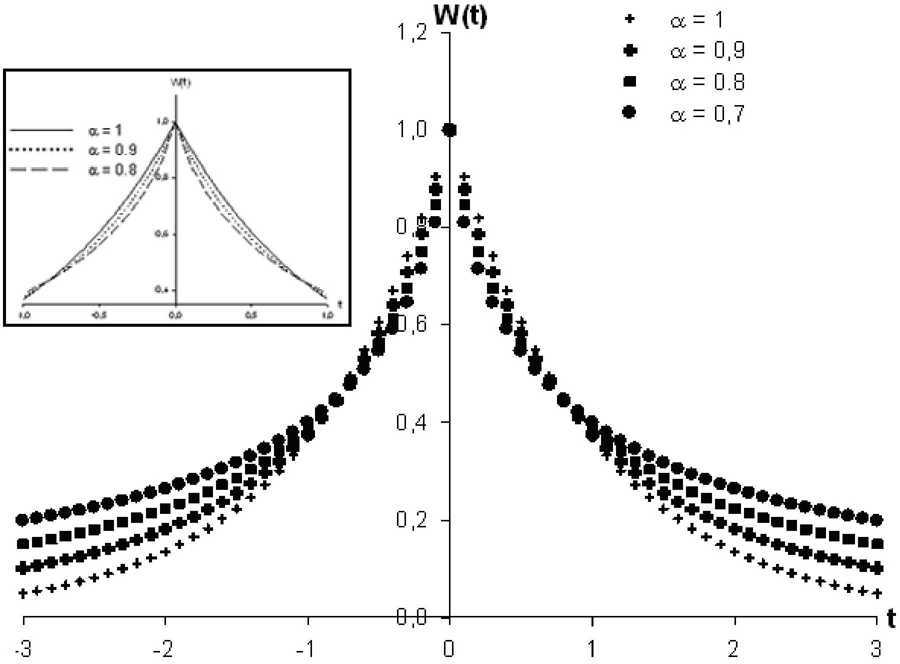
Bu altbölümde $W(t)$'nin α, q ve t değerlerine göre değişimleri çizildi. Elde ettiğimiz difüzyon denkleminin zamanla gelişimine ait (4.29) denklemine göre $W(t)$ kuvvet formundadır. Olasılığın gelişim sırasındaki adım sayısına (aynı zamanda entropi indisi q ya) bağlılığı Şekil.1 de verilmektedir. Olasılığın $r \to \infty$ adımında Gaussian bir dağılım gösterdiği ve t zaman eksenine asimptot olduğu görülmektedir. $r = 1,2,5$ durumlarında ise t eksenini kestiği anlaşılmaktadır. Olayın t'ye göre simetrik geliştiği varsayılmaktadır.



Şekil 4.1. Olasılığın ((4.27) denklemi) farklı q değerlerine (adım aralıklarına) göre grafiksel gösterimi ($W_0 = 1$, $\tau = 1$)

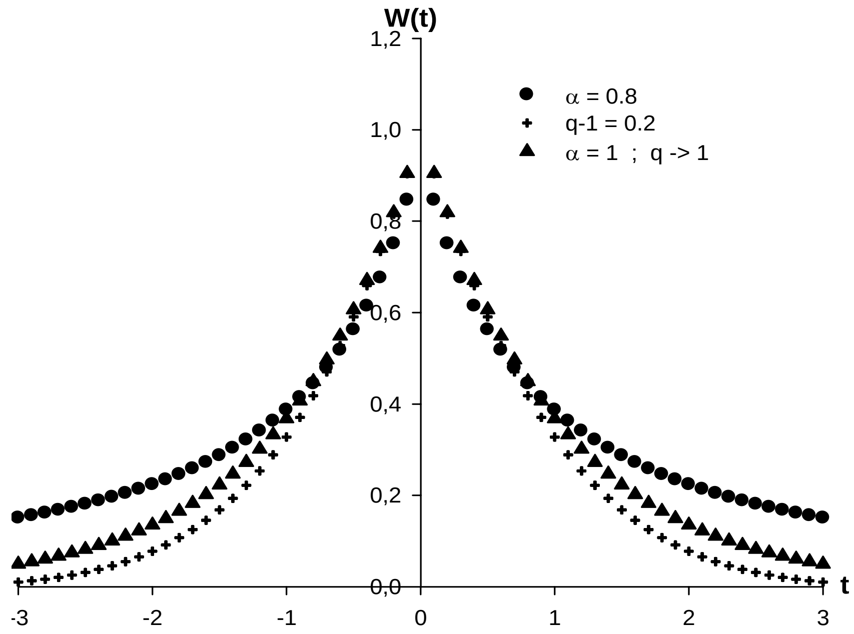
Normal olmayan difüzyonun α kesirsel türev mertebesinin değerine göre birkaç bölgeye ayrılmakta olduğuna daha önce değinmiştik, burada $0 < \alpha < 1$ subdifüzyon durumu vurgulanmaktadır.

$W(t)$'nin kesirsel matematikten hesaplanan zamanla değişimi (4.19) denkleminden sayısal olarak hesap edilen sonuçlara göre grafik gösterimi Şekil.2 de verilmektedir. Burada olay subdifüzyon bölgesinde seyretmektedir. Olasılığın zamanla değişimi $0 < \alpha < 1$ arasında olmak üzere standart dağılımdan daha yüksek olduğu görülmektedir.



Şekil 4.2. Olasılığın ((4.19) denklemi) farklı α değerlerine göre grafiksel gösterimi
($W_0 = 1$, $\tau = 1$)

α ile r'nin (q'nun) farklı değerleri için $W(t)$'nin zamanla değişimi ise Şekil.3 de verilmektedir. $\alpha = 1$, $q \to 1$ durumunda $W(t)$ standart klasik bir davranış sergilemektedir.



Şekil 4.3. $\alpha. = 0{,}8$, $q \to 1$, $\alpha = 1$, ve $q - 1 = 0{,}2$ değerleri için (4.19) ve (4.27) denklemlerinin karşılaştırılmasının grafik gösterimi ($W_0 = 1$, $\tau = 1$)

4.6. Protein Dinamiği

Proteinlerin biyolojik yapılarına göre farklı rölaksasyon süreçleri görülebilir. Bu süreçlere örnek olarak, bir iyon kanalının açık ya da kapalı olması, bir hemoglobin veya myoglobin proteininin oksijeni bağlaması ya da bağlamaması verilebilir. Literatürde bu süreçler, kendine benzer (self similar) protein dinamiği olarak ele alınmaktadır (Glöckle ve Nonnenmacher, 1995). Kendine benzer (self similar) protein dinamiği, proteinlerin yapısal alt durumlarının ihmal edildiği ideal durumların tasvirinde kinetik denklem ya da rölaksasyon denklemi ile modellenmektedir. Kinetik denklem ya da rölaksasyon denklemi gibi birinci mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümü olarak karşımıza çıkan eksponansiyel davranış, çeşitli kayıpların ihmal edildiği basit sistemlerin tanımlanmasında yeterli olmakla beraber, kompleks sistemlerde ya da sistemlerin gerçeğe yakın tasvirinde yetersiz kalmaktadır. Deneysel gözlemler, proteinlerin rölaksasyon dinamiği ve reaksiyon kinetiğinin eksponansiyel davranıştan saptığını ve kuvvet yasası davranışı sergilediğini göstermektedir. Bu nedenle, proteinlerin kendine benzer (self similar) dinamiği, nonlineer rölaksasyon denklemi ya da kesirsel rölaksasyon denklemi ile deneysel gözlemlere yakın tasvir edilmeye çalışılmaktadır(Glöckle ve Nonnenmacher, 1995; Tsallis et al., 1999).

Protein dinamiği üzerine yapılan çalışmalar göstermiştir ki, düşük ve yüksek sıcaklıklarda sergilenen davranışlar farklılıklar göstermektedir. Yüksek sıcaklıklarda eksponansiyel davranış süreçleri modelleyebilirken, düşük sıcaklıklarda kuvvet yasası davranışı görülmektedir.

Gliserol-su çözeltisi içerisinde erimiş tip 2 sperm balina myoglobininden sabit sıcaklıkta foto-ayrıştırma ile ayrılan CO molekülleri foto ayrışmadan hemen sonra, yeniden birleşmeye başlamaktadır. t anında, henüz yeniden birleşmeye başlamamış moleküllerin sayısı $N(t)$ ile gösterilirse, $\phi \equiv N(t)/N(0)$ zamanla monoton olarak sıfır olacaktır. Standart olarak, yeterince yüksek sıcaklıklarda üstel davranış sergilenmektedir. Ancak, düşük sıcaklıklarda (tipik olarak 40-160 K aralığı), yeniden birleşme çok daha yavaş olmakta ve kuvvet yasası davranışı sergilenmektedir. Göreli olarak yüksek sıcaklıklarda (230 K civarı), yeniden birleşme üstel tipte (exponential type) olmaktadır (Tsallis et al., 1999; Austin et al., 1975).

Kendine benzer (self similar) reaksiyon dinamiğinin incelendiği deneysel çalışmalarda gözlenen noneksponansiyel davranış

$$\phi(t) = (1 + t/\tau)^{-n} \tag{4.34}$$

denklemiyle modellenmektedir. Deneysel veri (4.34) denklemi ile oldukça uyumlu olmaktadır. Sıcaklığa göre üstel veya kuvvet yasası davranışı (4.34) denklemi ile açıklanabilmektedir. Burada, n ve τ sıcaklığa, basınca ve pH değerine bağlı olan fit parametreleridir (Austin et al., 1975). (4.34) ifadesi, rölaksasyon denkleminin çözümü olan eksponansiyel davranıştan farklılık sergilemektedir. Standart durumda beklenen eksponansiyel davranış ancak $n \to \infty$ limitinde gözlenmektedir.

Protein dinamiğinin sergilediği bu davranış biçimi, standart rölaksasyon denklemi ve çözümü olan eksponansiyel fonksiyon yerine kesirsel rölaksasyon denklemi ve çözümü olan Mittag-Leffler fonksiyonu kullanılarak kesirsel matematik çerçevesinde ele alınmaktadır (Glöckle ve Nonnenmacher, 1995). Benzer şekilde, nonekstensif fizik çerçevesinde, nonlineer rölaksasyon denklemi ve çözümü olan q-eksponansiyel fonksiyonu protein dinamiğini tasvir etmek için kullanılmaktadır (Tsallis et al., 1999). Protein dinamiği üzerine yapılan çalışmalarda süreçler çeşitli matematiksel yaklaşımlarla (kesirsel matematik, nonekstensif fizik, v.s.) tasvir edilmesine rağmen, bu süreçlerin zamanla sergilediği fiziksel mekanizma açık olarak belirtilmemektedir. Proteinlerdeki eksponansiyel ve kuvvet yasası arasında bir davranış biçimi sergileyen rölaksasyon süreçleri, kabaca kümülatif bir değişim göstermektedir. Proteinlerde görülen bu tarz süreçler ve deneysel veriyle uyumlu olan (4.34) denklemi kümülatif küçülmeler/büyümeler mekanizması(Büyükkılıç ve Demirhan, 2008, 2009) ile açıklanabilir. Bu amaçla kümülatif küçülmeler/büyümeler metodunu protein dinamiğine uygulayarsak (4.34) denklemi elde edilir. (4.34) denklemi sayesinde protein dinamiğini nonekstensif istatistik çerçevesinde incelemek olası olmakta ve $q \to 1$ durumunda standart rölaksasyon denklemi ile elde olunan üstel davranışları açıklamakta kullanılabileceği görülmektedir.

4.7. Sonuçlar

Difüzyon denkleminin Fourier dönüşümü zaman uzayında bir kinetik denklem formundadır. Kinetik denklemler zaman içinde evrilen fiziksel süreçlerin modellenmesi bakımından özel bir öneme sahiptirler. Kinetik denklemlerin, standart çözümlerden sapmalarını kesirsel matematik ve nonekstensif fizik (q-matematik) çerçevesi içinde incelemek mümkündür. Burada, çözüm olarak kesirsel matematikte elde olunan Mittag-Leffler fonksiyonu, nonekstensif fizikte ise q-eksponansiyel formu özel bir önem kazanırlar. Sonuç olarak, üstel olmayan formda olan kuvvet yasaları ile Mittag-Leffler fonksiyonu öne çıkarlar.

5. GENEL SONUÇLAR

Tez çalışmasında, ilk olarak kesirsel matematik tanıtılmakta ve normal olmayan difüzyon olgusu irdelenmektedir. Daha sonra ise kinetik denklemin ve benzeri olan difüzyon denkleminin kesirsel matematik ve kümülatif küçülmeler/büyümeler metodu kullanılarak çözümleri yapılmakta ve q entropi indisinin fiziksel orijini üzerinde durulmaktadır.

Son yıllarda, birçok fiziksel sistemde difüzyonun tek bir K difüzyon sabiti ile tasvir edilemeyeceği görülmektedir. Normal olmayan difüzyon, K difüzyon sabitinin yanında bir α parametresiyle ve ortalama yer değiştirme $\left\langle x^2(t)\right\rangle$ ise nonlineer bir kuvvet yasasıyla $\left\langle x^2(t)\right\rangle \propto t^{\alpha}$ karakterize edilebilir. Kompleks davranış gösteren difüzyon olayının incelenmesinde, öklidiyen olmayan fraktal uzay ile Markoviyen olmayan, bellek etkilerinin gözönüne alındığı bir yaklaşım uygun olur. Fraktal bir uzayda gelişen ve bellek etkisi gösteren difüzyon olayının incelenmesinde kesirsel matematiğin uygun bir temel oluşturduğu anlaşılmaktadır. Normal olmayan difüzyon davranışına birçok örnek verilebilir: sürekli zamanda rastgele yürüyüş (CTRW), Monte Carlo simülasyonları, kesirsel difüzyon denklemi, bir dış alan etkisindeki normal olmayan difüzyon için kesirsel Fokker-Planck denklemleri v.b. Kesirsel difüzyon denklemi bir kesirsel zaman türevi veya kesirsel konum türevi veya her ikisi ile birlikte tasvir edilebilmektedir. Böylelikle zaman-kesirsel, konum kesirsel veya zaman ve konum kesirsel şeklinde isimlendirilmektedir.

Burada dikkati çeken en önemli nokta, elde olunan çözümlerin Mittag-Leffler fonksiyonları cinsinden elde edilmesidir. α nın farklı değerleri için Mittag-Leffler fonksiyonları da farklı fiziksel süreçleri temsil etmektedir. Bu olgu sadece kesirsel rölaksasyon ve titreşici denklemlerinin çözümünde değil aynı zaman da kısmi kesirsel diferansiyel denklemlerin çözümünde de ortaya çıkmaktadır. Buradan, Mittag-Leffler fonksiyonunun kesirsel matematik için büyük öneme sahip olduğu söylenebilir. Özellikle, kesirsel titreşici probleminde Mittag-Leffler fonksiyonu cinsinden verilen çözümlerin sönümlü karakterde olması kesirsel türev mertebesi ile uzayın yapısı arasında bir ilişki olduğunu göstermektedir. Bu nedenle, uygun düzenlemeler ile fraktal uzayda incelenen fiziksel süreçlerin kesirsel matematik kullanılarak aydınlatılması fizik açısından daha anlamlı olabilir(Şirin et al., 2010c; Ertik et al. 2010). Bu bağlamda literatürde bazı çalışmalar yapılmaktadır. Bu çalışmalar kapsamında, termoistatistiğin temel kavramlarının kesirsel olarak ele alındığını da görmekteyiz. Bu bağlamda Mittag-Leffler fonksiyonunun toplanabilir olmayan genelleştirilmiş termoistatistik için özel bir öneme sahip olduğu sonucuna varılmaktadır (Ertik et al., 2009; 2010; Şirin et al., 2010a; 2010b).

Difüzyon denkleminin Fourier dönüşümü zaman uzayında bir kinetik denklem formundadır. Kinetik denklemler zaman içinde evrilen fiziksel süreçlerin modellenmesi bakımından özel bir öneme sahiptirler. Kinetik denklemlerin, standart çözümlerden sapmalarını kesirsel matematik ve nonekstensif fizik (q-matematik) çerçevesi içinde incelemek mümkündür. Burada, çözüm olarak kesirsel matematikte elde olunan Mittag-Leffler fonksiyonu, nonekstensif fizikte ise q-eksponansiyel formu özel bir önem kazanırlar. Sonuç olarak, bu tezde, üstel olmayan formda olan kuvvet yasaları ile Mittag-Leffler fonksiyonu öne çıkarılmaktadır.

Nonekstensif fizik ile yapılan çalışmalarda klasik çözümlerin yetersizliği fiziksel olarak ortaya konmaktadır. Bu yetersizliği gidermek için üstel fonksiyonun yerini e_q gösteriminin almasının dahi sorunu çözmediği belirtilmektedir.

Bu yaklaşımlarda gerek kesirsel matematikteki α, gerekse nonekstensif fizikteki q indisinin fiziksel orijini açıklanamamaktadır. Bu tezde, q’nun fiziksel orijini, sistemin gelişiminde katettiği adımların sayısını gösteren r adım sayısına bağlanmaktadır. Sistemin gelişimi sürekli bir zaman aralığında olmayıp, kesikli olan zaman aralıklarında olmaktadır. Zaman sonsuza giderken adım sayısıda sonsuza ulaşmakta, sistem asimptotik bir davranış sergilemektedir. Sistem böylece denge durumuna ulaşmaktadır. Sistemin klasik, standart davranışlardan sapması adım sayısının nispeten az olduğu bölgede daha belirgin olarak izlenmektedir (Şirin et al., 2010a).

KAYNAKLAR DİZİNİ

Abe, S. and Okamoto, Y., 2001, Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications, Springer, Berlin, 277p.

Agrawal, Om P., 2002, Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems, *Journal of Mathematical Analaysis and Applications*, 272:368-379.

Agrawal, Om P., 2006, Fractional variational calculus and the transversality conditions, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39:10375-10384.

Agrawal, Om P., 2007a, Generalized Euler-Lagrange equations and transversality conditions for FVPs in terms of the Caputo derivative, *Journal of Vibration and Control*, 13(9-10):1217-1237.

Agrawal, Om P., 2007b, Analytical schemes for a new class of fractional differential equations, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoritical*, 40:5469-5477.

Austin, R.H., Beeson, K.W., Eisenstein, L., Frauenfelder, H. and Gunsalus, I.C., 1975 Dynamics of Ligand Binding to Myoglobin, *Biochemistry*, 14:5355-5373.

Baleanu, D. and Agrawal, Om P., 2006, Fractional hamiltonian formalism within Caputo's derivative, *Czechoslovak Journal of Physics*, 56(10/11):1087-1092.

Büyükkılıç, F. and Demirhan, D., 2008, Cummulative Growth with Fibonacci Approach, Golden Section and Physics, *Chaos Soliton & Fractals*, 42(1):24-32.

Büyükkılıç, F. and Demirhan, D., 2008, Cumulative Diminuations with Fibonacci Approach, Golden Section and Physics, *International Journal of Theoretical Physics*, 47(3): 606-616.

Carpinteri, A. and Mainardi, F., 1997, Fractals and Fractional Calculus in Continium Mechanics, Springer Verlag, Wien and New York, 223-276.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Curado, E.M.F. and Tsallis, C., 1991, Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 24:L69-L72.

Ertik, H., Demirhan, D., Şirin, H. and Büyükkılıç, F., 2009, A fractional mathematical approach to the distribution functions of quantum gases: Cosmic Microwave Background Radiation problem is revisited, *Physica A*, 388:4573- 4585.

Ertik, H., Demirhan, D., Şirin, H. and Büyükkılıç, F., 2010, Time fractional development of quantum systems, *Journal of Mathematical Physics*, 51, 082102.

Fujita, Y., 1990, Integrodifferential equation which interpolates the heat equation and the wave equation, *Osaka Journal of Mathematics*, 27:309–321.

Ginoa, M. Cerbelli, S. and Roman, H.E., 1992, Fractional diffusion equation and relaxation in complex viscoelastic materials, *Physica A*, 191:449–453.

Glöckle, W.G. and Nonnenmacher, Theo F., 1995, A Fractional Calculus Approach to Self-Similar Protein Dynamics, *Biophysical Journal*, 68:46-53.

Gorenflo R. and Rutman R., 1995, On ultraslow and on intermediate process, in P.Rusev, I. Dimovski and V. Kiryokava (eds.), Transform methods and Special functions, SCT pblishers, Singapore.

Haldane, F. D. M., 1991, “Fractional statistics” in arbitrary dimensions: a generalization of the Pauli principle, *Physical Review Letters*, 67(8):937-940.

Hilfer R., 2000, Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore, 463p.

Hilfer, R., 2003, On Fractional Diffusion and Continuous Time Random Walks, *Physica A* 329, 35-40.

Hilfer, R., 2003, On Fractional Relaxation, *Fractals*, 11:251-257.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

J.P. Boon, J.P. and Lutsko J.F., 2000, Generalized Diffusion Equation, *Physica A*, 368:55-62.

Mainardi, F. and Paradisi, P., 1997, Model of diffusive waves in viscoelasticity based on fractional calculus, *in Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 5:4961–4966.

Mathai, A.M., Saxena, R.K. and Haubold, H.J., 2006, A certain class of Laplace transforms with applications to reaction and reaction-diffusion equations, *Astrophysics and Space Science*, 305: 283-288.

Meltzler R. and Klafter J., 2000, The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach, *Physics Report*, 339:1-77.

Miller, K. S. and Ross, B., 1993, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley and Sons Inc., New York, 366p.

Muslih, S. I. and Baleanu, D., 2005, Hamiltonian formulation of systems with linear velocities within Riemann-Liouville fractional derivatives, *Journal of Mathematical Analaysis and Applications*, 304:599-606.

Nigmatullin, R.R., 1986, The realization of the generalized transfer eqaution in a medium with fractal geometry, *Physica Status Solidi (b)*, 133:425-430.

Nonnenmacher, T.F. and Nonnenmacher, D.J.F., 1989, Towards the formulation of a non-linear fractional extended irreversible thermodynamics, *Acta Physica Hungarica*, 66:145-154.

Oldham, K.B. and Spanier, J., 1974, The Fractional Calculus, Acedemic Press, San Diego, 234p.

Podlubny, I., 1999, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 340p.

Rabei, E. M., Nawafleh, K. I., Hijjawi, R. S., Muslih, S. I. and Baleanu, D., 2007, The Hamilton formalism with fractional derivatives, *Journal of Mathematical Analaysis and Applications*, 327:891-897.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Riewe, F., 1996, Nonconservative Lagrangian and Hamiltonian mechanics, *Physical Review E*, 53(2):1890-1899.

Roman, H.E. and Alemany, P.A., 1994, Continuous-time random walks and the fractional diffusion equation, *Journal of Physics A*, 27:3407–3410.

Sanz-Serna, J.M., 1988, A numerical method for a partial integro-differential equation, *SIAM Numerical Analysis*, 25:319–327.

Saxena, R.K., Mathai, A.M. and Haubold, H.J., 2002, On fractional kinetic equations, *Astrophysics and Space Science*, 282:281-287.

Saxena, R.K., Mathai, A.M. and Haubold, H.J., 2004, On generalized fractional kinetic equations, *Physica A* 344:657-664.

Schneider W.R. and Wyss W., 1989, Fractional diffusion and wave equations, *Journal of Mathematical Physics*, 30:134–144.

Sokolov, I.M., Klafter J. and Blumen, A., 2002, Fractional Kinetics, *Physics Today*, 55:48-54.

Şirin, H., Büyükkılıç, F., Ertik, H. and Demirhan, D., 2010a, The influence of fractality on the time evolution of the diffusion process, *Physica A*, 389:2007-2013.

Şirin, H., Ertik, H., Büyükkılıç, F. and Demirhan D., 2010b, Investigation of the Bose-Einstein condensation based on fractality using fractional mathematics, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 10, P10022.

Şirin, H., Büyükkılıç, F., Ertik, H. and Demirhan, D., 2010c, The effect of time fractality on the transition coefficients: historical Stern-Gerlach experiment revisited, *Chaos, Solitons & Fractals*, doi:10.1016/j.chaos.2010.11.003, (in press).

Tarasov, V. E., 2005a, Continuous medium model for fractal media, *Physics Letters A*, 336:167-174.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Tarasov, V. E., 2005b, Fractional hydrodynamic equations for fractal media, *Annals of Physics*, 318:286-307.

Tarasov, V. E., 2005c, Fractional Focker-Planck equation for fractal media, *Chaos*, 15:023102.

Tarasov, V. E., 2005d, Fractional Ginzburg-Landau equation for fractal media, *Physica A*, 354:249-261.

Tırnaklı, U., Büyükkılıç, F. and Demirhan, D., 1997, Generalized distribution functions and an alternative approach to generalized Planck radiation law, *Physica A*, 240:657-664.

Tırnaklı, U., Büyükkılıç, F. and Demirhan, D., 1998, Some bounds upon the nonextensivity parameter using the approximate generalized distribution functions, *Physics Letters A*, 245:62-66.

Tsallis, C., 1988, Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics, *Journal of Statistical Physics*, 52:479-487.

Tsallis, C., 2002, Entropic nonextensivity: a possible measure of complexity, *Chaos, Solitons and Fractals*, 13:371-391.

Tsallis, C., 2004, What should a statistical mechanics satisfy to reflect nature, *Physica D*, 193:3-34.

Tsallis, C., and Borges, **E.P.,** 2003, Nonextensive statistical mechanics - Applications to nuclear and high energy physics, *in Proc. 10th International Workshop on Multiparticle Production - Correlations and Fluctuations in QCD*, World Scientific, Singapore, (cond-mat/0301521).

Tsallis, C., Bemski, G. and Mendes, R. S., 1999, Is re-association in folded proteins a case of nonextensivity, *Physics Letters A*, 257:93-98.

Wiman, A., 1905, Über den Fundamentalsatz in der teorie der funktionen $E_\alpha(x)$, *Acta Mathematica*, 29:217-234.

Wyss W., 1986, The fractional diffusion equation, *Journal of Mathematical Physics*, 27:2782–2785.

ÖZGEÇMİŞ

28 Haziran 1980 tarihinde İzmir'in Bornova ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Afyon'da, lise öğrenimini İzmir Bornova Mustafa Kemal Lisesi'nde tamamladı. 2003 yılında lisans eğitimini, 2005 yılında ise Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Bilim Dalı, Matematiksel Fizik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimini tamamladıktan sonra aynı anabilim dalında doktora eğitimine başladı. 2005 yılında Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başlayan yazar halen bu görevine devam etmektedir. Yazarın SCI kapsamına giren 5 adet makalesi bulunmaktadır.

Yayınlar:

Ertik, H., Demirhan, D., Şirin, H. and Büyükkılıç, F., 2009, A fractional mathematical approach to the distribution functions of quantum gases: Cosmic Microwave Background Radiation problem is revisited, *Physica A*, 388:4573- 4585.

Ertik, H., Demirhan, D., Şirin, H. and Büyükkılıç, F., 2010, Time fractional development of quantum systems, *Journal of Mathematical Physics*, 51, 082102.

Şirin, H., Büyükkılıç, F., Ertik, H. and Demirhan, D., 2010, The influence of fractality on the time evolution of the diffusion process, *Physica A*, 389:2007-2013.

Şirin, H., Ertik, H., Büyükkılıç, F. and Demirhan D., 2010, Investigation of the Bose-Einstein condensation based on fractality using fractional mathematics, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 10, P10022.

Şirin, H., Büyükkılıç, F., Ertik, H. and Demirhan, D., 2010, The effect of time fractality on the transition coefficients: historical Stern-Gerlach experiment revisited, *Chaos, Solitons & Fractals*, (in press).