

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**MONOTON POTANSİYEL OPERATÖRLE TANIMLANMIŞ
ELİPTİK DENKLEM İÇİN TERS KATSAYI PROBLEMİ**

DOKTORA TEZİ

Salih TATAR

Anabilim Dalı : Matematik

Danışman : Prof.Dr. Zahir MURADOĞLU

KOCAELİ, 2011

MONOTON POTANSİYEL OPERATÖRLE TANIMLANMIŞ
ELİPTİK DENKLEM İÇİN TERS KATSAYI PROBLEMİ

DOKTORA TEZİ

Salih TATAR

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 29 Kasım 2010

Tezin Savunulduğu Tarih: 07 Ocak 2011

Tez Danışmanı
Prof.Dr. Zahir MURADOĞLU

(.....)

Üye
Prof.Dr. Serdal PAMUK

(.....)

Üye
Doç.Dr. Emine MISIRLI

(.....)

Üye
Prof.Dr. Doğan KAYA

(.....)

Üye
Doç.Dr. Emine CAN

(.....)

KOCAELİ, 2011

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu çalışmada monoton operatörle tanımlanmış ve ek koşulu integral operatörü ile verilmiş ters katsayı probleminin çözümü için parametrizasyon yöntemi incelenmiş ve bu yönteme kıyasla çok daha kullanışlı ve pratik olan yeni bir yöntem verilmiştir. Öncelikle düz problem monoton operatör teorisi kapsamında incelenmiş ve sayısal olarak çözülmüştür. Daha sonra ters katsayı problemi tanımlanmış ve çeşitli örnekler üzerinde parametrizasyon yöntemi incelenmiştir. Son olarak ta “Yarı-Analitik” yöntem adı verilen yeni yöntem açıklanmış ve örnekler üzerinde parametrizasyon yöntemiyle karşılaştırarak incelenmiştir.

Beni bu konuda çalışmaya sevk eden ve her konuda bana yardımcı olan danışman hocam sayın Prof. Dr. Zahir MURADOĞLU’ na teşekkürü bir borç bilirim; ayrıca, her zaman ve her konuda bana yardımcı olan ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen hocam sayın Prof. Dr. Alemdar HASANOĞLU’ na teşekkürlerimi sunarım.

Yine, üzerimde emeği olan ve burada isimlerini sayamadığım Kocaeli Üniversitesi Matematik bölümünün değerli hocalarına, hayat arkadaşım ve eşim Gülfer TATAR’ a, bazı şekillerin çiziminde katkısı olan doktora öğrencisi Vildan Yazıcı’ ya ve hayatım boyunca benim için hiçbir fedakârlıktan kaçınmayan AİLEME teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	iv
TABLolar DİZİNİ	vi
SİMGELER.....	viii
TÜRKÇE ÖZET	ix
İNGİLİZCE ÖZET.....	x
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Mekaniğin Sınıflandırılması	3
2.2. Mukavemetin Temel İlkeleri.....	4
2.3. Gerilme Kavramı.....	7
2.4. Cisimlerdeki Gerilmeler.....	12
2.5. Zorlanmalar	12
2.6. Diferansiyel Denge Denklemleri.....	16
2.7. Şekil Değiştirme Ve Yer Değiştirme Bağlılıları	22
2.8. Uygunluk Denklemleri.....	28
2.9. Gerilme ve Şekil Değiştirme Bağlılıları.....	30
2.10. Genelleştirilmiş Hooke Kanunları.....	31
2.11. Silindirik Çubukların Burulması	35
3. ESNEK OLMAYAN SİLİNDİRİK ÇUBUKLARIN BURULMASININ MATEMATİKSEL MODELİ. DÜZ VE TERS PROBLEMLERİN TANIMLANMASI	45
3.1. Esnek Olmayan Silindirik Çubukların Burulmasının Matematiksel Modeli	45
3.2. Düz ve Ters Problemlerin Tanımlanması	46
3.3. Düz Problem İçin Klasik ve Zayıf Çözüm Kavramları	47
3.4. Ters Katsayı Probleminin Yaklaşık Çözümü	51
3.5. Esnek Çubuğun Burulması Probleminin Çözümü	56
4. LİNEER OLMAYAN DÜZ PROBLEMİN MONOTON OPERATÖRLER TEORİSİ KAPSAMINDA İNCELENMESİ.....	62
4.1. Monoton Operatörlerle İlgili Temel Kavramlar.....	62
4.2. Yaklaşık Çözümün Tanımlanması ve Yakınsama Teoremleri.....	69
5. DÜZ VE TERS PROBLEMLER İÇİN SAYISAL ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ ..	77
5.1. Düz Problemin Sonlu Farklar Yöntemi İle Sayısal Çözümü	77
5.2. Ters Problemin Parametrizasyon Yöntemi ile Sayısal Çözümü	84
5.3. İyileştirme Yöntemi	96
5.4. Parametrizasyon Yönteminin Eksik Yönleri.....	98
6. TERS PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ İÇİN YENİ BİR YÖNTEM: YARI ANALİTİK YÖNTEM.....	99
6.1. Yarı-Analitik Yöntemin Ve Bu Yöntemin Avantajları.....	99

6.2. κ Parametresinin Bulunması İçin Kullanılacak Formülün Elde Edilmesi.....	100
6.3. ξ_0^2 Esneklik Limitinin Bulunması Yöntemi.....	102
6.4. Yarı-Analitik Yöntemin Sayısal Örnekler Üzerinde İncelenmesi ve Parametrizasyon Yöntemiyle karşılaştırılması.....	104
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	115
KAYNAKLAR	117
ÖZGEÇMİŞ	121

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1: Mekaniğin sınıflandırılması.	3
Şekil 2.2: Eşdeğerlilik.....	5
Şekil 2.3: Çekilme ve basılma	5
Şekil 2.4: Saint-Venant ilkesi.	6
Şekil 2.5: Süperpozisyon ilkesi.....	7
Şekil 2.6: Normal gerilme.....	11
Şekil 2.7: Kayma gerilmesi.....	11
Şekil 2.8: Üç eksenli gerilme.....	16
Şekil 2.9: Bir eleman üzerinde gerilme değişimi.....	18
Şekil 2.10: Bir elemanda bileşke kuvvet.	19
Şekil 2.11: Bir eleman üzerindeki gerilmelerin ortalama değerleri.....	21
Şekil 2.12: Bir çubukta normal şekil değiştirme.	24
Şekil 2.13: İki boyutlu bir elemanın ötelenme ve şekil değiştirmesi.....	25
Şekil 2.14: Üç boyutlu bir elemanda şekil değiştirme.	28
Şekil 2.15: Tek eksenli ve üç eksenli gerilme haline maruz kalan eleman.	32
Şekil 2.16: Silindirik bir çubuğun burulması.....	36
Şekil 2.17: Dönme yüzünden yer değiştirme.....	37
Şekil 2.18: Sınır yakınında bir z düzlemindeki kayma gerilmeleri.....	41
Şekil 2.19: Uç düzlem boyunca integrasyon.	42
Şekil 2.20: Uç düzlemdaki sınır gerilmeleri.	44
Şekil 5.1: W_{hr} kafesi.	78
Şekil 5.2: W_{hr} kafesinde ek noktaların tanımlanması.	80
Şekil 5.3: Sert ve yumuşak malzemeler için $g(\xi^2)$ fonksiyonu.	85
Şekil 5.4: $g(\xi^2)$ fonksiyonunun parçalı lineer yaklaşımı.	86
Şekil 5.5: Sert ve yumuşak malzemeler için Tablo 4.3 ve Tablo 4.4 de gösterilen θ açılara karşı gelen burulma momentleri.	91
Şekil 5.6: Ters problemin iyi tanımlı olmaması	92
Şekil 5.7: Sert ve yumuşak malzemeler için kesin deneysel verili ters problemin çözülmesi sonucu bulunan $g_h(\xi^2)$ fonksiyonlarının grafiği.	94
Şekil 5.8: Çeşitli deney hatalarıyla verilen ters problemlerin çözümü.....	95
Şekil 5.9: Tablo 4.7 de verilen noktaların grafik üzerinde gösterilmesi.....	97
Şekil 6.1: κ parametresinin bulunması için (5.1) ile tanımlanan $g_h(\xi^2)$ fonksiyonu.....	101
Şekil 6.2: Esneklik limitinin (ξ_0^2) bulunması yönteminin şematik olarak açıklanması	103
Şekil 6.3: Sert malzeme için kesin deneysel verili ters problemin parametrisasyon ve yarı-analitik yöntem ile çözümü	110

Şekil 6.4: Yumuşak malzeme için kesin deneysel verili ters problemin parametrizasyon ve yarı-analitik yöntem ile çözümü	111
Şekil 6.5: Sert malzeme için deney hatalarıyla verilmiş ters problemin parametrizasyon ve yarı-analitik yöntem ile çözümü, $\Delta\theta = 1.65 \times 10^{-3}$	112
Şekil 6.6: Yumuşak malzeme için deney hatalarıyla verilmiş ters problemin parametrizasyon ve yarı-analitik yöntem ile çözümü, $\Delta\theta = 2.20 \times 10^{-3}$	113

TABLolar DİZİNİ

Tablo 3.1: Çubuğun kesitinin geometrisi ile burulma momenti arasındaki ilişki	61
Tablo 5.1: $g(\xi^2) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$ fonksiyonu için (2.1),(2.3) probleminin çözümü sonucu elde edilen $\{\Pi(u_n)\}$ potansiyeller dizisi	83
Tablo 5.2: Örnek 4.1' deki problemin farklı şebekelerde çözümü için mutlak ve bağıl hata değerlendirilmesi	84
Tablo 5.3: Sert (rigid) malzeme için (2.1),(2.3) düz probleminin çözümü sonucu elde edilen burulma momenti değerleri	90
Tablo 5.4: Yumuşak (soft) malzeme için (2.1),(2.3) düz probleminin çözümü sonucu elde edilen burulma momenti değerleri	91
Tablo 5.5: Ters problemin sert ve yumuşak malzemeler için çözülmesi sonucu bulunan β_{mh} , $m = \overline{0,3}$ değerleri	93
Tablo 5.6: Kesin deneysel verili ters problem için mutlak ve bağıl hata değerlendirilmesi	93
Tablo 5.7: Sert malzeme için deney çeşitli deney hatalarıyla verilen ters problem için mutlak ve bağıl hata değerlendirilmesi	95
Tablo 5.8: Yumuşak malzeme için deney çeşitli deney hatalarıyla verilen ters problem için mutlak ve bağıl hata değerlendirilmesi	95
Tablo 5.9: $E = 210$, $\kappa = 0.2$ için $\Delta\xi_m$ parametresinin küçük değerlerinde (4.10) koşulunun sağlandığı ve sağlanmadığı noktalar	97
Tablo 6.1: Sert ve yumuşak malzemeler için ters problemin çözümünde kullanılacak olan veri çiftleri	105
Tablo 6.2: Esneklik limitinin bulunması için \mathcal{T}_3 burulma momentlerinin elde edilmesi	107
Tablo 6.3: Esneklik limitinin bulunması için ikiye bölme yöntemi	107
Tablo 6.4: $\xi_0^2 \approx 0.0252$ için plastiklik durumunda verilen her bir veri çifti için (5.3) formülü kullanılarak κ nın belirlenmesi.....	108
Tablo 6.5: Yumuşak malzeme için esneklik limitinin bulunması için \mathcal{T}_3 burulma momentlerinin elde edilmesi	109
Tablo 6.6: $\xi_0^2 \approx 0.0185$ için plastiklik durumunda verilen her bir veri çifti için (5.3) formülü kullanılarak κ nın belirlenmesi	109
Tablo 6.7: Sert malzeme için kesin deneysel verili ters problemin parametrisasyon ve yarı-analitik yöntemle çözümü için hata değerlendirilmesi, $\Delta\theta = 1.65 \times 10^{-3}$	110

Tablo 6.8: Yumuşak malzeme için kesin deneysel verili ters problemin parametrizasyon ve yarı-analitik yöntemle çözümü için hata değerlendirmesi, $\Delta\theta = 2.20 \times 10^{-3}$	111
Tablo 6.9: Sert malzeme için deney hatalarıyla verilmiş ters problemin parametrizasyon ve yarı-analitik yöntemle çözümü için hata değerlendirmesi, $\Delta\theta = 1.65 \times 10^{-3}$	112
Tablo 6.10: Yumuşak malzeme için deney hatalarıyla verilmiş ters problemin parametrizasyon ve yarı-analitik yöntemle çözümü için hata değerlendirmesi, $\Delta\theta = 2.20 \times 10^{-3}$	113

SİMGELER

T	: Burulma momenti
$B_r(0)$: r yarıçaplı kapalı küre
τ	: Kayma Gerilmesi
σ	: Normal Gerilme
F	: Kuvvet
Ω	: R^2 'de sınırlı bölge
$\partial\Omega$: Ω bölgesinin sınırı
$\overline{\Omega}$: Ω bölgesinin kapanışı
∇	: Gradyan vektörü
$C^m(\Omega)$: m negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere kendisi ve $ \alpha \leq m$ olmak üzere α . kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlar uzayı
$C_0^m(\Omega)$: $C^m(\Omega)$ uzayından olan ve Ω bölgesinin sınırında 0'a eşit olan fonksiyonlar uzayı
$L_p(\Omega)$: Ω bölgesinde p . kuvveti integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$H^1(\Omega)$: Kendisi ve kısmi türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan fonksiyonlar uzayı
$H_0^1(\Omega)$: $H^1(\Omega)$ uzayından olan ve Ω bölgesinin sınırında 0'a eşit olan fonksiyonlar uzayı
$H^0(\Omega)$: $L_2(\Omega)$ uzayı
$a(.,.)$: Bilineer form
X^*	: X uzayının dual uzayı
$\langle J'(u), v \rangle$: J fonksiyonelinin u 'da v elemanı yönündeki birinci mertebeden Gateaux türevi
$\langle ., . \rangle$: Hilbert uzayında iç çarpım
$\ .\ $: Banach uzayında norm
$J(u)$: A operatörünün potansiyeli
$g_h(x)$: Yaklaşık çözüm fonksiyonu
H	: Reel Hilbert uzayı
X	: Reel Banach uzayı

MONOTON POTANSİYEL OPERATÖRLE TANIMLANMIŞ ELİPTİK DENKLEM İÇİN TERS KATSAYI PROBLEMİ

SALİH TATAR

Anahtar Kelimeler: Deformasyon Teorisi, Monoton Operatör, Zayıf Çözüm, Burulma, Ters Katsayı Problemi, Sonlu Fark Yöntemi

Özet: Bu çalışmada, ek koşulu integral operatörü ile verilmiş ters katsayı problemi ele alınmıştır. Bu amaçla öncelikle düz problem tanımlanmıştır. Lineer olmayan düz problem monoton operatör teorisi kapsamında incelenmiştir. Esnek çubuğun burulma problemi, kısmi türevli denklemlerde çok sık kullanılan bir yöntem olan değişkenlere ayırma yöntemi ile çözülmüş ve analitik bir formül bulunmuştur. Düz problemin sayısal çözümü için sonlu fark şeması tanımlanmış ve düz problem sayısal olarak çözülmüştür. Düz problemin çözümünden elde edilen veriler ise ters katsayı probleminde giriş verisi olarak kullanılmıştır. Ters katsayı probleminin çözümü için “Yarı-Analitik” yöntem adı verilen yeni bir yöntem verilmiş ve bu yöntem parametrizasyon yöntemiyle sayısal çözümler üzerinde karşılaştırılmıştır. Hatasız ve hatalı giriş verileri için elde edilen sonuçlar ters problemin çözümü için kullanılan bu yöntemin doğru ve kararlı bir yöntem olduğunu göstermektedir.

THE INVERSE COEFFICIENT PROBLEM DEFINED WITH MONOTONE POTENTIAL OPERATOR FOR ELLIPTIC EQUATION

SALIH TATAR

Keywords: Deformation Theory , Monotone Operator, Weak Solution, Torsion, Inverse Coefficient Problem, Finite Difference Method.

Abstract: In this study, an inverse problem which include integral operator as additional condition is considered. For this aim, direct problem is defined. The nonlinear direct problem is studied in monoton operator theory. Elastic torsion problem is solved with seperation of variable which is frequently used in the solution of partial differential equations and an analytical formula is found. The finite difference scheme is defined for numerical solution of direct problem and the direct problem is solved numerically . The results which are obtained from numerical solution of direct problem are used as input data for inverse coefficient problem. A new “Semi-Analytic ” method is derived and it is compared with parametrization method on numerical examples. The result obtained for the noise free and noisy synthetive data show that the presented method of solution of the inverse problem is accurate and stable.

1. GİRİŞ

Ters katsayı problemleri bilimsel literatürde güncel problemlerdendir. Genel olarak bir ters katsayı problemi, matematiksel modeldeki bazı parametre değerlerinin, ölçüm sonucu elde edilen bilgileri kullanarak tespit edilmesidir. Genel olarak bir ters problem aşağıdaki şekilde formüle edilebilir:

Ölçüm sonucu elde edilen veriler → Modelin parametreleri

Bu çalışmada esnek olmayan (“elasto-plastik”) çubuğun burulması ile ilgili ters problem incelenmiştir.

Bölüm 2’de, gerilme ve zorlanma kavramları tanımlanmış ve bunların çeşitlerinden bahsedilmiştir. Cisimlerdeki gerilmeler noktadan noktaya değiştiğinden, bu değişimler denge şartları ile verilir. Ortaya çıkan ifadeler ise denge denklemlerini oluştururlar. Bu nedenle diferansiyel denge denklemlerinden söz edilmiştir. Şekil değiştirme-yer değiştirme ve gerilme-şekil değiştirme bağıntılarına değinilmiş, son olarak ise esnek çubuğun burulmasının matematiksel modeli çıkartılarak burulma momenti kavramı tanımlanmıştır.

Bölüm 3’te, düz ve ters problem tanımlanmıştır. Düz problem kapsamında, klasik ve zayıf çözüm kavramları ile bunların arasındaki ilişki verilmiştir. Ters problemin yaklaşık çözüm kavramı tanımlanarak, kabul edilebilir katsayılar kümesinde yaklaşık çözümün varlığı ispatlanmıştır. Son olarak, esnek çubuğun burulması problemi değişkenlere ayırma yöntemi ile çözülmüş ve burulma momenti ile çubuğun kesitinin geometrisi arasında aşikâr bir formül elde edilmiştir. Ayrıca, burulma momentinin değeri çeşitli dikdörtgen kesitler ele alınarak incelenmiştir.

Bölüm 4'te, esnek olmayan çubuğun burulmasını ifade eden lineer olmayan problem, monoton potansiyel operatörler teorisi kapsamında ele alınmıştır. Önce bilinen sonuçların kısa tekrarı ve analizi verilmiş, daha sonra da bu sonuçlar burulma problemine uygulanmıştır. Bu bölümde düz problemin çözümünün varlığı ve tekliği ile yaklaşık çözümün kesin çözüme yakınsaması ile ilgili teoremler ispatlanmıştır.

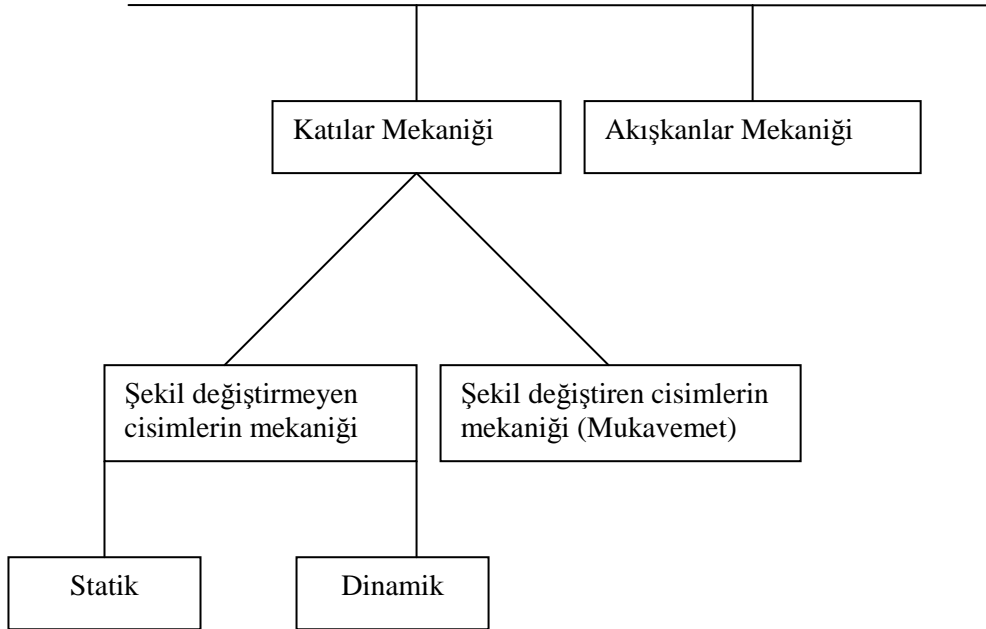
Bölüm 5'te, düz ve ters problemlerin sayısal çözüm algoritmaları verilmiştir. Düz problem zayıf çözüme dayalı olarak incelendiğinden dolayı, sonlu fark denklemi integralleme yoluyla elde edilmiştir. Ayrıca, Bölüm 4'te ispatlanan potansiyeller dizisinin monoton azalanlığı, bir sayısal örnek üzerinde gözlemlenmiştir. Parametrizasyon yöntemi kullanılarak gerçek mühendislik malzemeleri için ters problem, hem kesin deneysel veriler, hem de hatalı deneysel veriler için çözülmüştür. Son olarak, parametrizasyon yönteminin uygulanmasında karşılaşılan bazı güçlüklerle değinilmiş ve bu yöntemin bazı eksikliklerinden bahsedilmiştir.

Bölüm 6'da ise, ters problemin çözümü için "Yarı-Analitik" yöntem adı verilen yeni bir yöntemden bahsedilmiştir. Daha sonra ters problem bu yöntem ile çözülmüş ve elde edilen sonuçlar parametrizasyon yöntemiyle karşılaştırılmıştır. Bu sonuçlar, verilen yöntemin tutarlı bir yöntem olduğunu göstermektedir.

2. GENEL KAVRAMLAR

2.1. Mekanik'in Sınıflandırılması

Mekanik, çeşitli kuvvetlerin etkisi altında kalan cisimlerin denge ve hareket koşullarını inceleyen bir bilimdir. Mekanik'in sıvılar ve gazları inceleyen dalına akışkanlar mekaniği adı verilir. Mekanik biliminde katılar, kuvvetlerin etkisiyle şekil değiştiren ve şekil değiştirmeyen cisimler olmak üzere iki grupta incelenir. Statik ve dinamikte cisimlerin kuvvetlerin etkisiyle şekil değiştirmedikleri ve dengede olduğu kabul edilir. Mukavemet ise şekil değiştiren katı cisimlerin durumunu inceler (Şekil 2.1). Her katı cismin belirli bir şekli vardır. Bu şekil küçük kuvvetlerin etkisi ile değişmez, ya da değiştiği hissedilmez. Fakat büyük kuvvetler her katı cismin şeklinde değişiklik meydana getirir.



Şekil 2.1: Mekanik'in sınıflandırılması

Cisimlerin dayanımı başka bir ifade ile mukavemet, problemleri çözerken şu koşulları dikkate alır: sağlamlılık, teknik koşullar, ekonomiklik. Problem çözümlerinde, teknik koşullar dikkate alınarak, sağlamlılıkta ve ekonomiklikte en uygun ve kullanılabilir çözüm aranır. Mukavemetin incelediği cisim, kuvvetlerin etkisiyle az veya çok şekil değiştiren homojen olan ya da olmayan yapıda bir katı cisimdir[1,2].

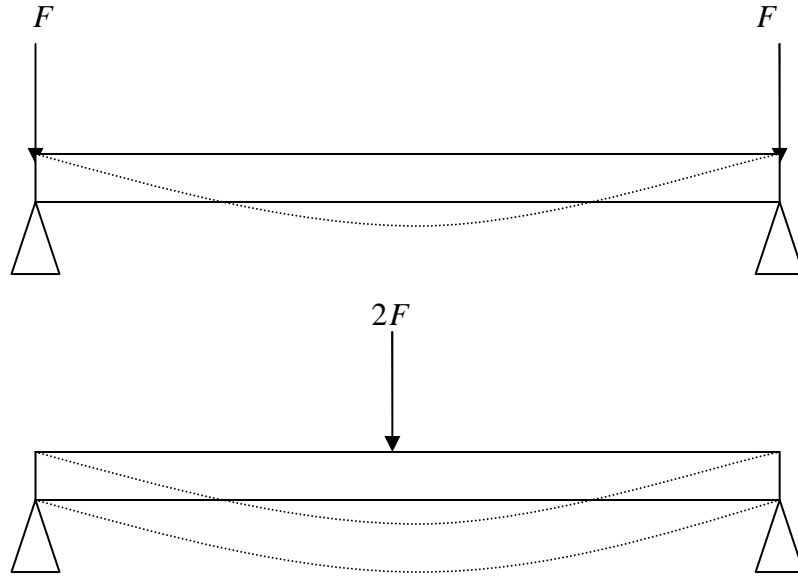
2.2. Mukavemetin Temel İlkeleri

Mukavemetin temel ilkeleri sırasıyla aşağıdaki şekilde sıralanabilir[1-4]:

Katılaştırma ilkesi: Dayanımda incelenen cisim, şekil değiştiren bir katı cisimdir. Şekil değiştirme sona erdikten sonra cisim, mekanikteki gibi şekil değiştirmeyen katı cisim olarak düşünülüp, aynı denge denklemleri uygulanabilir.

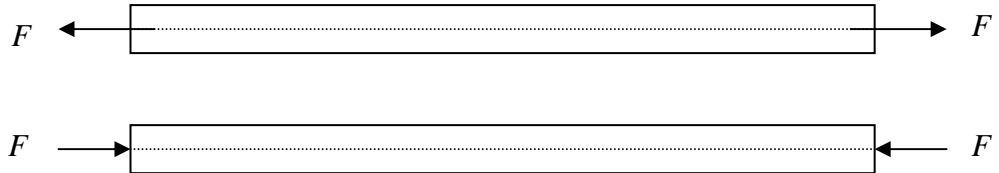
Ayrırma ilkesi: Cismin dış etkilere uygunluğunu anlamak için, cisim bir düzlemle herhangi bir yerinden kuramsal olarak kesilir. Cismin ayrılan kısımlarından yalnız bir parçasına denge denklemleri uygulanır. Cismin bir tarafının atıldığı varsayılarak kalan kısmının dengesinin incelenmesine ayırma ilkesi denir.

Eşdeğerlilik ilkesi: Tepkilerin bulunmasında bileşenlerin etkisi kullanıldığı gibi bileşkenin etkisi de kullanılabilir. Şekil değiştirmeyen cisimlerde bileşke yerine bileşenlerin veya bileşenlerin yerine bileşkenin kullanılmasına eşdeğerlilik ilkesi denir. Eşdeğerlilik ilkesi statikte geçerlidir ancak dayanımda geçerli değildir. Şekil 2.2'de görüldüğü gibi bileşke ile bileşenlerin şekil değişimine etkisi farklıdır.



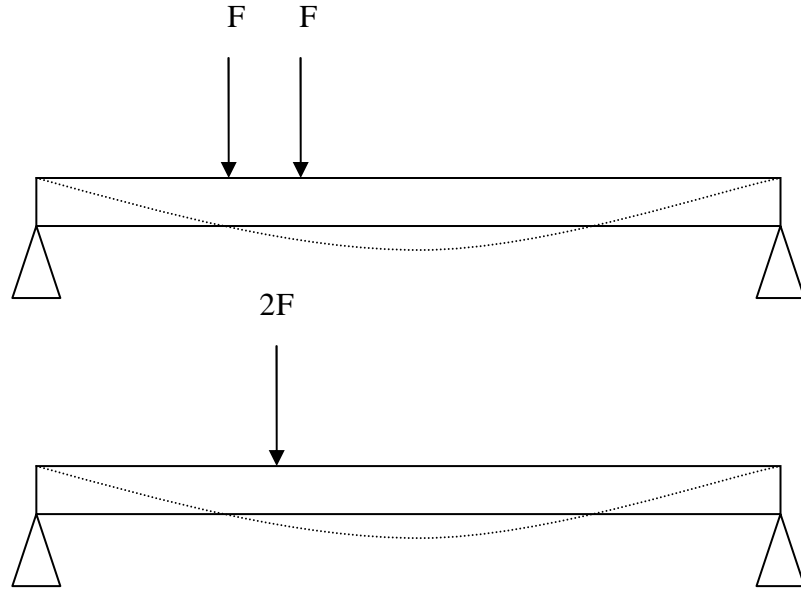
Şekil 2.2: Eşdeğerlilik

Aynı şekilde şekil değiştirmeyen cisimlerde (statikte–mekanikte) kuvvet, kayan bir vektörle gösterilir ve doğrultusu üzerinde yön değiştirebilir(Şekil 2.3). Dayanımda kuvvet, kayan vektörle gösterilecek olursa, çekilme etkisi basılmaya, basılma etkisi de çekilmeye dönüşür.



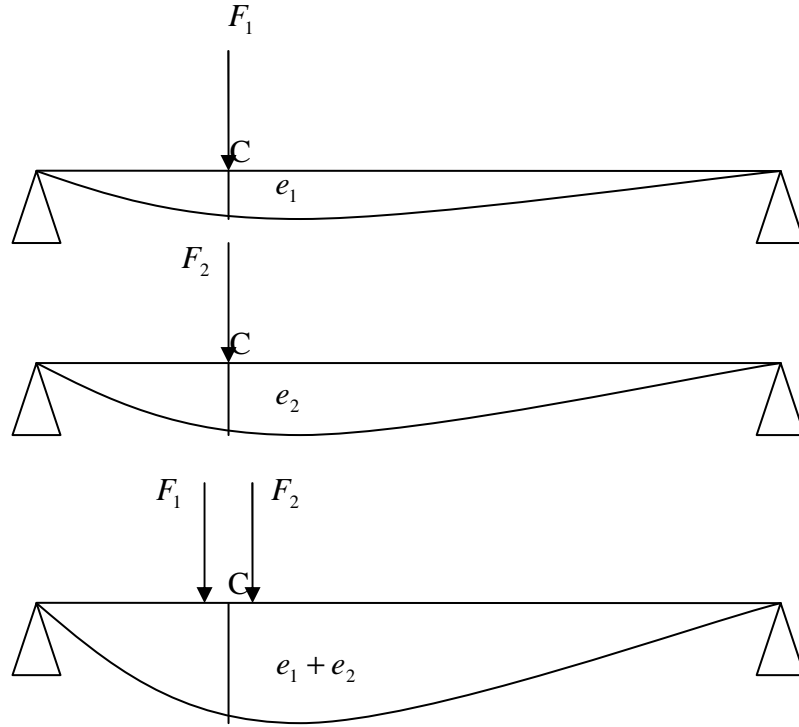
Şekil 2.3: Çekilme ve basılma

Saint-Venant ilkesi: Statikte geçerli olan eşdeğerlilik bazı koşullarda, şekil değiştiren cisimlerde de geçerli olur. Bu koşullara Saint Venant ilkesi adı verilir. Bu ilkeye göre kuvvetler birbirine yakın olmalı ve söz konusu noktalar kuvvet uygulanan bölgeden yeterli uzaklıkta bulunmalıdır(Şekil 2.4). Bu koşullar varsa kuvvetler yerine eşdeğer olarak bileşke şekil değiştiren cisimlerde de kullanılabilir.



Şekil 2.4: Saint-Venant ilkesi

Süperpozisyon ilkesi: Katılaştırma ilkesine göre, denge denklemlerinin şekil değişikliğini tamamlamış bir sistem için yazılması gerekir. Ancak şekil değişikliği genellikle diğer boyutların yanında çok küçük olabilir. Bu durumda denge denklemleri yaklaşık olarak sistemin şekil değiştirmemiş konumu için yazılabilir. Bu koşullarda süperpozisyon geçerli olur. Şekil 2.5'te görülen basit bir kirişte, F_1 dış kuvvetinin C noktasındaki oluşturduğu şekil değiştirme e_1 ; F_2 dış kuvvetinin C noktasındaki oluşturduğu şekil değiştirme e_2 ise F_1 ve F_2 kuvvetlerinin birlikte uygulandıklarında C noktasında oluşan şekil değişikliği $e_1 + e_2$ olur. Bu ilke süperpozisyon ilkesi olarak tanımlanır.



Şekil 2.5: Süperpozisyon ilkesi

2.3. Gerilme Kavramı

Genel olarak gerilme, kesit alanına düşen kuvettir. Yani, gerilme=kuvvet / kesit alanı olarak ifade edilebilir. Bu tanımda kullanılan terimler ayrıntılı olarak ve sırasıyla aşağıda incelenmiştir: Kuvvet, kesit alanı, gerilme[5].

Kuvvet: Kuvvet genelde kütle ile ivmenin çarpımı olarak tanımlanır. Kuvvet üç özelliğiyle tanımlanır. Bu özellikler şunlardır: Kuvvetin yönü, büyüklüğü ve etkin olduğu nokta. Uluslar arası standartlarda (ISO) kuvvetin sembolü için İngilizce kuvvet kelimesinin (Force) baş harfi F kabul edilmiştir. Birimi Newton dur. Aşağıda kuvvet ile ilgili bazı semboller ve açıklamaları verilmiştir.

F_{\max} : Parçayı etkileyen en büyük kuvvet değeri olup, hesaplar için temel oluşturur. Hiçbir şekilde herhangi bir faktör ile mutlak değeri büyütülmez.

F_{\min} : Parçayı etkileyen en küçük kuvvet değeri olup, hesaplar için temel oluşturur.

F_n : Normal kuvvet. Yüzeye, yani hesabın yapıldığı kesit yüzeyine dik olan kuvvet.

$F_ç$: Çapraz kuvvet. Hesabın yapıldığı kesit yüzeyinin içinde olan kuvvettir.

Kuvvetin yükleme durumları: Kuvvetin üç özelliğiyle belirlendiği söylenmişti. Kuvvetin bu özelliklerinin ikisinin değişmesiyle çeşitli kuvvet yükleme durumları elde edilir. Bu değişimleri bundan bir asır kadar önce Bach üç ayrı guruba ayırmış ve bu grupta bugüne kadar değişmemiştir. Bunlar kısaca aşağıda açıklanmıştır:

Statik veya durgun kuvvet: Burada kuvvetin yönü ve büyüklüğü değişmez. Kuvvetin iki özelliği de değişmeden kaldığından bu kuvvete değişmeyen kuvvet, yani “statik kuvvet” veya “durgun kuvvet” denir. Burada en büyük kuvvet F_{max} ile en küçük kuvvet F_{min} birbirlerine eşittirler.

Dinamik dalgalı kuvvet: Bu halde kuvvetin yönü değişmez fakat kuvvetin büyüklüğü değişir. Kuvvetin iki özelliğinden biri değişkendir ve bundan dolayı değişen, yani dinamik bir durum vardır. Bu kuvvet haline “dinamik dalgalı kuvvet” veya kısaca “dalgalı kuvvet” denir. Kuvvetlerden biri az, fazla veya sıfır olur. Bu, kuvvetin yönüne bağlıdır. Fakat karşıt işareti alamaz.

Burada en büyük kuvvet F_{max} ile en küçük kuvvet F_{min} birbirlerine eşit değildir, fakat aynı yöndedir. Eğer kuvvet yönünü artı olarak kabul edersek, durum şu şekilde belirlenir: $F_{max} > F_{min} > 0$. Kuvvetlerden biri sıfır olduğunda bu özel haldir ve bu hale “dinamik tam dalgalı kuvvet” veya kısaca “tam dalgalı kuvvet” denir.

Dinamik değişken kuvvet: Bu durumda kuvvetin yönü ve kuvvetin büyüklüğü periyodik olarak değişir. Bu durumda kuvvetin iki özelliği de değişkendir ve bundan dolayı değişen, yani dinamik bir durum vardır. Bu kuvvet durumuna “dinamik değişken kuvvet” veya kısaca “değişken kuvvet” denir. Kuvvetlerden biri diğerinden mutlak değer olarak az, fazla veya eşit olur. Kuvvetler sürekli karşıt işaretlidirler. Burada genelde en büyük kuvvet F_{max} ile en küçük kuvvet F_{min} birbirlerine eşit değildir.

Kuvvetlerin tanımlanması:

Yukarıda kuvvetin özelliklerinin değişiminden kuvvet durumlarının oluştuğu görüldü. Pratikte kuvvet bir cisme tek başına etkilemez. Kuvvetlerin denge kanununa göre karşıt bir kuvvet, yani denge sağlayan ikinci bir kuvvet bulunur. Böylece kuvvet çifti oluşur. Bu kuvvetlerden biri “aksiyon” öbürüde “reaksiyon” kuvvetidir. Bu kuvvet çiftini oluşturan kuvvetlerin özelliklerini değiştirmelerinden kuvvet zorlamaları doğar ve kuvvetler bu zorlamalara göre adlandırılırlar.

Çekme kuvveti: İki kuvvet aynı doğruda her biri ayrı bir noktayı birbirlerinden uzaklaştırmak için ters yönlerde doğru etkiliyorsa, aralarındaki parçayı çekiyorlardır. Bu tür kuvvet çiftine “çekmeye zorlayan kuvvet çifti” veya kısaca “çekme kuvveti” denir.

Basma kuvveti: İki kuvvet aynı doğruda her biri ayrı bir noktayı birbirlerine yakınlaştırmak için karşıt yönlerde etkiliyorsa, aralarındaki parçayı sıkıştırıyorlardır. Yani parçayı bastırıyorlardır. Bu tür kuvvet çiftine “basmaya zorlayan kuvvet çifti” veya kısaca “basma kuvveti” denir.

Eğme kuvveti: İki kuvvet bir birbirlerine paralel ve aynı eksene karşıt yönlerden dik olarak etkiliyorsa, etkiledikleri parçayı büküyorlardır. Bu tür kuvvet çiftine “eğmeye zorlayan kuvvet çifti” veya kısaca “eğme kuvveti” denir.

Kesme kuvveti: İki kuvvet bir doğruda birbirlerine karşı etkiliyorsa, etkiledikleri parçayı kesmeye zorluyordur. Bu tür kuvvet çiftine “kesmeye zorlayan kuvvet çifti” kısaca “kesme kuvveti” denir.

Burma kuvveti: İki kuvvet bir noktadan aynı uzaklıkta o noktayı çevirmeye zorluyorsa ve de bu noktadan geçen eksenin herhangi bir yerinde, aynı şekilde başka bir kuvvet çifti, ters yönde etki gösteriyorsa bu kuvvetler çifti parçayı burmaya zorluyordur. Bu tür kuvvet çiftine “burmaya zorlayan kuvvet çifti” veya kısaca “burma kuvveti” denir.

Bileşik kuvvet: Yukarıda beş kuvvet tanımında, kuvvetin hep seçilen eksene dik veya paralel olduğu kabul edildi. Eğer kuvvet bu durumların arasında ise, kuvvet bileşenlerine ayrılır ve böylece bir kuvvetten iki kuvvet meydana gelir. Bu kuvvetlerden biri bir eksene paralel, öbürüde bu eksene diktir. Bunun sonucu olarak da parça aynı anda iki ayrı kuvvet çifti tarafından zorlanacaktır. Bu tür kuvvetler çiftine “bileşik kuvvet çifti” veya kısaca “bileşik kuvvet” denir.

Kesit alanı

Hesabın yapılacağı yerde gerilmeler için kesit alanı önemlidir. Genelde kesit alanının sembolü uluslararası standartlarda İngilizce “area” alan kelimesinin baş harfi A alınmaktadır. Standartlarda kesit alanı birimi m^2 olup, mukavemet hesaplarında mm^2 olarak alınmaktadır.

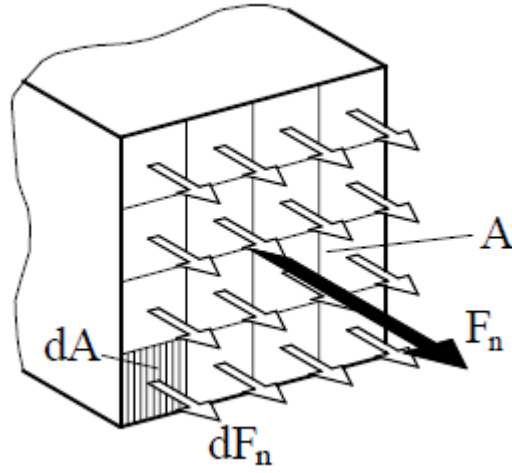
Normal gerilme ve kayma gerilmesi.

Gerilmeler kuvvetin cinsine göre değişirler ve adlandırılırlar. Bunlar normal gerilme ve kayma gerilmesi olarak iki ana başlıkta toplanabilir.

Normal gerilme

Normal kuvvet, yani kesit alanına dik kuvvet tarafından oluşan gerilmeye “normal gerilme” adı verilir(Şekil 2.6). Birimi ise N/mm^2 dir.

$$\text{Normal gerilme} = \frac{\text{Normal kuvvet}}{\text{Kesit alanı}} \text{ veya } \sigma = \frac{F_n}{A}.$$



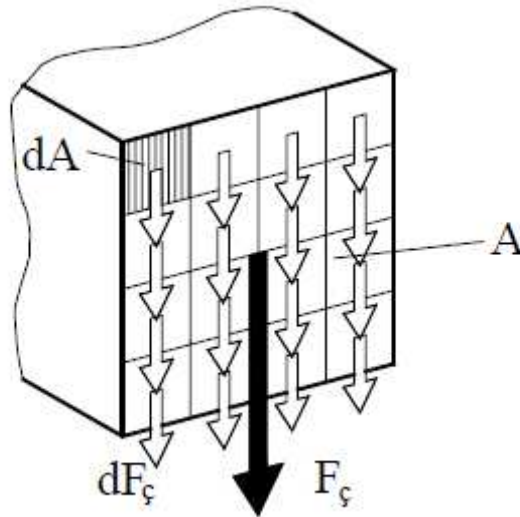
Şekil 2.6: Normal gerilme

Kayma gerilmesi

Çapraz kuvvet tarafından oluşan gerilmeye “kayma gerilmesi” adı verilir(Şekil 2.7).

Birimi ise N/mm^2 dir.

$$\text{Kayma gerilmesi} = \frac{\text{Çapraz kuvvet}}{\text{Kesit alanı}} \text{ veya } \tau = \frac{F_{\zeta}}{A}.$$



Şekil 2.7: Kayma gerilmesi

2.4. Cisimlerdeki Gerilmeler

Cismi etkileyen dış kuvvetlerin doğurduğu iç kuvvetler parçada gerilmeler oluşturur. Bu gerilmeler kuvvetin zorlamasına göre değişirler ve kuvvetin ismiyle adlandırılırlar. Kuvvetin zorlama biçimi, mukavemetin statik dalında öğrenilen bilgilerle belirlenir ve hesaplanır. Statikte cisimler rijit (şekil değiştirmeyen) olarak kabul edilir. Gerçekte hiçbir cisim rijit (şekil değiştirmeyen) değildir. Dış kuvvetlerin etkisi altında bütün cisimler biçimlerini az veya çok değiştirirler. Cisimlerin bu biçim değiştirmeleri kuvvetin etkisi kalktıktan sonra, ya tamamen kalkar ve cisimler ilk durumlarını alırlar veya biçim değişikliği az veya çok kalır. Cisimlerin biçimlerini geçici olarak değiştirip tekrar eski biçimlerine dönmelerine “elastik değişme” denir. Cisimlerin biçimlerinin kalıcı değişmeleri ise “plastik değişme” olarak adlandırılır[5,6].

2.5. Zorlanmalar

Yukarıda anlatıldığı gibi, gerilme kuvvetin fonksiyonudur. Kuvvet zorlama durumlarına ayrıldığına göre, gerilme de kuvvete göre adlandırılacaktır. Kuvvet parçayı çeşitli şekilde zorlayacaktır. Kuvvet parçayı zorladığına göre parça da zorlanacaktır. Böylece “parçanın zorlanması” veya kısaca “zorlanmalar” ortaya çıkar. Kuvvetin altı zorlama biçimine eşit olarak parçanın da altı zorlanması vardır. Böylece zorlanma biçimleri şöyle sıralanır: Çekmeye zorlanma, basmaya zorlanma (Basma, yüzey basıncı ve cidar basıncı, burkulma), eğilmeye zorlanma, kesmeye zorlanma, burulmaya zorlanma (torsiyon), bileşik zorlanma. Bu zorlanma biçimleri, daha ayrıntılı ve anlaşılır biçimde aşağıda incelenmiştir[5-11].

Basmaya zorlanma, basma gerilmesi: Basmaya zorlanmaya kısaca “basma” da denir. Basit bir çubuk ele alınsın. Bu çubuk iki ucundan eksenine paralel ve teorik olarak çubuğun ekseninden etkileyecek biçimde, karşıt yönlerde, içeriye doğru aynı büyüklükteki kuvvetlerle yüklensin. Kabul edilen kesit yöntemine göre bu çubuktaki gerilme hesaplanmak istenirse, çubuğun hesap yapılacak yerinden bir kesit alınması gerekecektir. Bu kesit eksene dik olarak alınsın. Etkileyen dış kuvvet kesite getirilsin. Böylece kesitte yalnız kesite dik olarak etki eden bir tek F iç kuvveti

olacaktır. İç kuvvetlerin dengesine göre kesitte bu aksiyon kuvvetine karşı aynı büyüklükte bir reaksiyon kuvveti oluşacaktır. Böylece kesitte “basma kuvvet çifti” doğar. Bu kuvvet çifti kesitin iki yüzeyini birbirine doğru itmeye, yani bir birine doğru basmaya zorlayacaktır. Bunun içinde bu zorlanma biçimine kuvvette de olduğu gibi parçada “basmaya zorlanma” veya kısaca “basma” adı verilir. Bir yüzeye dik olarak etki eden kuvvete normal kuvvet ve bunun oluşturduğu gerilmeye de normal gerilme dendiğine göre burada oluşan gerilmeye “normal gerilme” nin bir türüdür. Bu gerilme şekline pratikten örnek olarak sütunlar, yatak altlıkları, v.b. verilebilir. Burada oluşan gerilmeye “basma gerilmesi” adı verilir ve mukavemet hesaplarında ve teknikte “ σ_b ” olarak gösterilir.

Çekmeye zorlanma, çekme gerilmesi: Çekmeye zorlanmaya kısaca “çekme” de denir. Basit bir çubuk ele alınsın. Bu çubuk iki ucundan eksenine paralel ve teorik olarak çubuğun ekseninden etkileyecek biçimde karşıt yönlerde, aynı büyüklükte kuvvetlerle yüklensin. Kabul edilen kesit yöntemine göre bu çubuktaki gerilme hesaplanmak istenirse, çubuğun hesap yapılacak yerinden bir kesit alınması gerekecektir. Bu kesit eksene dik olarak alınsın. Etkileyen dış kuvvet kesite getirilsin. Böylece kesitte yalnız kesite dik olarak etki eden bir tek F iç kuvveti olacaktır. İç kuvvetlerin dengesine göre kesitte, bu aksiyon kuvvetine karşı aynı büyüklükte bir reaksiyon kuvveti oluşacaktır. Böylece bu kesitte “çekme kuvveti çifti” doğacaktır. Bu kuvvet çifti kesitin iki yüzeyini bir birinden ayırmaya, yani bir birinden çekmeye zorlayacaktır. Bunun içinde parçanın bu zorlanma biçimine, kuvvette de olduğu gibi “çekmeye zorlanma” veya kısaca “çekme” adı verilir. Bir yüzeye dik olarak etki eden kuvvete normal kuvvet ve bunun oluşturduğu gerilmeye de normal gerilme dendiğine göre, burada oluşan gerilmeye “normal gerilme” nin bir türüdür. Bu gerilme biçimine pratikten örnek olarak halatlar, zincirler, civatalar, çubuklar, v.b. verilebilir. Burada oluşan gerilmeye “çekme gerilmesi” adı verilir ve mukavemet hesaplarında ve teknikte “ σ_ζ ” olarak gösterilir.

Eğilmeye zorlanma, eğilme gerilmesi: Eğilmeye zorlanmaya kısaca “eğilme” de denir. Basit bir çubuk ele alınsın. Bu çubuğun ekseninden geçen düzlem üzerinde ve iki ucundan, karşıt yönlerde, etkileyen iki kuvvet düşünölsün. Kabul edilen kesit yöntemine göre bu çubuktaki gerilme hesaplanmak istenirse, çubuğun hesap

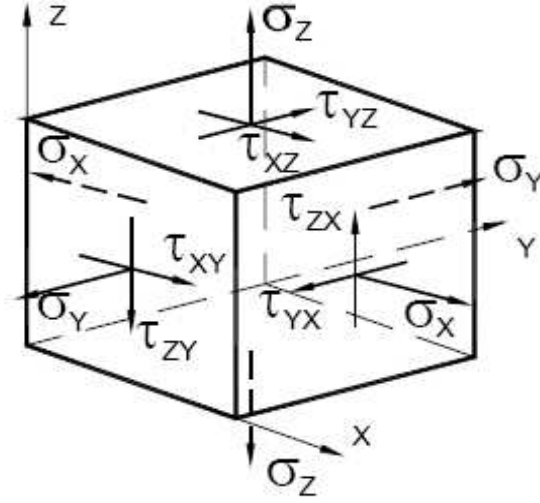
yapılacak yerinden bir kesit alınması gerekir. Bu kesit eksene dik olarak alınsın. Etken dış kuvvetler bu kesitin iki yüzünü birbirine karşı eğmeye zorlayacaktır. Böylece çubuk eğilecektir. Kesitteki kuvvetler ve momentler incelenecek olunursa kesitte yalnız eğilme momentinin etkili olduğu görülür. Böylece kesitte “eğme kuvvet çifti” oluşur. Bu kuvvet çifti kesitin iki yüzeyini birbirine doğru eğmeye, yani çubuğu eğilmeye zorlayacaktır. Bunun içinde bu zorlanma şekline kuvvete olduğu gibi parçada “eğilmeye zorlanma” veya kısaca “eğilme” adı verilir. Burada oluşan gerilmeye “normal gerilme” nin bir türüdür. Bu gerilme şekline pratikten örnek olarak miller, akslar, kirişler v.b. verilebilir. Burada meydana gelen gerilmeye “eğilme gerilmesi” adı verilir. Mukavemet hesaplarında ve teknikte “ σ_{eg} ” olarak gösterilir.

Kesmeye zorlanma, kesme gerilmesi: Kesmeye zorlanmaya kısaca “kesme” denir. Basit bir çubuk ele alınsın. Bu çubuk eksenine dik düzlem içinde karşılıklı iki kuvvet ile yüklensin. Bu kesit düzleminde gerilme hesaplanmak istenirse görülür ki, eksene dik olan düzlem içindeki iki kuvvet kesitte “kesme kuvvet çifti” ni oluştururlar. Bu kuvvet çifti kesitin iki yüzeyini birbirlerine göre kaydırmaya, yani kesmeye zorlayacaktır. Bunun içinde bu zorlama şekline kuvvete olduğu gibi, parçada “kesmeye zorlanma” veya kısaca “kesme” adı verilir. Bir yüzeyin içinde olan kuvvete çapraz kuvvet ve bunun oluşturduğu gerilmeye de kayma gerilmesi dendiğine göre, burada oluşan gerilmeye “kayma gerilmesi” nin bir türüdür. Bu gerilme şekline pratikten örnek olarak makaslar, perçinler, kesme presleri, v.b. verilebilir. Burada oluşan gerilmeye “kesme gerilmesi” adı verilir. Mukavemet hesaplarında ve teknikte “ σ_k ” olarak gösterilir.

Torsiyon, burulmaya zorlanma: Burulmaya zorlanmaya kısaca “torsiyon” denir. Basit bir çubuk ele alınsın. Bu çubuk eksenine dik iki düzlem içinde her bir düzlemde karşılıklı iki kuvvet ile yüklensin. Bu iki eksene dik düzlemin arasında bir kesit düzleminde gerilme hesaplanmak istenirse görülür ki bu kuvvetler kesitte “burmaya zorlayan kuvvet çifti” ni oluştururlar. Bu kuvvet çifti kesitin iki yüzeyini burmaya zorlayacaktır. Bunun içinde bu zorlama şekline kuvvete olduğu gibi parçada “burulmaya zorlanma” veya kısaca “burulma” veya “torsiyon” adı verilir. Bir yüzeyin içinde olan kuvvete çapraz kuvvet ve bunun oluşturduğu gerilmeye de

kayma gerilmesi dendiğine göre burada oluşan gerilmede “kayma gerilmesi” nin bir türüdür. Bu gerilme şekline pratikten örnek olarak redüktör milleri, cıvatalar v.b. verilebilir. Burada oluşan gerilmeye “burkulma gerilmesi” veya ”torsiyon gerilmesi” adı verilir. Mukavemet hesaplarında ve teknikte “ τ_{br} ” veya “ τ_t ” olarak gösterilir.

Bileşik zorlanma: Bileşik zorlanma konusuna girmeden önce tek, çift ve üç eksenli gerilmelere kısa bir göz atılacaktır. Bir cisim çeşitli dış kuvvetler etkisinde olsun. Örneğin; yüzey basıncı, basma ve benzeri kuvvetler. Bu cisimden küp biçiminde küçük bir parça alınsın. Bu dış kuvvetler, bu küp şeklinde düşünülen elementte üç eksenli gerilmeler meydana getirir. Küpün altı yüzeyinin her birinde bir normal ve iki kayma gerilmesi doğar(Şekil 2.8). Bu gerilmeleri bir koordinat sistemi ile (sağ el sistemi) gösterebiliriz. Eksenler x , y ve z olarak adlandırılır. Eğer bir eksen yönünde etki eden gerilmeler sıfır ise, geriye gerilmeler olan iki eksen kalacağından, böyle bir gerilme şekline “iki eksenli gerilme” denir. Eğer yalnız bir normal gerilme var ise ve diğer iki gerilme sıfır ise bu gerilme şekline “bir eksenli gerilme” denir. Şimdi bu gerilmelerin gösterilmesindeki sembol ve indekslerin tanımı yapılacaktır. Örneğin: x eksen yönünde normal gerilme σ_x ise, burada x indeksi eksen yönünü ve σ sembolü gerilmenin cinsini gösterir. Diğer taraftan y eksenine dik olan düzlemde ve x eksen yönünde, x eksenine paralel kayma gerilmesini τ_{xy} ile gösterilir. İndekslerin okunması sağ taraftan olur. Burada sağdaki y indeksi gerilmenin bulunduğu düzlemin dik olduğu eksen ve x indeksi gerilmenin eksen yönünü ve τ sembolü gerilmenin cinsini gösterir. Bir çubuk bir taraftan eğilme momenti diğer taraftan torsiyon momenti ile yüklensin. Hesabın yapılacağı kesit incelendiğinde, burada iki ayrı çeşit gerilme ile karşılaşılır. Bu durumda asıl soru ortaya çıkar. Ölçülendirilecek veya kontrol edilecek bir makine parçasının kesitinde, ayrı cinsten gerilmeler bulunursa, hesap nasıl yapılır? Böyle bir problemin çözümünde izlenecek yol şöyledir: Parçaya etki eden gerilmeler bir eksenli gerilme olarak “karşılaştırma gerilmesi” adı altında hesaplanır ve malzemenin mukavemet değeri ile karşılaştırılarak karar verilir. Çünkü malzemenin bilinen mukavemet değerleri bir eksenli değerlerdir.



Şekil 2.8: Üç eksenli gerilme

Bileşik zorlanmalarda sadece normal gerilmelerin etkin olduğu durum: Örneğin, eğilme ve çekme veya eğilme ve basma gerilmeleri gibi, etki eden gerilmeler aritmetik olarak toplanırlar. Bu hesaplanan gerilmeye “toplam normal gerilme” denir.

Bileşik zorlanmalarda çeşitli kayma gerilmelerin etkin olduğu durum: Örneğin, torsiyon ve kesme gerilmesi gibi, gerilmeler aritmetik olarak toplanırlar. Bu hesaplanan gerilmeye “toplam kayma gerilmesi” denir.

Bileşik zorlanmalarda normal ve kayma gerilmelerinin etkin olduğu durum: Bileşik zorlanma normal ve kayma gerilmelerinden oluşuyorsa burada gerilmeler geometrik olarak toplanır. Bu hesaplanan gerilmeye “karşılaştırma gerilmesi” denir.

2.6. Diferansiyel Denge Denklemleri

Genel olarak bir cisimde gerilme bileşenleri noktadan noktaya değişmektedir. Bu değişimler statik denge şartları vasıtası ile verilirler. Ortaya çıkan ifadeler gerilmenin çeşitli bileşenlerinin uzay türevlerinin birbirine bağlar ve diferansiyel denge denklemleri olarak bilinir.

Örneğin gerilme bileşenlerinin birinin, cisim içinde noktadan noktaya değişimi ele alınsın. Eğer Şekil 2.9'da A daki gerilme σ_x ise B deki gerilme $\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\right)dx$ kadar artar. Burada $\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\right)$, σ_x in x e göre değişim miktarını ve dx de x doğrultusundaki mesafeyi gösterir. Burada adi türev işareti yerine kısmi türev işaretinin kullanılması anlamlıdır, çünkü σ_x aynı zamanda y nin de (üç boyutlu halde z nin de) fonksiyonudur. Gerilme bileşenlerinin ve onların türevlerinin sürekli olduğunu kabul edilir. Bu takdirde B deki gerilme

$$\sigma_{xB} = \sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dx \quad (2.1)$$

ile verilir. Benzer olarak C ve D deki gerilmeler ise (x , B den D ye kadar sabit olduğundan)

$$\sigma_{xC} = \sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial y} dy, \sigma_{xD} = \sigma_{xB} + \frac{\partial\sigma_{xB}}{\partial y} dy$$

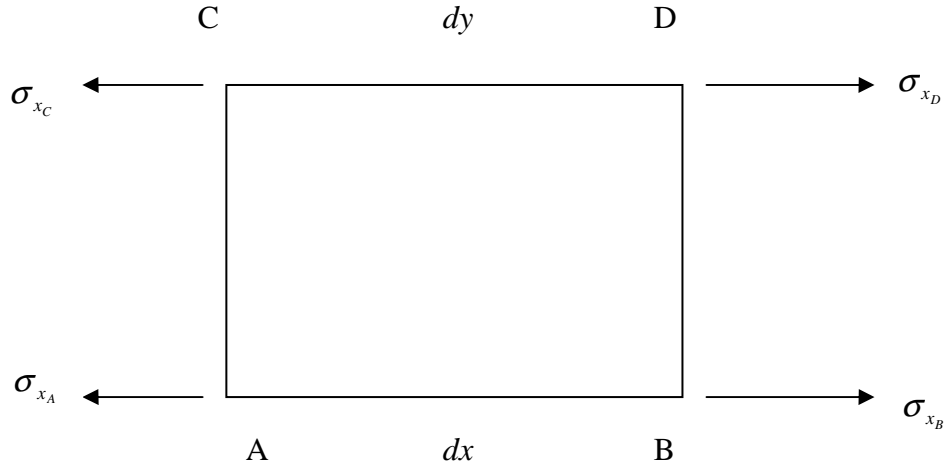
olarak verilir. (2.1) denklemini kullanılırsa

$$\sigma_{xD} = \sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dx \right) dy$$

veya

$$\sigma_{xD} = \sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dx + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dy \quad (2.2)$$

olur.



Şekil 2.9: Bir eleman üzerinde gerilme değişimi

Burada ikinci mertebeden terim (dx ve dy nin çarpımı) birinci mertebeye terimlerin (sadece bir diferansiyel içeren terimler) yanında küçük olduğundan ihmal edilmişlerdir. Yüksek mertebeden küçük büyüklükler ihmal edilirse sonsuz küçük bir elemanın bir yüzeyinde gerilme lineer olarak değişir. Şekil 2.10'a göre elemanın sol yüzündeki kuvvet

$$P_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy}{2} dy$$

dir. Prizmanın z doğrultusundaki kalınlığı birim olarak kabul edilir. Bu basitleştirilirse

$$P_1 = \sigma_x dy + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy^2$$

elde edilir. Benzer olarak sağ yüzdeki kuvvet

$$P_2 = \frac{\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy}{2} dy$$

veya

$$P_2 = \sigma_x dy + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy^2$$

olur. Bu yüzden elemandaki bileşke kuvvet

$$P_2 - P_1 = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy$$

dir. Eğer ortalama gerilmelerin sırasıyla sol ve sağ yüzlerin merkezlerinde etkiyen kuvvet σ_x ve $\sigma_x + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right) dx$ oldukları kabul edilirse bileşke kuvvet yine aynı olacaktır. Böylece denge denklemleri çıkarılırken her bir yüzeyde düzgün gerilme dağılışımdan ibaret olan basit bir gerilme sistemi kullanılacaktır ki, bu her bir yüzeyin merkezine etkiyen bir tek vektörle temsil edilir.



Şekil 2.10: Bir elemanda bileşke kuvvet

$\sigma_x = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = F_z = 0$ kabul edilirse Şekil 2.11'deki durum elde edilir. Ayrıca kütle kuvvetleri şiddetleri F_x, F_y nin olduğu gibi $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ nin de z den bağımsız olduğu kabul edilecektir. Bu şartların hepsini sağlayan hal düzlem gerilme olarak bilinir. $\sum x$ -kuvvetleri sıfır yazılarak ve birim kalınlık kabul edilerek

$$F_x dx dy + \left[\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right] dy - \sigma_x dy + \left[\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right] dx - \tau_{yx} dx = 0 \quad (2.3)$$

elde edilir ki bu basitleştirildiğinde

$$\left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x \right] dx dy = 0$$

olur. Buradan

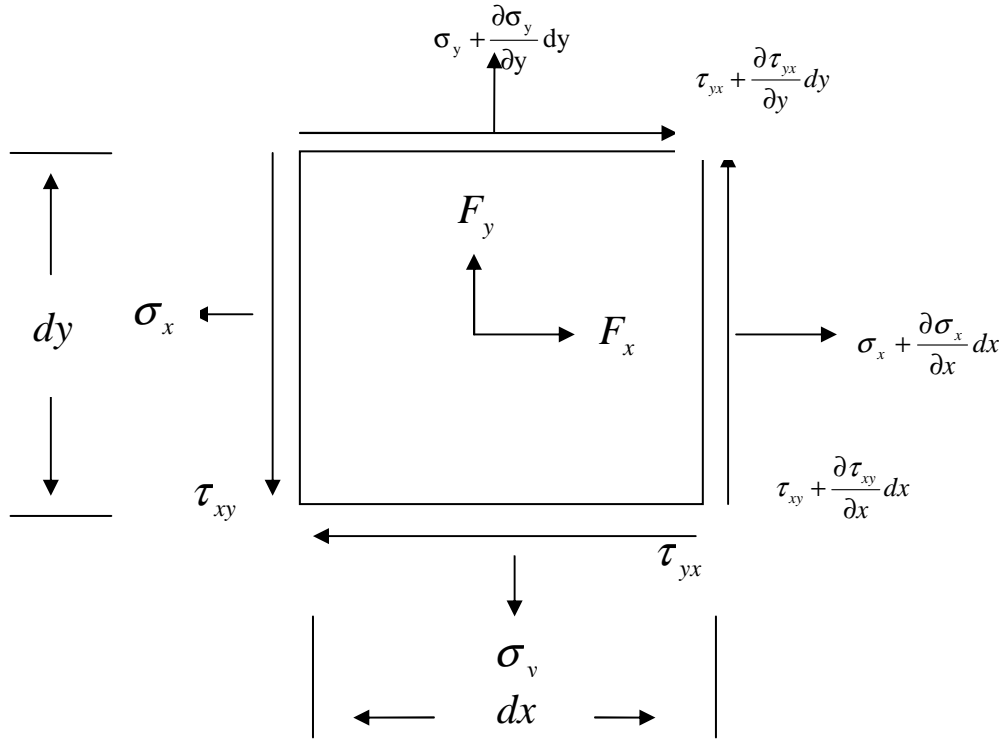
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde y doğrultusundaki kuvvetlerin toplanması ise

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_y = 0$$

bağıntısını verir. Denge denklemleri Şekil 2.11'in üç boyutlu durumu düşünülerek aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + F_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$



Şekil 2.11: Bir eleman üzerindeki gerilmelerin ortalama değerleri

Dengede olan bir cisim için gerilmelerin noktadan noktaya değişimi (2.4) denge denklemleri ile ifade edilir. (2.4) denge denklemlerinin ikinci ve üçüncüsünün birinciden elde edilebileceği açıktır. (x yerine y, y yerine z, z yerine x yazarak)

Bu işlem basitçe koordinat eksenlerini yeniden isimlendirmeye karşılık gelir. Şekil 2.11'deki gerilmelere bir üçüncü statik denklemi de uygulanabilir, yani $\sum M = 0$.

Sol alt köşeye göre moment alınırsa

$$\left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy dx \right) \frac{dx}{2} - \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy \right) \frac{dy}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dx - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dy$$

$$- F_y dx dy \frac{dx}{2} - F_x dx dy \frac{dy}{2} = 0$$

bulunur. dx, dy üçlü çarpımlarını ihtiva eden terimler ihmal edilirse

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

elde edilir. Üç boyutlu durum göz önüne alınırsa ve x, y, z eksenlerine göre $\sum M = 0$ yazılırsa

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

bulunur. Bu takdirde bir noktadaki dokuz gerilme bileşeninden sadece altı tanesi bağımsızdır.

Üç moment denklemleri kayma gerilmesi bileşenlerinin bağıntısını kurmak için kullanıldığından elastisite teorisinde geçerli denklem olarak kullanılmazlar. Gerilme bileşenleri tarafından sağlanmak için sadece (2.4) kuvvet denge denklemleri kalır. Bununla beraber görülür ki, altı değişken arasında bağıntı kuran üç denklem mevcuttur. Bununda sonucu olarak bir cisim boyunca gerilme dağılımının tam çözümü için ilave denklemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Daha sonra görüleceği gibi bunlar şekil değiştirme ve yer değiştirme denklemleri olarak ortaya çıkacaktır[12-13].

2.7. Şekil Değiştirme ve Yer Değiştirme Bağıntıları

Bir cisimdeki noktaların konumları değiştiği zaman bu cisim şekil değiştirmiştir denir. Bu herhangi iki nokta arasındaki mesafenin sabit kaldığı sert (rijit) cisim hareketinden farklıdır. Bir cisme kuvvetler etkidiği zaman cismin herhangi bir noktasının konumu genellikle değişir. Bir noktanın yer değiştirmesi noktanın başlangıç konumundan son konumuna olan vektör olarak tanımlanır. Yer değişiminin x, y, z bileşenleri sırasıyla u, v, w ile gösterilsin. Böylece başlangıçta (x, y, z) de bulunan bir nokta $(x + u, y + v, z + w)$ noktasına yer değiştirecektir. Genel olarak u, v, w nin hepsi x, y, z nin fonksiyonudur.

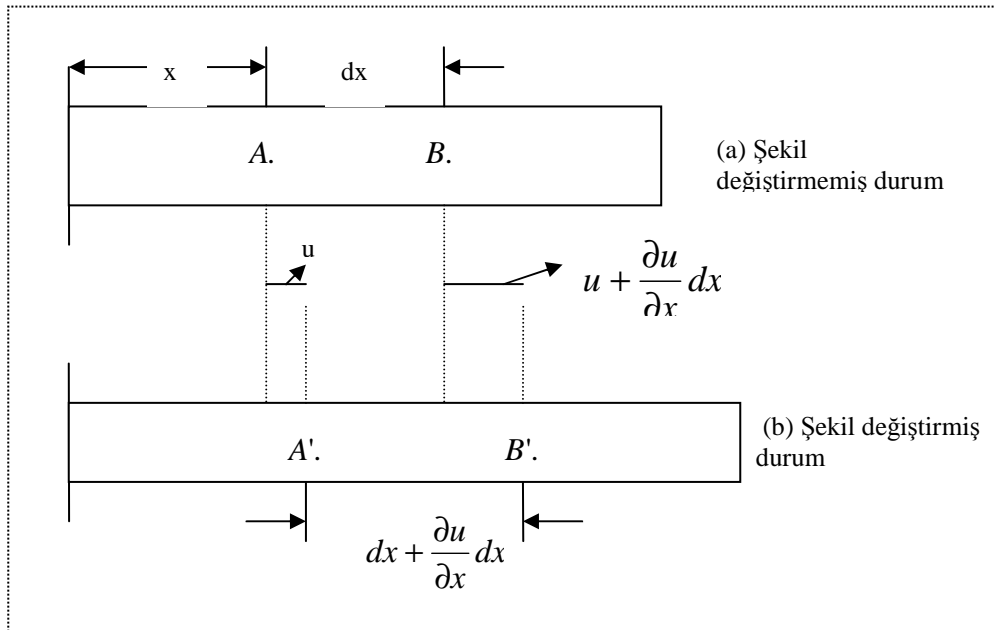
Genel şekil değiştirme kavramı tanımlanılmadan önce normal şekil değiştirme kavramı tanımlanacaktır. Bunun için de bir boyutlu model ele alınacaktır. Örneğin Şekil 2.12'deki gibi tek eksenli gerilmeye maruz kalan bir çubuk ele alınsın. Çubuğun eksenini üzerinde bulunan A, B noktaları Şekil 2.12 (a)'daki gibi

yerleşmiştir. Gerilme uygulandıktan sonra bu noktalar sırası ile A',B' noktalarına dönüşürler. Görüldüğü gibi B noktası A noktasından biraz daha fazla yer değiştirir. Çünkü bu nokta sabit uçtan daha uzaktadır. Normal şekil değiştirme (ϵ) boydaki birim değişme olarak tanımlanırsa

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

olarak elde edilir.

Şimdi $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = 0$ ile tanımlanan düzlem şekil değiştirmedeki bir cisim göz önüne alınsın. Bu durumda esas olarak xy düzleminde bulunan bütün noktalar cisim şekil değiştirdikten sonra da bu düzlemde kalırlar. Örneğin Şekil 2.13'te gösterilen sonsuz küçük ABCD elemanının yer değiştirmesi düşünölsün. Bu elemanın son halde A'B'C'D' olarak gösterilsin. Burada eleman bir bütün olarak noktalı çizgilerle gösterildiği gibi ötelenir ve aynı zamanda da şekil değiştirir. Şekil değiştirme iki ayrı durumdan ibarettir: Kenarlar uzunluk değiştirir ve kenarlar birbirlerine göre dönerler.

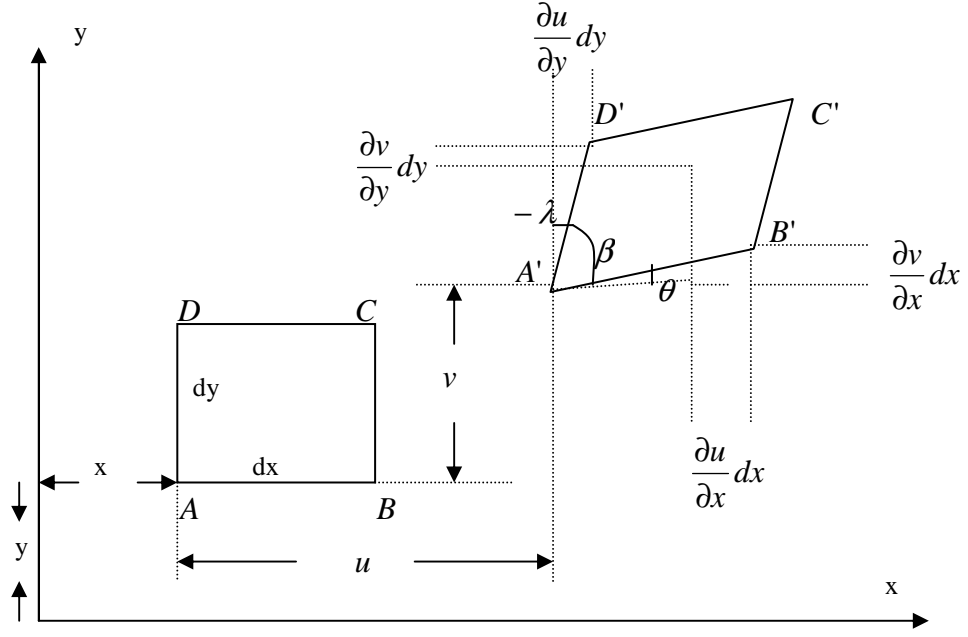


Şekil 2.12: Bir çubukta normal şekil değiştirme

Böylece normal ve kayma şekil değiştirmeleri tanımlanır. Verilen bir doğrultudaki ϵ normal şekil değiştirmesi, esas olarak verilen doğrultuda bulunan bir çizginin boyundaki birim değişme (birim uzunluktaki değişme) olarak tanımlanır. Kayma şekil değiştirmesi, kayma gerilmesi gibi iki dik doğrultuyla ilgilidir. Kayma şekil değiştirmesi (γ) iki eksen arasındaki esas dik açıdaki değişim olarak tanımlanır. Açı radyan cinsinden ölçülmektedir. Şekil 2.13'ten görüldüğü gibi, x,y koordinat eksenlerinde verilmiş şekil değiştirme bileşenlerinin

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{A'B'-AB}{AB} = \frac{A'B'-dx}{dx} \\ \epsilon_y &= \frac{A'D'-AD}{AD} = \frac{A'D'-dy}{dy} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\pi}{2} - \beta = \theta - \lambda\end{aligned}\tag{2.5}$$

olduğu görölür. Burada λ nın önündeki eksi işaretinin anlamı, dönme açısı saat yönünün tersi olduğunda pozitif olmasıdır. Şekil 2.13'te gösterilen yer değiştirmeler netlik için büyütölerek çizilmiştir. Lineer elastisite teorisinde sadece şekil değiştirmelerin ve yer değiştirme bileşenlerinin türevlerinin çok küçük olduğu problemler göz önüne alınır. Bununla beraber birçok mühendislik problemi bu kabulleri kullanarak yeterli hassasiyetle çözölür.



Şekil 2.13: İki boyutlu bir elemanın ötelenme ve şekil değiştirmesi

Şekil ve yer değiştirmelerin nispeten büyük olduğu sonlu elastisitede bu kabuller geçerli değildir ve şekil değiştirme bileşenleri yeniden tanımlanmalıdır. Eğer A noktasının yer değiştirme bileşenleri u, v ise AB hattı boyunca y sabit olduğundan

B noktası $u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx$ ve $v + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx$ kadar yer değiştirecektir. Benzer şekilde D

noktasının yer değiştirme bileşenleri $u + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy$ ve $v + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$ dir. Böylece

$$(A'B')^2 = [dx(1 + \epsilon_x)]^2 = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)^2$$

olur ki buradan

$$\epsilon_x^2 + 2\epsilon_x + 1 = 1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

yazılabilir. Küçük şekil değiştirme ve yer değiştirme türevleri göz önüne alınıyor olduğundan birinci üslü terimlerin yanında kareli terimler ihmal edilebilir. Bu terimler ihmal edilirse

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

olur ve benzer şekilde

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

bulunur. Şekil 2.13'ten

$$\theta = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx}{dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx}$$

yazılabilir. Küçük yer değiştirme kabulü gereği θ küçük bir açıdır ve $\tan \theta = \theta$ sağlanır. $\frac{\partial u}{\partial x}$, 1 e göre küçük olarak ihmal edilirse

$$\theta = \frac{\partial v}{\partial x}$$

ve benzer şekilde

$$\lambda = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

elde edilir. Böylece kayma şekil değiştirmesi γ_{xy}

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

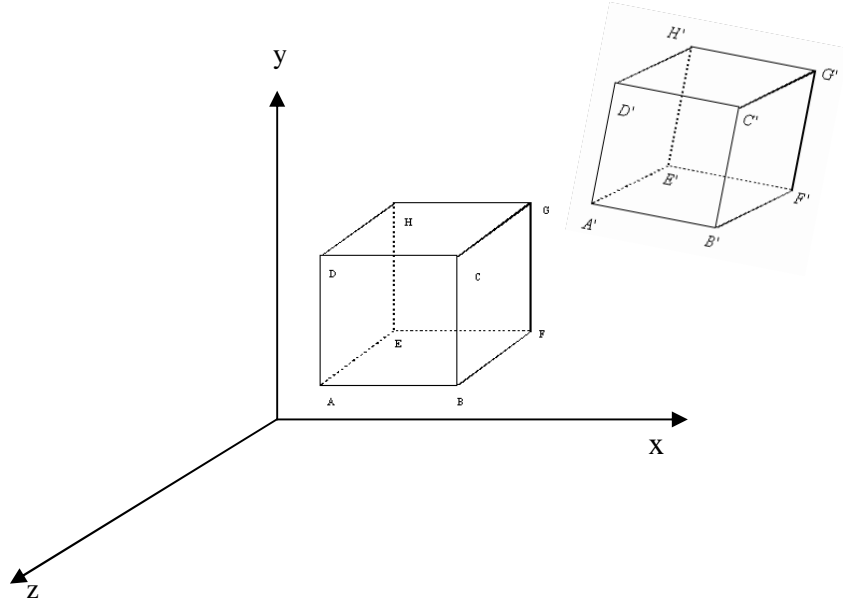
ile verilir. Burada iki kısmi türev, AB,AD şeklinde gösterildiği gibi içeri dönerlerse pozitifdir. Yani, u,v sırasıyla; artan y,x ile birlikte artarlar. Orijinal elemanın bir dikdörtgenler prizması olduğu üç boyutlu halde

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.6)$$

şekil değiştirme bileşenleri elde edilir. Aynı zamanda $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \gamma_{zx} = \gamma_{xz}$ olduğu da açıktır. (2.6) ifadelerine, şekil değiştirme bileşenlerini yer değiştirme bileşenleri cinsinden tanımladıklarından dolayı şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları denir. Şekil 2.14, küçük bir dikdörtgenler prizmasının yer değiştirme ve şekil değiştirmesini göstermektedir. Bu şekle göre lineer şekil değiştirme teorisince tanımlanan şekil değiştirme bileşenlerinin bazıları

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{E'F'-EF}{EF} = \frac{A'B'-AB}{AB} = \frac{H'G'-HG}{HG} = \frac{D'C'-DC}{DC} \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\pi}{2} - m(\widehat{F'E'H})' \right) = \left(\frac{\pi}{2} - m(\widehat{F'G'H})' \right) = \left(\frac{\pi}{2} - m(\widehat{B'A'D})' \right) = \left(\frac{\pi}{2} - m(\widehat{B'C'D})' \right) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir[8-13].



Şekil 2.14: Üç boyutlu bir elemanda şekil değiştirme

2.8. Uygunluk Denklemleri

Bellidir ki (2.5) denklemleri sadece üç yer değiştirme bileşeninin fonksiyonu olarak şekil değiştirme bileşenleri için altı denklem verir. Böylece eğer u, v, w ler, x, y, z nin fonksiyonu olarak alınırsa (2.5) denkleminde şekil değiştirme bağıntıları çıkarılabilir. Bununla beraber altı şekil değiştirme bileşeni x, y, z nin verilmiş bileşeni olarak düşünülebilir. Bu durumda üç tane u, v, w bilinmeyeninin çözümü için altı adet denklem oluşur. Genel olarak altı şekil değiştirme bileşeni bir şekilde bağlanmadıkça bu denklem sistemi u, v, w için bir çözüme sahip değildir. Diğer bir ifade ile eğer tek değerli sürekli yer değiştirme fonksiyonları elde edilecekse altı şekil değiştirme bileşeni keyfi olarak verilemez. Böyle yer değiştirmeler sadece eğer şekil değiştirme bileşenlerini içeren ilave üç denklem var ise ortaya çıkarlar. Şimdi bu bağıntılar araştırılacaktır.

Eğer (2.6) denklemlerinin ilki y ye göre, ikincisi de x e göre iki kez türetilir ve toplanırsa

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

elde edilir. Dördüncü denklem x ve y ye göre türetilirse

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

elde edilir. Tek değerli sürekli fonksiyonlar için türevin sırası önemsiz olduğundan

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

olur. Benzer yaklaşımlar ile beş ilave denklem daha geliştirilebilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

(2.7) denklemleri Saint-Venant denklemleri veya şekil değiştirmeler cinsinden uygunluk denklemleri olarak adlandırılır. Yer değiştirme bileşenlerine ait çözümün olabilmesi için şekil değiştirme bileşenleri bu ifadeleri sağlamalıdır. Altı uygunluk denklemleri yazılmakla beraber bunlar üç bağımsız dördüncü mertebeli denkleme eşdeğerdir. Bunu göstermek için (2.7) denklemlerinin ilki z ye göre, ikincisi x e,

üçüncüsü y ye göre iki defa türetilir. Sonra dördüncü denklem y ve z ye göre, beşinci denklem z ve x e göre, sonuncusu ise x ve y ye göre türetilir. Böylece ilk üç dördüncü mertebe denklemin son üçe eşdeğer olduğu görülür. Bununla beraber altı ikinci mertebe denklemi kullanmak, genellikle üç dördüncü mertebe denklemi kullanmaktan daha elverişlidir. Bundan başka yüksek mertebe kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri düşük mertebe denklemlerden daha fazla keyfi fonksiyon ihtiva ettiğinden üç dördüncü mertebe uygunluk denklemleri gerekenden fazla geneldir ve eğer kullanılacaklarsa ilave kısıtlamalar getirilmelidir.

Uygunluk denklemleri geometrik olarak şöyle açıklanabilir: Sonsuz küçük küplere bölünmüş bir cisim düşünölsün. Sonra her bir küp keyfi şekil değiştirme bileşenlerine maruz bırakılsın (keyfi şekil değiştirme fonksiyonlarına karşı gelen). Eğer şekil değiştirmiş elemanlar bir araya getirilip cisim yeniden kurulmaya teşebbüs edilirse genel olarak bu elemanların tam olarak uyuşmadığını görülür. Bunlar boşluklarla birbirinden ayrılacaktır. Mükemmel bir uyum şekil değiştirme bileşenleri uygunluk denklemlerini sağladıkları zaman yapılabilir. Belirtilmelidir ki tek değerli ve sürekli yer değiştirme bileşenleri bulunursa şekil değiştirme bileşenleri uygunluk denklemlerini kendiliğinden sağlayacaktır[13].

2.9. Gerilme ve Şekil Değiştirme Bağlıları

Şimdiye kadar statik ve gerilmenin sürekliliğine dayanan (2.4) denge denklemleri ile yer değiştirmelerin sürekliliği ile sonsuz küçük şekil değiştirmelere dayanan (2.6) şekil değiştirme ve yer değiştirme bağıntıları anlatıldı. Bu iki denklem grubu birbirinden bağımsız olarak kurulmuştur. Bir grup sadece gerilme bileşenlerini, diğeri ise şekil ve yer değiştirmeleri içerir. Burada akla şöyle bir soru gelmektedir: Şekil değiştirme bileşenleri ve gerilme bileşenleri birbirine nasıl bağılıdır. Bundan sonra bu sorunun cevabı araştırılacaktır.

Sonsuz küçük şekil değiştirmeler kabulü altında (2.4) ve (2.6) denklemleri herhangi bir katı cisim için geçerlidir. Bununla birlikte gerilme ve şekil değiştirme bileşenleri arasındaki bağıntı, ele alınan cisimlerin özelliklerine bağılıdır. Burada elastik olan özel katılar sınıfı göz önüne alınacaktır. Daha öncede belirtildiği gibi, bir elastik

cisim üstüne etkiyen kuvvetlerin kaldırılmasından sonra orijinal boyutlarını tekrar kazanan cisim olarak tanımlanır. Bununla beraber lineer gerilme-şekil değiştirme bağıntısına sahip cisimlere ilgi çekilecektir. Davranışların lineer olarak elastik olduğu şekil değiştirme ve gerilme bölgesine elastik bölge denir. Pek çok katı malzeme gerilmenin ve şekil değiştirmenin sınırlı bir bölgesi boyunca bu davranışı gösterirler. Bazı malzemeler iyi tanımlanmış bir elastik bölgeye sahip olmamakla beraber bu davranışın kabulü mühendislik hassasiyeti için iyi sonuçlar verir.

(2.4) denge denklemleri ile (2.6) şekil değiştirme ve yer değiştirme denklemleri toplam dokuz denklem meydana getirirler. Fakat altı gerilme bileşeni, altı şekil değiştirme bileşeni ve üç yer değiştirme bileşeni olmak üzere toplam on beş bilinmeyen var. Burada gerilme ve şekil değiştirme bileşenleri ile ilgili altı denklem bulunacaktır ve böylece toplam denklem sayısı on beş olacaktır. Bunlar verilen sınır şartlarıyla beraber dengedeki bir elastik cismin sağlaması gereken şartları gösterir [13].

2.10. Genelleştirilmiş Hooke Kanunları

Daha önce de belirtildiği gibi birçok mühendislik malzemesi tek eksenli gerilme hali altında net bir elastik bölge sergiler. Eğer normal gerilme x doğrultusunda etkirse elastik bölgede, Hooke kanunu olarak bilinen

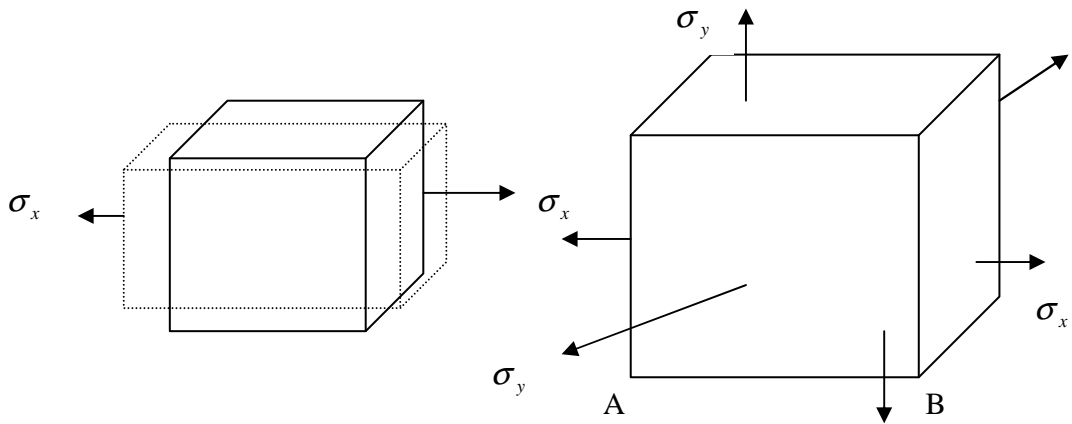
$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (2.8)$$

bağıntısı geçerlidir. Burada E sabitine elastisite modülü veya Young modülü denir. Bu sabit, verilen bir malzeme için tek eksenli bir çekme testi yaparak ve örnekte gerilme ve şekil değiştirmenin aynı andaki değerlerini kaydederek belirlenebilir. Bu nedenle elastisite modülü, gerilmeler ordinat, şekil değiştirmeler apsis alınarak çizilen eğrinin doğrusal kısmının eğimine eşittir. Şimdi üç boyutlu durumda gerilme ve şekil değiştirme bağıntıları araştırılacaktır. Diğer bir ifade ile bir noktadaki $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ gerilme bileşenleri ile aynı noktadaki $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ şekil değiştirme bileşenleri arasında ilişki elde edilecektir.

Gerilme ve şekil değiştirme arasındaki bağıntı

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= C_{11}\epsilon_x + C_{12}\epsilon_y + C_{13}\epsilon_z + C_{14}\gamma_{xy} + C_{15}\gamma_{yz} + C_{16}\gamma_{zx} \\
 \sigma_x &= C_{21}\epsilon_x + C_{22}\epsilon_y + C_{23}\epsilon_z + C_{24}\gamma_{xy} + C_{25}\gamma_{yz} + C_{26}\gamma_{zx} \\
 \sigma_x &= C_{31}\epsilon_x + C_{32}\epsilon_y + C_{33}\epsilon_z + C_{34}\gamma_{xy} + C_{35}\gamma_{yz} + C_{36}\gamma_{zx} \\
 \tau_{xy} &= C_{41}\epsilon_x + C_{42}\epsilon_y + C_{43}\epsilon_z + C_{44}\gamma_{xy} + C_{45}\gamma_{yz} + C_{46}\gamma_{zx} \\
 \tau_{yz} &= C_{51}\epsilon_x + C_{52}\epsilon_y + C_{53}\epsilon_z + C_{54}\gamma_{xy} + C_{55}\gamma_{yz} + C_{56}\gamma_{zx} \\
 \tau_{zx} &= C_{61}\epsilon_x + C_{62}\epsilon_y + C_{63}\epsilon_z + C_{64}\gamma_{xy} + C_{65}\gamma_{yz} + C_{66}\gamma_{zx}
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

lineer denklemleri ile ifade edilir. Burada gerilme ve şekil değiştirme bağıntılarını çıkarmak için yarı deneysel yaklaşım kullanılacaktır. Bu yaklaşımda küçük şekil değiştirmelere maruz kalan çoğu mühendislik malzemesi için, deneysel verilere dayanan bazı kabuller yapılacaktır. Bu kabuller şunlardır: Bir σ_x normal gerilmesi x, y, z düzlemlerinde kayma şekil değiştirmesi meydana getirmez. Bir τ_{xy} kayma gerilmesi x, y, z düzlemlerinde normal şekil değiştirme meydana getirmez. Bundan başka τ_{xy} kayma gerilmesi bileşeni sadece bir τ_{xy} kayma şekil değiştirmesi meydana getirir. Şekil değiştirme bileşenleri küçük büyüklüklerse, süperpozisyon prensibi, birden fazla gerilme bileşeni tarafından meydana getirilen şekil değiştirme bileşenlerini tayin etmek için kullanılabilir. Şekil 2.15'te gösterilen σ_x tek eksenli gerilemesine maruz kalan paralel yüzlü ele alınsın.



Şekil 2.15: Tek eksenli ve üç eksenli gerilme haline maruz kalan eleman

(2.9) denkleminde ϵ_x şekil değiştirme bileşeni $\epsilon_x = \sigma_x / E$ değerine eşittir. Bu uzama x doğrultusunda alınır; y, z doğrultusunda kısaltmalar olacaktır. Bunlar

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu(\sigma_x / E)$$

ile verilirler. Çoğu malzemeler için elastik sınırlar içinde ν sabittir ve Poisson oranı diye tanımlanır. Şimdi Şekil 2.15'te gösterilen  eksenli gerilmeye maruz kalan bir eleman ele alınsın. Burada AB nin başlangıç uzunluğu 1 olarak alınmıştır. ϵ_x şekil değiştirme bileşeni, önce AB nin uzunluğunu $(1/E)\sigma_x$ kadar değiştiren σ_x gerilmesinin uygulandığını sonra AB uzunluğunda $-(\nu/E)\sigma_y(1 + \sigma_x/E)$ kadar ilave bir değişiklik yapan σ_y nin uygulandığı kabul edilerek belirlenir. $(1/E)\sigma_x$ bir elastik şekil değiştirme olduğundan bire göre ihmal edilebilir. σ_z uygulandığı zaman yine yüksek mertebe küçük büyüklükler ihmal edilirse AB uzunluğu $-(\nu/E)\sigma_x$ kadar değişir. Bu yüzden x doğrultusundaki toplam şekil değiştirme

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

ile verilir. Benzer şekilde

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

dir.

İki boyutlu, safi kayma hali altında elastik gerilme şekil değiştirme bağıntısı deneysel olarak

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

olur. Burada G elastik sabitine sertlik modülü denir. Sertlik modülü ile Young modülü arasında

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

ilişkisi vardır.

Genel bir gerilme hali için genelleştirilmiş Hooke kanunları veya basitçe Hooke kanunları olarak bilinen gerilme ve şekil değiştirme bağıntıları

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

denklemlerinden ibarettir[8-13].

2.11. Silindirik Çubukların Burulması

Burulmaya maruz kalan dairesel kesitli bir silindirdeki kayma gerilmesi cisimlerin mukavemetindeki elemanter burulma formülüyle verilir. Burulma altındaki dairesel silindirin eksene dik olan kesitleri düzlem kalır. Burulmaya maruz diğer kesitli silindirler için bu şart geçerli değildir. Şimdi uçlardan kuvvet çiftleriyle burulan herhangi dik kesitli bir silindir düşünülecektir.

Bir dairesel silindirde ortaya çıkan şekil değiştirmelerden yola çıkan Saint-Venant dairesel olmayan burulmuş bir silindirde oluşacak yer değiştirmelerin şu şekilde olacağını kabul etmiştir. (a) Deforme olmuş herhangi bir dik kesitin xy düzlemindeki izdüşümü bir rijit cisim gibi döner (Şekil 2.16). Birim uzunluktaki burulma açısı sabittir. (b) Her bir nokta boyuna doğrultuda yer değiştirir (çarpılma oluşur). Ayrıca bu çarpılmanın tüm dik kesitler için aynı olduğu kabul edilir. Yani w yer değiştirmesi z den bağımsızdır. Bu davranış (a) daki ve (b) deki yer değiştirmelerin ayrı ayrı ortaya çıktığını düşünerek göz önüne getirilebilir. (a) da göz önüne alınan dönme, bir dairesel silindirde ortaya çıkanın aynısıdır. Bu dönmeye ek olarak (b) de belirtilen yer değiştirme elde edilir.

Yükleme durumu Şekil 2.16'da gösterilmiştir. x, y eksenleri alt dik kesit düzleminde alınmışlardır. z eksenini silindirin boyuna eksenine paraleldir.

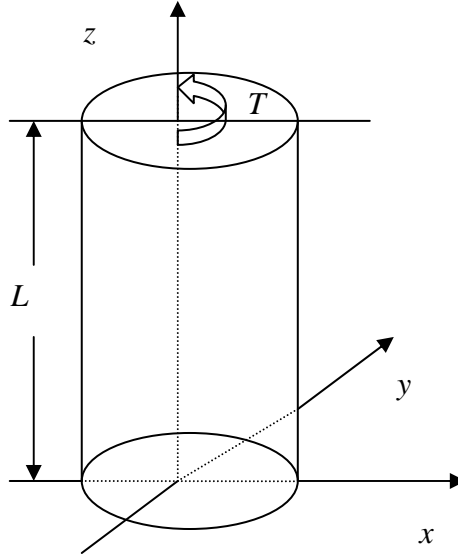
Bir uçtaki T burulma momenti, eğer T yi temsil eden vektör (sağ el kuralı) bu düzlemin dış normal doğrultusunda etkirse pozitifdir.

Herhangi bir P noktasının dönme yüzünden yer değiştirmesi Şekil 2.17'de gösterilmiştir. OP çizgisi O etrafında küçük β açısı kadar döner. Burada O burulma merkezi adını alır. Cisim burulma merkezi z eksenini üzerinde olacak şekilde yer değiştirmiştir. Burulma açısı küçük olduğundan PP' yayı OP ye dik bir doğru çizgi olarak kabul edilir. Bu yüzden P nin yer değiştirmesinin x, y bileşenleri

$$u = -r\beta \sin \theta = -\beta y$$

$$v = \beta r \cos \theta = \beta x$$

ile verilir. Bunlar z doğrultusundaki w yer değiştirme (arpılma) ile tamamlanır. Burada $w = w(x, y)$ dir.



şekil 2.16: Silindirik bir çubuğun burulması

Her bir dik kesitin çarpılmasının aynı olduğu kabul edildiğine gore w , z nin bir fonksiyonu olmayıp sadece x, y nin fonksiyonudur. Yani z ye paralel bir çizgi üzerindeki bütün noktalar z doręultusunda aynı miktar hareket ederler. şekil 2.17 OP nin şekil değiştirmiş konumunu gösteren son görünümüdür. Kolaylık olması açısından orijindeki dik kesit için $u = v = 0$ olduğu kabul edilir. Böylece eğer şekil 2.17'deki dik kesit orijinden z mesafesindeyse burulma açısı

$$\beta = \alpha z$$

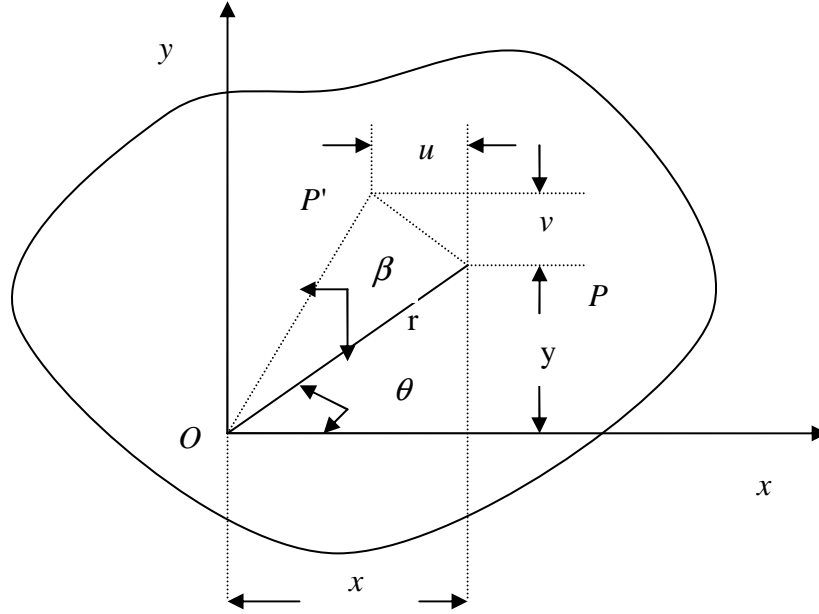
ile verilir. Burada α , z doręultusu boyunca birim uzunluk başına burulma açısıdır. Böylece yer değiştirmeler

$$\begin{aligned}
u &= -\alpha y z \\
v &= \alpha x z \\
w &= w(x, y)
\end{aligned}
\tag{2.10}$$

ile verilir. (2.6) şekil değiştirme ve yer değiştirme bağıntıları (2.10) kabulleri ile bir araya geldiğinde

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0 \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha y \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} + \alpha x
\end{aligned}
\tag{2.11}$$

haline gelir.



şekil 2.17: Dönme yüzünden yer değiştirme

Gerilme ve şekil değiştirme bağıntıları (Hooke kanunları) uygulanarak gerilme ve yer değiştirme denklemleri

$$\begin{aligned}
\tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha y\right) \\
\tau_{yz} &= G\gamma_{yz} = G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \alpha x\right) \\
\sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0
\end{aligned} \tag{2.12}$$

olur. (2.12) denklemlerinin ilk ikisinden görülür ki sıfır olmayan τ_{xz}, τ_{yz} gerilme bileşenleri sadece x, y nin fonksiyonlarıdır. Birinci denklem y ye göre, ikinci denklem de x e göre türetilip birbirinden çıkarılırsa w , (2.12) denklemlerinden yok edilebilir. Bu, gerilmeler cinsinden aşağıdaki uygunluk denklemini verir:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = -2G\alpha \tag{2.13}$$

Bu denklem üç boyutlu (2.7) uygunluk denklemlerinin integre ederek ve (2.11) denklemlerini kullanarak da elde edilebilir. Bu ise

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = -2\alpha$$

denklemini verir. Bu Hooke kanunları ile birleştirilirse (2.13) denklemini elde edilir. İki kayma gerilmesi bileşeni denge denklemlerini de sağlamalıdır. Bunların üçüncüsü sıfır kütle kuvvetiyle yazılırsa

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \tag{2.14}$$

olur. Sıfır kütle kuvvetli diğer iki denklemi özdeş olarak sağlanmaktadır. Eğer

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{2.15}$$

şeklinde bir ϕ gerilme fonksiyonu (Prandtl gerilme fonksiyonu) tanımlanırsa (2.14) denkleminin özdeş olarak sağlandığı görülür. Burada $\phi = \phi(x, y)$ dir. (2.15) denklemi (2.13)'te yazılırsa

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\alpha$$

veya

$$\nabla^2 \phi = -2G\alpha, \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.16)$$

denklemi elde edilir. Daha sonra da görüleceği gibi, (2.16) denklemi esnek (elastik) durumda silindirik çubuğun burulmasının matematiksel modelini ifade eden kısmi türevli denklemdir. Şimdi ise sınır koşulları incelenecek ve burulma momentinin formülü çıkarılacaktır.

Dış gerilmelerin yani cismin sınırında etkiyen birim alandaki kuvvetin x, y, z bileşenleri sıra ile $T_x^\mu, T_y^\mu, T_z^\mu$ ile gösterilsin. Burada alt indis bileşenin doğrultusunu, üst indis ise düzlemi ifade eder. Yani düzlemin dış normali μ doğrultusundadır. Kuvvetlerin dengesinden

$$\begin{aligned} T_x^\mu &= \sigma_{x0}\mu_x + \tau_{xy0}\mu_y + \tau_{xz0}\mu_z \\ T_y^\mu &= \tau_{xy0}\mu_x + \sigma_{y0}\mu_y + \tau_{yz0}\mu_z \\ T_z^\mu &= \tau_{xz0}\mu_x + \tau_{yz0}\mu_y + \sigma_{z0}\mu_z \end{aligned} \quad (2.17)$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada, $\sigma_{x0}, \tau_{xy0}, \dots$ sınırdaki (x_0, y_0, z_0) hesaplanmış gerilme bileşenleridir. μ_x, μ_y, μ_z birim dış normal vektörü μ nün x, y, z ye göre kosinüs doğrultmanlarıdır (veya üç koordinat eksenini boyunca μ nün bileşenleridir).

Burada yanal yüzeylerde dış kuvvet olmadığı varsayılacaktır. Bu nedenle yüzeylerde $T_x^\mu = T_y^\mu = T_z^\mu = 0$ dır. Bu yüzlerin normalleri z eksenine dik olduğundan $\mu_z = 0$ olmalıdır. (2.17) denklemlerinin ilk ikisi özdeş olarak sağlanır ve üçüncü denklem

$$\tau_{xz}\mu_x + \tau_{yz}\mu_y = 0 \quad (2.18)$$

bağıntısını verir. τ_{xz} nin x düzleminde ve z doğrultusunda etkiyen kayma gerilmesi bileşeni olduğu, τ_{zx} in de z düzleminde ve x doğrultusunda etkiyen kayma gerilmesi bileşeni olduğu ve $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ olduğu dikkate alınarak, ayrıca Şekil 2.18'e bakılarak (2.18)'in sol tarafı bir z düzleminde yanal yüzeye dik kayma gerilmesi bileşenine eşit olduğu görülür veya

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}\mu_x + \tau_{zy}\mu_y = 0 \quad (2.19)$$

olur. Bu bileşenin sıfır olması istendiğinde dik kesitteki (z düzlemi) bileşke kayma gerilmesinin sınıra teğet olması istenir. Tekrar Şekil 2.18'e bakılırsa s nin a 'dan b 'ye arttığı kabul edilerek

$$\mu_x = \frac{dy}{dz}, \mu_y = -\frac{dx}{ds}$$

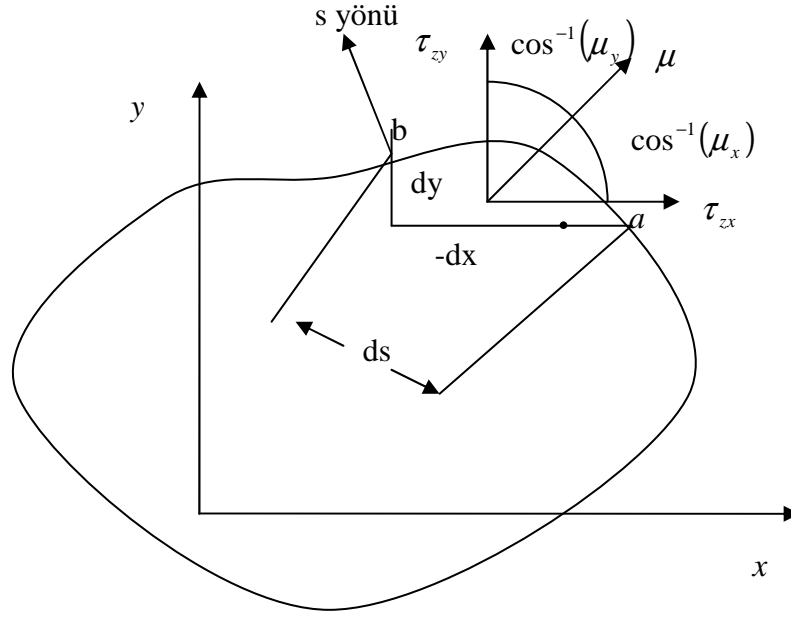
elde edilir. Bunlar ve (2.15) bağıntıları kullanılırsa (2.18) denklemi

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = 0$$

olur ki buradan

$$\frac{d\phi}{ds} = 0 \quad (2.20)$$

elde ederiz. Bu takdirde gerilme fonksiyonunun dik kesit sınırı boyunca sabit olması istenir. Eğer bu sınır basit bağlantılı ise sabit keyfi olarak seçilebilir (bu seçim sabit gerilme bileşenleri üzerinde hiçbir etkiye sahip değildir ve sadece rijit cisim yer değiştirmesi meydana getirir). Bu yüzden bundan sonra sınırda ϕ sifıra eşit alınacaktır.



Şekil 2.18: Sınır yakınında bir z düzlemindeki kayma gerilmeleri

Buraya kadar (2.16) denklemini (2.20) koşulu altında sağlayan ϕ fonksiyonu ile tanımlanan gerilmeler, yanal yüzeylerinde hiçbir yüzey kuvveti etkimeyen bir özel silindirik çubuğa ait elastisite probleminin çözümünü gösterir. Şimdi bu gerilmelerin mevcut olması için uç düzlemlere hangi yüzey kuvvetlerinin (birim alan başına) uygulanması gerektiği belirlenecektir. Uç düzlemler z eksenine normal olduklarından $z = 0$ düzlemi için $\mu_x = \mu_y = 0, \mu_z = -1$ ve $z = L$ düzlemi için $\mu_x = \mu_y = 0, \mu_z = +1$ olur. Bu doğrultu kosinüsü değerleri (2.17)'de yerine yazılırsa

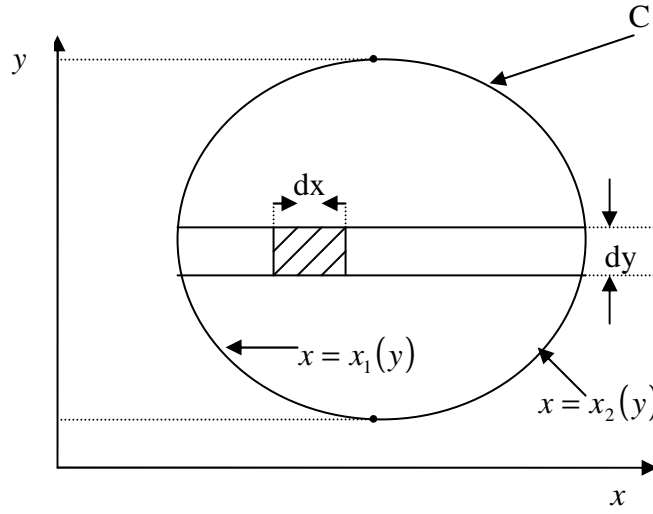
$$T_x^\mu = \pm\tau_{xz}, T_y^\mu = \pm\tau_{yz}, T_z^\mu = 0 \quad (2.21)$$

olduğundan, dağılmış yüzey kuvvetleri sınır şartlarını sağlamak için uç düzlemlere etkimelidir. Burada üst işaretler $z = L$ düzlemini, alt işaretlerde $z = 0$ düzlemini belirler. Şekil 2.18'den uç düzlemlerin her birindeki kuvvetin y bileşeninin

$$T_y^u dx dy = \mp \iint \tau_{yz} dx dy = \mp \iint \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy \quad (2.22)$$

olduğu görülür. Sonuncu iki katlı integral şöyle hesaplanabilir:

$$T_y^u dx dy = \pm \int_C \left(\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \right) dy = \pm \int_C \left(\int_{x_1}^{x_2} d\phi \right) dy = \pm \int_C (\phi_2 - \phi_1) dy = 0 \quad (2.23)$$



Şekil 2.19: Uç düzlem boyunca integrasyon

Burada $x = x_1(y)$, C sınır eğrisinin sol parçasının; $x = x_2(y)$ ise C sınır eğrisinin sağ parçasının denklemdir(Şekil 2.19).

ϕ_2 ve ϕ_1 , x_1 ve x_2 (sınırdaki) boyunca hesaplandığından, her ikisi de sıfırdır. Eğer C sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere sınır üzerinde $\phi = C$ kabul edilirse, $\phi_2 - \phi_1 = 0$ olacaktır. Benzer şekilde

$$\iint T_x^u dx dy = 0 \quad (2.24)$$

olduğu gösterilebilir. Bu takdirde bileşke kuvvetin her bir uç düzlemdeki x, y bileşeni sıfırdır ve her bir ucun üzerine etkiyen yüze, yükü statik olarak z eksenine göre bir kuvvet çiftine (burulma momenti) eşdeğerdır. Şekil 2.20'de gösterildiği gibi T burulma momenti

$$T = \mp \iint (T_y^u x - T_x^u y) dx dy \quad (2.25)$$

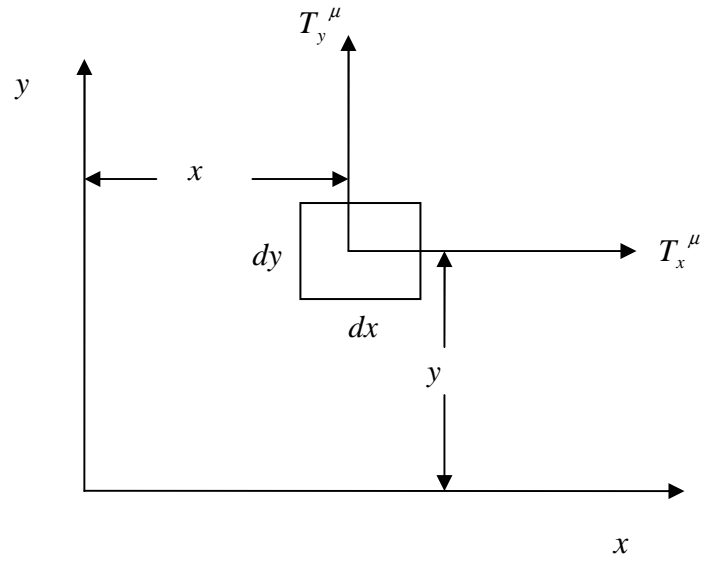
dir. Bu ise ϕ gerilme fonksiyonu cinsinden ifade edilebilir. (2.15) ve (2.21) eşitlikleri (2.25)'te yazılırsa

$$T = - \iint \frac{\partial \phi}{\partial x} x dx dy - \iint \frac{\partial \phi}{\partial y} y dx dy \quad (2.26)$$

elde edilir. Burada kısmi integrasyon kullanılarak ve sınırda $\phi_1 = \phi_2 = 0$ olduğu dikkate alınarak

$$T = 2 \iint \phi dx dy \quad (2.27)$$

elde edilir. (2.27) formülü, burulma momentinin tanımı olarak kabul edilir[13].



Şekil 2.20: Uç düzlemdeki sınır gerilmeler

3. ESNEK OLMAYAN SİLİNDİRİK ÇUBUKLARIN BURULMASININ MATEMATİKSEL MODELİ. DÜZ VE TERS PROBLEMLERİN TANIMLANMASI

3.1. Esnek Olmayan Silindirik Çubuğun Burulmasının Matematiksel Modeli

Altı sabitlenmiş ve eksenini z ' ye paralel olan silindirik çubuk ele alınsın(Bölüm 2, Şekil 2.16). Bu silindirik çubuğun burulmasının matematiksel modeli aşağıdaki denklemlerle ifade edilir[14-17]:

$$Au \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} \left[g(\xi^2) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[g(\xi^2) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right] = -2\theta, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2. \quad (3.1)$$

Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ile ele alınan çubuğun kesiti gösterilmiştir, θ birim uzunluğun burulma açısıdır, $u(x_1, x_2)$ ise Prandtl' in gerilme fonksiyonudur. Ayrıca,

$$\xi^2 = |\nabla u|^2 = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] \text{ gradyanı gerilme yoğunluğunu ifade eder.}$$

Silindirik çubuğun burulmasının matematiksel modelini ifade eden (3.1) kısmi türevli diferansiyel denkleminin temel özelliği lineer olmamasıdır, çünkü $g(\xi^2)$ fonksiyonu u fonksiyonunun türevlerine bağlıdır. $g(\xi^2)$ fonksiyonu malzemenin esneklik özelliklerini tanımlar ve plastiklik fonksiyonu olarak adlandırılır. Deformasyon teorisine göre, $g(\xi^2)$ plastiklik fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar [14]:

$$\begin{aligned}
(a) & 0 < c_0 \leq g(\xi^2) \leq c_1, \forall \xi^2 \in [\xi_*^2, \xi^{*2}], \xi_*^2 > 0 \\
(b) & 0 < c_2 \leq g(\xi^2) + 2\xi^2 g'(\xi^2) \\
(c) & g'(\xi^2) \leq 0, \forall \xi^2 \in [\xi_*^2, \xi^{*2}], \\
(d) & \exists \xi_0^2 \in (\xi_*^2, \xi^{*2}), g(\xi_0^2) = 1/G, \forall \xi^2 \in [\xi_*^2, \xi_0^2].
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Burada G sabiti sertlik modülü, $c_i, i = 0, 1, 2$ sayıları birer pozitif sabit, ξ_0^2 sabiti ise malzemenin esneklik limitidir. (3.2) koşullarını sağlayan fonksiyonlar sınıfı G ile gösterilsin. G kümesine ters problemler ve optimal kontrol teorisinde kabul edilebilir katsayılar kümesi denir[16,17].

Problemin ele alındığı kesitin $S = \partial\Omega$ sınırında sert kenetlenme koşulunun verildiği varsayalım. Bunun anlamı

$$u(x) \equiv 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \partial\Omega \tag{3.3}$$

türdeş Dirichlet sınır koşulunun sağlanmasıdır.

Buradaki matematiksel model, θ burulma açısının artan değerlerine bağlı bir süreç içinde ele alınır. Bu modele literatürde “quazi-statik” model de denir. Böylece burulmanın matematiksel modeli lineer olmayan (3.1) eliptik denklemi için (3.1),(3.3) Dirichlet problemi ile ifade edilir.

3.2. Düz ve Ters Problemlerin Tanımlanması

Eğer yukarıda tanımlanan (3.1), (3.3) problemi belirli bir sınıftan olan çeşitli $g = g(\xi^2)$ fonksiyonları için ele alınırsa, o halde bu problemin tek çözümü olan $u(x), x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ fonksiyonu da buna bağlı olarak değişecektir. Çözümün $g = g(\xi^2)$ fonksiyonuna bu bağımlılığı $u = u(x;g)$ ile gösterilsin. Buna karşılık gelen burulma momenti

$$T[g] = T(u(x; g)) = 2 \iint_{\Omega} u(x; g) dx_1 dx_2 \quad (3.4)$$

olarak tanımlanır (Bkz 2.27). Burada burulma momentinin $T[g]$ olarak gösterilmesinin sebebi, (3.4) tanımından görüldüğü gibi burulma momentinin $g = g(\xi^2)$ fonksiyonuna olan bağlılığına dikkat çekmektir. Bununla beraber, burulma momentinin (3.4) ile verilen tanımına dikkat edilirse, burulma momentinin aslında $T[g] := \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $g \in \mathcal{G}$ şeklinde bir fonksiyonel olarak ta tanımlanabileceği açıktır.

Böylece, eğer malzemenin özelliği belli ise, yani $g = g(\xi^2)$ fonksiyonu verilmiş ise, teorik olarak burulma momenti, (3.1), (3.3) probleminin $u = u(x; g)$ çözümü üzerinden (3.4) formülü ile belirlenebilir.

Belli bir açığa karşılık gelen burulma momentinin deneysel olarak verildiği durumlarda, malzemenin özelliğinin, yani, $g = g(\xi^2)$ fonksiyonunun aranması problemine, çubuğun burulması ile ilgili ters katsayı problemi denir. Matematiksel olarak bu problemi ifade etmek için, burulmanın herhangi bir $\theta \in (\theta_*, \theta^*)$ açısına karşılık gelen deneysel değeri T ile gösterilsin. G katsayılar kümesinden alınan bir $g \in G$ için burulma momentinin bu katsayıya karşılık gelen ve (3.4) ile hesaplanan $T[g]$ teorik değerinin hesaplanarak, T deneysel değeri ile karşılaştırılması gerekir. Dolayısıyla ile T deneysel verisine dayalı ters katsayı problemi

$$T[g] = T, g \in G \quad (3.5)$$

denklemini ifade edilir. $g \in G$ katsayısı verildiği durumda, (3.1), (3.3) sınır değer problemine ise düz problem denir.

3.3. Düz Problem için Klasik ve Zayıf Çözüm Kavramları

(3.1), (3.3) sınır değer problemi ele alınsın. Problemin verildiği Ω bölgesinde (3.1) denklemini sağlayan, aynı zamanda da $\partial\Omega$ sınırında (3.3) koşulunu sağlayan

$u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ fonksiyonuna (3.1), (3.3) probleminin klasik çözümü denir. Pratikte her zaman $u(x)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden sürekli türevleri olmayabilir, buna karşın bu $u(x)$ fonksiyonu (3.1) denklemini ve (3.3) koşulunu sağlayabilir. Bu ve buna benzer durumlarda klasik çözüm kavramı yetersiz kaldığından klasik çözüm kavramının genelleştirilmesi gerekir. Bu noktada zayıf çözüm kavramı ortaya çıkmaktadır. Verilen bir $g \in G$ fonksiyonu için

$$\iint_{\Omega} g(|\nabla u|^2) \nabla u \nabla v \, dx_1 dx_2 = 2\theta \iint_{\Omega} v \, dx_1 dx_2 = \theta T(v), \quad \forall v(x) \in H_0^1(\Omega) \quad (3.6)$$

integral özdeşliğini sağlayan $u(x) \in H_0^1(\Omega)$ fonksiyonuna (3.1), (3.3) probleminin zayıf (genelleşmiş) çözümü denir[16]. Burada (3.6) nın sağ tarafında (3.4) tanımı dikkate alınmıştır ve $T(v)$ yazılımı ile de, burulma momentinin verilen bir $g \in G$ fonksiyonu için v üzerinden aldığı değer gösterilmiştir. Ayrıca, $H_0^1(\Omega)$ uzayı,

$$H^1(\Omega) := \left\{ u(x), x \in \Omega : u \in L_2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), i = \overline{1,2} \right\}$$

ile tanımlanan $H^1(\Omega)$ Sobolev uzayının alt uzayıdır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}.$$

Ayrıca, $L_2(\Omega) = H^0(\Omega)$ ve $H^1(\Omega)$ uzaylarındaki normlar sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\|u\|_0^2 = \iint_{\Omega} u^2 \, dx,$$

$$\|u\|_1^2 = \iint_{\Omega} [u^2 + |\nabla u|^2] \, dx.$$

Teorem 3.1. Eğer, $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ fonksiyonu (3.1), (3.3) probleminin klasik çözümü ise, aynı zamanda zayıf çözümdür. Tersine, eğer, $u(x) \in H_0^1(\Omega)$ fonksiyonu, (3.1), (3.3) probleminin zayıf çözümü ise ve ayrıca $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ koşulunu sağlıyorsa bu fonksiyon aynı zamanda bu problemin klasik çözümdür[18].

Diğer bir ifade ile, $H_0^1(\Omega)$ alt uzayında (3.6) ile tanımlı zayıf çözüm

$$\langle Au, v \rangle = a(u; u, v) = l(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (3.7)$$

denkleminde $u \in H_0^1(\Omega)$ yı bulma problemine denktir. Burada $a(u; v, w)$ ve $l(v)$ fonksiyonelleri sırasıyla

$$a(u; v, w) = \iint_{\Omega} g(|\nabla u|^2) \nabla v \nabla w \, dx_1 dx_2 \quad (3.8)$$

$$l(v) = 2\theta \iint_{\Omega} v \, dx_1 dx_2 \quad (3.9)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1. U Banach uzayı olsun. $J : U \rightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneli için

$$\left. \frac{d}{dt} J(u + tv) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t}, \quad \forall v \in U$$

limiti mevcut ise, J fonksiyoneline $u \in U$ da $v \in U$ yönünde Gateaux diferansiyellenebilir denir[19,20].

Tanım 3.2. $\langle J'(u), v \rangle = \langle Au, v \rangle, \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir $J(u) : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneli varsa, A operatörüne potansiyel operatör, J

fonksiyoneline ise bu operatörün potansiyeli denir. Burada $\langle J'(u), v \rangle$ ile J fonksiyonelinin $u \in U$ da $v \in U$ yönünde birinci Gateaux türevi gösterilmiştir [19,21].

Lemma 3.1. (3.1) ile tanımlanmış A operatörünün potansiyeli

$$J(u) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ \int_0^{|\nabla u|^2} g(\xi) d\xi \right\} dx_1 dx_2 \quad (3.10)$$

olarak tanımlanan fonksiyoneldir [22,23].

İspat. Tanıma göre (3.10) ile tanımlanan fonksiyonelin Gateaux türevi

$$\frac{d}{dt} J(u + tv) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ \int_0^{|\nabla(u+tv)|^2} g(\xi) d\xi \right\} dx_1 dx_2 \right\} \Big|_{t=0}$$

olur. Parantez içindeki ifadenin t ' ye göre tek değişkenli fonksiyon gibi türevi alınır, yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı

$$\frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ 2g(|\nabla(u+tv)|^2) |\nabla(u+tv)| \nabla v \right\} dx_1 dx_2$$

olur. Şimdi $t = 0$ yazılırsa $\langle J'(u), v \rangle = a(u; u, v)$ elde edilir ki Tanım 3.2 göz önüne alındığında lemma ispatlanmış olur.

3.4. Ters Katsayı Probleminin Yaklaşık Çözümü

Önce ters problem için yaklaşık çözümün (veya quazi-çözümün) tanımı verilecektir.

Tanım 3.3.

$$J(g) = \max_{\theta \in (\theta_*, \theta^*)} \left| 2 \iint_{\Omega} u(x; g) dx_1 dx_2 - \mathcal{T} \right|, g \in \mathcal{G} \quad (3.11)$$

fonksiyoneli için

$$J(\tilde{g}) = \inf J(g), g \in \mathcal{G} \quad (3.12)$$

minimizasyon probleminin çözümüne, ters katsayı probleminin yaklaşık çözümü veya quazi çözümü denir[24,25]. Burada $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\theta)$, $\theta \in (\theta_*, \theta^*)$ a karşılık gelen ve deneysel olarak verilen burulma momenti değeridir.

G kabul edilebilir katsayılar kümesinin Sobolev uzaylarında kompaktlığı, (3.11) fonksiyonelinin sürekliliği, böylece de yaklaşık çözümün varlığı (minimizasyon probleminin çözümünün varlığı) literatürde gösterilmiştir[16,22,23]. Aşağıda yaklaşık çözümün varlığı ile ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir

Lemma 3.2. (b)-(c) koşulları sağlandığında $g(\xi^2)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur[26]:

$$[g(\xi^2)\xi - g(\tilde{\xi}^2)\tilde{\xi}](\xi - \tilde{\xi}) \geq \gamma_0 |\xi - \tilde{\xi}|^2, \forall \xi^2, \tilde{\xi}^2 \in [\xi_*^2, \xi^{*2}]$$

Teorem 3.2. (Lebesgue Yakınsaklık Teoremi) $\{f_n\}$ ölçülebilir fonksiyonlar dizisi, $|f_n(x)| \leq g(x)$ olmak üzere integrallenebilir bir f fonksiyonuna noktasal yakınsak

ise, bu taktirde $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = \int f dx$ eşitliği sağlanır.

Teorem 3.3. \mathcal{G} kabul edilebilir katsayılar sınıfı ele alınsın ve $(g_m(\xi^2)) \subset \mathcal{G}$ olsun. Düz problemin, $(g_m(\xi^2)) \subset \mathcal{G}$ dizisine karşılık gelen çözümleri ise $u_m := u(x; g_m) \in H_0^1(\Omega)$, $m = 1, 2, 3, \dots$ olarak gösterilsin. Eğer $g_m(\xi^2) \rightarrow g(\xi^2)$, $m \rightarrow \infty$ (noktasal yakınsak) ise $\|\nabla(u - u_m)\|_0 \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$ yakınsaması sağlanır. Burada, $u(x; g) \in H_0^1(\Omega)$ düz problemin $g(\xi^2)$ limit fonksiyonuna karşılık gelen çözümdür [26].

İspat. Zayıf çözüm kavramından bilindiği gibi (bkz Tanım 3.6) $u(x; g)$, $u(x; g_m)$ zayıf çözümleri sırası ile aşağıdaki integral özdeşlikleri sağlar:

$$\iint_{\Omega} g(|\nabla u|^2) \nabla u \nabla v dx_1 dx_2 = 2\theta \iint_{\Omega} v dx_1 dx_2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

$$\iint_{\Omega} g_m(|\nabla u_m|^2) \nabla u_m \nabla v dx_1 dx_2 = 2\theta \iint_{\Omega} v dx_1 dx_2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

İlk integral özdeşlikte $v = u_m - u$, ikinci integral özdeşlikte ise $v = u - u_m$ yazılıp bu iki integral özdeşlik taraf tarafa toplanırsa

$$\iint_{\Omega} [g_m(|\nabla u_m|^2) \nabla u_m - g(|\nabla u|^2) \nabla u] \nabla (u_m - u) dx_1 dx_2 = 0$$

integral özdeşliği elde edilir. Bu integral özdeşliğe

$$\iint_{\Omega} g_m(|\nabla u|^2) \nabla u \nabla (u_m - u) dx_1 dx_2$$

terimi eklenip çıkarılırsa aşağıdaki integral özdeşlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} [g_m(|\nabla u_m|^2) \nabla u_m - g_m(|\nabla u|^2) \nabla u] \nabla (u_m - u) dx_1 dx_2 \\ &= \iint_{\Omega} [g_m(|\nabla u|^2) - g(|\nabla u|^2)] \nabla u \nabla (u - u_m) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Bu integral özdeşliğin sol tarafına, $\xi = |\nabla u_m|$, $\tilde{\xi} = |\nabla u|$ alınarak Lemma 3.2 uygulanırsa ve sağ tarafına ise L_2 uzaylarında bilinen Cauchy eşitsizliği uygulanırsa

$$c_2 \|\nabla(u - u_m)\|_0^2 \leq \left(\iint_{\Omega} [g_m(|\nabla u|^2) - g(|\nabla u|^2)]^2 |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla(u - u_m)\|_0$$

eşitsizliği, buradan ise her iki taraftan $\|\nabla(u - u_m)\|_0$ terimi sadeleştirilerek

$$c_2 \|\nabla(u - u_m)\|_0 \leq \left(\iint_{\Omega} [g_m(|\nabla u|^2) - g(|\nabla u|^2)]^2 |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte integral içindeki ifadede (a) koşulu dikkate alınırsa, bu integral içindeki ifade için

$$[g_m(|\nabla u|^2) - g(|\nabla u|^2)]^2 |\nabla u|^2 \leq (c_1 - c_0)^2 |\nabla u|^2$$

değerlendirmesi elde edilir. Lebesgue yakınsaklık teoremine göre (3.13) eşitsizliğinin sağ tarafı $m \rightarrow \infty$ iken sıfır olur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1. Yukarıda ispatı verilen teorem, $H_0^1(\Omega)$ uzaylarında $\|u\|_0 \leq c_{\Omega} \|\nabla u\|_0$, $c_{\Omega} = \text{sabit} > 0$ olarak bilinen Poincare eşitsizliği ile birleştirilirse, H^1 normunda $u(x; g_m) \rightarrow u(x; g)$, $m \rightarrow \infty$ yakınsaması elde edilir.

Sonuç 3.2. $u_1 = u[x; g_1] \in H_0^1(\Omega)$ ve $u_2 = u[x; g_2] \in H_0^1(\Omega)$ fonksiyonları sırasıyla $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ ve $x = (x_1, x_2) \in (a, b)$ için (3.1), (3.3) probleminin çözümü olsunlar. Bu takdirde (3.4) ile tanımlı $T[g] := \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyoneli için aşağıdaki değerlendirme doğrudur[27]:

$$\|T[g_1] - T[g_2]\|_{C[\xi^2, \xi^{*2}]} \leq \alpha \|\nabla u_2\|_0 \|g_1 - g_2\|_{C[\xi^2, \xi^{*2}]}, \alpha = 2 \frac{c_\Omega(b-a)}{c_2} > 0.$$

İspat. Bunun için öncelikle $|T[g_1] - T[g_2]|$ farkının değerlendirilmesi gerekir. Üçgen eşitsizliğinden yararlanarak

$$|T[g_1] - T[g_2]| \leq 2 \iint_{\Omega} |u(x; g_1) - u(x; g_2)| dx_1 dx_2$$

yazılabilir. Bu ifadenin sağ tarafında Cauchy eşitsizliği uygulanırsa

$$|T[g_1] - T[g_2]| \leq 2(b-a) \|u_1 - u_2\|_0$$

değerlendirmesi, daha sonra da son eşitsizliğe Poincare eşitsizliği uygulanırsa

$$|T[g_1] - T[g_2]| \leq 2c_\Omega(b-a) \|\nabla(u_1 - u_2)\|_0$$

değerlendirmesi elde edilir. Burada (3.13) eşitsizliğinden faydalanırsa $(g_m = g_1, g = g_2, u_m = u_1, u = u_2)$ istenen sonuç elde edilir.

Bu sonuç, (3.4) ile tanımlı $T[g] := \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonelinin $C[\xi^2, \xi^{*2}]$ normunda sürekliliğini ifade etmesi bakımından önemlidir.

Lemma 3.3. $\{g_n(\xi^2)\} \in \mathcal{G}$ olsun. Bu takdirde $\exists \{g_m(\xi^2)\} \subset (g_n(\xi^2))$ vardır ki $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(\xi^2) = g(\xi^2), \forall \xi^2 \in [\xi^{*2}, \xi^2]$ sağlanır. Ayrıca $g \in \mathcal{G}$ 'dir[26].

Teorem 3.4. Ters katsayı probleminin \mathcal{G} kabul edilebilir katsayılar kümesinde en az bir yaklaşık çözümü vardır. Diğer bir ifade ile (3.12) minimizasyon probleminin \mathcal{G} kabul edilebilir katsayılar kümesinde en az bir çözümü vardır[26].

İspat. (3.11) ile tanımlı $J(g)$ fonksiyonelinin sürekli olduğu gösterilecektir. Bunun için $\{g_m(\xi^2)\} \subset \mathcal{G}$ dizisi ele alınsın. Bu taktirde Lemma 3.3'e göre $\exists\{g_n\} \subset \{g_m\}$ dizisi bulunabilir ki $\|g_n - g\|_C \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ olur. Sonuç 3.1'den H^1 normunda $u(x; g_n) \rightarrow u(x; g), n \rightarrow \infty$ sağlanır. Öte yandan

$$\left| 2 \iint_{\Omega} u(x; g_n) dx_1 dx_2 - T \right| \leq 2 \left| \iint_{\Omega} u(x; g_n) dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} u(x; g) dx_1 dx_2 \right| + \\ + 2 \left| \iint_{\Omega} u(x; g) dx_1 dx_2 - T \right|$$

yazılabilir. Buradan

$$\max_{\theta \in (\theta_*, \theta^*)} \left| 2 \iint_{\Omega} u(x; g_n) dx_1 dx_2 - T \right| \leq 2 \max_{\theta \in (\theta_*, \theta^*)} \left| \iint_{\Omega} u(x; g_n) dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} u(x; g) dx_1 dx_2 \right| + \\ + 2 \max_{\theta \in (\theta_*, \theta^*)} \left| \iint_{\Omega} u(x; g) dx_1 dx_2 - T \right|$$

elde edilir. (3.11) tanımını dikkate alındığında

$$J(g_n) - J(g) \leq \max_{\theta \in (\theta_*, \theta^*)} \left| \iint_{\Omega} u(x; g_n) dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} u(x; g) dx_1 dx_2 \right|$$

olur. g_n ve g lerin rolleri değiştirildiğinde ise

$$J(g) - J(g_n) \leq \max_{\theta \in (\theta_*, \theta^*)} \left| \iint_{\Omega} u(x; g_n) dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} u(x; g) dx_1 dx_2 \right|$$

olacaktır. Dolayısı ile

$$|J(g) - J(g_n)| \leq \max_{\theta \in (\theta_*, \theta^*)} \left| \iint_{\Omega} u(x; g_n) dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} u(x; g) dx_1 dx_2 \right|$$

değerlendirmesi elde edilir. Burada $n \rightarrow \infty$ için limite geçilirse ve yukarıda söylenenler dikkate alınırsa $J(g_n) \rightarrow J(g)$ yakınsaması elde edilir. Lemma 3.3 ve $J(g)$ fonksiyonelinin sürekli olması dikkate alındığında Weierstrass teoremine göre (3.12) minimizasyon probleminin çözümünün var olduğu sonucuna ulaşılır. Böylece ters problemin yaklaşık (quazi) çözümünün varlığı ispatlanmış olur.

3.5. Esnek Çubuğun Burulması Probleminin Çözümü

Bu kısımda kesiti, kenar uzunlukları $a, b > 0$ olan bir dikdörtgen için esnek çubuğun burulması problemi ele alınacak ve bu problem kısmi türevli denklemlerin çözülmesinde sık kullanılan bir yöntem olan değişkenlere ayırma yöntemi ile çözülecektir. Sonuçta, dikdörtgen bölgede esnek çubuğun burulma momenti; burulma açısı, sertlik modülü ve çubuğun kesitinin geometrisi cinsinden bulunacak ve çubuğun kesitinin geometrisi ile ilgili analizler elde edilecektir. Burada gösterimde kolaylık olması açısından x_1, x_2 değişkenleri sırası ile x, y ile gösterilecektir. Bu amaçla aşağıdaki problem ele alınsın:

$$\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} = 2G\theta, & (x, y) \in \Omega = (0, a) \times (0, b) \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.14)$$

Bu durumda burulma momentinin hesaplanması için (3.14) probleminin $u(x, y)$ çözümünün elde edilmesi gerekir. Bu problemin değişkenlere ayırma yöntemi ile çözülmesi için aşağıdaki dönüşüm yapılsın:

$$v(x, y) = u(x, y) + G\theta x^2. \quad (3.15)$$

Bu dönüşüm ve (3.14) problemi kullanılarak, $v(x, y)$ cinsinden aşağıdaki problem elde edilir:

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0, & (x, y) \in (0, a) \times (0, b), \\ v(x, 0) = G \theta x^2, & x \in (0, a), \\ v(x, b) = G \theta x^2, & x \in (0, a), \\ v(0, y) = 0, & y \in (0, b), \\ v(a, y) = G \theta a^2, & y \in (0, b), \end{cases} \quad (3.16)$$

(3.16) probleminin (3.14) probleminden temel farkı, (3.14) problemindeki denklemin sağ tarafının (3.16) problemindeki denkleme kaybolması daha doğrusu sınırlara taşınmış olmasıdır. Diğer bir ifade ile, (3.14) problemindeki Poisson denklemi (3.16) probleminde Laplace denklemine dönüşmüştür. (3.16) Laplace probleminin değişkenlere ayırma yöntemi ile çözümü daha basittir.

(3.16) probleminin çözümü değişkenlere ayırma yöntemi ile şöyle verilir[28-30]:

$$\begin{aligned} v(x, y) = & \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left(\frac{n\pi(a-x)}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(b-y)}{a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

$v(0, y) = f_1(y)$, $v(a, y) = f_2(y)$, $v(x, 0) = f_3(x)$, $v(x, b) = f_4(x)$ olmak üzere

A_n, B_n, C_n, D_n katsayıları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\lambda_n} \int_0^b f_1(\xi) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{b}\right) d\xi, \\ B_n &= \frac{2}{\lambda_n} \int_0^b f_2(\xi) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{b}\right) d\xi, \\ C_n &= \frac{2}{\mu_n} \int_0^a f_3(\xi) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right) d\xi, \\ D_n &= \frac{2}{\mu_n} \int_0^a f_4(\xi) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right) d\xi. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Burada, $\lambda_n = b \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)$, $\mu_n = a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)$ dır. Şimdi bu katsayılar hesaplanacaktır:

$$\begin{aligned}
 A_n &= 0, \\
 B_n &= \frac{2}{\lambda_n} G \theta a^2 \underbrace{\int_0^b \sin\left(\frac{n\pi\xi}{b}\right) d\xi}_{I_1}, \\
 C_n = D_n &= \frac{2}{\mu_n} G \theta \underbrace{\int_0^b \xi^2 \sin\left(\frac{n\pi\xi}{b}\right) d\xi}_{I_2},
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

(3.19)'daki integraller hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi\xi}{b}\right) d\xi = -\frac{b[-1 + (-1)^n]}{n\pi} \\
 I_2 &= \int_0^b \xi^2 \sin\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right) d\xi = -\frac{a^3[2 - 2(-1)^n + n^2\pi^2(-1)^n]}{n^3\pi^3}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu yerine (3.19)'da yazılırsa, A_n, B_n, C_n, D_n katsayıları şöyle bulunur:

$$\begin{aligned}
 A_n &= 0, \\
 B_n &= -\frac{2}{\lambda_n} \frac{G \theta a^2 b[-1 + (-1)^n]}{n\pi} \\
 C_n = D_n &= -\frac{2}{\mu_n} \frac{G \theta a^3[2 - 2(-1)^n + n^2\pi^2(-1)^n]}{n^3\pi^3}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

(3.15) dönüşümü sonucu burulma momenti $v(x, y)$ çözümü üzerinden aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
T &= 2 \int_0^a \int_0^b u(x, y) dx dy = 2 \int_0^a \int_0^b (v(x, y) - G \theta x^2) dx dy \\
&= 2 \int_0^a \int_0^b v(x, y) dx dy - \frac{2}{3} G \theta a^3 b.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Bu nedenle öncelikle $I = \int_0^a \int_0^b v(x, y) dx dy$ integralinin hesaplanması gerekir.

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^a \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \int_0^b \sinh\left(\frac{n\pi(b-y)}{a}\right) dy \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} D_n \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \int_0^b \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) dy.
\end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadede integraller hesaplanırsa ve (3.20)'deki katsayılar yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n} \frac{G\theta a^2 b^3}{n^3 \pi^3} [-1 + (-1)^n]^2 \left[\cosh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) - 1 \right] \\
&+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n} \frac{G\theta a^5}{n^5 \pi^5} [2 - 2(-1)^n + n^2 \pi^2 (-1)^n] [-1 + (-1)^n]^2 \left[\cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) - 1 \right].
\end{aligned} \tag{3.22}$$

elde edilir. Son olarak, (3.22)'de $\lambda_n = b \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)$, $\mu_n = a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)$ olduğu

dikkate alınır ve ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}
I &= \frac{2G\theta a^2 b^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-1 + (-1)^n]^2 \left[\cosh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) - 1 \right]}{n^3 \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \\
&+ \frac{4G\theta a^4}{\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-1 + (-1)^n] [2 + (-1)^n (n^2 \pi^2 - 2)] \left[\cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) - 1 \right]}{n^5 \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

elde edilir. (3.23)'te elde edilen serilerin toplamı MATLAB yardımı ile yaklaşık olarak bulunabilir. (3.23), (3.21)'de dikkate alınırsa esnek malzemeler için çubuğun burulma momenti çeşitli dikdörtgen kesitlerde hesaplanabilir. Bunun için öncelikle $a = b$ durumu, yani çubuğun kesitinin kare olması durumu ele alınsın. Bu takdirde (3.23) ifadesi aşağıdaki şekli alır:

$$I = \frac{2G\theta a^4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-1 + (-1)^n]^2 [\cosh(n\pi) - 1]}{n^3 \sinh(n\pi)} + \frac{4G\theta a^4}{\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-1 + (-1)^n] [2 + (-1)^n (n^2 \pi^2 - 2)] [\cosh(n\pi) - 1]}{n^5 \sinh(n\pi)}. \quad (3.24)$$

MATLAB yardımı ile 3.24'te görülen birinci serinin toplamı yaklaşık olarak 3.8758, ikinci serinin toplamı ise 11.753 bulunur. O halde

$$I = \frac{2G\theta a^4}{\pi^3} \times 3.8758 + \frac{4G\theta a^4}{\pi^5} \times 11.753 = 0.4036G\theta a^4 \quad (3.25)$$

elde edilir. Bu (3.21)'de göz önüne alınırsa,

$$T = 0.1406G\theta a^4 \quad (3.26)$$

bulunur. (3.26) formülü ele alınan esnek çubuğun kesitinin kare olması durumunda burulma momentinin analitik ifadesidir[31-33].

Genel olarak, çubuğun kesitine bağlı olarak değişecek olan burulma momenti aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$T = kG\theta a^4. \quad (3.27)$$

Aşağıdaki tabloda $\frac{b}{a}$ oranına bağlı olarak (3.7) formülündeki k sayısına karşılık gelen değerler verilmiştir. Bunlar hesaplanırken $\frac{b}{a}$ değerinin hem (3.21)'de hem de (3.24)'te dikkate alınması gerekir.

Tablo 3.1: Çubuğun kesitinin geometrisi ile burulma momenti arasındaki ilişki

b/a	k	b/a	k
1.0	0.1406	6.0	1.7894
2.0	0.4580	7.0	2.1229
3.0	0.7890	8.0	2.4562
4.0	1.1240	9.0	2.7892
5.0	1.4550	10.0	3.1200

4. LİNEER OLMAYAN DÜZ PROBLEMİN MONOTON OPERATÖRLER TEORİSİ KAPSAMINDA İNCELENMESİ

Bu bölümde öncelikle monoton operatörlerle ilgili temel kavramlar ve teoremler verilecektir. Daha sonra ise ikinci bölümde tanımlanan düz problem monoton operatörler teorisi kapsamında incelenerek hem bir takım değerlendirmeler elde edilecek hem de yaklaşık çözümün gerçek çözüme yakınsaması ile ilgili teoremler verilecektir.

4.1. Monoton Operatörlerle İlgili Temel Kavramlar

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun ve $f(x) = y$ denklemi verilsin. Bu takdirde, $\forall y \in \mathbb{R}$ için bu denklemin tek bir çözümünün olması için şu koşulların sağlanması gerekir: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu kesin monoton olmalıdır (kesin artan ya da kesin azalan) ve $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ eşitliği sağlanmalıdır. Bu sonuç, aşağıdaki gibi vektör değerli fonksiyonlar içinde ifade edilebilir. Bunun için öncelikle sonradan kullanılacak olan aşağıdaki lemmanın ifade ve ispat edilmesi gerekmektedir.

Lemma 4.1. $B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ r yarıçaplı kapalı küre olmak üzere, $f : B_r(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyonu $f(x) \cdot x > 0, |x| = r$ eşitsizliğini sağlıyorsa, bu takdirde $f(x)$ fonksiyonu $B_r(0)$ içindeki bazı noktalarda sıfıra eşittir[34,35].

İspat. Bu lemma fonksiyonel analizde (özellikle lineer olmayan fonksiyonel analiz) çok sık kullanıldığından, ispatı iki farklı yolla verilecektir:

Birinci yol: Tersini varsayalım, yani $f(x)$ fonksiyonu $B_r(0)$ içindeki hiçbir noktada sıfıra eşit olmasın, bu takdirde $H(t, x) = (1-t)x + tf(x)$ fonksiyonu bazı $(t_0, x_0) \in (0,1) \times \partial B_r(0)$ noktaları için sıfıra eşittir. Bu takdirde,

$$0 = H(t_0, x_0)x_0 = (1-t_0)x_0 + t_0f(x_0)$$

elde edilir ki, hipotez gereği $f(x_0)x_0 > 0$ olduğundan bu bir çelişkidir.

İkinci yol: Bu ispat esasen Brouwer sabit nokta teoremine dayandığından, öncelikle bu teoremin verilmesi gerekir: $f : B_r(0) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sürekli bir dönüşüm ise bu dönüşümün sabit noktası vardır. İspat için yine tersini varsayalım. Bu takdirde Brouwer sabit nokta teoremine göre $x \rightarrow -r \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$ dönüşümünün sabit noktası vardır. Yani,

$$x_0 = -r \frac{f(x_0)}{\|f(x_0)\|}. \text{ Dikkat edilirse } \|x_0\| = r \text{ dir. Buradan, } f(x_0)x_0 = -\|f(x_0)\| \text{ elde edilir}$$

ki, bu ise hipotezle çelişir.

Böylece Lemma 4.1 iki farklı yoldan ispatlandı.

Lemma 4.2. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyonu eğer $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)x}{|x|} = \infty$ eşitliğini

sağlıyorsa, bu takdirde $\forall y \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) = y$ denklemini bir çözüme sahiptir. Eğer f kesin monoton ise yani, $(f(x) - f(y))(x - y) > 0, x \neq y$ eşitsizliği sağlanıyor ise bu çözüm tektir[34].

İspat. Varsayım gereği, yeterince büyük $|x|$ ler için $G(x) = f(x) - y$ fonksiyonu $G(x)x = f(x)x - yx > 0$ eşitsizliğini sağlar. Böylece, $G(x)$ fonksiyonuna Lemma 4.1 uygulanarak istenen elde edilir. f fonksiyonunun kesin monoton olması durumunda ise çözümün tekliği açıktır.

Tanım 4.1. H Hilbert uzayı olmak üzere $A : H \rightarrow H$ operatörü verilsin.

(i) $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0, \forall u, v \in H$ ise A operatörüne monoton operatör denir;

(ii) $\langle Au - Av, u - v \rangle > 0, \forall u, v \in H, u \neq v$ ise A operatörüne kesin monoton operatör denir;

(iii) $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq c\|u - v\|^2, \forall u, v \in H, u \neq v$ olacak şekilde $\exists c > 0$ sayısı var ise A operatörüne güçlü monoton operatör denir;

(iv) $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq g(\|u - v\|)\|u - v\|, \forall u, v \in H$ olacak şekilde monoton artan ve $g(0) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = +\infty$ koşullarını sağlayan $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu varsa, A operatörüne düzgün monoton operatör denir;

(v) $\|u\| \rightarrow \infty$ olduğunda $\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|} \rightarrow \infty$ oluyorsa A operatörüne koersiv operatör denir;

(vi) $\forall u \in H$ için $\langle Au, u \rangle \geq 0$ koşulu sağlanıyorsa A operatörüne pozitif operatör denir;

(vii) $\forall u \in H, u \neq 0$ için $\langle Au, u \rangle > 0$ koşulu sağlanıyorsa, A operatörüne kesin pozitif operatör denir;

(viii) $\forall u \in H$ için $\langle Au, u \rangle > c\|u\|^2$ olacak şekilde $\exists c > 0$ sayısı var ise A operatörüne güçlü pozitif operatör denir;

(ix) $\forall u, v \in H$ için $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$ ise A operatörüne simetrik operatör denir.

X uzayı bir Banach uzayı olmak üzere, $A : X \rightarrow X^*$ operatörü için, benzer şekilde yukarıdaki tanımların verilebileceği açıktır[19,20].

Monoton operatör ve monoton fonksiyon kavramlarının tanımlarının birbirine benzerliğini göstermek amacıyla $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ele alınsın. Eğer $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu monoton artan (azalan) ise,

$$x_1 < x_2 \text{ ise } f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2)), \quad x_1, x_2 \in [a, b]$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bunlar

$$(f(x_1) - f(x_2))(x_1 - x_2) \geq 0$$

olarak yeniden yazılırsa, monoton operatör ve monoton fonksiyon kavramlarının tanım olarak benzer olduğu görülür.

Teorem 4.1. H Hilbert uzayı olmak üzere $A : H \rightarrow H$ operatörü verilsin.

(i) A operatörü için aşağıdaki ilişkiler doğrudur:

Güçlü monoton \Rightarrow Düzgün monoton \Rightarrow Kesin monoton \Rightarrow Monoton.

(ii) A operatörü düzgün monoton ise koersivdir[19].

İspat.

(i) A güçlü monoton olsun, bu takdirde $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq c\|u - v\|^2, \forall u, v \in H$ olacak şekilde $\exists c > 0$ sayısı vardır. $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $g(t) = ct$ olarak tanımlanırsa (açıktır ki bu fonksiyon monoton artandır ve $g(0) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = +\infty$ koşullarını sağlar) $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq g(\|u - v\|)\|u - v\|, \forall u, v \in H$ yazılabilir. Bu ise

A operatörünün düzgün monoton olduğu anlamına gelir. A operatörünün düzgün monoton olması durumunda kesin monoton olması, kesin monoton olması durumunda da monoton olması tanımlardan açıkça görülür.

(ii) A operatörü düzgün monoton olsun. İç çarpımın özellikleri gereği

$$\langle Au, u \rangle = \langle Au - A(0), u \rangle + \langle A(0), u \rangle$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitliğin sağ tarafında, A operatörünün düzgün monoton olması ve Cauchy-Schwartz eşitsizliği kullanılırsa

$$\langle Au, u \rangle \geq g(\|u\|)\|u\| - \|A(0)\|\|u\|$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada her iki taraf $\|u\|$ ile bölünürse ve $\|u\| \rightarrow \infty$ limite geçilirse, $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = +\infty$ olduğundan istenen elde edilir.

Teorem 4.2. X bir reel Banach uzayı olmak üzere $A : X \rightarrow X^*$ operatörü ve $f(t) = \langle A(u + tv), v \rangle$, $t \in \mathbb{R}$, $u, v \in X$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir[19]:

(a) A operatörü monotonudur.

(b) $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall u, v \in X$ için monoton artandır.

İspat.

(a) \Rightarrow (b) A operatörü monoton olsun. Bu takdirde $0 \leq s < t$ için

$f(t) - f(s) = (t - s)^{-1} \langle A(u + tv) - A(u + sv), (t - s)v \rangle \geq 0$ olduğundan istenen elde edilir.

(b) \Rightarrow (a) $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall u, v \in X$ için monoton artan olsun. Bu takdirde $\langle A(u + tv) - Au, v \rangle = f(1) - f(0) \geq 0$ olduğundan istenen elde edilir.

Tanım 4.2. X bir reel Banach uzayı olmak üzere $A : X \rightarrow X$ dönüşümü $\|Au - Av\| \leq \alpha \|u - v\|$, $\alpha \in (0,1)$, $\forall u, v \in X$ eşitsizliğini sağlıyorsa, $A : X \rightarrow X$ dönüşümüne daralma dönüşümü denir.

Teorem 4.3. (Banach sabit nokta teoremi) X bir reel Banach uzayı olmak üzere $A : X \rightarrow X$ dönüşümü daralma dönüşümü ise bu takdirde $Au_0 = u_0$ olacak şekilde bir tane $u_0 \in X$ vardır.

Burada $u_0 \in X$ e A dönüşümünün sabit noktası denir.

Teorem 4.4. (Zarantonello) H Hilbert uzayı olmak üzere $A : H \rightarrow H$ sürekli operatörü verilsin. Eğer A operatörü güçlü monoton operatör ise ve Lipschitz koşulunu sağlıyorsa bu takdirde $\forall y \in H$ için $Ax = y$ denkleminin tek bir $x \in H$ çözümü vardır[19,34].

İspat. $t > 0$ olmak üzere $G(x) = x - t(Ax - y)$ dönüşümü tanımlansın. Açıktır ki, bu dönüşümün sabit noktasını bulma problemi ile $Ax = y$ denklemini çözme problemi eşdeğerdir. Gerçekten, $Ax = y$ olması, G dönüşümünün tanımından görüleceği gibi, $G(x) = x$ olması anlamına gelmektedir. Banach sabit nokta teoreminden faydalanılması için G dönüşümünün daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir. A dönüşümünün $L > 0$ Lipschitz sabiti olmak üzere, $\|Ax - Ay\| \leq L\|x - y\|$ Lipschitz koşulunu sağladığı ve güçlü monoton olduğu göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} \|G(x) - G(y)\|^2 &= \|x - y\|^2 - 2t \langle f(x) - f(y), x - y \rangle + t^2 \|f(x) - f(y)\|^2 \\ &\leq (1 - 2ct + L^2 t^2) \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. G dönüşümünün daralma dönüşümü olması için parantez içindeki ifadenin birden küçük olması gerektiğinden $t \in \left(0, \frac{2C}{L^2}\right)$ seçilerek ispat tamamlanır.

Tanım 4.3. X normlu uzay ve $u_n \in X$ bir dizi olsun. Eğer $\forall f \in X^*$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(u)$ ise, $u_n \in X$ dizisi $u \in X$ e zayıf yakınsar denir ve $u_n \mapsto u$ olarak gösterilir.

Hilbert uzaylarında Riesz's gösterim teoremine göre, her bir f lineer fonksiyoneli iç çarpımla gösterilebilir: $f(x) = \langle x, z \rangle, z \in H$. Buna göre, zayıf yakınsaklık tanımı Hilbert uzaylarında aşağıdaki şekilde ifade edilebilir[36]:

$$u_n \mapsto u \Leftrightarrow \langle u_n, v \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle, \forall v \in H.$$

Tanım 4.4. X reel Banach uzayı olmak üzere, $A : X \rightarrow X^*$ operatörü verilsin.

(i) A operatörüne d -süreklidir denir $\Leftrightarrow u_n \rightarrow u, n \rightarrow \infty$ iken $Au_n \mapsto Au, n \rightarrow \infty$.

(ii) A operatörüne h -süreklidir denir $\Leftrightarrow \forall t \in [0,1], u, v, w \in X$ için $t \rightarrow \langle A(u + tv), w \rangle$ reel fonksiyonu süreklidir.

(iii) A operatörüne güçlü süreklidir denir $\Leftrightarrow u_n \mapsto u, n \rightarrow \infty$ iken $Au_n \rightarrow Au, n \rightarrow \infty$.

(iv) A operatörüne sınırlıdır denir $\Leftrightarrow A$ operatörü sınırlı kümeyi, sınırlı kümeye dönüştürür[19].

Teorem 4.5. (Browder-Minty) X reel, ayrılabilir ve refleksiv Banach uzayı olmak üzere, $Au = b, u \in X$ operatör denklemi verilsin. Eğer $A : X \rightarrow X^*$ operatörü monoton, koersiv ve h-sürekli ise bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğrudur[19]:

(i) $\forall b \in X^*$ için $Au = b, u \in X$ operatör denkleminin çözümü vardır. Ayrıca, bu operatör denklemin çözüm kümesi sınırlı, konveks ve kapalı bir kümedir.

(ii) $A : X \rightarrow X^*$ operatörü kesin monoton ise, $Au = b, u \in X$ operatör denkleminin X de tek bir çözümü vardır.

(iii) $A : X \rightarrow X^*$ operatörü kesin monoton ise bu takdirde $A^{-1} : X^* \rightarrow X$ ters operatörü mevcuttur. Ayrıca bu ters operatör kesin monoton, d-sürekli ve sınırlıdır.

(iv) $A : X \rightarrow X^*$ operatörü düzgün monoton ise A^{-1} ters operatörü süreklidir; eğer güçlü monoton ise A^{-1} ters operatörü Lipschitz süreklidir.

Teorem 4.6. X normlu uzay olmak üzere $A : X \rightarrow X^*$ operatörü verilsin. A operatörünün güçlü monoton olması için gerek ve yeter koşul, A operatörünün potansiyeli olan J fonksiyonelinin kesin dışbükey olmasıdır[20].

4.2. Yaklaşık Çözümün Tanımlanması ve Yakınsama Teoremleri

Bu bölümde Browder-Minty teoreminden yararlanılarak (3.7) lineer olmayan probleminin çözümünün varlığı ve tekliği gösterilecektir. Daha sonra ise yaklaşık çözümün gerçek çözüme yakınsaması ile ilgili teoremler verilecektir. Son olarak, verilen teoremlerden yararlanılarak, u_n yaklaşık çözümü için temel hata değerlendirmesi elde edilecektir.

Bu amaçla öncelikle (3.1) ile tanımlı A operatörünün, (3.10) ile tanımlanmış $J(u)$ potansiyelinin ikinci mertebeden türevinin hesaplanması gerekmektedir. $J(u)$ nun ikinci mertebeden Gateaux türevi hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
J'(u; v, h) &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left[g(|\nabla u + t\nabla h|^2) |\nabla u + t\nabla h| |\nabla v| \right] dx_1 dx_2 \Big|_{t=0} \\
&= \int_{\Omega} \left[2g'(|\nabla u + t\nabla h|^2) |\nabla u + t\nabla h| \nabla h |\nabla u + t\nabla h| |\nabla v| + g(|\nabla u + t\nabla h|^2) \nabla h \nabla v \right] dx_1 dx_2 \Big|_{t=0} \\
&= \int_{\Omega} \left[g(|\nabla u|^2) \nabla v \nabla h + 2g'(|\nabla u|^2) \nabla u \nabla h \nabla u \nabla v \right] dx_1 dx_2
\end{aligned} \tag{4.1}$$

bulunur, burada $h = v$ alınırsa,

$$J''(u; v, v) = \int_{\Omega} \left[g(|\nabla u|^2) |\nabla v|^2 + 2g'(|\nabla u|^2) \nabla u \nabla v \right] dx_1 dx_2 \tag{4.2}$$

elde edilir. (4.2) eşitliğinde $g = g(\xi^2)$ fonksiyonunun $g(\xi^2) + 2g'(\xi^2)\xi^2 \geq c_2 > 0$ koşulunu sağladığı dikkate alınırsa

$$J''(u; v, v) \geq c_2 \|\nabla v\|_0^2, \quad c_2 > 0 \tag{4.3}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Bu eşitsizliğin sağ tarafında $\|v\|_1^2 = \|\nabla v\|_0^2 + \|v\|_0^2$ normunun elde edilmesi için $\|\nabla v\|_0^2$ terimi $\|\nabla v\|_0^2 = \sigma \|\nabla v\|_0^2 + (1 - \sigma) \|\nabla v\|_0^2$ olarak yazılıp $c_{\Omega} > 0$ Poincare sabiti olmak üzere Poincare eşitsizliği uygulanırsa

$$\|\nabla v\|_0^2 = \sigma \|\nabla v\|_0^2 + (1 - \sigma) \|\nabla v\|_0^2 \geq \sigma \|\nabla v\|_0^2 + \frac{1 - \sigma}{c_{\Omega}^2} \|v\|_0^2 \tag{4.4}$$

elde edilir. Burada $\|v\|_1^2$ normunun elde edilmesi için, $\|\nabla v\|_0^2$ ve $\|v\|_0^2$ normlarının katsayılarının eşitlenmesi gerekir. O halde

$$\sigma = \frac{1 - \sigma}{c_{\Omega}^2}$$

denklemden elde edilen $\sigma = \frac{1}{1+c_\Omega^2}$ değeri (4.4)'te yazılırsa

$$\|\nabla v\|_0^2 = \sigma \|\nabla v\|_0^2 + (1-\sigma) \|\nabla v\|_0^2 \geq \sigma \|\nabla v\|_0^2 + \frac{1-\sigma}{c_\Omega^2} \|v\|_0^2 = \frac{1}{1+c_\Omega^2} \|v\|_1^2, \sigma \in [0,1] \quad (4.5)$$

eşitsizliği bulunur. Buradan,

$$J''(u; v, v) \geq \frac{c_2}{1+c_\Omega^2} \|v\|_1^2, \frac{c_2}{1+c_\Omega^2} > 0 \quad (4.6)$$

eşitsizliği elde edilir[23]. Bu ise $J(u)$ fonksiyonelinin güçlü dış bükeyliği anlamına gelir[20]. Buradan

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq \frac{c_2}{1+c_\Omega^2} \|u - v\|_1^2, u, v \in H_0^1(\Omega), c_2, c_\Omega > 0 \quad (4.7)$$

yazılabilir ki, bu ise A operatörünün güçlü monoton olması anlamına gelir; Teorem 4.1'e göre ise A operatörü aynı zamanda koersivdir.

A operatörünün h -sürekli olduğunun gösterilmesi için $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ alınsın ve $t_n \rightarrow t, n \rightarrow \infty$ olsun. Basitlik için $\alpha_n = u + t_n v, \alpha = u + tv$ kabul edilsin. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \langle A\alpha_n, w \rangle &= \iint_{\Omega} g(|\nabla \alpha_n|^2) \nabla \alpha_n \nabla w dx_1 dx_2 = \underbrace{\iint_{\Omega} g(|\nabla \alpha|^2) \nabla \alpha \nabla w dx_1 dx_2}_{\langle A\alpha, w \rangle} \\ &+ \iint_{\Omega} g(|\nabla \alpha_n|^2) \nabla \alpha_n \nabla w dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} g(|\nabla \alpha|^2) \nabla \alpha \nabla w dx_1 dx_2 \\ &+ \iint_{\Omega} g(|\nabla \alpha_n|^2) \nabla \alpha \nabla w dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} g(|\nabla \alpha_n|^2) \nabla \alpha \nabla w dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \langle A\alpha_n, w \rangle &= \langle A\alpha, w \rangle + \iint_{\Omega} g(|\nabla\alpha_n|^2) (\nabla\alpha_n - \nabla\alpha) \nabla w dx_1 dx_2 \\ &\quad + \iint_{\Omega} (g(|\nabla\alpha_n|^2) - g(|\nabla\alpha|^2)) \nabla\alpha \nabla w dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $n \rightarrow \infty$ için limite geçilirse ve g fonksiyonunun sürekliliği dikkate alınırsa $\langle A(u + t_n v), w \rangle \rightarrow \langle A(u + tv), w \rangle$ elde edilir, böylece A operatörünün h -sürekli olduğu ispatlandı. Böylece, Browder-Minty teoreminden yararlanılarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.7. $g = g(\xi^2)$ katsayısının (a) ve (b) koşullarını sağlaması durumunda (3.7) lineer olmayan problemi $H^1(\Omega)$ da tek çözüme sahiptir.

Tanım 4.5. A operatörüne karşılık gelen bilineer fonksiyonel $a(u; v, w)$ ve A operatörünün potansiyeli olan fonksiyonel J olmak üzere,

$$0.5a(u; v, v) - 0.5a(u; u, u) - J(v) + J(u) \geq 0, u, v \in X \quad (4.8)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, A operatörü için 'dışbükeylik prensibi' sağlanır denir [37].

Tanım 4.6. A operatörüne karşılık lineer fonksiyonel $l(u)$ ve A operatörünün potansiyeli olan fonksiyonel $J(u)$ olmak üzere,

$$\Pi(u) = J(u) - l(u), u \in X \quad (4.9)$$

fonksiyoneline, (3.1),(3.3) lineer olmayan probleminin potansiyeli denir [37,38].

Tanım 3.2 ve Tanım 4.6'dan görüldüğü gibi, operatörün potansiyeli ile problemin potansiyeli kavramları birbirinden farklıdır.

Tanım 4.7. (3.1),(3.3) lineer olmayan probleminin zayıf çözümü olarak tanımlanan (3.7) probleminin yaklaşık çözümü,

$$a(u_{n-1}; u_n, v) = l(v), \quad u, v \in H_0^1(\Omega), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.10)$$

olarak tanımlanır. Burada $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ başlangıç iterasyonudur[37].

(4.10) iterasyon şeması (3.7) lineer olmayan problemi için bir lineerleştirme olarak tanımlanır. (4.10) lineerleştirilmiş problemin potansiyeli ise

$$\Pi(u_n) = 0.5a(u_{n-1}; u_n, u_n) - l(u_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.11)$$

olarak tanımlanır[37].

Teorem 4.8. A monoton potansiyel operatörü için (4.8) dışbükeylik prensibi sağlansın ve $\{u_n\}$ dizisi ise yaklaşık çözümler dizisi olsun. O halde, (4.11) ile tanımlanan $\{\Pi(u_n)\}$ sayısal dizisi monoton azalandır[37].

İspat. (4.8) eşitsizliğinde u yerine u_{n-1} , v yerine de u_n yazılırsa

$$0.5a(u_{n-1}; u_n, u_n) - 0.5a(u_{n-1}; u_{n-1}, u_{n-1}) - J(u_n) + J(u_{n-1}) \geq 0 \quad (4.12)$$

elde edilir.

$u_{n-1} \in U$ verilen bir fonksiyon $a(u_{n-1}; \dots)$ ise simetrik ve bilinear form olduğu için, (4.10) lineerleştirilmiş probleminin çözümü aynı zamanda

$$0.5a(u_{n-1}; u_n, u_n) - l(u_n) = \inf \{0.5a(u_{n-1}; v, v) - l(v)\}, \quad v \in X \quad (4.13)$$

en küçük değer probleminin çözümüdür. Burada $v \in X$ keyfi olduğundan $v = u_n$, $u_n = u_{n-1}$ alınırsa

$$0.5a(u_{n-1}; u_{n-1}, u_{n-1}) - I(u_{n-1}) - [0.5a(u_{n-1}; u_n, u_n) - I(u_n)] \geq 0 \quad (4.14)$$

olur. (4.12) ve (4.14) eşitsizlikleri taraf tarafa toplandığında,

$$J(u_{n-1}) - I(u_{n-1}) - [J(u_n) - I(u_n)] \geq 0 \quad (4.15)$$

elde edilir. Tanım 4.6 dikkate alındığında

$$\Pi(u_{n-1}) \geq \Pi(u_n), n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.16)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu da $\{\Pi(u_n)\}$ sayısal dizisinin monoton azalan olduğunu gösterir.

Ayrıca, $g(\xi^2)$ fonksiyonunun sınırlı olduğu durumda (3.1), (3.3) ile tanımlanmış lineer olmayan problemin $\Pi(u)$ potansiyelinin alttan sınırlı olduğu aşağıdaki şekilde ispatlanabilir:

Lemma 4.4. Eğer $c_1 \geq g(\xi^2) \geq c_0 > 0$ ise o halde (3.1) ile tanımlanmış lineer olmayan problemin

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ \int_0^{|\nabla u|^2} g(\xi) d\xi \right\} dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} 2\theta u dx_1 dx_2$$

potansiyeli alttan sınırlıdır [38-40].

İspat. $\Pi(u)$ potansiyelinin sağ tarafındaki ilk integralin içinde $g(\xi^2) \geq c_0$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\Pi(u) \geq \frac{1}{2} c_0 \iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} 2\theta u dx_1 dx_2.$$

elde edilir. Daha sonra bu defa sağ taraftaki ikinci integrale Cauchy eşitsizliği uygulanırsa

$$\Pi(u) \geq \frac{1}{2} c_0 \|\nabla u\|_0^2 - \|2\theta\|_0 \|u\|_0, \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

değerlendirmesi elde edilir. Bu ise $\Pi(u)$ fonksiyonelinin alttan sınırlı olması anlamına gelir. Böylece aşağıdaki lemma ispatlanmış oldu.

Lemma 4.5. (4.10) lineerleştirilmiş probleminin (4.11) ile tanımlanmış olan $\{\Pi(u_n)\}$ potansiyeller dizisi yakınsak dizidir.

Potansiyeller dizisinin yakınsak olmasından yararlanılarak, $u_n \in H_0^1(\Omega)$ yaklaşık çözümler dizisinin (3.7) lineer olmayan probleminin tek çözümü olan $u \in H_0^1(\Omega)$ ya $H^1(\Omega)$ normunda yakınsaması ve hata değerlendirmesi aşağıdaki teoremle verilir..

Teorem 4.9. $g = g(\xi^2)$ katsayısı (a)-(c) koşullarını sağlasın. Buna göre $u_n \in H_0^1(\Omega)$ yaklaşık çözümler dizisi (3.7) lineer olmayan probleminin tek çözümü olan $u \in H_0^1(\Omega)$ fonksiyonuna $H^1(\Omega)$ normunda yakınsar. Ayrıca,

$$\|u - u_n\|_1 \leq \frac{\sqrt{2}c_1}{\sqrt{c_0c_2}} (1 + c_\Omega^2)^{3/2} [\Pi(u_n) - \Pi(u_{n+1})]^{1/2} \quad (4.17)$$

değerlendirmesi geçerlidir[37,40].

Eğer $\Pi(u_n)$ potansiyeli burulma momenti cinsinden elde edilirse, (4.17) değerlendirmesi burulma momenti cinsinden elde edilecektir. (4.10) yaklaşık çözümü burulma problemi için yeniden şöyle yazılabilir:

$$a(u_{n-1}; u_n, v) = \theta T(v) \quad (4.18)$$

Bu (4.11)'de göz önüne alınırsa

$$\Pi(u_n) = 0.5\theta T(u_n) - \theta T(u_n) = -0.5\theta T(u_n) \quad (4.19)$$

elde edilir. Burada $T(u_n) = 2 \iint_{\Omega} u_n(x) dx_1 dx_2$, burulma momentinin $u_n(x)$ yaklaşık çözümüne karşılık gelen değeridir.

(4.19)'da elde edilen sonuç, (4.17) değerlendirmesinde dikkate alınırsa

$$\|u - u_n\|_1 \leq \frac{c_1 \sqrt{\theta}}{\sqrt{c_0 c_2}} (1 + c_{\Omega}^2)^{3/2} [T(u_{n+1}) - T(u_n)]^{1/2} \quad (4.20)$$

değerlendirmesi elde edilir. Bu değerlendirme, burulma problemine uygulanan lineerleşme sonucu elde edilen u_n yaklaşık çözümü için temel hata değerlendirmesidir[27].

5. DÜZ VE TERS PROBLEM İÇİN SAYISAL ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

5.1. Düz Problemin Sonlu Farklar Yöntemi ile Sayısal Çözümü

Bu bölümde, düz problemin sayısal çözümü için sonlu fark denklemi elde edilecek ve bir örnek üzerinde düz problemin sayısal çözümü analiz edilecektir. Ayrıca, ters problemin sayısal çözümü için parametrizasyon yöntemi çeşitli örnekler üzerinde incelenerek bu yöntemin eksik yönlerinden bahsedilecektir.

(3.1),(3.3) düz probleminin sayısal çözümü için öncelikle, (3.1) lineer olmayan denkleminin sonlu fark yaklaşımının elde edilmesi gerekir. Sonlu fark denklemi elde edilirken (3.1) lineer olmayan denkleminin sağ tarafında gözüken 2θ sabit fonksiyonu yerine, sağ taraf fonksiyonunun daha genel olması ve herhangi bir test fonksiyonuna uygun hale gelmesi amacıyla $F(x_1, x_2)$ fonksiyonu ele alınacaktır. Ayrıca, sonlu fark denkleminin elde edilmesi esnasında alt indis gösteriminde karışıklık olmaması için x_1 ve x_2 değişkenleri sırası ile x, y değişkenleri ile gösterilecektir.

Hatırlanacağı gibi ikinci bölümde esnek çubuğun burulması problemi değişkenlere ayırma yöntemi ile çözülmüş ve burada $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ bölgesi olarak bir dikdörtgen bölge alınmıştı. Lineer olmayan (3.1),(3.3) probleminin çözümünde de aynı dikdörtgen bölge ele alınacaktır. Burulma probleminde bunun anlamı, ele alınan silindirik çubuğun kesitinin dikdörtgen olmasıdır. Denklemin verildiği dikdörtgen bölge $\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ olarak gösterilsin. Ox ekseninde

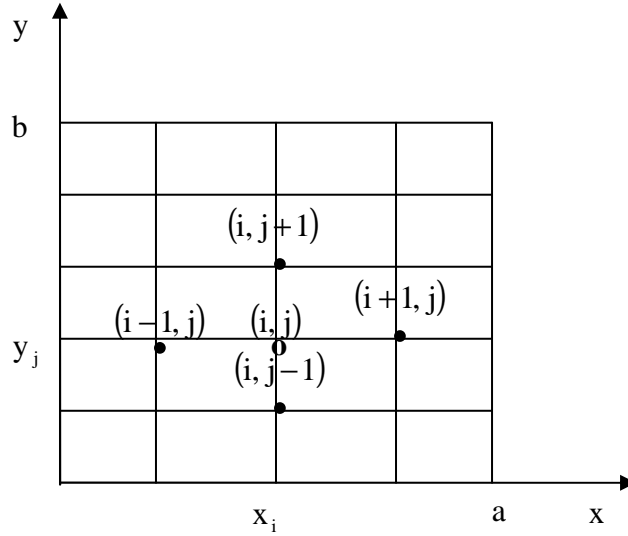
$$W_h = \left\{ x_i \mid x_{i+1} = x_i + h_i, x_1 = 0, x_N = a, i = \overline{1, N-1} \right\}$$

kafesi, Oy ekseninde ise

$$W_r = \left\{ y_j \mid y_{j+1} = y_j + r_j, y_1 = 0, y_M = b, j = \overline{1, M-1} \right\}$$

kafesi tanımlansın. W_h ve W_r kafeslerinin kartezyen çarpımından oluşan W_{hr} kafesi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$W_{hr} = \left\{ (x_i, y_j) \mid x_i \in W_h, y_j \in W_r, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M} \right\}$$



Şekil 5.1: W_{hr} kafesi

Burada h_i, r_j değerleri sırası ile W_h ve W_r kafeslerinin ardışık iki düğüm noktası arasındaki uzunluktur. Eğer $h_i = h, r_j = r$ uzunlukları sabit ise W_h ve W_r kafeslerine eşit adımlı kafes denir. Burada ve bundan sonra W_h ve W_r kafeslerinin eşit adımlı oldukları varsayılacaktır.

Bir $u(x, y)$ fonksiyonunun (x_i, y_j) noktasındaki x ve y değişkenlerine göre birinci türevlerinin sağ, sol ve merkez sonlu fark türev ifadeleri sırasıyla aşağıdaki şekilde verilir[41-44]:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} \approx \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_i, y_j)}{h} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} = u_{x,ij},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} \approx \frac{u(x_i, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{h} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} = u_{\bar{x},ij},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{2h} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} = u_{x,ij}^0.$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} \approx \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_j)}{r} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{r} = u_{y,ij},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} \approx \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i, y_{j-1})}{r} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{r} = u_{\bar{y},ij},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_{j-1})}{2r} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2r} = u_{y,ij}^0.$$

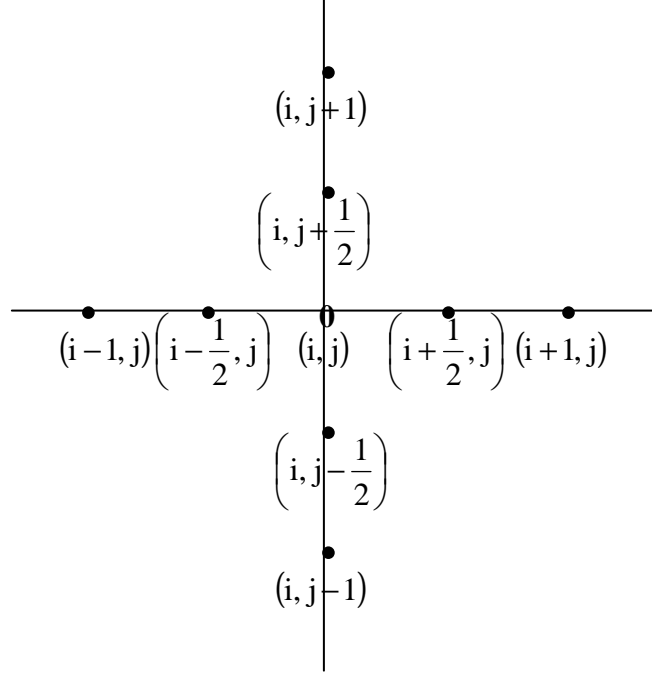
Benzer şekilde (x_i, y_j) noktasındaki x ve y değişkenlerine göre ikinci mertebeden sonlu fark türev ifadeleri sırasıyla aşağıdaki şekilde verilir:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} \approx \frac{u_{x,ij} - u_{\bar{x},ij}}{h} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = u_{\bar{x}\bar{x},ij},$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} \approx \frac{u_{y,ij} - u_{\bar{y},ij}}{r} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{r^2} = u_{\bar{y}\bar{y},ij}.$$

Herhangi bir fiziksel olaya karşılık gelen ayrık model elde edilirken, korunum yalarının sağlanması önemlidir. Kafeste korunum yasalarını sağlayan fark şeması konservatif sonlu fark şeması olarak adlandırılmaktadır [41]. Konservatiflik, süreksiz katsayılı türdeş şemalarda yakınsaklık için gerek koşuludur. Integro-interpolasyon yöntemiyle elde edilen sonlu fark şemaları, türdeş sonlu fark şemasıdır. Sonlu fark denkleminin aşağıdaki şekilde integralleme yöntemiyle elde edilmesi, zayıf çözüm kavramıyla uyumludur.

(2.1) lineer olmayan denkleminin sonlu fark denkleminin elde edilmesi için, $x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - 0.5h$, $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + 0.5h$, $y_{j-\frac{1}{2}} = y_j - 0.5r$, $y_{j+\frac{1}{2}} = y_j + 0.5r$ ek noktalarının tanımlanması gerekir.



Şekil 5.2: W_{hr} kafesinde ek noktaların tanımlanması

Bu amaçla (3.1) denklemini, önce $\left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right]$ aralığında, daha sonra da $\left[y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}} \right]$ aralığında integrallenirse aşağıdaki denklem elde edilir:

$$-\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(g(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(g(|\nabla u|^2) \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy = \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} F(x, y) dx dy \quad (5.1)$$

(5.1) eşitliğindeki integraller alınır ve $x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} = h$, $y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}} = r$ olduğu kullanılırsa aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\begin{aligned}
& r \left[-g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j} \right|^2 \right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j} + g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j} \right|^2 \right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2},j} \right] \\
& + h \left[-g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i,j+\frac{1}{2}} \right|^2 \right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} + g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i,j-\frac{1}{2}} \right|^2 \right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \right] = hr F_{i,j}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadede her iki taraf hr terimi ile bölünürse

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h} \left[-g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j} \right|^2 \right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j} + g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j} \right|^2 \right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2},j} \right] \\
& + \frac{1}{r} \left[-g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i,j+\frac{1}{2}} \right|^2 \right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} + g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i,j-\frac{1}{2}} \right|^2 \right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \right] = F_{i,j}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde $\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j}$, $\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2},j}$, $\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)_{i,j+\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)_{i,j-\frac{1}{2}}$

türevlerinin sonlu fark ifadeleri yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h} \left[-g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j} \right|^2 \right) \frac{\mathbf{u}_{i+1,j} - \mathbf{u}_{i,j}}{h} + g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j} \right|^2 \right) \frac{\mathbf{u}_{i,j} - \mathbf{u}_{i-1,j}}{h} \right] \\
& + \frac{1}{r} \left[-g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i,j+\frac{1}{2}} \right|^2 \right) \frac{\mathbf{u}_{i,j+1} - \mathbf{u}_{i,j}}{r} + g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i,j-\frac{1}{2}} \right|^2 \right) \frac{\mathbf{u}_{i,j} - \mathbf{u}_{i,j-1}}{r} \right] = F_{i,j}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

olur ki bu ifade düzenlendiğinde aşağıdaki şekli alır[41]:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{h^2} \left[g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j} \right|^2 \right) (\mathbf{u}_{i+1,j} - \mathbf{u}_{i,j}) - g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j} \right|^2 \right) (\mathbf{u}_{i,j} - \mathbf{u}_{i-1,j}) \right] \\
& -\frac{1}{r^2} \left[g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i,j+\frac{1}{2}} \right|^2 \right) (\mathbf{u}_{i,j+1} - \mathbf{u}_{i,j}) - g \left(\left| \nabla \mathbf{u}_{i,j-\frac{1}{2}} \right|^2 \right) (\mathbf{u}_{i,j} - \mathbf{u}_{i,j-1}) \right] = F_{i,j}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Lineer olmayan (5.4) denklem sisteminin lineerleştirmesi için, aşağıdaki şema uygulanır:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{h^2} \left[g \left(\left| \nabla u_{i+\frac{1}{2},j}^{n-1} \right|^2 \right) (u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n) - g \left(\left| \nabla u_{i-\frac{1}{2},j}^{n-1} \right|^2 \right) (u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n) \right] \\
& -\frac{1}{r^2} \left[g \left(\left| \nabla u_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-1} \right|^2 \right) (u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n) - g \left(\left| \nabla u_{i,j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right|^2 \right) (u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n) \right] = F_{i,j}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Benzer sonlu fark denklemi, sonlu elemanlar yöntemiyle de elde edilebilir, fakat buradaki temel amaç düz ve ters problemlerin sayısal çözümü olduğu için bu konu ayrıca incelenmeyecektir.

Örnek 5.1[31,45].

Bu örnekte, yukarıda elde edilen sonlu fark şemasını ve bu sonlu fark şemasına göre yazılan programı kontrol etmek amacı ile bir test fonksiyonu ele alınacak ve düz problem için hata analizi yapılacaktır. Ayrıca, potansiyeller dizisi elde edilerek bu sayısal dizinin monoton azalan olduğu gözlemlenecektir.

(3.1) denklemde $g(\xi^2) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$ olarak alınsın ve bu problem

$\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ kare bölgesinde sonlu farklar yöntemi ile çözülmek

istensin. Bu örnekte gerçek çözüm $u(x, y) = x^2 \times y^2 - 0.5$ olarak alınmıştır ve

$F(x, y)$ sağ taraf fonksiyonu buna göre hesaplanmıştır. Sağ tarafı hesaplamak için

öncelikle $\xi^2 = |\nabla u|^2 = u_x^2 + u_y^2$ ifadesinin hesaplanması gerekir.

$u_x = 2xy^2, u_y = 2yx^2$ olduğundan $\xi^2 = 4x^2y^2(x^2 + y^2)$ olarak bulunur. ξ^2 ifadesi

$g(\xi^2)$ fonksiyonun da yerine yazılırsa, $g(\xi^2) = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2y^2(x^2+y^2)}}$ olarak elde

edilir. Bu ise (3.1) denklemde dikkate alınırsa $F(x, y) = -2 \frac{8x^4y^4 - x^2 - y^2}{[1+4(x^4y^2 + x^2y^4)]^{3/2}}$

olarak bulunur. Bölgenin sınırında ise, (3.3) koşulu yerine, $u(x, y) = x^2 \times y^2 - 0.5$ fonksiyonunun Ω bölgesinin sınırlarındaki izdüşümü alınmıştır. Yaklaşık çözüm $\varepsilon = 0.0001$ alınarak $\max |u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1}| < \varepsilon$ koşulu ile bulunmuştur. Burada, $u_{i,j}^n = u^n(x_i, y_j)$ değeri, n. iterasyonda elde edilen yaklaşık çözümün (x_i, y_j) noktasındaki değeridir.

İlk olarak, $\Pi(u_n)$ potansiyeller dizisinin, Teorem 4.8’de ispatlandığı gibi, monoton azalan bir dizi olduğunu göstermek için (3.1), (3.3) düz problemi $u_0(x, y) = 0.5(x^2 + y^2)$ ve $u_0(x, y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$ gibi iki farklı başlangıç iterasyonu ile çözülmüş ve her bir iterasyonda $\Pi(u_n)$ potansiyeli hesaplanmıştır.

Tablo 5.1: (3.1),(3.3) düz probleminin çözümü sonucu elde edilen $\{\Pi(u_n)\}$ potansiyeller dizisi

n	$u_0(x, y) = 0.5(x^2 + y^2)$ $\Pi(u_n)$	$u_0(x, y) = \sin(x^2) + \sin(y^2)$ $\Pi(u_n)$
1	1.50123	1.48017
2	1.47085	1.46669
3	1.46413	1.46302
4	1.46169	1.46133
5	1.46061	1.46049
6	1.46006	1.46003
7	1.45976	1.45976
8	1.45958	1.45959
9	1.45948	1.45949
10	1.45942	1.45943
11	1.45937	1.45938
12	1.45935	1.45935
13	1.45933	1.45933
14	---	1.45932

İkinci olarak, sonlu fark şemasının yaklaşım hatasını hesaplamak için (3.1), (3.3) düz problemi, x yönündeki nokta sayısı N, y yönündeki nokta sayısı M olmak üzere

iki farklı kare şebekede çözülmüş ($N = M = 20$, $N = M = 40$) ve $\epsilon_u = \max|u_{i,j} - u_{i,j}^n|$ olarak tanımlanan mutlak hatalar her bir durum için Tablo 5.2’de verilmiştir. Bilindiği gibi, sonlu fark şemasının yaklaşım hatası γ ile gösterilecek olursa, bunu hesaplamak için aşağıdaki formül kullanılır:

$$\gamma = \frac{\log(\epsilon_u^1 / \epsilon_u^2)}{\log(N_2 / N_1)}$$

Tablo 5.2.’ye göre $\epsilon_u^1 = 2.9 \times 10^{-4}$, $\epsilon_u^2 = 6.0 \times 10^{-5}$ dir. Bu veriler yukarıda yazılırsa sonlu fark şemasının yaklaşım hatası,

$$\gamma = \frac{\log(2.9 \times 10^{-4} / 6.0 \times 10^{-5})}{\log(40/20)} \approx 2.2$$

olarak hesaplanır. Bunun da anlamı $\|u - u_h\| = O(h^n)$ olarak gösterilen yaklaşım hatasında $n = 2.2$ olmasıdır.

Tablo 5.2: Örnek 5.1’deki problemin farklı kare şebekelerde sayısal çözümü için mutlak ve bağıl hata değerlendirmesi

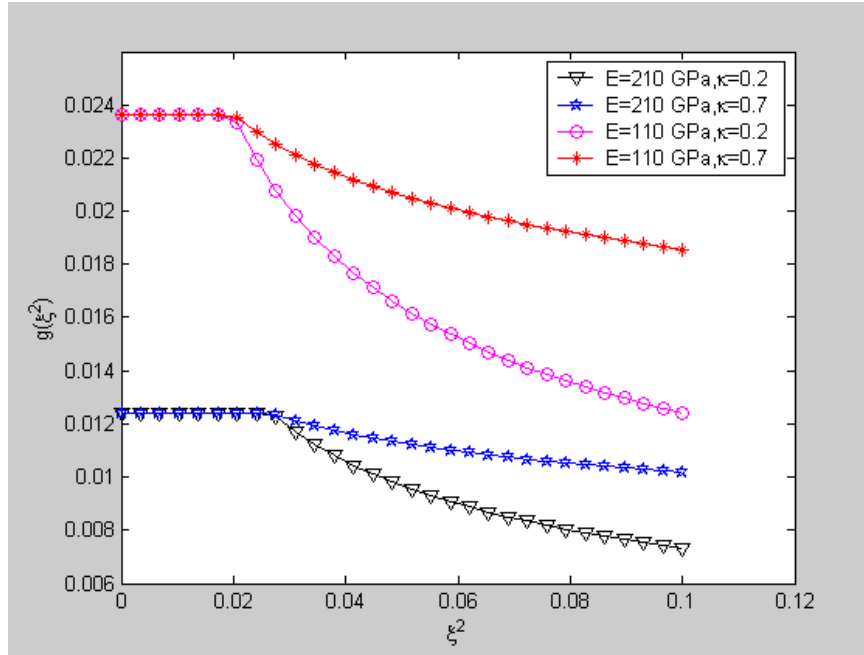
$N \times M$	ϵ_u	δ_u
20×20	2.9×10^{-4}	9.5×10^{-2}
40×40	6.0×10^{-5}	7.9×10^{-3}

5.2. Ters Problemin Parametrizasyon Yöntemi ile Sayısal Çözümü

Bu örnekte ve bundan sonraki sayısal örneklerde $g(\xi^2)$ fonksiyonu olarak, birçok mühendislik malzemelerinin elastoplastik özelliklerini ifade eden aşağıdaki fonksiyon ele alınacaktır[46-47]:

$$g(\xi^2) = \begin{cases} \frac{1}{G}, & \xi^2 \leq \xi_0^2, \\ \frac{1}{G} \left(\frac{\xi^2}{\xi_0^2} \right)^{0.5(\kappa-1)}, & \xi^2 > \xi_0^2. \end{cases} \quad (5.6)$$

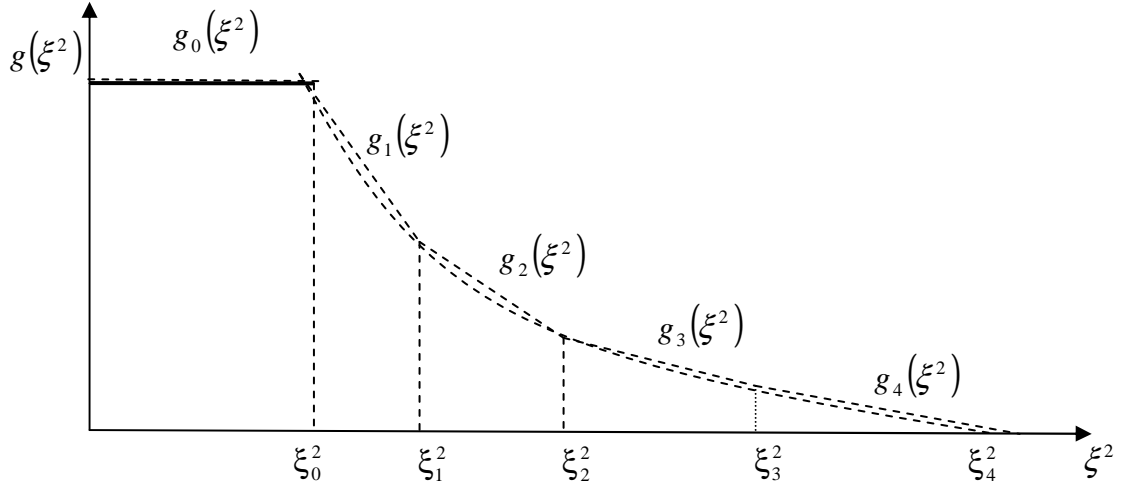
Burada $\kappa \in [0,1]$ zorlama sertlik parametresidir. $\kappa=1$ durumu tam esnek duruma, $\kappa=0$ durumu ise tam plastik duruma karşılık gelir. Şekil 5.3'te, $E = 210$ GPa ve $E = 110$ GPa alınarak elde edilen ve sırasıyla sert ve yumuşak malzemelerin elastoplastik özelliklerini temsil eden plastiklik fonksiyonlarının grafikleri gösterilmiştir. Sert ve yumuşak malzemeler için ξ_0^2 esneklik limiti değerleri sırası ile 0.027 ve 0.020 olarak kabul edilmiştir. Sayısal örneklerde Poisson katsayısı olarak $\nu = 0.3$ olarak alınacaktır.



Şekil 5.3: Sert ve yumuşak malzemeler için (5.6) ile tanımlanan $g(\xi^2)$ fonksiyonu

Ters problemin daha önce verilen tanımında belirtildiği üzere, ters problemin çözümünde amaç deneysel olarak verilmiş burulma açısı ve bu açığa karşılık gelen burulma momenti çiftinden yola çıkarak, malzemenin özelliğini belirten $g(\xi^2)$ fonksiyonunu belirlemektir. Parametrizasyon yönteminin temelini, ele alınan problemin ayrık probleme dönüştürülmesi fikri oluşturmaktadır. Buradaki problem

(5.6) ile tanımlanan $g(\xi^2)$ fonksiyonunu belirleme problemidir. Parametrizasyon yöntemine göre, $g(\xi^2)$ fonksiyonuna parçalı lineer yaklaşım söz konusudur. Bunun için, ele alınan noktalar $\xi_i^2, i = \overline{0, n-1}$ olmak üzere, Şekil 5.4'te gözükten $g_i(\xi^2), i = \overline{0, n-1}$ doğru parçalarının denklemlerinin yazılması gerekir. Bu doğruların denklemleri aşağıdaki gibi kolayca yazılabilir:



Şekil 5.4: $g(\xi^2)$ fonksiyonunun parçalı lineer yaklaşımı

$$\begin{aligned}
g_0(\xi^2) &= \beta_0, \beta_0 = 1/G, \xi^2 \in (0, \xi_0^2] \\
g_1(\xi^2) &= \beta_0 - \beta_1(\xi^2 - \xi_0^2), \xi^2 \in (\xi_0^2, \xi_1^2] \\
g_2(\xi^2) &= \beta_0 - \beta_1(\xi_1^2 - \xi_0^2) - \beta_2(\xi^2 - \xi_1^2), \xi^2 \in (\xi_1^2, \xi_2^2] \\
g_3(\xi^2) &= \beta_0 - \beta_1(\xi_1^2 - \xi_0^2) - \beta_2(\xi_2^2 - \xi_1^2) - \beta_3(\xi^2 - \xi_2^2), \xi^2 \in (\xi_2^2, \xi_3^2] \\
g_4(\xi^2) &= \beta_0 - \beta_1(\xi_1^2 - \xi_0^2) - \beta_2(\xi_2^2 - \xi_1^2) - \beta_3(\xi_3^2 - \xi_2^2) - \beta_4(\xi^2 - \xi_3^2), \xi^2 \in (\xi_3^2, \xi_4^2] \\
&\vdots \\
g_n(\xi^2) &= \beta_0 - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i(\xi_i^2 - \xi_{i-1}^2) - \beta_n(\xi^2 - \xi_{n-1}^2), \xi^2 \in (\xi_{n-1}^2, \xi_n^2]
\end{aligned}$$

Bu ifadelerde gözükten $-\beta_i, \beta_i > 0, i = \overline{0, n-1}$ sayıları, bu doğru parçalarının eğimleridir. Böylelikle, ters problem ayrık probleme dönüştürülür ve $g(\xi^2)$ fonksiyonunun parçalı lineer yaklaşımı belirlenmiş olur. Bu yaklaşıma ters problemin parametrizasyonu, $-\beta_i$ eğimlerine ise ters problemin arananları ya da bilinmeyenleri denir.

Ters problemin bilinmeyenlerini bulmak amacı ile, öncelikle esnek durum ele alınacaktır: (5.6)'dan görüleceği gibi, esnek durumda $(\xi^2 \leq \xi_0^2)$ bu durumda $g(\xi^2) = 1/G$ dir. Bu (3.1) denkleminde göz önüne alınırsa, (3.1), (3.3) lineer olmayan problemi aşağıdaki Poisson problemine dönüşür:

$$\begin{cases} -\Delta u = 2G\theta, x = (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u(x) = 0, x = (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (5.7)$$

(5.7) probleminde, $2G\theta$ sağ taraf fonksiyonu sıfırdan büyük olduğundan dolayı maksimum prensibinden $u(x)$ çözümü pozitifdir [48].

G_1, G_2 birbirinden farklı ve $G_1 < G_2$ koşulunu sağlayan iki farklı sertlik modülü olsun. (5.7) probleminin bu sertlik modüllerine karşılık gelen çözümleri ise sırasıyla $u_1(x) = u(x; G_1), u_2(x) = u(x; G_2)$ ile gösterilsin. Açıktır ki, $v(x) = u_2(x) - u_1(x)$ olarak tanımlanan $v(x), x = (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ fonksiyonu aşağıdaki problemin çözümüdür:

$$\begin{cases} -\Delta v = 2G_2\theta - 2G_1\theta, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ v = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (5.8)$$

$G_2 > G_1$ olduğundan dolayı $2G_2\theta - 2G_1\theta$ sağ taraf fonksiyonu sıfırdan büyüktür, bu ise $v(x) = u_2(x) - u_1(x) > 0$ olması anlamına gelir, yani $u_1(x) < u_2(x)$. Bu (3.4) tanımında göz önüne alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$T[G_1] = 2 \iint_{\Omega} u(x; G_1) dx_1 dx_2 < T[G_2] = 2 \iint_{\Omega} u(x; G_2) dx_1 dx_2. \quad (5.9)$$

Elde edilen bu sonuç, aşağıdaki lemma ile ifade edilebilir:

Lemma 5.1. Esnek durum için $G_1 < G_2$ olduğunda bunlara karşılık gelen burulma momentleri arasında $T[G_1] < T[G_2]$ ilişkisi vardır[27].

Bu lemma fiziksel anlamı ile de uyumludur: Malzemenin sertlik modülünün artması malzemenin sertliğinin artması anlamına gelir, sert malzemenin aynı açı kadar burulması için yumuşak malzemeye göre daha fazla kuvvet gerektirdiği açıktır.

$\beta_0 = 1/G$ değerinin, yani G sertlik modülünün yaklaşık olarak hesaplanmasında Lemma 5.1'den faydalanılacaktır. G sertlik modülü aşağıdaki algoritma yardımı ile yaklaşık olarak bulunabilir. Bu algoritmada amaç, $G \in (G_1, G_2)$ olacak şekildeki G_1, G_2 değerlerini bulmaktır. Daha sonra $|T[G_i] - T| < \varepsilon, \varepsilon > 0$ şartı sağlanana kadar ikiye bölme yöntemi uygulanarak G sertlik modülünün yaklaşımı bulunmuş olur[27,38].

Algoritma 5.1: Esneklik durumunda, ters problemin çözümü için verilen burulma açısı $\hat{\theta}$, bu açığa karşılık gelen burulma momenti \hat{T} olsun. Bu veri çifti $(\hat{\theta}, \hat{T})$ olarak gösterilsin. Bu algoritma ile $G \in (G_1, G_2)$ olacak şekildeki (G_1, G_2) aralığı bulunmuş olur.

- 1) $G_1, G_2, \Delta G$ belirlenir.
- 2) G_1, G_2 'ye karşılık gelen $T[G_1], T[G_2]$ burulma momentleri hesaplanır.
- 3) $\varepsilon_1 = T[G_1] - \hat{T}$ değeri hesaplanır
 - a) $\varepsilon_1 > 0$ ise $T[G_1] > \hat{T}$ olur, yani $G_1 > G$. Bu durumda $G_1 = G_1 - \Delta G$ alınarak bu işleme $T[G_1] < \hat{T}$ eşitsizliği sağlanana kadar devam edilir. Böylece $G_1 < G$ durumu sağlanmış olur.
 - b) $\varepsilon_1 < 0$ ise $T[G_1] < \hat{T}$ olur, yani $G_1 < G$. Bu ise istenen durumdur.
- 4) $\varepsilon_2 = T[G_2] - \hat{T}$ değeri hesaplanır.
 - a) $\varepsilon_2 > 0$ ise $T[G_2] > \hat{T}$ olur, yani $G_2 > G$. Bu ise istenen durumdur.
 - b) $\varepsilon_2 < 0$ ise $T[G_2] < \hat{T}$ olur, yani $G_2 < G$. Bu durumda $G_2 = G_2 + \Delta G$ alınarak bu işleme $T[G_2] > \hat{T}$ eşitsizliği sağlanana kadar devam edilir. Böylece $G_2 > G$ durumu sağlanmış olur.

Burada şu noktaya ayrıca değinmek gerekir: G sertlik modülünün bulunması için, $(\hat{\theta}, \hat{T})$ veri çiftinden başka hiçbir şey bilinmemektedir. Bu nedenle, Algoritma 5.1'de bulunması gereken ve en başta keyfi olarak belirlenen G_1, G_2 değerleri için şu durumlar söz konusudur: (a) $G_1 < G < G_2$, (b) $G_1 < G_2 < G$, (c) $G < G_1 < G_2$. Bu durumlar içinde (a) durumu zaten istenen durumdur. (b) de her bir adımda $G_2 = G_2 + \Delta G$ alınarak $G_2 > G$ eşitsizliği sağlanıncaya kadar, (c) de ise her bir adımda $G_1 = G_1 - \Delta G$ alınarak $G_1 < G$ eşitsizliği sağlanıncaya kadar işlemlere devam edilir. Tabi ki, (b) ve (c) durumlarında Lemma 5.1'in kullanılması gerekir. (b) ve (c) durumlarında istenilen $G \in (G_1, G_2)$ aralığı elde edilinceye kadar gereken işlem sayısı ve istenilen ε kesinliği için ikiye bölme yönteminde ortaya çıkacak olan iterasyon sayısı, ΔG büyüklüğüne bağlı olarak değişecektir. Burada temel amaç parametrizasyon yöntemine genel bir bakış olduğundan, bu ayrıntılara girilmemiştir. Buna karşın bu incelemeler literatürde yapılmıştır[45].

Şimdi $-\beta_1$ eğimlerini bulmak amacı ile plastik durum ele alınsın. Benzer bir yaklaşım ile $-\beta_1$ eğimlerini de bulmak mümkündür. Bu yaklaşımı açıklamak için Şekil 5.4'ten faydalanmak gerekir. Şekil 5.4'ten görüleceği gibi, $\kappa \in [0,1]$ zorlama sertlik parametresinin artması ile malzeme esneklik durumuna yaklaşır ve doğruların eğimleri de artar. Sert malzemeyi aynı açı kadar burulması, yumuşak malzemeye göre daha fazla kuvvet gerektirdiğinden $-\beta_1 < -\beta_2$ olması durumunda $T[-\beta_1] > T[-\beta_2]$ olacağı açıktır. Başka bir ifade ile $\beta_1 > \beta_2$ olması durumunda $T[-\beta_1] > T[-\beta_2]$ olacaktır. Yani bu ilişki monoton artandır, bu durum esneklik durumu ile aynıdır. Dolayısı ile yukarıda G sertlik modülünün bulunması için yazılan algoritma aynı şekilde $-\beta_1$ eğimlerini bulmak amacıyla da uygulanabilir. Bunun için Algoritma 5.1'de $G_1, G_2, \Delta G$ yerine sırası ile $\beta_1, \beta_2, \Delta\beta$ yazılması yeterlidir[27].

Öncelikle kesin deneysel verili ters problem çözülmek istensin. Bunun anlamı şudur: Deneysel olarak verilen burulma momenti değerleri ölçüm sonucu elde edildiği için, doğal olarak belirli hatalar içerir. Ancak burada (3.1),(3.3) düz problemi sayısal olarak çözülmüş, her bir açığa karşılık gelen ve (3.4) ile tanımlanan burulma

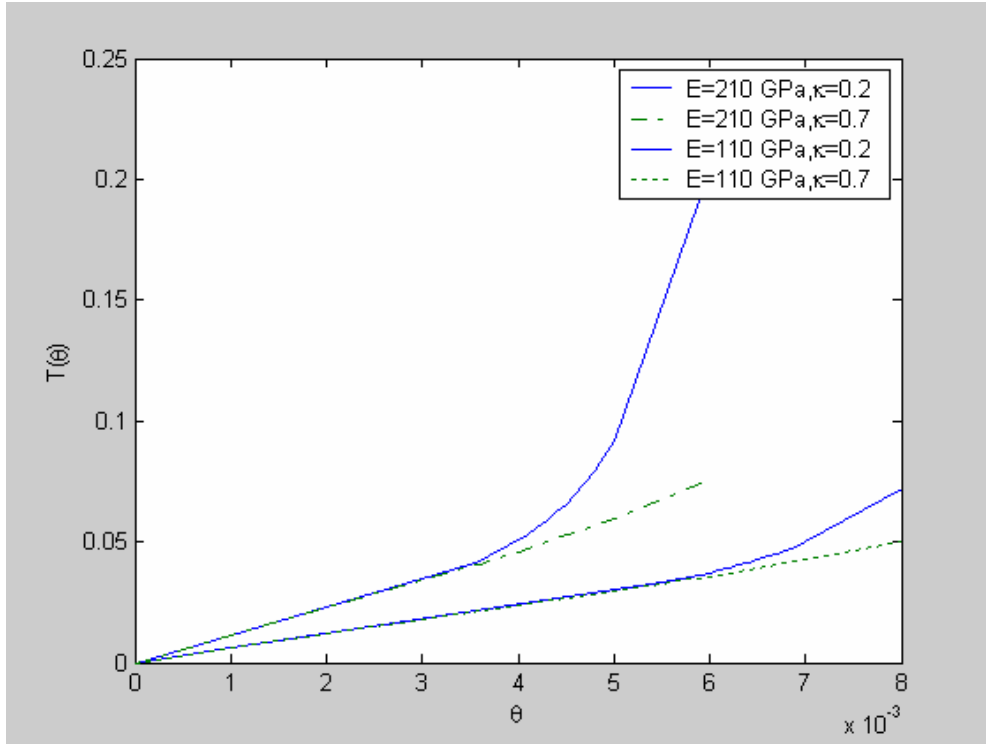
momenti değerleri hesaplanmıştır. Daha sonra bunlar ters problemde giriş verisi olarak kullanılmıştır. Bu tr ters problemlere kesin deneysel verili ters problem denir. Deneysel hatalarıyla verilmiş ters problemin czm ise daha sonraki rneklerde ele alınacaktır. Bu amala ters problemin czm sonucu elde edilen $g(\xi^2)$ fonksiyonunun yaklaşımı $g_h(\xi^2)$ ile gsterilsin. Tablo 5.3 ve Tablo 5.4'te, (5.6) ile tanımlı $g(\xi^2)$ fonksiyonu ve κ zorlama sertlik parametresinin cşitli değerleri iin, sırasıyla sert ve yumuşak malzemeler esas alınarak dz problemin czlmesi sonucu elde edilen veriler, Şekil 5.5'te de her bir malzeme sınıfı iin elde edilen (θ, T) veri ciftinin grafikleri gsterilmiştir.

Tablo 5.3: Sert (rigid) malzeme iin (3.1),(3.3) dz probleminin czm sonucu elde edilen burulma momenti değerleri

$\kappa = 0.2$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$
$\theta \times 10^3$	1.5	2.2	2.5	3.3	3.5	3.6	3.7	3.80	3.85
$\xi_m^2 \times 10^2$	0.6	1.3	1.7	4.0	5.7	6.6	7.9	9.3	10
$T \times 10^2$	1.69	2.48	2.82	3.75	4.05	4.21	4.41	4.60	4.71
$\kappa = 0.7$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$
$\theta \times 10^3$	1.5	2.2	2.5	3.5	3.8	4.0	4.3	4.5	5.2
$\xi_m^2 \times 10^2$	0.6	1.3	1.7	3.6	4.6	5.3	6.4	7.1	10
$T \times 10^2$	1.69	2.48	2.82	3.96	4.33	4.60	5.00	5.27	6.29

Tablo 5.4: Yumuşak (soft) malzeme için (3.1),(3.3) düz probleminin çözümü sonucu elde edilen burulma momenti değerleri

$\kappa = 0.2$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$
$\theta \times 10^3$	2.0	3.0	4.4	5.58	5.97	6.28	6.4	6.5	6.6
$\xi_m^2 \times 10^2$	0.3	0.6	1.4	3.6	5.2	7.1	8.1	9.0	9.8
$T \times 10^2$	1.18	1.77	2.59	3.35	3.68	4.00	4.14	4.27	4.39
$\kappa = 0.7$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$
$\theta \times 10^3$	2.0	3.0	4.0	6.0	6.5	7.0	8.0	8.5	9.3
$\xi_m^2 \times 10^2$	0.3	0.6	1.2	3.0	3.7	4.5	6.5	7.6	9.8
$T \times 10^2$	1.18	1.77	2.36	3.57	3.90	4.25	4.98	5.38	6.04

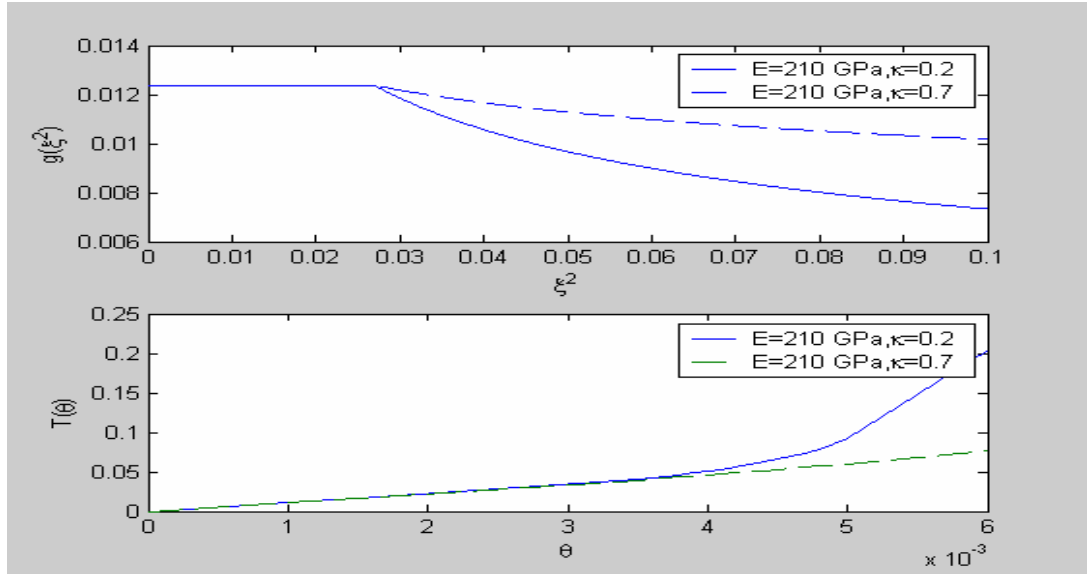


Şekil 5.5: Sert ve yumuşak malzemeler için Tablo 5.3 ve Tablo 5.4 de gösterilen θ açılara karşı gelen burulma momentleri

Tanım 5.1. Eğer bir problemin çözümü varsa, tek ise ve giriş verilerine göre sürekli ise o halde bu probleme iyi tanımlanmış (düzgün formüle edilmiş) problem denir.

Eğer tanımdaki koşullarda herhangi biri sağlanmıyorsa, o halde bu probleme düzgün formüle edilmemiş problem denir.

Şekil 5.6'dan görüldüğü gibi, ele alınan ters problem iyi tanımlı değildir. Çünkü örneğin sert malzemenin iki farklı κ değerine karşılık gelen burulma momentleri birbirine yakın olmasına rağmen, bunlara karşılık gelen $g(\xi^2)$ plastiklik fonksiyonları birbirinden oldukça farklıdır. Yani, ters problemin giriş verilerinde yapılan küçük değişikliklerin çözüme etkisi büyüktür.



Şekil 5.6: Ters problemin iyi tanımlı olmaması

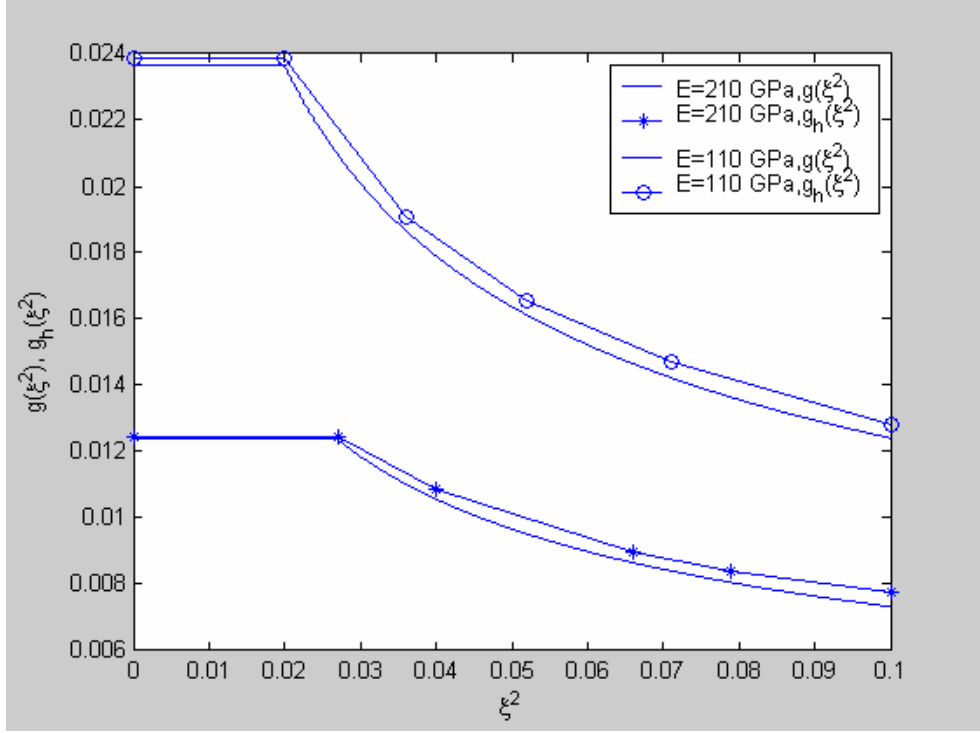
Sert ve yumuşak malzemeler için kesin deneysel verili ters problemin çözümünde giriş verisi olarak, $\kappa = 0.2$ için Tablo 5.3'te, $\kappa = 0.7$ için de Tablo 5.4'te koyu olarak yazılan veriler ele alınacaktır. Bu veri çiftleri esneklik durumunda bir tane, plastiklik durumunda ise dört tane olmak üzere toplam beş tanedir. Dolayısıyla, plastiklik durumunda dört tane doğrunun eğiminin belirlenmesi gerekmektedir. Aşağıdaki tabloda bu doğruların gerçek eğimleri ve parametrisasyon yöntemiyle bulunan eğimleri gösterilmiştir. Görüldüğü gibi, Algoritma 5.1'in devamında ikiye bölme yöntemi uygulanırken, $\varepsilon = 10^{-3}$ olarak ele alınmıştır. Tablo 5.5'ten görüldüğü gibi, hem sert hem de yumuşak malzemeler için ters problem çözülürken, her bir adımda mutlak hata giderek artmaktadır. Şekil 5.7'de ise ters problemin çözümü sonucu bulunan ve $g(\xi^2)$ fonksiyonunun yaklaşımı olan $g_h(\xi^2)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Ayrıca mutlak ve bağıl hata değerlendirmesi de Tablo 5.6'da verilmiştir.

Tablo 5.5: Ters problemin sert ve yumuşak malzemeler için çözülmesi sonucu bulunan β_{mh} , $m = \overline{0,3}$ değerleri

E = 210 GPa, $\kappa = 0.2$				E = 110 GPa, $\kappa = 0.2$			
m	β_m	β_{mh}	$ \beta_m - \beta_{mh} $	m	β_m	β_{mh}	$ \beta_m - \beta_{mh} $
0	0.0124	0.0123	4.0×10^{-4}	0	0.0236	0.0239	3.0×10^{-4}
1	0.1386	0.1380	6.0×10^{-4}	1	0.3096	0.3091	5.0×10^{-4}
2	0.0739	0.0732	7.0×10^{-4}	2	0.1598	0.1592	6.0×10^{-4}
3	0.0462	0.0453	9.0×10^{-4}	3	0.0994	0.0986	8.0×10^{-4}
4	0.0345	0.0336	9.0×10^{-4}	4	0.0629	0.0620	9.0×10^{-4}

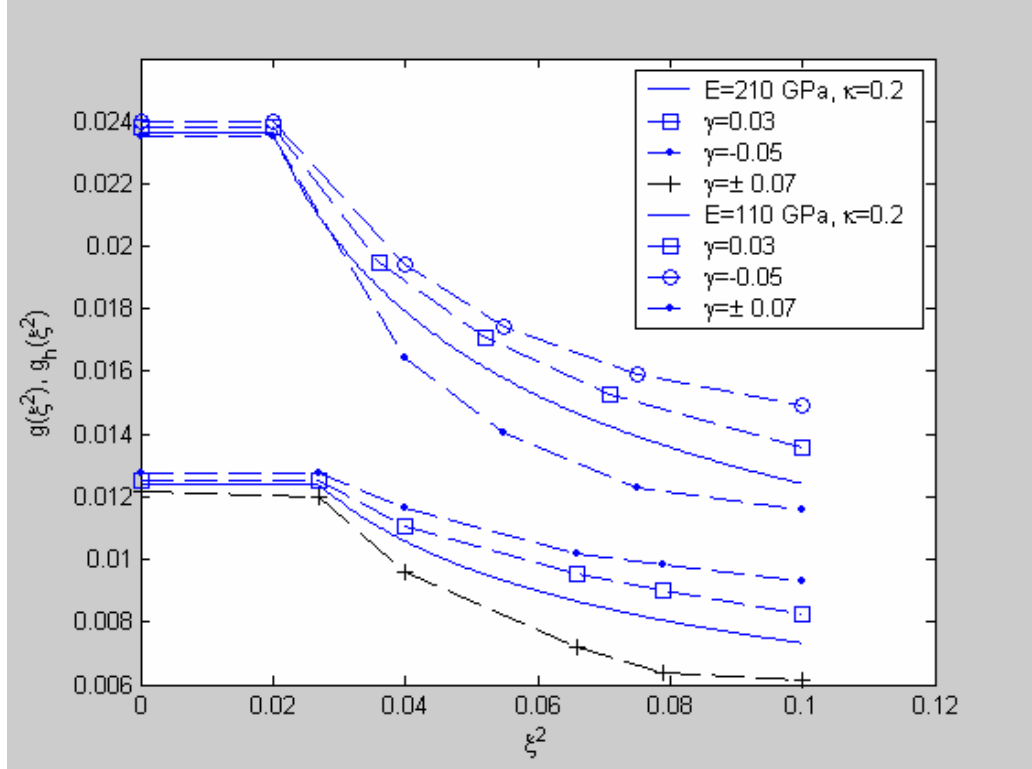
Tablo 5.6: Kesin deneysel verili ters problem için mutlak ve bağıl hata değerlendirilmesi

Mutlak ve Bağıl Hata	E=210 GPa	E=110 GPa
ϵ_g	4.4×10^{-4}	4.6×10^{-4}
δ_g	6.0×10^{-2}	4.2×10^{-2}



Şekil 5.7: Sert ve yumuşak malzemeler için kesin deneysel verili ters problemin çözülmesi sonucu bulunan $g_h(\xi^2)$ fonksiyonlarının grafiği

Şimdi deney hatalarıyla verilen ters problem ele alınsın. Ters problemin çözümünde ölçüm sonucu verilen burulma momenti değerleri doğal olarak belirli hatalar içerir. Burada, bir önceki bölümdeki burulma momenti değerlerine belirli bir hata katarak ters problem çözülecektir. Bu hata γ ile, hatalı burulma momenti değerleri de T_γ ile gösterilsin. Bu takdirde $T_\gamma = T + \gamma T$ olarak yazılabilir. Şekil 5.9'da çeşitli deney hataları için ters problemin çözümü sonucu bulunan $g_h(\xi^2)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Tablo 5.7 ve Tablo 5.8'de ise mutlak ve bağıl hata değerlendirmeleri verilmiştir.



Şekil 5.8: Çeşitli deney hatalarıyla verilen ters problemlerin çözümü

Tablo 5.7: Sert malzeme için deney çeşitli deney hatalarıyla verilen ters problem için mutlak ve bağıl hata değerlendirme

γ	+0.03	-0.05	± 0.07
ϵ_g	9.3×10^{-4}	2.0×10^{-3}	2.2×10^{-3}
δ_g	1.3×10^{-1}	2.7×10^{-1}	2.8×10^{-1}

Tablo 5.8: Yumuşak malzeme için deney çeşitli deney hatalarıyla verilen ters problem için mutlak ve bağıl hata değerlendirme

γ	+0.03	-0.05	± 0.07
ϵ_g	1.2×10^{-3}	2.5×10^{-3}	2.6×10^{-3}
δ_g	9.3×10^{-2}	2.0×10^{-1}	2.2×10^{-1}

5.3. İyileştirme Yöntemi

Ters problemin çözümünde giriş verisi olarak kabul edilen (θ, T) veri çiftlerinin sayısı arttığında (buna bağlı olarak ξ_i^2 noktalarının sayısının artışı veya bu noktaların birbirine yakınlığı söz konusudur) parametrizasyon yönteminde verilen ve yaklaşımları durdurma koşulu olan

$$|T - \mathcal{T}| < \varepsilon \quad (5.10)$$

koşulunun, bazı durumlarda sağlanmadığı görülmüştür. Bu durumun temel nedeni şöyle açıklanabilir:

Parametrizasyon yönteminde bulunması gereken doğru denklemlerinden görüldüğü gibi, herhangi bir m . plastik durum ele alındığında, daha önceden yaklaşık olarak bulunan $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}$ değerlerinin m . adımda kullanılması gerekir. Bu değerlerin belirli bir hata ile bulunduğu açıktır. Bundan dolayı, deneysel verilerin hatasına ek olarak, hesaplamalardan dolayı oluşan hataların her bir adımda artarak birikmesi gibi bir durum ortaya çıkmaktadır. Bu ise, belirli noktalardan sonra parametrizasyon yönteminin uygulanamamasını beraberinde getirir. Böyle bir durumda parametrizasyon yöntemi şu şekilde yeniden düzenlenmiştir: Farz edelim ki, $(m-1)$. plastiklik durumda (5.10) koşulu sağlansın ama m . plastiklik durumda (5.10) koşulu sağlanmasın. Bu takdirde, $\Delta\xi_m = \xi_{m+1}^2 - \xi_m^2$ parametresi yerine $\tilde{\Delta}\xi_m = \Delta\xi_m + \Delta\xi_{m+1}$ parametresi seçilir ve parametrizasyon yöntemi bu parametre için uygulanır, (5.10) koşulunun sağlanması durumunda bu adım için uygun parametre bulunmuş olur, aksi halde $\tilde{\Delta}\xi_m = \Delta\xi_m + \Delta\xi_{m+1} + \Delta\xi_{m+2}$ alınır ve işlemler bu şekilde (5.10) koşulu sağlanana kadar devam ettirilir. Bu işleme, $\Delta\xi_m$ parametrelerinin doğal seçimi denir [16,23,27].

Tablo 5.9'da, sert malzeme için $\Delta\xi_m$ parametresinin küçük değerlerinde ters problem çözülmesi sonucu, (5.10) koşulunun sağlandığı ve sağlanmadığı noktalar gösterilmiştir, Şekil 5.9'da ise tablodaki bilgiler grafik üzerinde gösterilmiştir.

Tablo 5.9: $E = 210$, $\kappa = 0.2$ için $\Delta\xi_m$ parametresinin küçük değerlerinde (5.10) koşulunun sağlandığı ve sağlanmadığı noktalar

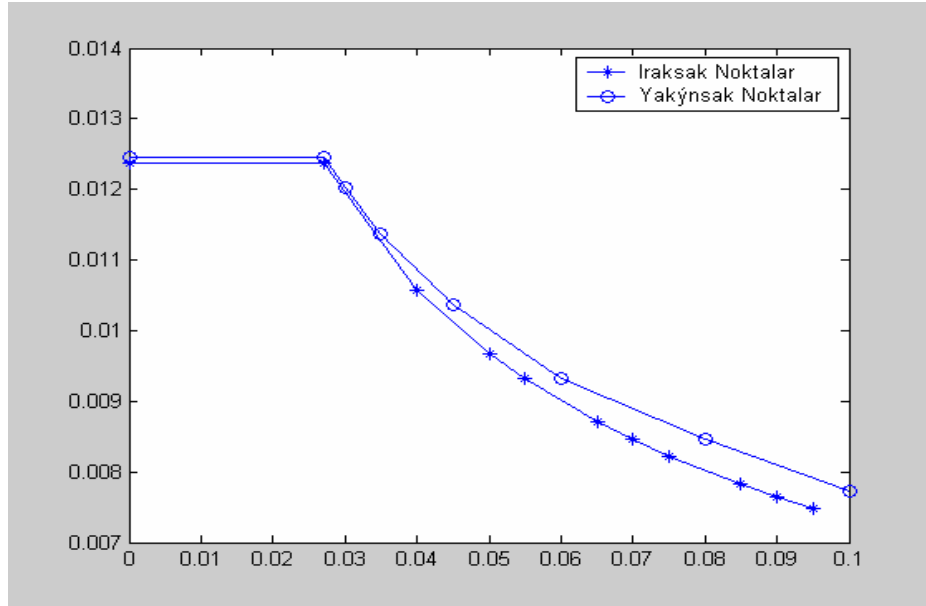
m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\xi_i \times 10^2$	2.6	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5
$\Delta\xi_i \times 10^2$	0.4	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
Iraksak			*		*	*		*	*	*		*	*	*	
Yakınsak	o	o		o			o				o				o

Yukarıdaki tabloya göre, elde edilen $g_i(\xi^2)$ doğrularının denklemleri aşağıdaki aralıklarda bulunmuştur:

$$g_1(\xi^2): \xi^2 \in (0.027, 0.030), \quad g_4(\xi^2): \xi^2 \in (0.045, 0.060),$$

$$g_2(\xi^2): \xi^2 \in (0.030, 0.035), \quad g_5(\xi^2): \xi^2 \in (0.060, 0.080),$$

$$g_3(\xi^2): \xi^2 \in (0.035, 0.045), \quad g_6(\xi^2): \xi^2 \in (0.080, 0.1).$$



Şekil 5.9: Tablo 5.7 de yazılan noktaların grafik üzerinde gösterilmesi

5.4. Parametrizasyon Yönteminin Eksik Yönleri

Parametrizasyon yöntemi sayısal analizde sık kullanılan bir yöntem olmakla birlikte, ele alınan problemde bu yöntemin uygulanmasında bazı olumsuz durumlar söz

konusu olmaktadır. Bunlar da söz konusu problem için, bu yöntemin dezavantajları olarak ortaya çıkmaktadır. Burada bunlar açıklanmaya çalışılacaktır.

Genel olarak ters problemler sayısal olarak çözümlenirken, her aşamada meydana çıkan hataların birikmesi belirli bir yerden sonra problemin çözümüne olumsuz yansımaktadır. Buna, kullanılan algoritmaya ya da yönteme birtakım iyileştirmeler yapılarak çözüm getirilmektedir. Zaten bu olay, ters problemlerin doğasında vardır ve hemen her ters problemin sayısal çözümünde ortaya çıkmaktadır [17,22,38,40]. Burada ise bahsedilen durum, ξ_i^2 noktalarının birbirine çok yakın olması sonucu (5.10) koşulunun sağlanmaması sonucu kendini göstermektedir.

Parametrizasyon yönteminde, eğrinin belirlenecek kısmı deneysel olarak verilen verilerin sayısına bağlıdır. Örneğin, plastiklik durumunda üç tane deneysel veri verilmiş ise ancak üç tane doğrunun eğimi bulunabilir, yani üç tane doğru denklemi belirlenebilir. Bu ise eğrinin ne kadarının bulunacağını, deneysel verilerin sayısına birebir bağlı olduğunu göstermektedir. Her bir deney için ise zamana ihtiyaç olduğundan mümkün olduğu kadar az deneysel veri kullanacak, hatta bunları kullanarak eğrinin tamamını belirleyebilecek bir yöntem ihtiyacı duyulmaktadır.

Ayrıca, bulunması gereken doğru sayısı ya da eğim sayısına bağlı olarak, parametrizasyon algoritmasının tekrar edilmesi gerekir, bu ise her ne kadar bilgisayarda yazılan bir program yardımı ile yapılsa da belli bir zaman kaybına yol açmaktadır.

Bütün bunlara ek olarak, parametrizasyon yönteminde esneklik limiti olarak tanımlanan ξ_0^2 değerinin bilindiği varsayılmıştır. Bu ise pratikte ancak ve ancak çok fazla sayıda deney ile mümkündür ki, bu da mühendislik açısından istenen bir durum değildir, çünkü her deneyde hem maddi kayıp hem de zaman kaybı söz konusudur.

6. TERS PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ İÇİN YENİ BİR YÖNTEM: YARI-ANALİTİK YÖNTEM

6.1. Yarı-Analitik Yöntem ve Bu Yöntemin Avantajları

Bir önceki bölümde bahsedildiği gibi, parametrizasyon yönteminin bazı eksiklikleri vardır. Bu nedenle, parametrizasyon yönteminin eksikliklerini giderecek hatta bununla da kalmayıp ondan daha kullanışlı ve pratik olabilecek bir yönteme ihtiyaç duyulmaktadır. Bu bölümde, “Yarı-Analitik” yöntem adı verilen bir yöntem tanıtılacak ve çeşitli örnekler üzerinde parametrizasyon yöntemiyle karşılaştırılacaktır. Bu amaçla, bahsedilen yöntem aşağıda ana hatlarıyla açıklanmıştır.

Bellidir ki, (5.6) ile verilen $g(\xi^2)$ fonksiyonunda üç bilinmeyen vardır. Bu bilinmeyenler şunlardır: G sertlik modülü, ξ_0^2 esneklik limiti ve κ zorlama sertlik parametresi. Eğer bu üç parametre bir şekilde yaklaşık olarak belirlenebilirse, (5.6) ile verilen eğrinin yaklaşımı bulunmuş olacaktır. Bu yöntem, temel olarak bunu amaçlamaktadır.

G sertlik modülü bir önceki bölümde anlatıldığı gibi, esneklik durumunda verilen bir veri çifti ile Algoritma 5.1 kullanılarak belirlenebilir.

Sonraki aşamada ise κ ve ξ_0^2 değerlerinin bulunması gerekmektedir. κ parametresi, daha sonra elde edilecek olan analitik bir formül yardımıyla bulunacaktır. Bundan dolayı bu yönteme “Yarı-Analitik yöntem” adı verilmiştir [49]. Bu formül elde edilirken plastiklik durumunda $g(\xi^2)$ fonksiyonunun analitik ifadesinden yararlanılacaktır.

ξ_0^2 esneklik limitinin bulunmasında da κ parametresinin bulunması için elde edilen formülün yanı sıra, ikiye bölme yönteminden yararlanılacaktır.

Bu yöntem parametrizasyon yöntemine göre hem daha kullanışlı hem de daha avantajlıdır. Daha önceden belirtildiği gibi, G sertlik modülünün bulunması için bir tane esneklik durumunda verilecek veri çifti yeterlidir. Daha sonra da görüleceği üzere, κ ve ξ_0^2 değerlerinin bulunması için de plastiklik durumunda iki tane veri çifti yeterli olacaktır. Yani, verilecek olan toplam üç tane veri çifti ile (5.6) ile tanımlanan eğrinin tamamı belirlenmiş olacaktır. Bu ise verilen yöntemin parametrizasyon yöntemine göre ne kadar kullanışlı ve avantajlı olduğunu gösterir.

Çünkü, parametrizasyon yönteminde bulunacak doğru parçalarının sayısı ya da eğrinin ne kadarının belirlenebileceği, verilen veri çiftine bağlıdır. Deney sayısının az olmasının ise hem zaman açısından hem de mühendislik açısından ne kadar önemli olduğu açıktır.

Ayrıca bu yöntemle eğri parça parça belirlenmeyeceği için, ξ_i^2 noktalarının birbirine çok yakın olması sonucu (5.10) koşulunun sağlanamaması gibi bir durum söz konusu olmayacaktır. Böylelikle parametrizasyon yönteminde olduğu gibi, yarı-analitik yöntemde herhangi bir iyileştirmeye ihtiyaç duyulmayacaktır.

Öncelikle κ parametresinin bulunması için bir formül elde edilecek, sonra ise ξ_0^2 esneklik limitinin nasıl bulunacağı anlatılacaktır.

6.2. κ Parametresinin Bulunması İçin Kullanılacak Olan Formülün Elde Edilmesi

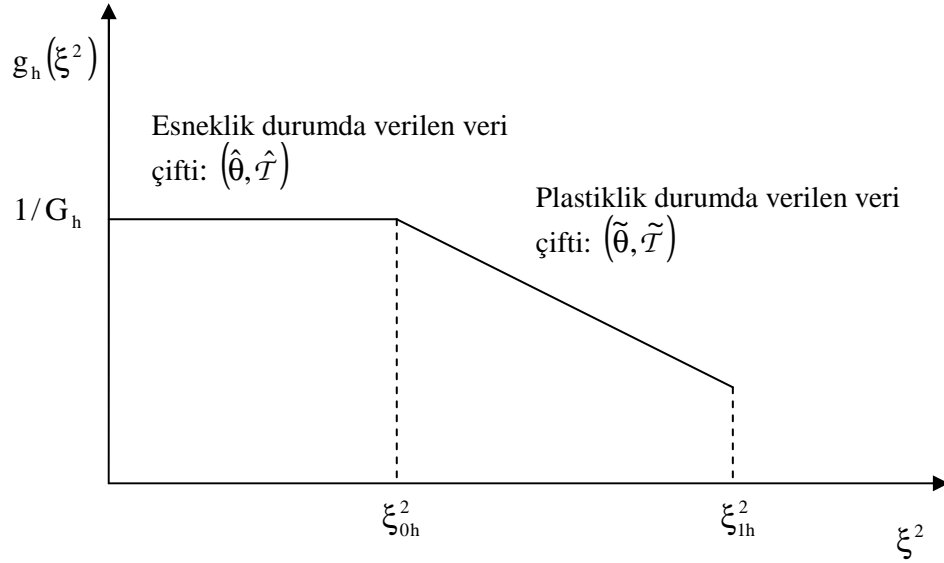
Şimdilik ξ_0^2 esneklik limiti değerinin yaklaşık olarak bilindiği varsayalım ve $\xi_0^2 \cong \xi_{0h}^2$ olsun. Bununla beraber G sertlik parametresi değerinin esneklik durumunda verilen $(\hat{\theta}, \hat{T})$ veri çifti için Algoritma 5.1 kullanılarak bulunduğu varsayalım ve $G \cong G_h$ olsun. Bu varsayımlar altında, plastik durumda verilen

herhangi bir deneysel veri çifti kullanılarak aşağıdaki elde edilen formül yardımıyla κ parametresinin bulunabilmesi mümkündür.

Plastiklik durumunda ele alınan veri çifti $(\tilde{\theta}, \tilde{\tau})$ ile gösterilsin. Bu takdirde açıktır ki, Algoritma 5.1 bir defa kullanılarak (β_1 bilinmeyenini bulmak için) aşağıda tanımlanan $g_h(\xi^2)$ fonksiyonu bulunabilir:

$$g_h(\xi^2) = \begin{cases} \beta_0 = 1/G_h, & \xi^2 \in (0, \xi_{0h}^2] \\ \beta_0 - \beta_1(\xi^2 - \xi_{0h}^2), & \xi^2 \in (\xi_{0h}^2, \xi_{1h}^2] \end{cases} \quad (6.1)$$

Daha sonra ise (3.1), (3.3) düz problemi (6.1) ile tanımlanan $g_h(\xi^2)$ giriş fonksiyonu için çözümlü $\xi_1^2 \equiv \xi_{1h}^2 = \max_{\Omega} |\nabla u|^2$ değeri bulunur (Şekil 5.1).



Şekil 6.1: κ parametresinin bulunması için (6.1) ile tanımlanan $g_h(\xi^2)$ fonksiyonu

Doğal olarak $(\xi_{1h}^2, g(\xi_{1h}^2))$ noktasının (5.6) fonksiyonu ile verilen eğrinin (plastiklik durumu için) üzerinde olması istenir. Bu ise

$$g(\xi_{1h}^2) = \frac{1}{G_h} \left(\xi_{1h}^2 / \xi_{0h}^2 \right)^{0.5(\kappa-1)}, \quad \xi_{1h}^2 > \xi_{0h}^2 \quad (6.2)$$

eşitliğinin sağlanması anlamına gelmektedir.

Yukarıdaki eşitliğin her iki yanını önce G_h ile çarpılırsa ve daha sonra ise her iki tarafın doğal logaritması alınırsa

$$\ln(g(\xi_{1h}^2) \times G_h) = 0.5(\kappa - 1) \ln(\xi_{1h}^2 / \xi_{0h}^2), \xi_{1h}^2 > \xi_{0h}^2$$

eşitliği bulunur. Buradan da κ parametresinin bulunması için aşağıdaki formül elde edilir:

$$\kappa = 1 + 2 \frac{\ln(G_h \times g(\xi_{1h}^2))}{\ln(\xi_{1h}^2 / \xi_{0h}^2)}. \quad (6.3)$$

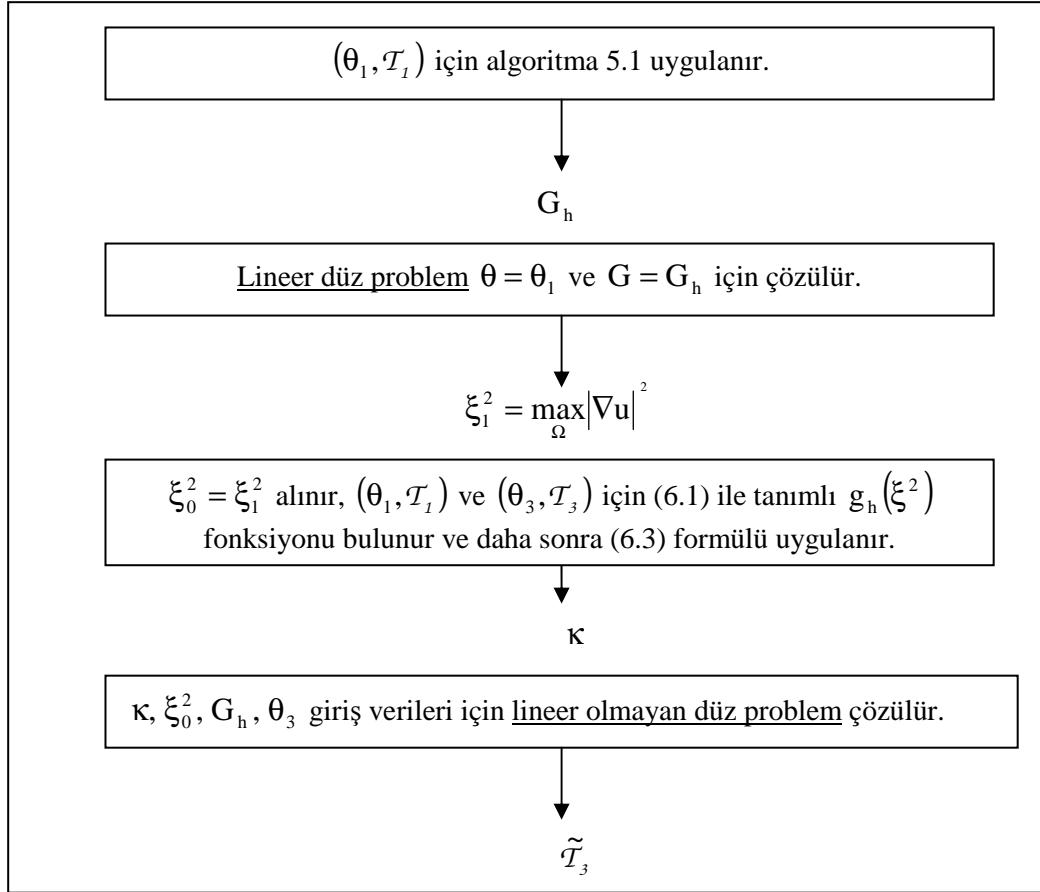
(6.3) formülü κ parametresinin yaklaşık olarak bulunması için analitik bir formüldür [49]. $g(\xi_{1h}^2)$ değerinin (6.1) yardımıyla hesaplanabileceği göz önüne alınırsa, (6.3) formülündeki tüm bilinmeyenler bulunmuş olacaktır.

6.3. ξ_0^2 Esneklik Limitinin Bulunması Yöntemi

Esneklik limitinin bulunması için yukarıda elde edilen (6.3) formülü kullanılacaktır. Öncelikle şu belirtmelidir ki, bu yöntemin uygulanabilmesi için bir tane esneklik durumunda, iki tane de plastiklik durumunda olmak üzere toplam üç tane $(\theta_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, 2, 3$ veri çiftine ihtiyaç duyulacaktır. Bunun için $(\theta_1, \mathcal{T}_1)$ veri çifti esneklik durumunda, $(\theta_2, \mathcal{T}_2), (\theta_3, \mathcal{T}_3)$ veri çifti ise plastiklik durumunda verilen veri çiftleri olsunlar. Bu takdirde, eğer θ_0 tam esneklik limitine karşı gelen burulma açısı ise, $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2 < \theta_3$ olacağı açıktır. Bu kabuller altında, yöntem aşağıda açıklanmıştır. Bu yöntemde temel amaç; ikiye bölme yöntemi uygulanarak, θ_0 açısının θ_{0h} yaklaşımının bulunması için (θ_1, θ_2) aralığı ikiye bölündükten sonra, θ_0 açısının bu aralığın hangi tarafında olacağına ilişkin bir değerlendirme elde etmektir.

Esneklik durumunda verilen $(\theta_1, \mathcal{T}_1)$ veri çifti kullanılarak, Algoritma 5.1 yardımı ile G_h değeri bulunur, daha sonra bu G_h değeri liner düz problemde yerine yazılarak bu problem sayısal olarak çözülür. Bu çözüm için $\max_{\Omega} |\nabla u|^2$ değeri hesaplandıktan sonra bu değer ξ_0^2 esneklik limiti olarak ele alınır.

Enselik durumdaki $(\theta_1, \mathcal{T}_1)$ ve plastiklik durumdaki $(\theta_3, \mathcal{T}_3)$ veri çiftleri ele alınarak, Şekil 6.1'deki $g_h(\xi^2)$ fonksiyonu bulunur ve (6.3) formülü yardımıyla κ elde edilir. Böylece, belirlenen G_h , ξ_0^2 , κ değerleri ile düz problem çözülerek $\tilde{\mathcal{T}}_3(\theta_1)$ burulma momenti değeri hesaplanır (Şekil 6.2).



Şekil 6.2: Esneklik limitinin (ξ_0^2) bulunması yönteminin şematik olarak açıklanması

Yukarıda $(\theta_1, \mathcal{T}_1)$ veri çifti için yapılan işlemler benzer şekilde $(\theta_2, \mathcal{T}_2)$ veri çifti için de tekrar edilir. Burada dikkat edilmesi gereken husus şudur: $(\theta_2, \mathcal{T}_2)$ veri çifti,

sanki esneklik durum için verilmiş gibi kabul edilir. Bu işlemler sonucunda elde edilmesi gereken burulma momenti ise $\tilde{\mathcal{T}}_3(\theta_2)$ ile gösterilsin.

Eğer, $\tilde{\mathcal{T}}_3 \leq \mathcal{T}_3 \leq \tilde{\mathcal{T}}_3$ veya $\tilde{\mathcal{T}}_3 \geq \mathcal{T}_3 \geq \tilde{\mathcal{T}}_3$ gibi bir ilişki elde edilebilirse o halde ikiye bölme yöntemi, θ_0 açısının yaklaşımının bulunması için aşağıda anlatıldığı gibi kullanılabilir.

$\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$ olmak üzere, örneğin $\tilde{\mathcal{T}}_3(\theta_1) < \mathcal{T}_3(\theta_0) < \tilde{\mathcal{T}}_3(\theta_3)$ elde edilsin. Böylece, θ_0 açısının yaklaşımının bulunması için aşağıdaki algoritma uygulanabilir. Buradaki $\tilde{\mathcal{T}}_3(\theta_1)$, $\mathcal{T}_3(\theta_0)$, $\tilde{\mathcal{T}}_3(\theta_3)$ gösterimlerinin anlamı şudur: Örneğin, $\tilde{\mathcal{T}}_3(\theta_1)$ gösterimi ile tam esneklik limitine karşılık gelen açı θ_0 iken θ_1 kabul edilmiş ve \mathcal{T}_3 burulma momenti değeri bu kabul altında bulunmuştur.

Algoritma 6.1.

- 1) ε belirlenir ve $\theta_0^{(1)} = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$ alınır.
- 2) Lineer düz problem $\theta = \theta_0^{(1)}$ için çözülerek, yukarıda anlatıldığı gibi (şekil 6.2 de gösterilen adımlar uygulanır) $\mathcal{T}_3(\theta_0^{(1)})$ burulma momenti hesaplanır.
- 3) Eğer $|\mathcal{T}_3(\theta_0^{(1)}) - \mathcal{T}_3| < \varepsilon$ ise bu taktirde $\theta_{0h} = \theta_0^{(1)}$ için düz problem çözülerek $\xi_0^2 = \max_{\Omega} |\nabla u|^2$ değeri hesaplanır ve $\xi_{0h}^2 = \xi_0^2$ alınır.
- 4) $\mathcal{T}_3(\theta_0^{(1)}) - \mathcal{T}_3 > 0$ ise $(\theta_1, \theta_0^{(1)})$ aralığı için (1)-(3) adımları uygulanır.
- 5) $\mathcal{T}_3(\theta_0^{(1)}) - \mathcal{T}_3 < 0$ ise $(\theta_0^{(1)}, \theta_2)$ aralığı için (1)-(3) adımları uygulanır.

6.4. Yarı-Analitik Yöntemin Sayısal Örnekler Üzerinde İncelenmesi Ve Parametrizasyon Yöntemi İle Karşılaştırılması

Hatırlanacağı gibi dördüncü bölümde parametrizasyon yöntemi kullanılarak, sert ve yumuşak malzemeler için hem kesin deneysel verili ters problem hem de çeşitli

deney hatalarıyla verilmiş ters problem çözülmüştü. Bu bölümde aynı örnekler, Yarı-Analitik yöntem ile çözülecek ve sonuçlar karşılaştırılacaktır.

Örnek 6.1.

Bu örnekte, ele alınan ters problemin çözümü Yarı-Analitik yöntem ile bulunacak ve elde edilen sonuçlar parametrizasyon yöntemiyle karşılaştırılacaktır. Ters problemin yarı-analitik yöntem ile çözülmesi için, öncelikle esneklik limiti değerinin yaklaşık olarak bulunması gerekmektedir. Bunun için ise bir tane esneklik durumda iki tanede plastiklik durumda olmak üzere toplamda üç tane veri çifti gerekecektir. Tablo 6.1’de hem sert ($E=210$ GPa) hem de yumuşak ($E=110$ GPa) malzemeler için ters problemin çözümünde kullanılacak veri çiftleri verilmiştir. Burada $m = 0$ durumu esnek duruma, diğer durumlarda plastiklik duruma karşılık gelmektedir. Tablo 6.1, Tablo 5.3 ve Tablo 5.4’te koyu olarak yazılan verilerin bir arada gösterilmiş şeklidir. Yani, yarı-analitik yöntem ve parametrizasyon yönteminde aynı giriş verileri kullanılmıştır.

Tablo 6.1: Sert ve yumuşak malzemeler için ters problemin çözümünde kullanılacak olan veri çiftleri

$E = 210$ GPa, $\kappa = 0.2$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$\theta \times 10^3$	2.2	3.3	3.6	3.7	3.85
$\xi_m^2 \times 10^2$	1.3	4.0	6.6	7.9	10
$T \times 10^2$	2.48	3.75	4.21	4.41	4.71
$E = 110$ GPa, $\kappa = 0.2$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$\theta \times 10^3$	4.4	5.58	5.97	6.28	6.6
$\xi_m^2 \times 10^2$	1.4	3.6	5.2	7.1	9.8
$T \times 10^2$	2.59	3.35	3.68	4.00	4.39

İlk olarak , Tablo 6.1’de verilen $(\theta_0, \mathcal{T}_0)$, $(\theta_2, \mathcal{T}_2)$ veri çifti ele alınsın. Bu durumda, anlatılan yönteme göre yapılan işlemler sırası ile aşağıda verilmiş ve bunlar aynı zamanda Tablo 6.2’de gösterilmiştir.

(a) Esneklik durumunda verilen $(\theta_0, \mathcal{T}_0)$ veri çifti için Algoritma 5.1'den yararlanılarak $G_h = 80.50$ olarak elde edilmiştir. Buna göre, $\beta_0 = 1/G_h = 0.0124$ olarak hesaplanır.

(b) Bulunan $G_h = 80.50$ değeri lineer düz problemde yazılarak $\max_{\Omega} |\nabla u|^2 = 0.013$ olarak hesaplanmış ve bu değer ξ_0^2 olarak ele alınmıştır. Yani, $\xi_0^2 = 0.013$.

(c) Bu iki veri çifti için parametrizasyon yönteminden yararlanılarak $\beta_1 = 0.1110$ olarak elde edilmiş ve (6.1) ile tanımlı $g_h(\xi^2)$ fonksiyonu belirlenmiştir:

$$g_h(\xi^2) = \begin{cases} 0.0124, & \xi^2 \leq 0.013 \\ 0.0124 - 0.1110(\xi^2 - 0.013), & \xi^2 > 0.013 \end{cases}$$

(d) Yukarıda belirlenen $g_h(\xi^2)$ fonksiyonu giriş verisi kabul edilip $\theta = \theta_3$ için düz problem çözülmüş ve $\max_{\Omega} |\nabla u|^2 = 0.067$ bulunarak bu değer ξ_{1h}^2 olarak ele alınmıştır.

(e) Bulunan ξ_{1h}^2 değeri, (c) de elde edilen $g_h(\xi^2)$ fonksiyonunda yazılmış ve $g_h(\xi_{1h}^2)$ değeri hesaplanmıştır.

(f) (6.3) formülü yardımıyla κ belirlenmiş ve daha sonra \mathcal{T}_3 burulma momenti hesaplanmıştır.

Daha sonra Tablo 6.1'de verilen $(\theta_1, \mathcal{T}_1), (\theta_2, \mathcal{T}_2)$ veri çifti ele alınarak yukarıdaki işlemler tekrar edilmiş ve sonuçlar Tablo 6.2'de gösterilmiştir. Tablodaki birinci satır $(\theta_0, \mathcal{T}_0), (\theta_2, \mathcal{T}_2)$ veri çifti için, ikinci satır ise $(\theta_1, \mathcal{T}_1), (\theta_2, \mathcal{T}_2)$ veri çifti için bulunan sonuçları göstermektedir.

Tablo 6.2: Sert malzeme için esneklik limitinin bulunması için \mathcal{T}_3 burulma momentlerinin elde edilmesi

G_h	ξ_0^2	$g_h(\xi^2)$ (plastiklik durumunda)	ξ_{lh}^2	$g_h(\xi_{lh}^2)$	κ	$\mathcal{T}_3 \times 10^2$
80.50	0.013	$0.0124 - 0.1110(\xi^2 - 0.013)$	0.0645	0.0067	0.2275	3.88
81.50	0.035	$0.0123 - 0.0855(\xi^2 - 0.035)$	0.0683	0.0095	0.2346	4.63

Tablo 6.2'den görüldüğü gibi, yukarıda anlatılan esneklik yönteminin bulunmasında adı geçen $\tilde{\mathcal{T}}_3$ ve $\tilde{\tilde{\mathcal{T}}}_3$ burulma momentleri sırası ile 3.88×10^{-2} ve 4.69×10^{-2} olarak bulunmuştur. Tablo 6.1'den $\mathcal{T}_3 = 4.21 \times 10^{-2}$ olduğu göz önüne alınırsa, $\tilde{\mathcal{T}}_3 \leq \mathcal{T}_3 \leq \tilde{\tilde{\mathcal{T}}}_3$ elde edilir ki, buradan Algoritma 6.1 kullanılarak tam esneklik limitine karşılık gelen θ_0 açısının θ_{0h} yaklaşımı bulunabilir.

Tablo 6.3: Sert malzeme için esneklik limitinin bulunması için ikiye bölme yöntemi

i	$\theta_0^i \times 10^3$	$\mathcal{T}_3(\theta_0^i) \times 10^2$	$ \mathcal{T}_3(\theta_0^i) - \mathcal{T}_3 $
1	2.75	3.08	1.1×10^{-2}
2	3.03	3.39	8.2×10^{-3}

$\varepsilon = 10^{-2}$ alınarak Algoritma 6.1 uygulanmış ve iki iterasyon sonucu $\theta_{0h} = 0.00303$ olarak elde edilmiştir. Burada iterasyon sayısı, ele alınan veri çiftlerine bağlı olarak değişecektir. Son aşamada ise $\theta_{0h} = 0.00303$ için lineer düz problem çözülerek $\xi_0^2 \approx 0.0252$ olarak elde edilmiştir. Bu ise esneklik limitinin yaklaşık değeri olarak kabul edilecektir. Böylece sert malzeme için esneklik limiti, yaklaşık olarak belirlenmiş oldu.

Şimdi ise (6.3) formülünden yararlanarak κ parametresinin değeri yaklaşık olarak bulunacaktır. Tablo 6.4'te her bir plastiklik durum için ayrı ayrı (6.3) formülünün uygulanması sonucu elde edilen κ değerleri gösterilmiştir. Bu tablodan da

görüldüğü gibi, $\Delta\theta$ adımı arttıkça $\kappa = 0.2$ değerine daha iyi bir yaklaşım söz konusudur. Şekil 6.2’de ise sert malzeme için kesin deneysel verili ters problemin, parametrizasyon yöntemi ve yarı-analitik yöntem ile çözümleri gösterilmiştir. Ayrıca, yumuşak malzeme için kesin deneysel verili ters problemin yarı-analitik yöntem ile çözümü için yapılan işlemler Tablo 6.5 ve Tablo 6.6’da gösterilmiştir.

Tablo 6.4: $\xi_0^2 \approx 0.0252$ için plastiklik durumda verilen her bir veri çifti için (6.3) formülü kullanılarak κ nın belirlenmesi

$(\theta \times 10^3, \mathcal{T} \times 10^2)$	$\Delta\theta \times 10^3$	$g_h(\xi^2)$ (plastiklik durum)	ξ_{lh}^2	$g_h(\xi_{lh}^2)$	κ
(3.30,3.75)	1.1	$0.0124-0.1385(\xi^2 - 0.0252)$	0.030	0.0117	0.35
(3.60,4.21)	1.4	$0.0124-0.0900(\xi^2 - 0.0252)$	0.058	0.0094	0.34
(3.70,4.41)	1.5	$0.0124-0.0800(\xi^2 - 0.0252)$	0.070	0.0088	0.33
(3.85,4.71)	1.65	$0.0124-0.0670(\xi^2 - 0.0252)$	0.092	0.0073	0.30

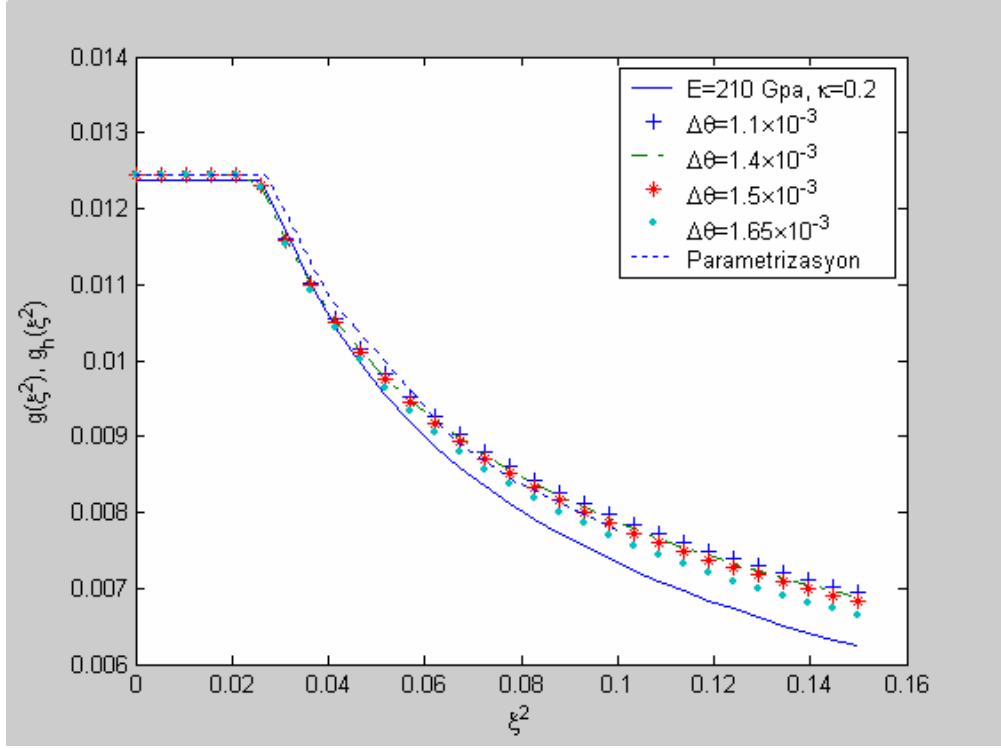
Tablo 6.5: Yumuşak malzeme için esneklik limitinin bulunması için \mathcal{T}_3 burulma momentlerinin elde edilmesi

G_h	ξ_0^2	$g_h(\xi^2)$ (plastiklik durumda)	ξ_{lh}^2	$g_h(\xi_{lh}^2)$	κ	$\mathcal{T}_3 \times 10^2$
42.00	0.014	$0.0238-0.2480(\xi^2 - 0.014)$	0.0510	0.0146	0.2434	3.40
43.20	0.024	$0.0231-0.1930(\xi^2 - 0.024)$	0.0540	0.0173	0.2818	3.94

$\varepsilon = 10^{-2}$ alınarak Algoritma 6.1 uygulanmış ve iki iterasyon sonucu $\theta_{0h} = 0.00513$ olarak elde edilmiştir. Son aşamada ise $\theta_{0h} = 0.00513$ için lineer düz problem çözümlenerek $\xi_0^2 \approx 0.0185$ olarak elde edilmiştir. Bu ise esneklik limitinin yaklaşık değeri olarak kabul edilecektir. Böylece sert malzeme için esneklik limiti, yaklaşık olarak belirlenmiş oldu.

Tablo 6.6: $\xi_0^2 \approx 0.0185$ için plastiklik durumda verilen her bir veri çifti için (6.3) formülü kullanılarak κ nın belirlenmesi

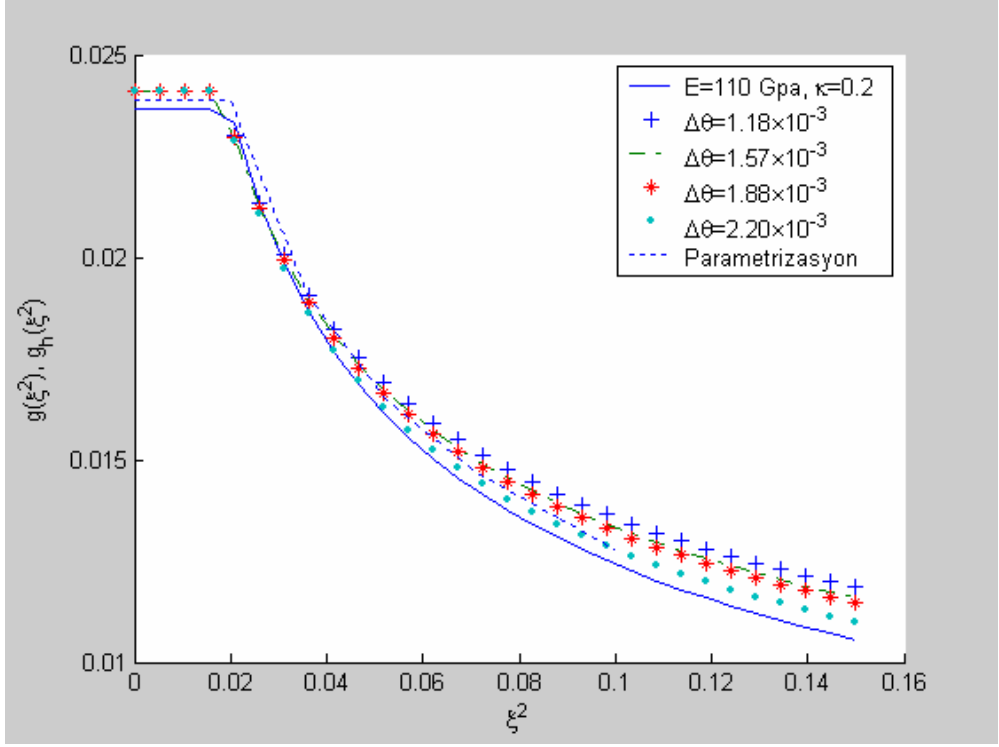
$(\theta \times 10^3, \mathcal{T} \times 10^2)$	$\Delta\theta \times 10^3$	$g_h(\xi^2)$ (plastiklik durum)	ξ_{lh}^2	$g_h(\xi_{lh}^2)$	κ
(5.58,3.35)	1.18	$0.0238-0.2900(\xi^2 - 0.0185)$	0.033	0.0196	0.33
(5.97,3.68)	1.57	$0.0238-0.2230(\xi^2 - 0.0185)$	0.048	0.0172	0.31
(6.28,4.00)	1.88	$0.0238-0.1800(\xi^2 - 0.0185)$	0.066	0.0153	0.30
(6.6,4.39)	2.20	$0.0238-0.1390(\xi^2 - 0.0185)$	0.095	0.0130	0.27



Şekil 6.3: Sert malzeme için kesin deneysel verili ters problemin parametrizasyon ve yarı-analitik yöntem ile çözümü

Tablo 6.7: Sert malzeme için kesin deneysel verili ters problemin parametrizasyon ve yarı-analitik yöntemle çözümü için hata değerlendirmesi, $\Delta\theta = 1.65 \times 10^{-3}$

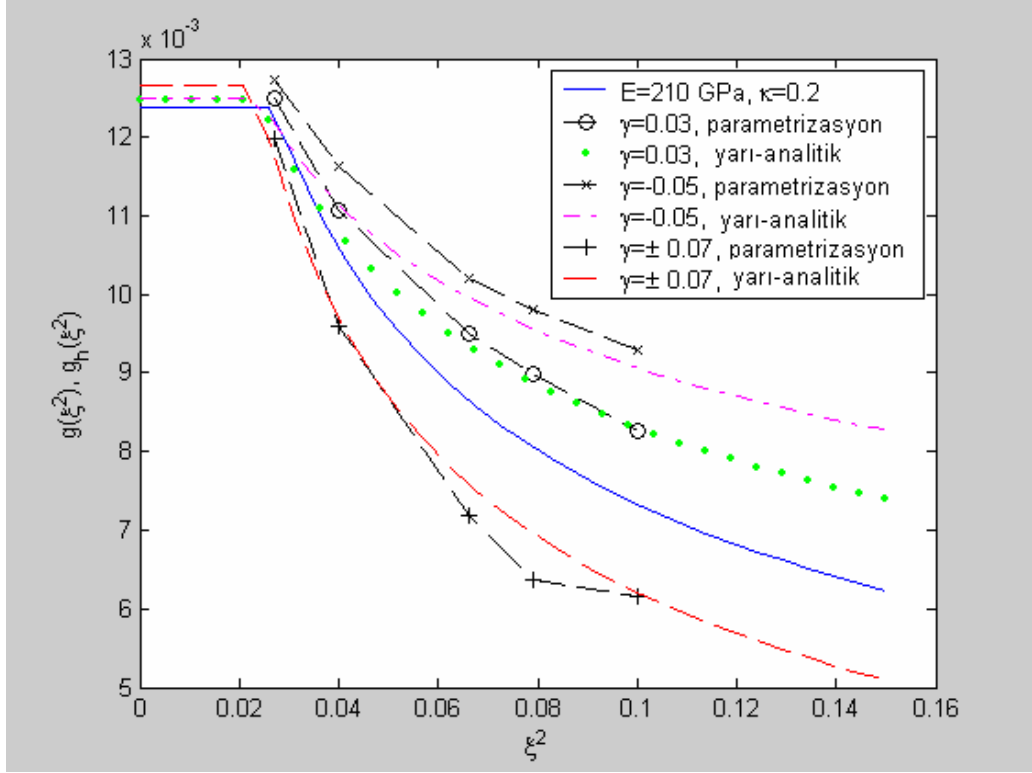
Mutlak ve Bağıl Hata	Parametrizasyon yöntemi	Yarı-analitik yöntem
ϵ_g	4.4×10^{-4}	1.7×10^{-4}
δ_g	6.0×10^{-2}	1.5×10^{-2}



Şekil 6.4: Yumuşak malzeme için kesin deneysel verili ters problemin parametrizasyon ve yarı-analitik yöntem ile çözümü

Tablo 6.8: Yumuşak malzeme için kesin deneysel verili ters problemin parametrizasyon ve yarı-analitik yöntemle çözümü için hata değerlendirmesi, $\Delta\theta = 2.20 \times 10^{-3}$

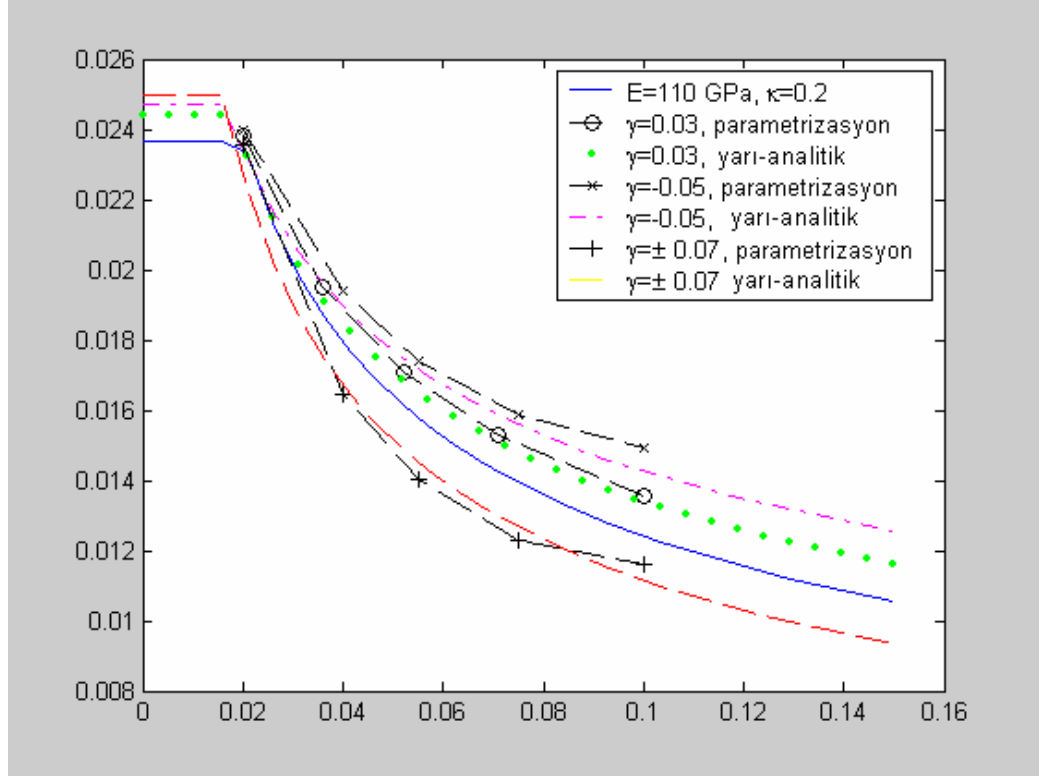
Mutlak ve Bağıl Hata	Parametrizasyon yöntemi	Yarı-analitik yöntem
ϵ_g	4.6×10^{-4}	4.3×10^{-4}
δ_g	4.2×10^{-2}	1.9×10^{-2}



Şekil 6.5: Sert malzeme için deney hatalarıyla verilmiş ters problemin parametrizasyon ve yarı-analitik yöntem ile çözümü, $\Delta\theta = 1.65 \times 10^{-3}$

Tablo 6.9: Sert malzeme için deney hatalarıyla verilmiş ters problemin parametrizasyon ve yarı-analitik yöntemle çözümü için hata değerlendirilmesi, $\Delta\theta = 1.65 \times 10^{-3}$

γ	ϵ_g (Parametrizasyon)	ϵ_g (Yarı-analitik)	δ_g (Parametrizasyon)	δ_g (Yarı-analitik)
+0.03	9.3×10^{-4}	8.5×10^{-4}	1.3×10^{-1}	1.0×10^{-1}
-0.05	2.0×10^{-3}	1.0×10^{-3}	2.7×10^{-1}	1.9×10^{-1}
± 0.07	2.2×10^{-3}	1.3×10^{-3}	2.8×10^{-1}	2.1×10^{-1}



Şekil 6.6: Yumuşak malzeme için deney hatalarıyla verilmiş ters problemin parametrizasyon ve yarı-analitik yöntem ile çözümü, $\Delta\theta = 2.20 \times 10^{-3}$

Tablo 6.10: Yumuşak malzeme için deney hatalarıyla verilmiş ters problemin parametrizasyon ve yarı-analitik yöntemle çözümü için hata değerlendirmesi, $\Delta\theta = 2.20 \times 10^{-3}$

γ	ϵ_g (Parametrizasyon)	ϵ_g (Yarı-analitik)	δ_g (Parametrizasyon)	δ_g (Yarı-analitik)
+0.03	1.2×10^{-3}	1.0×10^{-3}	9.3×10^{-2}	8.6×10^{-2}
-0.05	2.5×10^{-3}	2.3×10^{-3}	2.0×10^{-1}	1.7×10^{-1}
± 0.07	2.6×10^{-3}	2.4×10^{-3}	2.2×10^{-1}	1.9×10^{-1}

Şekil 6.3 ve Şekil 6.4'ten görüldüğü gibi, $\Delta\theta$ farkının ilk üç değeri için parametrizasyon yöntemi ile bulunan yaklaşım daha iyi bir yaklaşımdır. Ancak, $\Delta\theta$ nın sert ve yumuşak malzeme için sırasıyla $\Delta\theta = 1.65 \times 10^{-3}$ ve $\Delta\theta = 2.20 \times 10^{-3}$ değerlerinde hemen hemen parametrizasyon yöntemi ile bulunan yaklaşım ve Yarı-Analitik yöntem ile bulunan yaklaşım aynıdır. Bu ise kullanılan deney sayıları göz önüne alındığında önerilen yöntemin etkili bir yöntem olduğunu göstermektedir.

Tablo 6.9 ve Tablo 6.10'daki hata değerlendirmeleri verilirken, ters problemin çözümü sırasında yukarıdaki $\Delta\theta$ adımları ele alınmıştır.

SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Sonuçlar:

1. Esnek olmayan çubuğun burulmasının matematiksel modeli verilmiş ve bu modele karşılık gelen lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel problem, monoton ve potansiyel operatörler teorisi çerçevesinde incelenmiştir.
2. Esnek olmayan çubuğun burulması ile ilgili düz ve ters problemler tanımlanmış ve düz problemin çözümü için zayıf çözüme dayalı sonlu fark şeması verilmiştir.
3. Esnek çubuğun burulması problemi değişkenlere ayırma yöntemi ile çözülmüş ve çeşitli dikdörtgen kesitler ele alınarak burulma momenti için analitik formül elde edilmiştir.
3. Ters problemin çözümü için parametrizasyon yöntemi çeşitli örnekler üzerinde incelenmiştir.
4. Parametrizasyon yönteminin eksik yönleri anlatılarak “yarı-analitik” yöntem adı verilen yeni bir yöntem tanıtılmıştır.
5. Hem parametrizasyon yöntemi hem de “yarı-analitik” yöntem ile hatasız ve deney hatalarıyla verilen ters problemler çözülmüş ve hata analizleri verilmiştir.

Öneriler:

1. Tezdeki sonuçlar fizik ve matematikte çeşitli problemlere uygulanabilir.

2. Tezde burulma problemi için geliştirilmiş olan algoritma ve yöntemler sert cisim mekaniğinin eğilme, deformasyon gibi farklı problemlerinin sayısal çözümlerinde kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Karagöz, S., “Mukavemet”, *Aymyo Yayınları*, Aydın, 4-6, (2007).
- [2] Emiroğlu, M., 2009, Cisimlerin Dayanımı (Mukavemet), <http://www.duzce.edu.tr/~mehmetemiroglu/Belgeler/temelkavramlar.pdf>, (**Ziyaret Tarihi: 20 Nisan 2010**).
- [3] Beer, F.P., Johnston, E.R., “Cisimlerin Mukavemeti”, Akgün., Ö.R., Yazıcıoğlu, O., Kotil, T., *Beta Basım Yayın Dağıtım*, İstanbul, 90-93, (2003).
- [4] Goldstein, H., “Klasik Mekanik”, Cinemre, V., *Çağlayan Basımevi*, İstanbul, 1-27, (1974).
- [5] Kutay, M.G., Mukavemet Değerleri, 2009, http://www.guvenkutay.ch/index_8.htm, (**Ziyaret tarihi: Mart 2010**).
- [6] Case, J., Chilver, L., Ross., T.F., “Strength of Materials and Structures”, 4nd ed., *John Wiley&Sons, Inc*, 13-14, (1999).
- [7] Timoshenko, S.P., “History of Strength of Materials”, *McGraw-Hill*, New York, 216-268, (1953).
- [8] Timoshenko, S.P., Goodiyer, J.N., ” Theory of Elasticity (3th ed.)”, *McGraw-Hill Book Company*, New York, 1-27, (1951).
- [9] Sadd, M.H., “Elasticity, Theory, Applications and Numerics ”, *Elsevier*, 27-61, (2005).
- [10] Bakioğlu, M., “Cisimlerin Mukavemeti”, *Beta Yayın Dağıtım*, 10-45, (2001).
- [11] Barber, J.R., “Elasticity”, *Kluwer Academic Publishers*, 1-29, (2004).
- [12] Gere, J.M., Goodno, J.B., “Mechanics of Materials”, 7nd ed, *Cengage Learning*, 27-43, (2009).
- [13] Chou, P.C, Pagano, N.J, “Elasticity”, *Dover Publicaitons*, 18–22, 37-45, 56-64, 123-130, (1992).
- [14] Kachanov, L. M., “Fundamentals of the Theory of Plasticity”, *Mir Publishers, Moscow*, English translation, 46-47, (1974).
- [15] Payne, L. E., Philippin, G.A, “Some Applications of The Maximum Principle in the Problem of Torsional Creep”, *Siam J. Appl. Math* Vol: 33, No: 3, 446–455, (1977).

- [16] Hasanov, A., “Inverse Coefficient Problems for Elliptic Variational Inequalities with a Nonlinear Monotone Operator”, *Inverse Problems*, 14, 1151-1169, (1998).
- [17] Hasanov, A., Seyidmamedov, Z., “Determination of Unknown Elastoplastic Properties in Signorini Problem”, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 33, 979-991, (1998).
- [18] Hasanoglu (Hasanov), A., “Varyasyonel Problemler ve Sonlu Elemanlar Yöntemi”, *Literatür*, İstanbul, 25-43, (2001).
- [19] Zeidler, E., “Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, II/B: Nonlinear Monotone Operators”, *Springer Verlag*, New York, 506-507, (1990).
- [20] Vainberg, M. M, “Variational Method and Method of Monotone Operators in Theory of Nonlinear Equations”, *John Wiley&Sons, Inc.*, New York, 15-17, (1972).
- [21] Rektorys, K., “Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering”, *D.Reidel Publishing Company*, Boston, 276-277, (1977).
- [22] Hasanov, A., “An Inverse Problem for an Elastoplastic Medium”, *SIAM J. Appl. Math.*, 55, 1736-1752, (1995).
- [23] Hasanov, A., “Inverse Coefficient Problems for Monotone Potential Operators”, *Inverse Problems*, 13, 1265-1278, (1997).
- [24] Ivanov, V.K., Vasin, V.V., “Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications”, *Nauka*, Moscow, 78-83, (1978)
- [25] Tanana, V.P., “Methods For Solving Operator Equations ”, *VSP International Science Publishers*, 47-48, (1997).
- [26] Hasanov, A., Erdem, A., “Determination of unknown coefficient in a nonlinear elliptic problem related to the elasto-plastic torsion of a bar”, *IMA Journal of Applied Mathematics*, 73, 579-591, (2008) .
- [27] Hasanov, A., Tatar, S., “An inversion method for identification of elastoplastic properties of a beam from torsional experiment ”, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, Vol: 45, No: 5, 562-571, (2010).
- [28] Polyanin, A.D., 2004, Linear Partial Differential Equations of Mathematical Physics, <http://eqworld.ipmnet.ru/EN/SOLUTIONS/lpde/lpde301.pdf>, (**Ziyaret Tarihi: 20 Nisan 2010**).
- [29] Çağlıyan, M., Çelebi, O., “Kısmi Diferensiyel Denklemler”, *Dora Basım-Yayın Dağıtım*, 250-253, (2010).
- [30] Strauss, Walter.A., “Partial Differential Equations”, , *John Wiley& Sons,Inc*, 155-158, (2008).

- [31] Hasanov, A., Tatar, S., “Solutions of linear and nonlinear problems related to torsional rigidity of a beam ”, *Computational Materials Science*, Vol: 45, No: 2, 494-498, (2009).
- [32] Bertola, V., Cafaro, V., “Geometric Approach to Laminar Convection”, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol: 19, No:14, 581-583, (2005).
- [33] Najera, A., Herrera, J., “Torsional rigidity of Non-Circular Bars in Mechanism and Machines “, *Mechanism and Machine Theory*, Vol: 40, No:5, 638-643, (2005).
- [34] Teschl, G., “Nonlinear Functional Analysis”, *Vienna, Austria*, 22,23, (2001).
- [35] Showalter, R.E., “Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations”, *Mathematical Surveys and Monographs*, No: 49, 37-38, (1997).
- [36] Kreyszig, E., “Introductory Functional Analysis with Applications”, *John Wiley&Sons*, 256-260, (1978).
- [37] Hasanov, A., “Convexity Argument for Monotone Potential Operators and its Application”, *Nonlinear Analysis* 41, 907-919, (2000).
- [38] Hasanov, A., “Monotonicity of non-linear boundary value problems related to deformation theory of plasticity”, *Mathematical Problems in Engineering*, 1-18, (2006).
- [39] Hasanov, A., “Variational approach to nonlinear boundary value problems for elasto-plastic incompressible bending plate”, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 42, 711-721, (2007).
- [40] Hasanov, A., “Integral convexity argument for plasticity function and monotonicity of iteration process for elasto-plastic problems”, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 39 , 1217-1226, (2004).
- [41] Samarskii, A., “The Theory of Difference Schemes”, *CRC Press*, 57-60 (2001).
- [42] Amirali, G., Duru, H., “Nümerik Analiz”, *Pegem Akademi Yayıncılık*, 78-85, (2002).
- [43] Atkinson, K., Han, W., “Elementary Numerical Analysis”, 232-236, *Wiley*, (2003).
- [44] Epperson, J.F., “An introduction to Numerical Methods and Analysis”, 44-47, *Wiley*, (2007).
- [45] Tatar S, “Esnek Olmayan Çubuğun Bükülmesi ile İlgili Monoton Operatörlü Ters Katsayı Probleminin Çözümü”, Yüksek Lisans Tezi, *Kocaeli Fen Bilimleri Enstitüsü*, İzmit, 50–52, (2007).

- [46] Y. Wei, J.W. Hutchinson, Hardness trends in micron scale indentation, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol: 51, 2040-2042, (2003).
- [47] Cao, Y.P., Lu, J., “A New Method to extract the plastic properties of metal materials from an instrumented spherical indentation loading curve”, *Acta Materials*, Vol:52, 4024-4026, (2004).
- [48] Protter, M.H., Weinberger, H.F., “Maximum Principles in Differential Equations”, *Springer*, 61-67, (2004).
- [49] Hasanov, A., Tatar, S., “Semi-analytic inversion method for determination of elastoplastic properties of power hardening materials from limited torsional experiment”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, Vol: 18, No: 2, 272-273, (2010).

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Gaziantep'te doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Gaziantep'te tamamladı. 1999 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2004 yılında mezun oldu. Aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2007 yılında ise Yüksek Lisans öğrenimini bitirerek Doktora öğrenimine başladı. 2006 yılından beri Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.