

**GÖZENEKLİ BİR YÜZEY ÜZERİNDE NEWTONYEN
OLMAYAN AKIŞKAN AKIŞININ İNCELENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özgür CİVAN

DANIŞMAN

Prof. Dr. Muhammet YÜRÜSOY

Makine Eğitimi

Haziran 2011

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÖZENEKLİ BİR YÜZEY ÜZERİNDE NEWTONYEN OLMAYAN AKIŞKAN
AKIŞININ İNCELENMESİ

Özgür CİVAN

DANIŞMAN
Prof. Dr. Muhammet YÜRÜSOY

MAKİNE EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

Haziran 2011

TEZ ONAY SAYFASI

Özgür CİVAN tarafından hazırlanan “**GÖZENEKLİ BİR YÜZEY ÜZERİNDE NEWTONYEN OLMAYAN AKIŞKAN AKIŞININ İNCELENMESİ**” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca **13/06/2011** tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Makine Eğitimi Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Muhammet YÜRÜSOY

Başkan	: Doç. Dr. Hüseyin BAYRAKÇEKEN Teknoloji Fakültesi,	İmza
Üye	: Prof. Dr. Muhammet YÜRÜSOY Teknoloji Fakültesi,	İmza
Üye	: Doç. Dr. İsmail DEMİR Teknik Eğitim Fakültesi,	İmza

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
...../...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mevlüt DOĞAN
Enstitü Müdürü

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

**GÖZENEKLİ BİR YÜZEY ÜZERİNDE NEWTONYEN OLMAYAN AKIŞKAN
AKIŞININ İNCELENMESİ**

Özgür CİVAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Makine Eğitimi Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Muhammet YÜRÜSOY

Bu çalışmada, non-Newtonyen bir akışkan modelinin gözenekli bir yüzey üzerindeki akışı incelenmiştir. İkinci derece Power-Law akışkanlara ait en genel hareket denklemlerinden faydalanılarak tek boyutlu akış için momentum denklemleri elde edilmiştir. Elde edilen bu denklemler boyutlu denklemler olup daha genel hale getirilmek için boyutsuz hale dönüştürülmüştür. Denklemler boyutsuz hale getirildikten sonra gözenekli bir yüzey üzerindeki tek boyutlu akışı ifade eden sınır tabakası denklemleri ve sınır şartları belirlenmiştir. Sonuçta kartezyen koordinatlarda tek boyutlu akışı ifade eden adi diferansiyel denklem sistemi elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen sınır tabakası denklemi ve sınır şartları Matlab Sbvpa Paket programına aktararak nümerik çözümler yapılmıştır. Yapılan çözümlerde y yönünde tek boyutlu akış ele alınmıştır. Elde edilen bu verilere göre v_0 , ε , ε_1 , m gibi değişkenlerin farklı değerleri için grafikler çizilip akışkan hızı ve sınır tabakası kalınlığı üzerindeki etkileri incelenmiştir.

2011, vi + 52 sayfa

Anahtar Kelimeler: : Newtonyen Olmayan Akışkanlar, Gözenekli Yüzey, Nümerik Çözümler

ABSTRACT
M.Sc Thesis

INVESTIGATION OF NON-NEWTONIAN FLUID FLOW OVER A POROUS
PLANE

Özgür CİVAN

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mechanical Education

Supervisor: Prof. Dr. Muhammet YÜRÜSOY

In the study, flow of a kind of non-Newtonian fluid model on a porous plane has been investigated. By using the general equation of motion that belongs to second grade Power-Law liquid momentum equation for one-dimensional flow was determined. Although these equations are dimensional equations, they have been changed into non-dimensional equations to be got more general. After the equations had been changed into non-dimensional, boundary conditions and boundary level equations that explain the one-dimensional flow over a porous plane have been determined. Finally, ordinary differential equation systems that refer the one-dimensional flow in cartesian coordinate are obtained. Then, determined boundary level equations and boundary conditions have been solved numerically by moving into Matlab Sbvvp pocket software. In the solutions, one-dimensional flow in the direction-y has been investigated. According to determined data, by showing the different values of the variables like v_0 , ε , ε_1 , m on graphics, effects on the velocity of fluid and thickness of boundary level have been investigated.

2011, vi + 52 pages

Key Words: Non-Newtonian Fluids, Porous Plane, Numerical Solutions

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusu, deneysel çalışmaların yönlendirilmesi, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Muhammet YÜRÜSOY'a, araştırma ve yazım süresince yardımlarını esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Ali KEÇEBAŐ'a, her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Özgür CİVAN

AFYONKARAHİSAR, 2011

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	5
2.1 Akışkanlar Mekaniği Nedir	5
2.2 Akışkan Özellikleri	5
2.2.1 Euler Metodu	6
2.2.2 Lagrange Metodu	6
2.3 Akışkanların Fiziksel Özellikleri	7
2.3.1 Yoğunluk	7
2.3.1 Özgül Ağırlık	8
2.3.3 Viskozite	9
2.3.4 Basınç	12
2.3.5 Yüzeysel Gerilme	12
2.4 Akış Analiz Teknikleri	15
2.3.1 Newtonyen Akışkanlar	15
2.3.1 Non-Newtonyen Akışkanlar	16
3. MATERYAL ve METOT	18
3.1 Hareket Denklemleri	18
3.2.1 Tensörel Formda Hareket Denklemleri	18
3.2.2 Kartezyen Koordinat Sistemine Göre Hareket Denklemleri	22
4. NÜMERİK ÇÖZÜMLER	33
5. SONUÇLAR	47
6. KAYNAKLAR	48
ÖZGEÇMİŞ	50
EKLER	51
EK-1	51

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

A_1	Rivlin Ericksen Tensörleri
A_2	Rivlin Ericksen Tensörleri
M	Eleman Hacim Kütlesi
T	Mutlak Sıcaklık
P	Mutlak Basınç
R	Gaz Sabiti
V	Eleman Hacmi
V_0	Ortalama Hızı
ρ	Özgül Kütle
μ	Viskozite
ν	Kinematik Viskozite

Kısaltmalar

Non-Newtonyen	Newtonyen Olmayan
U	y Yönündeki Vektörel Hız
V	x Yönündeki Vektörel Hız

ŞEKİLLER DİZİNİ

		Sayfa
Şekil 2.1	Kayma gerilmesinin etkisi altında akışkanın deformasyonu	10
Şekil 2.2	Arakesit yüzeyi boyunca bir basınç farkının gösterilmesi	13
Şekil 2.3	Non-Newtonian akışlarda kayma gerilmesinin değişimi	16
Şekil 4.1	Emmenin hız profili üzerindeki etkileri	33
Şekil 4.2	Püskürtmenin hız profili üzerindeki etkileri	34
Şekil 4.3	Püskürtme değerlerinin incelen akışkanlar için hız profili üzerindeki etkileri	35
Şekil 4.4	Emme ve püskürtmenin hız profili üzerindeki etkileri	36
Şekil 4.5	Power-Law üssünün pozitif değerlerinin hız profili üzerindeki etkileri	37
Şekil 4.6	Power-Law üssünün negatif değerlerinin hız profili üzerindeki etkileri	38
Şekil 4.7	Power-Law üssünün pozitif ve negatif değerlerinin hız profili üzerindeki etkileri	39
Şekil 4.8	Viskoz etkilerin püskürtme durumunda hız profili üzerindeki etkileri	40
Şekil 4.9	Viskoz etkilerin emme durumunda hız profili üzerindeki etkileri	41
Şekil 4.10	Viskoz etkilerin incelen akışkanlar için hız profili üzerindeki etkileri	42
Şekil 4.11	Viskoz etkilerin püskürtme durumu ve incelen akışkanlar için hız profili üzerindeki etkileri	43
Şekil 4.12	İkinci derece akışkan sabitinin hız profili üzerindeki etkileri	44
Şekil 4.13	İkinci derece akışkan sabitinin emme durumunda hız profili üzerindeki etkileri	45
Şekil 4.14	İkinci derece akışkan sabitinin incelen akışkanlar için hız profili üzerindeki etkileri	46

1. GİRİŞ

Akışkanlar mekaniği, temel bilimlerde ve mühendislikte vazgeçilmez konulardan birini oluşturmaktadır. Akışkanlar mekaniği yüzyıllar boyunca, bugün alt dalları olan, hidrolik ve hidrostatiğin etkisi altında kalmıştır. Ancak, mekaniğin ve termodinamiğin temel kanunlarının uygulanması ve deneysel çalışmalarla son üç ya da dört yüzyılda akışkanlar mekaniğinin temelleri atılmıştır. Akışkan maddeler doğada çokça rastlanan ve insanların günlük hayatta sıkça karşılaştığı maddelerdir. Bu nedenle akışkan maddelerin davranışı hakkındaki bilgiler birçok uygulamalı bilim dalı için önemlidir. Günümüzde de kan dolaşımından roketlere kadar inanılmaz genişlikte çeşitli konularla doğrudan doğruya ilgili olan akışkanlar mekaniği, bütün mühendislik kollarında ve bilim dallarında kaçınılmaz bir bilgi kaynağı durumuna gelmiştir.

Çok yakın bir tarihe kadar akışkanlar mekaniği bilimi hidrolik adı altında ele alınmaktaydı. Alışlagelmiş olan bu terim günümüzde de yaygın olarak kullanılmaktadır. Hidroliğin genellikle su ile uğraşması, içerdiği akışkan sorunlarının çok sınırlı kalması ve deneysel sonuçların matematiksel anlamda yetersiz kalması akışkanlar mekaniği konusundaki çalışmaları arttırmıştır. Özellikle sınır tabakası yaklaşımının geliştirilmesi ile birlikte Navier-Stokes denklemlerinin daha basit bir forma sokularak çözülmesi mümkün olmuştur. Özellikle düşük molekül ağırlığa sahip akışkanların mekanik davranışları Navier-Stokes yaklaşımıyla doğru olarak belirlenmektedir. Navier-Stokes denklemleri, hareket eden bir akışkanın hızı, basıncı ve yoğunluğu arasındaki bağıntıyı ifade eder. Bu denklemler Euler denklemlerinin genel bir halidir ve viskozitenin akışkan üzerindeki etkilerini içerirler.

Navier-Stokes denklemleri genellikle iki formda ifade edilirler. Bunlardan birincisi sıkıştırılamayan akışkan denklemleri, ikincisi ise sıkıştırılabilen akışkanların denklemleridir. Sıkıştırılamayan akışkan denklemleri, yoğunluğu zamanla değişmeyen akışkanların modellenmesinde kullanılır. Sıkıştırılabilen akışkan denklemleri ise yoğunluğu zamanla değişebilen akışkanların modellenmesinde kullanılır.

Hareketleri Navier-Stokes teorisi ile ifade edilebilen ve düşük moleküler ağırlığa sahip olan akışkanlar Newtonyen akışkanlar olarak adlandırılır. Genel anlamda, gazlar, su, benzin ve etanol gibi düşük molekül ağırlığa sahip sıvıları Newtonyen akışkanlara örnek olarak verebiliriz. Non-Newtonyen akışkanlar ise yüksek molekül ağırlığa sahip akışkanlardır. Bal, hamur, mayonez, bitkisel yağlar ve kan Non-Newtonyen akışkanlardan bazılarıdır. Non-Newtonyen akışkanların Newtonyen akışkanlardan temel farkı, kayma gerilmesi ile hız gradyanı yani hızın konumuna bağlı olarak değişimi arasında doğrusal olmayan (nonlinear) bir ilişki olmasıdır. Başka bir deyişle, Newtonyen akışkanlarda viskozite olarak adlandırılan kayma gerilmesi ile hız gradyanı arasındaki orantı katsayısı sabitken Non-Newtonyen akışkanlarda ise değişkendir.

Doğada bulunan akışkanların çoğu Non-Newtonyen akışkan modeline uyar. Bu nedenle sabit viskozite kanununa göre bu tür akışkanların özelliklerini incelemek mümkün değildir. Bu türdeki belirli bir akışkanı temsil edebilmek için her akışkanı temsil eden bir denkleme ihtiyaç vardır. Viskozitenin sadece kayma gerilmesine bağlı olduğu Non-Newtonyen akışkanları en iyi temsil eden Power-Low modelidir.

Newtonyen olmayan akış mekaniği, madde akışı ile moleküler yapı arasında ilişki kurmak isteyen fiziksel kimyacıların polimerik malzeme testleri bu konuda öncü rolü oynamıştır. Polimerik malzemelerin ticari önem kazanması bu konudaki araştırmaları arttırmıştır. Endüstrinin her alanında kullanılan Newtonyen akışkanların aksine hareket denklemleri çok karmaşık ve non-linear bir yapıda olmaktadır. Bu denklemlerin tam veya yaklaşık çözümleri nadiren bulunabilmektedir. Bu tip çözümlerin elde edilmesi çok zor olduğundan yapılan çözümler büyük önem taşımaktadır. Sadece deneysel veya nümerik çalışanlar için bu tip çözümler bir baz oluşturabilecektir.

Özellikle son yıllarda Non-Newtonyen akışkanlar üzerindeki çalışmalar oldukça gelişme göstermiştir. Newtonyen olmayan akışkanlar için yapılmış sınır tabakası denklemleri ile ilgili literatürü şu şekilde özetlemek mümkündür. İkinci derece akışkanlar için sınır tabakası teorisinin uygulanması ile ilgili ilk çalışmalar Srivastava (1958), Rajeswari ve Rathna (1962) 'ya aittir. Bu tip akışkanlar için sınır tabakası teorisi ve bu teoriye ait kısıtlamalar Rajagopal et al. (1980) tarafından gösterilmiştir. Son

zamanlarda Garg ve Rajagopal (1991) kama etrafındaki ikinci derece akışkanların akışını incelemiştir. İkinci derece akışkanlara ait sınır tabakası denklemlerini özel bir koordinat sistemi kullanılarak Pakdemirli ve Suhubi (1992a) çıkarmıştır. Çıkarılan bu denklemlerin simetri grubu aynı yazarlar (Pakdemirli ve Suhubi (1992b)) tarafından bulunmuş ve denklemler çözülmüştür. Üçüncü derece akışkanlara ait sınır tabakası denklemleri özel bir koordinat sistemi kullanılarak Pakdemirli (1992) tarafından çıkarılmıştır. Yine Pakdemirli (1994) tarafından bu akışkanlara ait çok katlı sınır tabakası denklemleri ve yeni bazı standart sınır tabakası denklemleri ortaya atılmıştır. Bu çalışmalar arasında plaka akışı ile ilgili olan çalışmaların bir kısmı şu şekildedir. Sharma (2003) yatak problemini power-law akışkan modeli kullanarak incelemiştir. Newtonyen olmayan karakterin yatak içindeki etkilerini araştırmıştır. Tanner (1966) koni etrafındaki akışı değişik açılar için incelemiştir. Yine bu çalışmada da Newtonyen olmayan karakterin akış üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Pinarbasi ve Ozalp (2001) tarafından yapılan bir çalışmada da kanal akışı incelenmiş. Bu çalışmada Newtonyen olmayan akışkanın stabilitesi üzerinde viskozitenin etkileri araştırılmıştır. Çalışmada ısı transferi de hesaba katılmıştır. Wang ve Chukwn (1996) power-law akışkan modeli kullanılarak iki boru arasındaki laminer akımı incelemiştir. Denklemlerin çözümü için perturbasyon metodunu kullanmışlardır. Havlik (1998)'in yaptığı diğer bir çalışmada boru içerisindeki çamur akışı incelenmiştir. Çamur Newtonyen olmayan akışkan modeli ile ifade edilmiştir. Çalışmada sonlu farklar metodu kullanılmıştır. Yurusoy ve Pakdemirli (1999) tarafından yapılan bir çalışmada ise kayar yatak problemi ele alınmıştır. Çalışmada Newtonyen olmayan akışkan olarak özel bir üçüncü derece akışkan modeli ele alınmıştır. Yatak içerisinde kullanılan Newtonyen olmayan akışkanın basınç üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

Bu çalışmada, Newtonyen olmayan bir akışkan modelinin gözenekli bir yüzey üzerindeki akışı incelenecektir. Kartezyen koordinatlarda genelleştirilmiş ikinci derece Power-Law akışkanlara ait genel hareket denklemlerinden faydalanılarak yüzey üzerindeki akışı için momentum denklemleri elde edilecektir. Bulunan bu denklemler için gözenekli yüzey üzerindeki akışı ifade eden sınır şartları belirlenecektir. Elde edilen denklemler boyutlu denklemler olmakla birlikte daha genel olabilmesi amacıyla boyutsuz hale getirilecektir. Böylece, kartezyen koordinatlarda tek boyutlu akışı ifade

eden adi diferansiyel denklem sistemleri elde edilecektir. Çözümlerde viskozite sabit alınmıştır. Denklemlerin çözümü için nümerik çözümler kullanılmıştır. Çözümler diferansiyel denklemi çözen bir program olan Matlab paket programı kullanılarak elde edilmiştir. Çeşitli akışkan sabitlerinin hız ve sınır tabakası profili üzerindeki etkisi incelenmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Akışkanlar Mekaniği Nedir?

Akışkanlar mekaniği, durgun ve hareket halindeki sıvı ve gazlar ile bunların yakın çevresine (katı yüzeyler veya diğer sıvılar üzerine) olan etkilerini inceleyen bilim dalıdır. Katılar çok büyük kayma gerilmelerine karşı koyabilen maddelerdir. Akışkan ise kayma gerilmesi etkisi altında, kayma gerilmesi ne kadar küçük olursa olsun, sürekli deformasyona uğrayan (şekil değiştiren) maddedir. Akışkan maddeler kondukları kabın şeklini alabilen maddelerdir. Akışkan, durağan haldeyken kayma gerilmesine karşı koyamayan bir madde olarak da tanımlanabilir. Akışkanlar bir kayma kuvvetinin etkisi altında kaldıklarında hareket etmeye başlarlar ve kayma kuvveti etki ettiği sürece akışkanların hareketi devam eder. Sıvılar ve gazlar molekül seviyesi olarak birbirinden çok farklı karakteristik özelliklere sahiptir. Sıvılarda moleküller birbirine daha yakındır ve aralarında önemli derecede çekim kuvveti vardır. Gazlarda ise moleküller arasındaki çekim kuvveti zayıftır ve moleküller arasındaki uzaklık sıvılara göre daha fazladır. Sıvıları ve gazları birbirinden ayıran en önemli özellik sıkıştırılabilirlik özelliğidir. Sıvılar sıkıştırılmayan akışkanlar olarak kabul edilirken gazlar ise çok kolay sıkıştırılabilen maddelerdir (Yılmaz S., 2008).

2.2. Akışkan Özellikleri

Bir akış parçasının teorik ve deneysel olarak analiz edilebilmesi için pozisyon ve zamana bağlı olarak (x, y, z, t) tanımlanması gerekir. İşte bu zamana ve konuma bağımlılık akışkanlar mekaniğini katı cisimler mekaniğinden ayırır. Bir akış problemini tanımlamada ya bir akış alanı tespit edilerek bu akış alanında basınç, hız, sıcaklık vs. gibi değerler belirlenir (Euler metodu), ya da belli bir partikülün hareketi akış alanı içinde zamana bağlı olarak takip (Lagrangian metodu) edilir.

2.2.1. Euler Metodu

Akışkanın çok büyük sayıda parçacıktan oluştuğu düşünülürse, her bir parçacığın hareketini takip etmek oldukça zor olacaktır. Böyle durumlarda uzayda belirli bir noktadaki akışın özellikleri zamanın fonksiyonu olarak incelenir.

Euler metodunda bir akışkan parçacığının konumu, söz konusu olan anda akışkan parçacığının işgal ettiği uzaydaki noktanın konum koordinatları ve zamanın bir fonksiyonu olarak yazılır. Uzayda sabit bir nokta seçilir ve bu noktadaki parçacıkların hızları zamanın fonksiyonu olarak araştırılır. Matematiksel olarak, herhangi bir noktadaki parçacığın hızı şöyle yazılabilir (Örs 1994).

$$\vec{q} = f(\vec{r}, t)$$

$$\vec{q} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

veya

$$u = f_1(x, y, z, t)$$

$$v = f_2(x, y, z, t)$$

$$w = f_3(x, y, z, t)$$

2.2.2. Lagrange Metodu

Tanımlanabilir kütle elemanının takibi kolay olduğunda, Lagrange metodu kullanılarak parçacık takip edilir. Akışkan parçacığının konumu, başlangıç konumu koordinatları ve zamanın bir fonksiyonu olarak yazılır. Konumdan türetilecek olan hız ve ivme de yine bu değerler, başlangıç konumu koordinatları ve zamandan bağımsız değişkenler olarak kabul edilmek suretiyle elde edilirler (Örs 1994).

Başlangıç konumu $t = t_0$ anında $\vec{\xi}$ olsun. $t = t$ anında aynı parçacık \vec{r} konumundadır. Eğer konum vektörü r veya buna karşı gelen x, y, z , koordinatları zamanın ve başlangıç konumunun bir fonksiyonu olarak verilebilirse, parçacığın konumu tamamen belirlenmiş olur.

$$\vec{r} = F(\xi, t)$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{\xi} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$$

veya

$$x = F_1(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$y = F_2(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$z = F_3(x_0, y_0, z_0, t)$$

2.3. Akışkanların Fiziksel Özellikleri

Maddenin hallerini genel olarak katı, sıvı, gaz olarak üçe ayırmak mümkündür. Akışkan başlığı altında ise sıvı ve gaz halindeki maddeleri toplamaktayız. Akışkanların fiziksel özelliklerinin temelinde, akışkan maddeyi oluşturan atomların birbirlerinden oldukça uzak olmasının yattığı söylenebilir. Günlük deneyimlerimizde bu farklılığın en önemli göstergesinin akışkanın içine konulduğu kabın şeklini alması olduğunu görebiliriz. Aslında akışkanlarla ilgili bu gözlemlerimizin altında, yeryüzü üzerinde gözlemlediğimiz tüm akışkanların yerçekiminin kaçınılmaz etkisi altında olması yatmaktadır. Bir akışkanı yerçekimi gibi kütle kuvvetlerinin etkisi dışında, örneğin uzayda inceleyecek olursak, akışkanın sıvı akışkanların içine kondukları kabın şeklini almadıklarını görebiliriz. Uzayda sıvı akışkanların bir başka özelliği olan yüzey gerilmesinin öne çıktığını ve sıvı akışkanın şekil almasına yöne verdiği görülür. Yüzey gerilmesini de gene atomları ya da molekülleri arasındaki çekme ve itme kuvvetleri ile açıklamak mümkündür.

2.3.1. Yoğunluk

Yoğunluk, maddenin birim hacimdeki kütlesi olarak tanımlanır.

$$\rho = \frac{m}{v} \left(\frac{\text{kütle}}{\text{hacim}} \right)$$

Kütle ve hacim için seçilen standart birim sistemine göre, yoğunluk [kg/m³] birimiyle ifade edildiği gibi, kullanıma özel birimlerle de ifade edilebilir.

Bir maddenin basıncı, sıcaklığı ve hacmi arasındaki bağıntıya hal denklemi denilmektedir. Gaz fazındaki maddeler için en basit ve en iyi bilinen denklem ideal gaz denklemi olup;

$$P.v = R.T \quad \text{veya} \quad P = \rho.R.T$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada P mutlak basıncı, v özgül hacmi, T mutlak sıcaklığı, ρ yoğunluğu ve R gaz sabitini ifade etmektedir. Gazlar içinde buldukları kabın şeklini ve hacmini almaktadırlar. Gaz molekülleri bir kap içerisinde yok sayılabilir ve aralarındaki çekim kuvveti hesaba katılmayabilir. Böyle bir gaza ideal gaz denir. Bir maddenin yoğunluğu, genel anlamda sıcaklık ve basınca bağlı olarak değişmektedir. Sıvıların yoğunluğu genellikle sıcaklıkla değişmesine karşın basınçla çok az değişir. Gazların yoğunluğu ise hem sıcaklık hem de basınçla değişmektedir (Ceryan E., 2010).

2.3.2. Özgül Ağırlık

Bir akışkanın özgül ağırlığı, birim hacminin ağırlığıdır.

$$\gamma = \frac{\Delta W}{\Delta V}$$

Burada ΔW ; ΔV elemanter hacim ağırlıklarını ifade etmektedir.

Özgül ağırlık gerçekte birim hacimdeki kütle üzerinde yer çekiminin yarattığı kuvvetten başka bir şey değildir. Dolayısıyla kütle biriminde olan yoğunluk ile kuvvet biriminde olan özgül arasındaki bağıntı daima;

$$\gamma = g.\rho$$

şeklindedir. Burada g yer çekimi ivmesini ifade etmektedir.

Özgül hacim (v) akışkanın birim hacimde kapladığı hacim olup özgül ağırlık ile arasında;

$$v = \frac{1}{\gamma}$$

bağıntısı bulunmaktadır.

2.3.3. Viskozite

Viskozite bir akışkanın, yüzey gerilimi altında deforme olmaya karşı gösterdiği direncin ölçüsüdür. Akışkanın akmaya karşı gösterdiği iç direnç olarak da tanımlanabilir. Süper akışkanlar hariç tüm gerçek akışkanlar yüzey gerilimine karşı direnç gösterirler. Öte yandan, yüzey gerilimine hiç direnç göstermeyen bir akışkan "ideal akışkan" olarak adlandırılır.

Hareketsiz duran bir akışkanı akmaya zorlayabilmek için bir kuvvetin sürekli olarak uygulanması gerekir. Kuvvet bir vektördür. Akışkanlar mekaniğinde alan bir vektör olarak alınır. Vektörün büyüklüğü alanın nümerik değeri, yönü ise alana dik (normal) yöndür. Eğer kuvvet vektörü uygulandığı yüzeyin alan vektörüne dik yöndeysse (alana paralelse), etkiyen kuvvet akışkan tabakalarını birbirinden kaydırır, deformasyona uğratar.

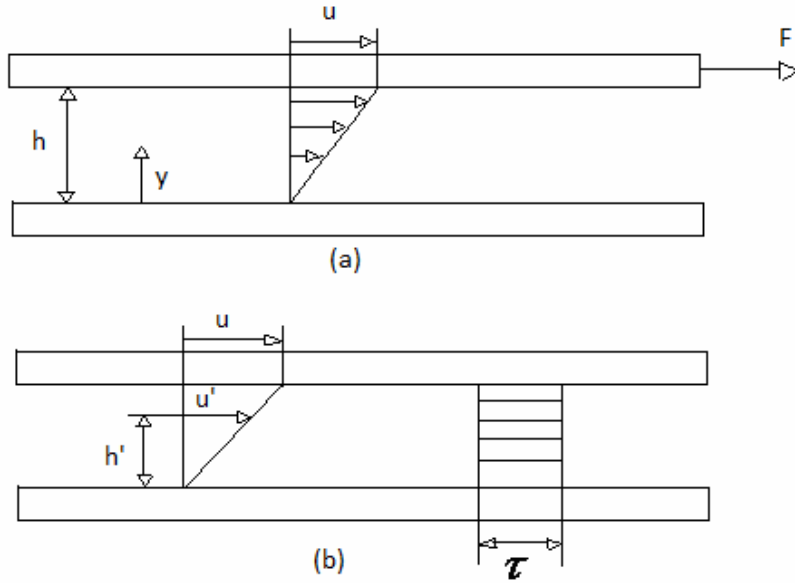
Akışkan molekülleri arasındaki iç sürtünme sonucu oluşur ve kesme kuvvetine karşı mukavemetinin şiddeti olarak bilinir. Viskozite; uygulanan gerilmeye bağlı olarak oluşan gerinim oranını göstermektedir. Bu akış alanı için sabit olan kayma gerilmesi (τ_{xy}) sadece 'y' ye bağlıdır.

Kayma gerilmesinin $\tau_{xy} = f(\epsilon_{xy})$ olduğu görülür.

$$\tau_{xy} = \tau = \mu \frac{U}{h} = 2\mu \varepsilon_{xy} = \mu \frac{du}{dy}$$

τ ile du/dy arasındaki orantı faktörü μ , akışkanın dinamik (mutlak) viskozitesi olup, akışkanı tanımlayan en önemli özelliklerden biridir.

Viskozite kavramı aşağıda yapılacak olan deneyle daha iyi açıklanabilir.



Şekil 2.1 Kayma gerilmesinin etkisi altında akışkanın deformasyonu

Şekil 2.1’de görüldüğü gibi aralarındaki uzaklık çok küçük olan birbirine paralel iki levha düşünelim. Üstteki levhayı sabit bir F kuvveti uygulayarak sabit bir U hızıyla hareket ettirelim. Bu levhaya hemen bitişik olan akışkan levhaya yapışarak beraber sürüklenecek ve aynı U hızıyla hareket edecektir. Altta sabit levhaya bitişik olan akışkan ise bu levhaya yapışarak hareketsiz kalacaktır. Şimdi iki levha arasındaki akışkanı, kalınlıkları sonsuz katmanlara ayırarak ele alalım.

Katmanlar arasında hiçbir sürtünme ve dolayısıyla kayma gerilmesi olmasaydı üstteki levhaya bitişik katman, kendi altındaki katmana hiçbir etki yapmadan üzerinde kayarak ilerleyecekti. Gerçek akışkanlarda ise sürtünme sürtünmenin varlığı yüzünden üst katman U hızıyla giderken alt katman ile arasındaki sürtünme bir τ kayma gerilmesi

yaratır ve kayma gerilmesi etkisinde akışkanlar hemen akmaya başlayacağından alt katman da belirli bir hızla aynı yönde hareket eder. Başka bir deyişle sürtünmeden dolayı alt katman üsttekini durdurmaya çalışırken, üst katmanda alttakini sürüklemeye çalışır. Bu şekilde sürtünmenin yarattığı kayma gerilmesine bağlı olarak levhalar arasındaki bütün katmanlar belirli bir hız kazanır. Levhaların birbirine çok yakın olması halinde hızın doğrusal olarak değiştiği kabul edilirse şekilde görülen hız dağılımı elde edilir. Deneyler üst levhayı U hızıyla çekmek için gerekli F kuvvetinin; levhanın A yüzey alanı ve U hızıyla doğru, levhalar arasındaki h uzaklığı ile ters orantılı olduğunu göstermiştir. Dolayısıyla;

$$F \sim \frac{AU}{h} \quad \frac{F}{A} = \tau \quad \tau \sim \frac{U}{h}$$

Yazılabilir. Burada τ üst levhadaki kayma gerilmesidir. Öte yandan alt levhadaki h' uzaklıktaki kayma gerilmesi τ' için,

$$\tau' \sim \frac{U}{h'} = \frac{U}{h} = \tau \quad \tau' = \tau$$

bulunur. Kayma gerilmesi her noktada aynıdır. Bu durumdaki doğrusal dağılım için genel olarak,

$$\tau \sim \frac{dU}{dy}$$

yazılır. Kayma gerilmesi hız gradyanı ile de orantılıdır. Orantı katsayısı μ ile gösterilirse,

$$\tau = \mu \frac{dU}{dy}$$

elde edilir.

Viskozitenin iki önemli sebebi vardır, bunlar; ‘moleküler çekim kuvveti’ ve ‘moleküler momentum transferi’dir. Daha önce de ifade edildiği gibi, sıvıların molekülleri birbirlerini çekerler ve bu karşılıklı çekim kuvveti bir tabakanın diğeri üzerinde kaymasını engelleyeceği için viskozite etkisini artıracaktır. Moleküler çekim kuvveti bir tabakanın diğeri üzerinde kaymasını engelleyeceği için viskozite etkisini arttıracaktır. Moleküler çekim sıvılarda viskozitenin en önemli sebebidir. Sıcaklığın artmasıyla moleküler çekim zayıflayacağından, sıvının viskozitesi sıcaklıkla azalır. Normal şartlarda basıncın moleküler çekim üzerine dolayısıyla viskoziteye bir etkisi yoktur. Her ne kadar gazlarda moleküler çekim kuvveti ihmal edilebilirse de, viskozite etkisi vardır (Yılmaz S., 2008).

2.3.4. Basınç

Duran bir akışkanın içine daldırılmış küçük bir yüzey parçasına, ancak bu parçanın normali yönünde belirli bir kuvvet gelecektir. Bu kuvvetin yüzey parçasının alanına oranına basınç denir. Dolayısıyla basınç, bir akışkan tarafından birim alana uygulanan kuvvet olarak tanımlanmaktadır. Basıncın katılardaki karşılığı normal gerilmedir. Verilen bir konumdaki gerçek basınca mutlak basınç denir ve mutlak vakuma (mutlak sıfır basınca) göre ölçülmektedir.

Eğer basınç farklı noktalarda değişik değerler alıyorsa akışkan içinde alınan belirli bir bölge üzerine bir basınç kuvveti etki yapacaktır. Bu durumda aynı bölgeye basınç kuvvetini dengeleyecek bir dış kuvvet gelmelidir. Eğer böyle bir dış kuvvet yoksa akışkan hareket edecek ve basınç kuvvetlerini ivmenin yarattığı atalet momentleri dengeleyecektir.

2.3.5. Yüzeysel Gerilme

Akışkanların moleküler düzeydeki önemli özelliklerinden ikisi iç çekim (kohezyon) ve dış çekim (adezyon) dir. Akışkan molekülleri arasındaki çekme kuvvetinin varlığı özelliğine iç çekim denir. İç çekimden dolayı, gerçek akışkanlar çekme gerilmesi

Arakesit yüzeyi bir eğri ise, mekanik denge şartı, arakesit yüzeyi boyunca bir basınç farkının mevcudiyetini gösterir ve basınç, konkav tarafta daha büyük olur. Bu, şekil 2.5’de gösterilmiştir. Şekil 2.2’a da bir sıvı silindirin iç kısmındaki basınç artışı iki yüzey gerilimi tarafından dengelenmektedir. Buna göre:

$$2RL.\Delta p = 2T.L \Rightarrow \Delta p = \frac{T}{R}$$

olur. Bu hesaplamada sıvının ağırlığı göz önünde bulundurulmamıştır. Şekil 2.2 b’de ise, küresel bir damlanın iç kısmındaki basınç artışı dairesel bir yüzey gerilim kuvveti ile dengelenmektedir. Buna göre;

$$\pi R^2.\Delta p = 2\pi R.T \Rightarrow \Delta p = \frac{2T}{R}$$

olur. Bu sonuç bir sabun köpüğü içindeki basınç artışı öngörülerek kullanılabilir ki bu hava ile iki ara yüzeye sahiptir. Aşağı yukarı aynı R çapında bir iç ve dış yüzey için;

$$\Delta p_{\text{köp.}} = 2.\Delta p_{\text{damla}} = \frac{4T}{R}$$

Şekil 2.2 c’de, ana eğrilik yarıçapları R_1 ve R_2 olan gelişigüzel bir kesit yüzeyi konumunu göstermektedir. Yüzey normalini doğrultusundaki dengeleyici kuvvet gösterecektir ki, konkav taraftaki basınç artışı;

$$\Delta p = T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

şeklindedir. Ayrıca bu denklemlerdeki genel bağıntılardan $R = R_1$ ve $R_2 = \infty$ için çıkarılabilir.

2.4. Akış Analiz Teknikleri

2.4.1. Newtonyen Akışkanlar

Bir akış alanı; integral analizi, diferansiyel analiz, deneysel veya boyut analizi yöntemleriyle incelenir. Bütün bu analiz etme teknikleri kütle korunumu (süreklilik denklemi), Newton'un ikinci kanunu (momentum korunumu), termodinamiğin birinci kanunu (enerjinin korunumu), durum denklemleri ve uygun sınır şartlarıyla beraber kullanılır.

Eğer akışlar, Newton'un sürtünme kanununa uyuyorsa, yani hız gradyanı ile kayma gerilmesi lineer olarak değişiyorsa bu tip akışkanlara Newtonyen akışkanlar denir. Newton'un öne sürdüğü; laminer (düzgün akış çizgileri) ve paralel bir akışta, tabakalar arasındaki yüzey gerilimi (τ) tabakalara dik yöndeki hız gradyanı (du/dy) ile orantılıdır. Bu orantı;

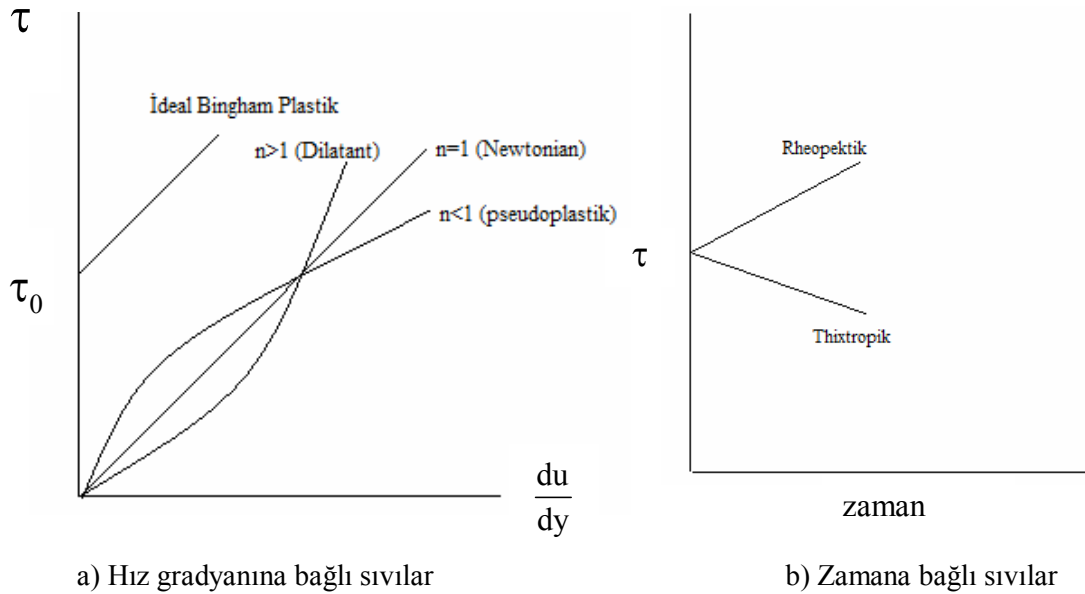
$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

şeklindedir. Burada μ sabiti, viskozite sabiti, viskozite veya dinamik viskozite değerini ifade etmektedir. Su ve gazların çoğu, Newton'un ortaya koymuş olduğu bu kurala uyar ve Newton tipi akışkanlar olarak adlandırılırlar.

Sürekli ortamların mekaniği incelenirken uygulanan kuvvetlere göre şekil değişimini ölçen bazı katsayılar tanımlanmıştır. Katı sürekli ortamlar içerisinde elastite modülü, poisson oranı ve kayma modülü gibi katsayılar vardır. Bir sürekli ortam olarak akışkan için de hacim modülü ve viskozite katsayısı gibi iki katsayı tanımlanmıştır. Bunlar bir akışkana kuvvet uygulandığında yapacağı davranışı öngörmemizi sağlarlar. Katılar için, akışkandaki viskoziteye karşılık gelen kayma modülü, kayma gerilmesinin yer değiştirmeye oranı olarak tanımlanırken akışkanda viskozite, kayma gerilmesinin hız gradyanına oranı olarak tanımlanır (Akgül M.B., 2008).

2.4.2. Non - Newtonyen Akışkanlar

Kayma gerilmesi ile hız gradyanı non-linear olarak değişiyorsa bu tip akışlara non-Newtonian akışlar denir. Bu tip akışkanlarda kayma gerilmelerinin çok küçük değerleri dışında kayma gerilmesi ile hız gradyanı orantılı değildir. Non-Newtonyen akışkanlarda viskozite hız gradyanına bağlıdır. Bazı Non-Newtonyen akışkanlar için, sabit bir kayma gerilmesinde zamanla viskozite değişir. Sıvılar, zamanla viskozite artıyorsa ‘rheopectic’ azalıyorsa ‘thixotropic’ olarak isimlendirilir. Viskozitesi sıfır olduğu kabul edilen akışkanlar ‘ideal akışkan’ olarak isimlendirilirler, kayma deformasyon mukavemeti sıfırdır ve grafik x eksenine düşer. Bu tür akışkan doğada mevcut olmamakla beraber bu kabul matematiksel işlemlerde büyük kolaylık sağlar. ‘İdeal veya Elastik katı’ hiçbir yük şartında deformasyon göstermezler ve grafik y eksenine düşer. Bu tür akışkan doğada mevcut olmamakla beraber bu kabul matematiksel işlemlerde büyük kolaylık sağlar (Yılmaz S., 2008).



Şekil 2.3 Non-Newtonian akışlarda kayma gerilmesinin değişimi

Non-Newtonian akışların davranışını ‘Ostwald and de Waelle’ güç kanunu ;

$$\tau \approx k(2\varepsilon_{xy})^n = k\left(\frac{du}{dy}\right)^n$$

yaklaşımıyla ifade etmek mümkündür. Verilen denklemde k ve n non-Newtonian akışa bağlı katsayılar olup her bir akışkan için ayrı ayrı hesaplanmalıdır. n=1 Newtonian akışı ($k = \mu$, su, hava ve yağlarda), $n \neq 1$ ise non-Newtonian akışı gösterir. $n < 1$ durumu incelen sıvıları (pseudoplastik), $n > 1$ kalınlaşan sıvıları (dilatant) gösterir. Kayma gerilmesinin (τ) kayma oranıyla ($\gamma = \frac{du}{dy}$) ve zamanla değişimi çeşitli viskoz sıvılar için Şekil 2.3.'de gösterilmiştir.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Hareket Denklemleri

Çalışmada öncelikle kartezyen koordinatlarda ikinci derece Power-Law akışkanlara ait hareket denklemlerinin çıkışı yapılacaktır. Denklemlerin çıkarılışında Rivlin-Ericksen tensörleri kullanılacaktır. Daha sonra bu denklemler vektörel formda ifade edilecektir. Önce ivme terimleri sonra viskoz terimler ve ikinci derece Power-Law akışkan terimlerinin çıkışı detaylı olarak anlatılacaktır.

3.1.1. Tensörel Formda Hareket Denklemleri

İkinci derece Power-Law akışkan modeline ait hareket denklemi tensörel formda aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$\rho \frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*} = \text{div } \mathbf{t}^* + \rho \mathbf{b}^* \quad (3.1)$$

Burada; \mathbf{t}^* gerilme tensörü, \mathbf{b}^* birim kütle başına düşen dış kuvvet, ρ yoğunluk, \mathbf{v}^* hız vektörü ve $\frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*}$ ise ivmedir. Sıkıştırılamaz akışkan kabulü ile süreklilik denklemi

$$\text{div } \mathbf{v}^* = 0 \quad (3.2)$$

gibi ifade edilir.

Power-Law akışkan ile ikinci derece akışkanları birleştiren Newtonyen olmayan akışkanlara ait bünye denklemi

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \Pi^{m/2} (\mu \mathbf{A}_1^* + \alpha_1 \mathbf{A}_2^* + \alpha_2 \mathbf{A}_1^{*2}) \quad (3.3)$$

$$\Pi = \left(\frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{A}_1^{*2} \right) \quad (3.4)$$

şeklindedir. Burada, p basınç, \mathbf{I} birim matrisi, μ viskozite katsayısı, α_1 ve α_2 Newtonyen olmayan akışkan sabitleri, m Power-Law akışkan sabiti olup, $m < 0$ olması halinde incelen akışkanları, $m > 0$ olması durumunda ise kabaran akışkanları ifade etmektedir. \mathbf{A}_1^* ve \mathbf{A}_2^* ise ilk iki Rivlin-Ericksen tensörleridir. Bu tensörler

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1^* &= \mathbf{L}^* + \mathbf{L}^{*\Gamma} \\ \mathbf{A}_2^* &= \dot{\mathbf{A}}_1^* + \mathbf{A}_1^* \mathbf{L}^* + \mathbf{L}^{*\Gamma} \mathbf{A}_1^* \\ \dot{\mathbf{A}}_1^* &= \left(\mathbf{A}_1^* \right)_t + \left(\text{grad} \mathbf{A}_1^* \right) \mathbf{v}^* \end{aligned} \quad (3.5)$$

biçiminde tanımlanmaktadır.

Denklem (3.5)'teki ifadelerde $\mathbf{L}^* = \text{grad} \mathbf{v}^*$ zamandan bağımsız olarak tanımlanmaktadır. Denklem (3.3)'ün türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{t}^* &= -\text{grad} p + \text{div} \left(\frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{A}_1^{*2} \right)^{m/2} \left(\mu \mathbf{A}_1^* + \alpha_1 \mathbf{A}_2^* + \alpha_2 \mathbf{A}_1^{*2} \right) \\ &+ \left(\frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{A}_1^{*2} \right)^{m/2} \text{div} \left(\mu \mathbf{A}_1^* + \alpha_1 \mathbf{A}_2^* + \alpha_2 \mathbf{A}_1^{*2} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

denklemi elde edilir. Burada, $\text{div} \left(\frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{A}_1^{*2} \right)^{m/2}$ ifadesi aşağıdaki gibi de yazılabilir.

$$\text{div} \left(\frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{A}_1^{*2} \right)^{m/2} = \text{grad} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1^*|^2 \right)^{m/2} \quad (3.7)$$

Ayrıca tensörel formdaki hareket denkleminin ivme terimi vektörel olarak

$$\frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*} = \frac{1}{2} \text{grad} |\mathbf{v}^*|^2 + \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{v}^* \quad (3.8)$$

şeklinde yazılır. Burada $\boldsymbol{\omega}^* = \text{curl } \mathbf{v}^*$ 'dir.

Denklemler (3.6) ve (3.8) göz önüne alınır ve $\mathbf{b}^* = 0$ yazılırsa başlangıçtaki hareket denklemi (3.1) aşağıdaki gibi vektörel forma dönüşür.

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{1}{2} \text{grad} |\mathbf{v}^*|^2 + \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{v}^* \right) &= -\text{grad } p + \text{grad} \left[\left(\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1^*|^2 \right)^{m/2} \right] \\ & \left(\mu \mathbf{A}_1^* + \alpha_1 \mathbf{A}_2^* + \alpha_2 \mathbf{A}_1^{*2} \right) + \left(\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1^*|^2 \right)^{m/2} \\ & \left[\mu \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + \alpha_1 (\nabla^{*2} \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{v}^*) + \alpha_1 \text{grad} (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^{*2} \mathbf{v}^*) \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} (2\alpha_1 + \alpha_2) \text{grad} |\mathbf{A}_1^*|^2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \{ \mathbf{A}_1^* \cdot \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \right. \\ & \left. + 2 \text{div} [(\text{grad } \mathbf{v}^*) (\text{grad } \mathbf{v}^*)^T] \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Böylece hareket denklemleri vektörel formda elde edilmiş oldu.

Daha sonra denklem (3.9)'u boyutsuzlaştırmak için bütün uzunlukları bir karakteristik uzunluk L ile ve bütün hızları da bir karakteristik hız U ile bölelim.

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{v}^*}{U} \quad (3.10)$$

Basınç ise;

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}^*}{\rho U^2} \quad (3.11)$$

Diğer terimler ise;

$$\begin{aligned}
\nabla^2 &= \nabla^{*2} L & \mathbf{A}_1^* &= \frac{U}{L} \mathbf{A}_1 & |\mathbf{A}_1^*|^2 &= \frac{U^2}{L^2} |\mathbf{A}_1|^2 \\
\nabla^{*2} \mathbf{v}^* &= \frac{U}{L^2} \nabla^2 \mathbf{v} & \boldsymbol{\omega}^* &= \frac{U}{L} \boldsymbol{\omega} & \mathbf{A}_2^* &= \frac{U^2}{L^2} \mathbf{A}_2 \\
\nabla^2 \boldsymbol{\omega} &= \frac{U}{L^3} \nabla^2 \boldsymbol{\omega}^*
\end{aligned} \tag{3.12}$$

şeklinde yazılır. Elde edilen (3.10), (3.11) ve (3.12) ifadeleri denklem (3.9)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{1}{2} \frac{U^2}{L} \text{grad} |\mathbf{q}|^2 + \frac{U^2}{L} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} \right) &= -\frac{\rho U^2}{L} \text{grad} p + \left(\frac{U}{L} \right)^m \text{grad} \left[\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1^*|^2 \right]^{\frac{m}{2}} \\
\left(\mu \frac{U}{L^2} \mathbf{A}_1^* + \alpha_1 \frac{U^2}{L^3} \mathbf{A}_2^* + \alpha_2 \frac{U^2}{L^3} \mathbf{A}_2^{*2} \right) &+ \left(\frac{U}{L} \right)^m \left(\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1^*|^2 \right)^{\frac{m}{2}} \left[\mu \frac{U}{L^2} \nabla^2 \mathbf{q} \right. \\
+ \alpha_1 \frac{U^2}{L^3} \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} + \alpha_1 \frac{U^2}{L^3} \mathbf{q} \cdot \nabla^2 \mathbf{q} &+ \frac{1}{4} (2\alpha_1 + \alpha_2) \frac{U^2}{L^3} \text{grad} |\mathbf{A}_1^*|^2 \\
+ (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{U^2}{L^3} \left\{ \mathbf{A}_1^* \cdot \nabla^2 \mathbf{q} + 2 \text{div} \left[\left((\text{grad} \mathbf{q})(\text{grad} \mathbf{q})^T \right) \right] \right\} &
\end{aligned} \tag{3.13}$$

bulunur. Denklem (3.13) $L/\rho U^2$ ile çarpılırsa aşağıdaki gibi boyutsuz hale gelir.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \text{grad} |\mathbf{q}|^2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} &= -\text{grad} p + \left(\frac{U}{L} \right)^m \text{grad} \left[\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1|^2 \right]^{\frac{m}{2}} \\
\left(\frac{\mu}{\rho U L} \mathbf{A}_1 + \frac{\alpha_1}{\rho L^2} \mathbf{A}_2 + \frac{\alpha_2}{\rho L^2} \mathbf{A}_1^2 \right) &+ \left(\frac{U}{L} \right)^m \left(\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1|^2 \right)^{\frac{m}{2}} \left[\frac{\mu}{\rho U L} \nabla^2 \mathbf{q} \right. \\
+ \frac{\alpha_1}{\rho L^2} \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} + \frac{\alpha_1}{\rho L^2} \text{grad}(\mathbf{q} \cdot \nabla^2 \mathbf{q}) &+ \frac{1}{4} \left(2 \frac{\alpha_1}{\rho L^2} + \frac{\alpha_2}{\rho L^2} \right) \text{grad} |\mathbf{A}_1|^2 \\
+ \left(\frac{\alpha_1}{\rho L^2} + \frac{\alpha_2}{\rho L^2} \right) \left\{ \mathbf{A}_1 \cdot \nabla^2 \mathbf{q} + 2 \text{div} \left[\left((\text{grad} \mathbf{q})(\text{grad} \mathbf{q})^T \right) \right] \right\} &
\end{aligned} \tag{3.14}$$

(3.14) denkleminde aşağıdaki gibi boyutsuz katsayılar tanımlanabilir.

$$\varepsilon = \frac{\mu}{\rho UL} \left(\frac{U}{L} \right)^m \quad \varepsilon_1 = \frac{\alpha_1}{\rho L^2} \left(\frac{U}{L} \right)^m \quad \varepsilon_2 = \frac{\alpha_2}{\rho L^2} \left(\frac{U}{L} \right)^m \quad (3.15)$$

Tanımlanan boyutsuz katsayılar denklem (3.14)'te yerine yazılırsa boyutsuz vektörel hareket denkleminin son hali aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{grad} |\mathbf{q}|^2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} = & -\text{grad} p + \text{grad} \left[\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1|^2 \right]^{\frac{m}{2}} (\varepsilon \mathbf{A}_1 + \varepsilon_1 \mathbf{A}_2 + \varepsilon_2 \mathbf{A}_1^2) \\ & + \left(\frac{1}{2} |\mathbf{A}_1|^2 \right)^{\frac{m}{2}} \left[\varepsilon \nabla^2 \mathbf{q} + \varepsilon_1 \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} + \varepsilon_1 \text{grad}(\mathbf{q} \cdot \nabla^2 \mathbf{q}) + \frac{1}{4} (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \text{grad} |\mathbf{A}_1|^2 \right. \\ & \left. + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \{ \mathbf{A}_1 \cdot \nabla^2 \mathbf{q} + 2 \text{div} [((\text{grad} \mathbf{q})(\text{grad} \mathbf{q})^T)] \} \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.1.2. Kartezyen Koordinat Sistemine Göre Hareket Denklemleri

Çalışmanın bu kısmında kartezyen koordinat sistemine göre denklem (3.16) yeniden yazılacaktır. Öncelikle denklem (3.16)'daki terimler aşağıdaki gibi tek tek hesaplanacaktır.

Hız ve gradyan operatörünü aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$\mathbf{q} = u(x, y) \mathbf{i} + v(x, y) \mathbf{j} \quad (3.17)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i}, \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} \right) \quad (3.18)$$

Hız operatöründeki u, x yönündeki vektörel hızı ifade ederken; v, y yönündeki hızı ifade etmektedir.

Bundan sonraki aşamada ise (3.16)'daki vektörel denklemler sırasıyla hesaplanacaktır. Denklem (3.16)'da hız operatörünün karesi $|\mathbf{q}|^2$ aşağıdaki denklemde belirtildiği gibi ifade edilmektedir.

$$|\mathbf{q}|^2 = u^2 + v^2 \quad (3.19)$$

Denklem (3.19)'da yer alan $|\mathbf{q}|^2$ ifadesinin gradyanı alınır

$$\nabla|\mathbf{q}|^2 = \frac{\partial}{\partial x}(u^2 + v^2)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(u^2 + v^2)\mathbf{j} \quad (3.20)$$

ifadesi elde edilir. Elde edilen bu ifade 2'ye bölünürse

$$\frac{1}{2}\nabla|\mathbf{q}|^2 = \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathbf{j} \quad (3.21)$$

şeklinde olur. $\boldsymbol{\omega}$ ifadesi ise aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{k} \quad (3.22)$$

$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$ ifadesi ise denklem (3.17) ile denklem (3.22)'un vektörel çarpımıdır. Çarpım sonucu ise şu şekildedir.

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\omega} \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{\omega}v\mathbf{i} + \boldsymbol{\omega}u\mathbf{j} = \left(v\frac{\partial u}{\partial y} - v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(u\frac{\partial v}{\partial x} - u\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{j} \quad (3.23)$$

Basınç gradyanı ise;

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} \quad (3.24)$$

şeklinde yazılır.

Şimdi de denklem (3.16)'da yer alan $|\mathbf{A}_1|^2$ 'sinin hesaplanması yapılacaktır. $|\mathbf{A}_1|$ 'in eşiti aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{L} + \mathbf{L}^T = \text{grad } \mathbf{q} + (\text{grad } \mathbf{q})^T \quad (3.25)$$

Yukarıdaki ifade de $\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{q}$ 'dir. \mathbf{L} ve \mathbf{q} , denklem (3.25)'de yerine yazılırsa \mathbf{A}_1 'in eşiti aşağıdaki gibi bulunur.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Bundan sonraki aşamada ise $|\mathbf{A}_1|^2$ ifadesi aşağıdaki gibi hesaplanacaktır.

$$\mathbf{A}_1^2 = \begin{bmatrix} 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 & 2 \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Çarpım işlemi yapıp köşegen elemanları toplanırsa $|\mathbf{A}_1|^2$ aşağıdaki gibi bulunmuş olur.

$$|\mathbf{A}_1|^2 = 8 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3.28)$$

Buradan da $\left(\frac{1}{2}|\mathbf{A}_1|^2\right)^{m/2}$ 'nin eşiti aşağıdaki gibi bulunur.

$$\left(\frac{1}{2}|\mathbf{A}_1|^2\right)^{m/2} = \left[4\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\right)^2\right]^{m/2} \quad (3.29)$$

Denklem (3.29)'un gradyanı alınırsa

$$\begin{aligned} \text{grad}\left(\frac{1}{2}|\mathbf{A}_1|^2\right)^{m/2} &= \frac{m}{2} \left[4\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{m}{2}-1} \left\{ \left[8\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2}\right. \right. \\ &+ 2\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x \partial y}\right)\left. \right] \mathbf{i} + \left[8\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x \partial y} + 2\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2}\right)\right] \mathbf{j} \left. \right\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

ifadesi elde edilir.

Denklem (3.16)'da bulunan $\nabla^2 \mathbf{q}$ terimi ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{q} &= -\text{rot}(\text{rot } \mathbf{q}) = -\text{rot } \boldsymbol{\omega} = -\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial x} \mathbf{j} \\ &= \left(-\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2}\right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x \partial y}\right) \mathbf{j} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Süreklilik denklemleri olan denklem (3.2)'nin gradyanı alınıp denklem (3.31)'de yerine yazıldığında aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\nabla^2 \mathbf{q} = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2}\right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2}\right) \mathbf{j} \quad (3.32)$$

$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$ teriminin eşitini bulmak için öncelikle $\nabla^2 \boldsymbol{\omega}$ 'ın değeri bulunmuştur. Bu terimin değeri aşağıdaki gibidir.

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = -\text{rot}(\text{rot } \boldsymbol{\omega}) = \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial y^2} \right) \mathbf{k} = \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \mathbf{k} \quad (3.33)$$

Denklem (3.32)'de süreklilik denkleminde gelen $-\frac{\partial u}{\partial x}$ yerine $\frac{\partial v}{\partial y}$ yazıldığında aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \mathbf{k} \quad (3.34)$$

Denklem (3.34) ile denklem (3.17) vektörel olarak çarpılırsa

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} = -v \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \mathbf{i} + u \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \mathbf{j} \quad (3.35)$$

ifadesi oluşur.

$\text{grad}(\mathbf{q} \cdot \nabla^2 \mathbf{q})$ ifadesinin eşitini bulmak için önce $\mathbf{q} \cdot \nabla^2 \mathbf{q}$ bulunmalıdır ve bu terimin değeri ise aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{q} \cdot \nabla^2 \mathbf{q} = u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.36)$$

Denklem (3.36)'nın gradyanı alınırsa $\text{grad}(\mathbf{q} \cdot \nabla^2 \mathbf{q})$ ifadesinin eşiti

$$\begin{aligned} \text{grad}(\mathbf{q} \cdot \nabla^2 \mathbf{q}) &= \left[\frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) \right. \\ &+ \left. \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right. \\ &+ \left. u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) \right] \mathbf{j} \end{aligned} \quad (3.37)$$

şeklinde ifade elde edilir.

Denklem (3.16)'da $\text{grad}|\mathbf{A}_1|^2$ ifadesinin değeri, denklem (3.28)'nin gradyanı alınarak bulunur ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\begin{aligned} \text{grad}|\mathbf{A}_1|^2 &= \left[16 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] \mathbf{i} \\ &+ \left[16 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \mathbf{j} \end{aligned} \quad (3.38)$$

$\mathbf{A}_1 \cdot \nabla^2 \mathbf{q}$ ifadesinin eşiti, \mathbf{A}_1 ile denklem (3.32)'nin çarpılmasıyla elde edilir. Bu çarpım sonucu

$$\mathbf{A}_1 \cdot \nabla^2 \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

şeklinde ifade edilir.

Şimdi de denklem (3.16)'da bulunan $\text{div} \left[(\text{grad } \mathbf{q})(\text{grad } \mathbf{q})^T \right]$ terimini hesaplayalım. İlk önce $(\text{grad } \mathbf{q})(\text{grad } \mathbf{q})^T$ teriminin değerleri yazılır ve matris çarpımı aşağıdaki gibi oluşur.

$$(\text{grad } \mathbf{q})(\text{grad } \mathbf{q})^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 & \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} & \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Denklem (3.40)'ın diverjansı alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\operatorname{div}[(\operatorname{grad} \mathbf{q})(\operatorname{grad} \mathbf{q})^T] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 & \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} & \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Elde edilen bu ifadenin matris çarpımı yapılırsa

$$\operatorname{div}[(\operatorname{grad} \mathbf{q})(\operatorname{grad} \mathbf{q})^T] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

elde edilir.

Hesaplanan bütün terimler, denklem (3.16)'da yerleştirilir ve bu ifadelerin x ile y bileşenleri için ayrıştırılması sonucunda aşağıdaki denklemlere ulaşılır.

x - yönünde hareket denklemi:

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{m}{2} \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{m-1}{2}} \left\{ \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \right. \\
& + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] \left[2\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon_1 \left(2u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \right. \\
& + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left. \right] + \varepsilon_2 \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \\
& + \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \\
& \left[\varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \varepsilon_1 \left(u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \left. \right\} + \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{m}{2}} \\
& \left\{ \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \varepsilon_1 \left(-v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right. \right. \\
& + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + 13 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
& + 3 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \left. \right) \\
& \left. + \varepsilon_2 \left(8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

y - yönünde hareket denklemi:

$$\begin{aligned}
& u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{m}{2} \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{m-1}{2}} \left\{ \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \right. \\
& + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] \left[\varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \varepsilon_1 \left(u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right. \right. \\
& + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \left. \right] + \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \\
& + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \left. \right] \left[2v \frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon_1 \left(2u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right. \right. \\
& + 2v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \left. \right) + \varepsilon_2 \left(4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \left. \right] \left. \right\} \\
& + \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{m}{2}} \left\{ \varepsilon \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \varepsilon_1 \left(u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right. \right. \\
& + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
& + 13 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \left. \right) \\
& + \varepsilon_2 \left(8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \left. \right\}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Süreklilik denklemi ise

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{3.45}$$

şeklindedir.

Elde edilen (3.43), (3.44) ve (3.45) ifadeleri, kartezyen koordinat sistemine göre herhangi bir ikinci derece Power-Law akışkanın hareketini belirleyen denklemlerdir.

Bu tez çalışmasında gözenekli bir yüzey üzerinde akış için hareketin sadece x yönünde olduğu ve sadece y'ye bağlı olarak değiştiği kabulü yapılmıştır. Aşağıda bu tanımlamanın matematiksel ifadesi verilmiştir.

$$u = u(y) , v = -v_0 \quad (3.46)$$

Burada, v_0 plaka yüzeyindeki emme veya püskürtme hızlarını ifade eden bir sabittir. $v_0 > 0$ için emme durumunu, $v_0 < 0$ için ise püskürtme durumunu ifade etmektedir.

Denklem (3.46)'deki kabuller denklem (3.43), (3.44) ve (3.45)'de yerine konulursa ikinci dereceden Power-Law akışkana ait momentum denklemleri ve probleme ait sınır şartları aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

x- yönündeki momentum denklemi:

$$v_0 \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{m}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{m-2} \left\{ 2\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\varepsilon_1 v_0 \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^m \left\{ \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon_1 v_0 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \right\} \quad (3.47)$$

y - yönündeki momentum denklemi:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial Y} + (m+2)(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{m+1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.48)$$

Denklem (3.48)'nin integrali alınırsa yeni bir basınç fonksiyonu

$$\bar{p} = p - (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{m+2} \quad (3.49)$$

elde edilir.

Bu durumda $\partial \bar{p} / \partial y = 0$ ve $\partial \bar{p} / \partial x = 0$ elde edilir. Bu eşitlikler denklem (3.47)'de yeniden yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} v_0 \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon(m+1) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \varepsilon_1 v_0 m \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{m-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \\ - \varepsilon_1 v_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^m \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

sınır tabakası denkleminde ulaşılmış olur.

Elde edilen sınır tabakası denkleminde ait sınır şartları ise

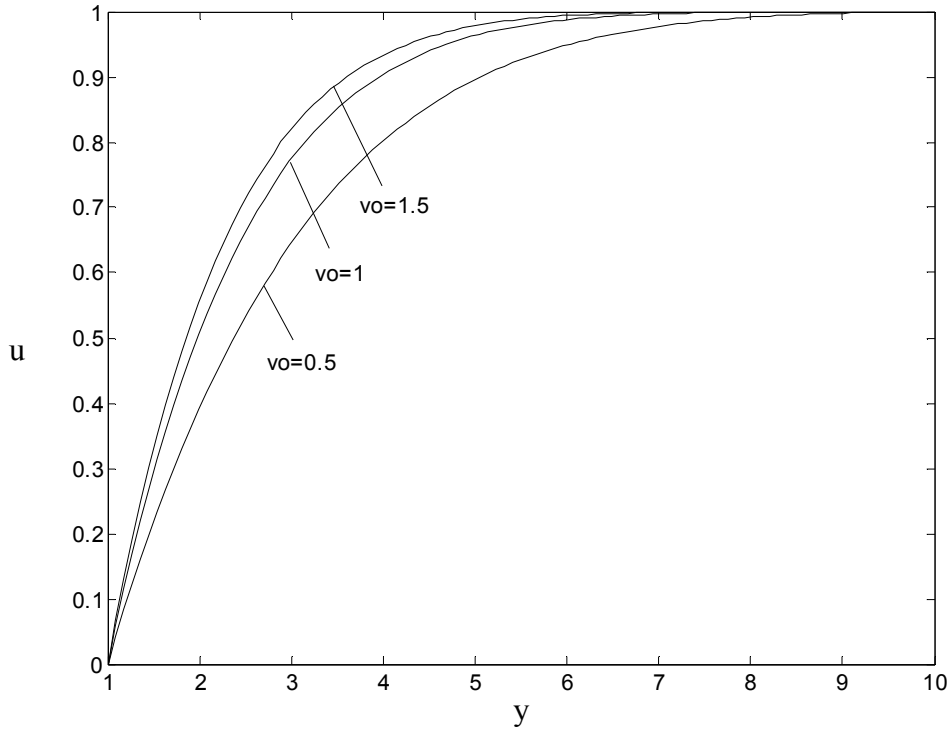
$$u(0) = 0, \quad u(\infty) = 1, \quad \frac{du}{dy}(\infty) = 0 \quad (3.51)$$

şeklindedir.

Bu kısımda ikinci derece Power-Low akışkana ait hareket denklemleri olan (3.43) ve (3.44), Rivlin-Ericksen tensörleri kullanılarak çıkartılmıştır. Daha sonra elde edilen bu denklemler boyutsuzlaştırıldıktan sonra denklem (3.50) sınır tabakası denkleminde elde edilmiştir. Bir sonraki kısımda ise elde edilen denklem (3.50), Matlab Sbvp paket programına aktarılarak. nümerik çözümler elde edilecektir.

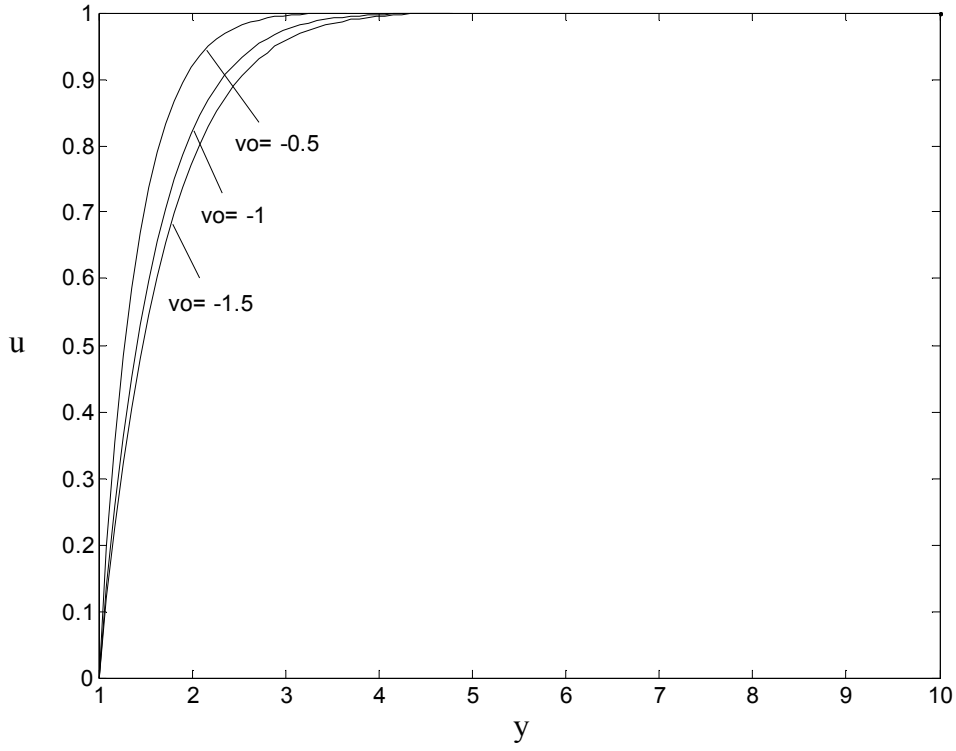
4. NÜMERİK ÇÖZÜMLER

Bu bölümde üçüncü kısımda elde edilen ikinci derece Power-Low akışkana ait sınır tabakası denklemi (3.50) ve sınır şartları (3.51) Matlab Sbvnp paket programına aktararak nümerik çözümler yapılmıştır. Nümerik çözümlerin Matlab Sbvnp paket programına aktarılması için oluşturulan M-File dosyası EK-1'de gösterilmiştir. Daha sonra v_0 , ε , ε_1 , m gibi sabitlerin farklı değerleri için çizilen grafiklerde hız ve sınır tabakası kalınlığının değişimi incelenmiştir. Bu değişimler, Şekil 4.1-4.14'da gösterilmiştir.



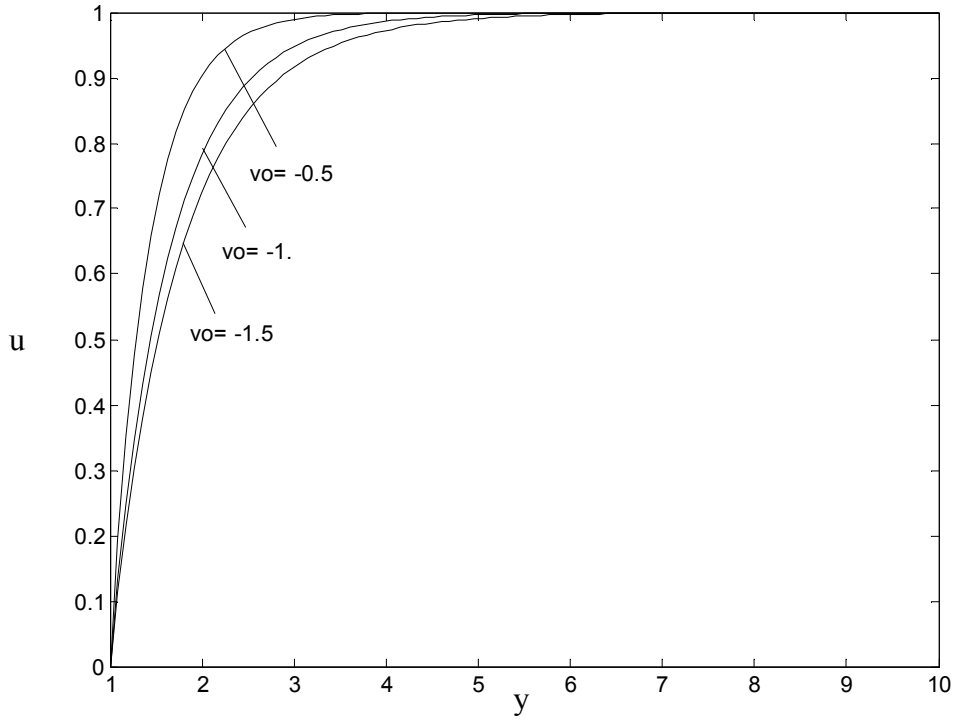
Şekil 4.1. Emmenin hız profili üzerindeki etkileri ($m=0.2$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon_1 = 1$)

Şekil 4.1'de v_0 'ın pozitif (emme) değerleri için hız ve sınır tabakası kalınlığının değişimi gösterilmiştir. Emme değerleri arttıkça akışkan hızının arttığı görülmektedir. Sınır tabakası kalınlığı ise emme değerleri arttıkça azalmaktadır.



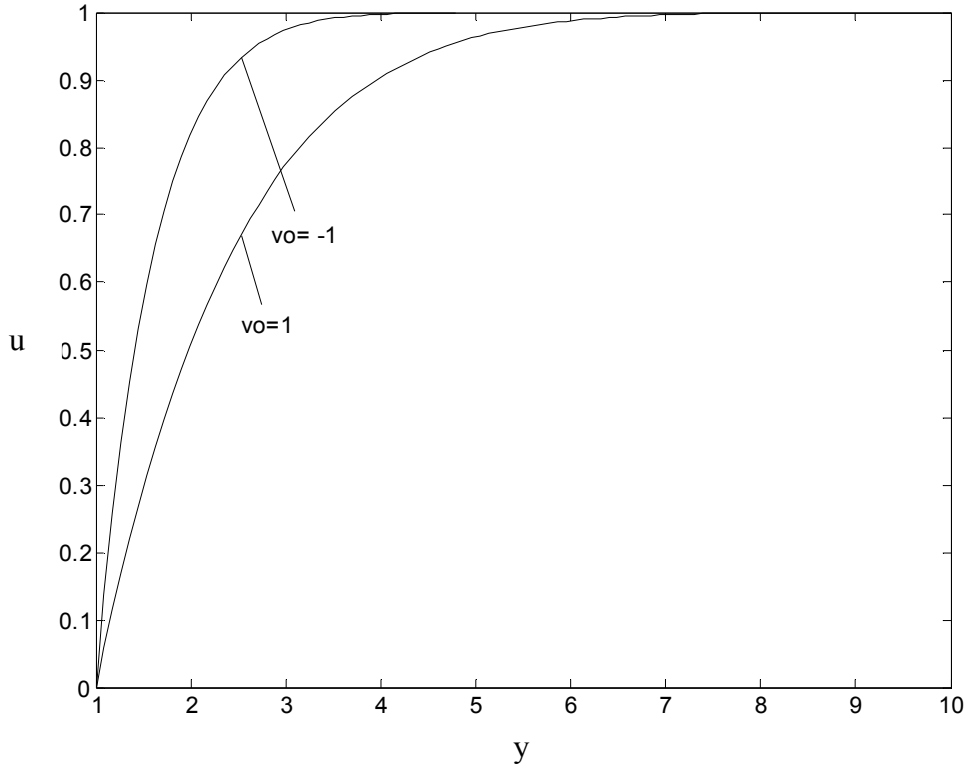
Şekil 4.2. Püskürtmenin hız profili üzerindeki etkileri ($m=0.2$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon_1 = 1$)

Şekil 4.2’de v_0 ’ın negatif (püskürtme) değerleri için hız ve sınır tabakası kalınlığının değişimi gösterilmiştir. Püskürtme değerleri azaldığında yani v_0 değerleri negatif yönde azaldığında akışkan hızı da azalmaktadır. Ayrıca püskürtme değerleri azaldıkça sınır tabakası kalınlığının arttığı görülmektedir.



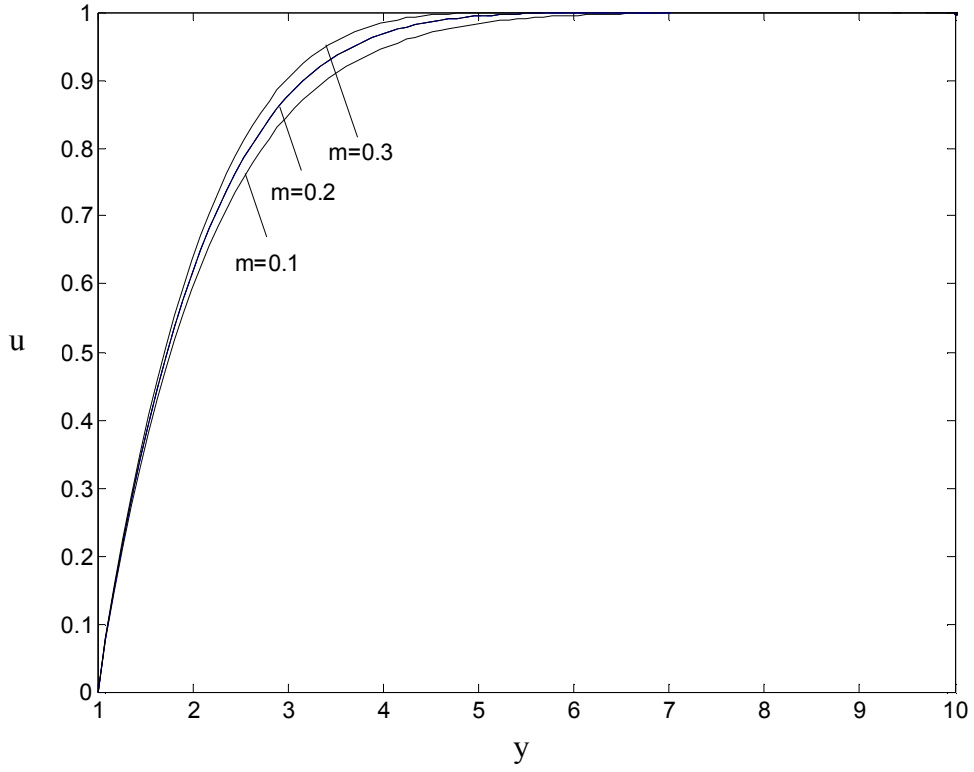
Şekil 4.3. Püskürtme değerlerinin incelen akışkanlar için hız profili üzerindeki etkileri ($m = -0.2$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon_1 = 1$)

Şekil 4.3'de püskürtmenin negatif değerlerinin $m < 0$ için hız ve sınır tabakası üzerindeki etkileri gösterilmiştir. Burada v_0 değerleri negatif yönde azaldıkça akışkan hızı da azalmaktadır. Sınır tabakası kalınlığı ise artmaktadır. Ancak akışkan hızının Şekil 4.2'ye göre azaldığı görülmektedir. Şekil 4.2'de $m > 0$ durumu için püskürtmenin negatif değerleri incelenmiştir. Böylece kabaran akışkanlar için akışkan hızının, incelen akışkanlardan daha fazla olduğu görülmektedir.



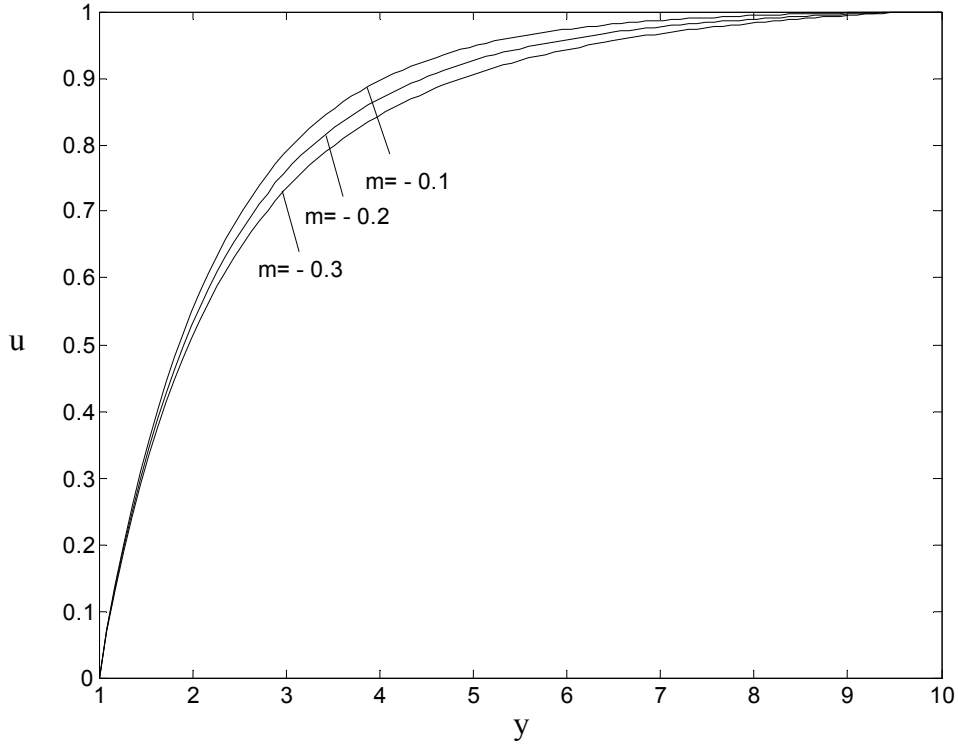
Şekil 4.4. Emme ve püskürtmenin hız profili üzerindeki etkileri ($m=0.2$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon_1 = 1$)

Şekil 4.4'de v_0 'ın pozitif ve negatif değerleri birlikte verilerek hız ve sınır tabakası kalınlığı üzerindeki etkileri karşılaştırılmıştır. v_0 'ın püskürtme durumundaki değerleri için akışkan hızının emme durumundaki akışkan hızından daha fazla olduğu görülmektedir. Ayrıca emme durumundaki sınır tabakası kalınlığının daha büyük olduğu görülmektedir. Şekil 4.1 ve şekil 4.2'deki grafiklere bakacak olursak, v_0 'ın negatif değerleri pozitif değerlere göre akışkan hızını daha fazla artırmaktadır. Fakat v_0 'ın negatif değerleri sıfıra yaklaştıkça akışkan hızı artar.



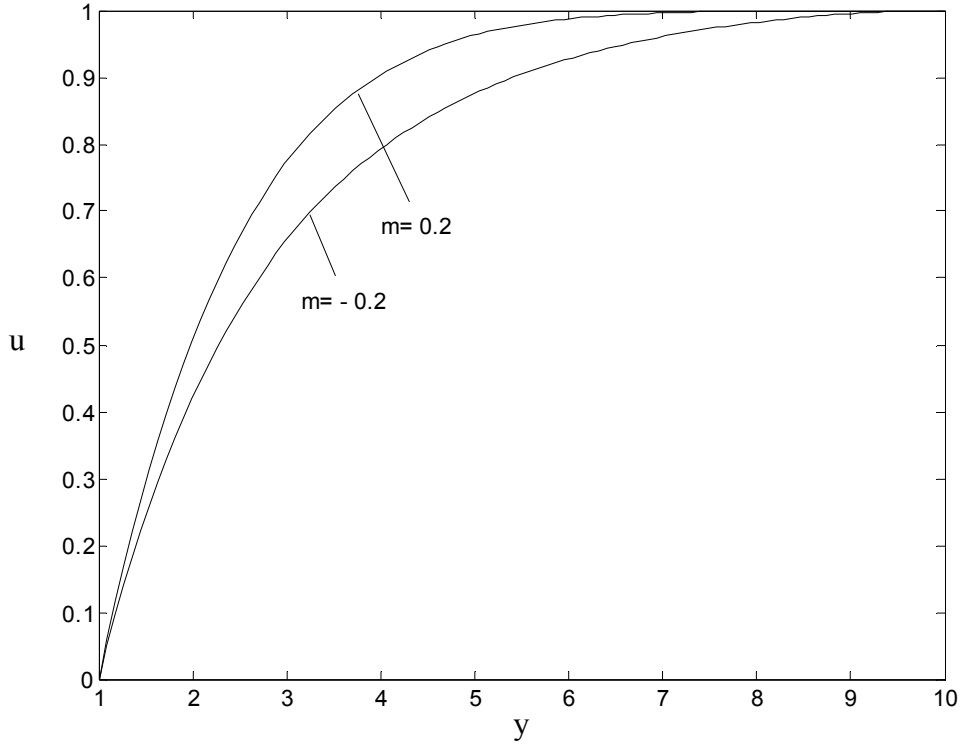
Şekil 4.5. Power-Law üssünün pozitif değerlerinin hız profili üzerindeki etkileri
($v_0=1$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon_1 = 0.2$)

Şekil 4.5’de Power-Law üssünün pozitif değerlerinin hız profili ve sınır tabakası kalınlığı üzerindeki etkileri gösterilmiştir. Power-Law üssü değerleri pozitif yönde arttırıldığında hızın artar, sınır tabakası kalınlığı ise azalır.



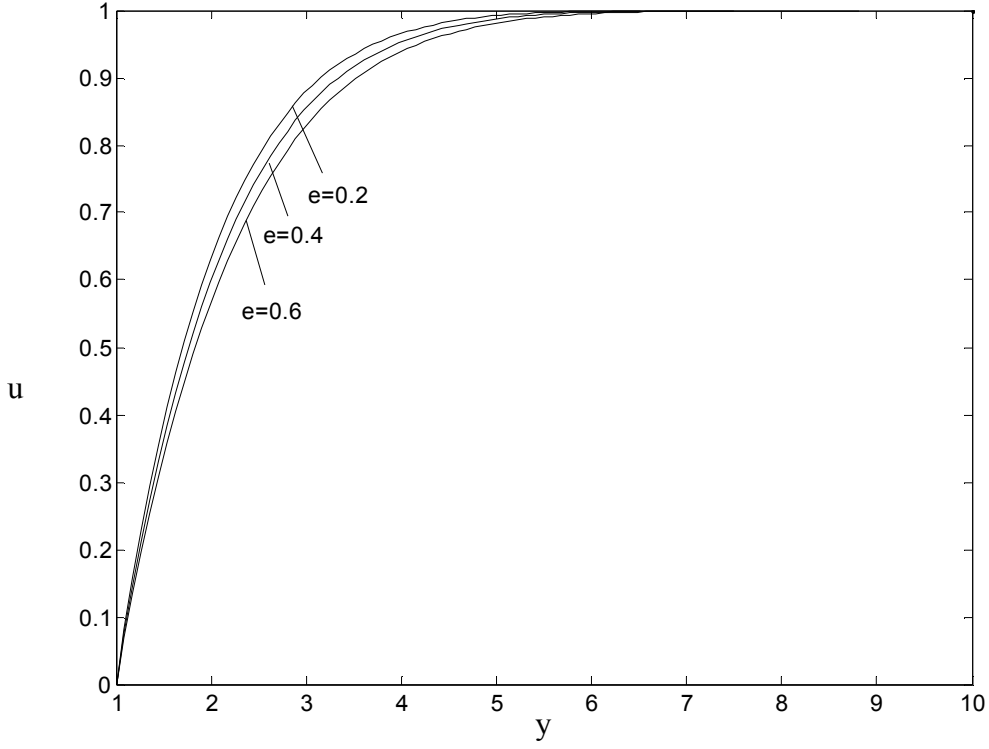
Şekil 4.6. Power-Law üssünün negatif değerlerinin hız profili üzerindeki etkileri ($v_0=1$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon_1 = 0.2$)

Şekil 4.6'te Power-Law üssünün negatif değerlerinin hız profili ve sınır tabakası kalınlığı üzerindeki etkileri gösterilmiştir. Power-Law üssü değerleri negatif yönde azalırken akışkan hızı da azalmaktadır. Sınır tabakası kalınlığı ise artmaktadır.



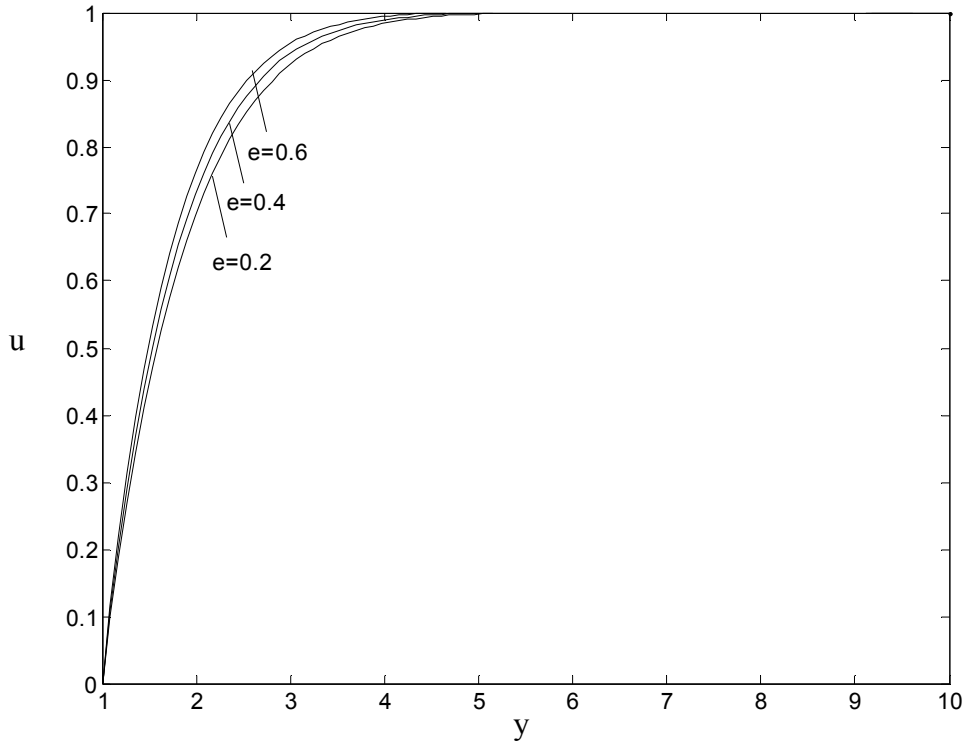
Şekil 4.7. Power-Law üssünün pozitif ve negatif değerlerinin hız profili üzerindeki etkileri ($v_0=1$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon_1 = 0.2$)

Şekil 4,7’de m ’in pozitif ve negatif değerlerinin hız profili ve sınır tabakası üzerindeki etkileri karşılaştırılmıştır. m ’in pozitif değerleri için yani kaba akışkanlar için akışkan hızının daha büyük olduğu görülmektedir. Sınır tabakası kalınlığı ise m ’in negatif değerleri yani incelen akışkanlar da daha büyük olduğu görülmektedir.



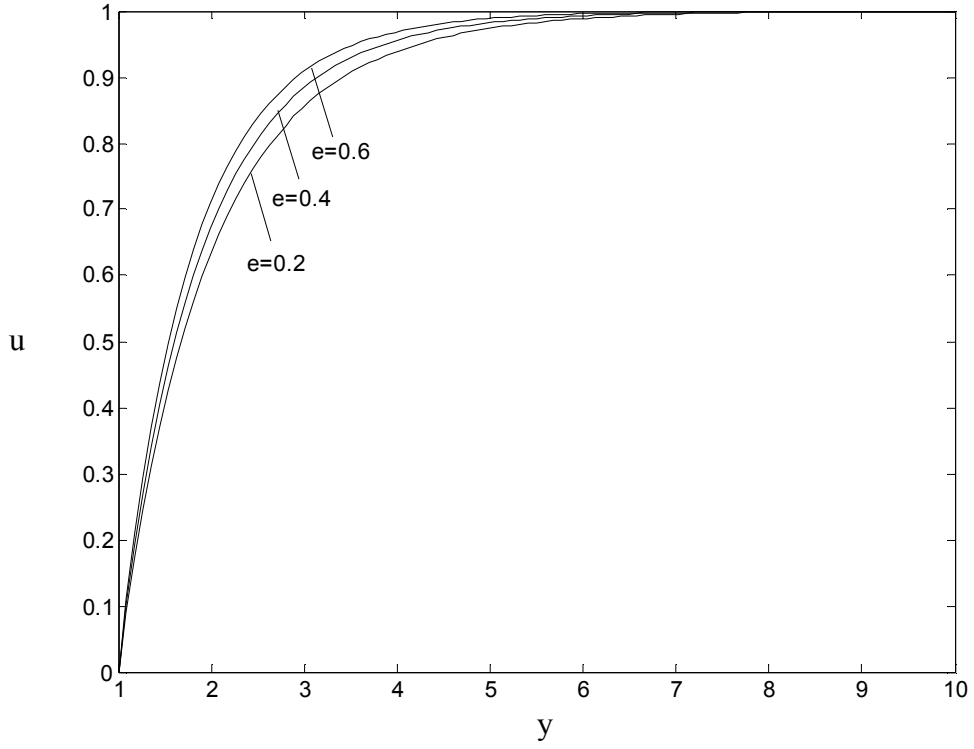
Şekil 4.8. Viskoz etkilerin püskürtme durumunda hız profili üzerindeki etkileri
($v_0=1$, $m=0.2$, $\varepsilon_1 = 1$)

Şekil 4.8’de viskoz etkilerin akışkan hızı ve sınır tabakası kalınlığının üzerindeki etkileri gösterilmiştir. Akışkanın viskozite değerleri arttırıldığı zaman, akışkan katılaşacağı için hız profili azalmaktadır. Aynı zamanda sınır tabakası kalınlığının ise arttığı görülmektedir.



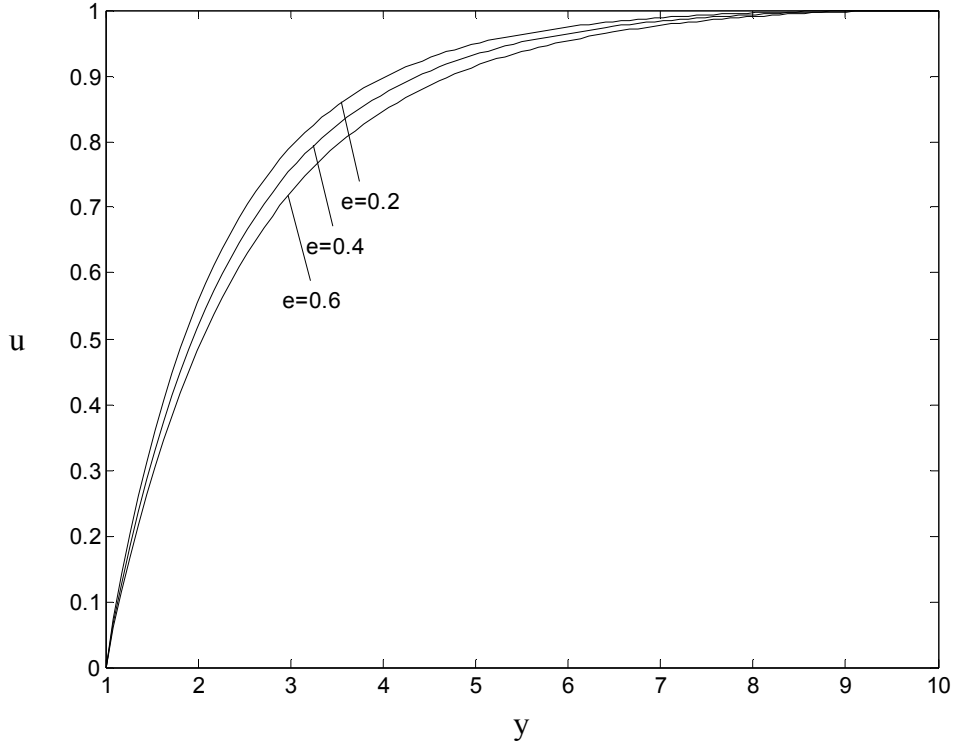
Şekil 4.9. Viskoz etkilerin emme durumunda hız profili üzerindeki etkileri
 ($v_0 = -1$, $m=0.2$, $\varepsilon_1 = 1$)

Şekil 4.9’da viskozitenin emme durumunda hız profili ve sınır tabakası üzerindeki etkileri gösterilmiştir. Viskozite değerleri arttıkça akışkan hızı da artmaktadır. Sınır tabakası kalınlığı ise azalmaktadır. Şekil 4.8’e bakıldığı zaman viskoz etkilerin emme durumundaki akışkan hızının püskürtme durumuna göre daha fazla olduğu görülür. Buna bağlı olarak da püskürtme durumunda sınır tabakası kalınlığının emme durumundan daha fazla olduğunu söyleyebiliriz.



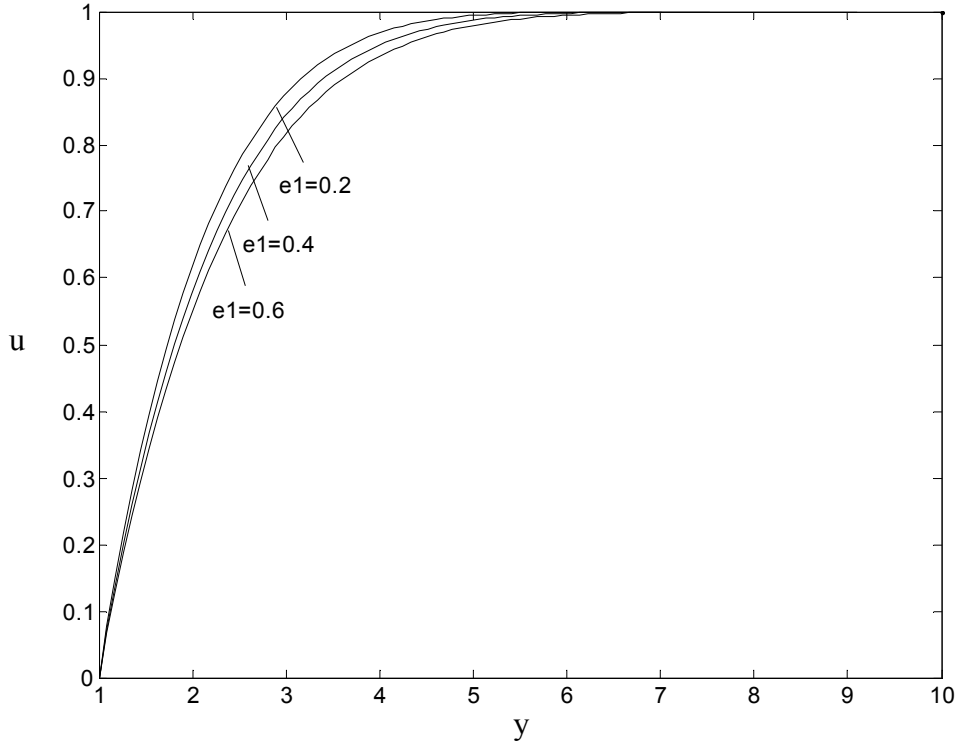
Şekil 4.10. Viskoz etkilerin incelen akışkanlar için hız profili üzerindeki etkileri
 $(v_0 = -1, m = -0.2, \varepsilon_1 = 1)$

Şekil 4.10'da viskozitenin farklı değerlerinin emme durumu ve incelen akışkanlar için hız ve sınır tabakasına olan etkileri gösterilmiştir. Şekil 4.10'daki akışkan hızına bakacak olursak şekil 4.9'a göre hızın azaldığını görürüz. Buradan da kabaran akışkanların hızının incelen akışkanlara göre daha fazla olduğunu söyleyebiliriz.



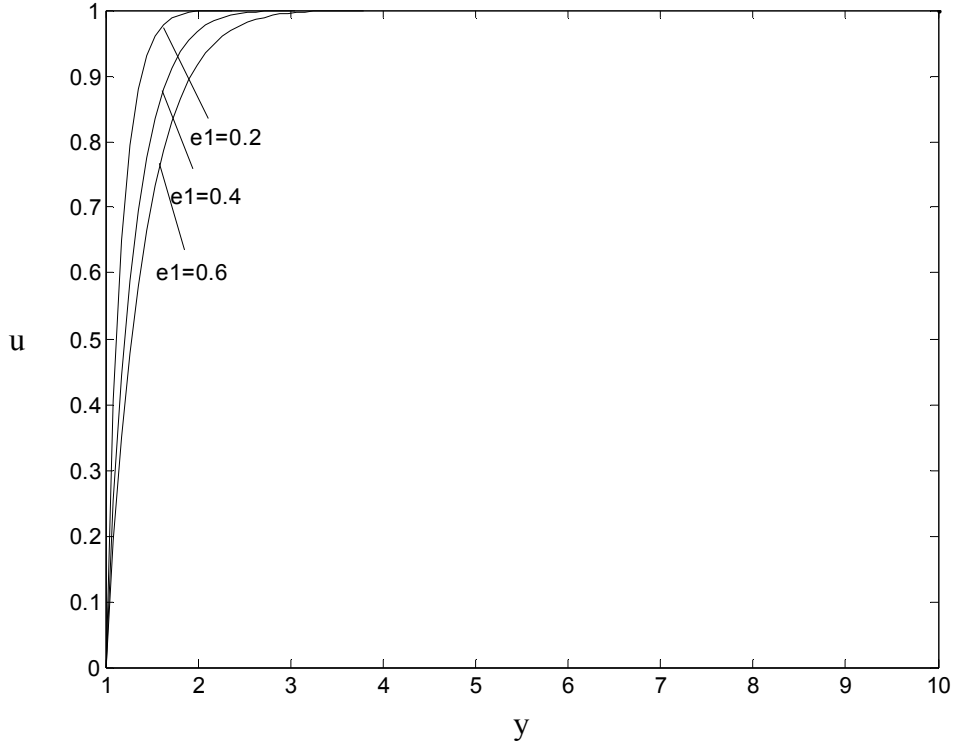
Şekil 4.11. Viskoz etkilerin püskürtme durumu ve incelen akışkanlar için hız profili üzerindeki etkileri ($v_0=1$, $m=-0.2$, $\varepsilon_1=1$)

Şekil 4.11’de viskoz etkilerin püskürtme durumu ve incelen akışkanlar için hız ve sınır tabakası üzerindeki etkileri gösterilmiştir. Şekil 4.8’e bakıldığı zaman şekil 4.11’de akışkan hızının azaldığını görebiliriz.



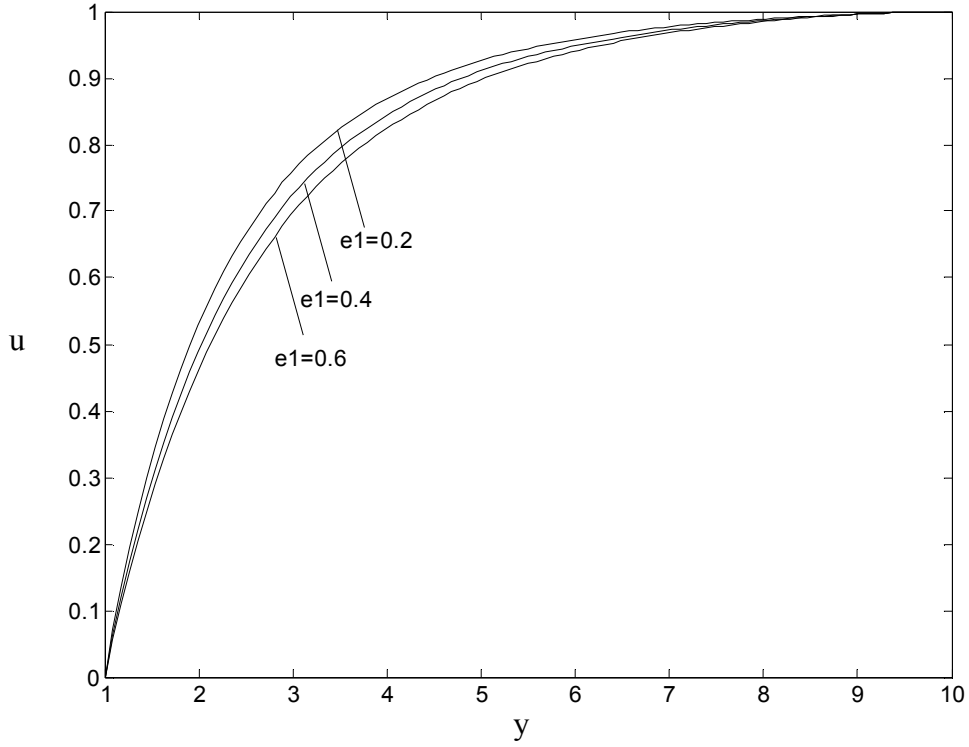
Şekil 4.12. İkinci derece akışkan sabitinin hız profili üzerindeki etkileri ($v_0=1$, $m=0.2$, $\varepsilon = 1$)

Şekil 4.12’de ikinci derece akışkan sabitinin hız profili ve sınır tabakası kalınlığına olan etkileri gösterilmiştir. ε_1 değerleri arttırıldığında akışkan hızı azalırken sınır tabakası kalınlığı artar.



Şekil 4.13. İkinci derece akışkan sabitinin emme durumunda hız profili üzerindeki etkileri
($v_0 = -1$, $m = 0.2$, $\varepsilon = 1$)

Şekil 4.13'te ikinci derece akışkan sabitinin emme durumunda hız ve sınır tabakası üzerindeki etkileri gösterilmiştir. grafiğe bakacak olursak ε_1 değerleri arttıkça akışkan hızının azaldığını fakat sınır tabakası kalınlığının arttığını söyleyebiliriz.



Şekil 4.14. İkinci derece akışkan sabitinin incelen akışkanlar için hız profili üzerindeki etkileri ($v_0=1$, $m=-0.2$, $\varepsilon=1$)

Şekil 4.14'de ikinci derece akışkan sabitinin püskürtme durumunda ve incelen akışkanlar için hız ve sınır tabakası üzerindeki etkileri gösterilmiştir. ε_1 değerleri arttıkça akışkan hızının azaldığını ve sınır tabakası kalınlığının arttığını söyleyebiliriz. Şekil 4.13'e bakıldığı zaman emme durumunda akışkan hızının püskürtme durumuna göre daha fazla olduğu görülür.

SONUÇLAR

Yapılan bu tez çalışmasında gözenekli bir yüzey üzerindeki Newtonyen olmayan akışkan akışında momentum denklemleri incelenmiştir. İlk olarak ikinci derece Power-Law akışkanlara ait en genel hareket denklemleri elde edilmiştir. Denklemlerin çıkarılışında Rivlin-Ericksen tensörleri kullanılmıştır. Bu denklemler için ikinci derece Power-Law akışı ifade eden sınır şartları belirlenerek çözümlerin daha genel olabilmesi için denklemler boyutsuz hale getirilmiştir. Sonuçta ikinci derece Power-Law akışkana ait sınır tabakası denklemi elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen sınır tabakası denklemi ve sınır şartları Matlab Sbvpa Paket programına aktararak nümerik çözümler yapılmıştır. Yapılan çözümlerde v_0 değeri sabit olarak kabul edilmiştir. Ayrıca sadece y yönünde yani tek boyutlu akış ele alınmıştır. Elde edilen bu verilere göre v_0 , ε , ε_1 , m gibi değişkenlerin farklı değerleri için grafikler çizilip akışkan hızı ve sınır tabakası kalınlığı üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Yapılan çalışmalar neticesinde v_0 'ın pozitif (emme) değerleri arttıkça akışkan hızının arttığı fakat sınır tabakası kalınlığının azaldığı görülmektedir. v_0 'ın negatif (püskürtme) değerleri ise akışkan hızını daha fazla arttırmaktadır. Püskürtme değerleri sıfıra yaklaştıkça akışkan hızı artmakta fakat sınır tabakası kalınlığı azalmaktadır.

Ayrıca power-law üssü (m) değerleri arttıkça akışkan hızı da artmaktadır. Sınır tabakası kalınlığı ise azalmaktadır. Viskozite (ε) değerleri arttıkça akışkan katılaşacağı için hız azalmaktadır ve buna bağlı olarak da sınır tabakası kalınlığı ise artmaktadır.

KAYNAKLAR

- Akgül M.B., Elektroosmotik Kuvvetin Etkisi Altındaki Mikrokanallarda Üçüncü Derece Akışkanların İncelenmesi, Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2008.
- Ceryan E., Yeni Bir Newtonyen Olmayan Akışkan Modelinin Boru İçerisindeki Akışını İncelenmesi, Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2010.
- Havlik V., Water hammer analysis in homogeneous non-Newtonian slurry pipe flow, J. Hydrogen and Hydromechanics 46 (1998) 85-102.
- Örs H., Akışkanlar Mekaniği, Boğaziçi Üniversitesi Matbaası, 2003.
- Pakdemirli M. and Suhubi E.S., Boundary layer theory for second order fluids, International Journal of Non-Linear Mechanics 30 (1992a) 523-532.
- Pakdemirli M. and Suhubi E.S., Similarity solutions of boundary layer equations for second order fluids, International Journal of Non-Linear Mechanics 30 (1992b) 611-629.
- Pakdemirli M., The boundary layer equations of third grade fluids, International Journal of Non-Linear Mechanics 27 (1992c) 785-793.
- Pakdemirli, M., Conventional and multiple deck boundary layer approach to second and third grade fluids, International Journal of Engineering Science 32 (1994) 141-154.
- Peker S., Helvacı Ş.Ş., Akışkanlar Mekaniği, Literatür Yayıncılık, 2003.
- Pinarbasi A., Ozalp C., Effect of viscosity models on the stability of a non-Newtonian fluid in a channel with heat transfer, International Communications in Heat and Mass Transfer 28 (2001) 369-378.

- Rajeswari G.K. and Rathna S.L., Flow of a particular class of non-Newtonian visco-elastic and visco-inelastic fluids near a stagnation point, *ZAMP* 13 (1962) 43.
- Rajagopal K.R., Gupta A.S. and Wineman, A.S., On a boundary layer theory for non-Newtonian fluids, *Letters in Applied Engineering Science* 18 (1980) 875.
- Sharma S.C., Nagaraju T., Jain S.C., Performance of externally pressurized non-recessed roughened journal bearing system operation with non-Newtonian lubricant, *Tribology Transactions* 46 (2003) 404-413.
- Srivastava A.C., The flow of non-Newtonian liquid near stagnation point, *ZAMP* 9 (1958) 80.
- Tanner R.I., Non-Newtonian fluid parameter estimation using conical flows, *Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals* 5 (1966) 55-59.
- Wang Y., Chukwu G.A., Unsteady axial laminar Couette flow of power-law fluids in a concentric annulus, *Industrial and Engineering Chemistry Research* 35 (1996) 2039-2047.
- Yılmaz S., Non-Newtonyan Akışkanlarda Paralel İki Levha Arasındaki Akışın İncelenmesi, Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2008.
- Yurusoy M, Pakdemirli M., Lubrication of a slider bearing with a special third-grade fluid, *Applied Mechanics and Engineering*. 4 (1999) 759-772.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	Özgür CİVAN
Doğum Yeri	Gümüşhane
Doğum Tarihi	01/01/1987
Medeni Hali	Bekar
Yabancı Dili	İngilizce
	Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)
Lise	Sarkuysan Lisesi
Lisans	Afyonkarahisar Kocatepe Üniversitesi Mak. Res. ve Konst. Öğr. (2005-2009)
Yüksek Lisans	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen bilimleri Enstitüsü, Makine Eğitimi Anabilim Dalı (2009-2011)

EKLER

EK-1 Nümerik Çözümlerin Matlab Sbvp Paket Programına Aktarılması İçin Oluşturulan M-File Dosyası

```
function out=tezim(flag,t,y,ya,yb,V,m,e,e1)

switch flag
case 'f'
T=(e*m*abs(y(2))^(m)*y(3)+V*y(2)+e*abs(y(2))^(m)*y(3)-
e1*V*m*abs(y(2))^(m-1)*y(3)^2)/(e1*V*abs(y(2))^(m));

if y(2)==0||y(3)==0||V==0||m==0||e==0||e1==0;
out= [y(2)
      y(3)
      0];

else
out= [y(2)
      y(3)
      T];
end

case 'df/dy'
if y(2)==0||y(3)==0||V==0||m==0||e==0||e1==0;
C=0;
D=0;
E=0;

else
C=0;
D=(e*m^2*(y(2))^(m)*y(3)+V*y(2)+e*abs(y(2))^(m)*m*y(3)-
e1*V*m*abs(y(2))^(m-1)*(m-1)*y(3)^2)/(e1*V*abs(y(2))^(m+1))-
((e*m*abs(y(2))^(m)*y(3)+V*y(2)+e*abs(y(2))^(m)*y(3)-
e1*V*m*abs(y(2))^(m-1)*y(3)^2)*m)/(e1*V*abs(y(2))^(m+1));
E=(e*m*abs(y(2))^(m)+e*(y(2))^(m)-2*e1*V*m*abs(y(2))^(m-1)*y(3))/(e1*V*abs(y(2))^(m));

end
out=[0,1,0
     0,0,1
     C,D,E];

case 'R'
out=[ya(1)
     yb(1)-1
     yb(2)];

case 'dR/dya'
out=[1,0,0
     0,0,0
     0,0,0];
```

```
case 'dR/dyb'  
out=[0,0,0  
      1,0,0  
      0,1,0];  
case 'bvpopt'  
otherwise  
error('unknown flag');  
end
```

```
clear all  
V=1;  
m=-0.2;  
e=1;  
e1=0.2;
```

```
tau0=linspace(1,10,101);  
[tau,y]=sbvpcol(@tezim,tau0,' ',' ',V,m,e,e1);
```

```
figure(1)  
plot(tau,y(1,:),'r')  
hold on
```