

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Seda KINACI

KOMPAKT GRUPLARIN PROJEKTİF LİMİTLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2011

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

KOMPAKT GRUPLARIN PROJEKTİF LİMİTLERİ

Seda KINACI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez /07/2011 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından
Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

.....
Doç. Dr. A.Ali ÖZKURT
DANIŞMAN

.....
Doç. Dr. Fikret KUYUCU
ÜYE

.....
Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No:

Prof. Dr. İlhami YEĞİNGİL
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOMPAKT GRUPLARIN PROJEKTİF LİMİTLERİ

Seda KINACI

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman :Doç. Dr. A. Ali ÖZKURT
Yıl: 2011, Sayfa: 57
Jüri : Doç. Dr. A.Ali ÖZKURT
: Doç. Dr. Fikret KUYUCU
: Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL

Bu çalışmada, Kompakt Grupların Projektif Limitleri, Abelyen Gruplara Uygulamalar ve Bazı Dualite Teorileri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Projektif Limitler, Kompakt Gruplar, Abelyen Gruplar, Dualite.

ABSTRACT

MSc THESIS

PROJECTIVE LIMITS OF COMPACT GROUPS
--

Seda KINACI

**ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. A. Ali ÖZKURT
Year: 2011, Pages: 57

Jury : Assoc. Prof. Dr. A. Ali ÖZKURT
: Assoc. Prof. Dr. Fikret KUYUCU
: Asst. Prof. Dr. Ersin KIRAL

In this study, Projective Limits of Compact Groups, Applications to Abelian Groups and Some Duality Theories were studied.

Key Words: Projective Limits, Compact Groups, Abelian Groups, Duality.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın yanı sıra yüksek lisans eğitimimin her aşamasında, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, özverili, anlayışlı ve disiplinli çalışma şeklini örnek aldığım çok değerli danışmanım Doç. Dr. Ali Arslan ÖZKURT' a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmam esnasında ihtiyaç duyduğum her zaman yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ' ye, Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ' e ve Doç. Dr. Fikret KUYUCU' ya teşekkür ederim.

Bu süreçte her türlü desteğiyle yanımda olan değerli ablam Emine Ümit ÇATAK' a ve değerli arkadaşım Ar. Gör. Gülistan KAYA GÖK' e teşekkür ederim.

Ayrıca ilköğretimden bu yana okumam için gerekli imkânları sağlayan, manevi annem olarak gördüğüm değerli halam Serap KINACI' ya ve maddi ve manevi destekleriyle her an yanımda olan çok değerli babam Sedat KINACI' ya ve annem Fatma KINACI' ya teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
1. GİRİŞ	1
2. CEBİRSEL LİMİTLER	3
2.1.Direkt Sistem ve Direkt Limit.....	3
2.2.Projektif Sistem ve Projektif Limit	6
3. KOMPAKT GRUPLAR	13
3.1. Temel Bilgiler	13
3.2. Banach Cebiri.....	14
3.3. Matris Dönüşümleri	15
3.4. Homojen Uzaylar	19
4. ABELYEN GRUPLARA UYGULAMALAR	27
4.1. Karakter Grubu	27
5. KOMPAKT GRUPLARIN PROJEKTİF LİMİTLERİ	35
6. TAMAMEN BAĞLANTISIZ KOMPAKT GRUPLAR	43
7. BAZI DUALİTE TEORİLERİ.....	47
KAYNAKLAR.....	55
ÖZGEÇMİŞ	57

1. GİRİŞ

Bu çalışmada incelediğimiz topolojik grup ve özellikle kompakt (topolojik) grup kavramları matematiğin birçok alanında karşımıza çıkmaktadır. Lineer (matris) gruplar bunun somut örnekleridir. Bunlar, kompakt abelyen grupların teorisinde merkezi bir role sahiptir.

Merkezi önemi olan başka bir çalışma da projektif limitleridir. Kompakt gruplarda temel sonuçlardan bazıları, bu kavramla erken bir aşamada karşılaşmayı gerektirir.

Kompakt abelyen grupların teorisinde en üst nokta Pontryagin Dualite Teoremi' ne uzanır. Bunu şu şekilde söyleyebiliriz; G bir kompakt abelyen grup ise onun karakter grubu, $\hat{G}$, bir abelyen gruptur ve A bir abelyen grup ise, $\hat{A}$ bir kompakt abelyen gruptur. Pontryagin Dualite Teoremi, G ' nin karakter grubunun karakter grubu, $\hat{\hat{G}}$ ' nin, G topolojik grubuna izomorfik olduğunu ve $\hat{\hat{A}}$ ' nin A grubuna izomorfik olduğunu söyler. Dualite teorisini, vektör uzayı teorisinden tanıyoruz fakat burada şaşırtıcı olan gerçek; bir G kompakt abelyen grubundan, onun karakter grubu, $\hat{G}$, abelyen grubuna hiçbir bilgi kaybı olmadan ulaşabilmektir. Çünkü G kompakt grubunu, karakter grubu, $\hat{G}$ ' dan, onun karakter grubu $\hat{\hat{G}}$ ' yı alarak, yeniden elde edebiliriz.

Biz bu çalışmada Pontryagin Dualite Teoremi' nin yarısını, projektif limitleri kullanarak ispatladık. İspatın anahtarı; her abelyen grubun, sonlu üretilmiş alt gruplarının bir yönlendirilmiş birleşimi olduğunu incelemek ve bunun karakter grupları için ne anlama geldiğini analiz etmektir. Bu kompakt tamamen bağlantısız grupların prosonlu olduğunun gösterildiği projektif limitler çalışmasını gerektirir.

2. CEBİRSEL LİMİTLER

2.1 Direkt Sistem ve Direkt Limit

Tanım: $(I, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer her $i, i' \in I$ için $i'' \leq i$ ve $i'' \leq i'$ olacak şekilde bir $i'' \in I$ varsa $(I, \leq)$ kümesine *yönlendirilmiş küme* denir.

Örnek: $(N, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve burada $\leq$ sıralama bağıntısı $a \leq b \Leftrightarrow a/b$ şeklindedir. $(N, \leq)$ yönlendirilmiş bir kümedir. Çünkü $a, b \in N$ olmak üzere $c = \text{okək}(a, b) \in N$

$a/c \Rightarrow a \leq c$, $b/c \Rightarrow b \leq c$ olur.

Tanım: $(I, \leq)$ yönlendirilmiş bir küme $\{M_i\}_{i \in I}$ (I ile indekslenmiş) $\mathbb{R}$ -modüller ailesi ($\mathbb{R}$: birimli ve değişmeli halka) ve $i \leq i'$ ise $\varphi_{i,i'}: M_i \rightarrow M_{i'}$ modül homomorfizmi vardır öyle ki $i \leq j \leq k$ için

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\varphi_{i,j}} & M_j \\ & \searrow \varphi_{i,k} & \downarrow \varphi_{j,k} \\ & & M_k \end{array}$$

diyagramı değişmeli yani $\varphi_{j,k} \varphi_{i,j} = \varphi_{i,k}$ olsun. Bu durumda

$\{(M_i, \varphi_{i,j}) : i, j \in I \text{ ve } i \leq j\}$ bir *direkt sistem* denir. Genelde bir direkt sistem sadece $\{M_i\}_{i \in I}$ şeklinde gösterilir.

Tanım: $\{M_i\}_{i \in I}$ bir direkt sistem olsun. Eğer M bir $\mathbb{R}$ -modül ve her $i \in I$ için $\varphi_i: M_i \rightarrow M$ $\mathbb{R}$ -modül homomorfizmi var ve $i \leq j$ iken

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\varphi_i} & M \\ & \searrow \varphi_{i,j} & \uparrow \varphi_j \\ & & M_j \end{array}$$

diyagramı değişmeli oluyor ve N bir $\mathbb{R}$ -modül ve her $i \in I$ için $\psi_i: M_i \rightarrow N$ $\mathbb{R}$ -modül homomorfizmi var öyle ki $i \leq j$ için

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\psi_i} & N \\ & \searrow \varphi_{i,j} & \uparrow \psi_j \\ & & M_j \end{array}$$

$\psi_j \varphi_{i,j} = \psi_i$ ise

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & N & & \\ & & & & \uparrow \psi & & \\ & \psi_i & & \psi_j & & & \\ M_i & \longrightarrow & M_j & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & M \end{array}$$

her $i \in I$ için

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\varphi_i} & M \\ & \searrow \psi_i & \downarrow \psi \\ & & N \end{array}$$

$\psi \varphi_i = \psi_i$ olacak şekilde bir tek $\psi: M \rightarrow N$ $\mathbb{R}$ -modül homomorfizmi var ise M $\mathbb{R}$ -modülüne $\{M_i\}_{i \in I}$ direkt sistemin *direkt limiti* denir ve $\lim_{\rightarrow} M_i = M$ ile gösterilir.

Teorem: Direkt limit vardır.

İspat: $\{M_i\}_{i \in I}$ direkt sistem olsun. $M^+ = \bigoplus_{i \in I} M_i = \{f: f: I \rightarrow \bigcup M_i, f(i) \in M_i \text{ her } i \in I \text{ için ve sonlu tanesi dışında } f(i) = 0\} = \{(x_i)_{i \in I} : x_i \in M_i \text{ ve sonlu tane dışında } x_i = 0\}$

her $i \in I$ için $\varphi_i: M_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$, $\varphi_i(x) = (x_i)_{i \in I}$ öyle ki $(x_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ elemanının i . bileşeni x , diğerleri 0.

$N = \langle \varphi_j \varphi_{i,j}(x_i) - \varphi_i(x_i) : x_i \in M_i \text{ ve } i \leq j \rangle$ olsun. $M = M^+ / N$ alırsak

$\varphi_i: M_i \rightarrow M$ $(x_i)_{i \in I} : i$. bileşeni x , diğerleri 0.

$\varphi_i(x) = (x_i)_{i \in I} N$.

$i \leq j$ olsun.

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\varphi_i} & M \\ & \searrow \varphi_{i,j} & \uparrow \varphi_j \\ & & M_j \end{array}$$

değişmeli olduğunu gösterelim. $x_i \in M_i$ alalım.

$$\varphi_j \varphi_{i,j}(x_i) - \varphi_i(x_i) \in N \implies \varphi_j \varphi_{i,j}(x_i)N = \varphi_i(x_i)N \in M.$$

$$M = M^+ / N, \{M_i\}_{i \in I} \text{ direkt sistemin direkt limitidir.}$$

Teorem: Direkt limit tektir.

İspat: M ve $N = \{M_i\}_{i \in I}$ direkt sistemin direkt limiti olsun. M , $\{M_i\}_{i \in I}$ direkt sistemin direkt limiti olduğundan her $i \in I$ için $\varphi_i: M_i \rightarrow M$ $\mathbb{R}$ -modül homomorfizmi vardır. Benzer şekilde N , $\{M_i\}_{i \in I}$ direkt sistemin direkt limiti olduğundan her $i \in I$ için $\psi_i: M_i \rightarrow N$ $\mathbb{R}$ -modül homomorfizmi vardır.

Direkt limitin evrensel özelliğinden

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\psi_i} & N \\ & \searrow \varphi_i & \uparrow \psi \\ & & M \end{array} \quad \psi \varphi_i = \psi_i \text{ olacak şekilde}$$

$\psi: M \rightarrow N$ $\mathbb{R}$ -modül homomorfizmi vardır. Benzer şekilde N 'nin direkt limiti oluşundan

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\varphi_i} & M \\ & \searrow \psi_i & \downarrow \phi \\ & & N \end{array} \quad \phi \psi_i = \varphi_i \text{ olacak şekilde}$$

$\phi: N \rightarrow M$ $\mathbb{R}$ -modül homomorfizmi vardır.

$$\phi \psi_i = \varphi_i \text{ ve } \psi_i = \psi \varphi_i \text{ olduğundan } \phi \psi \varphi_i = \varphi_i \implies \phi \psi = 1_M$$

$$\psi \varphi_i = \psi_i \text{ ve } \phi \psi_i = \varphi_i \text{ olduğundan } \psi \phi \psi_i = \psi_i \implies \psi \phi = 1_N \text{ olur.}$$

Dolayısıyla $\psi: M \rightarrow N$ $\mathbb{R}$ -modül izomorfizmidir. ($\psi^{-1} = \phi$).

Örnek: I yönlendirilmiş bir küme olsun. $\{M_i\}_{i \in I}$, $\mathbb{R}$ -modüller ailesi ve $i \leq j$ ise $M_i \leq M_j$ olsun. O halde $\varphi_{i,j}: M_i \rightarrow M_j$ içleme dönüşümü ile $\{M_i\}_{i \in I}$ bir direkt sistemdir. $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ olsun. $x, y \in \bigcup_{i \in I} M_i$ olsun. $x \in M_i$ bir $i \in I$ için, $y \in M_j$ bir $j \in I$ için, I yönlendirilmiş küme olduğundan bir $k \in I$ için $i \leq k, j \leq k$ olur. Dolayısıyla $M_i \subseteq M_k$ ve $M_j \subseteq M_k$ olur.

O halde $x, y \in M_k$, $x + y \in M_k \Rightarrow x + y \in \bigcup_{i \in I} M_i$ ve $r \in \mathbb{R}$ ise $r(x + y) = rx + ry \in M_k \Rightarrow r(x + y) \in \bigcup_{i \in I} M_i$. Buradan $\bigcup_{i \in I} M_i$ bir $\mathbb{R}$ -modül olur. Her $i \in I$ için $\varphi_i: M_i \rightarrow \bigcup_{i \in I} M_i$, $\varphi_i(x) = x$ olarak tanımlanırsa $i \leq j$ ise

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\varphi_i} & M \\ & \searrow \varphi_{i,j} & \uparrow \varphi_j \\ & & M_j \end{array} \quad \text{değişmeli}$$

Bu durumda $\lim_{\rightarrow} M_i = M = \bigcup_{i \in I} M_i$ olur.

2.2. Projektif Sistem ve Projektif Limit

Tanım: $(I, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $i, i' \in I$ iken; $i'' \leq i$ ve $i'' \leq i'$ olacak şekilde bir $i'' \in I$ olsun. $\{M_i\}_{i \in I}$ $\mathbb{R}$ -modüller ailesi ve $i \leq j$ iken $\varphi_{i,j}: M_j \rightarrow M_i$ $\mathbb{R}$ -modül homomorfizmleri var olsun öyle ki

- (i) $\varphi_{i,i} = 1_{M_i}$
- (ii) $i \leq j \leq k$ iken

$$\begin{array}{ccc} M_k & \xrightarrow{\varphi_{j,k}} & M_j \\ & \searrow \varphi_{i,k} & \downarrow \varphi_{i,j} \\ & & M_i \end{array} \quad \text{diagramı değişmeli yani}$$

$\varphi_{i,j} \varphi_{j,k} = \varphi_{i,k}$ olsun. Bu durumda $\{M_i, \varphi_{i,j}\}_{i,j \in I, i \leq j}$ sistemine bir (*inverse*) *projektif sistem* denir.

Tanım: $\{M_i, \varphi_{i,j}\}_{i,j \in I, i \leq j}$ bir projektif sistem olsun. Eğer bir M $\mathbb{R}$ -modül ve her $i \in I$ için $\varphi_i: M \rightarrow M_i$ $\mathbb{R}$ -modül homomorfizmleri var ve $i \leq j$ iken

$$\begin{array}{ccc} M_j & \xleftarrow{\varphi_j} & M \\ & \searrow \varphi_{i,j} & \downarrow \varphi_i \\ & & M_i \end{array}$$

diyagramı değişmeli yani

$$\varphi_{i,j} \varphi_j = \varphi_i \text{ ve}$$

N bir $\mathbb{R}$ -modül her $i \in I$ için $\psi_i: N \rightarrow M_i$ $\mathbb{R}$ -modül homomorfizmleri varsa öyle ki $i \leq j$ için

$$\begin{array}{ccc} M_j & \xleftarrow{\psi_j} & N \\ & \searrow \varphi_{i,j} & \downarrow \psi_i \\ & & M_i \end{array}$$

diyagramı değişmeli yani

$$\varphi_{i,j} \psi_j = \psi_i \text{ olsun.}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & N & & \\ & & & & \downarrow \phi & & \\ \psi_j & \swarrow & \psi_i & \swarrow & & & \\ M_i & \leftarrow & M_j & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & M \end{array}$$

Bu durumda bir tek $\phi: N \rightarrow M$ $\mathbb{R}$ -modül homomorfizmi var öyle ki $i \in I$ için

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xleftarrow{\psi_i} & N \\ & \searrow \varphi_i & \downarrow \phi \\ & & M \end{array}$$

diyagramı değişmeli yani $\varphi_i \phi = \psi_i$.

Üniversal özelliği gerçekleşiyor ise M ye $\{M_i, \varphi_{i,j}\}_{i,j \in I, i \leq j}$ projektif sisteminin *projektif limiti* denir ve $\lim_{\leftarrow} M_i = M$ ile gösterilir.

Teorem: Projektif limit vardır ve tektir.

İspat: $\{M_i, \varphi_{i,j}\}_{i,j \in I, i \leq j}$ bir projektif sistem olsun.

$$\prod M_i = \left\{ f: f: I \rightarrow \bigcup M_i \text{ her } i \in I \text{ için, } \underbrace{f(i)}_{x_i} \in M_i \right\} = \{(x_i)_{i \in I} : x_i \in M_i\}$$

$$M = \{(x_i)_{i \in I} : x_i \in M_i \text{ ve } i \leq j \text{ ise } x_i = \varphi_{i,j}(x_j)\}$$

$M, \prod M_i$ modülünün bir alt modülüdür.

İddia: $M = \lim_{\leftarrow} M_i$, $M = \{(x_i)_{i \in I} : x_i \in M_i \text{ ve } i \leq j \text{ ise } x_i = \varphi_{i,j}(x_j)\}$ her $i \in I$ için $\varphi_i: M \rightarrow M_i$ izdüşüm (i . koordinata) $\varphi_i((x_i)_{i \in I}) = x_i$.
 $i \leq j$ olsun.

$$\begin{array}{ccc} M_j & \xleftarrow{\varphi_j} & M \\ & \searrow \varphi_{i,j} & \downarrow \varphi_i \\ & & M_i \end{array} \quad \begin{array}{l} (x_i)_{i \in I} \in M \text{ alalım. } i \leq j \text{ olduğundan} \\ x_i = \varphi_{i,j}(x_j). \end{array}$$

$$\varphi_{i,j} \varphi_j((x_i)_{i \in I}) = \varphi_{i,j}(x_j) = x_i = \varphi_i((x_i)_{i \in I}).$$

Üniversal Özellik: N bir $\mathbb{R}$ -modül her $i \in I$ için $\psi_i: N \rightarrow M_i$ $\mathbb{R}$ -modül homomorfizmi olsun öyle ki $i \leq j$ ise

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\psi_i} & M_i \\ & \searrow \psi_j & \uparrow \varphi_{i,j} \\ & & M_j \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{diyagramı değişmeli yani} \\ \varphi_{i,j} \psi_j = \psi_i \text{ olsun.} \end{array}$$

$x \in N$ ise $\psi_i(x) = \varphi_{i,j}(\psi_j(x))$, $\phi: N \rightarrow M$ $\phi(x) = (\psi_i(x))_{i \in I}$ olarak tanımlayalım. $(\psi_i(x))_{i \in I} \in M$ dir. Çünkü $i \leq j$ ise $\psi_i(x) = \varphi_{i,j}(\psi_j(x))$ her $i \in I$ için

$$\begin{array}{ccc}
 N & \xrightarrow{\psi_i} & M_i \\
 & \searrow \phi & \uparrow \varphi_i \\
 & & M
 \end{array}$$

diyagramının değişmeli

olduğunu gösterelim. $x \in N$ alalım. $\varphi_i \phi(x) = \varphi_i \left((\psi_i(x))_{i \in I} \right) = \psi_i(x)$.

Dolayısıyla $M = \lim_{\leftarrow} M_i$ olur.

Örnek: $I = \mathbb{N}$ alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için p asal bir sayı olsun. $G_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ olsun.

$$G_1 = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p, \quad G_2 = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{p^2}, \quad G_3 = \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{p^3}, \quad \dots, \quad G_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{p^n}$$

Eğer $n \leq m$ ise $p^m\mathbb{Z} \subset \dots \subset p^n\mathbb{Z} \subset \dots \subset \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{c}
 \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \\
 \Bigg/ p^n\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = G_n \\
 \uparrow \\
 G_m = \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}
 \end{array}$$

Dolayısıyla $\phi_{n,m} : G_m = \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \rightarrow G_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

$\phi_{n,m}(z + p^m\mathbb{Z}) = (z + p^n\mathbb{Z})$ olarak tanımlayalım.

$\phi_{n,m}$ iyi tanımlıdır:

$z + p^m\mathbb{Z} = z' + p^m\mathbb{Z}$ olsun. $z - z' \in p^m\mathbb{Z} \subset p^n\mathbb{Z}$. $z - z' \in p^n\mathbb{Z}$.

O halde $z + p^n\mathbb{Z} = z' + p^n\mathbb{Z}$ olur. $n \leq m \leq k$ olsun.

$$\begin{array}{ccc}
 G_k = \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} & \xrightarrow{\phi_{n,k}} & G_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \\
 \downarrow \phi_{m,k} & \nearrow \phi_{n,m} & \\
 G_m = \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} & &
 \end{array}$$

Diyagramı değişmelidir. O halde $\{G_n \phi_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}, m \geq n}$ bir projektif sistemdir.

Bu sistemin projektif limitine **p-adic sayıları** denir ve $\mathbb{Z}_{(p)}$ ile gösterilir. $\mathbb{Z}_{(p)} = \lim_{\leftarrow} G_n$. $\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ (\overline{z_n})_{n \in \mathbb{N}} : \overline{z_n} \in G_n = \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \text{ ve } n \leq m \text{ ise } z_n = \phi_{n,m}(z_m) \right\}$

Alıştırma: $\phi_1, \phi_2, \dots$ bağlantı fonksiyonları halka morfizmaları olsun. $f_n: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ tüm limit fonksiyonlarının halka morfizmaları olması için, $\mathbb{Z}_p$ 'nin sürekli çarpımla bir kompakt halka olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\mathbb{Z}(p) \xleftarrow{\phi_1} \mathbb{Z}(p^2) \xleftarrow{\phi_2} \mathbb{Z}(p^3) \xleftarrow{\phi_3} \mathbb{Z}(p^4) \xleftarrow{\phi_4} \dots$ bu sistemin projektif limiti

$\mathbb{Z}_p = \{(z + p^n \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}} \mid \text{Her } n \in \mathbb{N} \text{ için } \phi_n(z + p^{n+1} \mathbb{Z}) = z + p^n \mathbb{Z}\}$ p-adic grubudur.

- $\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ 'ler kompakt gruplar olduğundan projektif limitleri $\mathbb{Z}_p$ 'de kompakttır.

$(z + p\mathbb{Z}, z + p^2\mathbb{Z}, \dots, z + p^n\mathbb{Z}, \dots)_{n \in \mathbb{N}}, (z' + p\mathbb{Z}, z' + p^2\mathbb{Z}, \dots, z' + p^n\mathbb{Z}, \dots)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}_p$ olsun. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}, \dots, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \dots$ lerdeki toplama ve çarpma işlemleriyle;

$$(z + p\mathbb{Z}, z + p^2\mathbb{Z}, \dots, z + p^n\mathbb{Z}, \dots)_{n \in \mathbb{N}} + (z' + p\mathbb{Z}, z' + p^2\mathbb{Z}, \dots, z' + p^n\mathbb{Z}, \dots)_{n \in \mathbb{N}} = \\ \left(\underbrace{z + z' + p\mathbb{Z}}_{\text{toplama işlemi } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ dedir.}}, \underbrace{z + z' + p^2\mathbb{Z}}_{\text{toplama işlemi } \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \text{ dedir.}}, \dots, \underbrace{z + z' + p^n\mathbb{Z}}_{\text{toplama işlemi } \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \text{ dedir.}}, \dots \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$(z + p\mathbb{Z}, z + p^2\mathbb{Z}, \dots, z + p^n\mathbb{Z}, \dots)_{n \in \mathbb{N}} \cdot (z' + p\mathbb{Z}, z' + p^2\mathbb{Z}, \dots, z' + p^n\mathbb{Z}, \dots)_{n \in \mathbb{N}} = \\ \left(\underbrace{z \cdot z' + p\mathbb{Z}}_{\text{çarpma işlemi } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ dedir.}}, \underbrace{z \cdot z' + p^2\mathbb{Z}}_{\text{çarpma işlemi } \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \text{ dedir.}}, \dots, \underbrace{z \cdot z' + p^n\mathbb{Z}}_{\text{çarpma işlemi } \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \text{ dedir.}}, \dots \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

- $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}, \dots, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \dots$ ler birer halka olduğundan $\mathbb{Z}_p$ de bir halkadır.

Alıştırma: $\eta: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p$ şeklinde tanımlı olan fonksiyonun halkaların $\eta(z) =$

$(z + p^n \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}$ iyi tanımlı bir injektif halka homorfizmi olduğunu gösteriniz.

?

Çözüm: η bire-birdir: $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\eta(z_1) = \eta(z_2)$ olsun. O halde $z_1 = z_2$

$$\eta(z_1) = (z_1 + p^n \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}} = (z_1 + p\mathbb{Z}, z_1 + p^2\mathbb{Z}, \dots, z_1 + p^n\mathbb{Z}, \dots)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\eta(z_2) = (z_2 + p^n \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}} = (z_2 + p\mathbb{Z}, z_2 + p^2\mathbb{Z}, \dots, z_2 + p^n\mathbb{Z}, \dots)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$(z_1 + p^n \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}} = (z_2 + p^n \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}} \implies z_1 + p\mathbb{Z} = z_2 + p\mathbb{Z} \implies z_1 - z_2 \in p\mathbb{Z}$$

$$z_1 + p^2\mathbb{Z} = z_2 + p^2\mathbb{Z} \implies z_1 - z_2 \in p^2\mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{ccc} & \vdots & \vdots \\ z_1 + p^n \mathbb{Z} = z_2 + p^n \mathbb{Z} & \Rightarrow & z_1 - z_2 \in p^n \mathbb{Z} \\ & \vdots & \vdots \end{array}$$

$$\Rightarrow z_1 - z_2 \in \bigcap p^n \mathbb{Z} = \{0\} \Rightarrow z_1 - z_2 = 0 \Rightarrow z_1 = z_2.$$

η 'nin homorfizma olduğu açıktır. O halde η bir injektif morfizmdir.

Alıştırma: $\mathbb{Z}_p$ 'nin tamamen bağlantısız olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\prod_{n \geq 0} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ tamamen bağlantısız uzayların çarpımıdır.

- Tamamen bağlantısız uzayların çarpımı tamamen bağlantısızdır.

O halde $\prod_{n \geq 0} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ tamamen bağlantısızdır.

- Tamamen bağlantısız uzayların alt uzayları tamamen bağlantısızdır.

O halde $\mathbb{Z}_p, \prod_{n \geq 0} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ uzayının kapalı bir alt uzayı olduğundan $\mathbb{Z}_p$ 'de tamamen bağlantısızdır.

Alıştırma: $\mathbb{Z}_p$ 'nin burulmasız olduğunu gösteriniz.(Yani $\mathbb{Z}_p$ 'nin sonlu mertebeden elemanı yoktur.)

Çözüm: Bir $a \in \mathbb{Z}_p$ ve $m \in \mathbb{N}$ için $a^m = 0$ olduğunda $a = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$$z \in \mathbb{Z} \text{ olsun. } a = (z + p\mathbb{Z}, z + p^2\mathbb{Z}, \dots, z + p^n\mathbb{Z}, \dots)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$a^m = (z^m + p\mathbb{Z}, z^m + p^2\mathbb{Z}, \dots, z^m + p^n\mathbb{Z}, \dots)_{n \in \mathbb{N}} = (\bar{0}, \bar{0}, \dots, \bar{0})$$

$$\mathbb{Z}_p \text{'nin } 0 \text{ elemanı } (0, 0, 0, 0, \dots)$$

$$z^m + p\mathbb{Z} = 0 \Rightarrow z^m \in p\mathbb{Z}$$

$$z^m + p^2\mathbb{Z} = 0 \Rightarrow z^m \in p^2\mathbb{Z}$$

$$\vdots$$

$$z^m + p^n\mathbb{Z} = 0 \Rightarrow z^m \in p^n\mathbb{Z}$$

$$z^m + p^{n+1}\mathbb{Z} = 0 \Rightarrow z^m \in p^{n+1}\mathbb{Z}$$

$$z^m \in \bigcap p^n \mathbb{Z} = \{0\}$$

$$z^m = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ olur.}$$

3. KOMPAKT GRUPLAR

3.1. Temel Bilgiler

Tanım: $(G, \cdot)$ bir grup ve G bir Hausdorff topolojik uzay olsun.

Eğer $\cdot : G \times G \rightarrow G$ ve $G \rightarrow G$ $(a, b) \rightarrow ab$ $a \rightarrow a^{-1}$ sürekli fonksiyonlar ise $(G, \cdot)$ ye bir *topolojik grup* denir.

Tanım: Eğer G kompakt bir topolojik uzay ise G ye *kompakt (topolojik) grup* denir.

Tanım: Eğer her $g \in G$ için g 'nin bir kompakt komşuluğu varsa G 'ye *yerel kompakt grup* denir.

Yukarıdaki tanıma eşdeğer olarak G 'nin birim elemanı kompakt bir komşuluğa sahipse G yerel kompakt gruptur.

Örnek: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ çarpma işlemi ile bir topolojik gruptur. Fakat kompakt grup değildir.

$S^0 = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (S^0 'ın topolojisi ayrık topolojidir.)

$S^0 = \{-1, 1\} \simeq \mathbb{Z}_2$ bilinen çarpma işlemi ile bir kompakt gruptur.

Örnek: $\mathbb{C}$: kompleks düzlem

$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ çarpma işlemi ile bir topolojik grup olur.

$S^1 \subset \mathbb{C} - \{0\}$

$S^1 = \{z \in \mathbb{C} - \{0\} : |z| = 1\}$ çarpma işlemi ile bir topolojik gruptur.

($S^1 \subset \mathbb{R}^2$ kapalı ve sınırlı olduğundan Heine-Borel teoreminden kompakttır.)

S^1 , kompakt gruptur.

Örnek: H : quaternionlar çarpık cismi (bölüm halkası) olsun.

$H = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$

$$ij = k \quad ji = -k$$

$$jk = i \quad kj = -i$$

$$ki = j \quad ik = -j \quad \text{olur.}$$

$w = a + bi + cj + dk \in H$ ise $\bar{w} = a - bi - cj - dk \in H$ elemanına w 'nın eşleniği denir.

$z, w \in H \implies \langle z, w \rangle = z\bar{w}$ bir iç çarpım tanımlar.

Dolayısıyla $z \in H \Rightarrow \|z\| = \sqrt{z\bar{z}}$ (z 'nin normu)

$1 = 1 + 0i + 0j + 0k \in H$ H 'nin çarpmaya göre birim elemanıdır.

$H \setminus \{0\}$, $\cdot$ çarpma işlemi ile bir topolojik gruptur.

$S^3 \subset H \setminus \{0\}$

$S^3 = \{z \in H : \|z\| = 1\} = \{z = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$

$S^3 \subset H \setminus \{0\}$ $\cdot$ işlemi ile bir kompakt gruptur.

3.2. Banach Cebiri

Tanım: K bir cisim ve A , K üzerinde bir vektör uzayı ayrıca bir halka ve $k \in K$ ve $x, y \in A$ iken $k(xy) = (kx)y = x(ky)$ oluyor ise A 'ya bir *cebiri* denir.

Tanım: A , K üzerinde birimli bir cebir ve A üzerinde bir $\|\cdot\| : A \rightarrow K$ normu tanımlanmış olsun. Eğer her $x, y \in A$ için $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ sağlanıyor ise A 'ya bir *Banach cebiri* denir.

V bir Banach cebiri olsun. V üzerinde bir metrik tanımlanabilir.

Dolayısıyla V , $\|\cdot\|$ normunun belirlediği metrik ile bir metrik uzay olur.

$\cdot : V \times V \rightarrow V$ süreklidir.

$(x, y) \rightarrow x \cdot y$ ($\cdot : V$ deki halka çarpımı)

$(a, b) \in V \times V$ alalım.

$\varepsilon > 0$ alalım. $\mathfrak{B} = \{B_r(x) : r \in \mathbb{R}\}$ V 'nin bazı,

$B_r(x) = \{y \in V : d(x, y) < r\}$

$x \in B_{\delta_1}(a)$, $y \in B_{\delta_2}(b)$ ise $x \cdot y \in B_\varepsilon(ab)$ olacak şekilde bir

$\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ ve $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ bulacağız.

$xy \in B_\varepsilon(ab)$ ise $\|xy - ab\| < \varepsilon$

$\|xy - ab\| = \|xy - ay + ay - ab\| \leq \|x - a\|\|y\| + \|a\|\|y - b\|$

Varsayalım ki

$\|y - b\| < 1 \Rightarrow \|y\| < \|b\| + 1$ olsun.

O halde

$\|xy - ab\| \leq \|x - a\|\|y\| + \|a\|\|y - b\| \leq \|x - a\|(\|b\| + 1) + \|a\|\|y - b\|$

$\delta_1 = \frac{\varepsilon}{2(\|b\|+1)}$ $\delta_2 = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2\|a\|}, 1\right\}$

O halde

$$\|xy - ab\| \leq \|x - a\|(\|b\| + 1) + \|a\|\|y - b\| \leq \frac{\varepsilon}{2(\|b\|+1)}\|b\| + 1 + \|a\|\frac{\varepsilon}{2\|a\|} = \varepsilon$$

$$\|x - a\| < \delta_1 = \frac{\varepsilon}{2(\|b\|+1)}$$

$$\|y - b\| < \delta_2 = \frac{\varepsilon}{2\|a\|} \text{ ve } \|y - b\| < 1.$$

Tanım: V bir Banach cebiri ve $u \in V$ olsun. Eğer $uu' = u'u = 1$ olacak şekilde bir $u' \in V$ varsa u' ya V 'nin bir **birimi** denir. $V^{-1} = \{u \in V : u, V \text{ 'nin bir birimi}\}$
 $V^{-1} \neq \emptyset \quad (1 \in V^{-1})$.

3.3. Matris Dönüşümleri

$W = \text{Hom}(V, V)$ fonksiyon toplaması ve bileşke işlemi ve $T \in W = \text{Hom}(V, V)$ ise $\|T\| = \sup\{\|T(v)\| : \|v\| \leq 1\}$ normu ile bir Banach cebiridir. $T, S \in \text{Hom}(V, V)$ $\|T \circ S\| \leq \|T\|\|S\|$ olduğunu göstereceğiz. Dikkat edilirse $T \in \text{Hom}(V, V)$ ise her $v \in V$ için, $\|T(v)\| \leq \|T\|\|v\|$, $v \in V$ için

$$\|T(S(v))\| \leq \|T\|\|S(v)\| \leq \|T\|\|S\|\|v\|$$

$$\|T \circ S\| = \sup\{\|T(S(v))\| : \|v\| \leq 1\}$$

$$\text{Dolayısıyla } \|T \circ S\| = \sup\{\|T(S(v))\| : \|v\| \leq 1\} \leq \|T\|\|S\|$$

Tanım: $W = \text{Hom}(V, V)$ 'nin birimleri

$$W^{-1} = Gl(V) = \{T \in \text{Hom}(V, V) : TS = ST = 1_V \text{ olacak şekilde } S \in \text{Hom}(V, V) \text{ var}\}$$

Bir topolojik gruptur. Bu gruba V üzerinde genel *lineer grup* denir.

V sonlu boyutlu olmak üzere, $T \in Gl(V)$ ise $T: V \rightarrow V$ lineer (ve sürekli)

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ V 'nin bir bazı olsun.

$$T(v_1) = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n$$

$$T(v_2) = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{2n}v_n$$

$\vdots$

$$T(v_n) = a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \dots + a_{nn}v_n$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$ O halde T lineer dönüşümüne karşılık gelen matris A olur.

O halde K , vektör uzayımızın katsayılar cismi olmak üzere

$$Gl(V) \rightarrow Gl(n, K) = \{A_{n \times n} : \det A \neq 0\} \text{ bir izomorfizmdir.}$$

$$T \rightarrow A$$

$$K = \mathbb{R} \text{ veya } K = \mathbb{C}$$

$$Gl(n, K) = Gl(n, \mathbb{R}) = Gl(n) \text{ veya } Gl(n, K) = Gl(n, \mathbb{C}) = Gl(n) \text{ ile gösterilir.}$$

Tanım: $\mathcal{H}$ bir reel veya kompleks iç çarpım uzayı olsun. Eğer $\mathcal{H}$ ' deki iç çarpımın belirlediği metriğe göre $\mathcal{H}$ 'deki her cauchy dizisi yakınsak ise $\mathcal{H}$ 'ye bir *Hilbert uzayı* denir.

Tanım: $x, y \in \mathcal{H}$ alalım.

$$d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \|x - y\| \quad \mathcal{H} \text{ üzerinde iç çarpımın belirlediği metrik}$$

$$U(\mathcal{H}) = \{T \in Gl(\mathcal{H}) : \langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle\} \subset Gl(\mathcal{H}) =$$

$\{T : T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \text{ sürekli lineer dönüşüm } TS = ST = 1_{\mathcal{H}} \text{ olacak şekilde } S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \text{ var.}\}$

$U(\mathcal{H}), Gl(\mathcal{H})$ 'nin bir alt grubudur.

$$T, S \in U(\mathcal{H}) \text{ ise } \langle T(S^{-1}(x)), T(S^{-1}(y)) \rangle = \langle S^{-1}(x), S^{-1}(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Bu gruba $\mathcal{H}$ üzerinde üniter grup denir.

Tanım: Özel olarak $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$ alalım. $x = (x_1, \dots, x_n)$ $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

$$U(\mathcal{H}) = U(\mathbb{R}^n) =$$

$$\{T : T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ sürekli lineer ve tersinir dönüşüm ve } \langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle\}$$

$$T \in U(\mathbb{R}^n) \text{ ise } x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\|T(x) - T(y)\| = \sqrt{\langle T(x) - T(y), T(x) - T(y) \rangle} = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \|x - y\|$$

T bir izometridir. Ayrıca T lineer olduğundan $T(0) = 0$ dolayısıyla

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$T(x) = Ax$ olacak şekilde $A = A_{n \times n}$ ortogonal matrisi vardır. $A_{n \times n}$: ortogonal matris.

Bu durumda $U(\mathcal{H}) = O(n, r) = O(n) = \{A_{n \times n} : A \text{ ortogonal matris } (A^t A = A A^t = I)\}$ grubuna *ortogonal grup* denir.

$$O(n) = \{A_{n \times n} : A \text{ ortogonal matris } \} \quad (A \text{ ortogonal} \Rightarrow \det A = \pm 1)$$

Tanım: $SO(n) = \{A_{n \times n} : A \text{ ortogonal matris ve } \det A = 1\}$ ve $SO(n) \triangleleft O(n)$ grubuna *special ortogonal grup* denir.

Tanım: Özel olarak $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ ($K = \mathbb{C}$) alalım.

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$$

$$\langle z, w \rangle = z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + \dots + z_n \overline{w_n} \in \mathbb{C} \quad \text{bir iç çarpımdır.}$$

$$U(\mathcal{H}) = U(\mathbb{C}^n)$$

$= \{T : T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \text{ sürekli lineer ve tersinir dönüşüm ve } \langle T(z), T(w) \rangle = \langle z, w \rangle\}$ grubuna *üniter grup* denir ve $U(\mathbb{C}^n) = U(n)$ ile gösterilir.

$T \in U(\mathbb{C}^n)$ alalım. $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ sürekli lineer bir dönüşüm.

$\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ aslında $T : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ bir izometridir.

T lineer olduğundan $T(0) = 0$ dolayısıyla $T(z) = Az$ olacak şekilde bir $A_{n \times n} = [z_{ij}]$, $z_{ij} \in \mathbb{C}$ vardır. Bu A matrisi üniter matristir.

$$\text{Yani } A \overline{A^t} = \overline{A^t} A = I \quad (\overline{A^t} : A \text{ 'nın transpozunun eşleniği})$$

Tanım: $U(\mathcal{H}) = U(n) = \{A_{n \times n} : A \text{ üniter matris } \}$

$SU(n) = \{A_{n \times n} : A \text{ üniter matris ve } \det A = 1\} \triangleleft U(n)$ grubuna *special üniter grup* denir.

Tanım: $A = \mathbb{H}^n$ ($\mathbb{H}$: *quaternionlar çarpık cismi*)

$\mathbb{H}^n$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı $(w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{H}^n$, $r \in \mathbb{R}$

$$(w_1, w_2, \dots, w_n)r = (w_1 r, w_2 r, \dots, w_n r)$$

$w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{H}^n$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{H}^n$ olsun.

$$\langle w, \lambda \rangle = \text{Re}(\sum_{i=1}^n w_i \overline{\lambda_i}) = \text{Re}(w_1 \overline{\lambda_1} + w_2 \overline{\lambda_2} + \dots + w_n \overline{\lambda_n})$$

$\mathbb{H}^n$ üzerinde bir iç çarpımdır. Bu durumda $\mathcal{H} = \mathbb{H}^n$, $K = \mathbb{R}$

$U(\mathcal{H}) = U(\mathbb{H}^n)$ grubuna *simplektik grup* denir ve $SP(n)$ ile gösterilir. $SP(n)$ bir matris grubudur.

Örnek: $S^3 \simeq SU(2)$, $S^3 = \{q \in \mathbb{H} : \|q\| = 1\}$ kompakt grup.

$$SU(2) = \{A_{2 \times 2} = [z_{ij}] : A \text{ üniter ve } \det A = 1\}$$

$f : S^3 \rightarrow SU(2)$, $q \in S^3$ alalım.

$$q = q_1 + q_2\vec{i} + q_3\vec{j} + q_4\vec{k} \quad (q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R})$$

$f(q) = \begin{bmatrix} q_1 + q_2i & q_3 + q_4i \\ -q_3 + q_4i & q_1 - q_2i \end{bmatrix}$ olarak tanımlayalım. Kolayca görüleceği gibi f bir homomorfizmdir. $q \in S^3$ olduğundan $\|q\| = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1$

$$A = \begin{bmatrix} q_1 + q_2i & q_3 + q_4i \\ -q_3 + q_4i & q_1 - q_2i \end{bmatrix}$$

$$\overline{A^t} = \begin{bmatrix} q_1 - q_2i & -q_3 - q_4i \\ q_3 - q_4i & q_1 + q_2i \end{bmatrix}$$

$$z = q_1 + q_2i \quad w = q_3 + q_4i \quad A = \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} \quad \overline{A^t} = \begin{bmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \overline{A^t} = \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z\bar{z} + w\bar{w} & -zw + z\bar{w} \\ -\bar{w}\bar{z} + \bar{z}w & w\bar{w} + z\bar{z} \end{bmatrix}$$

$$z\bar{z} + w\bar{w} = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \quad AA^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Benzer şekilde $\overline{A^t}A = I_2$ A üniter ve $\det A = 1$

$f(q) \in SU(2)$.

f birebirdir:

$$q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k \in H$$

$$f(q) = \begin{bmatrix} q_1 + q_2i & q_3 + q_4i \\ -q_3 + q_4i & q_1 - q_2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow q_1 = 1 \quad q_2 = q_3 = q_4 = 0$$

$\text{Ker} f = \{1\}$ f birebirdir.

f örtendir:

$$A = \begin{bmatrix} p_1 + p_2i & p_3 + p_4i \\ x + yi & z + ti \end{bmatrix} \in SU(2) \quad p_1, p_2, p_3, p_4 \text{ bilinenler}, \quad x, y, z, t$$

bilinmeyenler.

$$\underbrace{\det A = 1, \quad \overline{A^t}A = I, \quad A \cdot \overline{A^t} = I}_{}$$

Elde edilen denklemler çözülürse $z = p_1 \quad x = -p_3 \quad t = -p_2 \quad y = p_4$ ve $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = 1$ elde edilir.

O halde $p = p_1 + p_2i + p_3j + p_4k \in H \quad f(p) = A$ olur. f örtendir.

$$f: S^3 \rightarrow SU(2)$$

- S^3 kompakt,
- $SU(2)$ Hausdorff,
- f bire-bir, örten ve sürekli

f kapalı dönüşümdür. Dolayısıyla $f: S^3 \rightarrow SU(2)$ bir izomorfizmdir.

Örnek:

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ai + bj + ck \in H : a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset H = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = k^2 = 1, ijk = -1\}$ quaternionlar çarpık cismi olarak düşünebiliriz. $q \in H$ olsun. $I_q: H \rightarrow H$, $I_q(z) = qzq^{-1}$ $I_q: H$ 'nin bir iç otomorfizmi.

Dikkat edilirse eğer $z = ai + bj + ck \in \mathbb{R}^3$ ise $I_q(z) = qzq^{-1} \in \mathbb{R}^3$ olur.

$$q = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k, \quad q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|}$$

$$q^{-1} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}} - \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}i - \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}j - \frac{a_4}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}k$$

$qzq^{-1} \in \mathbb{R}^3$ olduğu görülür.

Dolayısıyla $q \in H$ $I_q: H \rightarrow H \Rightarrow I_q|_{\mathbb{R}^3}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ olur.

Eğer $q \in S^3 \subset H$ alırsak $\|q\| = 1$

$$\|I_q(z)\| = \|qzq^{-1}\| = \|z\|$$

Dolayısıyla $I_q|_{\mathbb{R}^3}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ normu korur. Yani ortogonal bir dönüşümdür.

Ayrıca tüm iç otomorfizmlerin determinanı 1 olduğundan $I_q \in SO(3)$ olur.

Dolayısıyla $S^3 \rightarrow SO(3)$ dönüşümünden söz edebiliriz.
 $q \rightarrow I_q$

$$\text{Ker}\{S^3 \rightarrow SO(3)\} = \{q \in S^3 \subset H : I_q = 1\}$$

$$I_q = 1 \text{ ise her } z \in \mathbb{R}^3 \text{ için } I_q(z) = qzq^{-1} = z$$

$$q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k, \quad \|q\| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1$$

$$z = bi + cj + dk$$

$qzq^{-1} = z \Rightarrow qz = zq$ olması için gerek ve yeter koşul $q \in S^3$ sanallarının sıfır yani $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ olmasıdır.

3.4. Homojen Uzaylar

Tanım: G bir topolojik grup, X (Hausdorff) bir topolojik uzay olsun.

$\theta: G \times X \rightarrow X$ sürekli bir fonksiyon ve

$$i) \theta(1, x) = x, \quad 1 \in G$$

$$ii) \theta(gh, x) = \theta(g, \theta(h, x)) \quad (g, h \in G, x \in X)$$

koşulları sağlanıyor ise θ ya G 'nin X üzerinde bir *etkisi* denir. Kısaca $\theta(g, x) = gx$ ile göstereceğiz. $H \leq G$ olsun.

$$\theta: H \times G \rightarrow G$$

$$\theta(h, g) = hg \quad \theta, H \text{ 'nin } G \text{ üzerinde bir etkisidir.}$$

$$\theta: G \times X \rightarrow X \quad G \text{ 'nin } X \text{ üzerinde bir (sürekli) etkisi olsun.}$$

$x \in X$ olsun.

$$G_x = \{g \in G : \theta(g, x) = x\} \triangleleft G \text{ grubuna } x \in X \text{ 'in } \textit{izotropi alt grubu} \text{ denir.}$$

$x \in X$ alalım.

$$G(x) = \{\theta(g, x) : g \in G\} \subset X \text{ kümesine } X \text{ 'in bir } \textit{orbiti} \text{ denir.}$$

$$G(x) = G(y) \Leftrightarrow y = gx \text{ olacak şekilde bir } g \in G \text{ olmasıdır.}$$

$$X/G = \{G(x) : x \in X\} \text{ orbit uzayı}$$

Eğer bir $x \in X$ için $G(x) = X$ ise θ 'ya *geçişmeli (transitive) etki* denir.

X ve Y G -uzayı $f: X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümü eğer

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\theta} & X \\ \downarrow 1 & \downarrow f & \downarrow f \\ G \times Y & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

Diyagramı değişmeli ise yani her $g \in G$ için $f(gx) = gf(x)$ koşulu sağlanıyor ise $f: X \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonuna *etki koruyan (equivariant) dönüşüm* denir.

$\theta: G \times X \rightarrow X$ sürekli etki olsun. $x \in X$ alalım.

$(G_x: X \text{ 'in izotropi alt grubu}) \quad (g, hG_x) \rightarrow hg^{-1}G_x$, G 'nin G/G_x üzerinde iyi tanımlı bir grup etkisidir.

Benzer şekilde $G \times G(x) \rightarrow G(x)$

$(g, \theta(h, x)) \rightarrow \theta(gh, x)$ iyi tanımlı bir grup etkisidir. Dolayısıyla her $x \in X$ için

$$f_x: G/G_x \rightarrow G(x)$$

$$f_x(gG_x) = gx = \theta(g, x) \text{ grup etkisini koruyan bir homeomorfizmdir.}$$

$$G = SO(n) = \{A_{n \times n} : A \in O(n) \text{ ve } \det A = 1\}$$

$$V \in \mathbb{R}^n, V = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ sütun matrisi olarak düşünebiliriz.}$$

$$\text{O halde } A = A_{n \times n} \text{ tipinde ise } A_{n \times n} V_{n \times 1} \in \mathbb{R}^n$$

$$S^{n-1} = \left\{ V = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n : \|V\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

$$\theta : SO(n) \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$$

$$\theta(A, V) = A_{n \times n} V_{n \times 1} \quad \|AV\|^2 = \langle AV, AV \rangle = \langle V, V \rangle = \|V\|^2 = 1$$

(A , ortogonal olduğundan iç çarpımı korur.)

$$\theta : SO(n) \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1} \text{ etkisi geçişmelidir.}$$

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0) \in S^{n-1}$$

$$SO(n)(e_1) = S^{n-1} \text{ olduğunu gösterelim:}$$

Yani her $x \in S^{n-1}$ için $A \cdot e_1 = x$ olacak şekilde $A \in SO(n)$ olduğunu gösterelim.

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}}_{1.\text{sütun}}$$

A matrisinin 1. sütunu $x \in S^{n-1}$ olmalıdır. $x \in S^{n-1}$ baza tamamlama teoremi ile $\{x, x_2, \dots, x_n\} \mathbb{R}^n$ 'in bir bazı olur.

A ortogonaldır. $\Leftrightarrow A$ 'nın satır veya sütun vektörleri ortonormaldir.

Gram-schmidt ortogonalleştirme yöntemi ile $\{x, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ortonormal bazı elde edilir.

Dolayısıyla sütunları $\{x, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olan A matrisi ortogonaldır ve $Ae_1 = x$

Eğer $\det A = -1$ ise v_n yerine $-v_n$ alarak $A \in SO(n)$ olarak düşünebiliriz.

$$G = SO(n), \quad X = S^{n-1} \text{ olmak üzere her } x \in S^{n-1} \text{ için } G(x) = S^{n-1}$$

$$v = (0, 0, \dots, 0, 1) \in S^{n-1}$$

$$G_v = \{A \in SO(n) : Av = v\}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ olup}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ şeklindeki}$$

A ortogonal, A' 'nın satır ve sütun vektörleri ortonormaldir.

Dolayısıyla

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ a_{n-1,1} & \cdots & \cdots & a_{n-1,n-1} & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(n-1)$$

şeklindedir.

$G_v = SO(n-1)$ olur. Öte yandan

$G/G_v \rightarrow G(v) = S^{n-1}$, $gG_v \rightarrow gv$ grup etkisini koruyan homeomorfizmdir.

Dolayısıyla $SO(n)/SO(n-1) \simeq S^{n-1}$ olur.

Örnek: $(\mathbb{Z}, +) \subset (\mathbb{R}, +)$, $\varphi: \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\varphi(n, t) = n + t$ olsun. Bu etkinin orbit uzayı

$$\mathbb{R}/\sim = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{\mathbb{Z}(t) : t \in \mathbb{R}\} = \{[t] : t \in \mathbb{R}\}$$

$$s \in [t] \Leftrightarrow \text{bir } n \in \mathbb{Z} \text{ için } s + n = t \Leftrightarrow t - s = n \in \mathbb{Z}$$

Öte yandan $(\mathbb{Z}, +) \triangleleft (\mathbb{R}, +)$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ bölüm grubu ve $\bar{t} = t + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ olsun.

Dikkat edilirse her $n \in \mathbb{Z}$ için $t + n \in [t] = \mathbb{Z}(t)$ olduğundan dolayısıyla

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\sim$$

$$\bar{t} \rightarrow [t] \text{ tanımlayalım.}$$

İyi tanımlı oluşu:

$\bar{t} = \bar{s}$ olsun. $\Leftrightarrow t - s \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t - s = n$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}$ vardır.

$$\Leftrightarrow s \in [t] \Leftrightarrow [s] = [t]$$

Tersine

$\mathbb{R}/\sim \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $[t] \rightarrow \bar{t}$ iyi tanımlıdır. O halde $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{R}/\sim$.

$$\varphi: (\mathbb{R}, +) \times S^1 \rightarrow S^1$$

$$\varphi(t, e^{i\theta}) \rightarrow e^{i(\theta+t)}$$

$$\varphi(0, e^{i\theta}) = e^{i(0+\theta)} = e^{i\theta}$$

$$\varphi(t_1 + t_2, e^{i\theta}) = e^{i(\theta+t_1+t_2)} = e^{it_1} \cdot e^{i(\theta+t_2)} = \varphi(t_1, \varphi(t_2, e^{i\theta})) \text{ olup dolayısıyla}$$

φ bir etkidir.

φ geçişmeli bir etkidir.

$y = e^{i\theta} \in S^1$ alalım.

$$x = e^{i0} = 1 \in S^1 \text{ ise } g = \theta \in \mathbb{R} \text{ alırsak } \varphi(\theta, x) = \varphi(\theta, e^{i0}) = e^{i(0+\theta)} = e^{i\theta} = y$$

O halde $x = 1 \in S^1$ 'in orbiti $X = S^1$ olur. $R(1) = S^1$

$1 \in \mathbb{R}$ 'nin izotropi alt grubu

$$G_x = \{t \in \mathbb{R} : \varphi(t, x) = x\} = \{t \in \mathbb{R} : e^{it} = e^{i0} = 1\}$$

$$= \{t \in \mathbb{R} : t = 2\pi x \text{ olacak şekilde bir } n \in \mathbb{Z} \text{ var}\}$$

$G_x \simeq \mathbb{Z}$ olup öte yandan $G(x) = S^1$, $G/G_x \simeq G(x)$, $gG_x \rightarrow gx$ grup etkisini

koruyan homeomorfizmdir. Dolayısıyla $G/G_x = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq G(x) = S^1$ olur.

$$(\mathbb{R}, +) / (\mathbb{Z}, +) \simeq S^1$$

$$U(1) = \{A_{1 \times 1} \in GL(1, \mathbb{C}) : \bar{A}^t A = 1\}$$

$$= \{[z]_{1 \times 1} : z \in \mathbb{C}, \bar{z}z = |z| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = S^1$$

$$(\mathbb{Z}, +) \triangleleft (\mathbb{R}, +)$$

$$\simeq$$

$$(2\pi\mathbb{Z}, +) \triangleleft (\mathbb{R}, +)$$

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

$$\varphi : S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \Rightarrow SO_2 \quad \varphi(t + 2\pi\mathbb{Z}) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in SO_2$$

φ iyi tanımlıdır.

$t + 2\pi\mathbb{Z} = s + 2\pi\mathbb{Z}$ olsun. Buradan $t - s \in 2\pi\mathbb{Z}$ dolayısıyla

$t - s = 2n\pi$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}$ var.

$t = s + 2n\pi$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}$ var.

$$\varphi(t + 2\pi\mathbb{Z}) = \begin{pmatrix} \cos(s + 2n\pi) & -\sin(s + 2n\pi) \\ \sin(s + 2n\pi) & \cos(s + 2n\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} = \varphi(s + 2\pi\mathbb{Z})$$

φ bir izomorfizmdir.

$$\text{O halde } \mathbb{R}/\sim = (\mathbb{R}, +) / (\mathbb{Z}, +) \simeq S^1 \simeq U(1) \simeq SO(2).$$

G bir topolojik grup X bir Hausdorff topolojik uzay olsun. $\theta: G \times X \rightarrow X$ G 'nin X üzerine (sürekli) etkisi olsun. Eğer bir $x \in X$ için $x \in X$ 'in orbiti sadece $x \in X$ noktasından oluşuyor ise yani $G(x) = \{\theta(g, x): g \in G\} = \{x\}$ ise $x \in X$ elemanına bu etkinin bir *sabit noktası* denir.

$$\begin{aligned} F = F(G, X) &= X^G = \{x \in X : x, \text{etkinin sabit noktası}\} \\ &= \{x \in X : \text{her } g \in G \text{ için } \theta(g, x) = x\} \subset X \end{aligned}$$

$X^G = X$ 'in sabit noktalar kümesi, X 'in kapalı alt kümesidir.

Bir $g \in G$ alalım. $f_g: X \rightarrow X$

$$x \rightarrow gx = \theta(g, x) \text{ sürekli}$$

$1: X \rightarrow X$ özdeşlik sürekli

$$A_g = \{x \in X : f_g(x) = 1(x) = x\} \subset X \text{ olur.}$$

Dolayısıyla, A_g kapalı olduğundan $X^G = \bigcap_{g \in G} A_g$ kapalı olur.

Tanım: $\theta: G \times X \rightarrow X$ G 'nin X üzerine etkisi ve $A \subset X$ olsun. Eğer

$G(A) = \{\theta(g, a): g \in G, a \in A\} = A$ ise $A \subset X$ kümesine X 'in θ etkisi altında *değişmez (invariant) alt kümesi* denir.

Teorem: G kompakt topolojik grup olsun. $\theta: G \times X \rightarrow X$ G 'nin X üzerine bir etkisi olsun ve $x \in F(G, X) = X^G$ olsun. Bu durumda $x \in X^G$ 'nin θ etkisi altında değişmez kalan bir komşuluğu vardır.

Hatta daha genel olarak; Eğer U , x 'in bir açık komşuluğu ise x 'in $(V = \bigcap_{g \in G} gU)$ $V \subseteq U$ ve V , θ etkisi altında invariant ($G(V) = V$) olacak şekilde bir komşuluğu vardır.

İspat: $h \in G$ olmak üzere $y \rightarrow hy: X \rightarrow X$ tüm fonksiyonlar bire-bir, örten ve $hG = G$ olduğundan $hV = h \bigcap_{g \in G} gU = \bigcap_{g \in G} hgU = \bigcap_{g \in G} gU = V$. Buradan V , θ _etkisi altında invaryanttır.

$1 \in G$ ve $1U = U$ olduğundan $V \subseteq U$ olduğu açıktır. Şimdi V 'nin $x \in X$ 'in bir komşuluğu olmadığını varsayalım ve bir çelişki elde edelim.

U' 'yu açık varsayabiliriz aksi takdirde U' 'yu U 'nun içi ile değiştirebiliriz. Her $W \subseteq X$ için $G_W = \{g \in G : gW \setminus U \neq \emptyset\}$ olarak tanımlayalım. Varsayımımızdan V , x 'in bir komşuluğu değildir. x 'in her W komşuluğu için $\emptyset \neq W \setminus V = W \setminus \bigcap_{g \in G} gU = \bigcup_{g \in G} (W \setminus gU)$ ve buradan bazı $W \setminus gU \neq \emptyset$ olacak şekilde $g \in G$ vardır ve $g^{-1}W \setminus U \neq \emptyset$. O zaman $G_W \neq \emptyset$. $\mathcal{U}$, x 'in komşuluk filtresi olsun. $W \subset W' \Rightarrow G_W \subseteq G_{W'}$ olduğundan $\{G_W : W \in \mathcal{U}\}$ ailesi G 'de bir filtre bazıdır. O halde G 'nin kompakt oluşundan bir $g \in \bigcap_{W \in \mathcal{U}} \overline{G_W}$ elemanı vardır. Buradan $1 \in G$ 'nin tüm N komşulukları için $gN \cap G_W \neq \emptyset$, yani $gNw \setminus U \neq \emptyset$. W_0 , X 'in keyfi bir komşuluğu olsun. Etki sürekliliğinden $NW \subseteq W_0$ olacak şekilde N ve W bulabiliriz. Buradan $gW_0 \setminus U \neq \emptyset$. O halde x 'in her W_0 komşuluğu $X \setminus g^{-1}U$ kümesini keser. Öte yandan $X \setminus g^{-1}U$ kapalı bir kümedir. Dolayısıyla $x \in X \setminus g^{-1}U$ ve buradan $gx \notin U$ olur. Fakat x sabit bir nokta olduğundan $x = gx$ dir. $x \notin U$ ve U , x 'in bir komşuluğu olduğundan bu bir çelişkidir.

Teoremin farklı bir ispatı aşağıda verilmiştir.

V , x 'in bir komşuluğu değilse, x 'in her W komşuluğu için $g_W \in G$ elemanı vardır öyle ki $W \setminus g_W U \neq \emptyset$. Buradan $g_W^{-1}x_W \notin U$ olacak şekilde bir $x_W \in W$ vardır. G kompakt olduğundan, g 'ye yakınsayan bir $g_{w(j)}$ alt ağı vardır. $x_W \in W$ olduğu için, $x_{w(j)}$ alt ağı x 'e yakınsar. Etki sürekliliğinden $g_{w(j)}^{-1}x_{w(j)}$, $g^{-1}X$ 'e yakınsar. Varsayalım ki U açık olsun. O halde $g_{w(j)}^{-1}x_{w(j)} \notin U$. Buradan $x \notin U$ dur. Bu bir çelişkidir.

Sonuç: G bir kompakt grup ve U , birimin bir komşuluğu ise $V = \bigcap_{g \in G} gUg^{-1}$, U 'nun içerdiği birimin bir komşuluğu ve tüm iç otomorfizmler altında invaryanttır.

İspat: $(g, x) \rightarrow gxg^{-1}$ ile G grubu G üzerine etki eder ve 1, bu etki için bir sabit noktadır. Önceki teoremin bir sonucudur.

Eğer birimin her komşuluğu tüm iç otomorfizmler altında invariant olan birimin bir komşuluğunu içeriyorsa, bu topolojik gruba *SIN-grup* veya *küçük değişmez komşuluklara sahiptir* denir. Her abelyen topolojik grup bir *SIN-gruptur*. Yukarıdaki sonuçtan her kompakt grup da bir *SIN-gruptur*.

Sonuç: G , E topolojik vektör uzayı üzerine etki eden bir kompakt grup öyle ki $\pi(g): E \rightarrow E : x \rightarrow gx$ tüm dönüşümler lineer ise $\{\pi(g) : g \in G\}$, E 'nin sürekli operatörlerinin ailesi eş süreklidir. Yani 0 'ın bir U komşuluğu verilsin, o halde 0 'ın bir V komşuluğu vardır öyle ki tüm $g \in G$ için $\pi(g)(V) \subseteq U$ dur. Aslında, $V = \bigcap_{g \in G} \pi(g)U$ (V 'nin G -invariant olduğu durum) olarak seçilebilir.

İspat: Etki lineer olduğundan, başlangıç noktası 0 bir sabit noktadır. O halde önceki teoremden bu sonuç elde edilir.

Önerme: $\{G_j : j \in J\}$ kompakt grupların keyfi bir ailesi ise $G = \prod_{j \in J} G_j$ çarpım topolojisiyle, bir kompakt gruptur. G 'nin her kapalı altgrubu H , bir kompakt gruptur.

4. ABELYEN GRUPLARA UYGULAMALAR

4.1. Karakter Grubu

X ve Y kümeleri için $f: X \rightarrow Y$ tüm fonksiyonların kümesini Y^X ile göstereceğiz.

Tanım: A bir abelyen grup olsun. $T^A = \{f \mid f: A \rightarrow T \text{ bir fonksiyon}\}$,

$T^A = \prod_{a \in A} T_a$ ve $T_a = T = S^1$ olmak üzere

$\text{Hom}(A, T) = \{f: A \rightarrow T \text{ bir homomorfizm}\} \subseteq T^A$ ya A 'nın karakter grubu denir ve $\hat{A}$ ile gösterilir. $\text{Hom}(A, T)$ 'nin elemanlarına da A 'nın karakterleri denir.

Önerme: $\hat{A}$, bir A abelyen grubunun karakter grubu, kompakt abelyen gruptur.

İspat: $a \in A$ alalım. $\varphi_a: T^A \rightarrow T$ $\varphi_a(f) = f(a)$ olarak tanımlayalım.

O halde $M(a, b) = \{x \in T^A : \varphi_{a+b}(x) = (\varphi_a + \varphi_b)(x)\}$

$T = S^1$ Hausdorff olduğundan $M(a, b)$ kapalıdır.

A abelyen olduğundan $M(a, b) = M(b, a)$

O halde $\text{Hom}(A, T) = \bigcap_{(a,b) \in A \times A} M(a, b)$

Dolayısıyla $\text{Hom}(A, T)$ kapalıdır.

T^A kompakt olduğundan $\text{Hom}(A, T)$ kompakt olur.

Örnek: $A = (\mathbb{Z}, +)$ abelyen grubunu düşünelim.

$\hat{\mathbb{Z}} = \text{Hom}(\mathbb{Z}, S^1) \simeq S^1$ olduğunu gösterelim. $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{r + \mathbb{Z} : r \in \mathbb{R}\}$,

$f \in \text{Hom}(\mathbb{Z}, S^1)$ alalım. $\varphi: \hat{\mathbb{Z}} = \text{Hom}(\mathbb{Z}, S^1) \rightarrow S^1$, $\varphi(f) = f(1)$ olarak tanımlayalım. φ grup homomorfizması olduğundan

$$\varphi(f + g) = (f + g)(1) = f(1) + g(1) = \varphi(f) + \varphi(g)$$

φ 'nin örten oluşu:

$x \in S^1$ alalım. $f: \mathbb{Z} \rightarrow S^1$, $f(1) = x$ ve $f(-1) = -x$ olarak tanımlayalım.

Dolayısıyla $f(n) = f(\underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ tane}}) = nf(1) = nx$

$n \geq 0$ ise $f(n) = f(\underbrace{(-1) + \dots + (-1)}_{-n \text{ tane}}) = -nf(-1) = nx$

$n < 0$ ise $\varphi(f) = f(1) = x$ olur. Buradan φ örtendir.

φ 'nin birebir oluşu:

$\varphi(f) = \varphi(g)$ olsun. Yani $f(1) = g(1)$ olsun. $n \in \mathbb{Z}$ alalım.

$$n > 0 \quad \text{ise} \quad f(n) = f(\underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ tane}}) = f(1) + \dots + f(1) = g(1) + \dots + g(1) =$$

$$g(1 + \dots + 1) = g(n), \quad f(1) = g(1) \Rightarrow f(-1) = g(-1) \text{ olur.}$$

$$n < 0 \text{ ise}$$

$$f(n) = f(\underbrace{((-1) + \dots + (-1))}_{-n \text{ tane}}) = f(-1) + \dots + f(-1) = g(-1) + \dots + g(-1) =$$

$$g((-1) + \dots + (-1)) = g(n). \text{ Dolayısıyla } f = g \text{ olur.}$$

φ 'nin sürekli oluşu:

$$\varphi: \hat{\mathbf{Z}} = \text{Hom}(\mathbb{Z}, S^1) \rightarrow S^1$$

$$\varphi(f) = f(1) \quad \text{sürekli.}$$

Çünkü her $n \in \mathbb{Z}$ için $S_n = S^1$ olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbf{Z}} = \text{Hom}(\mathbb{Z}, S^1) & \rightarrow & (S^1)^{\mathbb{Z}} = \prod_{n \in \mathbb{Z}} S_n \\ & \searrow \varphi & \downarrow \pi_1 \\ & & S^1 \end{array}$$

$\pi_1: \prod_{n \in \mathbb{Z}} S_n \rightarrow S^1$ 1. koordinata izdüşümdür. Dolayısıyla φ sürekli.

O halde $\varphi: \hat{\mathbf{Z}} = \text{Hom}(\mathbb{Z}, S^1) \rightarrow S^1$. $\text{Hom}(\mathbb{Z}, S^1)$ kompakt ve S^1 Hausdorff olduğundan φ homeomorfizmdir. Çünkü φ birebir, örten, sürekli ve kapalı bir dönüşümdür. Dolayısıyla $\hat{\mathbf{Z}} = \text{Hom}(\mathbb{Z}, S^1) \simeq S^1$ olur.

Örnek: $A = \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ olsun. $\hat{A} = \text{Hom}(\mathbb{Z}_n, S^1) \simeq \mathbb{Z}_n$ olur. $j: \mathbb{Z}_A \rightarrow S^1$, $j(z + n\mathbb{Z}) = \frac{1}{n}z + \mathbb{Z}$ olarak tanımlayalım.

j 'nin iyi tanımlı oluşu:

$$z_1 + n\mathbb{Z} = z_2 + n\mathbb{Z} \text{ olsun.}$$

$$z_1 - z_2 \in n\mathbb{Z} \Rightarrow z_1 - z_2 = nz \text{ olacak şekilde bir } z \in \mathbb{Z} \text{ vardır.}$$

$$j(z_1 + n\mathbb{Z}) = \frac{1}{n}z_1 + \mathbb{Z}$$

$$j(z_2 + n\mathbb{Z}) = \frac{1}{n}z_2 + \mathbb{Z}$$

$$j(z_1 + n\mathbb{Z}) = j(z_2 + n\mathbb{Z}) \text{ olduğunu göstermeliyiz:}$$

$$\frac{1}{n}z_1 - \frac{1}{n}z_2 = \frac{1}{n}(z_1 - z_2) = \frac{1}{n} \cdot nz = z \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Dolayısıyla } \frac{1}{n}z_1 + \mathbb{Z} = \frac{1}{n}z_2 + \mathbb{Z}$$

j bire-bir bir grup homomorfizmidir. O halde

$$\varphi: \text{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}_n, S^1) = \hat{\mathbb{Z}}_n$$

$$f \longrightarrow jof \quad \text{olarak tanımlanan homomorfizmin bir grup}$$

izomorfizmi olduğunu gösterelim:

$$j: \mathbb{Z}_n \rightarrow S^1 \text{ birebir grup homomorfizmi, dolayısıyla } j(\mathbb{Z}_n) \simeq \mathbb{Z}_n \subset S^1$$

φ 'nin birebir oluşu:

$$\varphi(f) = \varphi(g) \text{ olsun. Dolayısıyla } jof = jog \text{ ve } j, \text{ birebir olduğundan } f = g \text{ olur.}$$

φ 'nin örten oluşu:

$$f \in \text{Hom}(\mathbb{Z}_n, S^1), \quad f: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \text{ grup homomorfizmi, } f(1 + n\mathbb{Z}) = x + \mathbb{Z} \text{ olsun.}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= f(n + n\mathbb{Z}) = f(\underbrace{(1 + n\mathbb{Z}) + (1 + n\mathbb{Z}) + \dots + (1 + n\mathbb{Z})}_{n \text{ defa}}) \\ &= f(1 + n\mathbb{Z}) + f(1 + n\mathbb{Z}) + \dots + f(1 + n\mathbb{Z}) \\ &= (x + \mathbb{Z}) + (x + \mathbb{Z}) + \dots + (x + \mathbb{Z}) = nx + \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Dolayısıyla $nx \in \mathbb{Z}$ dir. O halde $nx = z$ olacak şekilde bir $z \in \mathbb{Z}$ vardır.

$$\text{Buradan } x = \frac{1}{n}z.$$

$$\text{O halde } \varphi: \text{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}_n, S^1) = \hat{\mathbb{Z}}_n, f \in \text{Hom}(\mathbb{Z}_n, S^1) \text{ alalım.}$$

$$f(1 + nz) = \frac{1}{n}z + \mathbb{Z} \text{ olacak şekilde bir } z \in \mathbb{Z} \text{ vardır.}$$

$$\text{O halde } g: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$$

$$g(1 + n\mathbb{Z}) = z + n\mathbb{Z} \text{ olarak tanımlanırsa } jog = f \text{ olur.}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_n & \xrightarrow{f} & S^1 \\ g \downarrow & \nearrow j & \\ \mathbb{Z}_n & & \end{array}$$

Dolayısıyla $\text{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n) \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}_n, S^1) = \hat{\mathbb{Z}}_n$. Ayrıca $\Psi: \text{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n) \rightarrow \mathbb{Z}_n$
 $\Psi(f) = f(1 + n\mathbb{Z})$ bir izomorfizmdir. Dolayısıyla

$$\hat{\mathbb{Z}}_n = \text{Hom}(\mathbb{Z}_n, S^1) \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n) \simeq \mathbb{Z}_n. \text{ Yani } \hat{\mathbb{Z}}_n \simeq \mathbb{Z}_n \text{ olur.}$$

X bir küme ve $\{A_x : x \in X\}$ abelyen grupların bir ailesi olsun. A_x 'lerin direkt toplamını $\bigoplus_{x \in X} A_x$ ile gösterelim. $\bigoplus_{x \in X} A_x$, X 'in bazı sonlu alt kümeleri dışındaki her $x \in X$ için $a_x = 0$ olacak şekilde $(a_x)_{x \in X}$ elemanlarından oluşan $\prod_{x \in X} A_x$ çarpım grubunun bir alt grubudur. Özel olarak, her $x \in X$ için $A_x = \mathbb{Z}$ olacak şekilde $\mathbb{Z}^X = \bigoplus_{x \in X} A_x$, X üzerinde serbest abelyen gruptur.

Önerme: $\Phi: \prod_{x \in X} \text{Hom}(A_x, T) \rightarrow \text{Hom}(\bigoplus_{x \in X} A_x, T)$ fonksiyonu $f_x: A_x \rightarrow T$ morfizmi olmak üzere $(f_x)_{x \in X} \rightarrow \sum_{x \in X} f_x(a_x): \bigoplus_{x \in X} A_x \rightarrow T$ bir izomorfizmdir. Buradan,

$$(\bigoplus_{x \in X} A_x)^\wedge \simeq \prod_{x \in X} \hat{A}_x. \text{ Özel olarak}$$

$$(\mathbb{Z}^X)^\wedge \simeq \hat{\mathbb{Z}}^X \simeq T^X$$

İspat: $(\bigoplus_{x \in X} A_x = A$ olarak kısaca gösterelim.)

Φ 'nin birebir oluşu:

Her $(a_x)_{x \in X} \in A$ için $(f_x)_{x \in X} \in \ker \Phi$ olması için gerek ve yeter koşul $\sum_{x \in X} f_x(a_x) = 0$ olmasıdır. Verilen $y \in X$ için $x \neq y$ iken $a_x = 0$ ve $a_y = a$ olacak şekilde bir (a_x) ailesi seçelim. Her $a \in A_y$ için $f_y(a) = 0$ olur. Buradan her $y \in X$ için $f_y = 0$ olur. Φ birebirdir.

Φ 'nin örten oluşu:

$f: A \rightarrow T$ bir morfizm olsun.

$i_y: A_y \rightarrow A$ doğal içerme ve $f_y = f \circ i_y$ olacak şekilde

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & T \\ i_y \uparrow & & \nearrow f_y \\ A_y & & \end{array}$$

$f_y: A_y \rightarrow T$ tanımlansın. Buradan $\Phi((f_x)_{x \in X}) = f$ olduğu görülür. Φ örtendir.

Φ' nin sürekli oluşu:

Her $(a_x)_{x \in X} \in A$ için $(f_x)_{x \in X} \rightarrow \Phi((f_x)_{x \in X})((a_x)_{x \in X}) = \sum_{x \in X} f_x(a_x) : Hom(A_x, T)^X \rightarrow T$ sürekli olduğunu gösterelim. Sadece sonlu sayıda $a_x \neq 0$ olduğundan, her sabit y için $(f_x)_{x \in X} \rightarrow f_y(a_y)$ süreklidir. Buradan $f_y \rightarrow f_y(a_y) : Hom(A_y, T) \rightarrow T$ süreklidir. Φ süreklidir.

Φ' nin kapalı dönüşüm oluşu:

$\Phi: \prod_{x \in X} Hom(A_x, T) \rightarrow Hom(\bigoplus_{x \in X} A_x, T)$ sürekli bir fonksiyon. $\prod_{x \in X} Hom(A_x, T)$ Tychonoff Teoreminden kompaktır. $Hom(\bigoplus_{x \in X} A_x, T)$ Hausdorff'tur.

$U^{kapalı} \subset \prod_{x \in X} Hom(A_x, T)$, $\prod_{x \in X} Hom(A_x, T)$ kompakt olduğundan, kapalı alt kümeleri de kompaktır.

$\Rightarrow U$ da kompakt olur. $\Rightarrow f(U)$ kompaktır. $\Rightarrow f$, kapalı dönüşümdür. Dolayısıyla Φ homeomorfizmdir.

T^X , kompakt abelyen gruplarına *torus grupları* denir. T^n , sonlu boyutlu torus grubudur.

Abelyen grupların temel teorisinden; sonlu olarak üretilmiş bir abelyen grup, devirli grupların bir direkt toplamıdır.

Not: E , sonlu abelyen grup olsun. $\hat{E} \cong E$ dir. Eğer F , rankı n olan sonlu üretilmiş bir abelyen grup ise, yani E , bir sonlu abelyen grup olmak üzere

$F = E \oplus \mathbb{Z}^n$ ise $\hat{F} \cong \hat{E} \times T^n$ dir.

Örnek: $\{G_j \mid j \in J\}$ sonlu ayrık ve eleman sayısı birden farklı grupların bir ailesi olsun. $G = \prod_{j \in J} G_j$ kompakt gruptur. Tüm bağlantılı bileşenleri bir elemanlıdır ve G 'nin ayrık olması için gerek ve yeter koşul J 'nin sonlu olmasıdır.

Tüm bağlantılı bileşenleri bir elemanlı olan bir topolojik uzaya *tamamen bağlantısız uzay* denir. Tamamen bağlantısız uzayların (keyfi) çarpımı tamamen bağlantısızdır ve tüm ayrık uzaylar tamamen bağlantısızdır.

Tanım: X ve Y birer küme ve $F \subseteq Y^X$ olsun. $x_1, x_2 \in X$ ve $x_1 \neq x_2$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ olacak şekilde $f \in F$ varsa, F, X 'in *noktalarını ayırır* denir. G ve H iki grup olsun ve $F \subseteq Hom(G, H) = \{f \mid f: G \rightarrow H, f \text{ grup homomorfizmi}\}$ olsun.

F, G' nin noktalarını ayırır. $\Leftrightarrow$ Her $1 \neq g \in G$ için $f(g) \neq 1$ olacak şekilde $f \in F$ vardır.

Abelyen grupların karakterlerinin noktaları ayırdığını görmek için abelyen gruplarda bazı temel gerçeğe bakalım:

A bir abelyen grup olsun. Her $a \in A$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $n \cdot x = a$ olacak şekilde $x \in A$ varsa A' ya *bölünebilir* denir. $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ bölünebilir gruplara örnektir. Bölünebilir bir grubun her homomorfik görüntüsü bölünebilirdir. Buradan T bölünebilirdir.

Bölünebilir grupların önemli bir özelliği; I bölünebilir bir grup, A bir abelyen grup ve $S \leq A$ olsun. Eğer $f: S \rightarrow I$ bir homomorfizm ise f' nin A' ya homomorfik genişlemesi vardır.

Lemma: Bir A abelyen grubunun karakterleri, noktaları ayırır.

İspat: $0 \neq a \in A$ olsun. $\psi: A \rightarrow T$, $\psi(a) \neq 0$ olacak şekilde bir ψ morfizmi bulmalıyız. S , a tarafından üretilmiş, A' nin devirli alt grubu olsun. S , sonsuz ise serbesttir ve herhangi bir $0 \neq t \in T$ elemanı için $f: S \rightarrow T$ $f(a) = t \neq 0$ vardır. (Serbest grupların universal özelliğinden $\langle a \rangle = s$)

S , n . mertebeden ise T' nin $\frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ alt grubuna izomorftur. Buradan $f: S \rightarrow T$

injeksiyonu vardır. T' nin bölünebilirliğinden $\psi: A \rightarrow T$, f' nin bir homomorfik genişlemesi vardır. Dolayısıyla $\psi(a) = f(a)$ ve $\psi \in \hat{A} = \text{Hom}(A, T)$ dir.

Tanım: G bir kompakt abelyen grup olsun. $\psi: G \rightarrow T$ morfizmine G' nin bir *karakteri* denir. Tüm karakterlerin kümesi $\text{Hom}(G, T)$ (nokta tabanlı toplama işlemi altında) abelyen gruptur ve G' nin *karakter grubu* denir. $\hat{G}$ ile gösterilir.

Lemma: (i) A bir abelyen grup ise, $\mu_A: A \rightarrow \hat{\hat{A}}$, $\mu_A(a)(\psi) = \psi(a)$ fonksiyon (abelyen grupların) bir injektif morfizmidir.

(ii) G bir kompakt abelyen grup ise, $\mu_G: G \rightarrow \hat{\hat{G}}$, $\mu_G(g)(\psi) = \psi(g)$ fonksiyonu (kompakt abelyen grupların) bir morfizmidir.

İspat: (i) $\mu_A: A \rightarrow \hat{\hat{A}}$, $\mu_A(a) \in \hat{\hat{A}} = \text{Hom}(\hat{A}, T)$

$\psi \in \hat{A} = \text{Hom}(A, T)$ olmak üzere

$\mu_A(a)(\psi) \rightarrow \psi(a)$ dır ve $\ker \mu_A = \{a \in A : \mu_A(a) = 0\}$

$a \in \ker \mu_A$, $a \neq 0$ olsun. Bir $\psi \in \hat{A}$ var ki $\psi(a) \neq \psi(0) = 0$

$\mu_A: A \rightarrow \hat{\hat{A}}$, $\mu_A(a) \in \hat{\hat{A}} = \text{Hom}(\hat{A}, T)$

$\mu_A(a): \hat{A} \rightarrow T$, $\mu_A(a)(\psi) = \psi(a) \neq 0$

$\mu_A(a) \neq 0$ bir çelişkidir. O halde $a = 0$.

(ii) μ_G 'nin sürekliliğini göstermeliyiz:

Karakterlerin sürekliliğinden; her ψ karakteri için $g \rightarrow \psi(g): G \rightarrow T$ fonksiyonu süreklidir. Buradan $g \rightarrow (\psi(g))_{x \in \hat{G}}: G \rightarrow T^{\hat{G}}$ fonksiyonu çarpım topolojisinin

tanımından süreklidir. $\hat{\hat{G}} = \text{Hom}(\hat{G}, T) \subseteq T^{\hat{G}}$ benzer şekilde μ_G süreklidir.

Genişleme Lemması: $U, \mathbb{R}'$ de 0'ı içeren keyfi bir aralık olsun. $\varphi: U \rightarrow G$ bir fonksiyon öyle ki $x, y, x + y \in U$ olmak üzere $\varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y)$ olsun. O halde $F: \mathbb{R} \rightarrow G$ φ 'ye genişleyen grupların bir morfizmidir. U , bir noktadan fazla içeriyorsa F , tektir.

Şimdi de temel örneklerimize bakalım:

Her $\psi: T \rightarrow T$ karakteri $f(r) = \psi(r + \mathbb{Z})$ ile grupların $f: \mathbb{R} \rightarrow T$ bir morfizmasını verir. $q: \mathbb{R} \rightarrow T$ bölüm homomorfizması olsun. $V = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \subseteq \mathbb{R}$ ve $W = q(V)$ olsun. Buradan $q|_V: V \rightarrow W$ bir homeomorfizmdir. Varsayalım ki x ve $y \in W$ öyle ki $x + y \in W$. O halde $r = (q|_V)^{-1}(x)$, $s = (q|_V)^{-1}(y)$, ve $t = (q|_V)^{-1}(x + y) \in V$ dir. Öyle ki $q(r + s - t) = q(r) + q(s) - q(t) = x + y - (x + y) = 0 \in T$. Buradan $r + s - t \in \ker q = \mathbb{Z}$. Fakat $|r + s - t| \leq |r| + |s| + |t| < 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$. O halde $r + s - t = 0$ ve $(q|_V)^{-1}(x) + (q|_V)^{-1}(y) = r + s = t = (q|_V)^{-1}(x + y)$. Şimdi de $U, \mathbb{R}'$ de 0'ı içine alan bir açık aralık olsun. Öyle ki $f(U) \subseteq W$.

$\varphi = (q|_V^\circ)^{-1} f|_U: U \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. O halde her $x, y, x + y \in U$ için $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ dir. Bu koşullar altında φ , abelyen grupların $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir morfizmasına tek olarak genişletilebilir. Şimdi F, φ 'nin genişlemesi ve $U, \mathbb{R}$ abelyen grubunun üretici olduğundan $q \circ F = f = \psi \circ q$ dur. Buradan $\mathbb{Z} = \ker q \subseteq \ker (q +$

$F)$, yani $F(\mathbb{Z}) \subseteq \ker q = \mathbb{Z}$. O halde $n = F(1)$ dersek, $n \in \mathbb{Z}$, φ , sürekli olduğundan F , 0 da süreklidir.

Abelyen grupların bir morfizması olarak, F 'nin Q -lineer olduğu görülür ve F 'nin sürekliliğinden, F , $\mathbb{R}$ -lineerdir. Buradan $F(t) = nt$ ve $\psi(t + \mathbb{Z}) = nt + \mathbb{Z}$ dir. O halde T 'nin karakterleri $\mu_n = (g \rightarrow ng)$ endomorfizması ve $n \rightarrow \mu_n: \mathbb{Z} \rightarrow \hat{T}$ bir izomorfizmadır.

5. KOMPAKT GRUPLARIN PROJEKTİF LİMİTLERİ

Örnek: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\varphi_n: G_{n+1} \rightarrow G_n$ kompakt grup morfizmalarının bir dizisi

$$\begin{array}{cccc} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ \text{olsun. } G_1 \leftarrow G_2 \leftarrow G_3 \leftarrow G_4 \leftarrow \dots \end{array}$$

O zaman $j, k \in \mathbb{N}$, $j \leq k$ için tanımlayarak kompakt grupların bir projektif sistemini elde ederiz. Morfizmler

$$f_{jk} = \varphi_j \circ \varphi_{j+1} \circ \dots \circ \varphi_{k-1}: G_k \rightarrow G_j$$

Buradan $G = \lim_{n \in \mathbb{N}} G_n = \{(g_n)_{n \in \mathbb{N}} | (\text{her } n \in \mathbb{N}) \varphi_n(g_{n+1}) = g_n\}$ dir.

$$(i) \quad G_n = \mathbb{Z}(p^n) = \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \text{ olacak şekilde bir } p \in \mathbb{N} \text{ seçelim. } \varphi_n: \mathbb{Z}(p^{n+1}) \rightarrow \mathbb{Z}(p^n) \text{ , } \varphi_n(z + p^{n+1}\mathbb{Z}) = z + p^n\mathbb{Z} \text{ olarak tanımlayalım. } \mathbb{Z}_p = \{(z + p^n\mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}} | (\text{her } n \in \mathbb{N}) \varphi_n(z + p^{n+1}\mathbb{Z}) = z + p^n\mathbb{Z}\}$$

$$\begin{array}{cccc} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ \text{Burada } \mathbb{Z}(p) \leftarrow \mathbb{Z}(p^2) \leftarrow \mathbb{Z}(p^3) \leftarrow \mathbb{Z}(p^4) \leftarrow \dots \end{array}$$

Bu sistemin projektif limitine $p_adic \text{ grubu}$, $\mathbb{Z}_p$, denir.

$$(ii) \quad \text{Her } n \in \mathbb{N} \text{ için } G_n = T \text{ olsun. } (T = S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

$$g \in T \quad \text{ve} \quad \text{her } n \in \mathbb{N} \quad \text{için} \quad \varphi_n(g) = p \cdot g \quad \text{tanımlayalım.}$$

$$\begin{array}{cccc} \times p & \times p & \times p & \times p \\ T \leftarrow T \leftarrow T \leftarrow T \leftarrow \dots \end{array}$$

Bu sistemin projektif limitine $p_adic \text{ solenoid}$, T_p , denir.

$$\begin{array}{cccc} \times 2 & \times 2 & \times 2 & \\ p = 2 \text{ olsun. } S^1 \leftarrow S^1 \leftarrow S^1 \leftarrow \dots \end{array}$$

$$T_p = \{(g_n)_{n \in \mathbb{N}} | \text{Her } n \in \mathbb{N} \ 2g_{n+1} = g_n, g_n \in T\} \quad g_1 = e^{2\pi i x} \quad , \quad g_2 = e^{2\pi i y}$$

$$e^{2\pi i 2y} = e^{2\pi i x} \implies 2y = x \implies y = \frac{x}{2}$$

O halde $T_2 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} | x_n \in \mathbb{R}, x_{n+1} = 2x_n\}$

$$\begin{array}{cccc} \varphi_n & \varphi_{n-1} & \varphi_{n-2} & \\ G_{n+1} \rightarrow G_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \dots \end{array}$$

$$G = \lim_{\leftarrow} G_n = \{(g_n)_{n \in \mathbb{N}} | (\text{her } n \in \mathbb{N}) \varphi_n(g_{n+1}) = g_n\} ,$$

$$(g_n) + (p_n) = (g_n + p_n) \in G$$

$$g_{n+1} \in G_{n+1}, p_{n+1} \in G_{n+1} \quad g_{n+1} \oplus p_{n+1} \quad (G_{n+1} \text{ 'deki işlem})$$

$$\varphi_n(g_{n+1} + p_{n+1}) = g_n + p_n, (\varphi_n, \text{homomorfizm})$$

$\varphi_n(g_{n+1} + p_{n+1}) = \varphi_n(g_{n+1}) + \varphi_n(p_{n+1}) = g_n + p_n$ ve açıkça görülüyor ki T_p abelyendir.

T_p kompakt mı?

Kompakt grupların projektif limitleri de kompakttır.

T_p bağlantılı mı?

$S^1 = T$, $\pi : T \rightarrow \prod T_i : z \rightarrow (z, pz, p^2z, \dots, p^nz, \dots)$ tanımlayalım. (z yi her bileşene götürmek sürekli olduğundan) φ süreklidir. $\varphi(T) = T_p$. T bağlantılı olduğundan; sürekli fonksiyonlar altındaki görüntüsü de bağlantılıdır.

Lemma: $f: G \rightarrow H$ topolojik grupların bir morfizması olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

- (i) $\ker f = N$ ayrıktır ve f açıktır.
- (ii) 1 'in bir U açık komşuluğu vardır öyle ki $f|_U: U \rightarrow f(U)$ H 'de birimin bir açık komşuluğu üzerinde homeomorfizmadır.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii):

G 'de çarpma ve ters alma işlemlerinin sürekliliği ve $\{1\}$ N 'de bir açık alt küme olduğundan G 'de 1 'in bir U açık komşuluğunu bulabiliriz. Buradan $UU^{-1} \cap N = \{1\}$.

Varsayalım ki $u, v \in U$ olmak üzere $f(u) = f(v)$ olsun.

O halde $f(uv^{-1}) = f(u) \cdot f(v)^{-1} = 1 \Rightarrow uv^{-1} \in UU^{-1} \cap N = \{1\} \Rightarrow u = v$ ve $f|_U: U \rightarrow f(U)$ bire birdir. Hipotezden f ve dolayısıyla $f|_U$ sürekli ve açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (i):

N 'nin ayrık oluşu:

$f|_U$ bire-bir olduğundan $f(u) = 1 = f(1) \Rightarrow u = 1$ dir.

O halde $U \cap N = \{1\}$ olur.

U açık bir küme olduğundan $\{1\}$ de N 'de açıktır.

f 'nin açık oluşu:

W, G de açık bir küme olsun. $w \in W$. Buradan $U \cap w^{-1}W$, G 'de 1 'in bir açık komşuluğudur. O halde (2)'den; $f(U \cap w^{-1}W) = W_w$ H 'de açık bir kümedir.

$$\Rightarrow f(w)W_w = f(w(U \cap w^{-1}W)) = f(wU \cap W) \subseteq f(W)$$

H de $f(w)$ 'nin açık bir komşuluğudur. $f(W)$, $f(w)$ 'yi kapsadığından $f(W)$ açıktır.

Tanım: $f: G \rightarrow H$ topolojik grupların bir morfizmi, $f(U)$ H 'de açıktır ve $f|_U: U \rightarrow f(U)$ bir homeomorfizm olacak şekilde G ' de 1 ' in bir U açık komşuluğu varsa $f: G \rightarrow H$ morfizmine bir *yerel izomorfizm* denir.

Alıştırma: $\mathbb{Z}_p$, T_p ' nin bir altgrubudur ve $f_1: T_p \rightarrow T$ limit fonksiyonunun

çekirdeğidir. Başka bir deyişle; $0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\alpha} T_p \xrightarrow{f_1} T \rightarrow 0$ bir tam dizidir.

Çözüm: $T_p = \{(r_n + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}} \mid p(r_{n+1} + \mathbb{Z}) = r_n + \mathbb{Z}\}$

$\ker f_1 = \mathbb{Z}_p$ olduğunu göstermek yeterlidir. (f_1 , 1. Koordinata götüren fonksiyon)

$$T_p : T \xleftarrow{\times p} T \xleftarrow{\times p} T \xleftarrow{\times p} T \xleftarrow{\times p} \dots$$

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \xleftarrow{\times p} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xleftarrow{\times p} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xleftarrow{\times p} \dots$$

$$f_1 : T_p \rightarrow T : (r_n + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow r_1 + \mathbb{Z}$$

$$r_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow r_2 \in \frac{1}{p} \mathbb{Z} \Rightarrow r_3 \in \frac{1}{p^2} \mathbb{Z} \Rightarrow \dots \Rightarrow r_n \in \frac{1}{p^{n-1}} \mathbb{Z}$$

$$r_1 = z \text{ olsun. } \Rightarrow r_2 = \frac{1}{p} z \Rightarrow r_3 = \frac{1}{p^2} z \Rightarrow \dots \Rightarrow r_n = \frac{1}{p^{n-1}} z$$

$$\Rightarrow \ker f_1 = \left\{ \left(\frac{1}{p^{n-1}} z + \mathbb{Z} \right)_{n \in \mathbb{N}} \right\} \cong \mathbb{Z}_p$$

$$\text{O halde } T_p / \mathbb{Z}_p \cong T = S^1.$$

Alıştırma: $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}'_p \times \mathbb{R} \xrightarrow{\pi} T_p \rightarrow 0$ dizisi tam dizidir. Burada

$\varphi(z) = ((p^{-n}z + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}, -z)$, $\pi((z_n + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}, r) = (z_n + p^{-n}r + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}$ olarak tanımlanmıştır ve $\pi(\mathbb{Z}'_p \times \{0\}) = \ker f_1$ dir.

Çözüm: π 'nin iyi tanımlı oluşu:

$$\pi: \mathbb{Z}'_p \times \mathbb{R} \rightarrow T_p$$

$$\pi((z_n + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}, r) = (z_n + p^{-n}r + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}$$

$$((z_n + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}, r_1) = ((z'_n + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}, r_2) \in \mathbb{Z}'_p \times \mathbb{R} \text{ olsun.}$$

?

$$\pi((z_n + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}, r_1) = \pi((z'_n + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}, r_2)$$

$$((z_n + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}, r_1) = ((z'_n + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}, r_2) \text{ ise } r_1 = r_2 \text{ ve}$$

$$\Rightarrow z_1 + \mathbb{Z} = z'_1 + \mathbb{Z} \Rightarrow z_1 - z'_1 \in \mathbb{Z}$$

$$z_2 + \mathbb{Z} = z'_2 + \mathbb{Z} \Rightarrow z_2 - z'_2 \in \mathbb{Z}$$

⋮

$$z_n + \mathbb{Z} = z'_n + \mathbb{Z} \Rightarrow z_n - z'_n \in \mathbb{Z}$$

⋮

olur.

$$\pi((z_n + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}, r_1) = (z_n + \frac{1}{p^n}r_1 + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}$$

$$= \left(z_1 + \frac{1}{p}r_1 + \mathbb{Z}, z_2 + \frac{1}{p^2}r_1 + \mathbb{Z}, \dots, z_n + \frac{1}{p^n}r_1 + \mathbb{Z}, \dots \right)$$

$$\pi((z'_n + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}, r_2) = (z'_1 + \frac{1}{p}r_2 + \mathbb{Z}, z'_2 + \frac{1}{p^2}r_2 + \mathbb{Z}, \dots, z'_n + \frac{1}{p^n}r_2 + \mathbb{Z}, \dots)$$

$$z_1 - z'_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow z_1 + \frac{1}{p}r_1 + \mathbb{Z} = z'_1 + \frac{1}{p}r_2 + \mathbb{Z}$$

$$z_2 - z'_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow z_2 + \frac{1}{p^2}r_1 + \mathbb{Z} = z'_2 + \frac{1}{p^2}r_2 + \mathbb{Z}$$

⋮

$$z_n - z'_n \in \mathbb{Z} \Rightarrow z_n + \frac{1}{p^n}r_1 + \mathbb{Z} = z'_n + \frac{1}{p^n}r_2 + \mathbb{Z}$$

⋮

$$\Rightarrow \pi((z_n + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}, r_1) = \pi((z'_n + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}, r_2)$$

$$\Rightarrow \pi, \text{ iyi tanımlıdır.}$$

Bu dizinin tam oluşu:

(i) φ bire birdir.

(ii) $\text{im}\varphi = \ker\pi$

(iii) π örtendir.

(i) $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}'_p \times \mathbb{R}$

$$\varphi(z) = ((p^{-n}z + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}, -z)$$

$$z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \text{ olsun. } \varphi(z_1) = \varphi(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$$

$$\varphi(z_1) = ((p^{-n}z_1 + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}, -z_1)$$

$$\varphi(z_2) = ((p^{-n}z_2 + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}, -z_2)$$

$$\Rightarrow \varphi(z_1) = \varphi(z_2) \Rightarrow -z_1 = -z_2 \Rightarrow z_1 = z_2$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ bire birdir.}$$

$$(ii) \quad im\varphi = ker\pi$$

$$\mathbb{Z}'_p \times \mathbb{R} = \left\{ \left(\left(\frac{1}{p^n}z + \mathbb{Z} \right)_{n \in \mathbb{N}}, r \right) \mid p \left(\frac{1}{p^{n+1}}z + \mathbb{Z} \right) = \frac{1}{p^n}z + \mathbb{Z} \text{ ve } r \in \mathbb{R} \right\}$$

$$ker\pi = \left\{ \left(\left(\frac{1}{p^n}z + \mathbb{Z} \right)_{n \in \mathbb{N}}, r \right) \mid \left(\frac{1}{p^n}z + \frac{1}{p^n}r + \mathbb{Z} \right)_{n \in \mathbb{N}} = (0 + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p}z + \frac{1}{p}r + \mathbb{Z} = 0 \Rightarrow z + r \in p\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^2}z + \frac{1}{p^2}r + \mathbb{Z} = 0 \Rightarrow z + r \in p^2\mathbb{Z}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^n}z + \frac{1}{p^n}r + \mathbb{Z} = 0 \Rightarrow z + r \in p^n\mathbb{Z}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow z + r \in \bigcap p^n\mathbb{Z} = \{0\} \Rightarrow z + r = 0 \Rightarrow r = -z$$

$$\Rightarrow ker\pi = \left\{ \left(\left(\frac{1}{p^n}z + \mathbb{Z} \right)_{n \in \mathbb{N}}, -z \right) \right\} = im\varphi$$

$$(iii) \quad \pi: \mathbb{Z}'_p \times \mathbb{R} \rightarrow T_p$$

$$T_p = \{(r_n + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}} \mid p(r_{n+1} + \mathbb{Z}) = r_n + \mathbb{Z}\}$$

$$im\pi = \{(z_n + p^{-n}r + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}} \mid \pi((z_n + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}, r) = (z_n + p^{-n}r + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}\}$$

$$= \left\{ \left(\frac{1}{p^n}z + \frac{1}{p^n}r + \mathbb{Z} \right)_{n \in \mathbb{N}} \mid \pi \left(\left(\frac{1}{p^n}z + \mathbb{Z} \right)_{n \in \mathbb{N}} \right) = \left(\frac{1}{p^n}z + \frac{1}{p^n}r + \mathbb{Z} \right)_{n \in \mathbb{N}} \right\}$$

$$= \left(\frac{1}{p}z + \frac{1}{p}r + \mathbb{Z}, \frac{1}{p^2}z + \frac{1}{p^2}r + \mathbb{Z}, \dots, \frac{1}{p^n}z + \frac{1}{p^n}r + \mathbb{Z}, \dots \right)$$

$$= \left(\underbrace{\frac{1}{p}(z+r) + \mathbb{Z}}_{r_1}, \underbrace{\frac{1}{p^2}(z+r) + \mathbb{Z}}_{r_2}, \dots, \underbrace{\frac{1}{p^n}(z+r) + \mathbb{Z}}_{r_n}, \dots \right)$$

$$= (r_1 + \mathbb{Z}, r_2 + \mathbb{Z}, \dots, r_n + \mathbb{Z}, \dots)$$

$$= \{(r_n + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}} \mid p(r_{n+1} + \mathbb{Z}) = r_n + \mathbb{Z}\} = T_p \Rightarrow \pi, \text{ örtendir.}$$

$$\pi(\mathbb{Z}'_p \times \{0\}) = \ker f_1:$$

$$\mathbb{Z}'_p \times \{0\} = \{((z_n + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}, 0) | pz_{n+1} = z_n\}$$

$$\pi((z_n + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}, 0) = (z_n + p^{-n} \cdot 0 + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}} = (z_n + \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}} = \mathbb{Z}'_p$$

1. sorudan $\ker f_1 = \mathbb{Z}'_p$ olduğunu göstermiştik. Buradan $\ker f_1 = \pi(\mathbb{Z}'_p \times \{0\})$ dır.

Önerme: $j, k \in J$ ve $j \leq k$ olsun. $f_j: G \rightarrow G_j$ limit fonksiyonları ve $f_{jk}: G_k \rightarrow G_j$ kompakt grupların bir projektif sistemi için varsayalım ki $G = \lim_{j \in J} G_j$ olsun. Aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

(i) Tüm f_{jk} bağlantı fonksiyonları örtendir.

(ii) Tüm f_j limit fonksiyonları örtendir.

İspat: (i)⇒(ii): Sabit bir $i \in J$ alalım. $h \in G_i$ olsun. $g_i = f_i(g) = h$ olacak şekilde bir $g = (g_j)_{j \in J} \in G$ bulmalıyız. $i \leq k$ olacak şekilde her $k \in J$ için

$$C_k = \{(x_j)_{j \in J} | (\text{her } j \leq k) \ x_j = f_{jk}(x_k) \text{ ve } x_i = h\} \subseteq \prod_{j \in J} G_j \text{ tanımlayalım.}$$

f_{ik} örten olduğundan, $C_k \neq \emptyset$. $i \leq k \leq k'$ ise buradan $C_{k'} \subseteq C_k$ olur. Şimdi C_k , $\prod_{j \in J} G_j$ de kompakt grupların bir filtre bazıdır. O halde boş olmayan arakesiti de vardır. Varsayalım ki $g = (g_j)_{j \in J}$ bu arakesitin içinde olsun. O halde ilk olarak, $g_i = h$. İkinci olarak $j \leq k$ olsun. J yönlendirilmiş olduğundan, J' de $i \leq k \leq k'$ olduğundan $(g_j)_{j \in J} \in C_{k'}$. Buradan $g = (g_j)_{j \in J} \in G$.

(ii)⇒(i): $j \leq k$ olsun. O halde $f_j = f_{jk}f_k$ olur. Buradan $f_j = f_{jk}f_k$ olur. Buradan f_j örten ve f_k da örten olduğundan f_{jk} da örten olur.

Tanım: Tüm bağlantı fonksiyonlarının ve tüm limit fonksiyonlarının örten olduğu topolojik grupların projektif sistemine (*strict*) *tam projektif sistem* ve onun limitine de *tam projektif limit* denir.

Önerme: (i) $G = \lim_{j \in J} G_j$ kompakt grupların bir projektif limiti olsun.

$\mathcal{U}_j$, G_j nin birim komşuluk filtresi, $\mathcal{U}$, G nin birim komşuluk filtresi ve

$\mathfrak{N} = \{\ker f_j \mid j \in J\}$ olsun. O halde

a) $\mathcal{U}$, $\{f_k^{-1}(U) \mid k \in J, U \in \mathcal{U}_k\}$, birimin komşuluklarının bir bazına sahiptir.

b) $\mathfrak{N}$, kompakt normal alt gruplarının 1'e yakınsayan bir filtre bazıdır. (yani, U , 1'in bir komşuluğu ise, $N \subseteq U$ olacak şekilde $N \in \mathfrak{N}$ vardır.)

(ii) Diğer taraftan G kompakt grup ve $\mathfrak{N}$, $\cap \mathfrak{N} = \{1\}$ olacak şekilde kompakt normal alt grupların bir filtre bazı olsun.

$M, N \in \mathfrak{N}$ ve $M \subseteq N$ için

$$f_{NM}: G/M \rightarrow G/N, f_{NM}(gM) = gN \text{ ile belirli doğal morfizmaları;}$$

$G \rightarrow \lim_{N \in \mathfrak{N}} G/N$, $g \rightarrow (gN)_{N \in \mathfrak{N}}$, fonksiyonu altında limiti G ye izomorfik olan bir tam projektif sistem meydana getirir. Bu izomorfizmayla, limit fonksiyonları, $G \rightarrow G/N$ bölüm fonksiyonlarına eşittir.

İspat: (i) (a) $V \in \mathfrak{U}$ olsun. $G = \lim_{j \in J} G_j \subseteq \prod_{j \in J} G_j$

$$V^{a_{j,k}} \subset G, V = G \cap W \text{ şeklinde } W^{a_{j,k}} \subset \prod_{j \in J} G_j$$

$$W = \prod_{j \in J} W_j \text{ sonlu tanesi dışında } W_j = G_j$$

$$F^{sonlu} \subset J, j \in F \text{ ise } G_j \neq W_j^{a_{j,k}} \subset G_j$$

$$j \notin F \text{ ise } W_j = G_j$$

$$V = G \cap W \Rightarrow W_j \in \mathfrak{U}_j \Rightarrow W \cap \lim_{j \in J} G_j \subseteq V$$

J yönlü olduğundan F 'de $k \in J$ olacak şekilde bir üst sınır vardır.

$$\text{Her } j \in F \Rightarrow j \leq k \Rightarrow f_{jk}: G_k \rightarrow G_j \quad U = f_{jk}^{-1}(W_j) \in \mathfrak{U}_k$$

$$f_k: G \rightarrow G_k, f_k^{-1}(U) \subset \lim_{j \in J} G_j \quad j \in F \text{ alalım. } k \geq j$$

$$\begin{array}{ccc} f_k^{-1}(U) \subset G & \longrightarrow & G_k \supset U \\ f_j \downarrow & f_{jk} \swarrow & \\ & G_j & \end{array}$$

$f_k^{-1}(U) \in \mathfrak{U}$ 1'in komşuluğu

$$f_{jk}(U) \subset W_j \quad f_i(f_k^{-1}(U)) = f_{jk}(U) \subset W_j. \text{ Dolayısıyla } f_k^{-1}(U) \subset W \Rightarrow$$

$$f_k^{-1}(U) \subset G.$$

(i) (b) $i, j \leq k$ alalım. $\ker f_k \subseteq \ker f_i \cap \ker f_j$

J yönlü olduğundan $\mathfrak{N}$ bir filtre bazıdır. Her bir $j \in J$ ve her $U \in \mathfrak{U}$ için

$\ker f_j = f_j^{-1}(1) \subseteq f_j^{-1}(U)$ (a)'dan $f_j^{-1}(U)$ birimin temel komşuluğu olduğundan ispat biter.

(ii) $N \leq M \Leftrightarrow M \subseteq N$ olsun. $\mathfrak{N}$ de $M \subseteq N$ için tüm f_{NM} morfizmalarının ailesi, kompakt grupların bir tam projektif sistemini oluşturur. $g_N \in G$ olup $(g_N N)_{N \in \mathfrak{N}} \in \prod_{N \in \mathfrak{N}} G/N$ elemanının $L = \lim_{N \in \mathfrak{N}} G/N$ limitinde olması için gerek ve yeter koşul, $\mathfrak{N}$ 'de her bir $M \supseteq N$ ikilisi için $f_{MN}(g_N N) = g_M M$ yani $g_M^{-1} g_N \in M$ olmasıdır. Buradan her bir $g \in G$ için $(gN)_{N \in \mathfrak{N}} \in L$ olur.

$\varphi = (g \rightarrow (gN)_{N \in \mathfrak{N}}): G \rightarrow L$ morfizmasının çekirdeği $\cap \mathfrak{N} = \{1\}$. O halde φ birebirdir.

Varsayalım ki $\lambda = (g_N N)_{N \in \mathfrak{N}} \in L$ olsun. O halde $\{g_N N | N \in \mathfrak{N}\}$, G 'de kompakt kümelerin bir filtre bazıdır. $M \supseteq N$ olduğundan $g_M^{-1} g_N \in M$ ve buradan $g_N \in g_M M \cap g_N N$. O halde arakesit bir g elemanını içerir. Buradan $g \in g_N N \Rightarrow gN = g_N N \Rightarrow \varphi(g) = \lambda$. Buradan φ örtendir.

O halde φ kompakt grupların bir izomorfizmasıdır. $q_N: G \rightarrow G/N$ bölüm fonksiyonu ve $f_N((g_N N)_{N \in \mathfrak{N}}) = g_N N$ ile tanımlı $f_N: L \rightarrow G/N$ limit fonksiyonu ise $q_N = f_N \circ \varphi$ olduğu açıktır.

6. TAMAMEN BAĞLANTISIZ KOMPAKT GRUPLAR

Teorem: Bir yerel kompakt grup G için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (1) Birimin komşuluk filtresi açık altgrupların bir bazına sahiptir.
- (2) G tamamen bağlantısızdır.
- G , kompakt ise, bu ifadeler aşağıdaki durumlara da denktir.
- (3) Birimin komşuluk filtresi açık normal altgrupların bir bazına sahiptir.
- (4) G , sonlu grupların bir tam projektif limitidir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2): Her açık altgrup aynı zamanda kapalı olduğundan, 1. durumdan $\{1\}$ açık-kapalı altkümelerin arakesitidir. Dolayısıyla $\{1\}$ birimin bağlantılı bileşenidir o halde G tamamen bağlantısızdır.

(2) $\Rightarrow$ (1): W , birimin sabit bir kompakt komşuluğu olsun. G , tamamen bağlantısız olduğundan; W kompakt uzayında 1'in bileşeni $\{1\}$ dir. Öte yandan 1, W 'da açık ve kapalı komşulukların bir bazına sahiptir. Şimdi U , W 'nın içindeki $\{1\}$ 'in bir açık ve kapalı komşuluğu olsun. O halde U , G 'de kompakt olur. O zaman, $\{1\}$ 'in bir V kompakt komşuluğu vardır öyle ki $UV \subseteq U$ olur. Eğer değilse; $\mathcal{U}$, 1'in komşuluk filtresi olmak üzere; $\{UV \setminus U \mid V \in \mathcal{U}\}$ ailesi, U kompakt açık olduğundan, kompakt kümelerin bir filtre bazıdır. $g \in \bigcap \{UV \setminus U \mid V \in \mathcal{U}\} \supseteq \bar{U}$ Öte yandan $g \in UV^{-1}$ olduğundan herhangi bir V birim komşuluğu için $gV \cap U \neq \emptyset$ olur. Buradan $g \in \bar{U} = U \Rightarrow g \in U$ olur.

Şimdi $UV \subseteq U$ olacak şekilde $V = V^{-1}$ simetrik açık komşuluk seçelim: Buradan $UV^n \subseteq U$ olur.

Fakat $H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V^n$, G 'de V tarafından üretilen altgruptur. O halde $H \subseteq UH \subseteq U$. Buradan her U komşuluğu bir açık altgrup içerir.

Şimdi varsayalım ki G kompakt olsun.

- (1) $\Rightarrow$ (3): H , G 'nin bir açık altgrubu olsun. O halde $N = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$, H 'yi içeren bir açık normal altgruptur. Durum (1)'den durum (3) görülmüş olur.
- (2) $\Rightarrow$ (4): $\mathfrak{R}$, açık normal altgruplardan oluşan birim komşuluk filtresinin bir filtre bazı olsun.

N , herhangi bir topolojik grupta açık altgrup olsun. O zaman N , her biri açık olan tüm diğer kosetlerin birleşiminin tümleyenidir. O halde N , kapalıdır. Buradan G/N kompakt ve ayrık grup olduğundan sonludur. Önceki önermeden G , G/N faktör gruplarının tam projektif limitidir.

(3) $\Rightarrow$ (1): $G = \lim_{j \in J} G_j$ sonlu grupların bir projektif limiti ise G , $\prod_{j \in J} G_j$ 'nin bir alt grubudur. Tamamen bağlantısız uzayların çarpımları tamamen bağlantısızdır. O halde G_j 'ler tamamen bağlantısız olduğundan, $\prod_{j \in J} G_j$ tamamen bağlantısızdır. Tamamen bağlantısız uzayların altgrupları tamamen bağlantısızdır. O halde $\prod_{j \in J} G_j$ tamamen bağlantısız olduğundan, G de tamamen bağlantısızdır.

Alıştırma: Her G yerel kompakt grubunda, birim bileşen G_0 , tüm açık H altgrupların kümesinin arakesitidir öyle ki H/G_0 kompakttır. Gösteriniz.

İspat: 1) G/G_0 'ın yerel kompakt ve tamamen bağlantısız olduğunu gösterelim.

2) G/G_0 'ın birim elemanının $\{G_0\}$ komşuluk filtresi açık altgrupların bir bazına sahiptir.

- G/G_0 'ın yerel kompakt oluşu:

$G_0 \subset V$, $V^{açık} \subset G/G_0$ alalım.

$0 \in \pi^{-1}(V)^{açık} \subset G$, G yerel kompakt olduğundan $0 \in W \subset \pi^{-1}(V)$, W kompakt

$G_0 \subset \underbrace{\pi(W)}_{kompakt} \subset V \Rightarrow G/G_0$ yerel kompakttır.

- G/G_0 'ın tamamen bağlantısız oluşu:

G/G_0 'da G_0 'ın bileşeninin $\{G_0\}$ olduğunu göstermeliyiz. $f: G \rightarrow G/G_0$ doğal homomorfizma olsun. $\{G_0\} \subseteq P^* \subseteq G/G_0$, P^* bağlantılı ve $P^* \neq \{G_0\}$ olsun. $G_0 \subseteq P = f^{-1}(P^*)$ ($G_0 \subset f^{-1}(P^*)$) $P^* \neq \{G_0\} \Rightarrow P \neq G_0$ olur. O halde P bağlantılı değildir.

$\exists U, V^{açık} \subseteq G$, $P = (P \cap U) \cup (P \cap V)$

$$P \cap U \cap V = \emptyset$$

$$P \cap U \neq \emptyset, P \cap V \neq \emptyset.$$

$$U^* = f(U)^{açık} \subseteq G/G_0, V^* = f(V)^{açık} \subseteq G/G_0, P^* = \underbrace{(P^* \cap U^*)}_{\neq \emptyset} \cup \underbrace{(P^* \cap V^*)}_{\neq \emptyset}$$

$P^* \cap U^* \cap V^* = \emptyset$, P^* bağlantılı olduğundan bu bir çelişkidir.

G/G_0 'da G_0 'ın bileşeni $\{G_0\}$ olmalıdır.

- H/G_0 açık olduğu için aynı zamanda kapalıdır.
- $\mathcal{U}$, $\{G_0\}$ 'ın G/G_0 'daki komşuluk filtresi ise $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, $\mathcal{V} = \{V: V^{açık} \subset G/G_0, V \text{ açık altgrup}, \{G_0\} \subset V\}$ her $U \in \mathcal{U}$ için $\{G_0\} \subset V \subset U$ olacak şekilde $V \in \mathcal{U}$ vardır. $\pi: G \rightarrow G/G_0$, $\ker \pi = G_0$. $\bigcap_{V \in \mathcal{V}} V = \{G_0\}$, $V \in \mathcal{V}$ $\pi^{-1}(V)^{açık} \subset G$ ve $\bigcap_{V \in \mathcal{V}} \underbrace{\pi^{-1}(V)}_H = \pi^{-1}(\bigcap_{V \in \mathcal{V}} V) = \pi^{-1}(G_0) = G_0$. Her $V \in \mathcal{V}$ için $H = \pi^{-1}(V)^{açık} \subset G$ ve H/G_0 kompaktır.

Alıştırma: Tamamen bağlantısız bir kompakt grubun örten homomorfik görüntüsü de tamamen bağlantısızdır.

Çözüm: G tamamen bağlantısız ve $f: G \rightarrow H$ kompakt grupların bir örten morfizmi olsun. $K = \ker f$ olsun. Varsayalım ki $H = G/K$ ve f bölüm morfizması olsun. Önceki teoremden G 'nin birimi kompakt (normal) açık altgrup N 'lerden oluşan $\mathfrak{N}(G)$ komşuluk bazına sahiptir. $KN = \bigcup_{k \in K} kN$ alt grubu açık ve $K = \bigcap_{N \in \mathfrak{N}} HN$ dir. $\mathcal{U}$ birimin komşulukları olmak üzere $K = \bar{K} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} KU$ olduğundan G/K 'nin birimi açık (dolayısıyla kapalı) alt grupların bir komşuluk bazına sahiptir. Dolayısıyla G/K tamamen bağlantısızdır.

7. BAZI DUALİTE TEORİLERİ

A , keyfi bir abelyen grup olsun. $\mathcal{F}$, tüm sonlu doğrulmuş altgrupların ailesini gösterebiliriz. $\mathcal{F}$, yönlendirilmiştir. Çünkü $F, E \in \mathcal{F}$ için $F + E \in \mathcal{F}$ dir. Ayrıca $A = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$. Eğer $E, F \in \mathcal{F}$ ve $E \subseteq F$ ise $E \rightarrow F$ içermesi, $\lambda: F \rightarrow T$ için $f_{EF}: \hat{F} \rightarrow \hat{E}$, $f_{EF}(\lambda) = \lambda|_E$ morfizmasını belirler.

$\{f_{EF}: \hat{F} \rightarrow \hat{E} \mid E, F \in \mathcal{F}, E \subseteq F\}$ ailesi kompakt abelyen grupların bir projektif sistemidir. T 'nin bölünebilirliğinden, $E \subseteq F$ iken E' de her bir karakter F' 'de bir karaktere genişler ve o halde bu sistem tamdır. $F \rightarrow A$ içermesi, $f_F: \hat{A} \rightarrow \hat{F}$, $f_F(\lambda) = \lambda|_F$ morfizmini belirler.

Önerme: $\lambda \rightarrow (\lambda|_F)_{F \in \mathcal{F}}: \hat{A} \rightarrow \lim_{F \in \mathcal{F}} \hat{F}$ kompakt abelyen grupların bir izomorfizmidir.

İspat: $\varphi: \text{Hom}(A, T) \rightarrow \lim_{F \in \mathcal{F}} \text{Hom}(F, T)$, $\varphi(\lambda) \rightarrow (\lambda|_F)_{F \in \mathcal{F}}$ kompakt grupların bir morfizmi olsun.

φ 'nin bire bir oluşu:

A 'nın bir λ karakterinin, A 'nın çekirdeğinde olması için gerek ve yeter koşul her $F \in \mathcal{F}$ için $\lambda|_F = 0$ olmasıdır. Fakat $A = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ olduğundan bu durumda gerek ve yeter koşul $\lambda = 0$ olmasıdır. O halde φ bire biridir.

φ 'nin örten oluşu:

$\gamma = (\lambda_F)_{F \in \mathcal{F}} \in \lim_{F \in \mathcal{F}} \hat{F}$ olsun. Bağlantı fonksiyonlarının tanımından, A ' da sonlu doğrulmuş altgrupların her çifti $E \subseteq F$ için $\lambda_F|_E = \lambda|_E$ olur. O halde $\lambda: A \rightarrow T$ fonksiyonunu şu şekilde tanımlayabiliriz. Her bir $a \in A$ için $a \in F$ olacak şekilde bir $F \in \mathcal{F}$ seçelim. Önceki durumdan T 'de $\lambda_F(a)$ elemanı, F 'nin seçimine bağlı değildir. O halde $\lambda: A \rightarrow T$, $\lambda(a) = \lambda_F(a)$ fonksiyonunu tanımlayalım. $a, b \in A$ ise ve $a \in F$, $b \in E$

$$G = E + F \leq E \implies E \subseteq E + F = G$$

$$G = E + F \leq F \implies F \subseteq E + F = G$$

$$\lambda(a + b) = \lambda_G(a + b) = \lambda_G(a) + \lambda_G(b) = \lambda_F(a) + \lambda_E(b) = \lambda(a) + \lambda(b)$$

$$\begin{array}{ccc} \lambda_G = E + F \rightarrow T \\ \cup \nearrow \lambda_E & \lambda_G(b) = \lambda_E(b) \\ E \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \lambda_G = E + F \rightarrow T \\ \cup \nearrow \lambda_F & \lambda_G(a) = \lambda_F(a) \\ F \end{array}$$

O halde $\lambda \in \text{Hom}(A, T)$ ve $\lambda|_F = \lambda_F$

$$\Rightarrow \varphi(\lambda) = \gamma$$

$\Rightarrow \varphi$ örtendir.

φ bire-bir ve örten olduğundan kompakt grupların bir izomorfizmidir.

Kısaca: $\hat{A}$, herhangi bir abelyen grup A 'nın karakter grubu ve $\hat{F}$, sonlu doğrulmuş F alt gruplarının karakter grubu olmak üzere $\hat{A}$, $\hat{F}$ karakter gruplarının bir projektif limitidir. $\hat{F}$ 'nin bir sonlu grup ile bir sonlu boyutlu torus grubunun direkt çarpımı olduğunu biliyoruz.

Varsayalım ki $G = \lim_{j \in J} G_j$, limit fonksiyonları $f_j: G \rightarrow G_j$ olan, kompakt abelyen grupların bir tam projektif limiti olsun.

Her $\lambda: G_j \rightarrow T$ karakteri G 'nin bir $\lambda \circ f_j: G \rightarrow T$ karakterini verir.

$\lambda \circ f_j = \mu \circ f_j$ olsun. $\Rightarrow \lambda = \mu$ olduğunu gösterelim:

$g_j \in G_j$ alalım. f_j örten olduğundan $f_j(g) = g_j$ olacak şekilde $g \in G$ vardır.

$(\lambda \circ f_j) = (\mu \circ f_j)$ olduğundan

$(\lambda \circ f_j)(g) = (\mu \circ f_j)(g)$ yani

$$\lambda(\underbrace{f_j(g)}_{g_j}) = \mu(\underbrace{f_j(g)}_{g_j})$$

$$\lambda(g_j) = \mu(g_j) \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu \text{ olur.}$$

Dolayısıyla $\hat{G}_j$ 'yi $\hat{G}$ 'nin bir alt grubu olarak düşünebiliriz.

Önerme: $G = \lim_{j \in J} G_j$ bir tam projektif limit ise $\hat{G} = \bigcup_{j \in J} \hat{G}_j$

İspat: $\hat{G}$ 'nin bir alt grubu olarak $\hat{G}_j$ 'nin tanımından $\bigcup_{j \in J} \hat{G}_j \subseteq \hat{G}$. Varsayalım ki $\lambda: G \rightarrow T$, G 'nin bir karakteri olsun. T 'de $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ün görüntüsüne V dersek, $\{0\}$, V 'de içeren T 'nin tek alt grubu olur. $U = \lambda^{-1}(V)$, G 'de 0 'ın bir açık komşuluğudur. Bir $j \in J$ vardır öyle ki $\ker f_j \subseteq U$. Buradan $\lambda(\ker f_j)$ V 'de içeren T 'nin bir alt grubudur ve $\lambda(\ker f_j) = \{0\}$ dır. O halde $\ker f_j \subseteq \ker \lambda$ ve tek bir $\lambda_j: G_j \rightarrow T$ morfizması vardır öyle ki $\lambda = \lambda_j \circ f_j$. O halde kesinlikle

$$\lambda \in \hat{G}_j \Rightarrow \hat{G} \subseteq \bigcup_{j \in J} \hat{G}_j.$$

Teorem: Herhangi bir A abelyen grubu için $\eta_A: A \rightarrow \hat{A}$ bir izomorfizmadır.

İspat: $\mathcal{F}$, A 'nın sonlu doğrulmuş alt gruplarının yönlendirilmiş ailesi olmak üzere $\hat{A} = \lim_{F \in \mathcal{F}} \hat{F}$ bir tam projektif limit olduğunu biliyoruz. $f_F: \hat{A} \rightarrow \hat{F}$, $f_F(\lambda) = \lambda|_F$, limit fonksiyonları örtendir ve $\text{Hom}(f_F, T)(\varepsilon) = \varepsilon \circ f_F$ olmak üzere $\text{Hom}(f_F, T): \text{Hom}(\hat{F}, T) \rightarrow \text{Hom}(\hat{A}, T)$ bire bir morfizmaları belirler. Önceki önermeden $\text{Hom}(\hat{A}, T)$, $\text{Hom}(f_F, T)$ bire bir morfizmalarının görüntülerinin birleşimidir.

Buradan herhangi bir $\Omega \in \text{Hom}(\hat{A}, T)$ için $\Omega = \text{Hom}(f_F, T)(\varepsilon) = \varepsilon \circ f_F$ olacak şekilde $F \in \mathcal{F}$ ve $\varepsilon \in \text{Hom}(\hat{F}, T)$ vardır. Fakat $\eta_F: F \rightarrow \text{Hom}(\hat{F}, T)$ bir izomorfizmdir. O halde $a \in F$ vardır öyle ki $\varepsilon = \eta_F(a)$. Buradan $\Omega = \eta_F(a) \circ f_F$. Dolayısıyla A 'nın herhangi bir $\lambda: A \rightarrow T$ karakteri için $\Omega(\lambda) = \eta_F(a)(f_F(\lambda)) = \eta_F(\lambda|_F) = (\lambda|_F)(a) = \lambda(a) = \eta_A(a)(\lambda)$.

Buradan η_A örtendir. Önceki Lemma' dan η_A bire-bir olduğunu biliyoruz.

$$\begin{array}{ccc}
F & \xrightarrow{\eta_F} & \text{Hom}(\hat{F}, T) \\
\downarrow i & & \downarrow \text{Hom}(\hat{i}, T) \\
A & \xrightarrow{\eta_A} & \text{Hom}(\hat{A}, T)
\end{array} \quad (i, \text{ içerme})$$

Pontryagin Dualite Teoremi'nin diğ er yarısı:

G , herhangi bir kompakt abelyen grup olmak üzere $\eta_G: G \rightarrow \hat{\hat{G}}$ bir izomorfizmadır.

 rnek: G , kompakt grup olmak üzere, $\lim_{j \in J} G_j = G$, dualiteye sahip G_j kompakt abelyen gruplarının bir tam projektif sistemi ise, G dualiteye sahiptir.

İspat: ( nceki bir Lemma'dan: G , kompakt abelyen grup ise $\eta_G: G \rightarrow \hat{\hat{G}}$, $\eta_G(g)(\lambda) = \lambda(g)$ kompakt abelyen grupların bir morfizmasıdır.)

O halde $\eta_G: G \rightarrow \hat{\hat{G}}$ morfizminin bire bir ve örten olduğunu göstermeliyiz.

η_G 'nin örten oluşu:

$\Omega \in \hat{\hat{G}}$ olduğunu varsayalım. Yani $\Omega: \hat{G} \rightarrow T$ abelyen grupların bir morfizmasıdır.  nceki önermeden $\hat{G} = \bigcup_{j \in J} \hat{G}_j$ olduğunu biliyoruz. $\Omega|_{\hat{G}_j} = \Omega_j$ ile gösterirsek

$\Omega_j: \hat{G}_j \rightarrow T$, $\Omega_j \in \hat{\hat{G}}_j$ dir. (hipotezden) G_j dualiteye sahip olduğundan η_{G_j} örten olur.

O halde;

İddia: Bir $g_j \in G_j$ vardır öyle ki $\eta_{G_j}(g_j) = \Omega_j$ dir. $g = (g_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} G_j$, $\lim_{j \in J} G_j = G$ 'nin bir elemanı olsun. Bunun için varsayalım ki J 'de $j \leq k$ olsun.

$$\begin{array}{ccc}
G_k & \xrightarrow{\eta_{G_k}} & \hat{\hat{G}}_k \\
\downarrow f_{jk} & & \downarrow \hat{\hat{f}}_{jk} \\
G_j & \xrightarrow{\eta_{G_j}} & \hat{\hat{G}}_j
\end{array} \quad \text{değişmeli diyagramını elde ederiz.}$$

$$\hat{f}_{jk}: \hat{G}_k \rightarrow \hat{G}_j, \hat{f}_{jk}(\Omega) = \Omega_k|_{\hat{G}_j} = \Omega_j$$

$$\text{Buradan } \eta_{G_j}(f_{jk}(g_k)) = \hat{f}_{jk}(\eta_{G_k}(g_k)) = \hat{f}_{jk}(\Omega_k) = \Omega_j = \eta_{G_j}(g_j).$$

Fakat G_j dualiteye sahip olduğundan, η_{G_j} bire bir ve buradan $f_{jk}(g_k) = g_j$.

$g \in \lim_{j \in J} G_j$ iddiasını kanıtlar.

Her bir $f_j: G \rightarrow G_j$ limit fonksiyonu için, önceki gibi

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\eta_G} & \hat{G} \\ f_j \downarrow & & \downarrow \hat{f}_j \\ G_j & \xrightarrow{\eta_{G_j}} & \hat{G}_j \end{array} \quad \text{değişmeli diyagramını elde ederiz.}$$

$$\text{O halde her } j \in J \text{ için } \hat{f}_j(\eta_G(g)) = \eta_{G_j}(f_j(g)) = \eta_{G_j}(g_j) = \Omega_j.$$

$$\text{Şimdi } \hat{f}_j: G \rightarrow \hat{G}_j, \varepsilon \rightarrow \varepsilon|_{\hat{G}_j} \text{ kısıtlamasını inceleyelim. } \eta_G(g): \hat{G} \rightarrow T$$

morfizmasının her bir $\hat{G}_j$ 'ye kısıtlaması Ω_j , ayrıca $\Omega_j = \Omega$ dir. Buradan $\eta_G(g) = \Omega \Rightarrow \eta_G$ örtendir.

η_G 'nin bire bir oluşu:

Daha önce G 'nin karakterleri noktalarını ayırır iddiasını gözlemlemiştik. Buradan varsayalım ki $0 \neq g \in G$ olsun. $\mathfrak{N} = \{\ker f_j \mid j \in J\}$ kümesi için $\bigcap \mathfrak{N} = \{0\}$ olduğunu biliyoruz. Buradan bir $j \in J$ vardır öyle ki $g \notin \ker f_j$, yani, $f_j(g) \neq 0$. G_j dualiteye sahip olduğundan, karakterleri noktalarını ayırır. Buradan bir $\lambda \in \hat{G}_j$ vardır. Öyle ki $\lambda(f_j(g)) \neq 0$. Buradan da $\lambda \circ f_j \in \hat{G}$, G 'nin g 'yi yok etmeyen bir karakteridir. O halde η_G bire birdir.

Alıştırma.: $f: A \rightarrow B$ abelyen grupların bir morfizması olsun.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & \hat{\hat{A}} \\ f \downarrow & & \downarrow \hat{\hat{f}} \\ B & \xrightarrow{\eta_B} & \hat{\hat{B}} \end{array} \quad \text{diyagramı değişmelidir.}$$

Çözüm: $\eta_B f = \hat{\hat{f}} \eta_A$ olduğunu göstermeliyiz.

$\eta_A: A \rightarrow \hat{\hat{A}}$, $\eta_A(a)(\lambda) = \lambda(a)$, $\eta_B: B \rightarrow \hat{\hat{B}}$, $\eta_B(b)(\Omega) = \Omega(b)$ olduğunu biliyoruz.

$$\hat{\hat{f}}: \hat{\hat{A}} \rightarrow \hat{\hat{B}} = \text{hom}(\hat{A}, T) \rightarrow \text{hom}(\hat{B}, T)$$

$$\hat{\hat{f}}(\varphi) = \hat{B} \rightarrow T$$

$$\left(\hat{\hat{f}}(\varphi) \right)(\Omega) = \varphi(\hat{f}(\Omega))$$

$$a \in A \text{ alalım. } \eta_A: A \rightarrow \hat{\hat{A}} \implies \eta_A(a) \in \hat{\hat{A}} = \text{hom}(\hat{A}, T), \eta_A(a): \hat{A} \rightarrow T$$

$$\hat{\hat{f}}\eta_A(a) \in \hat{\hat{B}} \quad \hat{\hat{f}}\eta_A(a): \hat{B} \rightarrow T$$

$$\eta_B(f(a)): \hat{B} \rightarrow T, \Omega \in \hat{B} \text{ alalım. } \hat{\hat{f}}\eta_A(a)(\Omega) = \eta_A(a)\left(\hat{f}(\Omega)\right) = \hat{f}(\Omega)(a) =$$

$$\Omega(f(a))$$

$$\eta_B(f(a))(\Omega) = \Omega(f(a))$$

$$\hat{\hat{f}}\eta_A = \eta_B f$$

Alıştırma.: $f: G \rightarrow H$ kompakt abelyen grupların bir morfizması olsun.

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\eta_G} & \hat{\hat{G}} \\
 f \downarrow & & \downarrow \hat{\hat{f}} \\
 H & \xrightarrow{\eta_H} & \hat{\hat{H}}
 \end{array} \quad \text{diyagramı değişmelidir.}$$

Çözüm: Bir önceki örnekteki durum geçerlidir.

Alıştırma: (i) Tüm p -adic tamsayılarının grubu , $\mathbb{Z}_p$, dualiteye sahiptir ve karakter

grubu $\mathbb{Z}(p^\infty) = \frac{1}{p^\infty} \mathbb{Z} / \mathbb{Z}$ T' de p -nin kuvveti olan tüm elemanların grubudur.

$n = 1, 2, \dots$ için birimin tüm p^n -inci köklerinin altgrubuna izomorftur.

(ii) p -adic solenoid , T_p , dualiteye sahiptir ve karakter grubu $\frac{1}{p^\infty} \mathbb{Z}$ $m \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere m/p^n şeklinde belirtilebilen tüm rasyonel sayıların altgrubudur.

İspat: $\mathbb{Z}(p^n)$ ve T gruplarının (tam projektif sistem ise) dualiteye sahip olduğunu biliyoruz. O halde $\mathbb{Z}_p$ ve T_p de dualiteye sahip olur.

(i) $\varphi_n: \mathbb{Z}(p^{n+1}) \rightarrow \mathbb{Z}(p^n)$ morfizmasının duali $\frac{1}{p^n} \mathbb{Z} / \mathbb{Z} \rightarrow \frac{1}{p^{n+1}} \mathbb{Z} / \mathbb{Z}$ içermesidir.

O halde $\widehat{\mathbb{Z}(p^n)} = \frac{1}{p^n} \mathbb{Z} / \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Z}(p^{n+1}) &\rightarrow \mathbb{Z}(p^n) \\
 \widehat{\mathbb{Z}(p^n)} &\rightarrow \widehat{\mathbb{Z}(p^{n+1})} \\
 \frac{1}{p^n} \mathbb{Z} / \mathbb{Z} &\rightarrow \frac{1}{p^{n+1}} \mathbb{Z} / \mathbb{Z} \text{ içermek}
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{p^n} \mathbb{Z} / \mathbb{Z} = \frac{1}{p^{n+1}} p \mathbb{Z} / \mathbb{Z}$$

Önceki Önerme'den; $\widehat{\mathbb{Z}(p)} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \widehat{\mathbb{Z}(p^n)}$

$$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{p^n} \mathbb{Z} / \mathbb{Z}$$

$$= \frac{1}{p^\infty} \mathbb{Z} / \mathbb{Z}$$

$$= \mathbb{Z}(p^\infty)$$

- (ii) $\mu_p: T \rightarrow T$ morfizmasının duali $\mu_p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ morfizmasıdır. Bu fonksiyon $\mathbb{Z} \rightarrow \frac{1}{p} \mathbb{Z}$ içermesine denktir. Önceki Önerme'den $T_p = \widehat{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{p^n} \mathbb{Z}} = \frac{1}{p^\infty} \mathbb{Z}$ dir.

KAYNAKLAR

BAKER, A., Matrix Groups, 2006, An Introduction to Lie Group Theory, Springer, Britain, 330s.

GREEN BERG, M.,1967, Lectures on Algebraic Topology, Newyork, 235s.

HOFMANN, K.H., MORRIS, S.A., 2006, The Structure of Compact Groups, Hubert & Co. GmbH & Co. KG, Göttingen, 858s.

PONTRYAGIN, L.S., 1986, Topological Groups, Gordon and Breach Science, New York, 525s.

ÖZGEÇMİŞ

06/01/1986 yılında Tarsus'ta doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Tarsus'ta tamamladı. 2003 yılında başladığı Çukurova Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nden 2007 yılında mezun oldu ve aynı yıl Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı Orta Öğretim Alan Öğretmenliği'nde (Matematik) yüksek lisansa başladı ve 2008 yılında tamamladı. Aynı yıl Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisansa başladı.