

**KALIN KUYRUKLU RİSK MODELLERİNDE
İFLAS OLASILIĞI**

RUIN PROBABILITY IN HEAVY TAILED RISK MODELS

BAŞAK BULUT

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim – Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

AKTÜERYA BİLİMLERİ Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2011

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma jürimiz tarafından **AKTÜERYA BİLİMLERİ ANABİLİM DALI** 'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan :.....

Doç. Dr. Durdu KARASOY

Üye (Danışman) :.....

Prof. Dr. Cenap ERDEMİR

Üye :.....

Doç. Dr. Meral SUCU

Üye :.....

Dr. Murat BÜYÜKYAZICI

Üye :.....

Dr. Yasemin GENÇTÜRK

ONAY

Bu tez/...../..... tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Adil DENİZLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

KALIN KUYRUKLU RİSK MODELLERİNDE İFLAS OLASILIĞI

Başak BULUT

ÖZ

Bu çalışmanın amacı, sigortacılık uygulamalarında önemli iki durum olan kalın kuyruklu dağılım yapısına sahip hasar tutarları ile bağımlılık yapısının risk süreci üzerindeki etkisinin incelenmesidir. Risk sürecinin sıfırın altına düşmesi durumundaki iflas olasılıkları gerçekleşmiş hasar tutarı dağılımına, parametre değerlerine, faiz oranına, başlangıç sermaye büyüklüğüne ve güvenlik yükleme faktörüne bağlı olarak hesaplanmıştır. Başlangıç sermaye miktarı ile güvenlik yükleme faktörünün, iflas olasılıkları üzerindeki etkisi elde edilen sonuçlara bağlı olarak yorumlanmıştır.

Bu çalışmada öncelikle kalın kuyruklu dağılımlar ve alt sınıfları hakkında ayrıntılı bilgi verilerek her bir dağılım sınıfı için gerekli koşullar açıklanmış. Sonrasında ise hasar tutarlarının kalın kuyruklu dağılım yapısına sahip olması durumunda risk süreci için iflas olasılıklarının nasıl hesaplanacağı ispatlar eşliğinde gösterilmiştir. Zorunlu trafik sigortası verileri kullanılarak risk sürecini oluşturan hasar ve prim süreçlerinin bağımlılık yapısı incelenmiş ve çeşitli varsayımlar altında iflas olasılıkları hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kalın Kuyruklu Dağılımlar, Alt-Üstel Dağılımlar, Bağımlı Riskler, Risk Süreci, İflas Olasılığı.

Danışman: Prof. Dr. Cenap ERDEMİR, Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü, Aktüerya Bilimleri Anabilim Dalı

RUIN PROBABILITY IN HEAVY TAILED RISK MODELS

Başak BULUT

ABSTRACT

The structure of heavy-tailed claim severity distributions and dependency are two important matters in insurance applications. The aim of this study provides to merge these matters and to analyse the effects of that combination on risk process. The ruin probabilities, which occur when the risk process falls down zero, have been calculated by making various assumptions about the distribution of claim severity, estimation of parameters, interest rate, initial surplus, security loading factor and so on. The effects of the amount of capital and security loading factor on ruin probabilities have been interpreted according to the results.

In this study, firstly, detailed information about heavy tailed distributions and the sub-class-of those distributions are given. Then, the conditions necessary for any distribution to belong to one of this special class of distributions are explained. After all, it is showed that how the ruin probabilities of a risk process, that including heavy tailed claim severity amounts, can be calculated with theoretical justifications. Finally, an application is provided by using compulsory traffic insurance data. Therefore dependency structures of the processes belonging to risk process of this insurance are investigated. Moreover, ruin probabilities are calculated according to some assumptions.

Keywords: Heavy-Tailed Distributions, Sub-Exponential Distributions, Dependent Risks, Risk Process, Ruin Probability

Advisor: Prof. Dr. Cenap ERDEMİR, Hacettepe University, Department of Actuarial Sciences, Actuarial Sciences Section

TEŞEKKÜR

Tez çalıőmamın her aşamasında değerli katkı ve eleőtirileriyle bana yol gosteren, karőtılaőtılan zorlukların aőtılmasında yardımcı olan danıőtmanım Sayın Prof. Dr. Cenap ERDEMİR'e,

değerli katkıları ve desteği için Sayın Doç. Dr. Meral SUCU'ya,

tezin uygulama aőamasındaki yardımları için Sayın Dr. Murat BÜYÜKYAZICI'ya,

Çalışma süresince yardım ve hoőtgörülerini esirgemeyen tüm hocalarım ve değerli arkadaşlarıma,

teőtvik ve desteklerini hiç esirgemeyen arkadaşlarıım Uzm. Furkan YILDIRIM'a, Arőt. Gör. Ayőt ARIK'a ve Arőt. Gör. Funda KUL'a,

zamansız kaybettiğimiz, desteğini hiçbir zaman unutmayacağımız değerli hocamız Sayın Prof.Dr. Ömer ESENSOY'a ve

her zaman yanımda olan, bana güç veren, destekleri ile bugünlere gelebildiğim sevgili aileme,

en içten teőtekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZ	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	İv
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. KALIN KUYRUKLU DAĞILIMLAR.....	8
2.1. Kalın Kuyruklu Dağılımlar Tanım ve Temel Özellikleri	8
2.1.1. Bir dağılımın kalın kuyruklu olması için gerekli koşullar.....	9
2.2. Kalın Kuyruklu Dağılım Sınıfları.....	10
2.2.1. Alt-üstel dağılımlar.....	10
2.2.1.1. Bir dağılımın alt-üstel olması için gerekli koşullar	12
2.2.1.2. En büyük toplam özelliği	12
2.2.1.3. Kuyruk eşdeğerliği	14
2.2.1.4. Değişkenler toplamı	16
2.2.2. Alt-üstelik sınıfı için kriterler	19
2.2.2.1. Bütünleşik kuyruk dağılımı	19
2.2.3. Alt-üstel dağılım sınıfları	19
2.2.3.1. Uzun kuyruklu dağılımlar	19
2.2.3.2. Baskın değişen kuyruklu dağılımlar	20
2.2.3.3. Düzenli değişen kuyruklu dağılımlar	20
2.2.4. Düzenli değişim ve alt-üstelik	22
2.2.4.1. Karamata teoremine göre düzenli değişim	22
2.2.4.2. Düzenli değişen fonksiyonlar için tekdüze yakınsaklık teoremi.....	22
2.2.4.3. Düzenli değişen fonksiyonlar için gösterim teoremi	23
2.2.4.4. Karamata teoremi	24
2.2.5. S^* Sınıfı	25
2.3. Kalın Kuyruklu Dağılım Sınıfları Arasındaki İlişkiler.....	27

2.4. Kalın Kuyruklu Dağılımların Belirlenmesi.....	28
2.4.1. Kuyruk ağırlığı	28
2.4.1.1. Momentlerin bulunması	29
2.4.1.2. Limit oranları	31
2.4.1.3. Tehlike hızı fonksiyonu	31
2.4.1.4. Ortalama arda kalan yaşam süresi	33
2.4.1.5. Denge dağılımları	34
2.5. Kalın Kuyruklu Dağılımların Gözlemlenmesi	36
2.5.1. Büyük hasarlar	36
2.5.2. QQ grafikleri	38
2.5.3. Uç değer istatistikleri	40
2.6. Kalın Kuyruklu Dağılım Örnekleri	40
3. KALIN KUYRUKLU DAĞILIMLARDA İFLAS OLASILIĞI.....	43
3.1. Klasik Risk Modeli ve İflas Teorisi	43
3.1.1. Klasik risk modeli.....	43
3.1.2. Cramer-Lundberg ve yenileme modeli.....	45
3.1.3. İflas olasılığı	48
3.1.4. Cramer-Lundberg Tahmini	52
3.1.4.1. Laplace-Stieltjes dönüşümü.....	53
3.1.4.2. Cramer-Lundberg teoremi	53
3.1.4.3. Lundberg sabiti	57
3.2. Kalın Kuyruklu Dağılımlar İçin İflas Teorisi	57
3.2.1. Düzenli değişen kuyruklu dağılımlarda konvülyasyon yaklaşımı	58
3.2.2. Alt –üstel dağılımlar için Cramer-Lundberg teoremi	60
3.2.2.1. Alt-üstel durumda toplam hasar büyüklüğü.....	62
3.2.2. Büyük hasarlarda Cramer-Lundberg teoremi	64
3.2.2.1. Bütünleşik kuyruk dağılımı ile kuyruk dağılımları arasındaki ilişki	65
4. UYGULAMA	68
4.1. Giriş.....	68
4.2. Veri Niteliği	68
4.3. Risk Sürecinin İncelenmesi	72
4.4. Kalın Kuyruklu Dağılıma Sahip Hasar Büyüklükleri için İflas Olasılığının Hesaplanması	83

5. SONUÇ VE ÖNERİLER	87
KAYNAKLAR.....	87
EKLER	97
Ek1: Hata Fonksiyonu ve Tamamlayıcı Hata Fonksiyonu Tablosu.....	98
ÖZGEÇMİŞ	99

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 2.1 Kalın kuyruklu dağılımlar ve parametreleri	41
Çizelge 4.1 Toplam hasar – % 70 toplam prim tutarının oluşturduğu risk süreci için çeşitli iflas olasılıkları	81
Çizelge 4.2 Poliçe başına aylık ortalama hasar – % 60 ortalama prim tutarlarının oluşturduğu risk süreci için çeşitli iflas olasılıkları	82

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1 Kalın kuyruklu dağılımlar ve alt sınıflarının ilişkisi.....	28
Şekil 4.1 Ocak 2003-Ekim 2009 tarihleri arasında her bir ayda toplanan prim tutarlarının sütun grafiği.....	69
Şekil 4.2 Ocak 2003 - Ekim 2009 tarihleri arasında her bir ayda toplanan aylık prim tutarlarının çizgi grafiği	70
Şekil 4.3 Ocak 2003 - Ekim 2009 tarihleri arasında her bir ayda gerçekleşen toplam hasar tutarlarının sütun grafiği	71
Şekil 4.4 Ocak 2003 - Ekim 2009 tarihleri arasında her bir ayda gerçekleşen toplam hasar tutarlarının çizgi grafiği.....	71
Şekil 4.5 Toplam hasarın sıklık dağılımı.....	72
Şekil 4.6 Toplam hasar - toplam prim tutarlarının çizgi grafiği.....	73
Şekil 4.7 Aylık 0,01 faiz oranı ve beş farklı sermaye miktarına göre aylık toplam hasar-toplam prim tutarlarının risk süreci grafiği.....	74
Şekil 4.8 Beş farklı aylık faiz oranı ve Sermaye 1 miktarına göre hesaplanan risk süreçlerinin grafiği	75
Şekil 4.9 Toplam primin %80'si ve toplam hasar tutarına göre oluşturulan risk süreci grafiği	76
Şekil 4.10 Toplam primin %75'i ve toplam hasar tutarına göre oluşturulan risk süreci grafiği	76
Şekil 4.11 Toplam primin %70'i ve toplam hasar tutarına göre oluşturulan risk süreci grafiği	76
Şekil 4.12 Poliçe başına aylık ortalama hasar tutarı ile ortalama prim tutarlarının çizgi grafiği	79
Şekil 4.13 Beş farklı sermaye miktarına göre ortalama hasar-ortalama prim tutarlarının risk süreci grafiği	80
Şekil 4.14 Ortalama primin %50'si ve poliçe başına ortalama hasar tutarına göre oluşturulan risk süreci grafiği	81
Şekil 4.15 Ortalama primin %60'ı ve poliçe başına ortalama hasar tutarına göre oluşturulan risk süreci grafiği	81
Şekil 4.16 Ortalama primin %70'i ve poliçe başına ortalama hasar tutarına göre oluşturulan risk süreci grafiği	81
Şekil 4.17 Ortalama primin %75'i ve poliçe başına ortalama hasar tutarına göre oluşturulan risk süreci grafiği	82

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

TRAMER: Trafik Sigortaları Bilgi Merkezi

1. GİRİŞ

Sigorta şirketinin yükümlülüklerini karşılayabilmesi ve devamlılığını sağlayabilmesi açısından incelenmesi gereken en önemli konulardan birisi, hasar tutarı dağılımlarının modellenmesidir. Özellikle gerçekleşme olasılığı düşük olmasına rağmen yüksek etki içeren doğal katastrofik olayların sonuçlarının incelenmesi ve bu etkileri içeren modellerin geliştirilmesi sigorta uygulamalarında önemli bir yer tutmaktadır. Bu tür hasarlar sigorta şirketinin sorumluluk karşılama yeterliliğini doğrudan etkilemektedir. Bu nedenle, sağlıklı bir fiyatlandırmanın yapılabilmesi ve reasürans konusunda en doğru saklama payı limitinin bulunabilmesi için hasar tutarı dağılımlarının, özellikle de sağ kuyruk bölgesinin çok iyi değerlendirilmesi gerekmektedir.

Hayat dışı sigorta alanında yapılan araştırmaların başında hasar sayısı ve hasar tutarı dağılımlarının modellenmesi gelmektedir; ancak bu sigorta alanında hem hasar sayısı hem de hasar tutarı birer bilinmeyendir ve bu nedenle de yapılan toplam hasar tahminlerindeki hata payı hayat sigortalarına göre çok daha büyüktür. Bu tür sigortalarda sınıf içi ayrımlar daha fazla olduğu gibi sigortalanan rizikonun en kötü hal durumlarıyla da karşılaşılabilir. Örneğin yangın, deprem, sel ya da kasırga gibi risklere karşı yapılan sigortalarda katastrofik olarak tanımlanan bu tür hasarlar ile karşılaşmaktadır. Özellikle bu tür risklerde şirketin teminat altına almış olduğu birden fazla rizikonun aynı anda etkilenmesi, düşük hasar olasılığının küçümsenmeyecek boyutta etkisinin olabileceğini göstermektedir. Olasılığı az, ancak kayıp değeri fazla olan risklerin modellenmesinde kalın kuyruklu dağılımların kullanılması çok daha gerçekçi sonuçlar vermektedir. Bu dağılımların modellenmesi ve uygunluklarının sınanması aktüerler için ilginç bir araştırma alanı oluşturmuştur. Hayat dışı sigorta branşında büyük hasarlara ilişkin modellemelerde Beirlant ve Teugels (1992), McNeil (1997), Beirlant et al., (2001), Fasen ve Klüppelberg (2008) farklı dağılım yapılarına göre çeşitli modeller geliştirmişlerdir.

Kalın kuyruklu olarak ifade edilen bu dağılımlar birer karışım modeli ya da dönüşüm modeli olarak elde edilebilmektedir. Sigorta uygulamalarında üstel-gamma dağılım karmasından elde edilen Pareto dağılımı ya da $Y = e^x$ dönüşümünün normal ve gamma dağılımlarına uygulanmasından elde edilen log-

normal ve log-gamma dağılımları hasar tutarı verilerini diğer dağılımlara göre çok daha başarılı şekilde yansıtmaktadır.

Toplam hasar dağılımları, sigorta şirketinin hem fiyatlandırma ve risk sınıflandırma sürecinde, hem de fonlandırma sürecinde kullanılmaktadır. Heckman-Meyers yöntemi, Panjer yöntemi, hızlı Fourier dönüşümü ve stokastik simülasyon yöntemleri toplam hasar dağılımlarını hesaplamak için geliştirilmiş bazı yaklaşımlardır. Tüm bu yöntemler temelde hasar sıklık dağılımı ve hasar şiddeti dağılımının bulunabiliyor olduğu varsayımına dayanmaktadır (Dimitriyadis,1992).

Bir sigorta şirketinin uzun süreli yükümlülük karşılama yeterliliğinin sağlanması için risk süreci iyi tanımlanmalı, doğru risk yüklemeleri yapılmalı, muafiyet ve saklama payı limitleri çok iyi belirlenmelidir. Yapılacak bu hesaplamaların geçerliliği, kurulan modelde kullanılan verilerin güvenilirliğine ve kullanılan analitik çözümlerin doğruluğuna yakından bağlı olduğu için, yoğun istatistik analizleri gerekmektedir. Hasarların büyüklüğü ve sıklığı, sigorta şirketinin riske maruz birim sayısını etkilediğinden, iflas olasılığının hesaplanmasında da önemli bir role sahiptirler.

İflas olasılığının hesaplanmasında bir sigorta şirketinin risk sürecinin zaman içerisindeki değişimi ile ilgilenilmektedir. Risk süreci kazanılan primler yüzünden öncelikle sürekli artan bir stokastik süreci içermekte olup daha sonrasında ise ödenen tazminatların etkisiyle azalmaya başlayacaktır. Risk süreci miktarı sıfırın altına düştüğü takdirde iflas gerçekleşmiş olacaktır.

Aktüeryal risk teorisinde önemli bir yere sahip olan sigortacılığın temel risk modeli, 1903 yılında Filip Lundberg tarafından bulunmuştur. Lundberg yaptığı çalışmalarda, hayat dışı sigortalarda hasar sayısı modelinin Poisson süreçlerine dayandığını ispatlamıştır. Bu buluş aslında 1900 yılında Bachelier tarafından bulunan ve finansal modelde önemli bir rol oluşturan Brown hareketine benzerlik göstermektedir. Daha sonra Harald Cramer 1955 yılında, Lundberg'in bulduğu bu sonucu stokastik süreçler üzerine uygulamıştır. Bu çalışmasıyla Cramer, olasılık teorisi kadar hayat dışı sigorta matematiğinde de önemli bir adım atılmasına yardımcı olmuştur. Bu model de böylece Cramer-Lundberg teoremi olarak anılmaya başlanmıştır. Klasik Cramer-Lundberg modeli çeşitli sigorta kolları üzerinde incelenmiştir (Embrechts et al., 2001).

Seal (1978), sonlu bir zaman diliminde iflas olasılıklarını hesaplamak için sayısal yöntemler geliştirmiştir. Beekman ve Bowers (1972), sınırlı zamanlı iflas olasılığı için momentler yaklaşımı yöntemini ortaya çıkarmıştır. Gerber (1973) ve De (1978), Martingale kuramını kullanarak iflas olasılığı için üst sınırlar tanımlamışlardır. Bunların dışında Panjer (1982) ve Willmot (1989, 1990) Poisson bileşimleri üzerine çeşitli algoritmalar geliştirmişlerdir. Grandell (1989), iflas olasılığı konusunda o güne kadar yapılmış tüm çalışmaların bir özetini toplamıştır. Bu konu ile ilgili en temel bilgiler ise Bowers et al., (1986), Beard et al., (1984) ve Bühlmann (1970) çalışmalarında bulunmaktadır. Literatürde ayrıca Grandell (1999), hasar büyüklüğünün kuyruk dağılımına ilişkin bir bilginin bulunmadığı, sadece belirli momentlerinin biliniyor olması durumunda iflas olasılığının hesaplanması için basit bir yaklaşım ortaya çıkarmıştır. Yuanjiang et al., (2003), klasik risk modelinin çeşitli varsayımları doğrultusunda iflas olasılığı üzerine çalışmıştır. Dufresne ve Gerber (1994), iflas olasılığının hesaplanması için üç farklı yöntem geliştirmişlerdir (Dimitriyadis, 1992).

İflas olasılıklarının farklı hasar dağılımları için hesaplanması, hasar büyüklüklerinin reasürans ile kısıtlandığı durumlar için iflas olasılığının hesaplanması, değişik prim yükleme yöntemlerinin etkisi ve şirketin yükümlülük karşılama yeterliliğinin o anda elinde bulundurduğu rezerve bağlı olarak değişiminin incelenmesi gibi konular halen araştırılmaktadır. Bu konu Ramlau-Hansen (1988a-1988b), Embrechts et al., (1990), Boogaert et al., (1990), Croux (1990) tarafından ayrıntılı biçimde incelenmiştir.

Portföyde yer alan büyük hasarlar şirketin kar-zarar durumunu doğrudan etkilediğinden bu tür büyüklüklerin gözardı edilmediği modeller daha gerçekçi ve daha doğru sonuçlar ortaya koymaktadır. Embrechts ve Veraverbeke 1981 yılındaki çalışmasında (Embrechts, 1981) büyük hasarların var olması durumundaki iflas olasılığı tahminleri üzerinde çalışmıştır. Tang (2004), sabit faiz oranı ve kalın kuyruklu hasar büyüklükleri varsayımı altında kesikli zamanlı risk modeli için iflas olasılığının asimptotik sonuçlarını ortaya koymuşlardır. Chen ve Su (2006), net hasarların kalın kuyruklu dağılıma uyması durumunda sınırlı zamanlı iflas olasılığının elde edilmesi üzerine çalışmışlardır.

Alt-üstel dağılımlar kalın kuyruklu dağılım ailesinin en önemli alt sınıfıdır. Literatürdeki hasar büyüklüğü üzerine yapılan birçok çalışma da bu alt dağılım sınıfı üzerine yoğunlaşmıştır. Hasar büyüklüğünün alt-üstel dağılıma uyması durumunda iflas olasılığı için asimptotik formüller Kalashnikov ve Konstantinides (2000)'in çalışmasında bulunmaktadır. Thorin ve Wikstad (1977), hasar büyüklüğünün log-normal dağılması durumu için iflas olasılığını hesaplanmış ve sayısal örnekler ile göstermişlerdir. Asmussen (1997), log-normal, Pareto ve Weibull dağılımları için Monte-Carlo benzetim yöntemini kullanarak iflas olasılığını ve etkilerini incelemiştir.

İflas olasılığının klasik tahmini belirli bir t zamanına kadar gerçekleşen hasar sayısının Poisson sürecine uyduğu varsayımına da dayanmaktadır. Bu durum bir önceki hasar ile arasındaki zaman aralığının, bir sonraki gerçekleşen hasar zamanını etkilemeyeceği anlamına gelmekte olup, olayın hafızasının olmamasına ilişkin bir varsayımdır. Bununla birlikte, son yıllardaki çeşitli veri incelemelerinden bu varsayımın sağlanmadığı görülmüş ve veriler arasında bağımlılık yapısının da yer aldığı kalın kuyruklu dağılımlar üzerine incelemelere başlanmıştır.

Genellikle bir sigorta portföyünde, çeşitli hesaplamalarda kolaylık sağlaması amacıyla risklerin bağımsız oldukları varsayılmaktadır. Aktüeryal risk teorisinde de bireysel risk modelleri ve kolektif risk modelleri gibi pek çok model bağımsızlık varsayımı altında kurulmaktadır. N adet sigorta poliçesinden oluşan bir portföyde; her bir poliçe bir yıl gibi belirli bir dönem içinde pozitif bir nominal değere sahiptir. Bu miktar hayat sigortası için sigortalanan kişinin o dönem içerisinde ölmesine, hayat dışı sigortasında ise sigortalanan riskin o dönem içerisinde hasar getirmesi durumuna bağlı olarak değişmektedir. Portföydeki toplam hasar büyüklüğü o dönem içerisinde ödenen tüm miktarların toplamı olarak ifade edilebilir. Bireysel ve kolektif risk teorisinde temel sorun bu toplam hasar büyüklüğünün dağılımının bulunmasıdır. Uygulamada ve ayrıca teoride bu problem genellikle farklı sözleşmelerin karşılıklı olarak bağımsız olduklarının varsayılması ile çözülebilmektedir. Böylece marjinal dağılım bilgisiyle sorun çözülmeye çalışılmıştır.

Ancak bağımsızlık varsayımı klasik modellerde çok önemli bir rol oynamasına rağmen, sigorta ve reasürans şirketleri ürünlerinin artan karmaşıklığı nedeniyle çoğu zaman uygulamadaki sonuçlarla bağdaşmamaktadır.

Bunun yanında iflas olasılığının hesaplanmasında da geleneksel olarak, gerçekleşen olaylar arasında, yer ve zaman bakımından bağımsızlığın olduğu varsayılmıştır. Ancak günlük hayatta karşılaşılabilecek birçok durum bağımsızlık varsayımının sağlanmadığını göstermektedir.

Aktüeryal risk teorisinde karşılaşılan bağımlılık ilişkileri iki ana durum altında incelenmektedir. İlk tür bağımlılık; sigortacının portföyünde bulunan farklı sigorta branşlarına ait poliçeler ya da farklı sigorta kolları arasında ilişki oluşmasından kaynaklanan bağımlılık şeklindedir. Sigortacılıkta karşılaşılan bağımlılık durumlarının ilk türü şu şekilde açıklanabilmektedir.

- Portföy içerisinde birçok tekrarlama durumuyla karşılaşılabılır. Örneğin; aynı yaşam üzerine birden fazla poliçe bulunabilir. Bu durum altında portföydeki poliçe sayısı sigortalı sayısına eşit olmayacaktır.
- Aynı portföy içerisinde eşlerin birlikte buldukları poliçeler de yer alabilir. Bu durum eşlerin ölümlülükleri arasında bağımlılık yapısının var olmasına neden olmaktadır. Çiftler az ya da çok benzer riskler ile karşılaşacaktır. Bununla birlikte; çiftlerin eşleştirilmesinde de seçim mekanizması var olabilmektedir. Ayrıca eşlerden birinin ölümü üzerine diğer bireyin ölümlülük oranında artışın gerçekleşeceği durumunu anlatan kırık kalp sendromu (broken heart syndrome) da bu tip bağımlılık yapısını açıklayan durumlardandır. Bu konu ile ilgili Carriere et al., (1986), Norberg (1989) ve Frees et al., (1995) çalışmaları yapılmıştır.
- Aynı şirket için çalışan kişilerin oluşturduğu emeklilik planlarında; bu bireylerin ölümlülükleri de belirgin bir şekilde bağımlı olacaktır.
- Belirli bir bölge ya da kuruluştaki sigortalı kişiler katastrofik olarak açıklanan; gerçekleşme olasılığı düşük; ancak yüksek miktarda hasara neden olabilecek deprem, sel, fırtına ya da kasırga gibi olaylardan aynı zaman dilimi içerisinde etkilenecek ve böylece sigorta şirketi bir anda yüksek miktarda ödeme yapmak durumuyla karşılaşabilecektir.

Dhaene ve Goovaerts (1997) bir hayat sigortası portföyündeki farklı riskler arasındaki bağımlılık türlerini açıklamış; her bir poliçenin incelenen dönem

içerisinde, poliçe sahibinin o dönem içerisinde ölmesine bağlı olarak ortaya çıkan pozitif bir risk değerine sahip olduğunu varsayarak, hasar oranı fazlası reasürans (Stop-Loss) antlaşmalarında yüksek prim miktarına neden olan riskli toplam hasarların oluşturduğu bireysel riskler arasındaki bağımlılık yapılarını incelemişlerdir. Çalışmanın devamında ise sadece çiftlerin bağımlı olduğu bir portföy incelemesi yapılarak, elde edilen sonuçlar zayıf bağımlılık yapılarının sonuçlarını ispatlamak için kullanılmıştır.

Literatürde risklerin bağımlılığına sebep olan bu tür ilişkili sigorta kollarına ve poliçelerine ait bağımlı risk modelleri; Dhaene ve Goovaerts (1997), Ambagaspitiya (1998), Wang (1998), Denuit et al., (1999), Cossette ve Marceau (2000), Müller ve Pflug (2001), Wu ve Yuen (2003) ve Ribas et. al., (2003) gibi pek çok araştırmacı tarafından incelenmiştir.

İkinci tür bağımlılık türü ise hasar ve/veya prim süreçlerinin geçmiş dönemde gerçekleşen hasar miktarı ve/veya prim miktarı ile arasındaki ilişkilerden kaynaklanan bağımlılıktır. Mevcut hasar ile eski hasarlar arasındaki bağımlılık genel olarak geçmiş dönemde portföyde bulunan bazı poliçelerin gelecek dönemde de portföyde bulunacak olmasından kaynaklanmaktadır. Bu türde bağımlı risklerin modellenmesinde ise zaman serileri yaklaşımı kullanılır ve iflas olasılıklarının sonuçlarından yararlanır. Bu türde bağımlılığın olduğu risk modelleri; Gerber (1982), Promislow (1991), Bowers (1986), Albrecher (1998), Yang ve Zhang (2003), Zhang (2005) çalışmalarında incelenmiştir.

Hem kalın kuyruklu dağılıma sahip hem de bağımlılık yapısını içinde barındıran riskler, sigortacılık sektörünün önemli iki sorununu biraraya getirmektedir. Son yıllarda, portföy seçiminde ve sigorta stratejilerinde, bağımlı kalın kuyruklu riskler üzerine incelemeye daha çok ağırlık verilmiştir. Hasar büyüklükleri arasında bağımlılık ilişkisinin var olduğu kalın kuyruklu riskler üzerine yapılan birçok çalışmada bu hasar büyüklüklerinin risk süreci üzerindeki etkisi incelenerek, iflas olasılığı için asimptotik sonuçlar elde edilmiştir. Mikosch ve Samorodnitsky (2000), Albrecher et al., (2006), risk modelleri için iflas olasılığının hesaplanmasına önem vermiştir. Bu konu ile ilgili olarak, Tang ve Tsitsiashvili (2003), Chen ve Ng (2006), Gao et al., (2007), Weng et al (2008) çalışmaları bulunmaktadır.

Bu çalışmada; önceki dönemlerle arasında ilişkisi olduğu varsayılan hasar tutarlarının zaman serisi analizi ile süreç bazında bağımlı olduğu varsayılmıştır. Hasar tutarlarının olası durumlarını daha gerçekçi bir şekilde yansıtan kalın kuyruklu dağılım yapısına uyup uymadığı, bu dağılım yapısının koşulları incelenerek araştırılmıştır. Kalın kuyruklu dağılım yapısına sahip risklerin, risk süreci ve iflas olasılıkları üzerindeki etkisi teorik ispatlar eşliğinde açıklanmaya çalışılmıştır.

Çalışmanın İkinci Bölümü'nde, kalın kuyruklu dağılım sınıfları ve her bir alt sınıf için gerekli koşullar incelenmiş. Bu dağılım sınıflarının birbirleriyle olan ilişki yapısı açıklanmaya çalışılmıştır. Bu dağılımların teorik düzeyde açıklanmasında çeşitli yaklaşım ve yöntemler de incelenmiştir.

Çalışmanın Üçüncü Bölümü'nde; sigortacılıktaki temel risk modeli açıklanarak sırasıyla Cramer-Lunberg modeli ve bu modeli oluşturan süreçler hakkında bilgi verilerek risk süreci ve iflas olasılığı açıklanmıştır. Bu bölümün ilerleyen kısımlarında ise kalın kuyruklu olduğu bilinen hasar büyüklükleri için iflas olasılığının hesaplanması teorik ispatlar kullanılarak açıklanmaya çalışılmıştır. Kalın kuyruklu dağılım sınıfının alt sınıflarından alt-üstel ve düzenli değişen sınıflar için iflas olasılığı teorik olarak incelenmiştir.

Çalışmanın Dördüncü Bölümü'nde ise TRAMER bilgi sistemine kayıtlı olan zorunlu trafik sigortası verileri kullanılarak çalışma kapsamında açıklanan durumların uygulaması yapılmıştır. Hasar tutarlarının dağılım yapısı, belirlendikten sonra, düşünülen bu dağılımın kalın kuyruklu dağılım yapısına uyup uymadığı, uyması halinde ise hangi alt sınıfa dahil olduğu araştırılmıştır. Ayrıca belirlenen dönem için sistemin bağımlılık yapısı ve risk süreci incelenerek, risk sürecinin sıfırın altına düşmesi durumundaki iflas olasılığı için yaklaşık olasılık değerleri çeşitli yazılımlar kullanılarak hesaplanmıştır.

2. KALIN KUYRUKLU DAĞILIMLAR

2.1. Kalın Kuyruklu Dağılımlar Tanım ve Temel Özellikleri

Olasılık teorisinde kalın kuyruklu dağılımlar; kuyruk yapıları sınırlandırılmamış ve üstel dağılıma göre daha kalın kuyruk yapısına sahip olasılık dağılımları şeklinde açıklanmaktadır. Uygulamalarda sağ taraflı, sol taraflı ya da çift taraflı kalın kuyruk yapısına sahip dağılımlar gözlemlenebilmektedir. Sigorta ve reasürans şirketleri tarafından yapılan modellemelerde, gerçekleşebilecek büyük hasarlara ilişkin özellikleri içinde barındıran sağ kuyruk bölgesi kalın olan dağılımlar ile ilgilenilmektedir.

Kalın kuyruk özelliklerini taşıyan dağılımların araştırılmasında; $s > 0$ değerleri için, $m(s)$ tehlike hızı fonksiyonu, $m(s) = \infty$ eşitliğini sağlayacak şekilde negatif olmayan rastlantı değişkenlerinin dağılım sınıfları incelenmektedir. Kalın kuyruklu dağılım özelliklerine sahip en belirgin örnekler; log-normal dağılım, Pareto dağılımı ve biçim parametresi 1 değerinden küçük olan Weibull dağılımlarıdır (Embrechts et al., 2001).

Bir dağılımın kuyruk bölgesi (özellikle de sağ kuyruk bölgesi), büyük değerlerin özelliklerini daha iyi ortaya çıkartmaktadır. Sigortacılıkta, dağılımların kuyruk yapıları özellikle aktüerlerin ilgisini çekmektedir; çünkü şirketin kar-zarar durumunu etkileyen en önemli faktörlerden biri, büyük hasarların gerçekleşmesi durumudur. Yangın, deprem, sel gibi riskli sigorta kollarında, araç hasar sigortaları (kasko) gibi daha az risk içeren sigorta kollarına göre daha fazla büyük hasarlarla karşılaşmaktadır. Büyük hasarların gerçekleşme olasılıklarını barındıran rastlantı değişkenleri kalın kuyruklu dağılıma sahip rastlantı değişkenleri olarak adlandırılabilir (Klugman et al., 2008).

Sigorta branşı içerisinde yapılan modellemelerde, karşılaşılan hasar verilerine bağlı olarak, bu dağılımlar arasında bir çeşit sınıflandırmaya başvurulabilmektedir. Araştırmacılar, sektörde karşılaşılan durumlar içerisinde genellikle log-normal dağılımın araç sigorta verilerinin modellenmesi için uygun bir dağılım olduğunu, Pareto dağılımının ise yangın hasarlarına ilişkin verilerin modellenmesinde daha iyi sonuç verdiğini savunmaktadır (Rolski et al., 1999).

Bu durum da aslında sigorta uygulamalarında kalın kuyruklu dağılımların karşılaşılabilecek olaylara göre sınıflandırılabileceğini göstermektedir.

2.1.1. Bir dağılımın kalın kuyruklu olması için gerekli koşullar

X_i 'nin, $i \in N$ ve $x > 0$ değerleri için $F(x) < 1$ olacak şekilde aynı F dağılım fonksiyonuna sahip bağımsız pozitif rastlantı değişkenleri olduğu varsayalım. Bu durumda ortak bir X rastlantı değişkeninin dağılım fonksiyonu $F(x) = P(X \leq x)$, kuyruk dağılımı (ya da yaşam fonksiyonu)

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = P(X > x) \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilmektedir.

Negatif olmayan bir rastlantı değişkenin kalın kuyruklu dağılım yapısına sahip olabilmesi için gerekli koşullar aşağıda sıralanmaktadır:

Koşul 1:

F dağılım fonksiyonu $\varepsilon > 0$ değeri için

$$E[e^{\varepsilon x}] = \infty \quad (2.2)$$

şeklinde elde edilmektedir. Diğer bir ifade ile, $[0, \infty)$ aralığında dağılan F dağılım fonksiyonu $\varepsilon > 0$ değerleri için;

$$\int_0^{\infty} e^{\varepsilon x} dF(x) = \infty \quad (2.3)$$

olmalıdır.

Koşul 2:

$x > 0$ için $\bar{F}(x) > 0$ olmalıdır.

Koşul 3:

$\mu(x)$ tehlike fonksiyonu (hazard function);

$$\mu(x) = -\log \bar{F}(x) \quad (2.4)$$

olarak tanımlanmaktadır.

$\mu(x)$ tehlike fonksiyonu, diferansiyellenebilir bir fonksiyon olup, tehlike hızı fonksiyonu (hazard rate function)

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = m(x) \quad (2.5)$$

şeklinde elde edilmektedir.

Tehlike hızı fonksiyonu ayrıca olasılık fonksiyonu ve kuyruk dağılımı yardımıyla elde edilebilmektedir.

$$m(x) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} \quad (2.6)$$

Tehlike fonksiyonuna bağlı olarak; α_F değeri

$$\alpha_F = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\mu(x)}{x} \quad (2.7)$$

eşitliğinden elde edilmektedir. Eğer $\alpha_F = 0$ ise; incelenen dağılımın kalın kuyruklu bir dağılım olduğunu göstermektedir. Bu eşitliğin sağlanıyor olması tehlike hızı fonksiyonunun sıfıra yakınsadığı anlamına da gelmektedir.

Koşul 4:

$s > 0$ olmak üzere;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{sx} \bar{F}(x) = \infty \quad (2.8)$$

olmalıdır (Rolski et al., 1999).

2.2. Kalın Kuyruklu Dağılım Sınıfları

Kalın kuyruklu dağılımların sahip oldukları ortak özelliklere bağlı olarak çeşitli alt sınıflar oluşturulmuştur. Bu dağılım sınıfları içerisindeki en önemli alt sınıf; alt-üstel

(sub-exponential) dağılım sınıfıdır. Bu dağılım sınıfından farklı olarak kalın kuyruklu dağılımların başka alt sınıfları da bulunmaktadır. Bunlar, uzun kuyruklu dağılımlar (long tailed), baskın değişen kuyruklu dağılımlar (dominated-varying tailed) ve düzenli değişen kuyruklu dağılımlardır (regularly-varying tailed).

2.2.1. Alt-üstel dağılımlar

Alt-üstel dağılımlar kalın kuyruklu dağılım türlerinin özel bir sınıfıdır ve önemli bir yere sahiptir. Bu dağılım sınıfına genel anlamda alt-üstel isminin verilmesinin nedeni; bu sınıf içerisindeki dağılımların herhangi bir üstel dağılımdan daha yavaş azalan bir kuyruk yapısına sahip olmasıdır (Goldie, 1998).

Alt-üstel dağılımlara uyan hasar büyüklükleri bir portföyde karşılaşılabilecek toplam riskleri artırmakta ve şirketin risk sürecinde dalgalanmaların ortaya çıkmasına neden olmaktadır.

Alt-üstelik durumu, benzetim programlarındaki incelenen kuyruk sistemlerinde de benzer rol oynamaktadır. Bu dağılımlarla modellenen uç hizmet süreleri, sistemde büyük bekleme sürelerinin gerçekleşmesine neden olmaktadır (Goldie, 1998).

Alt-üstel dağılımlı stokastik modeller sigortacılık sektöründe katastrofik risklerin modellenmesinde kullanılıyor olmasının yanı sıra, telekomünikasyon şebekelerinde de kullanılmaktadır.

Alt-Üstel dağılımlar ilk kez 1964 yılında Chistyakov tarafından, dallanma süreci (branching process) üzerine yapılan uygulamalarda kullanılmıştır. İlerleyen çalışmalarda ise alt-üstel dağılım yapısı, sigorta hesaplamaları üzerinde uygulanmıştır. Bu çalışmalarda Pollaczek-Khinchin tarafından, incelenen dağılım fonksiyonunun alt-üstel dağılım yapısına uyması durumundaki değişimler girdi ve çıktı durumları olarak iki türde incelenmiştir. Çıktı olarak değerlendirilen durum basit bir sigorta modelinde iflas olasılığının bulunması olarak gösterilmiştir.

Tüm alt-üstel dağılımları betimlemek için \mathcal{S} gösterimi kullanılmaktadır. \mathcal{S} dağılım ailesi içerisinde birçok önemli dağılım bulunmaktadır. Bu dağılımlardan birkaçı; log-normal dağılım, Pareto dağılımı ve biçim parametresi 1 değerinden küçük olan Weibull dağılımıdır (Rolski et al., 1999).

2.2.1.1. Bir dağılımın alt-üstel olması için gerekli koşullar

Herhangi bir F dağılım fonksiyonunun alt-üstel dağılım sınıfı içerisinde yer alabilmesi için gerekli üç koşul bulunmaktadır. Bu koşullar şu şekilde verilebilmektedir:

Koşul 1:

$x \geq 0$ değerleri için $\bar{F}(x) > 0$ olmalıdır.

Koşul 2:

\bar{F}^{n*} ; F dağılım fonksiyonunun n 'nci dereceden konvülsiyonunun kuyruk dağılımını göstermektedir ve

$$\bar{F}^{n*} = 1 - F^{n*}(x) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_n > x) \quad (2.9)$$

şeklinde elde edilmektedir. $n = 2$ değeri için;

$$F^{2*}(x) = \int_0^x F(x-y) dF(y) \quad (2.10)$$

şeklinde hesaplanmak üzere, $n > 2$ değerleri için de benzer şekilde devam etmektedir. Herhangi bir dağılımda $n \geq 2$ değerleri için;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}^{n*}(x)}{\bar{F}(x)} = n \quad (2.11)$$

eşitliğinin sağlanması durumunda F dağılım fonksiyonu, alt-üstel dağılım sınıfı içerisinde yer almaktadır.

Bu koşulun bulunması Chistyakov'un 1964 yılındaki çalışmasına dayanmaktadır (Chistyakov, 1964). Bu çalışmasında Chistyakov yalnızca $n > 2$ değerleri için tüm limit değerlerinin sağlanacağını kanıtlamıştır. 1982 yılında Embrechts ve Goldie(Embrechts,1982) ise, $n = 2$ değeri için bu koşulun sağlandığını kanıtlamışlardır.

Koşul 3:

$$n \geq 2 \text{ olmak üzere ; } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X_1 + X_2 + \dots + X_n > x)}{P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) > x)} = 1 \quad (2.12)$$

olmalıdır.

Bu koşul, alt-üstel dağılım fonksiyonlarının kalın kuyruklu olması durumuna açıklık getirmesinin yanı sıra alt-üstel dağılım yapısının fiziksel yorumunu da içermektedir. Bu açıklama ilk kez 1964 yılında Chistyakov tarafından şu şekilde kanıtlanmıştır. n tane bağımsız ve aynı dağılıma sahip alt-üstel rastlantı değişkeninin içerisinde çok büyük bir değer bulunması, bu n rastlantı değişkeninin toplamının da doğal olarak büyük olmasına neden olacaktır. Bu durum, bir alt-üstel örneklemedeki büyük değerlerin hesaplanması için kullanılmaktadır.

X_1, X_2, \dots bağımsız ve alt-üstel dağılım sınıfı içerisinde yer alan aynı F dağılımına sahip rastlantı değişkenleri olmak üzere, tüm $n = 2, 3, \dots$ değerleri için; $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ olmak üzere;

$$\Pr(S_n > x) = \overline{F^{*n}}(x) \sim n\overline{F}(x) \quad (2.13)$$

eşitliğini sağlamaktadır ve

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X_1 + X_2 + \dots + X_n > x)}{P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) > x)} \sim \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{n\overline{F}(x)} \rightarrow 1$$

eşitliği sağlanıyor ise F dağılımı alt-üstel dağılım sınıfına girmektedir. $F \in S'$ dir.

$X_{(n)} = \max X_1, \dots, X_n$ olarak gösterilmek üzere; bu ispatlarda kullanılan eşitliklerin birleştirilmesiyle $\Pr(S_n > x) \sim \Pr(X_{(n)} > x)$ olduğu görülecektir. Bu eşitlik aslında kalın kuyruklu dağılımların temel özelliğini de açıklamaktadır. Bu özellik; en büyük değer kuyruk yapısının (tail of the maximum), bağımsız rastlantı değişkenlerinin toplamının kuyruğuna eşit olması olarak açıklanmaktadır (Ko, 2008).

2.2.1.2. En büyük toplam özelliği

Tüm alt-üstel dağılım sınıfı için geçerli olmamakla birlikte, bu dağılım sınıfının alt sınıfları için bu özellikler doğrultusunda başka ilişkiler de bulunmuştur.

Bu ilişkilerden en önemlisi toplamların en büyüğü özelliğidir.

X_1 ve X_2 , F_1 ve F_2 dağılımına sahip bağımsız rastlantı değişkenleri ve $S_2 = X_1 + X_2$ olmak üzere ;

$$\Pr(S_2 > x) = \overline{F_1 * F_2}(x) \sim \overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x) \quad (2.14)$$

şeklinde elde edilmektedir.

Bu özelliğin tüm alt-üstel dağılım sınıfları için geçerli olmadığı Leslie'nin 1989 yılındaki çalışmasında (Leslie, 1989) kanıtlanmıştır. Cai ve Tang, 2004 yılındaki çalışmalarında (Cai, 2004) bu özelliği alt-üstel dağılım sınıfının alt sınıflarından olan düzenli değişen fonksiyonlar (\mathcal{D}) ile uzun kuyruklu dağılımların (\mathcal{L}) kesişim aralığı için ($\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$) göstermişlerdir (Ko, 2008).

Alt-üstellikle ilgili genellikle rastlantı değişkenlerinin aynı dağılıma sahip, bağımsız ya da tamamen bağımsız oldukları durumlar üzerine çalışmalar yapılmıştır. Bu özellik alt-üstellikle ilgili birçok teoremin sınırlandırılmasına neden olmuştur.

$$F_1, \dots, F_n \text{ dağılımına sahip } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ rastlantı değişkenlerinin} \\ \Pr(S_n > x) \sim \overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x) + \dots + \overline{F_n}(x) \quad (2.15)$$

eşitliğini sağlaması durumunda, bu değişkenler bağımlı kabul edilebilmektedir (Ko, 2008).

Bu durum; S_n 'in kuyruk davranışının, toplanan alt-üstel değişkenlerin bağımlılık durumlarına göre değiştiği şeklinde açıklanabilmektedir.

\mathcal{L} : Uzun kuyruklu dağılımı,

\mathcal{D} : baskın değişen kuyruklu dağılımı göstermek üzere;

$F \in (\mathcal{D} \cap \mathcal{L})$ durumu için Geluk ve Ng, 2006 yılındaki yaptıkları çalışmada, (Geluk, 2006) $\Pr(S_n > x) \sim \overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x) + \dots + \overline{F_n}(x)$ eşitliğini, X_1, \dots, X_n rastlantı değişkenlerinin negatif ilişkili (negatively associated) durumu için ispatlamışlardır. Buradaki negatif ilişkili durum; $1, \dots, n$ olmak üzere her bir ayırık, boş olmayan I ve J alt kümeleri için X_1, \dots, X_n değişkenlerinin, f ve g artan fonksiyonlarına göre kovaryanslarının sıfırdan küçük olması şeklinde açıklanabilmektedir.

$$(Cov f(X_i, i \in I), g(X_j, j \in J)) \leq 0$$

Albrecher ve diğerleri 2006 yılındaki çalışmalarında (Albrecher et al, 2006) $n=2$ olmak üzere X_1 ve X_2 rastlantı değişkenlerinin bağımlılık durumlarını copula yaklaşımı ile açıklamaya çalışmıştır. Bu çalışma içindeki Teorem 2.7’de $\Pr(S_n > x) = \overline{F_1 * F_2}(x) \sim \overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x)$ eşitliğindeki asimptotik sonuçlar F dağılımının sürekli olup X_1 ve X_2 rastlantı değişkenleri için copula yoğunluk fonksiyonunun var olup, $0 < c < 1$ aralığında tekdüze sınırlı olması durumu için inceleme yapmışlardır.

Tang ve Tsitsiashvili, 2003 yılındaki çalışmalarında alt-üstel dağılımların belirsizliğini farklı bir bakış açısına göre incelemiştir. Ana Y_1, \dots, Y_n rastlantı değişkenleri bağımsız ve aynı alt-üstel dağılıma sahip rastlantı değişkenleri iken, ağırlıkların ise w_1, \dots, w_n olmak üzere esas rastlantı değişkenlerinden bağımsız ve $0 < a < b < \infty$ olmak üzere $[a, b]$ aralığında sınırlı aynı dağılıma sahip bağımlı değişkenler olduğu varsayılmıştır. Bu varsayımlar altında; X_1, X_2, \dots, X_n rastlantı değişkenleri ağırlıklandırılma işlemi uygulanarak $X_1 = w_1 Y_1, X_2 = w_2 Y_2, \dots, X_n = w_n Y_n$ şeklinde yazılmıştır. Bu durum için de $\Pr(S_n > x) \sim \overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x) + \dots + \overline{F_n}(x)$ eşitliği Tang ve Tsitsiashvili ‘nin çalışmasındaki Teorem 3.1 ‘de ispatlanmıştır (Ko, 2008).

2.2.1.3. Kuyruk eşdeğerliği

Kuyruk eşdeğerliği (tail-equivalence) alt-üstel dağılım yapılarının incelenmesinde önemli bir yere sahip olup çeşitli özellikleri içinde barındırmaktadır.

Özellik 1:

F dağılımı alt-üstel dağılım sınıfı içerisinde yer alan bir dağılım; G dağılımı ise F dağılımına göre daha ince kuyruk yapısına sahip bir dağılım olmak üzere, G dağılımı;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} = 0 \quad (2.16)$$

eşitliğini sağladığı takdirde;

$F * G$ ve $\overline{F * G}(x) \sim \overline{F}(x)$ dağılımları, alt-üstel dağılım sınıfına dahil olacaktır.

$F * G$; F ve G dağılım fonksiyonlarının konvülyasyonunu göstermektedir.

Özellik 2:

F dağılımı alt-üstel dağılım sınıfı içerisinde yer alan bir dağılım, G dağılımı ise $c > 0$ sabiti ile $\bar{G}(x) \sim c\bar{F}(x)$ eşitliğini sağladığı takdirde; G ve $F * G$ dağılımları alt-üstel dağılım sınıfı içerisinde yer alacak ve

$$\overline{F * G}(x) \sim (1 + c)\bar{F}(x) \quad (2.17)$$

eşitliği bu iki dağılım için sağlanacaktır. F ve G iki dağılım fonksiyonu olmak üzere, eğer bu özelliği sağlıyor ise kuyruk eşdeğerlikli (tail-equivalence) olarak ifade edilir (Sigman,1999).

Alt-üstel dağılım koşullarındaki, (2.12) eşitliğinde, $X_1 + \dots + X_n$ rastlantı değişkenleri $F \in \mathcal{S}$ olacak şekilde ortak dağılıma sahip bağımsız rastlantı değişkenleri olmak üzere $\max X_1, \dots, X_n$ ve $X_1 + \dots + X_n$ değerleri yukarıdaki özellik sayesinde alt-üstel dağılım sınıfında yer alacak ve bu durumda bu değerlerin $c = n$ ile F dağılımına kuyruk eşdeğerlikli oldukları söylenebilecektir.

2.2.1.4. Değişkenler toplamı

X_n bağımsız ve aynı F dağılımına sahip rastlantı değişkenleri, N ise $N \geq 0$ olmak üzere X_n 'den bağımsız ve $0 < E[N] < \infty$ koşulunu sağlayan rastlantı değişkeni olmak üzere $Y = \sum_{n=1}^N X_n$ şeklinde olan bir Y rastlantı değişkeni için aşağıdaki özellikler yazılabilir:

Özellik 1: Eğer $F \in \mathcal{S}$ ve $\varepsilon > 0$ değerleri için $E(e^{\varepsilon N}) < \infty$ eşitsizliği sağlanıyor ise;

$$Y \in \mathcal{S} \text{ ve } P(Y > x) \sim E[N]\bar{F}(x) \quad (2.18)$$

olacaktır.

Bu eşitlik incelenecek olursa, (2.11) eşitliğinde n yerine beklenen değer $E[N]$, konularak elde edilen eşitlik ile aynı olduğu görülecektir (Sigman,1999).

Özellik 2: Eğer (2.18) eşitliği sağlanıyor ve $n \geq 2$ değerleri için $P(N = n) > 0$ oluyor ise; $F \in \mathcal{S}$ ve $Y \in \mathcal{S}$ olmaktadır.

Özellik 3: Eğer N , $n \geq 0$, $0 < \alpha < 1$ parametresiyle $P(N = n) = (1 - \alpha)\alpha^n$ olacak şekilde geometrik dağılıma sahipse (ya da pozitif ortalamalı Poisson dağılımına sahipse) yalnızca (2.18) eşitliğinin sağlanması durumunda $Y \in S$ ve bu durumun gerçekleşmesiyle de $F \in S$ olmaktadır.

$F \in S$ olması durumunda; $n \in N$ olmak üzere $F^{n*} \in S$ ve ayrıca $F^n \in S$ olacaktır.

Buna göre; $F \in S$ olduğundan

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1 \quad \forall y \in R \quad (2.19)$$

$$\rightarrow \int_0^{\infty} e^{\varepsilon x} dF(x) = \infty \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (2.20)$$

$$\rightarrow \frac{F(x)}{e^{-\varepsilon x}} \rightarrow \infty \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (2.21)$$

eşitlikleri sağlanmaktadır.

(2.21) eşitliği alt-üstel dağılımların temel özelliğini ortaya çıkarmaktadır. Bu özellik; F dağılım fonksiyonunun kuyruk dağılımının, herhangi bir üstel dağılımın kuyruk yapısından daha yavaş bir şekilde azalmakta olduğunu göstermektedir. Bu durum ayrıca limit özelliklerinden de yorumlanabilir.

(2.20) eşitliği ise alt-üstel dağılımların hiçbir momente sahip olmadıklarının gösterilmesinde kullanılmaktadır. Bu durum bir modelleme aşamasında, kurulması düşünülen modelin momentlerinin var olmasının istendiği bir yöntemde kısıtlayıcı bir özellik olarak ortaya çıkabilmektedir (Goldie, 1998).

X_1, X_2 bağımsız ve aynı alt-üstel F dağılım fonksiyonuna sahip rastlantı değişkenleri ise; $x \rightarrow \infty$ iken;

$$P(X_1 + X_2 > x) \sim P(\max X_1, X_2 > x) \quad (2.22)$$

olmaktadır.

$$P(\max X_1, X_2 > x) = 1 - F^2(x) = (1 - F(x))(1 + F(x)) \text{ olarak verilmekte olup}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{*2}(x)}{1 - F(x)} = 2 \text{ eşitliğinden;}$$

$$1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{*2}(x)}{2(1 - F(x))} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{*2}(x)}{(1 + F(x))(1 - F(x))} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{*2}(x)}{1 - F^2(x)} \text{ eşitliği elde edilmektedir.}$$

Burada; $2(1 - F(x)) = (1 + F(x))(1 - F(x))$ olarak alınmıştır. Bunun nedeni $F(x)$ fonksiyonun $x \rightarrow \infty$ iken 1'e eşit olmasıdır.

$$\frac{1 - F^{*2}(x)}{1 - F^2(x)} \text{ ifadesi } \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F^2}(x)} \text{ 'e eşit olduğundan ;}$$

$$\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F^2}(x)} = 1 + \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) \quad (2.23)$$

eşitliği elde edilmektedir.

$$\overline{F^{*2}}(x) = \overline{F}(x) + \int_0^x \overline{F}(x-y) dF(y) \text{ olmak üzere (2.23) eşitliği de incelenirse;}$$

$$\overline{F}(x-x') = \int_0^x \overline{F}(x-y) dF(y) \text{ ve}$$

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} \geq 2 \quad (2.24)$$

olduğu görülmektedir (Rolski et al., 1999).

Eşitlik (2.23) alt-üstel dağılımların iki yararlı özelliğini ortaya çıkarmaktadır.

Alt-üstel dağılımın birinci yararlı özelliği;

Eğer F dağılımı alt-üstel dağılım yapısına uyuyorsa, yani $F \in \mathcal{S}$ ise; $x' > 0$

$$\text{değerleri için; } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-x')}{\overline{F}(x)} = 1 \quad (2.25)$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) = 1 \text{ olmaktadır.} \quad (2.26)$$

Alt-üstel dağılımın ikinci yararlı özelliği ise;

F dağılımının alt-üstel dağılıma uyduğu varsayımı altında ($F \in S$), $[0, \infty]$ aralığındaki c değerleri için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}'(x)}{\overline{F}(x)} = c \quad (2.27)$$

eşitliğinin sağlanacak olmasıdır.

2.2.2. Alt-üstellik sınıfı için kriterler

Birçok durumda, verilen bir dağılımın alt-üstel dağılım sınıfı içerisinde yer aldığıın ispatlanması çok kolay olmamaktadır. Risk teorisindeki uygulamalar için dağılımın kendisinden çok, bu dağılımının bütünleşik kuyruk dağılımının (integrated tail distribution) alt üstelliğe uyuyor olmasına ihtiyaç duyulmaktadır.

2.2.2.1. Bütünleşik kuyruk dağılımı

Sonlu beklenen değere sahip ($\mu > 0$) negatif olmayan rastlantı değişkeninin dağılım fonksiyonu F olmak üzere, bütünleşik kuyruk dağılım (integrated tail distribution), F_I aşağıdaki gibi açıklanmaktadır:

$$F_I(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \leq 0 \\ \frac{1}{\mu} \int_0^x \overline{F}(y) dy & \text{eğer } x > 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

2.2.3. Alt-üstel dağılım sınıfları

Tanımlardan da açıkça görülmektedir ki, alt-üstel dağılım fonksiyonlarının ya da bu dağılım fonksiyonlarından bulunan bütünleşik kuyruk dağılım fonksiyonlarının karakteristiği kuyruk yapısına bağlı olarak basit ifadelerle açıklanamamaktadır.

Tüm alt-üstel dağılım fonksiyonlarının $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} = 1$ eşitliğini sağlamaları gerekmektedir. Bu koşulu sağlayan dağılım sınıfları alt-üstellik için muhtemel adayları oluşturacaklardır.

Bilinen alt-üstel dağılım sınıfları; uzun kuyruklu dağılımlar, baskın değişen kuyruklu dağılımlar ve düzenli değişen kuyruklu dağılımlardır.

2.2.3.1. Uzun kuyruklu dağılımlar

$x \rightarrow \infty$ ' iken $e^{\epsilon x} \bar{F}(x) \rightarrow \infty$ özelliğinin sağlanması, kalın kuyruklu dağılımların daha geniş alt sınıflarından uzun kuyruklu (long-tailed) dağılım sınıfı için de geçerli olmaktadır.

F , $(0, \infty)$ aralığında tanımlı ve $x > 0$ değerleri için $F(x) < 1$ olan bir dağılım fonksiyonu olmak üzere $y \geq 0$ değerleri için bu F dağılımı;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(X > x+y | X > x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} = 1 \text{ eşitliğini sağlıyor ise } F \in L \text{ olacaktır.}$$

Bu eşitliğin pay ve paydasındaki dağılımlar $a(x) \sim b(x)$ fonksiyonları şeklinde gösterildiğinde; $x \rightarrow \infty$ 'a giderken $a(x)/b(x) \rightarrow 1$ olacağı görülecektir. Bu durum tüm $y \geq 0$ değerleri için

$$\bar{F}(x+y) \sim \bar{F}(x) \text{ şeklinde kullanılmaktadır.} \quad (2.29)$$

Çeşitli örnekler göstermiştir ki, L sınıfına dahil (uzun kuyruklu dağılım yapısında) olmasına rağmen S sınıfında bulunmayan (alt-üstel olmayan) dağılımlar da bulunmaktadır.

2.2.3.2. Baskın değişen kuyruklu dağılımlar

F dağılımı, $0 < t < 1$ aralığındaki t değeri için;

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(tx)}{\bar{F}(x)} < \infty \quad (2.30)$$

özelliğine sahip ise bu dağılım baskın değişen kuyruklu dağılım (dominatedly-varying tailed) olarak tanımlanabilmektedir. Baskın değişen kuyruklu dağılım sınıfı \mathcal{D} ile gösterilmektedir.

2.2.3.3. Düzenli değişen kuyruklu dağılımlar

Alt-üstel dağılımların önemli alt sınıflarından biri de düzenli değişen kuyruk (regularly-varying tailed) yapısına sahip dağılımlardır. Düzenli değişen kuyruklu dağılımlar $\mathcal{R}_{-\alpha}$ ile gösterilmektedir. Bir dağılımın bu alt sınıfta yer alması için gerekli koşullar şu şekilde verilmiştir.

Koşul 1:

F dağılımı $\alpha \geq 0$ ve $t > 0$ değerleri için düzenli değişen kuyruklu dağılım sınıfı içerisinde yer alıyor ($F \in \mathcal{R}_{-\alpha}$) ise;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(tx)}{\bar{F}(x)} = t^{-\alpha} \quad (2.31)$$

koşulunu sağlamalıdır.

Koşul 2:

Pozitif ölçülebilir fonksiyon f ile gösterilmek üzere $\alpha \in \mathbb{R}$ olması durumunda, $f \in \mathcal{R}_{(\alpha)}$ olması için; $\forall t > 0$ olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(x)} = t^{\alpha} \quad (2.32)$$

eşitliğinin sağlanması gerekmektedir.

Koşul 3:

Düzenli değişen kuyruklu dağılımlar, uzun kuyruklu dağılımlara bağlı olarak da ilişkilendirilebilmektedir. $l(x)$; yavaş değişen fonksiyon olmak üzere, $x > 0$ ve $l \in \mathcal{R}_{(0)}$ olmak üzere $\alpha \geq 0$ değerleri için $\bar{F} \in \mathcal{R}_{(-\alpha)}$ olduğu takdirde;

$$\bar{F}(x) = x^{-\alpha} l(x) \quad (2.33)$$

olacaktır.

Bu eşitlikteki $\alpha = 0$ indeksli düzenli değişen kuyruklu dağılımlar için $\frac{l(tx)}{l(x)} \rightarrow t$

durumu sağlanmalıdır.

Düzenli değişen kuyruklu dağılıma örnek olarak bünyesinde $l(x) = c \ln(x)$ veya $l(x) = c \ln(\ln(x))$ şeklindeki dönüşüm fonksiyonları ya da bir sabite yakınsayan $l(x)$ fonksiyonunun yer alması durumundaki Pareto dağılımı örnek olarak verilebilir. Literatürde düzenli değişen fonksiyonlar ile ilgili Bingham, Goldie ve Teugels (1989) çalışması bulunmaktadır (Sigman, 1999).

2.2.4. Düzenli değişim ve alt-üstellik

Asimptotik tahminler hem sigorta matematiğinde hem de matematiksel finasta yer alan durumlardandır. Bu tahminlerin yapılmasında Laplace, Fourier, Mellin gibi birçok dönüşüm önemli rol oynamaktadır. Bu durum klasik Abel-Tauber teorisine de olanak sağlamıştır. Düzenli değişim teorisi ve alt-üstelliğin birlikte olduğu durumlar üzerine yapılan birçok çalışma Bingham et al., (1987) çalışmasına dayanmaktadır.

2.2.4.1. Karamata teoremine göre düzenli değişim

$(0, \infty)$ aralığında Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olan L 'nin, yavaş değişen (slowly varying) bir fonksiyon olması için $(L \in R_0)$;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1 \quad t > 0 \quad (2.34)$$

eşitliği sağlanmalıdır.

Yavaş değişen fonksiyonlara örnek olarak; pozitif bir sabite eşit fonksiyonlar, logaritmalar ve tekrarlamalı logaritmalar verilebilir.

$(0, \infty)$ aralığında Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olan h 'nin, $\alpha \in R$ dizininde düzenli değişen bir fonksiyon olması için $(h \in R_\alpha)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = t^\alpha \quad t > 0 \quad (2.35)$$

eşitliği sağlanmalıdır.

Düzenli değişen fonksiyon yapısı değişik yollarla açıklanabilmektedir. Bu tanımlardan en önemli olanı bu koşuldaki limitin var olması ve sonucun pozitif

olmasıdır. Bu durum, bölümün t^α formuna sahip bir fonksiyon olmasından da kaynaklanmaktadır. Gerçekte; düzenli değişen fonksiyonun $t > 0$ değerleri için limitinin var olduğunu ve $\chi(t)$ 'e eşit olduğunu varsayarsak, $\chi(st) = \chi(s) \chi(t)$ olmak üzere $\alpha \in R$ değerleri için $\chi(t) = t^\alpha$ şeklinde olacaktır.

Tüm gerçek α değerleri için $x^\alpha, x^\alpha \ln(1+x), (x \ln(1+x))^\alpha, x^\alpha \ln(\ln(e+x))$ şeklindeki fonksiyonlar α sırasına sahip ∞ 'a doğru düzenli değişen fonksiyon örnekleri olarak verilebilir.

2.2.4.2. Düzenli değişen fonksiyonlar için tekdüze yakınsaklık teoremi

$\alpha > 0$ ve $x > 0$ olması durumunda ve h fonksiyonu $(0, x]$ aralığında sınırlı fonksiyon olmak üzere $h \in R_\alpha$ ise;

$0 < a < b < \infty$ aralığı için;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = t^\alpha \quad (2.36)$$

eşitliği sağlanmaktadır.

Bu eşitlikte;

$\alpha = 0$ ise $t, [a, b]$ aralığında tekdüze dağılmaktadır. $\alpha > 0$ ise $t, (0, b]$ aralığında tekdüze dağılmaktadır. $\alpha < 0$ ise $t, [\alpha, \infty)$ aralığında tekdüze dağılmaktadır.

2.2.4.3. Düzenli değişen fonksiyonlar için gösterim teoremi

$\alpha \in R$ değerleri için $h \in R_\alpha$ ise; $z > 0, c$ ve δ $x \rightarrow \infty$ iken $c(x) \rightarrow c_0 \in (0, \infty)$

ve $\delta(x) \rightarrow \alpha$ olacak şekilde ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere $x \geq z$ değerleri için;

$$h(x) = c(x) \exp \left\{ \int_z^\infty \frac{\delta(u)}{u} du \right\} \quad (2.37)$$

şeklinde yazılabilmektedir.

$h \in R_\alpha$ olmak üzere $\alpha \neq 0$ değerleri için $x \rightarrow \infty$ iken ;

$$h(x) = \begin{cases} \infty & \text{eğer } \alpha > 0 \\ 0 & \text{eğer } \alpha < 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

olmaktadır.

2.2.4.4. Karamata teoremi

Karamata teoremine göre; bir düzenli değişen fonksiyonun integrali yine bir düzenli değişim fonksiyonunu verecektir. $L \in R_0$ olan ve $x_0 \geq 0$ değerleri için $[x_0, \infty)$ aralığında bölgesel sınırlı olan bir dağılım $x \rightarrow \infty$ iken;

$\alpha > -1$ değerleri için

$$\int_{x_0}^x t^\alpha L(t) dt \sim (\alpha + 1)^{-1} x^{\alpha+1} L(x), \quad (2.39)$$

$$\alpha < -1 \text{ değerleri için } \int_x^\infty t^\alpha L(t) dt \sim -(\alpha + 1)^{-1} x^{\alpha+1} L(x) \quad (2.40)$$

$$\alpha = -1 \text{ değeri için ise; } \frac{1}{L(x)} \int_{x_0}^x \frac{L(tx)}{t} dt \rightarrow \infty \quad (2.41)$$

ve

$$\int_{x_0}^x \frac{L(t)}{t} dt \in R_0 \text{ olmaktadır.} \quad (2.42)$$

Eğer $\int_{x_0}^\infty \frac{L(t)}{t} dt < \infty$ ise;

$$\frac{1}{L(x)} \int_x^\infty \frac{L(t)}{t} dt \rightarrow \infty \quad (2.43)$$

ve

$$\int_x^\infty \left(\frac{L(t)}{t}\right) dt \in R_0 \text{ olmaktadır.} \quad (2.44)$$

Karamata'nın teoremi alternatif olarak şu şekilde de formüle edilebilmektedir. $\alpha \in R$ olmak üzere $h \in R_\alpha$ olan ve $x_0 \geq 0$ değerleri için $[x_0, \infty)$ aralığında bölgesel sınırlı olmak üzere;

$\alpha > -1$ değerleri için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{x_0}^x h(t) dt}{xh(x)} = \frac{1}{\alpha + 1}, \quad (2.45)$$

$\alpha < -1$ değerleri için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_x^\infty h(t) dt}{xh(x)} = -\frac{1}{\alpha + 1} \quad (2.46)$$

olmaktadır.

Bu eşitlik $\alpha \neq -1$ koşuluyla, $x_0 \geq 0$ değerleri için $[x_0, \infty)$ aralığında bölgesel sınırlandırılmış h pozitif fonksiyonu için sağlanıyorsa $h \in R_\alpha$ 'dir (Embrechts et al., 2001).

2.2.5. S^* Sınıfı

$F \in S$ ve $F_1 \in S$ için gerekli koşulların belirlenmesinde karşılaşılan problemlerin biraraya getirilmesi için Klüppelberg (Klüppelberg, 1988) tarafından bu alt sınıf önerilmiştir.

F , tüm $x > 0$ değerleri için $F(x) < 1$ ve $x \geq 0$ değerleri için de $\bar{F}(x) > 0$ olacak şekilde $(0, \infty)$ aralığında tanımlı bir dağılım fonksiyonu olmak üzere, F dağılımı sonlu ortalamaya (μ) sahip ve

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\bar{F}(x-y)\bar{F}(y)}{F(x)} dy = 2\mu \quad (2.47)$$

eşitliğini sağlıyor ise $F \in S^*$ olacaktır (Rolski et al., 1999).

Sonlu ortalamanın $1/\mu$ olması durumunda $\lim_{x \rightarrow \infty} \mu \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \overline{F}(y) dy = 2$ eşitliğinin sağlandığı da görülmektedir (Sigman, 1999).

Bu alt sınıfının en önemli özelliği; bu sınıfa dahil olan bir dağılımın hem kendisinin hem de bütünleşik kuyruk dağılımının alt-üstel dağılıma uyuyor olmasıdır (Eğer $F \in S^*$ ise $F \in S$ ve $F_I \in S$ olacaktır).

S^* sınıfı, kuyruk eş değeri özelliğini sağlamamaktadır.

Ayrıca S^* sınıfı sonlu ortalamaya sahip olduğundan Pareto, log-normal, Weibull gibi düzenli değişen kuyruklu dağılım fonksiyonlarının yanında daha birçok dağılımı da içermektedir (Sigman, 1999).

$F \in S$ ve $F_I \in S$ olması için gerekli koşullar birleştirilerek $F \in S^*$ olması için gerekli koşullara dönüştürülmüştür.

F dağılımının tehlike fonksiyonu $\mu(x)$, tehlike hızı fonksiyonu $m(x)$ ile gösterilmek üzere $F \in S^*$ olması için gerekli koşullar şu şekilde sıralanmıştır:

a) Eğer $\limsup_{x \rightarrow \infty} x m(x) < \infty$ ise $F \in S^*$ 'dir.

b) $\delta \in (0,1)$ ve $\nu \geq 1$ olacak şekilde tüm $x \geq \nu, y \geq 1$ değerleri için $\mu(x, y) \leq y^\delta \mu(x)$ ve $\liminf_{x \rightarrow \infty} x m(x) \geq (2 - 2^\delta)^{-1}$ ise $F \in S^*$ 'dir.

c) $m(x)$ fonksiyonu, 0'a doğru azalan bir fonksiyon ise; $F \in S^*$ ve

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{yq(x)} \overline{F}(y) dy = \mu \quad \text{olacaktır.}$$

$F \in S^*$ olması için daha genel koşulları şunlardır;

$\lim_{x \rightarrow \infty} m(x) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} x m(x) = \infty$ olduğu varsayılmak üzere; yukarıdaki koşullara ek

olarak bir dağılım aşağıdaki koşullardan birini bile sağlayabilirse S^* sınıfına dahil olacaktır ($F \in S^*$):

$$\text{a) } \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xm(x)}{\mu(x)} < 1,$$

$$\text{b) } \delta \in (0,1) \text{ olmak üzere } m(x) \in R_{(-\delta)},$$

$$\text{c) } \delta \in (0,1) \text{ ve } m(x) \text{ tehlike hızı azalan bir fonksiyon olmak üzere } \mu(x) \in R_{(\delta)} \text{ ise;}$$

$$\text{d) } m(x) \in R_{(0)} \text{ ve } m(x) \text{ tehlike hızı azalan bir fonksiyon olmak üzere } \mu(x) = -xm(x) \in R_{(1)} \text{ ise } F \in S^* \text{ 'dir (Klüppelberg, 1988-1989).}$$

2.3. Kalın Kuyruklu Dağılım Sınıfları Arasındaki İlişkiler

Tüm dağılım sınıflarının incelenmesinden sonra kalın kuyruklu dağılım sınıfı ve alt sınıfları için şu şekilde bir sınıflandırmanın yapılabilmesi sağlanabilecektir.

\mathcal{K} :Kalın Kuyruklu dağılımları,

\mathcal{L} :Uzun kuyruklu dağılımları,

\mathcal{S} :Alt-üstel dağılımları,

\mathcal{R} :Düzenli değişen dağılımları,

\mathcal{D} :Baskın değişen dağılımları,

göstermek üzere $(0, \infty)$ aralığında tanımlı F dağılımında;

$$\mathcal{K} = \left\{ \hat{f}(-\varepsilon) = \int_0^{\infty} e^{\varepsilon x} dF(x) = \infty \quad \varepsilon > 0 \text{ için} \right\}$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} = 1 \quad y > 0 \text{ için} \right\},$$

$$\mathcal{R} = \bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha} \quad \alpha \geq 0 \text{ için},$$

$$\mathcal{D} = \left\{ \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x/2)}{\bar{F}(x)} < \infty \right\} \quad \text{özelliklerine sahiptir. Bu sınıflar arasındaki özellikler}$$

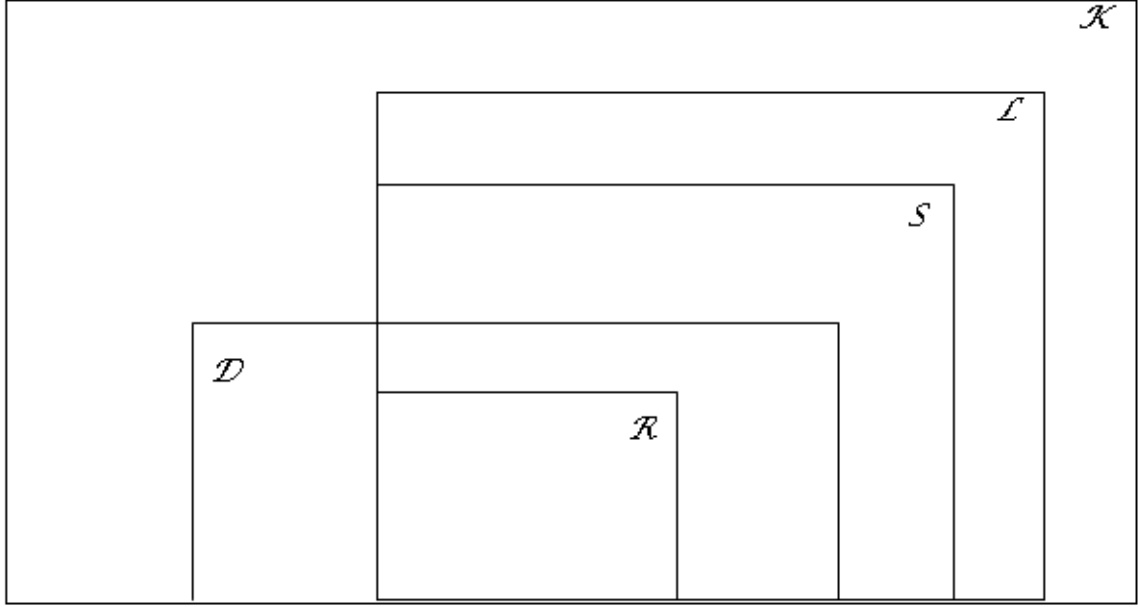
şu şekildedir;

$$1. \mathcal{R} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{K} \quad \text{ve} \quad \mathcal{R} \subset \mathcal{D}$$

2. $\mathcal{D} \cap \mathcal{L} \subset \mathcal{S}$

3. $\mathcal{D} \not\subset \mathcal{S}$ ve $\mathcal{S} \not\subset \mathcal{D}$.

Embrechts ve Omey (1984) kalın kuyruklu dağılım sınıflarının arasındaki ilişkileri detaylı bir şekilde incelemiş, ve kalın kuyruklu dağılımların alt sınıfları ile olan ilişkisini Şekil 2.1'deki gibi göstermişlerdir (Embrechts et al., 2001).



Şekil 2.1 Kalın kuyruklu dağılımlar ve alt sınıflarının ilişkisi

2.4. Kalın Kuyruklu Dağılımların Belirlenmesi

2.4.1. Kuyruk ağırlığı

Kuyruk ağırlığı bir dağılımın kuyruk yapısı hakkında, özellikle de sağ bölgesinin kalın olup olmadığı hakkında bilgi veren bir kriterdir. Kuyruk ağırlığı ilişkili ya da mutlak durum olmak üzere iki türden oluşmaktadır. İlişkili durumda, incelenen dağılımlar arasında karşılaştırma yapılarak bir dağılımın, diğer dağılımdan daha kalın kuyruk yapısına sahip olup olmadığı araştırılmaktadır. Mutlak durumda ise, kalın kuyruk sınıfının bazı temel özelliklerine sahip olan dağılımların incelenmesi yapılmaktadır (Klugman et al., 2008).

Modele karar verilmesi aşamasında, düşünülen dağılımın kuyruk ağırlığının incelenmesi daha doğru seçimler yapılması açısından önem taşımaktadır. Örneğin; yangın sigorta verilerinin Pareto dağılımına yakın bir model ile kurulmak istenmesindeki amaç; bu dağılımın kalın kuyruk yapısına sahip bir dağılımla kurulması gerektiğinin düşünülüyor olmasıdır.

2.4.1.1. Momentlerin bulunması

Bir dağılımın kalın kuyruklu dağılım yapısına uyup uymadığı, momentlerinin var olup olmadığına bağlı olarak açıklanabilmektedir.

Birçok sigorta ödeme değişkeninde olduğu gibi sadece pozitif değerlere bağlı rastlantı değişkenleri için ortalamaya göre k'inci moment; kesikli durum için

$\sum x^k f(x)$, sürekli durum için $\int_0^{\infty} (x^k f(x)) d_x$ şeklinde hesaplanmaktadır.

Sürekli durumda, ortalamaya göre k'inci moment her zaman varolmayabilir. Bunun nedeni, bu integral sonucunun yoğunluk fonksiyonuna ve k değerine bağlı olmasıdır. Eğer yoğunluk fonksiyonu çok büyük bir değere sahipse; bu fonksiyonun x^k değeri ile çarpımı da daha büyük bir sonuç oluşturacak ve integral sonucunun anlamlı bir değer çıkmasını zorlaştıracaktır. Kalın kuyruklu dağılıma göre daha az büyük hasara sahip dağılımlar için integral sonucu elde edilebileceğinden tüm pozitif momentlerin varoluşu bir ince sağ kuyruğu işaret edecektir. Pozitif momentlerin mutlak bir değeri göstermemesi ya da bulunamaması durumunda ise incelenen dağılımın kalın kuyruklu bir dağılım olacağı düşünülecektir.

Momentlerin bulunmasına bağlı olarak ince ya da kalın kuyruk yapısına sahip olma durumu ince ve kalın kuyruklu dağılımlar arasında yapılabilecek karşılaştırma ile daha net bir şekilde açıklanabilir.

İnce bir kuyruk yapısına sahip olduğu bilinen gamma dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} & x > 0 \text{ ise,} \\ 0 & \text{ö.d} \end{cases} \quad (2.48)$$

olmak üzere; ortalamaya göre k'nci momenti;

$\mu_k' = \int_0^{\infty} x^k \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} dx$ şeklinde hesaplanmaktadır. $y = \frac{x}{\theta}$ dönüşümü yapılarak

ortalamaya göre k'nci moment; $k > 0$ değerleri için

$$\mu_k' = \int_0^{\infty} (y\theta)^k \frac{(y\theta)^{\alpha-1} e^{-y}}{r(\alpha)\theta^\alpha} \theta dy = \int_0^{\infty} \frac{\theta^k y^k y^{\alpha-1} e^{-y}}{r(\alpha)} dy$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\theta^k}{r(\alpha)} y^{k+\alpha-1} e^{-y} dy = \frac{\theta^k}{r(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{k+\alpha-1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{\theta^k}{r(\alpha)} r(\alpha+k) < \infty \quad \text{şeklinde bulunacaktır (Klugman et al.,2008).}$$

Ortalamaya göre k'nci momentinin var olması nedeniyle gamma dağılımının ince kuyruklu bir dağılım yapısına sahip olduğu görülmüş olacaktır.

Gamma dağılımına göre daha kalın kuyruk yapısına sahip olduğu bilinen Pareto dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}} & x > 0 \\ 0 & \text{ö.d} \end{cases} \quad (2.49)$$

olmak üzere; ortalamaya göre k'nci momentini;

$$\mu_k' = \int_0^{\infty} x^k \frac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}} dx$$

şeklinde hesaplanmaktadır.

Bu integral içerisinde $y = x + \theta$ dönüşümü yapılarak ortalamaya göre k'nci moment;

$$= \int_0^{\infty} (y-\theta)^k \frac{\alpha\theta^\alpha}{y^{\alpha+1}} dy = \alpha\theta^\alpha \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} y^{j-\alpha-1} (-\theta)^{k-j} dy$$

olarak bulunmaktadır.

Bu eşitlik; bu integral sonucunun, ancak ve ancak y 'nin toplam üstlerinin -1 değerinden küçük olması durumunda var olabileceğini göstermektedir.

Pozitif momentlerinin bulunamaması nedeniyle bu dağılımın kalın kuyruklu bir dağılım olduğu söylenebilmektedir.

2.4.1.2. Limit oranları

Bir dağılımın, herhangi başka bir dağılıma göre daha kalın kuyruk yapısına sahip olup olmadığına, bu dağılımların yaşam fonksiyonlarının oranına bakılarak da karar verilebilir. Yaşam fonksiyonları oranının sonsuzluğa yakınsamış olup olmaması önem taşımaktadır. Bu durum yoğunluk fonksiyonları oranının incelenmesine de denk olmaktadır.

Herhangi ince kuyruklu bir dağılım ile kalın kuyruklu bir dağılım arasında yapılan incelemelerde bu durum açıkça görülebilecektir.

Gamma dağılımının parametreleri olan (α, θ) 'nin yerine τ ve λ gösterimleri kullanılarak Pareto ve gamma dağılımları arasında kuyruk kalınlığı yönünden inceleme yapılabilmektedir.

Pareto ve gamma dağılımlarının olasılık fonksiyonlarının oranlanmasıyla;

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{Pareto}(x)}{f_{Gamma}(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\alpha \theta^\alpha) / (x + \theta)^{\alpha+1}}{(x^{\tau-1} e^{-\frac{x}{\lambda}}) / (r(\tau) \lambda^\tau)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha \theta^\alpha}{(x + \theta)^{\alpha+1}} \frac{r(\tau) \lambda^\tau}{x^{\tau-1} e^{-\frac{x}{\lambda}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x}{\lambda}}}{(x + \theta)^{\alpha+1} x^{\tau-1}} \alpha \theta^\alpha \lambda^\tau \text{ bulunmaktadır (Klugman et al., 2008).} \end{aligned}$$

L'Hopital kuralının uygulaması ya da üstel fonksiyon özelliklerinin kullanılmasıyla, payın daha hızlı bir şekilde sonsuza gittiği görülenilmektedir. Bu durumda Pareto dağılımının gamma dağılımına göre daha kalın kuyruk yapısına sahip olduğu anlaşılmaktadır.

2.4.1.3. Tehlike hızı fonksiyonu

Tehlike hızı fonksiyonu da dağılımın kuyruk yapısı hakkında bilgi vermektedir. Tehlike hızı fonksiyonu azalan bir fonksiyon ise, bu durum dağılımın kalın kuyruk yapısına sahip olduğunu göstermektedir. Diğer taraftan, tehlike hızı fonksiyonu artan bir fonksiyon ise, daha ince bir kuyruk yapısına sahip bir dağılım beklenecektir.

Pareto ve gamma dağılımının tehlike hızı fonksiyonlarının karşılaştırması yapılarak da bu dağılımların kuyruk yapıları hakkında bilgi sahibi olunabilmektedir.

Pareto dağılımının tehlike hızı fonksiyonu;

$$m(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} = \frac{\alpha \theta^\alpha (x+\theta)^{-\alpha-1}}{\theta^\alpha (x+\theta)^{-\alpha}} = \frac{\alpha}{x+\theta} \text{ şeklindedir.} \quad (2.50)$$

Bu fonksiyonun azalan bir fonksiyon olduğu görülecektir. Böylece bu dağılımın kalın kuyruklu bir dağılım olduğu belirlenmiş olacaktır.

Gamma dağılımının tehlike hızının hesaplanmasında ise daha dikkat gerektiren bir durum söz konusu olmaktadır. Çünkü; gamma dağılımının $\bar{F}(x)$ kuyruk dağılımı için net bir form oluşturulamamaktadır. Bu nedenle tehlike hızının tersinden yola çıkılarak sonuç bulunmaya çalışılmıştır.

$$\frac{1}{m(x)} = \frac{\int_x^\infty f(t) dt}{f(x)} = \frac{\int_0^\infty f(x+y) dy}{f(x)} \quad (2.51)$$

Eğer ki; $\frac{f(x+y)}{f(x)}$ değeri sabit y değerine bağlı olarak artan bir fonksiyon ise;

$\frac{1}{m(x)}$ ifadesi artan bir fonksiyon olacak ve $m(x)$ tehlike hızı azalan bir fonksiyon

olacaktır. Böylece;

$$\frac{f(x+y)}{f(x)} = \frac{(x+y)^{\alpha-1} e^{-(x+y)/\theta}}{x^{\alpha-1} e^{-x/\theta}} = \left(1 + \frac{y}{x}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{y}{\theta}} \text{ eşitliği } \alpha < 1 \text{ değerleri için artan, } \alpha > 1$$

değerleri için azalan bir fonksiyon olacaktır.

Bu ölçülendirmeyi kullanarak, gamma dağılımının bazı parametre değerleri için kalın bir kuyruğa sahip olduğu ($\alpha < 1$); ancak bazı parametre değerleri için ise ince bir kuyruk yapısına sahip olduğu ($\alpha > 1$) sonucu ortaya çıkacaktır.

Gamma dağılımının parametresi $\alpha = 1$ olduğu takdirde; üstel dağılıma dönüşmekte ve sabit tehlike hızına sahip olmaktadır (Klugman et al., 2008).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} m(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{F(x)} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{d}{dx} \ln f(x) \right] \\ &= -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} \left[(\alpha - 1) \ln x - \frac{x}{\theta} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{\alpha - 1}{x} \right) = \frac{1}{\theta} \end{aligned} \quad (2.52)$$

2.4.1.4. Ortalama arda kalan yaşam süresi

Dağılımın kuyruk yapısı hakkında bilgi veren bir diğer kriter de ortalama arda kalan yaşam süresidir. Eğer bir dağılımın ortalama arda kalan yaşam süresi, d gibi bir değer eklenmesiyle artış gösteriyor ise, büyük değerlerin daha da büyümesi beklenmektedir. Ortalama arda kalan yaşam süresi fonksiyonunun azaldığı ya da az bir oranla artış gösterdiği durumlarda ise bir dağılımın diğer dağılımdan daha kalın kuyruğa sahip olması durumu açıklanabilmektedir.

Ortalama arda kalan yaşam süresi fonksiyonu ve tehlike hızı fonksiyonu birçok yönden ilişkili olmaktadır. Öncelikle;

$$\frac{\bar{F}(y+d)}{\bar{F}(d)} = \frac{\exp \left[-\int_0^{y+d} m(x) dx \right]}{\exp \left[-\int_0^d m(x) dx \right]} = \exp \left[-\int_d^{y+d} m(x) dx \right] = \exp \left[-\int_d^y m(d+t) dt \right] \quad (2.53)$$

biçimindedir.

Bu nedenle sabit y değeri için tehlike hızı azalıyor ise, $\int_0^y m(d+t) dt$, d 'nin azalan bir fonksiyonu olacak ve buradan hareketle; ters durumu için $\frac{\bar{F}(y+d)}{\bar{F}(d)}$ d 'nin artan bir fonksiyonu olacaktır. Ortalama arda kalan yaşam süresi fonksiyonu şu şekilde de açıklanabilmektedir:

$$e(d) = \frac{\int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx}{\bar{F}(d)} = \int_0^{\infty} \frac{\bar{F}(y+d)}{\bar{F}(d)} dy \quad (2.54)$$

Sonuç olarak, eğer tehlike hızı azalan bir fonksiyon ise, ortalama arda kalan yaşam süresi fonksiyonu $e(d)$, d değerine göre artan bir fonksiyon olacaktır.

Bunun nedeni; $\frac{\bar{F}(y+d)}{\bar{F}(d)}$ 'nin sabit y değerleri için artan bir fonksiyon olmasıdır.

Benzer şekilde; eğer tehlike hızı artan bir fonksiyon ise, ortalama arda kalan yaşam süresi fonksiyonu azalan bir fonksiyon olacaktır.

Ortalama arda kalan yaşam süresi ile tehlike hızı fonksiyonu arasında başka bir ilişki daha bulunmaktadır. $d \rightarrow \infty$ iken, $\bar{F}(d)$ ve $\int_d^{\infty} \bar{F}(x) dx$ değerleri sıfıra doğru gitmektedir.

Ortalama arda kalan yaşam süresi fonksiyonunun $d \rightarrow \infty$ limit durumu incelenecek olursa, arda kalan yaşam süresi ve dağılımın kuyruk yapısı hakkında bilgi sahibi olunabilecektir:

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow \infty} e(d) &= \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx}{\bar{F}(d)} \\ &= \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{-\bar{F}(d)}{-f(d)} = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{1}{m(d)} \end{aligned}$$

Bu limit ilişkisi daha çok, $\bar{F}(x)$ 'in ($m(x)$ ve $e(d)$ 'nin) karışık yapıda bulunduğu durumlarda kullanılmaktadır.

2.4.1.5. Denge dağılımları

Ortalama arda kalan yaşam süresi ve kuyruk ağırlığı konusunda sürekli zamanlı iflas modelinde büyük önem taşıyan denge dağılımlarından da bilgi edinebilmektedir.

Herhangi bir negatif olmayan, F dağılım fonksiyonuna sahip, $1/\mu$ ortalamalı X rastlantı değişkeninin denge dağılımı F_e ile gösterilmek üzere; $x > 0$ değerleri için;

$$F_e(x) = \mu \int_0^x \bar{F}(y) dy \quad (2.55)$$

şeklinde hesaplanmaktadır.

Denge dağılımının en önemli özelliklerinden biri; F dağılımının ilk momentinin sonsuz olması durumunda F_e değerinin var olmamasıdır.

Denge dağılımının kuyruk dağılımı ise aşağıdaki şekilde gösterilebilmektedir:

$$\bar{F}_e(x) = \mu E(X - x)^+ . \quad (2.56)$$

Bu eşitlikte gösterilen $a^+, a^+ \stackrel{def}{=} \max(0, a)$ ile ifade edilmektedir.

Denge dağılımı bazı durumlarda F 'in bütünlük kuyruk dağılımı olarak da adlandırılmaktadır.

$$F_e(x) = \mu \int_0^x \bar{F}(y) dy \text{ eşitliğinin diferansiyellenmesiyle; } F_e \text{'nin var olduğu ve } (0, \infty)$$

aralığında $f_e(x) \stackrel{def}{=} \mu \bar{F}(x)$ 'a eşit olduğunu bulunulabilir.

F dağılımı ince kuyruklu bir dağılım iken, F_e dağılımı da ince kuyruklu bir dağılım olacaktır. Ancak bu durum kalın kuyruklu durum için geçerli değildir. $F_e \in \mathcal{K}$ olmasına rağmen, $F \notin \mathcal{K}$ olan örnekler mevcuttur.

Kalın kuyruklu dağılımlar için denge dağılımının özellikleri şu şekilde gösterilmektedir:

Özellik 1:

Eğer $F \in \mathcal{K}$ ise; $F_e \in \mathcal{K}$ olacaktır. Bunun yanı sıra; $\overline{F_e}$, \overline{F} dağılımından daha kalın kuyruklu bir dağılıma sahip olacak ve

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F_e}(x)} = 0 \quad (2.57)$$

eşitliği sağlanacaktır.

Özellik 2:

Negatif olmayan bir rastlantı değişkeninin, μ^{-1} sonlu momentli, F dağılım fonksiyonunda $x \geq 0$ değerleri için;

$$\overline{F}(x) \leq \mu^{-1}(\overline{F_e}(x-1) - \overline{F_e}(x)) \text{ eşitsizliği sağlanmaktadır.}$$

Eğer F_e dağılımı alt-üstel dağılım sınıfı içerisinde yer alıyor ise; F 'nin kuyruğunun, F_e 'nin kuyruğundan daha ince kuyruk yapısına sahip olduğu bulunabilir. Bu durumun ispatı, kuyruk eşdeğerliği durumunun özelliğinden yararlanarak $F_e \in \mathcal{S}$ olması durumunda $F * F_e \in \mathcal{S}$ ve $\overline{F * F_e}(x) \sim \overline{F_e}(x)$ olmasından yararlanarak yapılabilmektedir.

Denge dağılımı ile \mathcal{S}^* sınıfı arasındaki en önemli özellik; $F \in \mathcal{S}^*$ olması durumunda, F ve F_e dağılımlarının alt-üstel dağılım sınıfı içerisinde yer alacak olmasıdır. Böylece $F \in \mathcal{S}^*$ olması durumunda $\overline{F * F_e}(x) \sim \overline{F_e}(x)$ eşitliği de sağlanacaktır (Sigman,1999).

2.5. Kalın Kuyruklu Dağılımların Gözlemlenmesi

2.5.1. Büyük hasarlar

Tehlikeli hasar büyüklüğüne sahip dağılımların bulunarak saptanması aktüeryal incelemelerdeki en önemli sorunlardan biridir. Genel olarak bu tür hasarlar büyük hasarlar olarak tanımlanmaktadır. Bu hasarların incelenmesinde matematiksel

formüllerin her zaman yeterli olamaması nedeniyle bazı gösterimlerin geliştirilmesine ihtiyaç duyulmuştur.

X_i , bir portföyde meydana gelen birbirini izleyen hasarları $X_i, 1 \leq i \leq n$ ve S_n , $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ olmak üzere toplam hasar büyüklüğünü göstermektedir.

$X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ 'den sıralı hasar dizisi olmak üzere;

$\min_{1 \leq i \leq n} X_i = X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ şeklinde gösterilebilir.

Büyük hasarların matematiksel açıdan tanımlanması birçok nedene dayandığından, bu tür tanımlamaların istatistiksel olarak ispatı hayli zor olmaktadır.

Büyük hasarlar ile ilgili durumlar şu şekilde özetlenebilmektedir:

- Portföy içerisindeki hasarlardan bu tür büyüklükte bir hasarın ancak uzun yıl aralıklarıyla gerçekleşebildiği biliniyor ya da tahmin ediliyorsa bu tür hasarlara büyük hasarlar denilebilmektedir.
- Eğer herhangi bir hasar, toplam hasar büyüklüğünün, p (fair portion) oranı ile çarpımından daha büyükse, bu hasar büyük hasar olarak nitelendirilebilmektedir. Bu durumda eğer $m \geq \min k; X_{(k)} > pS_n$ ise $X_{(m)}$ 'nin büyük hasar olduğu sonucu çıkarılabilmektedir.
- Aktüerler, hasar büyüklüğü dağılımının ortalamasını ve/veya varyansını tahmin edecekleri zaman, güvenilir birer tahmin elde etmek için örnekleme tekniklerinden yararlanırlar. Bu durumun kuramsal olarak açıklaması; hasar büyüklüğü dağılımlarının ortalama ve/veya varyansının kuyruk bölgesinde yoğunlaşıyor olmasına dayanmaktadır. Bu durum için en uygun parametrik dağılımlardan biri α sabiti ile Pareto tipi dağılımdır.
- Toplam hasar büyüklüğü, belirli bir dönem içerisinde gerçekleşen hasarların toplamı olarak verilmektedir ve bu gerçekleşen hasarlar içerisinde büyük hasarların var olmasından dolayı, toplam hasar büyüklüğü de artacaktır. Bu durum matematiksel olarak şu şekilde gösterilebilmektedir:

$$x \rightarrow \infty \text{ iken } P(S_n > x) \sim P(X_{(n)} > x).$$

2.5.2. QQ grafikleri

QQ grafikleri(Quantile Plots), veriler içerisindeki normal ve aykırı değerlerin ayırt edilmesini ve ayrıca korelasyon katsayısı yardımıyla aralarındaki ilişkinin nicelendirilmesini sağlamaktadır. Bu yöntemin temel unsurlarını açıklayabilmek için, öncelikle $x \geq 0$ değerleri için $\bar{G}(x) = \exp(-x)$ şeklinde verilen standart bir G üstel dağılımının incelenmesi gerekmektedir. Öncelikle, düşünülen G dağılımı ile örneklem hasar büyüklüğü dağılımı F 'nin aynı temel forma sahip olup olmadığını araştırılmaktadır.

Artan ve sağdan-süreklili bir $F(x)$ fonksiyonu için; genelleştirilmiş ters fonksiyon $F^{-1}(y) = \inf x : F(x) \geq y$ şeklinde verilmektedir.

F bir dağılım fonksiyonu olmak üzere bu dağılımın nicelik fonksiyonu (quantile function), $Q_F = F^{-1}(y)$ şeklinde gösterilmektedir. Verilen görgül dağılımın genelleştirilmiş ters fonksiyonu yardımıyla, nicelik fonksiyonun görgül dağılım hali oluşturulabilir. Daha genel olarak; $Q_n(y) = Q_{F_n(y)}$, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ sıralı değerleri için

$$Q_n(y) = X_{(k)} = (k-1)n^{-1} < y \leq kn^{-1} \text{ eşitliği elde edilebilir.}$$

G , λ parametresiyle standart üstel bir dağılım olmak üzere, $0 < y < 1$ aralığında nicelik fonksiyonu $Q_G(y) = -\lambda^{-1} \log(1-y)$ olacak şekilde basit bir biçime sahiptir. Eğer örneklem verileri ile standart üstel dağılımdan elde edilenler karşılaştırılmak istenirse; nicelik fonksiyonlarını karşılaştırmak yeterli olacaktır. Bunun için; Q_G ve Q_n fonksiyonlarının dik koordinat sisteminde grafikleri çizilmelidir.

Eğer incelediğimiz veri üstel dağılıma uyuyorsa; λ parametresi ve $Q_G(y) = -\lambda^{-1} \log(1-y)$ şeklinde verilen üstel dağılımın nicelik fonksiyonunun düz çizgi biçiminde olması beklenecektir. λ^{-1} ile verilen eğrinin eğimi ise bilinmeyen bu parametre için olası bir tahmini verecektir. Eğer incelenen veri, üstel dağılımdan daha kalın bir kuyruğa sahip bir dağılıma ait ise; grafik düz bir çizgiden daha hızlı artan bir eğime sahip olacaktır. Eğer ince kuyruk yapısına sahip bir dağılımın QQ grafiği inceleniyor ise daha yavaş artış gösteren bir eğime sahip olacaktır.

Aktüeryal hesaplamalarda hasar büyüklüğü için en çok tercih edilen dağılımlar; log-normal, Pareto ve küçük parametrelili Weibull dağılımlarıdır.

Bu üç durumun QQ grafikleri için ayrı ayrı inceleme yapılacaktır.

Log-normal QQ grafiği

Log-normal dağılımın QQ grafiği, log-normal dağılımın temel özelliği olan $\log(X)$ 'in normal dağılıma uyması durumunda, X rastlantı değişkeninin de log-normal dağılıma uymasına bağlı olarak gerçekleşmektedir. Log-normal dağılımın saçılım grafiği,

$\Phi^{-1}(k/(n+1), \log(X_{(k)}))$ $1 \leq k \leq n$ şeklinde olacaktır. Sigorta branşında log-normal dağılım genellikle araç hasar verilerinin modellenmesinde kullanılmaktadır.

Pareto QQ grafiği

Pareto QQ grafiği, aktüeryal hesaplamalar için çok önemli bir araçtır. Bir X hasarı α ve β parametreleriyle Pareto dağılımına uyuyorsa, $x \geq \beta$ olmak üzere $P(X \leq x) = 1 - (x/\beta)^{-\alpha}$ 'dır. Buna göre; kesilmiş üstel dağılımı tanımlayacak şekilde, nicelik fonksiyonu: $Q(y) = \log \beta - \alpha^{-1} \log(1 - y)$ şeklinde ifade edilebilir.

Pareto nicelik grafiği noktaları, $(-\log(1 - k/(n+1)), \log X_{(k)})$ $1 \leq k \leq n$ değerlerinden oluşmaktadır. Pareto dağılımından gelen bir verinin QQ grafiğinde sabit değeri $\log \beta$ ve eğimi ise α^{-1} olacaktır. Pareto QQ grafiği Pareto tipi dağılımlarda çok kullanışlı olmaktadır. L, ∞ 'da yavaş değişen bir dağılım olmak üzere; $P(u > x) \sim x^{-\alpha} L(x)$ biçimine sahip olan bir dağılımın QQ grafiğinin sağ tarafa doğru doğrusal bir trend gösterdiği gözlenebilecektir. Pareto dağılımı; daha çok aktüeryal hesaplamalarda, diğer dağılımlara göre daha kalın kuyruk yapısına sahip olması beklenen yangın verilerinin modellenmesinde kullanılmaktadır.

Weibull QQ grafiği

Weibull dağılımının kuyruk dağılımı $\bar{F}(x) = \exp(-(x/\beta)^\tau)$, nicelik fonksiyonu ise $0 < y < 1$ değerleri için $Q(y) = (-\beta * (\log(1 - y))^{1/\tau})$ şeklinde olmaktadır. Bu ifadenin bir kez daha logaritmasının alınmasıyla;

$\log Q(y) = (\log \beta)^{-1} + \frac{1}{\alpha} \log(\log(1-y))$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlik Weibull nicelik grafiğini $(\log(-\log(1-k/(n+1))), \log X_{(k)})$ $1 \leq k \leq n$ verecektir;

Weibull modeli varsayımı altında; eğim tahmin parametresi τ^{-1} , sabit terimin tahmin parametresi $(\log \beta)^{-1}$ olan düz bir doğru beklenecektir.

Üstel dağılım, bir portföy içerisindeki büyük hasarlardan ziyade daha küçük hasarların modellenmesi için uygun olacaktır, çok küçük olmayan hasarlar için Weibull dağılımı daha iyi uyum sağlarken, Log-normal ve Pareto dağılımlarının ikisi de, portföydeki büyük hasarları daha iyi yansıtacak şekilde sonuç verecek ve her ikisi de konkav bir eğim gösterecektir (Rolski et al., 1999).

2.5.3. Uç değer istatistikleri

Uç değer teoremi, olasılık ve istatistik teoresinde geniş bir alana sahiptir. Sigorta matematiğinde kullanılan uç değer teorisi, karşılaşılabilecek büyük hasarların sahip oldukları rollerin araştırılması açısından büyük önem taşımaktadır.

X_1, X_2, \dots, X_n bağımsız ve aynı F hasar büyüklüğü dağılımına sahip hasarlar olmak üzere; örneklem içindeki en büyük hasar $X_{(n)} = \max X_1, X_2, \dots, X_n$ şeklinde gösterilmektedir. F dağılımının sınırlı set içerisinde ağırlıklandırılmadığı varsayımı altında, maksimum $X_{(n)}$ değeri $n \rightarrow \infty$ 'iken ∞ 'a yakınsayacaktır (Rolski et al., 1999).

2.6. Kalın Kuyruklu Dağılım Örnekleri

Genel olarak kalın-kuyruklu dağılımlar; tek kuyruklu ve çift kuyruklu olmak üzere iki türde ayrıştırılarak incelenebilmektedir.

Tek kuyruğa sahip olan kalın kuyruklu dağılımlar; Pareto dağılımı, log-normal dağılım, Levy dağılımı, Weibull dağılımı (biçim parametresi 1'den küçük), Burr dağılımı ve log-gamma dağılımlarıdır.

Çift kuyruğa sahip olan kalın kuyruklu dağılımlar; Cauchy dağılımı, normal dağılımın özel bir hali dışındaki kararlı dağılımlar, T dağılımı ve çarpık kademeli log-normal dağılımdır.

Belli başlı kalın kuyruklu dağılımlar Çizelge 2.1’de gösterilmektedir.

Çizelge 2.1 Kalın kuyruklu dağılımlar ve parametreleri

DAĞILIM	F, \bar{F} YA DA f DAĞILIMI	PARAMETRE
LOG-NORMAL	$f(x) = \frac{d}{dx} \Phi\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma x} \varphi\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)$ $F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left[-\frac{\ln x - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left[\frac{\ln x - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right]$ $\bar{F}(x) \sim \frac{\sigma}{\log x \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}$	$\mu \in R$ $\sigma > 0$
PARETO	$f(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{(x+\beta)^{\alpha+1}} \quad \bar{F}(x) = \left(\frac{\beta}{x+\beta}\right)^\alpha$	$\alpha, \beta > 0$
BURR	$\bar{F}(x) = \left(\frac{\beta}{x+\beta^\tau}\right)^\alpha$	$\alpha, \beta, \tau > 0$
LEVY	$f(x; \alpha, \beta) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \frac{e^{-\beta/2(x-\mu)}}{(x-\alpha)^{3/2}}$ $F(x; \alpha, \beta) = \operatorname{erfc}(\sqrt{\beta/2x})$	$\alpha \geq \beta$
WEİBULL	$\bar{F}(x) = \exp(-(x/\beta)^\alpha),$ $f(x) = \frac{\alpha(x/\beta)^\alpha \exp(-(x/\beta)^\alpha)}{x}$	$0 < r < 1$
LOG-GAMMA	$f(x) = \frac{\alpha^\beta (\log x)^{\beta-1}}{x^{\alpha+1} \Gamma(\beta)}$	$\alpha > 1$ $\beta > 0$

BENKTANDER 1.TÜR	$\bar{F}(x) = c(\alpha + 2\beta \ln x) e^{-(\beta(\ln x)^2 + (\alpha+1)\ln x)}$	$c, \alpha, \beta > 0$
BENKTANDER 2.TÜR	$\bar{F}(x) = c\alpha x^{-(1-\beta)} e^{-\alpha x^\beta / \beta}$	$c, \alpha > 0$ $0 < \beta < 1$
CAUCHY DAĞILIMI	$f(x; x_0, \gamma) = \frac{1}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{x - x_0}{\gamma} \right)^2 \right]}$ $F(x; x_0, \gamma) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x - x_0}{\gamma} \right) + \frac{1}{2}$	$x_0, \gamma > 0$
KESİLMİŞ α - KARARLI DAĞILIMLAR	$\bar{F}(x) = P(X > x)$ $X; \alpha - \text{kararlı r.d.}$	$0 < \alpha < 2$

3. KALIN KUYRUKLU DAĞILIMLARDA İFLAS OLASILIĞI

3.1. Klasik Risk Modeli ve İflas Teorisi

Sigorta şirketi, herhangi bir anda meydana gelebilecek bir hasara ilişkin ödenecek tazminatın yaratacağı finansal sonuçları en aza indirmek amacıyla portföyündeki tüm bireysel riskleri bir araya toplamaktadır. Bu nedenle de, sigorta şirketi her dönem sonunda rezerv ya da artık olarak tabir edilen bir miktarı ayırmak zorundadır. Bu miktar bir zaman dönemi içerisinde toplanan primlerin o dönem içerisindeki ödenecek tazminatları aşması durumuyla sağlanacaktır. Biriktirilen artık miktarları gelecekte oluşabilecek, gerçekleşen hasar ödemelerinin toplanan primleri aştığı riskli dönemler için kullanılarak sigorta şirketine bir tür koruma sağlayacaktır. Bunun neticesinde de sigorta şirketi, sigortalılarına vermiş olduğu taahhütleri yerine getirebilecektir.

Klasik risk modeli, özellikle artık sürecinin modellenmesinde önemli bir araçtır. Bu modelin tercih edilmesindeki temel neden modelin esnekliğidir. Çünkü risk modeli içerisinde yer alan primler, hasar sayıları ve hasar büyüklüklerinden oluşan her bir bileşenin ayrı ayrı incelemesi ve modellemesi yapılabilmektedir.

3.1.1 Klasik risk modeli

Bir sigorta şirketinin iki temel nakit akışı bulunmaktadır. Bunlar prim ve hasar süreçleridir. Bu nakit akışlarına bağlı olarak oluşturulan risk ya da artık süreci olarak da adlandırılan sigortacının klasik risk modeli;

$$U(t) = u + \Pi(t) - S(t) \quad t \geq 0 \quad (3.1)$$

biçimindedir.

Risk sürecinin temel bileşenleri;

$U(t)$: t anında sigorta şirketinin sermaye miktarı,

u : $u > 0$ olmak üzere başlangıç sermayesi,

$\Pi(t)$: prim süreci,

$S(t)$: hasar süreci'dir.

Prim Süreci

$\Pi(t)$: $(0,t]$ aralığında toplanan prim miktarını göstermekte olup, bu miktar herhangi bir harcama ya da reasürans nakit çıkışını içermemektedir. Primlerin her bir zaman aralığında, sürekli olarak bir c sabiti oranında toplandığı varsayıldığından aktüerya literatüründeki çalışmaların birçoğunda prim süreci $\Pi(t) = ct$ eşitliği ile ifade edilmektedir. Buradaki c sabiti, $c > 0$ olmak üzere prim gelirini göstermektedir. Bu varsayıma dayanarak yapılan ilk çalışma 1970 yılında Bühleman tarafından yapılmıştır (Bühlmann,1970).

Toplam Hasar Süreci

$N(t)$, $[0,t]$ zaman aralığında gerçekleşen hasar sayısını göstermektedir, $S(t)$ de $[0,t]$ zaman aralığında gerçekleşen toplam hasar miktarını göstermekte olup

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i & , N(t) > 0 \\ 0 & , N(t) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

ile ifade edilmektedir. Bu eşitlikteki X_i , $(0,t]$ zaman aralığında gerçekleşen i 'nci hasar büyüklüğünü göstermektedir. $N(t)$ ve $S(t)$ sırasıyla stokastik süreç olarak, hasar sıklığı (sayısı) süreci ve toplam hasar süreçleri olarak tanımlanmaktadır.

Klasik risk modeli esnek ve kolay anlaşılır bir model olmasının yanında yapısında bazı kısıtlamaları içermektedir. Yapılan çalışmalarda; bu teoremin iyi biliniyor olmasına rağmen bazı temel düzenlemelerin yapılmaması durumunda gerçeği yansıtmaktan yoksun kalacağı belirlenmiştir. Klasik risk sürecindeki sınırlamaların temelinde hasar büyüklüğü dağılımı ve hasar sıklığı yer almaktadır. Bu varsayımlar içerisinde en önemli nokta; süreç içerisindeki artımların bağımsız olarak tanımlanmasıdır.

Ancak risk modeli içerisinde çeşitli bağımlılık yapıları ile karşılaşmaktadır. Bu bağımlılık yapıları şu şekilde açıklanabilmektedir:

- $N(t)$, hasar sıklığı bağımlı olabilir.
- Sel baskını ya da yangına karşı sigortalanmış konut ya da bina sigortalarında; olayın gerçekleşme olasılığı iklimsel olaylara ya da çevre faktörlerine göre değişebilmekte ve belirli dönemlerde hasar sayılarında artış ile karşılaşabilmektedir. Bu durum da $N(t)$ 'nin bağımsız olamadığının bir göstergesi olmaktadır.
- X_i hasar büyüklükleri kendi aralarında bağımlı olabilirler. Fırtına, sel ya da yangın gibi olaylara karşı sigortalanmış konut ya da bina sigortalarında aynı bölge içerisinde sigortalanmış birden çok binada aynı anda benzer büyüklükte hasar meydana gelebilmektedir.

Açıkça görülmektedir ki; artımların bağımsız olduğu varsayımı altında kurulan modeller, gerçek sigorta sürecine uymayacaktır. Bağımlı modeller; $S(t)$ 'nin dağılımını, bunun sonucu olarak da iflas olasılığı ve iflas zamanı tahminlerini etkilemektedir. Bağımlılık durumu, yeni bir sigorta branşı için başlangıç sermayesine karar verilmesinde, var olan rezervin yeterli olup olmadığının araştırılmasında ve uygun reasürans anlaşmalarına karar verilmesi aşamasında önem taşımaktadır (Mo, 2002).

3.1.2. Cramer-Lundberg ve yenileme modeli

Cramer-Lundberg modeli klasik risk modelinde olduğu gibi süreçlerin birleşiminden oluşmaktadır. Bu süreçler şunlardır:

a. Toplam Hasar süreci

X_i : i'nci hasar büyüklüğünü gösteren pozitif ve aynı dağılıma sahip rastlantı değişkenleri olmak üzere ortalaması $\mu = E[X_i]$ ve varyansı $(\sigma^2 = Var(X_i) \leq \infty)$

sonlu olan rastlantı değişkenleridir. Toplam hasar süreci $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ şeklinde tanımlanmaktadır.

b. Hasar sayısı süreci;

$N(t)$: $[0, t]$ zaman aralığında gerçekleşen hasar sayısını göstermekte olup

$N(t) = \sup_{n \geq 1: T_n \leq t} n \quad t \geq 0$, $(\sup \emptyset = 0)$ eşitliğinden elde edilmektedir.

c. Bekleme süresi;

Y_k : $(k-1)$ 'inci olay ile k 'inci olay arasındaki geçen süreyi göstermektedir ve Y_k ,

$Y_1 = T_1$ olmak üzere $k = 2, 3, \dots$ değerleri için $Y_k = T_k - T_{k-1}$ biçiminde tanımlanan aynı

üstel dağılıma sahip bağımsız rastlantı değişkenleri olarak tanımlanmaktadır ve

$E Y_1 = 1/\lambda$ 'dir.

d. Hasar zamanı;

T_i : Hasar gerçekleştiği andaki zaman noktasını yani i 'nci olay meydana gelene

kadarki geçen süreyi göstermektedir. Hasarın rastgele bir zamanda

gerçekleşebileceği varsayımında sıralı hasar zamanları arasında $0 < T_1 < T_2 < \dots$

ilişkisi verilebilmektedir.

e. X_k ve Y_k birbirlerinden bağımsızdır.

Yenileme modeli (a), (b) ve (e) özelliklerini sağlamaktadır (Embrechts et al., 2001).

Cramer-Lundberg Modelinin Temel Özellikleri

$N(t)$, $t \geq 0$ sayma sürecinde $N(t)$ rastlantı değişkeni λt parametresiyle Poisson

dağılımına sahipse; süreç, $\lambda > 0$ koşulu altında, λ ortalama ile Poisson sürecine

sahiptir.

Tüm $t > 0$, $h > 0$ ve $s \leq t$ durumları için; $N(t+h) - N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda h)$ 'dir.

$$P[N(s+t) - N(s) = k] = P(N(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

$$E[N(t)] = \text{Var}[N(t)] = \lambda t \quad (3.4)$$

Bu modelde Poisson sürecinin tercih edilmesi; bağımsız bileşenlere ve monoton azalan ortalama değer fonksiyonuna sahip herhangi bir sürecin, Poisson sürecine çevrilebilir olmasından kaynaklanmaktadır (Mo,2002).

Toplam hasar büyüklüğü $S(t)$ 'nin dağılımı $x \geq 0$ ve $t \geq 0$ olmak üzere;

$$G_t(x) = P(S(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F^{n*}(x) \quad (3.5)$$

şeklinde hesaplanmaktadır.

Bu eşitlikte kullanılan $F^{n*}(x)$, F dağılımının n'inci dereceden konvülyasyonunu göstermektedir ve

$$F^{n*}(x) = P\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq x\right) \quad (3.6)$$

şeklinde hesaplanmaktadır.

Yenileme modeli, Cramer-Lundberg modelinin geliştirilmiş bir halidir. Yenileme modeli ile Cramer-Lundberg modeli toplam hasarın beklenen değeri açısından şu şekilde farklılaşmaktadır:

Yenileme modeli için risk sürecinin beklenen değeri

$$\begin{aligned} E U(t) &= E u + ct - S(t) \\ &= u + ct - \mu E N(t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

şeklinde hesaplanmaktadır.

Bu eşitlikte toplam hasar $S(t)$ 'nin, beklenen değeri; kollektif risk modelinde olduğu gibi $E[S] = E[N(t)] * E[X]$ (3.8)

eşitliğinden hesaplanmaktadır.

Cramer-Lundberg Modeli için; risk sürecinin beklenen değeri ise

$$E U(t) = E u + ct - S(t)$$

$$= u + ct - \lambda \mu t \quad (3.9)$$

şeklinde elde edilmektedir.

3.1.3 İflas olasılığı

Yıllık primlerin ve hasar süreçlerinin değişmez olduğu varsayımı altında iflas olasılığı $\psi(u)$ ile gösterilmektedir. Bu olasılık sigorta şirketi için çok önemli bir araçtır; çünkü uygun bir başlangıç sermayesi ile sürece başlandığı durumda, sigortacının prim ve hasar süreçlerinin doğru hesaplanıp hesaplanmadığının bir belirtisi olmaktadır. Yüksek iflas olasılığı; reasürans antlaşmalarının gündeme gelmesine, riskli görülen poliçelerdeki prim miktarlarında yükseltilmeye gidilmesine ya da sigorta şirketinin işletme sermayesinden nakit çekmesine neden olabileceğinin bir çeşit göstergesi olacaktır.

İflas olasılığı, portföylerin birbirleriyle karşılaştırılmalarına da olanak sağlayabilmektedir; ancak iflas olasılığına doğrudan salt iflas anlamının yüklenmesi doğru olmayabilir. Çünkü iflas olasılığı sigorta şirketinin yakın zaman içerisinde iflas edeceğinin doğrudan bir göstergesi olmamaktadır. Öncelikle, iflasın tamamen gerçekleşmesi uzun süreler alabilecektir ve iflas olasılığı yalnızca sigorta riskleri için hesaplanmakta olduğundan, idari yönetimden kaynaklı riskler için hesaplanmamaktadır. Sonuç olarak iflas olasılığı sadece matematiksel olarak sonuçlar ortaya koymakta olup, sigorta şirketinin dönem sonunda -1birim sermaye ile iflas etmiş olduğu anlamına gelmemekte, bununla birlikte +1birim sermaye ile de yükümlülüklerinin tamamını ödeyebilir durumda olduğu sonucu çıkarılmamaktadır (Kaas et al, 2001).

Tazminat ödemelerinin, mevcut rezerv miktarını aşması durumu olarak açıklanan iflası önlemek için sigorta şirketi; yeterli bir başlangıç sermayesi sağlamalı ve ilk yıldan son yıla kadar rezerv hesaplamalarını çok dikkatli yapmalıdır. Buna ek olarak, sigorta şirketi ayrıca büyük hasarların etkisini en aza indirmek için uygun reasürans anlaşmaları düzenlemelidir.

İflas olasılığının hesaplanmasında zaman faktörü önemli bir rol oynamaktadır. Bu nedenle iki farklı durum için olasılık hesaplanmaktadır.

Sınırlı zamanlı iflas olasılığında; belirlenen bir zaman aralığındaki risk sürecinin hareketi incelenerek sigorta şirketinin iflas etme olasılığı araştırılmaktadır. Sınırlı zamanlı iflas olasılığı $0 < T < \infty$ ve $u \geq 0$ olmak üzere;

$$\psi(u, T) = P(U(t) < 0, \text{ bazı } t \leq T) \quad (3.10)$$

şeklinde gösterilmektedir.

Sınırsız zamanlı iflas olasılığında; belirli bir zaman aralığı olmadan risk süreci incelemesi yapılarak sigorta şirketinin iflas etme olasılığı araştırılmaktadır. Sınırsız zamanlı iflas olasılığı ise $u \geq 0$ olmak üzere;

$$\psi(u) = \psi(u, \infty) \quad (3.11)$$

ile gösterilmektedir.

Yenileme ve Cramer-Lundberg modellerinin uygulanmasında bazı kısıtlamalar mevcuttur. Bu kısıtlamaların başında uygun bir sigorta prim oranı (c)'nin seçimi gelmektedir. c belirli bir zaman dilimi içerisindeki uygun bir yükümlülük karşılama yeterliliğinin (solvency) ölçüm sonuçlarına bağlı olarak belirlenmektedir. Bu durum için ölçülebilir bir araç $T < \infty$ olmak üzere $\psi(u, T)$ şeklinde gösterilen iflas olasılığıdır. Karar verilecek uygun prim oranı, belirlenen u ve T değerleri doğrultusunda hesaplanan iflas olasılığını $\psi(u, T)$ minimize edecek şekilde seçilmelidir.

İflas olasılığının hesaplanmasında yenileme sayma süreçlerinden de yararlanılmaktadır.

Yenileme Sayma Süreci

Yenileme sayma süreci $N(t)_{t \geq 0}$ şeklinde gösterilmektedir.

$$N(t) = \sup \{ n \geq 1 : T_n \leq t \} \quad t \geq 0 \text{ ve} \quad (3.12)$$

$n \geq 1$ değerleri için $T_n = Y_1 + \dots + Y_n$ 'dir. Y 'nin $(1/\lambda)$ beklenen değerli üstel dağılıma sahip bir rastlantı değişkeni olduğu durumda, yenileme sayma sürecinin momentleri;

$$E[N(t)] = (\lambda + o(1))t \quad \text{ve} \quad \sigma_Y^2 = \text{Var}(Y) < \infty \quad \text{olmak üzere;}$$

$t \rightarrow \infty$ 'iken;

$$E[N(t)] = \lambda t + O(1) \tag{3.13}$$

$$\text{Var}(N(t)) = \sigma_Y^2 \lambda^3 t + o(t) \tag{3.14}$$

şeklinde bulunmaktadır.

Yenileme modelinin beklenen değeri ise;

$$E[U(t)] = u + ct - \mu E[N(t)] \tag{3.15}$$

$$E[U(t)] = u + (c - \lambda\mu) t (1 + o(1))$$

$$= u + \left(\frac{c}{\lambda\mu} - 1 \right) \lambda\mu t (1 + o(1)) \tag{3.16}$$

biçiminde elde edilmektedir.

Buradan da; $\frac{E[U(t)]}{t} \Rightarrow c - \lambda\mu$ olarak bulunmaktadır. Yükümlülük karşılama yeterliliğinin koşulu olarak $c - \lambda\mu > 0$ olması, büyük t değerleri için $U(t)$ 'nin pozitif bir değere sahip olmasını sağlayacaktır. Bu da yenileme modelinde temel net kar koşulunu oluşturacaktır.

ρ : güvenlik yüklemesidir ve risk prim oranı anlamına da gelmektedir. Bu oran, $[0, t]$ aralığındaki prim gelir oranından hesaplanmaktadır:

$$ct = (1 + \rho)\lambda\mu t \quad \text{olmak üzere;}$$

$$\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0 \quad (3.17)$$

olmalıdır.

Risk sürecinin tanımından hareketle; $u \geq 0$ değerleri için iflasın ancak T_i zamanlarında gerçekleştiği varsayımı altında X_k , hasar büyüklüklerini; Y_k , prim büyüklüklerini göstermek üzere iflas olasılığı;

$$\begin{aligned} \psi(u) &= P(u + ct - S(t) < 0, t \geq 0) \\ &= P(u + cT_n - S(T_n) < 0, n \geq 1) \\ &= P(u + \sum_{k=1}^n (cY_k - X_k) < 0, n \geq 1) \\ &= P(\sup_{n \geq 1} (X_k - cY_k) > u) \end{aligned} \quad (3.18)$$

şeklinde yazılabilmektedir. Bu eşitlikler iflasın gerçekleşmeme olasılığı yönünden de yazılabilir. $u \geq 0$ olmak üzere iflasın gerçekleşmeme olasılığı

$$1 - \psi(u) = P\left(\sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n (X_k - cY_k) \leq u\right) > 0 \quad (3.19)$$

şeklinde gösterilebilir. İflas gerçekleşmeme olasılığı $1 - \psi(u)$, maksimum rasgele yürüyüş sürecinin dağılım fonksiyonu yönünden de incelenebilir.

$k \geq 1$ değerleri için; $Z_k = X_k - cY_k$ olmak üzere;

İlişkili rasgele yürüyüş süreci; $n \geq 1$ değerleri için; $R_0 = 0$ olmak üzere; $R_n = \sum_{k=1}^n Z_k$

şeklinde elde edilmektedir.

Bu eşitlik için yenileme modelinin temel kar koşulundan; $E[Z_1] = \mu - \frac{c}{\lambda} < 0$

olmalıdır. Böylece; iflasın gerçekleşmeme olasılığı;

$$1 - \psi(u) = P(\sup_{n \geq 1} R_n \leq u) \quad (3.20)$$

şekline dönüştürülebilmektedir(Embrechts et al.,2001).

Bu olasılık, genel bir rastgele yürüyüşe ilişkin nihai supremumların (ultimate supremum) dağılımını veren Spitzer eşitliği ile de hesaplanabilmektedir. Bu eşitlikten yararlanarak bileşik geometrik dağılıma ilişkin iflasın gerçekleşmeme olasılığı, H bir dağılım fonksiyonu ve $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere,

$$1 - \psi(u) = (1 - \alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n H^{n*}(u) \quad (3.21)$$

şeklinde elde edilmektedir.

Bu eşitlik içerisindeki H^{n*} : H ' nin n'nci dereceden konvülyasyonunu göstermektedir. α ve H değerleri, genellikle, klasik Wiener-Hopf teorisi ile elde edilmektedir

(3.21) eşitliğindeki gibi fonksiyonel ilişkilere çeşitli yöntemlerin uygulanması suretiyle, çok sayıda modele ilişkin $\psi(u)$ tahmini hesaplanabilmektedir. $\psi(u)$ ' nun hesaplanmasında kullanılan Wiener-Hopf metodolojisinin yanı sıra yenileme teorisi de, ilgili tahminlerin elde edilmesine olanak tanımaktadır. İlgili hesaplamalar yapılırken Cramer-Lundberg modelinden faydalanılmaktadır. Büyük hasarlara ilişkin tahminlerde bu iki teoremin birleştirilmesiyle elde edilen eşitliklerden yararlanılacaktır.

3.1.4. Cramer-Lundberg Tahmini

Yenileme modelinde, iflas olasılığı tahminin elde edilmesinde genel yöntemin kullanımının dışında Cramer-Lundberg modeli tahmini de bulunmaktadır. Bu modele göre iflas olasılığının hesaplamasında, modele hasar büyüklüğü dağılımı da (F) dahil edilmektedir.

Cramer-Lundberg modelinde güvenlik yüklemesi için; $\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0$ koşulu

sağlanmakta olup, iflasın gerçekleşmeme olasılığı :

$$1 - \psi(u) = \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} F_I^{n*}(u) \quad (3.22)$$

şeklinde hesaplanabilmektedir. Bu eşitlik içerisinde yer alan $F_I^{n*}(x)$ notasyonu, bütünleşik kuyruk dağılımının n'inci dereceden konvülasyonunu göstermektedir.

(3.21) eşitliği portföyde büyük hasarların bulunması durumunda iflas olasılığının elde edilmesinde kullanılmaktadır. Bu tahminin hesaplanmasında Laplace-Stieltjes dönüşümü kritik bir rol oynamaktadır.

3.1.4.1. Laplace-Stieltjes dönüşümü

H , $(0, \infty)$ aralığında tanımlı bir dağılım fonksiyonu olmak üzere, $\hat{h}(s)$ bu dağılımın Laplace-Stieltjes dönüşümü olarak adlandırılır ve $s \in R$ değerleri için

$$\hat{h}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dH(x) \quad (3.23)$$

şeklinde elde edilmektedir.

Büyük x değerlerinde $\bar{H}(x)$ 'in davranışına bağlı olarak, $\hat{h}(s)$ dönüşümü, $s \geq 0$ değerleri için sonlu olabilmektedir. Genel olarak ise $0 \leq \gamma < \infty$ aralığında bulunan γ parametresine göre $s > -\gamma$ olacak şekildeki s değerleri için bu Laplace-Stieltjes dönüşümü sonlu olmaktadır ($\hat{h}(s) < \infty$).

3.1.4.2. Cramer-Lundberg teoremi

$\nu > 0$ olmak üzere, Laplace-Stieltjes dönüşümünden yararlanarak, bütünleşik kuyruk dağılımının $(-\nu)$ değeri için Laplace-Stieltjes dönüşümü;

$$\hat{f}_I(-\nu) = \int_0^{\infty} e^{\nu x} dF_I(x) = \frac{c}{\lambda \mu} = 1 + \rho \quad (3.24)$$

şeklinde elde edilir.

Bu eşitlikten yola çıkılarak; aşağıdaki özellikler elde edilebilmektedir:

Özellik 1:

Laplace-Stieltjes dönüşümünden yararlanarak (3.24) eşitliği, Cramer-Lundberg koşulundan yararlanarak ayrıca şu şekilde de yazılabilmektedir:

$$\int_0^{\infty} e^{\nu x} \bar{F}(x) dx = \frac{c}{\lambda} \quad (3.25)$$

ν 'nin var olduğu durumda, Laplace-Stieltjes dönüşümü tek sonuç olarak hesaplanmaktadır.

Özellik 2:

$u \geq 0$ değerleri için;

$$\psi(u) \leq e^{-\nu u} \text{ olmaktadır.} \quad (3.26)$$

Özellik 3:

İncelenen dağılımın $1/\mu$ parametresi ile üstel dağılıma uyması durumunda iflas olasılığı;

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho} \exp\left\{-\frac{\rho}{\mu(1+\rho)}u\right\} u \geq 0 \quad (3.27)$$

şeklinde elde edilir.

Özellik 4

$$\text{Bu teoremden } \int_0^{\infty} x e^{\nu x} \bar{F}(x) dx < \infty \quad (3.28)$$

eşitsizliği elde edilmektedir.

Bu eşitsizlikten yola çıkılarak

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{\nu u} \psi(u) = C < \infty \quad (3.29)$$

olmak üzere C değeri şu şekilde hesaplanmaktadır:

$$C = \left[\frac{\nu}{\rho\mu} \int_0^{\infty} x e^{\nu x} \bar{F}(x) dx \right]^{-1} \quad (3.30)$$

Eşitlik(3.28) 'in ispatının yapılmasında $\delta(u) = 1 - \psi(u)$ ve $u \geq 0$ olmak üzere ;

$$1 - \psi(u) = P(\sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n (X_k - cY_k) \leq u) > 0$$

$$\delta(u) = P(S(t) - ct \leq u \quad \text{tüm } t > 0 \text{ için})$$

$$= P(\sum_{k=1}^n (X_k - cY_k) \leq u \quad \text{tüm } n \geq 1 \text{ için})$$

$$= P(\sum_{k=2}^n (X_k - cY_k) \leq u + cY_1 - X_1 \quad \text{tüm } n \geq 2, X_1 - cY_1 \leq u)$$

$$= P(S'(t) - ct \leq u + cY_1 - X_1 \quad \text{tüm } t > 0, X_1 - cY_1 \leq u)$$

biçimindedir.

Burada S' , S 'nin bağımsız bir kopyası olarak alınmaktadır.

$$\delta(u) = E \left[(P(S'(t) - ct \leq u + cY_1 - X_1 \quad \text{tüm } t > 0, X_1 - cY_1 \leq u \mid Y_1, X_1)) \right]$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{u+cs} P(S'(t) - ct \leq u + cs - x \quad \text{tüm } t > 0) dF(x) * \lambda e^{-\lambda s} ds$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda s} \int_0^{u+cs} \delta(u + cs - x) dF(x) ds \quad (3.31)$$

$z = u + cs$ dönüşümü yapılarak;

$$\delta(u) = \frac{1}{c} \int_u^{\infty} \lambda e^{-\lambda(z-u)/c} \int_0^z f(x) \delta(z-x) dx dz$$

$$= \frac{\lambda}{c} e^{\lambda u/c} \int_u^{\infty} e^{-\lambda z/c} \int_0^z f(x) \delta(z-x) dx dz \quad (3.32)$$

şeklinde elde edilir.

$\delta(u)$ eşitliği, (3.32) eşitliğinin diferansiyeline eşit olan ve İntegro diferansiyel olarak bilinen eşitlik yardımıyla aşağıdaki gibi açıklanabilmektedir(Dickson, 2006).

$$\frac{d}{du} \delta(u) = \frac{\lambda^2}{c^2} e^{\lambda u/c} \int_u^{\infty} e^{-\lambda z/c} \int_0^z f(x) \delta(z-x) dx dz - \frac{\lambda}{c} \int_0^u f(x) \delta(u-x) dx$$

$$= \frac{\lambda}{c} \delta(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u f(x) \delta(u-x) dx \quad (3.33)$$

Bu eşitlikten yararlanarak, Cramer-Lundberg modeli genişletilebilmektedir. Yenileme teoremine olanak sağlayan kilit nokta, (3.33) eşitliğindeki integralin bir konvülasyon tipi olmasıdır.

Bu eşitlik sıfır ile t sınırları arasında integral alınıp Lebesgue ölçümü kullanılarak;

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \delta(u) du - \frac{\lambda}{c} \int_0^t \int_0^u \delta(u-x) dF(x) du \\ &= \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \delta(t-u) du - \frac{\lambda}{c} \int_0^t \delta(t-x) F(x) dx \end{aligned} \quad (3.34)$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak da;

$$\delta(t) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \delta(t-x) \bar{F}(x) dx \quad (3.35)$$

eşitliği elde edilir. Burada; $\frac{c}{\lambda\mu} = 1 + \rho$ 'dır ve $\delta(0)$ hala bilinmemektedir.

Ancak $t \rightarrow \infty$ 'iken, $\delta(\infty) = 1 - \psi(\infty) = 1$ olduğundan, net kar koşulu için;

$1 = \delta(0) + \frac{\lambda\mu}{c}$ eşitliği elde edilir ve $\delta(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{\rho}{1+\rho}$ olmak üzere,

$$\delta(t) = \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho} \int_0^t \delta(t-x) dF_1(x) \quad (3.36)$$

şeklinde elde edilebilmektedir.

Bu eşitlikten hareketle;

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^t \delta(t-x) \bar{F}(x) dx = \frac{1}{(1+\rho)} \int_0^t \delta(t-x) dF_1(x), \quad (3.37)$$

$\psi(u) = 1 - \delta(u)$ ve $\alpha = \frac{1}{1+\rho} < 1$ olmak üzere;

$$\psi(u) = \alpha \bar{F}_1(u) + \int_0^u \psi(u-x) d(\alpha F_1(x)) \quad (3.38)$$

eşitliği elde edilir.

Buradaki α değerinin, $0 < \alpha < 1$ aralığında olmasından dolayı bu eşitlik; “eksik yenileme eşitliği (defective renewal equation)” olarak adlandırılmaktadır (Embrechts et al., 2001).

3.1.4.3 Lundberg sabiti

F , hasar büyüklüğünün dağılım fonksiyonu ve ν , sıfırdan büyük bir sabit olmak üzere; (3.24) eşitliğini sağlayan ν parametresi Lundberg sabiti ya da düzeltme katsayısı olarak adlandırılmaktadır.

Laplace-Stieltjes dönüşümü yapılan (3.24) eşitliğinde ν 'nin var olması, $\hat{f}_1(s)$ 'nin sıfırın boş olmayan komşuluğunda var olma zorunluluğu yaratacak ve ayrıca bütünleşik kuyruk (\bar{F}_1) ve kuyruk dağılımının (\bar{F}) da üstel olarak sınırlı olması sağlanacaktır. Gerçekte, bu durum Markov eşitliğinden gelmektedir. $x > 0$ değerleri için

$$\bar{F}(x) \leq e^{-\nu x} E[e^{\nu X_1}] \quad (3.39)$$

eşitsizliği sağlanmalıdır.

Bu eşitsizlik aslında büyük hasarların üstel hasar dağılım yapısı doğrultusunda gerçekleşmesinin çok fazla beklenilmediğini açıklamaktadır.

Bu nedenle de (3.24) eşitliği genellikle “küçük hasar koşulu” olarak adlandırılır.

Üstel tipi iflas tahmini klasik risk sürecinde daha geniş bir konuyu oluşturmaktadır.

Bununla birlikte, üstel dağılım dışındaki diğer dağılımlarla ilgili de literatürde bir çok çalışma bulunmaktadır. Bu konuda 1984 yılında Hogg ve Klugman farklı dağılım fonksiyonlarına sahip bireysel hasar büyüklüğü verilerini incelemişlerdir. Ramlau-Hansen 1988 (Ramlau-Hansen, 1988a) yılındaki çalışmasında ise hayat dışı

sigorta uygulamalarında karşılaşılabilecek üç farklı durum verilerini yükümlülük karşılama yeterliliği açısından incelemiştir.

3.2. Kalın Kuyruklu Dağılımlar İçin İflas Teorisi

Kalın kuyruk yapısına sahip dağılımlar için iflas olasılığının hesaplanmasında; dağılımın kalın sağ kuyruğunu temsil eden $\bar{B}(x) = 1 - B(x)$ kuyruk dağılımı ile ilgilenilmektedir.

İnce ve kalın kuyruk yapısına sahip dağılımlar arasındaki temel fark; ince kuyruk yapısına sahip dağılımlar için $s > 0$ değerlerinde moment çıkaran fonksiyon $\hat{B}_s = \int e^{-sx} B(dx)$ sonlu bir değer olurken; kalın kuyruklu dağılımlarda ise $s > 0$ değerlerinde moment çıkaran fonksiyonun sonsuz olmasıdır (Asmussen, 2000).

Pareto dağılımı gibi kalın kuyruklu dağılımlar eşitlik (3.24) Cramer-Lundberg koşulunu sağlamamakta ve bu nedenle de Cramer-Lundberg teoremi bu tür hasar büyüklüğü dağılımları için uygulanabilir olmamaktadır. Bu durumda (3.22) eşitliğinin, konvülyasyon yaklaşımı kullanılarak düzenlenmesi gerekmektedir.

3.2.1. Düzenli değişen kuyruklu dağılımlarda konvülyasyon yaklaşımı

F_1 ve F_2 , $i = 1, 2$ olmak üzere $L_i \in \mathcal{R}_0$ olan ve $\alpha \geq 0$ değerleri için $\bar{F}_i(x) = x^{-\alpha} L_i(x)$ şeklinde birer dağılım fonksiyonu olmak üzere; bu dağılım fonksiyonlarının konvülyasyonu $G = F_1 * F_2$, $x \rightarrow \infty$ iken $\bar{G}(x) \sim x^{-\alpha} (L_1(x) + L_2(x))$ olacak şekilde düzenli değişen kuyruk yapısına sahiptir (Embrechts et al., 2001).

Bu durum için alternatif bir kanıt da, Karamata'nın Tauberian teoremidir. Bu teoremden, $\alpha \geq 0$, $n \geq 1$, $L \in \mathcal{R}_0$ ve $\bar{F}(x) = x^{-\alpha} L(x)$ olması durumunda $x \rightarrow \infty$ iken $\overline{F^{n*}}(x) \sim n\bar{F}(x)$ olacağı sonucu elde edilmiştir. X_1, X_2, \dots, X_n ' in aynı F dağılımına sahip bağımsız rastlantı değişkenleri olduğu varsayalım. $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ve $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ olmak üzere; tüm $n \geq 2$ değerleri için;

$$P(S_n > x) = \overline{F^{n*}}(x),$$

$$P(M_n > x) = \overline{F^n}(x),$$

$$= \overline{F}(x) \sum_{k=0}^{n-1} F^k(x) \text{ 'dir.}$$

$x \rightarrow \infty$ iken bu eşitlik $\overline{F}(x) \sum_{k=0}^{n-1} F^k(x) \sim n \overline{F}(x)$ şekline dönüşmektedir.

Bu durumda $\alpha \geq 0$ olmak üzere $F \in R_{-\alpha}$ ise; $P(S_n > x) \sim P(M_n > x)$ olacaktır.

Elde edilen bu eşitlik; düzenli değişen kuyruklu dağılım fonksiyonları için, hasar büyüklükleri toplamı olan S_n 'nin kuyruk dağılımının, bu hasar büyüklüklerinin en büyük değeri olan M_n 'nin kuyruk dağılımı ile elde edilebilir olduğunu; yani düzenli değişim varsayımı altında, en büyük değer kuyruk yapısının, toplamın kuyruk yapısını belirlediği şekilde açıklanabilmektedir. Toplam hasarın bağımlılık durumu da bu özellik nedeniyle gerçekleşmektedir.

(3.21) eşitliğindeki Cramer-Lundberg modelinden, $u \geq 0$ değerleri için iflas olasılığı;

$$\psi(u) = \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1+\rho)^{-n} \overline{F_I^{n*}}(u) \quad (3.40)$$

şeklinde verilmektedir. $\alpha \geq 0$ değerleri için $\overline{F_I} \in R_{-\alpha}$ olması koşulu altında, aşağıdaki asimptotik sonuçlar ortaya çıkacaktır:

$$\frac{\psi(u)}{\overline{F_I}(u)} = \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1+\rho)^{-n} \frac{\overline{F_I^{n*}}(u)}{\overline{F_I}(u)} \quad (3.41)$$

$$= \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1+\rho)^{-n} n = \rho^{-1} u \rightarrow \infty \quad (3.42)$$

Bu eşitlik hasarların bütünleşik kuyruk dağılımının ($\overline{F_I}$), düzenli değişen kuyruklu dağılım sınıfı içerisinde bulunması durumundaki iflas olasılığının tahmin edilmesinde kullanılmaktadır. Düzenli değişen kuyruk yapısına sahip hasar büyüklüğü dağılımları için, başlangıç sermayesi u 'nun büyük olması durumundaki

nihai iflas olasılığı, büyük hasar büyüklüğü y değerine bağlı olarak $\bar{F}(y)$ kuyruk dağılımı kullanılarak $u \rightarrow \infty$ durumunda ;

$$\psi(u) \sim \frac{1}{\rho \mu_u} \int \bar{F}(y) dy \quad (3.43)$$

olarak hesaplanmaktadır.

İflas olasılığının bu duruma göre hesaplandığı dağılımlar;

- Pareto,
- Burr,
- Loggamma,
- Kesilmiş kararlı dağılımlardır (Embrechts et al., 2001).

3.2.2. Alt –üstel dağılımlar için Cramer-Lundberg teoremi

Kalın kuyruklu dağılım yapısında $s > 0$ değerleri için $\hat{F} s = \infty$ olması durumu iflas olasılığının hesaplanmasında açık olmayan çözümlere neden olmaktadır. Bu nedenle de iflas olasılığının hesaplanmasında, bu olasılığın hesaplanmasına olanak sağlayan alt-üstel dağılım sınıflarıyla (S) ilgilenilmektedir.

Alt-üstel dağılıma Cramer-Lundberg teoreminin uygulanmasında, bu dağılım yapısına ait üç özellikten yararlanılmaktadır.

Bu özellikler şu şekildedir;

(a) Eğer F dağılımı alt-üstel dağılım sınıfı içerisinde yer alıyor ise ($F \in S$), benzer şekilde $(0, \infty)$ aralığındaki y değeri için de;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} = 1 \quad (3.44)$$

eşitliği elde edilir.

(b) Eğer (3.43) eşitliği sağlanıyorsa tüm $\varepsilon > 0$ değerleri için;

$$x \rightarrow \infty \text{ 'a giderken } e^{\varepsilon x} \bar{F}(x) \rightarrow \infty \quad (3.45)$$

olmaktadır.

(c) $F \in S$ olması durumunda, $n \geq 2$ değerleri için; sıfırdan büyük bir ε değeri ve sınırlı bir K sabitine bağlı olacaktır:

$$\frac{\overline{F}^{n^*}(x)}{\overline{F}(x)} \leq K(1 + \varepsilon)^n \quad x \geq 0 \quad (3.46)$$

Alt-üstellik, $\varepsilon > 0$ değerleri için herhangi bir $e^{-\varepsilon x}$ şeklinde olan üstel dağılımdan daha yavaş sifıra yaklaşan $\overline{F}(x)$ dağılımı olarak açıklanmakta olup tüm $\varepsilon > 0$ ve $y \geq 0$ değerleri için;

$$\int_y^\infty e^{\varepsilon x} dF(x) \geq e^{\varepsilon y} \overline{F}(y) \quad (3.47)$$

eşitsizliği elde edilmektedir.

$F \in S$ olması durumunda tüm $\varepsilon > 0$ değerleri için $\hat{f}(-\varepsilon) = \infty$ olmaktadır. Buna bağlı olarak, alt-üstel dağılımın Laplace–Stieltjes dönüşümü, sıfır durumu için özel bir tekilliğe sahiptir. Bu durum ilk kez Chistyakov (1964) tarafından ispatlanmıştır.

Bu teoremin genişletilmesiyle daha geniş dağılım sınıfları içinde $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1$ eşitsizliğinin sağlandığı durumların olduğu görülmüştür (Embrechts et al., 2001).

Cramer-Lundberg modelinin net kar koşulu ($\rho > 0$) ve bütünleşik kuyruk dağılımının alt üstel dağılım sınıfı içerisinde bulunması durumunda ($F_I \in S$); $u \rightarrow \infty$ iken

$\psi(u) \sim \rho^{-1} \overline{F}_I(u)$ şeklinde hesaplanmaktadır.

Bu eşitliğin elde edilmesinde $(1 + \rho)^{-1} < 1$ koşulu var olduğundan $(1 + \rho)^{-1}(1 + \varepsilon) < 1$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde belirlenen sıfırdan büyük bir ε değeri için; (3.45) eşitsizliğinden

$\frac{\psi(u)}{\overline{F}_I(u)} = \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} \frac{\overline{F}_I^{n^*}(u)}{\overline{F}_I(u)}$ eşitliği aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir:

$$(1 + \rho)^{-n} \frac{\overline{F}_I^{n*}(u)}{F_I(u)} \leq (1 + \rho)^{-n} K(1 + \varepsilon)^n \quad u \geq 0. \quad (3.48)$$

Bu eşitliğin daha önce elde edilen (3.41) ve (3.42) eşitlikleri ile bağlantılı olması sebebiyle $\psi(u) \sim \rho^{-1} \overline{F}_I(u)$ (3.49)

eşitliğinin elde edildiği görülebilmektedir.

Bütünleşik kuyruk dağılımı alt-üstel dağılım yapısına sahip kalın kuyruklu hasar büyüklüğü dağılımları için, iflas olasılığı tahmini $\psi(u) \sim \rho^{-1} \overline{F}_I(u)$ şeklinde hesaplanmaktadır.

Neticede, $\psi(u) \sim \rho^{-1} \overline{F}_I(u)$ tahmini sadece $F_I \in \mathcal{S}$ koşulu altında gerçekleşebilmektedir.

Düzenli değişen kuyruklu olasılık yoğunluk fonksiyonlarına ek olarak,

Log-normal, benktander-type I, benktander-type II, Weibull($0 < \tau < 1$) dağılımları için de $\psi(u) \sim \rho^{-1} \overline{F}_I(u)$ eşitliği kullanılarak iflas olasılığı tahmini yapılabilmektedir.

Net kazanç koşuluna ($\rho > 0$) sahip olan Cramer-Lundberg teoremi göz önünde bulundurularak alt-üstel dağılım üzerine yapılan incelemeler sonucunda aşağıdaki durumlar kabul edilebilmektedir.

a) $F_I \in \mathcal{S}$,

b) $(1 - \psi(u)) \in \mathcal{S}$, (3.50)

c) $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) / \overline{F}_I(u) = \rho^{-1}$ (3.51)

3.2.2.1. Alt-üstel durumda toplam hasar büyüklüğü

Matematiksel bakış açısına göre; Cramer-Lundberg modelinde iflasın

gerçekleşmemesi olasılığı; $1 - \psi(u) = \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} F_I^{n*}(u)$ şeklinde ifade

edilmektedir.

$\psi(u) \sim \rho^{-1} \bar{F}_1(u)$ eşitliği büyük hasarlar için toplam hasar büyüklüğünün tahmin edilmesine de olanak tanımaktadır.

Cramer-Lundberg modelinde, $(0, t]$ zaman aralığındaki toplam hasarın dağılım fonksiyonu;

$$G_t(x) = P(S(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F^{n*}(x) \quad (3.52)$$

şeklinde verilmektedir. $N(t), t \geq 0$ sayma süreci de $\lambda > 0$ parametresi ile homojen Poisson sürecine sahip olup $n \geq 0$ değerleri için

$$P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad (3.53)$$

olduğundan, $N(t)$ sürecinin, X_k hasar büyüklüğü sürecinden bağımsız olduğu varsayımıyla bu eşitlik diğer $N(t)$ süreçleri için genelleştirilebilmektedir.

$P_t(n) = P(N(t) = n)$ olmak üzere;

$$G_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_t(n) F^{n*}(x) \quad x \geq 0 \quad (3.54)$$

eşitliği elde edilmektedir. Hasar büyüklüğü dağılımının alt-üstel dağılım sınıfı içerisinde olması durumunda $t > 0$ ve $\varepsilon > 0$ değerleri için

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 + \varepsilon)^n P_t(n) < \infty \quad (3.55)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçilen bir $P_t(n)$ olması durumunda; G_t dağılımı da alt-üstel dağılım sınıfı içerisinde yer alacak ve $x \rightarrow \infty$ iken

$$\bar{G}_t(x) \sim E[N(t)] \bar{F}(x) \quad (3.56)$$

olacaktır. Bu eşitliğin elde edilmesinde kullanılan varsayımlardan (3.54) koşulu, olasılık yaratıcı fonksiyon $\sum_{n=0}^{\infty} P_t(n) S^n$ 'nin $s=1$ komşuluğunda analitik olmasından

dolayı gerçekleşmektedir. Bu eşitliğin elde edilmesi ile ilgili tüm genel bilgiler Cline (1986)'nin çalışmasında Teorem 2.13'de toplanmıştır.

Alt-üstel dağılımlar kalın kuyruklu dağılımların en önemli sınıfı olması ve analitik çözümler sağlaması nedeniyle yapılan çalışmalarda çok fazla tercih edilmiştir. Alt-üstel dağılımlı hasar büyüklüklerinde iflas olasılığı ve asimptotik sonuçlar Asmussen (1997), Asmussen ve Klüppelberg (1996), Baltrūnas ve Klüppelberg (2004), çalışmalarında bulunabilir.

3.2.2. Büyük hasarlarda Cramer-Lundberg teoremi

R ve S sınıflarında, (3.24) eşitliği olan Cramer-Lundberg koşulunun ihlal edildiği hasar büyüklüğü dağılım modellemelerinin olduğu bilinmektedir. Seal 1983 yılındaki çalışmasında, farklı hasar büyüklüklerine ait dağılım sınıfları için iflas olasılığının hesaplanmasını araştırmıştır. Genel olarak karma Poisson süreci, homojen olmayan Poisson süreci ve negatif binom süreçlerinin gerçek sigorta verisine dayanan incelemeleri sonucunda, sadece hasar gerçekleşme sürecine uyum sağlayabildiği görülmüştür. Seal çalışması sonucunda bağımsız hasar büyüklüğü dağılım tiplerinin Pareto ve log-normal dağılımları dışında sınırlı olduğunu belirlemiştir. Aktüeryal geçmiş içerisinde de gerçek hasar büyüklüklerinin bir dağılıma tamamen uyum sağladığı durumlarla nadiren karşılaşılmaktadır.

Alt-üstel dağılım sınıfının, standart dağılım sınıfları bakımından incelenmesinde çeşitli durumlarla karşılaşılmaktadır. Cramer-Lundberg modelinin kalın kuyruklu dağılımlar üzerindeki etkisinin şu şekilde olduğu bulunmuştur:

Bütünleşik kuyruk dağılımının alt-üstel dağılım sınıfı içerisinde yer alması ($F_I \in S$)

durumunda iflas olasılığının $\psi(u) \sim \rho^{-1} \bar{F}_I(u)$ şeklinde hesaplandığı bilinmektedir.

Hasar büyüklüğü dağılımının üstel olması durumunda Cramer-Lundberg tahminleri

$$\psi(u) \leq e^{-\nu u} \quad (3.57)$$

ve

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{\nu u} \psi(u) = C < \infty \quad (3.58)$$

eşitlikleriyle hesaplanmakta ve küçük başlangıç sermayesine sahip durumlarda bile iflas olasılığı için şaşırtıcı derecede iyi tahmin değerleri elde edilmektedir. Büyük hasarların ortaya çıkması durumunda ise iflas olasılığının tahmini ancak teorik düzeyde kalabilmekte ve büyük hasarlara ilişkin iflas olasılığı; $\psi(u) \sim \rho^{-1} \bar{F}_1(u)$ şeklinde hesaplanabilmektedir.

Bu durumda hesaplama yapılabilmesi için ilk incelenmesi gereken durum bütünleşik kuyruk dağılımının alt-üstel dağılım sınıfı içerisinde yer alıp almadığıdır.

3.2.2.1. Bütünleşik kuyruk dağılımı ile kuyruk dağılımları arasındaki ilişki

Bütünleşik kuyruk ve kuyruk dağılımları arasında iki önemli durum ortaya çıkmaktadır. Bu durumlardan ilki; $F \in S$ olmasının $F_1 \in S$ olmasını sağlayıp sağlamadığı, ikinci durum ise ters eşitlik olarak; $F_1 \in S$ olmasının $F \in S$ durumunu sağlayıp sağlamayacağıdır. Literatürde birçok çalışmada kuyruk dağılımının ya da bütünleşik kuyruk dağılımının alt-üstel dağılıma uyması durumu üzerine çalışılmıştır. Özellikle koşulların sağlanması bakımından çalışmalarda farklı dağılımlar kullanılmıştır

Net getiri koşulu sıfırdan büyük olan ($\rho > 0$) ve $F \in D$ olması durumundaki Cramer-Lundberg modelinde; $u \rightarrow \infty$ iken iflas olasılığı; $\psi(u) \sim \rho^{-1} \bar{F}_1(u)$ şeklinde hesaplanmaktadır.

Dağılım fonksiyonunun baskın değişen sınıf içerisinde yer alması ($F \in D$) koşulu, tüm ilgili örneklerde $F_1 \in S$ ' nin ispatlanmasından daha kolay bir şekilde kanıtlanmaktadır. Seneta 1976 yılındaki (Seneta,1976) çalışmasında herhangi bir

dağılımın baskın değişen sınıf içerisinde yer alması durumunda $\int_0^{\infty} x^k dF(x) = \infty$

eşitliğini sağlayacak şekilde bir $k \in N$ sayısının bulunacağını ve bu durum altında yüksek dereceden momentlere sahip olduğunu göstermiştir. Karamata Teoreminde ise $F \in R$ olması durumunda $F_1 \in R$ ve buradan da $F_1 \in S$ olacağı ispatlanmıştır. Kalın kuyruklu Cramer-Lundberg tahmini için Klüppelbeg 'in 1989 yılındaki çalışmasına bakılabilir. Cline 1986 yılındaki çalışmasında ise, $F_1 \in S$

olması için tehlike hızı ve tehlike fonksiyonunun sağlaması gereken koşullarını incelemiştir.

$F_I \in S$ Durumu İçin Yeterli Koşullar

Aşağıdaki koşullardan herhangi birinin sağlanması durumunda bütünleşik kuyruk dağılımı alt-üstel dağılım sınıfına dahil olacaktır.

$$(a) \limsup_{x \rightarrow \infty} x m(x) < \infty \text{ sağlıyor ise } F_I \in S \text{ olacaktır.} \quad (3.59)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} m(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} x m(x) = \infty \quad (3.60)-(3.61)$$

Ayrıca, aşağıdaki koşullardan birini de sağlayabiliyor ise bütünleşik kuyruk dağılımı alt-üstel dağılım sınıfına dahil olacaktır.

Bu koşullar;

- $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xm(x)}{\mu(x)} < 1$ (3.62)
- $-1 \leq \delta < 0$ olmak üzere $m(x) \in R_\delta$
- $0 < \delta < 1$ ve $m(x)$, 0'a doğru azalan bir fonksiyon olmak üzere $Q \in R_\delta$
- $m(x) \in R_\delta$ ve $m(x)$ 0'doğru azalan bir fonksiyon olmak üzere $\mu(x) - xm(x) \in R_I$

olması durumudur (Embrechts et al., 2001).

Bütünleşik kuyruk dağılımının alt-üstel dağılım yapısına uyduğu dağılımlara örnek olarak; Weibull, Benktander-type I ve II, log-normal dağılımları verilebilir.

Net getiri koşulunun sıfırdan büyük olması ($\rho > 0$) ve $F_I \in S$ için gerekli (a) ya da (b) koşullarını sağlaması durumunda Cramer-Lundberg modelinde; $u \rightarrow \infty$ ' iken iflas olasılığı

$$\psi(u) \sim \rho^{-1} \bar{F}_I(u) \text{ şeklinde hesaplanmaktadır.}$$

$F_I \in S$ olmasına rağmen $F \notin S$ olan daşılımlar bulunmaktadır. Klüppelberg 1988 yılındaki çalışmasında bu konu ile ilgili sonuçlar çıkarmıştır. Sonlu ortalamaya sahip F daşılımları; Pareto, Weibull ($\tau < 1$), log-normal, Benktander I ve II tipleri, Burr, log-gamma daşılımlarında $F \in S$ ve $F_I \in S$ olmaktadır.

4. UYGULAMA

4.1.Giriş

Çalışmanın bu bölümünde Trafik Sigortaları Bilgi Merkezi'nden (TRAMER) alınan Karayolları Motorlu Araçlar Zorunlu Mali Sorumluluk Sigortası verileri kullanılmıştır. TRAMER, 16.12.2003 tarih ve 25318 sayılı Resmi Gazetede yayımlanan "Trafik Sigortası Bilgi Merkezi Yönetmeliği" 'ne göre kurulmuştur. TRAMER sisteminin temel amaçları, trafik sigortasında denetim etkinliğinin ve sektörde uygulama birliğinin sağlanması, sigortasını yaptırmamış motorlu araç işletenlerinin tespiti ve sahtekarlığa karşı önlem alınması, toplumda sigorta sistemine olan güvenin artırılması,daha sağlıklı fiyatlandırma yapılabilmesi ve haksız rekabetin önlenmesi gibi hususlardır.Bu amaçları gerçekleştirmek üzere, trafik sigortasına ilişkin tüm verilerin merkez bir veritabanında toplanması, günlük olarak güncellenmesi ve bu verilerin ilgili tarafların ortak kullanımına sunulmasını sağlamaktadır.Trafik sigortası üretimi gerçekleştiren bütün sigorta şirketlerinin 01/01/2003 tarihinden itibaren tüm poliçe bilgileri ve bunların hasar ve ödeme kayıtları TRAMER sistemine transfer edilmiş olup, yeni üretilen poliçeler ve hasar kayıtları günlük olarak transfer edilmektedir.

Karayolları Motorlu Araçlar Zorunlu Mali Sorumluluk Sigortası, 2918 sayılı Karayolları Trafik Kanununda düzenlenen ve trafiğe çıkan her aracın yaptırmak zorunda olduğu bir sigorta çeşididir. 2918 sayılı Karayolları Trafik Kanunu'na göre poliçede tanımlanan motorlu aracın işletilmesi sırasında, bir kimsenin ölümüne veya yaralanmasına veya bir şeyin zarara uğramasına sebebiyet vermiş olmasından dolayı işletene düşen hukuki sorumluluğun, zorunlu sigorta limitlerine kadar temin edilmesi sağlanmaktadır. Karayolları Motorlu Araçlar Zorunlu Mali Sorumluluk Sigortasına trafik sigortası da denilmektedir. Ülkemizde önemli bir büyüklüğe ve uygulama alanına sahip olan trafik sigortası, prim üretimi açısından hayat dışı toplam primin %16,6'sını oluşturmakla birlikte, sigortalı sayısı 7 milyon civarındadır ve geniş bir sigortalı tabanı bulunmaktadır.

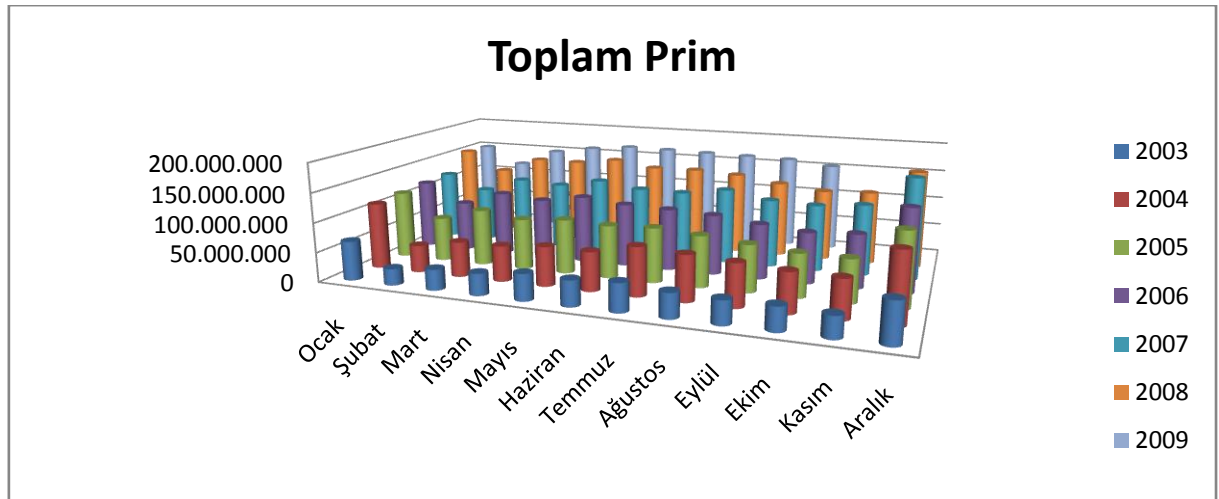
Veri kümesi,Ocak 2003 - Ekim2009 tarihleri arasında TRAMER sistemine kayıt edilen Karayolları Motorlu Araçlar Zorunlu Mali Sorumluluk Sigortası aylık verilerinden elde edilmiştir.Yapılan hesaplamalarda, ilgili tarihler arasındaki her bir

ayda toplanan net poliçe prim tutarları, ödenen ve muallak hasar tutarlarından yararlanılmıştır. Uygulamada kullanılacak hasar tutarları muallak hasar ve ödenen hasar tutarlarının toplamı şeklinde elde edilmiş olup toplam hasar tutarının %82' lik bölümünün ödenen hasar tutarlarından, kalan %18'lik kısmın ise muallak hasar tutarlarından oluştuğu görülmektedir. Verinin düzenlenmesi ve 82'şer dönemden oluşan toplam prim, toplam hasar, ortalama prim ve poliçe başına ortalama hasar süreçlerinin oluşturulmasında Microsoft Excel yazılımından yararlanılmıştır.

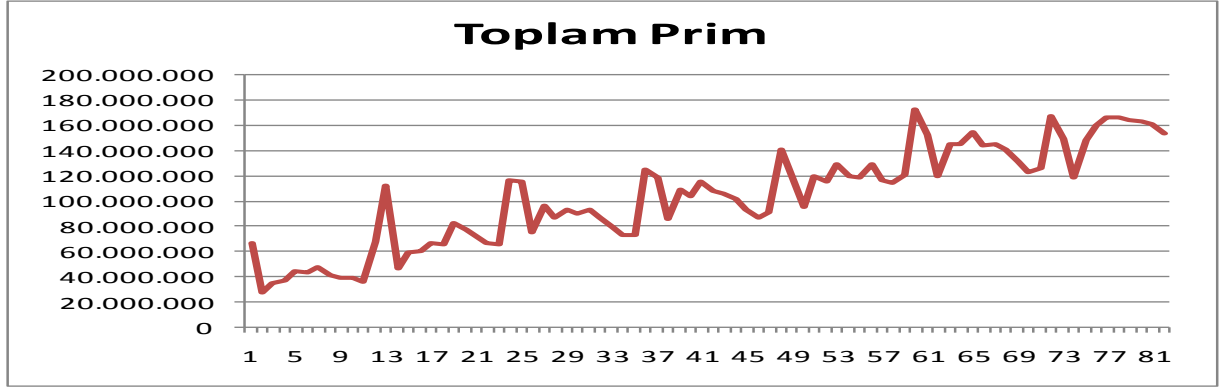
4.2. Veri Niteliği

Toplam prim süreci

Prim sürecinin oluşturulmasında Ocak 2003 – Ekim 2009 tarihleri arasındaki poliçe başlama tarihine göre her bir ayda gerçekleşen net poliçe adedi ve net poliçe prim değerleri kullanılmıştır. Net poliçe adedi; ilgili dönemde başlayan poliçe sayısından, başlangıcından iptal olan poliçeler çıkarılarak bulunan net poliçe sayısını ifade etmektedir. Net poliçe primi ise ilgili dönemde başlayan poliçelere ait toplam prim değerinden, başlangıcından ve kısmi iptal olan poliçelere ait prim değeri çıkarılarak ve primi etkileyen diğer zeyillere ait prim değerleri yansıtılarak bulunan değeri ifade etmektedir. Ocak 2003 – Ekim 2009 tarihleri arasında her bir ayda gerçekleşen prim tutarlarının sütun ve çizgi grafikleri sırasıyla Şekil 4.1.ve Şekil 4.2'de gösterilmektedir.



Şekil 4.1 Ocak 2003-Ekim 2009 tarihleri arasında her bir ayda toplanan prim tutarlarının sütun grafiği



Şekil 4.2 Ocak 2003-Ekim 2009 tarihleri arasında her bir ayda toplanan aylık prim tutarlarının çizgi grafiği

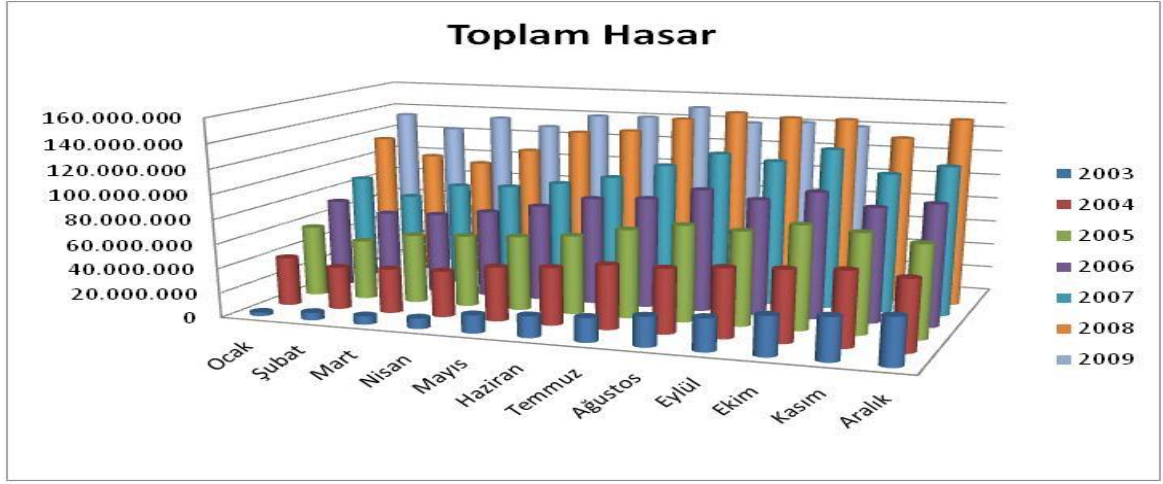
Aylık gerçekleşen toplam prim tutarlarının incelenmesiyle, toplam primin en düşük olduğu ayda 27.803.014,57 TL, toplam primin en fazla olduğu ayda ise 1.728.676.233,29 TL prim toplandığı görülmektedir. Prim tutarlarının ortalama değerinin 103.394.994,02 TL olduğu ve 82 dönem boyunca toplam 8.478.389.509 TL primin toplandığı görülmüştür.

Şekil 4.2'den görüldüğü üzere, zaman içerisinde her bir ayda gerçekleşen toplam prim miktarlarının arttığı gözlemlenmektedir. Bu durum yıllar itibariyle sigortası yapılan araç sayılarındaki artıştan kaynaklanmaktadır.

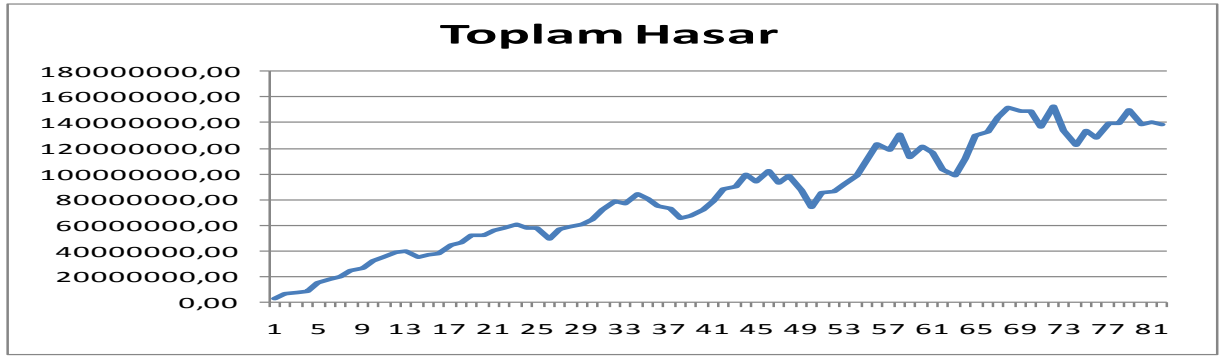
Toplam hasar süreci

Hasar sürecinin oluşturulmasında, Ocak2003 - Ekim 2009 tarihleri arasındaki hasar tarihi esasına göre her bir ayda ödenen hasar tutarları ve muallak hasar tutarları kullanılmıştır. Ödenen hasar tutarı, ilgili yıl ve ay ayırımında hasar tarihine göre yapılan ödemelerin toplamı olup; tazminat tutarı, ekspertiz ücreti ve diğer masrafların toplamı dikkate alınmıştır. Toplam hasar tutarı, her bir ayda ödenen hasar ve muallak hasar tutarlarının toplamı olarak bulunmuştur.

Ocak 2003 - Ekim 2009 tarihleri arasında her bir ayda gerçekleşen toplam hasar tutarlarının sütun ve çizgi grafikleri sırasıyla Şekil 4.3.ve Şekil 4.4'de gösterilmektedir



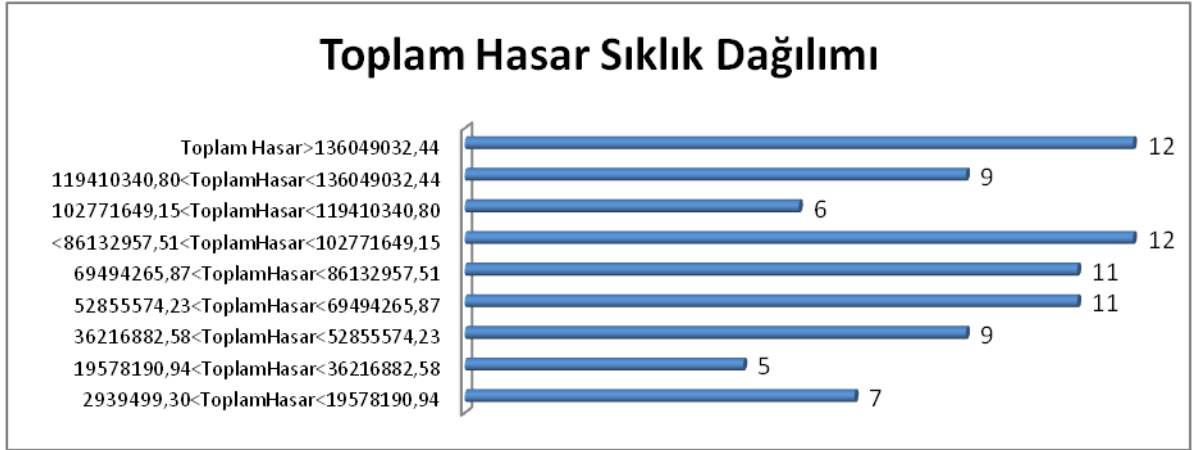
Şekil 4.3 Ocak 2003-Ekim 2009 tarihleri arasında her bir ayda gerçekleşen toplam hasar tutarlarının sütun grafiği



Şekil 4.4 Ocak 2003-Ekim 2009 tarihleri arasında her bir ayda gerçekleşen toplam hasar tutarlarının çizgi grafiği

Şekil 4.3 ve 4.4'den görüldüğü üzere, gerçekleşen aylık toplam hasar tutarlarının incelenmesiyle, toplam hasarın en düşük olduğu ayda 2.939.499,3 TL, toplam hasarın en yüksek olduğu ayda ise 15.268.772,41 TL tutarında hasarın gerçekleştiği görülmektedir. Hasar tutarlarının ortalama değeri 83.192.087,97 TL olup, 82 dönem boyunca 6.821.751.209 TL 'lik hasarın oluştuğu gözlemlenmektedir.

Toplam hasar tutarlarının sıklık dağılımı, hasar büyüklükleri hakkında bilgi sahibi olunmasını sağlayarak veri içerisindeki büyük hasarların gözlemlenmesini sağlamaktadır. Toplam hasarın sıklık dağılımı Şekil.4.5'de gösterilmektedir.



Şekil 4.5 Toplam hasarın sıklık dağılımı

Sıklık dağılımının incelenmesiyle, 82 dönemden 12'sinde belirli bir üst değerden daha yüksek hasarların gerçekleştiği; bununla birlikte düşük hasar tutarlarının dönem içerisinde daha seyrek gerçekleştiği gözlemlenmektedir. Bu durum, hasarların, dağılımın daha çok sağ kuyruk bölgesinde yoğunlaşmasına neden olmakta ve hasar tutarlarının kalın kuyruklu bir dağılıma uyabileceği durumunu gündeme getirmektedir.

4.3. Risk Sürecinin İncelenmesi

TRAMER sistemine kayıtlı Ocak 2003 - Ekim 2009 tarihleri arasındaki her bir ayda gerçekleşen toplam hasar, toplam prim, poliçe başına ortalama hasar, ortalama prim tutarlarından ikili gruplar oluşturularak çeşitli varsayımlar altında risk süreci incelenmesi yapılmış, risk sürecinin ilk kez sıfırın altına düştüğü durum için, iflasın gerçekleşme olasılıkları hesaplanmıştır.

Risk sürecinin incelenmesinde primlerin dönem başında toplandığı, hasar ödemelerinin ise dönem sonunda yapıldığı varsayılmaktadır.

Risk sürecinin oluşturulmasında, U_0 başlangıç sermayesi ile sürece başlayan sistem, dönem başında toplanan prim tutarları ile birlikte dönem sonuna kadar aylık faiz oranına göre faizlendirilmekte ve dönem sonunda da hasar ödemeleri yapılmaktadır. İlgili dönem sonunda sistemde kalan tutar, bir sonraki dönemin başlangıç sermayesini oluşturmaktadır.

Risk süreci, $t = 1, 2, \dots, 82$ olmak üzere;

$$U_t = (U_{t-1} + \Pi_t)(1+r) - S_t \quad \text{şeklinde gösterilmektedir.}$$

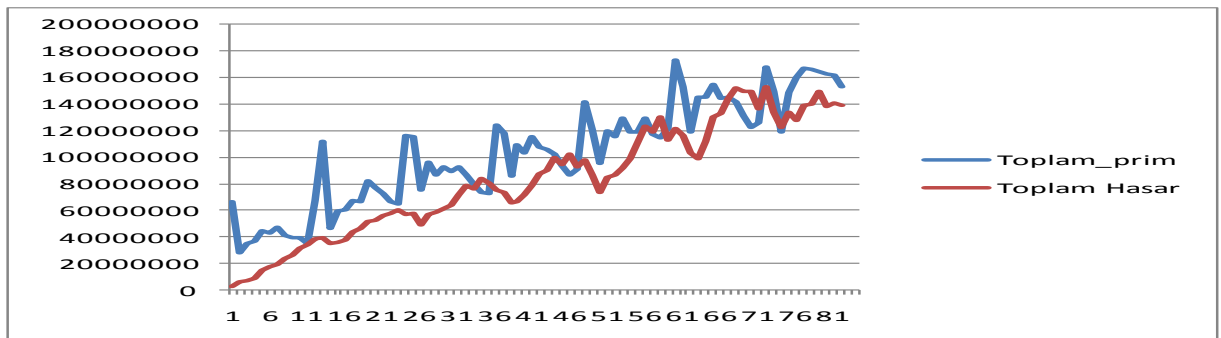
Uygulamada aylık faiz oranı 0,01 olarak alınmış olup, toplam ve ortalama değerlere göre incelenen süreçlerde farklı başlangıç sermaye değerleri kullanılmıştır. Uygulamada sırasıyla;

- Toplam hasar - toplam prim tutarlarına göre,
- Toplam hasar-toplam primin belirli bir oranına göre,
- Poliçe başına ortalama hasar–ortalama prim tutarlarına göre,
- Poliçe başına ortalama hasar–ortalama primin belirli bir oranına göre oluşturulan süreçler incelenmiştir.

Toplam hasar - toplam prim tutarlarına göre risk süreci

İncelemede Ocak 2003 - Ekim 2009 tarihleri arasındaki her bir ayda gerçekleşen toplam hasar ve toplam prim tutarları 82 dönemlik zaman serilerine dönüştürülerek risk süreci oluşturulmuştur.

İncelenen 82 dönem içerisindeki her bir ayda toplanan prim tutarlarının, ilgili aylarda gerçekleşen hasar tutarlarından daha yüksek olduğu gözlemlenmiştir. Şekil 4.6.'da 82 dönem boyunca gerçekleşen toplam hasar - toplam prim tutarlarının yapısı gösterilmektedir.

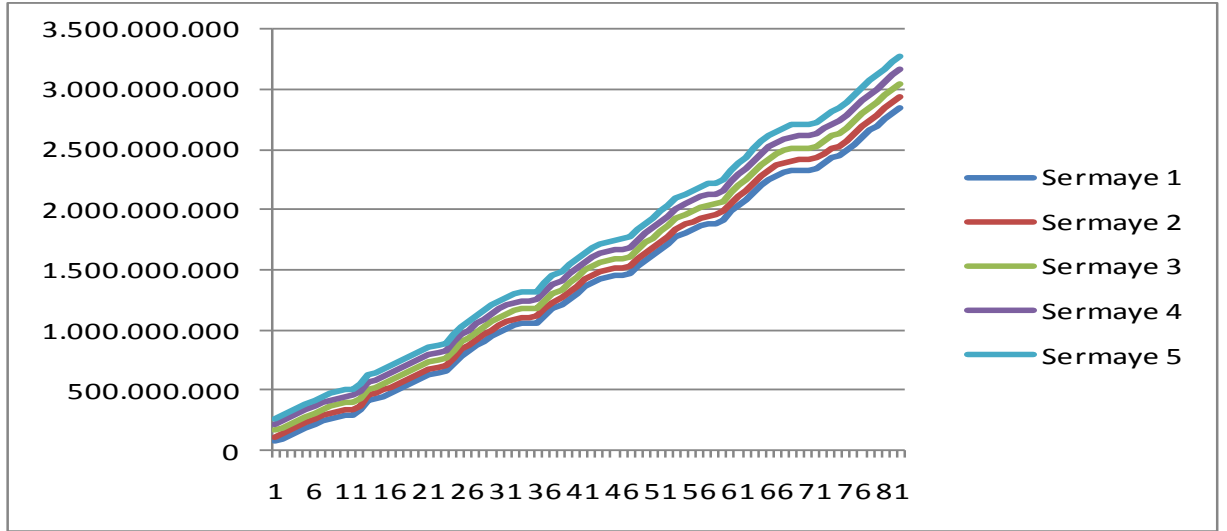


Şekil 4.6 Toplam hasar-toplam prim tutarlarının çizgi grafiği

Toplam hasar tutarının dağılımının bulunmasında EasyFit Professional 5.5 yazılımı kullanılmıştır. Yazılım sonucunda toplam hasar tutarının kalın kuyruklu dağılımlardan Lognormal dağılıma uygunluk gösterdiği gözlemlenmiştir. Uygun dağılımın belirlenmesinde Ki-Kare uyum iyiliği testinden yararlanılmıştır.

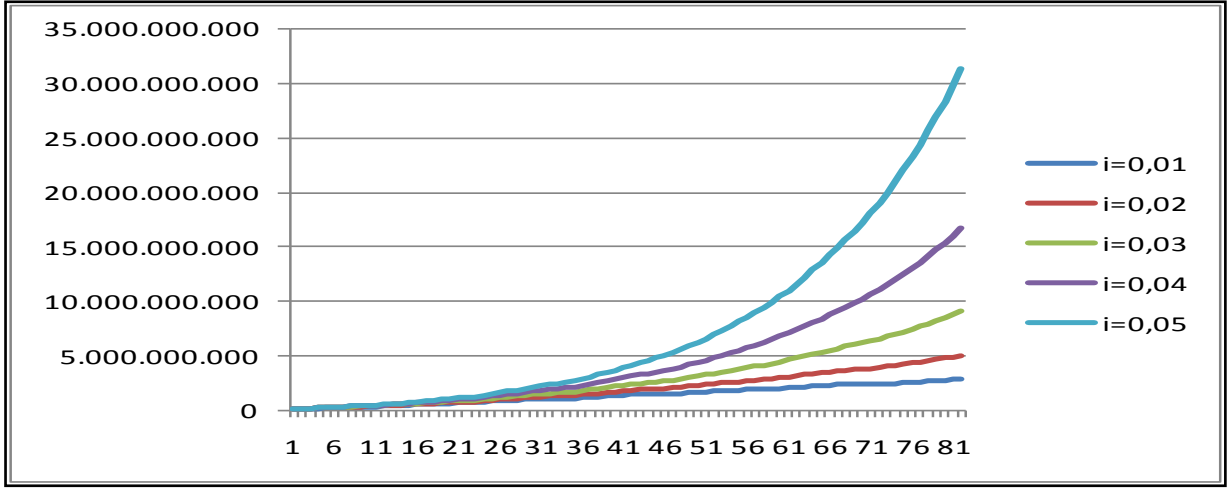
Ki-Kare uyum iyiliği testi sonucunda p değeri 0,34025 olarak bulunmuştur. Bulunan p değerinin $\alpha=0.05$ değerinden büyük olması nedeniyle poliçe başına aylık ortalama hasar tutarının $\mu=18,028$ ve $\sigma=0.7822$ parametreleriyle Log-normal dağılıma uyduğu %95 güvenirlilik düzeyinde kabul edilmektedir.

82 dönem boyunca gözlemlenen aylık toplam hasar tutarı ile aylık toplam prim tutarına göre oluşturulan risk sürecinde, başlangıç sermaye miktarları sırasıyla 10.000.000 TL, 50.000.000 TL, 100.000.000 TL, 150.000.000 TL ve 200.000.000 TL olarak alınmıştır. Beş farklı başlangıç sermaye miktarı ve 0,01 aylık sabit faiz oranı varsayımında, aylık toplam hasar tutarı ile aylık toplam prim tutarından oluşan risk sürecinin yapısı Şekil 4.7’de gösterilmektedir.



Şekil 4.7 Aylık 0,01 faiz oranı ve beş farklı sermaye miktarına göre aylık toplam hasar-toplam prim tutarlarının risk süreci grafiği

İncelemede faiz oranı sabit ve 0,01 olarak alınmıştır. Farklı faiz oranlarının risk süreci üzerindeki etkisinin gözlemlenebilmesi için sermaye miktarı 10.000.000 TL olmak üzere beş farklı faiz oranı için risk sürecinin gelişimi Şekil 4.8’de gösterilmektedir. Grafikten faiz oranlarındaki %1 ‘lik artış etkisinin özellikle ilerleyen dönemlerde çok daha yüksek olduğu görülmektedir.



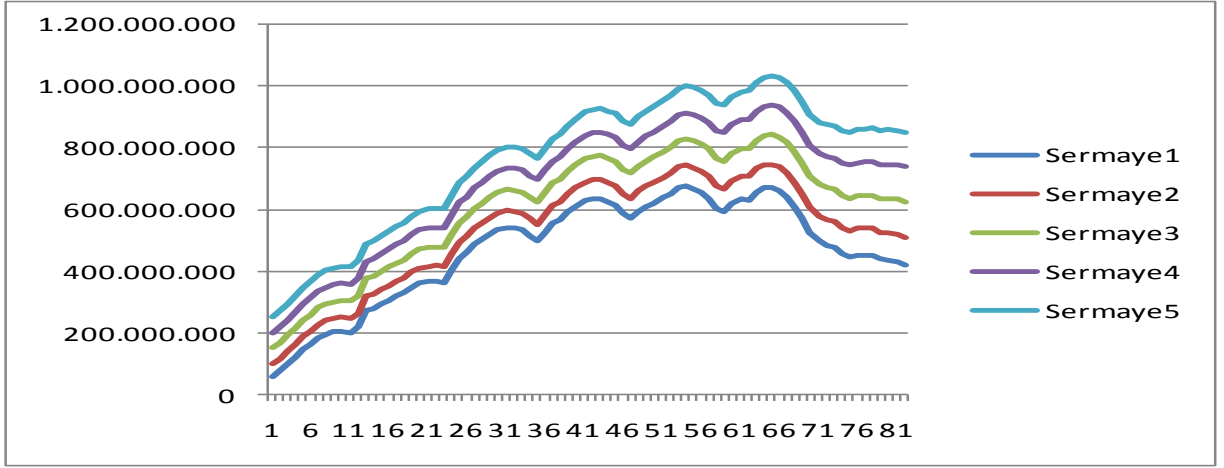
Şekil 4.8 Beş farklı aylık faiz oranı ve Sermaye 1 miktarına göre hesaplanan risk süreçlerinin grafiği

Toplam hasar- toplam primin belirli bir oranına göre risk süreci

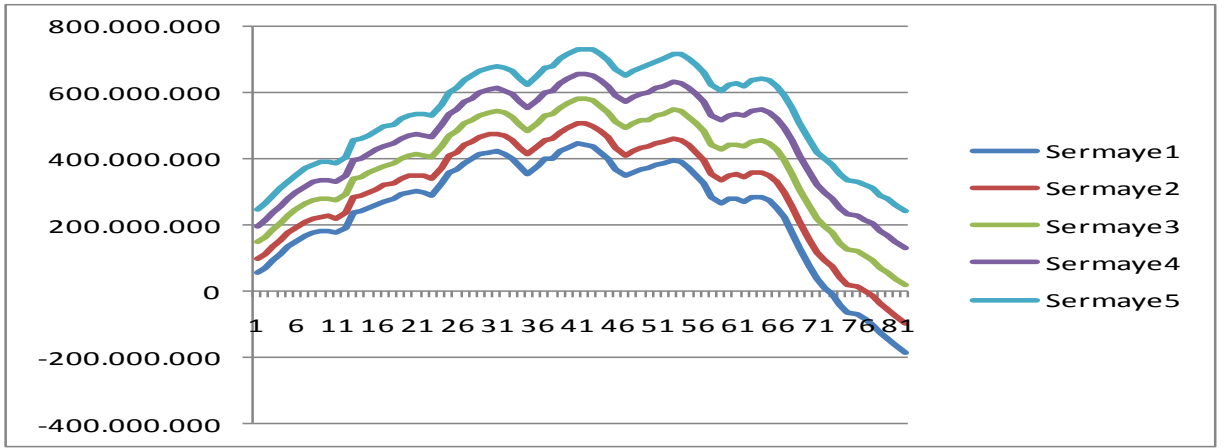
Şekil 4.7'den de görüldüğü üzere toplam hasar tutarı ile toplam prim tutarlarının oluşturduğu risk süreci minimum başlangıç sermayelerinde bile sıfırın altına düşmemiştir.

Bu nedenle toplam prim tutarının belirli bir yüzdesi alınarak risk süreci incelemesi yapılmıştır. Toplam primin belirli bir yüzdesinin alınması prim değerlerinde hiçbir sigorta masrafının dikkate alınmamış olması ve bu nedenle de prim değerlerinin yüksek çıkıyor olmasından da kaynaklanabilmektedir. Toplam primin belirli bir oranının masraflar olarak ayrılacağı şeklinde varsayım yapılarak risk süreci incelemesi yapılabilmektedir. Toplam hasar ve belirli yüzdesi alınan toplam prim tutarlarından oluşturulan risk süreçlerinin incelenmesinde başlangıç sermaye miktarları sırasıyla 10.000.000 TL, 50.000.000 TL, 100.000.000 TL, 150.000.000 TL, 200.000.000 TL olarak alınmıştır.

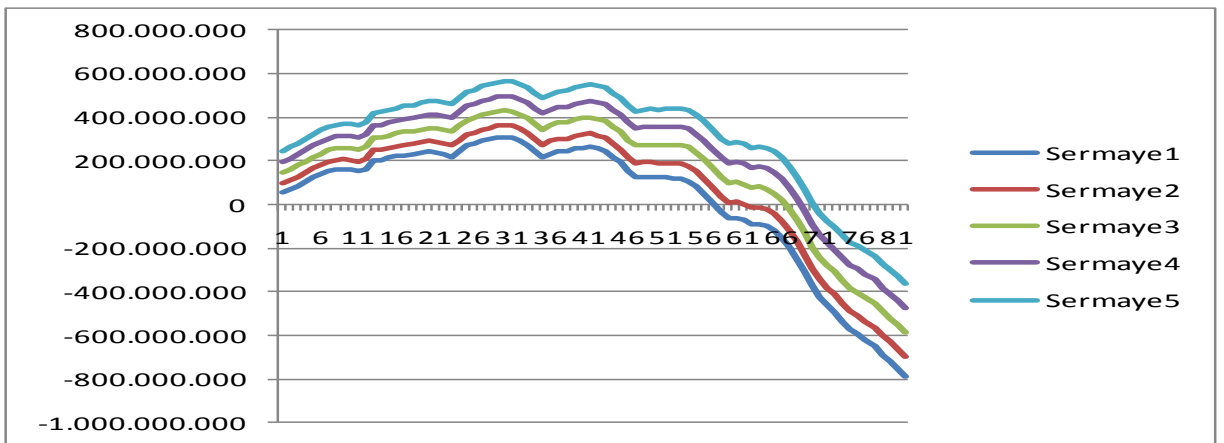
Toplam prime uygulanan çeşitli yüzdelerle göre, belirli bir yüzdesi alınan toplam prim tutarları ile toplam hasar tutarlarından oluşan risk süreçlerinin yapısı incelenmiştir. Sırasıyla Şekil 4.9'da toplam primin %80'inin alınması durumu; Şekil 4.10'da toplam primin %75'inin alınması durumu; Şekil 4.11'de toplam primin %70'inin alınması durumuna bağlı olarak risk süreçlerinin grafikleri çizilmiştir.



Şekil 4.9 Toplam primin %80'si ve toplam hasar tutarına göre oluşturulan risk süreci grafiği



Şekil 4.10 Toplam primin %75'i ve toplam hasar tutarına göre oluşturulan risk süreci grafiği



Şekil 4.11 Toplam primin %70'i ve toplam hasar tutarına göre oluşturulan risk süreci grafiği

Grafiklerden de görüldüğü gibi toplam prim tutarının yaklaşık %75'den daha az alınması durumunda risk süreci sıfır seviyesinin altına düşebilmekte ve iflas olasılıkları hesaplanabilmektedir. Tüm farklı başlangıç sermaye miktarları için iflas olasılıklarının hesaplanabilmesine imkan sağlamak için ortalama primin %70'i alınarak risk süreci incelenmiştir.

Poliçe başına aylık ortalama hasar tutarı ile %30'u masraflar olarak ayrılarak hesaplanan aylık ortalama prim tutarlarına göre oluşturulan risk sürecinin 0,01 aylık faiz oranında, farklı başlangıç sermayeleri ve güvenlik yükleme faktörleri için iflas olasılıkları hesaplanmıştır. İflas olasılığının hesaplanmasında Matlab 7.1 yazılımından yararlanılmıştır.

10 farklı başlangıç sermayesi ve beş farklı güvenlik yükleme faktörüne göre, 0,01 faiz oranı altında elde edilen iflas olasılıkları Çizelge 4.1'de gösterilmektedir.

Çizelge 4.1 Toplam hasar – % 70 toplam prim tutarının oluşturduğu risk süreci için çeşitli iflas olasılıkları

BAŞLANGIÇ SERMAYE MİKTARLARI	GÜVENLİK YÜKLEME FAKTÖRÜ(1+ ρ)				
	1	1.25	1.50	1.75	1.80
Sermaye 1 = 10.000.000	0,9399	0,7519	0,6266	0,5371	0,5222
Sermaye 2 = 20.000.000	0,8798	0,7038	0,5865	0,5027	0,4888
Sermaye 3 = 30.000.000	0,8197	0,6558	0,5465	0,4684	0,4554
Sermaye 4 = 40.000.000	0,7596	0,6077	0,5064	0,4341	0,4220
Sermaye 5 = 50.000.000	0,6995	0,5596	0,4663	0,3997	0,3886
Sermaye 6 = 75.000.000	0,5492	0,4394	0,3662	0,3138	0,3051
Sermaye 7 = 100.000.000	0,3990	0,3192	0,2660	0,2280	0,2217
Sermaye 8 = 125.000.000	0,2487	0,1990	0,1658	0,1421	0,1382
Sermaye 9 = 150.000.000	0,0985	0,0788	0,0656	0,0563	0,0547
Sermaye 10= 175.000.000	İflas Gerçekleşmemiştir				

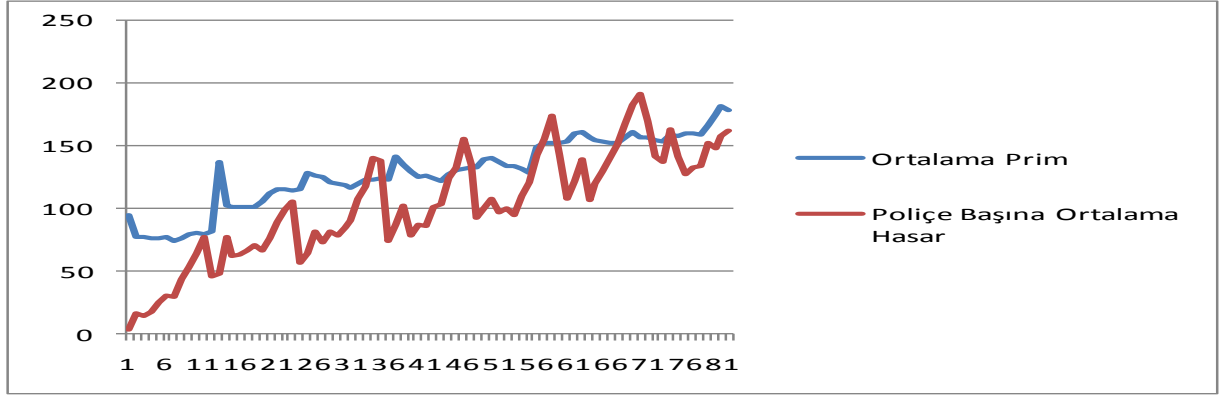
Yazılımdan elde edilen değerler sonucunda, başlangıç sermaye miktarlarındaki ve sistemin uygulayacağı güvenlik yükleme faktörlerindeki artışın iflas olasılıklarında azalmaya neden olduğu gözlemlenmektedir. Çizelgeden iflas olasılığının en yüksek olduğu 0.9399 değeri, sermaye miktarının 10.000.000 TL ve güvenlik yükleme faktörünün bulunmadığı durumda elde edilirken; en düşük iflas olasılığı olan 0.0547 değeri ise, sermaye miktarının 150.000.000 TL ve güvenlik yükleme faktörünün 0,8 olduğu durum için elde edilmektedir. Sermaye miktarının 175.000.000 olması durumunda ise sermaye miktarı tüm hasarları ödemek için yeterli olmakta ve iflas gerçekleşmemektedir.

Police başına aylık ortalama hasar – ortalama prim tutarlarına göre risk süreci incelemesi

Police başına aylık ortalama hasar tutarı; o ay içerisinde gerçekleşen toplam hasar büyüklüğünün yine o ay yürürlükteki toplam police sayısına bölünmesiyle elde edilen miktardır. Police başına ortalama hasar tutarlarında, her bir dönemdeki police sayısı göz önünde bulundurmaktadır. Bu durum incelenen dönem içerisinde police sayısında meydana gelen artışın, hasar ödemelerinde de artışa neden olacak olmasından kaynaklanmaktadır. Her bir aydaki police başına ortalama hasar tutarı, toplam hasar tutarına göre daha durağan bir yapıya sahip olacaktır. Bu nedenle, police başına ortalama hasar tutarlarına göre yapılan inceleme, daha tutarlı değerleri yansıtmamasından dolayı tercih edilmektedir.

Police başına aylık ortalama hasar tutarının incelenmesiyle, en düşük ödemenin yapıldığı ayda 4,220944188 TL, en büyük hasar tutarının meydana geldiği ayda ise 191,298765 TL'lik hasarın gerçekleştiği ve police başına aylık ortalama hasar tutarının ortalama değerinin 102,6228033 TL olduğu bulunmuştur. 82 dönem boyunca police başına ortalama hasar toplamının 8415,069869 TL olduğu gözlemlenmektedir.

Police başına aylık ortalama hasar tutarı ile ortalama prim tutarlarının ilgili dönem içerisindeki gelişiminin çizgi grafiği Şekil 4.9'da gösterilmektedir.

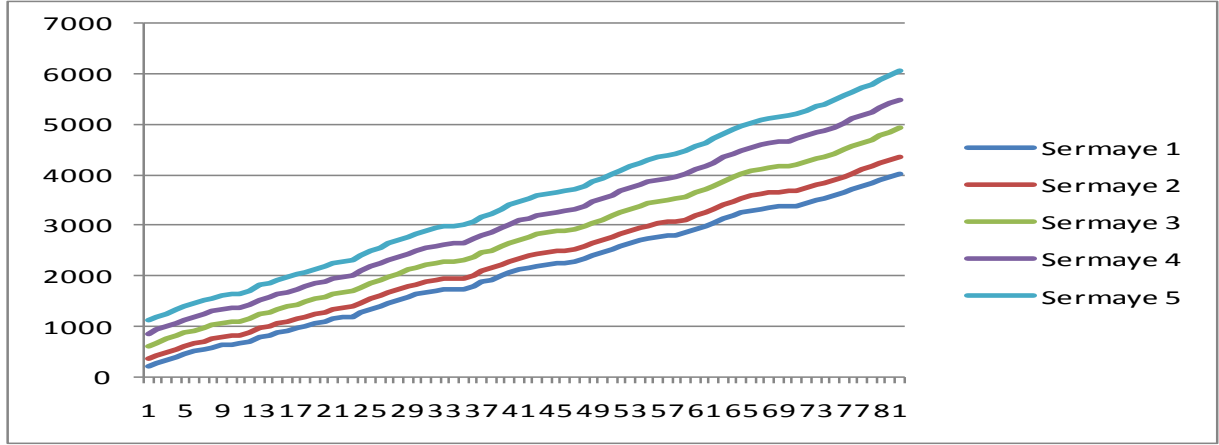


Şekil 4.12 Poliçe başına aylık ortalama hasar tutarı ile ortalama prim tutarlarının çizgi grafiği

Poliçe başına aylık ortalama hasar tutarının dağılımının bulunmasında EasyFit Professional 5.5 yazılımı kullanılmıştır. Yazılım sonucunda poliçe başına aylık ortalama hasar tutarının kalın kuyruklu dağılımlardan Lognormal dağılıma uygunluk gösterdiği gözlemlenmiştir. Uygun dağılımın belirlenmesinde Kolmogorov-Smirnov ve Ki-Kare uyum iyiliği testlerinden yararlanılmıştır.

Kolmogorov–Smirnov uyum iyiliği testi sonucunda p değeri 0,05013; Ki-Kare uyum iyiliği testi sonucunda ise p değeri 0,18485 olarak bulunmuştur. Bulunan p değerlerinin $\alpha=0,05$ değerinden büyük olması nedeniyle poliçe başına aylık ortalama hasar tutarının $\mu=4,4916$ ve $\sigma=0,63221$ parametreleriyle Log–normal dağılıma uyduğu %95 güvenirlilik düzeyinde kabul edilmektedir.

82 dönem boyunca gözlemlenen poliçe başına aylık ortalama hasar tutarı ile aylık ortalama prim tutarlarına göre oluşturulan risk sürecinde, başlangıç sermaye miktarları sırasıyla 100 TL, 250 TL, 500 TL, 750 TL ve 1000 TL olarak alınmıştır. Bu durum altındaki risk sürecinin gelişimi Şekil 4.13’de gösterilmektedir.



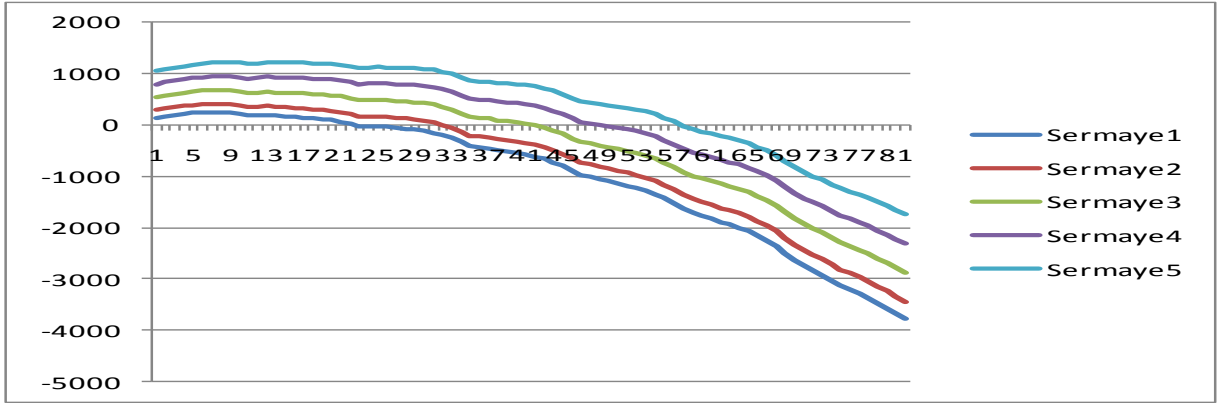
Şekil 4.13 Beş farklı sermaye miktarına göre ortalama hasar-ortalama prim tutarlarının risk süreci grafiği

Police başına ortalama hasar–ortalama primin belirli bir oranına göre oluşturulan risk süreci

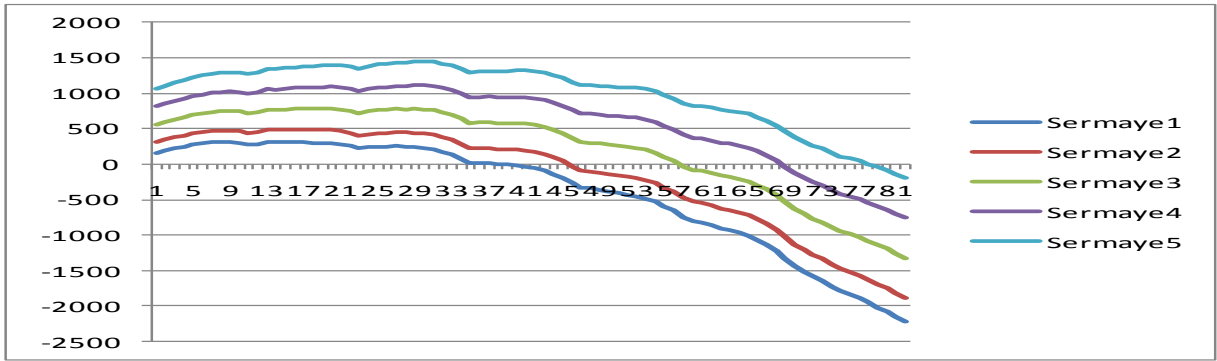
Şekil 4.13'den de görüldüğü üzere poliçe başına ortalama hasar tutarı ile ortalama prim tutarlarının oluşturduğu risk süreci minimum başlangıç sermayelerinde bile sıfırın altına düşmemiştir.

Bu nedenle ortalama prim tutarının belirli bir yüzdesi alınarak risk süreci incelemesi yapılmıştır. Ortalama primin belirli bir yüzdesinin alınmasında hiçbir sigorta masrafı dikkate alınmadığından prim değerlerinin yüksek çıkmış olması etkili olmuştur. Poliçe başına ortalama hasar vebelirli yüzdesi alınan ortalama prim tutarlarından oluşturulan risk süreçlerinin incelenmesinde başlangıç sermaye miktarları sırasıyla 100 TL, 250 TL, 500 TL, 750 TL, 1000 TL olarak alınmıştır.

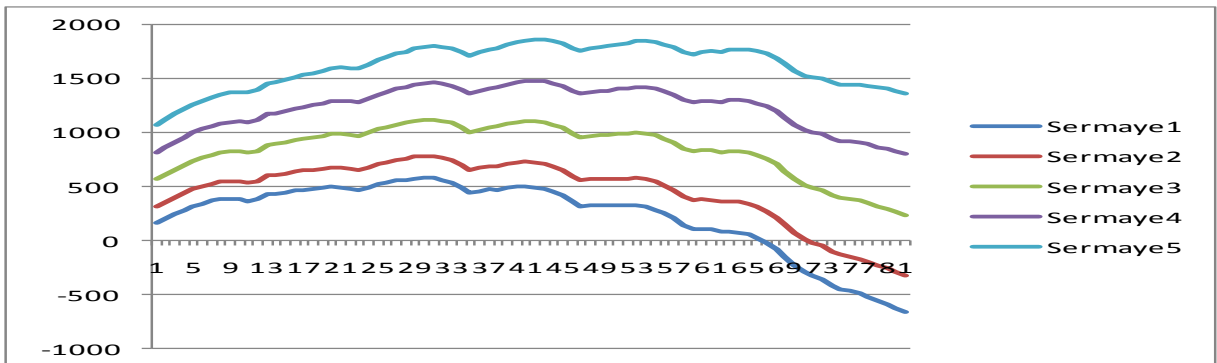
Ortalama prim tutarına uygulanan çeşitli yüzdelerle değerlere göre, belirli bir yüzdesi alınan ortalama prim tutarları ile poliçe başına ortalama hasar tutarlarından oluşan risk süreçlerinin yapısı incelenmiştir. Sırasıyla Şekil 4.14'de ortalama primin %50 'sinin alınması durumu; Şekil 4.15'de ortalama primin %60 'ının alınması durumu; Şekil 4.16'da ortalama primin %70 'inin alınması durumu; Şekil 4.17'de ortalama primin %75 'inin alınması durumuna bağlı olarak risk süreçlerinin grafikleri çizilmiştir.



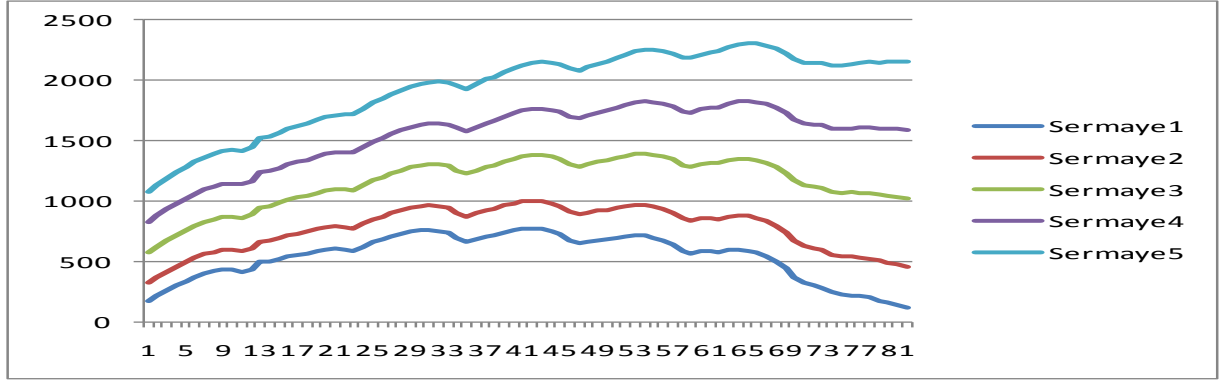
Şekil 4.14 Ortalama primin %50'si ve poliçe başına ortalama hasar tutarına göre oluşturulan risk süreci grafiği



Şekil 4.15 Ortalama primin %60'ı ve poliçe başına ortalama hasar tutarına göre oluşturulan risk süreci grafiği



Şekil 4.16 Ortalama primin %70'i ve poliçe başına ortalama hasar tutarına göre oluşturulan risk süreci grafiği



Şekil 4.17 Ortalama primin %75'i ve poliçe başına ortalama hasar tutarına göre oluşturulan risk süreci grafiği

Grafiklerden de görüldüğü gibi ortalama prim tutarının yaklaşık %70 'inden daha az alınması durumunda risk süreci sıfır seviyesinin altına düşmekte ve iflas olasılıkları hesaplanabilmektedir. Tüm farklı başlangıç sermaye miktarları için iflas olasılıklarının hesaplanmasına imkan sağlamak için ortalama primin %60 'ı alınarak risk süreci incelenmiştir.

Poliçe başına aylık ortalama hasar tutarı ile %40 'ı masraflar olarak ayrılarak hesaplanan aylık ortalama prim tutarlarına göre oluşturulan risk sürecinin 0,01 aylık faiz oranında, farklı başlangıç sermayeleri ve güvenlik yükleme faktörlerine göre iflas olasılıkları hesaplanmıştır. İflas olasılığının hesaplanmasında Matlab 7.1 yazılımından yararlanılmıştır.

10 farklı başlangıç sermayesi ve beş farklı güvenlik yükleme faktörüne göre, 0,01 faiz oranı altında elde edilen iflas olasılıkları Çizelge 4.2'de gösterilmektedir.

Yazılımdan elde edilen değerler sonucunda, başlangıç sermaye miktarlarındaki ve sistemin uygulayacağı güvenlik yükleme faktörlerindeki artışın iflas olasılıklarında azalmaya neden olduğu gözlemlenmektedir. Çizelgeden iflas olasılığının en yüksek olduğu 0,9605 değeri, sermaye miktarının 10 TL ve güvenlik yükleme faktörünün bulunmadığı durumda elde edilirken en düşük iflas olasılığı olan 0,0153 değeri ise, sermaye miktarının 200 TL ve güvenlik yükleme faktörünün 0,8 olduğu durum için elde edilmektedir.

Çizelge 4.2 Poliçe başına aylık ortalama hasar – % 60 ortalama prim tutarlarının oluşturduğu risk süreci için çeşitli iflas olasılıkları

Başlangıç Sermaye Miktarları	Güvenlik Yükleme Faktörleri ($1+ \rho$)				
	1	1.25	1.50	1.75	1.8
Sermaye miktarı=10	0,9605	0,7684	0,6403	0,5488	0,5336
Sermaye miktarı=20	0,9079	0,7263	0,6053	0,5188	0,5044
Sermaye miktarı=30	0,8569	0,6855	0,5713	0,4897	0,4886
Sermaye miktarı=40	0,8071	0,6457	0,5381	0,4612	0,4761
Sermaye miktarı=50	0,7534	0,6027	0,5023	0,4305	0,4186
Sermaye miktarı=75	0,6347	0,5078	0,4231	0,3627	0,3526
Sermaye miktarı=100	0,5128	0,4103	0,3419	0,2931	0,2849
Sermaye miktarı=125	0,3914	0,3131	0,2609	0,2237	0,2174
Sermaye miktarı=150	0,2701	0,2161	0,1801	0,1543	0,1500
Sermaye miktarı=200	0,0275	0,0220	0,0184	0,0157	0,0153

4.4.Kalın Kuyruklu Dağılıma Sahip Hasar Büyüklükleri için İflas Olasılığının Hesaplanması

Kalın kuyruklu dağılıma sahip hasar büyüklükleri için iflas olasılığının hesaplanmasında çalışmanın üçüncü bölümünde alt-üstel ve düzenli değişen kalın kuyruk sınıfları için elde edilen iflas olasılığı eşitliklerden yararlanılmaktadır.

Kalın kuyruklu hasar büyüklüğü dağılımları için iflas olasılıklarının hesaplanmasında öncelikle incelenen risk sürecinde iflas durumunun gerçekleşmiş olması gerekmektedir.

Veriye ilişkin risk süreci ve iflas olasılıklarının elde edilmesinde Matlab 7.1 yazılımından yararlanılmıştır.

İncelemede öncelikle Ocak 2003-Ekim 2009 tarihleri arasında her bir ayda gerçekleşen toplam hasar - toplam prim ve ortalama hasar – ortalama prim

tutarlarının oluşturduğu risk süreçleri üzerinde inceleme yapılmıştır. Bu durumda düşük sermaye miktarı ve faiz oranı varsayımında bile risk süreçlerinin sıfır seviyesinin altına düşmediği ve iflas olasılığının hesaplanmadığı görülmektedir. Toplam primin ve ortalama primin belirli bir yüzdesinin alındığı durumlar için de risk süreci incelemesi yapılmış ve çeşitli durumlara göre iflas olasılıkları hesaplanmıştır.

Matlab Yazılımı

Hasar büyüklüğü dağılımının kalın kuyruklu dağılım yapısına uyup uymadığı, oluşturulan risk süreçlerinin incelenmesi ve risk sürecinin sıfır seviyesinin altına düşmesi durumu için iflas olasılıklarının hesaplanabilmesi için geliştirilen Matlab 7.1. yazılımında sırasıyla aşağıdaki işlemler yapılmıştır.

- Microsoft Excel yazılımı kullanılarak düzeltilen Ocak 2003 - Ekim 2009 tarihleri arasındaki her bir ayda gerçekleşen toplam prim ve toplam hasar tutarları, ortalama prim ve ortalama hasar tutarları, poliçe sayıları ve hasar sayıları Matlab programında okutulmuştur.
- Sistemde analiz yapan kişiye başlangıç sermaye miktarı ve faiz oranlarını belirleme tercihi bırakılmış aynı zamanda sistemde otomatik olarak belirli sermaye ve faiz oranları da yazılmıştır.
- Hasar büyüklüğünün incelenmesinde kalın kuyruklu dağılımlardan Pareto, lognormal ve Weibull dağılımlarına göre dağılım, kuyruk dağılım, olasılık, tehlike ve tehlike hızı fonksiyonları, kullanıcı tarafından girilen parametre değerlerine göre oluşturulmuştur.
- Hasar büyüklüğünün dağılımına göre bütünleşik kuyruk dağılımı elde edilmiştir.
- İncelenen hasar büyüklüğü dağılımının kalın kuyruklu dağılım yapısına sahip olup olmadığına, sırasıyla kalın kuyruklu dağılımların dört temel koşulu sorgulanarak karar verilmiştir. İncelenen koşullar;

Koşul 1: $\varepsilon > 0$ olmak üzere $\int_0^{\infty} e^{\varepsilon x} dF(x) = \infty$,

Koşul 2: $x > 0$ için $\bar{F}(x) > 0$,

Koşul 3: $\alpha_F = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\mu(x)}{x}$ olmak üzere $\alpha_F = 0$,

Koşul 4: $s > 0$ olmak üzere $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{sx} \bar{F}(x) = \infty$ 'dir.

- Kalın kuyruklu olduğuna karar verilen hasar büyüklüğü dağılımının sırasıyla uzun kuyruklu, alt-üstel yada düzenli değişen kuyruklu dağılım olup olmadığına çalışmanın ikinci bölümünde verilen koşulları sağlaması yönünden karar verilmiştir.
- Alt-üstel olduğu bulunan hasar büyüklüğü dağılımının bütünleşik kuyruk dağılımının da alt-üstel dağılıma uyup uymadığına tüm bütünleşik kuyruk dağılım koşulları incelenerek karar verilmiştir.
- Hasar büyüklükleri için bakılan tüm kalın kuyruklu ve alt sınıf koşullarından sonra dağılımın yapısı belirlenmiştir.
- 82 aylık toplam hasar ve poliçe başına aylık ortalama hasar büyüklüklerine göre oluşturulan risk süreçleri incelenerek risk süreçlerinin grafikleri çıkartılmıştır.
- Risk sürecinin sıfırın altına düşmesi durumunda araştırmacıya kaçınıcı ayda ilk iflasın gerçekleştiği belirtilerek bu noktadaki iflas olasılığı, çalışmanın üçüncü bölümünde verilen kalın kuyruklu dağılımlardaki iflas olasılığı eşitliklerine göre hesaplanmıştır.
- İflas olasılıklarının hesaplanmasında araştırmacıya güvenlik yükleme faktörünü belirleyebilme tercihi bırakılmıştır.

Lognormal dağılıma uyduğu belirlenen toplam hasar ve poliçe başına toplam hasar tutarlar dağılımlarına göre inceleme yapılmasında interal ve limit işlemlerinde kolaylık sağlaması yönünden hata fonksiyonu (error function-Erf) ve tamamlayıcı hata fonksiyonu (complementary error function-Erfc) tablo değerlerinden yararlanılmıştır.

Bulunan sonuçlar iflas olasılığının güvenlik yükleme faktörü ve başlangıç sermaye miktarlarına göre değiştiğini göstermektedir. Güvenlik yükleme faktörü incelenen sistemde daha güvenli bir durumu yaratacağından, güvenlik yükleme faktöründeki artış, beklenildiği gibi iflas olasılığının düşmesine neden olmuştur. Başlangıç sermaye miktarındaki artışa bağlı olarak da risk sürecinin sıfırın altına düşmesi olasılığı azalmıştır.

Toplam hasar ve poliçe başına ortalama hasarlara göre iflas olasılığının hesaplanmasında sermaye miktarlarına, tutarların ortalama değerlerine bakılarak karar verilmiştir. Toplam hasarlar için başlangıç sermaye miktarları, toplam hasarın beklenen değeri olan 83.192.087,97 TL ortalama değeriyle örtüşecek şekilde milyon bazında alınırken; poliçe başına ortalama hasar tutarları için başlangıç sermaye miktarları, poliçe başına ortalama hasar tutarının beklenen değeri olan 102,6228033 TL ortalama değerleriyle örtüşecek şekilde alınmıştır. Toplam değerler ile ortalama değerler üzerinden hesaplanan iflas olasılıklarında ortalama değerler için iflas olasılıklarının daha yüksek çıktığı ve eğer seçim yapılması istendiği durumda ortalama değerlere göre yapılan hesaplamaların daha gerçekçi ve daha temkinli yaklaşım sağlayacağı şeklinde yorumlanabilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Hayat dışı sigorta branşlarında toplam hasar tahminlerinin yapılması şirket için en önemli inceleme konularından biridir. Bu tür sigorta branşında hem hasar sayısı hem de hasar tutarı birer bilinmeyendir. Bu nedenle de hayat sigortalarına göre çok daha yüksek hata paylarını içinde bulundurmaktadır. Sağlıklı bir fiyatlandırmanın yapılabilmesi ve reasürans konusunda en doğru saklama payı limitinin bulunabilmesi için toplam hasar dağılımlarının çok iyi değerlendirilmesi gerekmektedir. Toplam hasar büyüklüklerine bağlı olarak kurulan modeller şirketin gelecek dönemlerine ışık tutarak yol gösterici bir koruma sağlamış olacaktır. Yapılacak hesaplamaların geçerliliği, verilerin güvenilirliği ve kullanılan yaklaşımların doğruluğuna bağlı olmaktadır.

Hayat dışı sigorta branşında toplam hasar büyüklüklerinin incelenmesinde karşılaşılan en önemli sorunlardan birisi gerçekleşme olasılıkları az; ancak gerçekleşmesi durumunda yüksek hasar tutarlarına neden olan risklerin incelenmesidir. Bu tür riskler şirketin yükümlülük karşılama yeterliliğini doğrudan etkilediğinden, hasar tutarı dağılımının sağ kuyruk bölgesinin bu etkiyi içinde barındıran kalın kuyruklu dağılımlarla modellenmesi gerekmektedir.

Sigorta hesaplamalarında karşılaşılan bir diğer sorun ise bağımlılık durumudur. Genellikle sigorta hesaplamalarında kolaylık sağlanması amacıyla risklerin bağımsız oldukları varsayılmaktadır. Ancak bu varsayım, gerçekçi sonuçlarla bağdaşmamaktadır.

Aktüerler şirketin uzun süreli yükümlülük karşılama yeterliliğini sağlamak için risk sürecini iyi tanımlamak, doğru risk yüklemelerini yapmak, muafiyet ve saklama payı limitlerini çok iyi saptamak zorundadırlar.

İflas olasılıklarının hesaplanmasında temel olarak kullanılan Cramer-Lundberg teoremi, hasarların üstel dağılıma uyması durumunda kullanılmakta ve çok yüksek olmayan başlangıç sermaye değeri ile düzeltme katsayısı değeri kısıtlaması konulmaktadır. Ancak gerçek sigorta veri incelemelerinde büyük hasarların da etkisini içeren Weibull, log-normal ve Pareto dağılımları gibi kalın kuyruklu dağılımlarla karşılaşılmaktadır. Yapılan çalışmalar sonucunda kalın kuyruklu dağılıma sahip hasar büyüklükleri için iflas olasılığının hesaplanabilmesine olanak sağlayan modeller ve formüller geliştirilmiştir.

Bu çalışmada öncelikle, kalın kuyruklu dağılım yapısının, tüm özellikleri ve alt sınıfları açıklanmış, her bir sınıf için gerekli koşullar incelenmiştir. Bu şekilde bir dağılımın kalın kuyruklu ve de alt sınıflarından herhangi birine ait olması için gereken tüm durumlar sırasıyla ele alınmıştır.

Sigortacılıkta şirketin devamlılığı açısından bir yol gösterici olan risk sürecinin yapısı ve özellikleri açıklanmış, iflas olasılıklarının sigorta şirketi açısından önemine değinilmiştir. Kalın kuyruklu dağılım yapısına sahip olduğuna karar verilen hasar büyüklüklerine ilişkin iflas olasılıklarının hesaplanmasında, kalın kuyruklu dağılımların alt sınıflarına özel geliştirilen teoriler ışığında çeşitli formüller elde edilmiştir.

Kullanılan yazılımlar yardımıyla herhangi bir dağılımın kalın kuyruklu dağılıma sahip olup olmadığı araştırılmış, kalın kuyruklu dağılıma sahip olması durumunda hangi alt sınıfa dahil olduğu açıklanmıştır. Risk süreç yapısı incelenerek, risk sürecinin sıfır seviyesinin altına düşmesi durumunda iflas olasılığı, kalın kuyruklu dağılıma özel formüller ışığında hesaplanmıştır.

Çalışmada, Ocak 2003 - Ekim 2009 tarihleri arasındaki Tramer sisteminde kayıtlı olan Karayolları Motorlu Araçlar Zorunlu Mali Sorumluluk Sigortası verisi, çeşitli prim ve hasar tutarlarına bağlı olarak oluşturulan risk süreçleri bakımından incelenmiş ve çeşitli varsayımlara bağlı olarak iflas olasılıkları için sayısal örnekler verilmiştir.

Risk sürecine bağlı olarak gerçekleşen iflas durumlarının oluşmasında sermaye miktarı ve güvenlik yükleme faktörlerinin etkili olduğu gözlemlenmiştir. Sermaye miktarı ve güvenlik yükleme faktörü değerinin beklenildiği gibi iflas olasılığı ile ters orantılı olduğu ve bu değerlerdeki artışın iflas olasılığını belirgin şekilde düşürdüğü görülmüştür.

Bu çalışma ile hayat dışı sigorta alanında önemli yere sahip olan kalın kuyruklu dağılımların risk süreci ve iflas olasılıkları üzerindeki etkisi incelenmiş ve kalın kuyruklu dağılımlara özel iflas olasılıklarının nasıl hesaplanacağı açıklanmıştır.

Uygulamada incelenen hasar büyüklükleri arasında sadece süreç bazında bağımlılık olduğu varsayılmıştır. Hasar büyüklükleri arasındaki bağımlılık yapılarının araştırılması ve bu bağımlılık yapılarının risk süreci ve iflas olasılığı

zerindeki etkisinin incelenmesi yeni bir çalışma olarak araştırmacılara önerilebilmektedir. Bununla birlikte iflas olasılığının hesaplanmasında iflas zamanının da incelenmesi ve elde edilmesi önerilebilecek bir diğer çalışma konusunu oluşturmaktadır.

KAYNAKLAR

- Albrecher, H., 1998, Dependent risks and ruin probabilities in insurance, International Institute for Applied Systems Analysis, 16p.
- Albrecher, H., Asmussen S., Kortschak , D., 2006, Tail asymptotics for the sum of two heavy-tailed dependent risks, Extremes: Mathematics and Statistics, Vol:9 No:2, Springer., pp107-130,
- Ambagaspitiya, R.S., 1998, On the distribution of a sum of correlated aggregated claims, Insurance: Mathematics and Economics 23, pp 15-19.
- Asmussen, S., 2000, Ruin probabilities, Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability Vol.2, World Scientific Publishing, Singapore, 385p.
- Asmussen, S., Binswanger K., 1997, Simulation of ruin probabilities for subexponential claims, Astin Bulletin International Actuarial Association, Vol:27, No:2, pp 297-318 .
- Asmussen, S., Klüppelberg C., 1996, Large deviation results for subexponential tails, with applications to insurance risk, Stochastic Processes and their applications 64, pp 103-125.
- Baltrūnas, A., Klüppelberg, C., 2004, Subexponential distributions - large deviations with applications to insurance and queueing models, Austr.N.Z.J. Stat 46, no 1, pp 141-150.
- Beard, R.E., Pentikainen, T., Pesonen, E., 1984, Risk theory ,The Stochastic basis of Insurance, Chapman and Hall, London.
- Beekman, J.A., Bowers N.L., 1972, An Approximation to the finite time ruin function, Parts 1 and 2, Skandinavisk Aktuarietidskrift, 55, pp. 41–56, pp. 128–137.
- Beirlant, J., Teugels, J.L., 1992, Modelling large claims in non-life insurance, Insurance: Mathematics and Economics 11, pp17-29

- Beirlant, J., Matthys G., Dierckx G., 2001, Heavy-tailed distributions and rating, *Astin Bulletin*, Vol.31, No.1, pp 37-58.
- Bingham, N.H., Goldie, C.M., Teugels, J.L., 1987, *Regular variation*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Boogaert, P., Waegenaere, A., 1990, Simulation of ruin probabilities, *Insurance: Mathematics and Economics* 9, pp 95-99.
- Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., Nesbitt, C.J., 1986, *Actuarial mathematics*, Society of Actuaries, Schaumburg, IL., 753p.
- Bühlmann, H., 1970, *Mathematical methods in risk theory*, Springer-Verlag, Berlin.
- Cai, J., Tang Q., 2004, On max-sum equivalence and convolution closure of heavy-tailed distributions and their applications, *Journal of Applied Probability* 41, pp 117-130.
- Carriere, J.F., Chan, L.K., 1986, The bounds of bivariate distributions that limit the value of last-survivor annuities, *Transaction of the Society of Actuaries* XXXVIII, pp 51-74.
- Chen, Y., Ng, K.W., 2006, The ruin probability of the renewal model with constant interest force and negatively dependent heavy-tailed claims, *Insurance:Mathematics and Economics* 40, pp 415-423.
- Chen Y., Su C., 2006, Finite time ruin probability with heavy-tailed insurance and financial risks, *Science Direct:Statistics and Probability Letters* 76,pp 1812-1820.
- Chistyakov, V.P., 1964, A theorem on sums of independent positive random variables and its applications to branching random processes, *Theory probability Application* 9, pp 640-649.
- Cline, D.B.H., 1986, Convolution tails,product tails and domains of attraction, *Probability Theory Related Fields* 72, pp 529-557.

- Cossette, H., Marceau, E., 2000, The discrete-time risk model with correlated classes of business. *Insurance: Mathematics and Economics* 26, pp 133-149.
- Croux, K., Veraverbeke, N., 1990, Nonparametric estimators for the probability of ruin, *Insurance: Mathematics and Economics* 9, pp 127-130.
- De V.F., 1978, A practical solution to the problem of ultimate ruin probability, *Scandinavian Actuarial Journal*, pp 114-119.
- Denuit, M., Genest, C., Marceau, E., 1999, Stochastic bounds on sums of dependent risks, *Insurance: Mathematics and Economics* 25, pp 85-104.
- Dickson, D.C.M., 2006, *Insurance risk and ruin*, International Series on Actuarial Science, Faculty of Actuaries, Cambridge University Press, 229 p.
- Dimitriyadis, İ., 1992, Sigortacılığın temel ilkeleri ve Türkiye’de yapılması gerekenler, *Endüstri Mühendisliği*, yıl:4, Sayı:17, pp 3-14.
- Dhaene, J., Goovaerts, M.J., 1997, On the dependency of risks in the individual life model, *Insurance: Mathematics and Economics* 25, pp 85-104.
- Dufresne, F., Gerber H., 1994, Three methods to calculate the probability of ruin, *Astin Bulletin International Actuarial Association* Vol 19, No:1, pp 71-99.
- Embrechts, P., Goldie, C.M., 1982, On convolution tails, *Stochastic Processes Applied* 13, pp 263-278.
- Embrechts, P., Klüppelberg C., Mikosch T., 2001, *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Applications of Mathematics Stochastic Modelling and Applied Probability 33 , Springer, 648p.
- Embrechts, P., Veraverbeke N., 1981, Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims, *Insurance: Mathematics and Economics* 1, pp 55-72.

- Embrechts, P., Omey, E., 1984, A property of long tailed distributions, *Journal of Applied Probability*, Vol 21, pp 80-87.
- Embrechts P., Wouters L., 1990, Simulating risk solvency, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol 9, issue 2-3, pp 141-148
- Fasen, V., Klüppelberg, C., 2008, Large insurance losses distributions, *Encyclopedia of Quantitative Risk Analysis and Assessment*.
- Frees, E.W., Valdez, E., Carriere, J.F., 1995, Annuity valuation with dependent mortality, *Actuarial Research Clearing House*, 1995.2, pp 31-80.
- Gao, Q., Wu, Y., Zhu, C., Wei, G., 2007, Ruin problems in risk models with dependent rates of interest. *Statistics and Probability letter* 6, pp 761-768.
- Geluk, J., Ng, K.W., 2006, Tail behaviour of negatively associated heavy-tailed sums, *Journal of Applied Probability*, Volume 43, Number 2, pp 587-593.
- Gerber, H.U., 1973, Martingales in risk theory, *Mitteilungen der Schweizer Vereinigung der Versicherungsmathematiker*, pp 205-216.
- Gerber, H.U., 1982, Ruin theory in the linear model, *Insurance:Mathematics and Economics* 1, pp 177-184
- Goldie, C. M., Klüppelberg C., 1998, Subexponential Distributions, A practical guide to heavy tails: statistical techniques and applications, pp 435-460.
- Grandell, J.,1989, Aspects of risk theory, Department of Mathematics, The Royal Inst. of Technology, Stocholm.
- Grandell J.,1999, Simple approximations of ruin probabilities, *Insurance:Mathematics and Economics* 26, pp 157-173.
- Hogg, R.V., Klugman, S.A., 1984, Loss distributions, Wiley, New York.
- Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M. , 2001, Modern actuarial risk theory, Kluwer Academic Publisher,The Netherlands

- Kalashnikov V., Konstantinides D., 2000, Ruin under interest force and subexponential claims:a simple treatment, *Insurance:Mathematics and Economics* 27, pp145-149.
- Klugman, S.,A., Panjer H.H., Willmot G.,E., 2008, *Loss models from data to decisions*, Third Edition, John Wiley and Sons, New Jersey, 726p.
- Klüppelberg, C., 1988, Subexponential distributions and integrated tails, *Journal of Applied Probability*, Vol. 25, No:1, pp 132-141
- Klüppelberg, C, 1989, Estimation of ruin probabilities by means of hazard rates, *Insurance: Math. Econom.* 8, pp 279-285.
- Ko, B., 2008, On sums of dependent heavy-tailed random variables and valuation of equity-linked insurance products, Doctoral thesis, The University of Iowa,103 p.
- Leslie, J.R., 1989, On the non-closure under convolution of the subexponential family, *Journal of Applied Probability* 26, pp 58-66.
- McNeil, A., J., 1997, Estimating the tails of loss severity distributions using extreme value theory,*Astin Bulletin International Actuarial Association*, Vol:27, pp 117-137.
- Mikosch T., Samorodnitsky G., 2000, The supremum of a negative drift random walk with dependent heavy-tailed steps,*Annals of Applied Probability* Vol: 10, No:3, pp 1025-1064
- Mo, K.C.K., 2002, Ruin probabilities with dependent claims, *Actuarial Studies*, Faculty of Commerce and Economics, University of New South Wales, 50p.
- Müller, A.,Pflug, G.,2001, Asymptotic ruin probabilities for risk processes with dependent increments, *Insurance: Mathematics and Economics* 28, pp381-392.
- Norberg, R., 1989, Actuarial analysis of dependent lives, *Mitteilungen der schweiz, Vereinigung der Versicherungsmathematiker* 1989, Heft 2, pp 243-255.

- Panjer, H.H., 1982, Direct calculation of ruin probabilities, *The Journal of Risk and Insurance*, pp 521-529.
- Promislow, S.D., 1991, The probability of ruin in a process with dependent increments, *Insurance: Mathematics and Economics* 10, pp 99-107.
- Ramlau-Hansen, H., 1988a, A Solvency study in non-life insurance. Part1: Analysis of fire, windstorm and glass claims, *Scand. Actuar. J.*, pp 3-34.
- Ramlau-Hansen,H., 1988b, A Solvency study in non-life insurance. Part2: Solvency margin requirements, *Scand. Actuar. J.*, pp 35-60.
- Ribas, C., Marin-Solano, J., Alegre, A., 2003, On the computation of the aggregate claims distributions in the individual life model with bivariate dependencies, *Insurance: Mathematics and Economics* 32, pp 201-215.
- Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J., 1999, *Stochastic processes for Insurance and Finance*, Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley and Sons, England, 654p.
- Seal, H.L., 1978, *Survival probabilities: The goal of risk theory*, Wiley, Chichester, 103p.
- Seal, H.L., 1983, Numerical probabilities of ruin when expected claim numbers are large, *Mitteilungen SVVM*, pp 89-104
- Seneta, E., 1976, *Functions of regular variation*, Lecture notes in Mathematics, Springer, New York
- Sigman K., 1999, Appendix: A primer on heavy-tailed distributions, *Queueing Systems* 33, pp 261-275.
- Tang, Q., Tsitsiashvili, G., 2003, Precise estimates for the ruin probability in finite horizon in a discrete-time model with heavy-tailed insurance and financial risks, *Stochastic Processes and their Applications* 108, pp 299-325.

- Tang, Q., 2004, The ruin probability of a discrete time risk model under constant interest rate with heavy tails, *Scandinavian Actuarial Journal* 3, pp 229-240.
- Thorin,O., Wikstad, N., 1977, Calculation of Ruin Probabilities When The Claim Distribution is Log-normal, *Astin Bulletin International Actuarial Association*, 9:1-2, pp 231-246 .
- Wang, S., 1998, Aggregation of correlated risk portfolios: models and algorithms, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, pp 848-939.
- Weng, C., Zhang,Y., Tan K.S., 2008, Ruin probabilities in a discrete time risk model with dependent risks of heavy tail, *Scandinavian Actuarial Journal*, Taylor & Francis, pp 1-14.
- Willmot, G., 1989, Limiting tail behaviour of some discrete compound distributions, *Insurance: Mathematics and Economics* 8, pp 175-185.
- Willmot, G., 1990, Asymtotic Tail Behaviour of Poisson Mixtures with Applications, *Advanced Applied Probability*, 22,pp 147-159.
- Wu, X.,Yuen,K.C., 2003, A discrete-time risk model with interaction between classes of business, *Insurance: Mathematics and Economics* 33, pp 117-133.
- Yang, H., Zhang, L., 2003, Martingale method for ruin probability in an autoregressive model with constant interest rate, *Probability in the engineering and informational sciences* 17, pp 183-198
- Yuanjiang H., Xucheng L., Zhang J., 2003, Some Results of Ruin Probability for the Classical Risk Process,*Journal of Applied mathematics and Decision Science*,7(3), pp 133-146.
- Zhang, L., 2005, Ruin probability in linear time series model, *Tsinghua Science And Technolgy* 2, pp 259-264.

EKLER

Ek-1.Hata fonksiyonu (Error function-Erf) ve Tamamlayıcı Hata Fonksiyonu
(complementary error function-Erfc) Tablosu

Ek1: Hata Fonksiyonu ve Tamamlayıcı Hata Fonksiyonu Tablosu

x	Erf(x)	Erfc(x)
0	0	1
0,05	0,05637200	0,94362800
0,1	0,11246290	0,88753710
0,15	0,16799600	0,83200400
0,2	0,22270260	0,77729740
0,25	0,27632640	0,72367360
0,3	0,32862680	0,67137320
0,35	0,37938210	0,62061790
0,4	0,42839240	0,57160760
0,45	0,47548170	0,52451830
0,5	0,52049990	0,47950010
0,55	0,56332340	0,43667660
0,6	0,60385610	0,39614390
0,65	0,64202930	0,35797070
0,7	0,67780120	0,32219880
0,75	0,71115560	0,28884440
0,8	0,74210100	0,25789900
0,85	0,77066810	0,22933190
0,9	0,79690820	0,20309180
0,95	0,82089080	0,17910920
1	0,84270080	0,15729920
1,1	0,88020510	0,11979490
1,2	0,91031400	0,08968600

x	Erf(x)	Erfc(x)
1,3	0,93400790	0,06599210
1,4	0,95228510	0,04771490
1,5	0,96610510	0,03389490
1,6	0,97634840	0,02365160
1,7	0,98379050	0,01620950
1,8	0,98909050	0,01090950
1,9	0,99279040	0,00720960
2	0,99532230	0,00467770
2,1	0,99702050	0,00297950
2,2	0,99813720	0,00186280
2,3	0,99885680	0,00114320
2,4	0,99931150	0,00068850
2,5	0,99959300	0,00040700
2,6	0,99976400	0,00023600
2,7	0,99986570	0,00013430
2,8	0,99992500	0,00007500
2,9	0,99995890	0,00004110
3	0,99997790	0,00002210
3,1	0,99998840	0,00001160
3,2	0,99999400	0,00000600
3,3	0,99999690	0,00000310
3,4	0,99999850	0,00000150
3,5	0,99999930	0,00000070

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Başak BULUT

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Yılı : 1984

Medeni Hali : Bekar

Eğitim ve Akademik Durumu:

Lise : 1999 - 2002 Ankara Çankaya Süper Lisesi (Y. D. A.)

Lisans : 2003 - 2008 Hacettepe Üniversitesi Aktüerya Bilimleri Bölümü

Yabancı Dil : İngilizce, Almanca

İş Tecrübesi :

2008 - ... Hacettepe Üniversitesi Aktüerya Bilimleri Bölümü