

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

ZEDELENEBİLİRLİK ÖLÇÜMLERİ ÜZERİNE

Gülnaz BORUZANLI

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Alpay KIRLANGIÇ

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu : 619.03.03

Sunuş Tarihi : 29.12.2010

Bornova-İZMİR

2010

Gölnaz BORUZANLI tarafından Yüksek Lisans tezi olarak sunulan “Zedelenebilirlilik Ölçümleri Üzerine” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliđi ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 29/12/2010 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı	:
Raportör Üye	:
Üye	:

ÖZET**GRAFLARDA ZEDELENEBİLİRLİK ÜZERİNE**

BORUZANLI, Gülnaz

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Alpay KIRLANGIÇ
Aralık 2010, 45 sayfa

Bir iletişim ağının merkezlerinde ya da merkezleri arasındaki bağlantılarda bir hasar meydana geldiğinde, ağın işlevselliğinde bir azalma meydana gelebilir ya da ağ işlevini tamamen yitirebilir. Ağın hasara karşı ne kadar dirençli olduğunun ölçümü ağ zedelenebilirliği olarak adlandırılır ve zedelenebilirlik araştırmalarında iletişim ağları graflar ile modellenir. Bu tezin birinci bölümünde, iletişim ağlarının zedelenebilirliği kavramı, zedelenebilirlik ölçümlerinde kullanılan bazı parametreler ve Wei, Li ve Zhang tarafından yapılan ayrıt-komşu-scattering sayısının tanımı verilmiştir. İkinci bölümde ise öncelikle binomial ağların ayrıt-komşu-scattering sayısı, daha sonra binomial ağlarla P_m, C_m, K_m ve $W_{1,m}$ grafları arasında kartezyen çarpım ya da taçlama işlemi yapılarak elde edilen grafların ayrıt-komşu-scattering sayısı araştırılmıştır. Son olarak da k -ary ağların ayrıt-komşu-scattering sayısı hesaplanmıştır.

Anahtar Sözcükler: Zedelenebilirlik, ayrıt-komşu-scattering sayısı, binomial ağ, tam k -ary ağ

ABSTRACT**ON THE VULNERABILITY OF GRAPHS**

BORUZANLI, Gülnaz

MSc in Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Alpay KIRLANGIÇ

December 2010, 45 pages

In a communication network, when destruction occurs on the nodes of the network or on the connections between the nodes, then the network functionality may decrease or the network may lose its whole functionality. The measurement of a network's resistance against damage is called vulnerability and in vulnerability research networks can be modeled as graphs. In the first part of this thesis, the concept of vulnerability, some parameters used in the measurement of vulnerability and the definition of edge-neighbor-scattering number introduced by Wei, Li and Zhang are given. In the second part, firstly, the edge-neighbor-scattering number of binomial trees and then the edge-neighbor-scattering number of the graphs, which is obtained by performing cartesian product or corona operation between binomial trees and P_m, C_m, K_m ve $W_{1,m}$ graphs are studied. Finally, the edge-neighbor-scattering number of complete k -ary trees is calculated.

Keywords: Vulnerability, edge-neighbor-scattering-number, binomial tree, complete k -ary tree.

TEŐEKKÖR

Bu alıőmanın her aőamasında engin bilgi ve tecrübesiyle beni yönlendiren, çalıőmalarımnda destek ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Alpay KIRLANGIÇ'a, sonsuz sevgisiyle hep yanımda olan anneme ve hayatım boyunca her türlü desteği verip tecrübelerini benimle paylaşan babama teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
ABSTRACTvii
TEŞEKKÜR	ix
ŞEKİLLER DİZİNİxii
1.GİRİŞ	1
1.1 İletişim Ağlarında Zedelenebilirlik Kavramı	1
1.2 Bazı Zedelenebilirlik Parametreleri	2
2.AYRIT-KOMŞU-SCATTERING SAYISI VE AĞAÇLAR	9
2.1 Binomial Ağaçlar.....	9
2.1.1 Kartezyen Çarpım	13
2.1.2 Taçlama İşlemi	17
2.2 Tam k-ary Ağaçlar	24
3.SONUÇ	42
KAYNAKLAR DİZİNİ	43
ÖZGEÇMİŞ.....	45

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.2.1 a) E_p^t grafi, b) E_p^t / S grafi.....	6
2.1.1 Binomial ağaçlar a) B_n grafının rekürsif yapısı, b) B_0, B_1, B_2, B_3 ve B_4 c) B_n grafının tümevarım yöntemiyle elde edilmesi.....	10
2.2.1 Üç seviyeli tam ikili ağaç.....	24

1.GİRİŞ

1.1.İletişim Ağlarında Zedelenebilirlik Kavramı

Bir sistemde zedelenebilirlik, sistemin belirli bir konudaki işlevselliğinin azalmasına ya da tamamen kaybolmasına yol açabilecek bir hasar karşısında, sistemin gösterdiği dayanıklılığın ölçümüdür. Benzer şekilde, bir iletişim ağında zedelenebilirlik ise bu iletişim ağının merkezlerinin ya da merkezler arasındaki bağlantıyı temsil eden hatların gördüğü herhangi bir hasar karşısında ağın gösterdiği dayanma gücünün ölçümüdür. Bir iletişim ağında veri akışının devam etmesinin temel prensip olduğu düşünülürse, ağı tasarlarken herhangi bir hasardan sonra ağın ne durumda olacağı, ne kadarının hasar alacağı ya da yeniden eski haline getirilmesinin maliyetinin ne olacağı gibi araştırmalar yapılmalıdır. Örnek olarak bir şehrin metro duraklarının oluşturduğu ağı düşünebiliriz. Bu durumda, metro durakları ağın merkezleri, duraklar arasındaki yollar da merkezler arasındaki hatları oluşturur. Bir saldırı ya da kendiliğinden gelişebilecek bir olay sonucunda, bazı metro durakları ve/veya bazı yollar zarar gördüğünde, oluşan hasarı araştırırken aşağıdaki sorular sorulabilir:

1. Zarar gören durakların sayısı nedir?
2. Zarar gören yolların sayısı nedir?
3. Aralarında ulaşım devam eden duraklar birer alt ağ olarak düşünülürse, bu alt ağların sayısı nedir?
4. Zarardan sonra oluşan alt ağlar içinde, durak sayısı en fazla olan alt ağın durak sayısı nedir?
5. Zarar gören duraklara komşu olan durakların sayısı nedir?
6. Zarar gören yollara komşu olan yolların sayısı nedir?

Yukarıdaki gibi sorularla, ağın gördüğü zararın büyüklüğünün ölçülmesi ya da başlangıçtaki ağın ne kadar dayanıklı olduğunun analizi mümkündür. Bu analizler, ağ tasarımında yapılırsa, daha tasarım aşamasındayken amaca en uygun ağ modeli seçilebilir.

İsviçreli matematikçi Leonardo Euler (1707-1783)'in 1736'da, Königsberg'in yedi köprüsü üzerine atılan soruyu çözmesiyle birlikte, graf teorisinin ilk teoremi ispatlanmıştır. Bu çözümden sonra, birçok problemin modellenmesinde ve çözülmesinde graf teorisi etkin biçimde kullanılmaya başlanmıştır. İletişim ağları; merkezleri grafın tepeleri, merkezler arasındaki bağlantıları da grafın ayrıtları olacak şekilde graflar ile modellenebildiğinden, iletişim ağlarının zedelenebilirlik değerlerini araştırmak için graflarda çeşitli zedelenebilirlik parametreleri tanımlanmıştır.

Bu tezde ele alınan graflar; basit, birleştirilmiş ve yönsüz graflardır. Ayrıca bu çalışmada, Graph Theory with Applications (Bondy and Murty, 1976) kitabındaki terminoloji ve notasyon kullanılmıştır.

1.2. Bazı Zedelenebilirlik Parametreleri

Bir G grafının zedelenebilirlik değerini araştırmak için ilk akla gelen parametre, "Grafın birleştirilmemiş bir graf haline gelmesi en az kaç tepenin zarar görmesi ile mümkündür?" sorusuna cevap veren bağlantılılık sayısı (connectivity)'dir.

Tanım 1.2.1 : Birleştirilmiş bir G grafını birleştirilmemiş bir graf ya da izole tepelerden oluşan bir graf haline getirmek için graftan çıkarılması gereken en az tepe sayısına grafın *bağlantılılık sayısı (connectivity)* denir ve $\kappa(G)$ ile gösterilir. Bir G grafının bileşenlerinin sayısı $\omega(G)$ olmak üzere

$$\kappa(G) = \min_{S \subset V(G)} \{|S| : \omega(G) \geq 2\} \text{ 'dir.}$$

Bağlantılılık sayısı, geriye kalan grafın yapısının nasıl olduğu hakkında hiçbir bilgi vermez. İletişim ağlarının zedelenebilirliği incelenirken, hasardan sonra geriye kalan ağdaki bileşen sayısı, kalan en büyük boyutlu alt ağın eleman sayısı gibi sorulara da cevap arandığından çeşitli zedelenebilirlik parametreleri tanımlanmıştır. Bu parametrelerden bazıları bütünlük değeri (integrity), dayanıklılık değeri (toughness) , bağlayıcı sayısı (binding number) ve scattering sayısı (scattering number)'dir.

Scattering sayısı, bağlantılılık sayısı gibi sadece hasar gören merkezler ile değil; aynı zamanda, hasardan sonra geriye kalan grafin bileşen sayısı ile de ilgilenir. Scattering sayısının tanımı aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 1.2.2 : (Jung, 1978) $S \subseteq V(G)$ ve S , G grafinin herhangi bir kesim kümesi olsun. $G - S$ grafinin bileşen sayısı $\omega(G - S)$ olmak üzere, G grafinin scattering sayısı

$$sc(G) = \max_S \{ \omega(G - S) - |S| : S \subset V(G), \omega(G - S) \geq 2 \} \text{ 'dir.}$$

Bir G grafinin bağlantılılık sayısı ve scattering sayısının tanımında, graftan sadece, zarar gören tepeler ve dolayısıyla bu tepelere bağlı olan ayrıtlar silinmektedir. Ancak gerçek dünya problemlerinde, bir ağda zarar gören birim her zaman merkez/merkezler (tepelerden bir ya da birkaçı) olmayabilir. Zarar gören birim, merkezler arasındaki hat/hatlar (ayrıtlardan bir ya da birkaçı) da olabilir. Bu sebeple, graflarda çeşitli ayrıt-zedelenebilirlik parametreleri de tanımlanmıştır. Ayrıt bağlantılılık sayısı (edge-connectivity), ayrıt dayanıklılık değeri (edge-toughness), ayrıt-bütünlük değeri (edge-integrity) bunlara örnek olarak verilebilir.

Zedelenebilirlik ölçümlerinde (seçilen ağa bağlı olarak) zarar gören birimler merkezler ise, sadece bu merkezlere bağlı olan hatlar değil, bitişik olan merkezler de zarar görüyor olabilir. Benzer şekilde, zarar gören birimler hatlar ise, sadece bu hatların bağlı olduğu merkezler değil, komşu olduğu diğer hatlar da zarar görüyor olabilir. Yani, graflar üzerinde düşünülürse, bir grafin bazı tepeleri zedelendiğinde, bu tepelere komşu olan tepeler de zarar görüyor olabilir. Bu durumlar için, graflarda çeşitli komşu-zedelenebilirlik parametreleri tanımlanmıştır. Komşu-bütünlük değeri (vertex-neighbor-integrity) ve komşu-scattering sayısı (vertex-neighbor-scattering number) buna örnek olarak verilebilir.

Komşu-scattering sayısı, grafta bazı merkezler hasar gördüğünde, bu merkezlerin kapalı komşuluğunun da hasar gördüğünü kabul ederek, geriye kalan grafin bileşen sayısı ile hasar gören merkezlerin sayısı arasındaki farkın araştırılmasına dayanır.

Tanım 1.2.3 : (Li and Li, 2005) Bir G grafında, u tepesinin açık komşuluğu (open neighborhood of a vertex), $N(u) = \{v \in V(G) : (u, v) \in E(G)\}$ 'dir. u tepesinin kapalı komşuluğu (closed neighborhood of a vertex) ise $N[u] = \{u\} \cup N(u)$ 'dur. Benzer şekilde; herhangi bir $S \subseteq V(G)$ altkümesi için, açık komşuluk $N(S) = \bigcup_{u \in S} N(u)$; kapalı komşuluk ise $N[S] = \bigcup_{u \in S} N[u]$ 'dur. G grafının bir u tepesinin graftan çıkarılmış olması (subversion), $N[u]$ 'nun graftan silinmesi (deletion) 'dir. $S \subseteq V(G)$ olmak üzere bir tepe kümesinin kapalı komşuluğu graftan siliniyorsa bu kümeye, G 'nin tepe çıkarma stratejisi (vertex subversion strategy) denir. Geriye kalan graf ise G/S ile gösterilir ve $G/S = G - N[S]$ 'dir. Eğer geriye kalan graf G/S , birleştirilmemiş ya da clique ya da \emptyset ise, bu ayrıt çıkarma stratejisi S 'ye, G 'nin kesim-stratejisi (cut-strategy) denir.

Gunther ve Hartnell, çalışmalarında (Gunther and Hartnell, 1978, 1980; Gunther, 1986), bir casus ağı (spy network), tepeler ajanları, ayrıtlar ise aradaki iletişimi gösterecek şekilde graflar ile modelledi. Bir casus ağında, bir ajan yakalandığında, bu ajanın ve onun direkt bağlantıya geçebildiği diğer ajanların artık güvenilmez olduğu açıktır. Bu sebeple, ihbar edilen ajanlar da ağ için işlevsiz hale gelmiş olur. Böyle bir ihbar durumu, v yakalanan ajanı temsil eden tepe olmak üzere, v 'nin kapalı komşuluğunun model graftan silinmesi ile aynı durumdur. (Li and Li, 2005)

Komşu-scattering sayısının tanımı 2003'te Wei tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 1.2.4 : (Wei, 2003) $S \subseteq V(G)$ ve S , G grafının herhangi bir kesim stratejisi olsun. S 'in kapalı komşuluğundaki tepeler G grafından silinirse geriye kalan G/S grafının bileşen sayısı $\omega(G/S)$ olmak üzere, G grafının komşu-scattering sayısı

$$sc(G) = \max_S \{ \omega(G/S) - |S| : \omega(G/S) \geq 2 \} ' \text{ dir.}$$

Benzer şekilde, bir grafın ayrıtları zedelendiğinde, zedelenen ayrıtlara komşu olan ayrıtlar da zedeleniyor olabilir. Bu durumlar için, graflarda çeşitli ayrıt-komşu-zedelenebilirlik parametreleri tanımlanmıştır. Ayrıt-komşu-bağlantılılık sayısı (edge-neighbor-connectivity), ayrıt-komşu-bütünlük değeri (edge-neighbor-integrity) ve ayrıt-komşu-scattering sayısı (edge-neighbor-scattering number) buna örnek olarak verilebilir.

Bu tezde, bir G grafının ayrıt-komşu-scattering sayısı ele alınmış olup gerekli tanımlar aşağıda verilmiştir.

Tanım 1.2.5 : (Wei et al., 2007) $G = (V, E)$ bir graf ve e de G grafının bir ayrıtı olsun. $N(e) = \{f \in E(G) \mid f \neq e, e \text{ ve } f \text{ bitişik ayrıtlar}\}$, e ayrıtının *açık ayrıt-komşuluğu* (*open edge-neighborhood*)'dur. $N[e] = N(e) \cup \{e\}$, e ayrıtının *kapalı ayrıt-komşuluğu* (*closed edge-neighborhood*)'dur. G grafının bir e ayrıtının graftan *çıkarılmış* olması (*subversion*), $N[e]$ 'nin graftan silinmesi (deletion)'dir. Başka bir deyişle, eğer $e = [u, v]$ ise, $G - N[e] = G - \{u, v\}$ 'dir. $S \subseteq V(G)$ olmak üzere bir ayrıt kümesinin bütün ayrıtları graftan çıkarılıyorsa bu kümeye, G 'nin *ayrıt çıkarma stratejisi* (*edge subversion strategy*) denir. Geriye kalan graf ise G/S gösterilir. Eğer geriye kalan graf G/S , birleştirilmemiş ya da tek bir izole tepe ya da \emptyset ise, bu ayrıt çıkarma stratejisi S 'ye, G 'nin *ayrıt-kesim-stratejisi* (*edge-cut-strategy*) denir. G grafının bütün ayrıt-kesim-stratejileri arasında boyutu en küçük olanının boyutuna, G grafının *ayrıt-komşu-bağlantılılık sayısı*, $\Lambda(G)$, (*edge-neighbor-connectivity*) denir. Eğer $\Lambda(G) = m$ ise, G grafına *m-ayrıt-komşu-bağlantılı* (*m-edge-neighbor-connected*) denir.

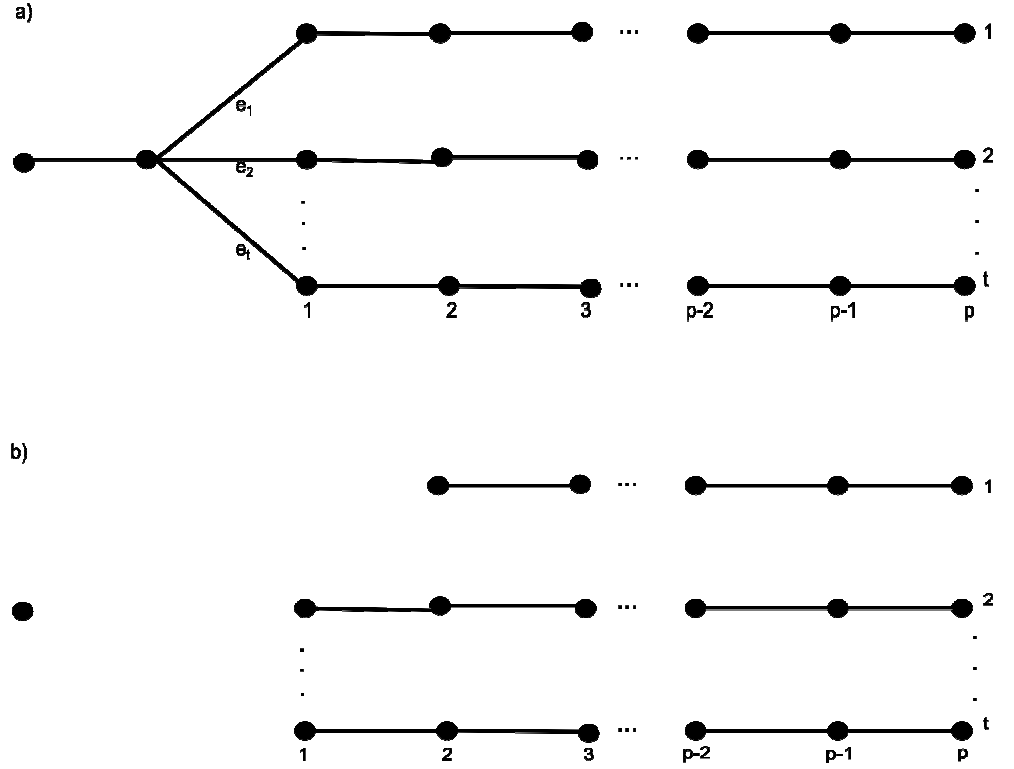
Tanım 1.2.6 : (Wei et al., 2007) $S \subseteq V(G)$, G 'nin herhangi bir ayrıt-kesim-stratejisi ve G/S 'in bileşenlerinin sayısı $\omega(G/S)$ olmak üzere, bir G grafının *ayrıt-komşu-scattering sayısı* (*edge-neighbor-scattering number*)

$$ENS(G) = \max_{S \subseteq E(G)} \{\omega(G/S) - |S|\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

$S^* \subseteq E(G)$ olmak üzere, eğer $ENS(G) = \omega(G/S^*) - |S^*|$ ise, S^* kümesine G grafının *ENS-kümesi* (*ENS-set*) denir.

Örnek 1.2.1 : E_p^t grafi, Şekil 1.2.1.a'daki gibi, t kolu ve her kolunda p tepesi olan bir ağaç graftır. $p > 1$ olmak üzere, E_p^t grafinin ayrıt-komşu-scattering sayısını ve ENS-kümesini inceleyelim.



Şekil 1.2.1. (a) E_p^t grafi, (b) E_p^t / S grafi

$1 \leq i \leq t$ olmak üzere, eğer $S = \{e_i\}$ olacak şekilde bir $S \subseteq E(E_p^t)$ kümesi seçilirse, bu S kümesine bağlı olarak, $\omega(E_p^t / S) = t + 1$ ve $|S| = 1$ olduğundan, $ENS_S = \omega(E_p^t / S) - |S| = t + 1 - 1 = t$ 'dir. Örneğin $S = \{e_1\}$ için, geriye kalan bileşenler Şekil 1.2.1.b'deki gibi olacaktır:

Bunun yanı sıra, $E(E_p^t)$ ayrıtlar kümesinin diğer tüm altkümeleri S kümesi olarak ele alındığında, t 'den daha büyük bir sayı elde edilemeyeceği kolayca görülmektedir. Bu durumda, $ENS(E_p^t) = t$ 'dir. Ayrıca bu örnekteki $S = \{e_i\}$ kümesi, Şekil 1.2.1.a'daki E_p^t grafinin bir ENS-kümesidir.

2007'de Wei ve arkadaşları tarafından bazı özel grafların ayrıt-komşu-scattering sayısı için aşağıdaki sonuçlar verilmiştir.

Teorem 1.2.1 : (Wei et al., 2007) P_n grafi, $n (\geq 2)$ tepeli yol graf ise,

$$ENS(P_n) = \begin{cases} -1, & n = 2; \\ 0, & n = 3; \\ 1, & n \geq 4. \end{cases} \text{ 'dir.}$$

Teorem 1.2.2 : (Wei et al., 2007) C_n grafi, $n (\geq 3)$ tepeli çevre graf ise,

$$ENS(C_n) = \begin{cases} -1, & n = 4, 5; \\ 0, & n = 3 \text{ ya da } n \geq 6. \end{cases} \text{ 'dir.}$$

Teorem 1.2.3 : (Wei et al., 2007) K_n grafi, $n (\geq 3)$ tepeli tam graf ise,

$$ENS(K_n) = 1 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ 'dir.}$$

Teorem 1.2.4 : (Wei et al., 2007) $K_{m,n}$ grafi, $|M| = m$ ve $|N| = n$ olmak üzere (M, N) parçalanışlı iki parçalı tam graf ise, $ENS(K_{m,n}) = |m - n| - 1$ 'dir.

Sonuç 1.2.1 : (Wei et al., 2007) $S_{1,n}$, $n > 1$ olmak üzere bir yıldız graf olsun. O zaman $ENS(S_{1,n}) = n - 2$ 'dir.

Teorem 1.2.5 : (Wei et al., 2007) $C_{t,n}$, $t \geq 3$, $n \geq 2$ olmak üzere bir kuyruklu yıldız graf ise $ENS(C_{t,n}) = n$ 'dir.

Ayrıt-komşu-scattering sayısı için, 2007'de Wei ve arkadaşları tarafından elde edilen bazı sınırlar da aşağıda verilmiştir.

Teorem 1.2.6 : (Wei et al., 2007) n tepeli birleştirilmiş bir G grafi için $ENS(G) \leq n - 3$ 'tür.

Teorem 1.2.7 : (Wei et al., 2007) Birleştirilmiş bir G grafi için, $\alpha(G)$ bağımsızlık sayısı (independent number) ve $\Lambda(G)$ ayrıt-komşu-bağlantılılık sayısı olmak üzere, $ENS(G) \leq \alpha(G) - \Lambda(G)$ 'dir.

Teorem 1.2.8 : (Wei et al., 2007) G grafi, n tepeli birleştirilmiş bir graf olsun. $\alpha'(G)$, G grafının ayrıt bağımsızlık sayısı (edge independence number) olmak üzere, $ENS(G) \geq n - 3\alpha'(G)$ 'dir.

Yardımcı Teorem 1.2.1 : (Wei et al., 2007) n tepeli bir G grafi için $\Lambda(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 'dir.

Teorem 1.2.9 : (Wei et al., 2007) G grafi, $n(\geq 3)$ tepeli birleştirilmiş bir graf ise $ENS(G) \geq 1 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 'dir.

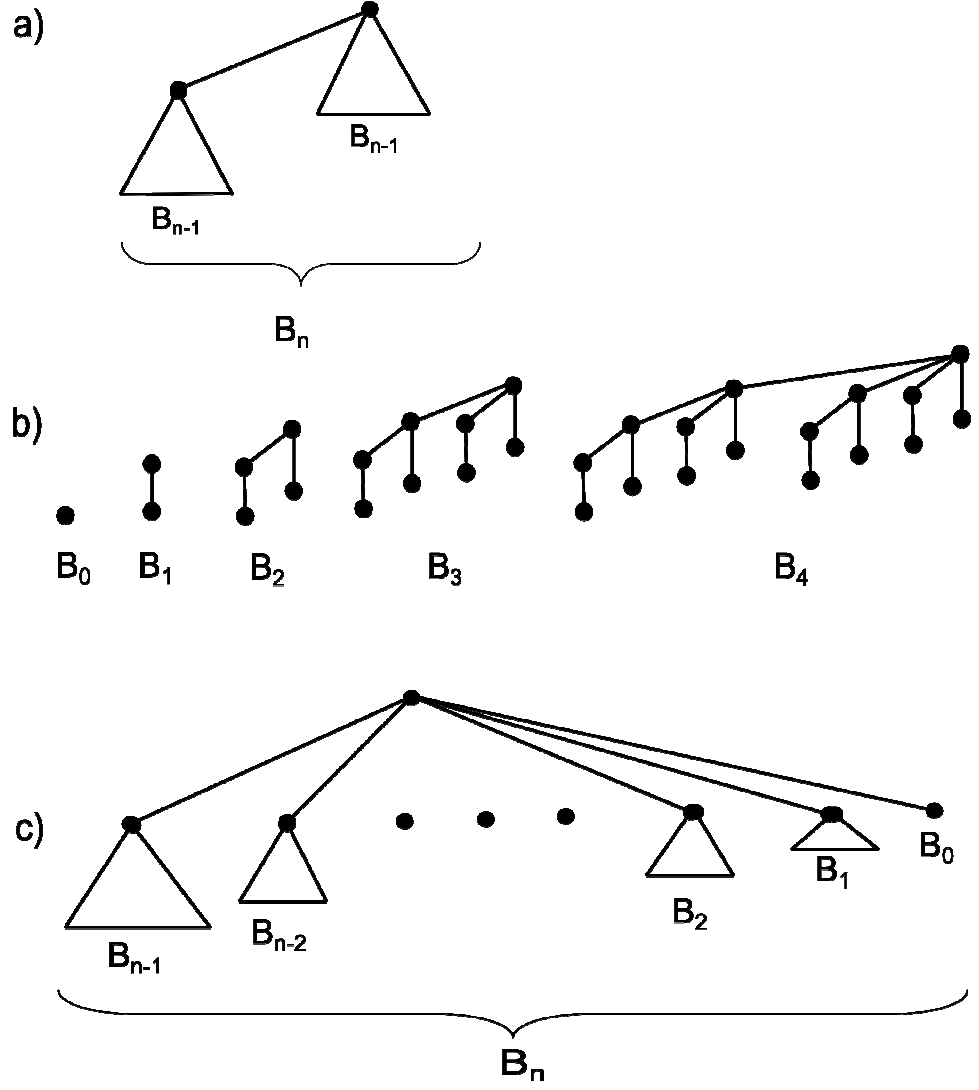
2.AYRIT-KOMŞU-SCATTERİNG SAYISI VE AĞAÇLAR

Bu bölümde binomial ve k-ary ağaçlar ele alınmıştır. Binomial ağaçlar, olay-güdümlü benzetimlerde (event-driven simulations) ve elektrik devreleri tasarımı gibi minimum spanning ağacın bulunması gereken uygulamalarda kullanılmaktadır. (Cormen et al., 2001) Tam k-ary ağaçlar ise; iklim araştırmaları, yer bilimi, nano-teknoloji, hesaplamalı kimya, yüksek enerji fiziği, hesaplamalı akışkanlar mekaniği, yaşam bilimleri gibi alanlarda kullanılan süper bilgisayarlardan (supercomputers), çip-üzerindeki-gömülü sistemlere kadar birçok alanda yaygın biçimde kullanılır. Bu sebeple, binomial ağaç ve tam k-ary ağaç modelindeki ağların zedelenebilirliğinin araştırılması oldukça önemli ve ilgi çekici bir problemdir. (Li, 2010; Ulusal Yüksek Başarımlı Hesaplama Merkezi, 2010)

2.1. Binomial Ağaçlar

Bu kısımda, binomial ağaçlar tanımlanmış ve öncelikle bu ağaçların ayrıt-komşu-scattering sayısı hesaplanmıştır. Ardından, binomial ağaçlar ile çeşitli graflar arasında graf işlemlerinin uygulanması ile elde edilen grafların ayrıt-komşu-scattering sayısı elde edilmiştir.

Tanım 2.1.1 : (Cormen et al., 2001) Binomial ağaç B_n ($n \geq 0$), özyinelemeli (rekürsif) tanımlanmış sıralı bir ağaçtır. B_0 binomial ağacı bir izole tepedir. B_n binomial ağacı, iki tane B_{n-1} binomial ağacının kök tepelerinin bir ayrıt ile birleştirilmesiyle oluşur.



Şekil 2.1.1. Binomial ağaçlar a) B_n grafının rekürsif yapısı, b) B_0, B_1, B_2, B_3 ve B_4

c) B_n grafının tümevarım yöntemiyle elde edilmesi

Teorem 2.1.1 : B_n ($n \geq 3$) binomial bir ağaç olmak üzere, $ENS(B_n) = 3 \cdot 2^{n-3}$ 'dir.

İspat: S kümesi, $E(B_n)$ ayrıtlar kümesinin herhangi bir altkümesi olsun.

Durum 1: $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, B_n binomial ağacındaki B_{n-i} 'lerden iki tanesini bağlayan ayrıtlar e_i^* ile gösterilsin. e_i^* 'lerin kümesi E_i^* olarak

adlandırılırsa, $|E_i^*| = 2^{i-1}$ 'dir. B_n binomial ağacından, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $S = E_i^*$ kümesi çıkarılırsa geriye kalan bileşenlerin sayısı kesinlikle $2^i(n-i)$ 'dir. Böylece

$$ENS_S(B_n) = \max_{1 \leq i \leq n} \{ \omega(B_n / S) - |S| \} = \max_{1 \leq i \leq n} \{ 2^i(n-i) - 2^{i-1} \} \text{ 'dir.}$$

$f(x) = 2^x(n-x) - 2^{x-1}$ fonksiyonunun maksimum değerini hangi noktada aldığı araştırılır:

$$f(x) = 2^{x-1}(2n - 2x - 1) \Rightarrow f'(x) = 2^{x-1}(\ln 2 \cdot (2n - 2x - 1) - 2)$$

$$f'(x) = 2^{x-1}(\ln 2 \cdot (2n - 2x - 1) - 2) = 0 \Rightarrow x = n - \frac{\ln(2e^2)}{2 \ln 2}$$

Bulunan köke ikinci türev testi uygulanır:

$$f'(x) = 2^{x-1}(\ln 2(2n - 2x - 1) - 2) \Rightarrow f''(x) = 2^{x-1} \cdot \ln 2(\ln 2(2n - 2x - 1) - 4)$$

$x = n - \frac{\ln(2e^2)}{2 \ln 2}$ için $f''(x) < 0$ olduğundan, $f(x)$ fonksiyonu maksimum değerini $x = n - \frac{\ln(2e^2)}{2 \ln 2}$ değerinde alır.

$n \geq 3$ olmak üzere, her n değeri için $\left\lfloor n - \frac{\ln(2e^2)}{2 \ln 2} \right\rfloor = n - 2$ olduğu açıktır.

Yerine koyulursa,

$$ENS_S(B_n) = 3 \cdot 2^{n-3} \quad (1)$$

elde edilir.

Durum 2: Eğer B_n grafından herhangi bir S ayrıt kümesi çıkarılırsa iki alt durum ortaya çıkar:

- $1 \leq i \leq n-3$ olmak üzere, S 'nin eleman sayısı $2^{i-1} \leq r \leq 2^i$ olsun. Bu durumda geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\omega(B_n / S) \leq 2^{n-2} + 2r$$

olduğundan

$$ENS_S(B_n) \leq \max_r \{2^{n-2} + 2r - r\} = \max_r \{2^{n-2} + r\} \text{ 'dir.}$$

$f(x) = 2^{n-2} + x$ fonksiyonu artan fonksiyon olduğundan, maksimum değerini üst sınırdaki, yani $x = 2^{n-3}$ 'de alır ve

$$ENS(B_n) \leq 3 \cdot 2^{n-3} \quad (2)$$

elde edilir.

• S kümesinin eleman sayısı $2^{n-3} + 1 \leq r \leq 2^n - 1$ olsun. Bu durumda geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\omega(B_n / S) \leq 2^{n-1}$$

olduğundan

$$ENS_S(B_n) \leq \max_r \{2^{n-1} - r\} \text{ 'dir.}$$

$f(x) = 2^{n-1} - x$ fonksiyonu azalan fonksiyon olduğundan maksimum değerini alt sınırdaki, yani $x = 2^{n-3} + 1$ 'de, alır ve

$$ENS(B_n) \leq 3 \cdot 2^{n-3} - 1 \quad (3)$$

elde edilir.

Böylece (2) ve (3) ifadelerinden, herhangi bir ayrıt kümesi S için

$$ENS(B_n) \leq 3 \cdot 2^{n-3} \quad (4)$$

yazılabilir.

Sonuç olarak, (1) ve (4) ifadeleri ile ayrıt-komşu-scattering sayısının tanımından ispat tamamlanır.

□

Yeni iletişim ağları oluşturmak için, çeşitli ağları modelleyen graflar arasında graf işlemleri kullanılır. Dolayısıyla B_n grafi ile bazı özel graflar arasında kartezyen çarpım ve taçlama işlemi uygulanarak elde edilen grafların ayrıt-komşu-scattering sayıları aşağıda verilmiştir.

2.1.1. Kartezyen Çarpım

Bu kısımda öncelikle kartezyen çarpımın tanımı verilmiş olup, daha sonra $B_n \times P_m$ ve $B_n \times C_m$ graflarının ayrıt-komşu-scattering sayıları hesaplanmıştır.

Tanım 2.1.1.1 : (Buckley and Harary, 1990) G_1 ve G_2 graflarının kartezyen çarpımı (cartesian product) $G_1 \times G_2$ ile gösterilir ve tepeler kümesi $V(G_1) \times V(G_2)$ 'dir. $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ 'deki $u = (u_1, u_2)$ ve $v = (v_1, v_2)$ tepelerinin $G_1 \times G_2$ grafında bitişik olması için $[u_1 = v_1 \text{ ve } u_2 v_2 \in E(G_2)]$ ya da $[u_2 = v_2 \text{ ve } u_1 v_1 \in E(G_1)]$ olması gerekir.

Teorem 2.1.1.1 : B_n , 2^n tepeli binomial bir ağaç ve P_m , m tepeli bir yol graf olmak üzere; $ENS(B_n \times P_m) = 2^{n - \lceil \frac{m}{2} \rceil - 2} \left(2 \cdot \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 2 - m \right)$ 'dir.

İspat: S kümesi, $S \subseteq E(B_n \times P_m)$ olmak üzere, $B_n \times P_m$ grafının ayrıt-komşu-scattering sayısını sağlayan bir küme olsun. $B_n \times P_m$ grafı, B_n grafından m kopya ve P_m grafından 2^n kopya içermektedir. Bu durumda S kümesine bağlı iki durum ortaya çıkar:

- B_n grafının kopyalarından, $|S| = r$ tane ayrıt çıkarılırsa geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\omega((B_n \times P_m) / S) \leq \frac{2r}{m} \left(n - \log_2 \frac{r}{m} - 1 \right)$$

olduğundan

$$ENS_S(B_n \times P_m) \leq \max_r \left\{ \frac{2r}{m} \left(n - \log_2 \frac{r}{m} - 1 \right) - r \right\}, \text{dir.}$$

$f(x) = \frac{2x}{m} \left(n - \log_2 \frac{x}{m} - 1 \right) - x$ fonksiyonu maksimum değerini

$x = m \cdot 2^{n - \lceil \frac{m}{2} \rceil - 2}$, de alır. Buradan,

$$ENS_S(B_n \times P_m) \leq 2^{n - \lceil \frac{m}{2} \rceil - 2} \left(2 \cdot \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 2 - m \right) \quad (5)$$

elde edilir.

• P_m grafının kopyalarından, $|S| = r$ tane ayrıt çıkarılırsa geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\omega((B_n \times P_m) / S) \leq \left\lceil \frac{r}{2^n} \right\rceil + 1$$

olduğundan

$$ENS_S(B_n \times P_m) \leq \max_r \left\{ \left\lceil \frac{r}{2^n} \right\rceil + 1 - r \right\} \text{ 'dir.}$$

S kümesi, $B_n \times P_m$ grafının bir ayrıt-kesim-stratejisi (edge-cut-strategy) olduğu için, $|S| = r \geq 2$ açıkça görülür. Böylece

$$ENS_S(B_n \times P_m) \leq 0 \quad (6)$$

olur, (5) ve (6) ifadeleri ile ayrıt-komşu-scattering sayısı tanımından

$$ENS(B_n \times P_m) \leq 2^{n - \lceil \frac{m}{2} \rceil - 2} \left(2 \cdot \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 2 - m \right) \quad (7)$$

elde edilir.

Diğer yandan, $B_n \times P_m$ grafında, herhangi iki $B_{n-i} \times P_m$ 'i birleştiren bir ayrıt e_{ij}^* ile isimlendirilirse ve her $i \in \{1, \dots, n\}$ için $j = \overline{1, m}$ olmak üzere bütün e_{ij}^* 'lerin kümesi E_i^* ile gösterilirse $|E_i^*| = m \cdot 2^{i-1}$ 'dir. Böylece, $B_n \times P_m$ grafının $S^* = E_i^*$, $i = n - \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil - 1$ olacak şekilde bir ayrıt-kesim-strateji'sinin seçilebileceği de açıkça görülür. Bu durumda,

$$\omega((B_n \times P_m) / S^*) = 2^{n - \lceil \frac{m}{2} \rceil - 1} \left(\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 1 \right)$$

olup ayrıt-komşu-scattering sayısının tanımından,

$$\begin{aligned} ENS(B_n \times P_m) &\geq \omega((B_n \times P_m) / S^*) - |S^*| \\ &= 2^{n - \lceil \frac{m}{2} \rceil - 2} \left(2 \cdot \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 2 - m \right) \end{aligned} \quad (8)$$

yazılabilir.

Sonuç olarak, (7) ve (8) ifadelerinden ispat tamamlanır.

□

Teorem 2.1.1.2 : B_n , 2^n tepeli binomial bir ağaç ve C_m , m tepeli bir çevre graf olmak üzere; $ENS(B_n \times C_m) = 2^{n - \lceil \frac{m}{2} \rceil - 2} \left(2 \cdot \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 2 - m \right)$ 'dir.

İspat: S kümesi, $S \subseteq E(B_n \times C_m)$ olmak üzere, $B_n \times C_m$ grafının ayrıt-komşu-scattering sayısını sağlayan bir küme olsun. $B_n \times C_m$ grafı, B_n grafından m kopya ve C_m grafından 2^n kopya içermektedir. Bu durumda S kümesine bağlı iki durum ortaya çıkar:

- B_n grafının kopyalarından, $|S| = r$ tane ayrıt çıkarılırsa geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\omega((B_n \times C_m) / S) \leq \frac{2r}{m} \left(n - \log_2 \frac{r}{m} - 1 \right)$$

olduğundan

$$ENS_S(B_n \times C_m) \leq \max_r \left\{ \frac{2r}{m} \left(n - \log_2 \frac{r}{m} - 1 \right) - r \right\} \text{ 'dir.}$$

$$f(x) = \frac{2x}{m} \left(n - \log_2 \frac{x}{m} - 1 \right) - x \quad \text{fonksiyonu maksimum değerini}$$

$x = m \cdot 2^{n - \lceil \frac{m}{2} \rceil - 2}$ de alır. Buradan,

$$ENS_S(B_n \times C_m) \leq 2^{n - \lceil \frac{m}{2} \rceil - 2} \left(2 \cdot \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 2 - m \right) \quad (9)$$

elde edilir.

- C_m grafının kopyalarından, $|S|=r$ tane ayrıt çıkarılırsa geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\omega((B_n \times C_m) / S) \leq \left\lceil \frac{r}{3} \right\rceil + 1$$

olduğundan

$$ENS_S(B_n \times C_m) \leq \max_r \left\{ \left\lceil \frac{r}{3} \right\rceil + 1 - r \right\} \text{ 'dir.}$$

S kümesi, $B_n \times C_m$ grafının bir ayrıt-kesim-stratejisi (edge-cut-strategy) olduğu için, $|S|=r \geq 3$ açıkça görülür. Böylece

$$ENS_S(B_n \times C_m) \leq -1 \quad (10)$$

olup (9) ve (10) ifadeleri ile ayrıt-komşu-scattering sayısı tanımından

$$ENS(B_n \times C_m) \leq 2^{n-\lceil m/2 \rceil - 2} \left(2 \cdot \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 2 - m \right) \quad (11)$$

elde edilir.

Diğer yandan, $B_n \times C_m$ grafında, herhangi iki $B_{n-i} \times C_m$ 'i birleştiren bir ayrıt e_{ij}^* ile isimlendirilirse ve her $i \in \{1, \dots, n\}$ için $j = \overline{1, m}$ olmak üzere bütün e_{ij}^* 'lerin kümesi E_i^* ile gösterilirse $|E_i^*| = m \cdot 2^{i-1}$ 'dir. Böylece, $B_n \times C_m$ grafının $S^* = E_i^*$, $i = n - \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil - 1$ olacak şekilde bir ayrıt-kesim-strateji'sinin seçilebileceği de açıkça görülür. Bu durumda,

$$\omega((B_n \times C_m) / S^*) = 2^{n-\lceil m/2 \rceil - 1} \left(\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 1 \right)$$

olup ayrıt-komşu-scattering sayısının tanımından,

$$\begin{aligned} ENS(B_n \times C_m) &\geq \omega((B_n \times C_m) / S^*) - |S^*| \\ &= 2^{n-\lceil m/2 \rceil - 2} \left(2 \cdot \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 2 - m \right) \end{aligned} \quad (12)$$

yazılabilir.

Sonuç olarak, (11) ve (12) ifadelerinden ispat tamamlanır.

□

2.1.2. Taçlama İşlemi

Bu kısımda öncelikle taçlama işleminin tanımı verilmiş olup, daha sonra $B_n \circ P_m$ ve $B_n \circ C_m$ graflarının ayrıt-komşu-scattering sayıları hesaplanmıştır.

Tanım 2.1.2.1 : (Harary, 1971) G_1 ve G_2 graflarının *taçlama (corona) işlemi* $G_1 \circ G_2$ ile gösterilir. $G_1 \circ G_2$, n tepeli G_1 grafindan bir tane ve G_2 grafindan n tane alınıp, G_1 grafinin i . tepesinin G_2 grafinin i . kopyasının her tepesine bir ayrıtla birleştirilmesi ile oluşturulur.

Teorem 2.1.2.1 : B_n , 2^n tepeli binomial bir ağaç ve P_m , m tepeli bir yol graf olmak üzere; $n, m \geq 3$ için $ENS(B_n \circ P_m) = 2^n$ 'dir.

İspat: S kümesi, $S \subseteq E(B_n \circ P_m)$ olmak üzere, $B_n \circ P_m$ grafinin ayrıt-komşu-scattering sayısını sağlayan bir küme olsun. Bu durumda, S kümesi, ya bir tepesi B_n grafinda, diğeri P_m grafinin kopyalarından birinde olan ayrıtların bir altkümesi ya da iki tepesi de B_n 'de olan ayrıtların bir altkümesi olmak zorundadır. $|S| = r$ olsun.

Durum 1: S kümesi, uç tepelerinden biri B_n grafinda, diğeri P_m grafinin kopyalarından birinde olan ayrıtların bir altkümesi olsun. S kümesindeki ayrıtların uç tepelerinin oluşturduğu küme $V^*(S)$ olmak üzere $V^*(S) \cap V(B_n) = A$ ve $|A| = m$ olsun. Durum 1, m 'e bağlı olarak üç koşulda incelenmelidir:

- $0 \leq i \leq n-1$ olmak üzere $m = 2^i$ ise, geriye kalan grafin bileşen sayısı

$$\omega((B_n \circ P_m)/S) \leq (n-i) \cdot 2^i + r + m$$

olduğundan (Kırlangıç, 2002),

$$\begin{aligned}
 ENS_S(B_n \circ P_m) &\leq \max \left\{ \omega((B_n \circ P_m)/S) - |S| \right\} \\
 &= \max_{0 \leq i \leq n-1} \left\{ (n-i) \cdot 2^i + r + m - r \right\} \\
 &= \max_{0 \leq i \leq n-1} \left\{ 2^i \cdot (n-i+1) \right\} \tag{13}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

- $2 \leq i \leq n-1$ olmak üzere $2^{i-1} < m < 2^i$ ise, geriye kalan grafın bileşen sayısı

$$\omega((B_n \circ P_m)/S) \leq (n-(i-1)) \cdot 2^{i-1} + (m-2^{i-1}) \cdot (n-(i+1)) + r + m$$

olduğundan (Kırlangıç, 2002),

$$\begin{aligned}
 ENS_S(B_n \circ P_m) &\leq \max \left\{ \omega((B_n \circ P_m)/S) - |S| \right\} \\
 &= \max_{2 \leq i \leq n-1} \left\{ (n-(i-1)) \cdot 2^{i-1} + (m-2^{i-1}) \cdot (n-(i+1)) + r + m - r \right\} \\
 &= \max_{2 \leq i \leq n-1} \left\{ 2^i + m(n-i) \right\} \\
 &< \max_{2 \leq i \leq n-1} \left\{ 2^i + 2^i(n-i) \right\} \\
 &= \max_{2 \leq i \leq n-1} \left\{ 2^i(n-i+1) \right\} \tag{14}
 \end{aligned}$$

(13) ve (14) ifadelerinden,

$$ENS_S(B_n \circ P_m) \leq \max_{2 \leq i \leq n-1} \left\{ 2^i(n-i+1) \right\}$$

elde edilir.

$f(x) = 2^x(n-x+1)$ fonksiyonu maksimum değerini $x = n - \frac{\ln(e/2)}{\ln 2}$, de

alır. $n \geq 3$ olmak üzere, her n değeri için $x = \left\lfloor n - \frac{\ln(e/2)}{\ln 2} \right\rfloor = n-1$ olduğu

açıktır. Yerine koyulursa

$$ENS_S(B_n \circ P_m) \leq 2^n \tag{15}$$

elde edilir.

- $m > 2^{n-1}$ ise, geriye kalan grafin bileşen sayısı

$$\begin{aligned}\omega((B_n \circ P_m)/S) &\leq (n - (n-1)) \cdot 2^{n-1} - (m - 2^{n-1}) + m + r \\ &= 2^n + r\end{aligned}$$

olduğundan

$$ENS_S(B_n \circ P_m) \leq \max\{2^n + r - r\} \leq 2^n \quad (16)$$

elde edilir.

(15) ve (16) ifadelerinden,

$$ENS(B_n \circ P_m) \leq 2^n \quad (17)$$

elde edilir.

Diğer yandan, P_m grafinin her kopyasında uç tepe olmayan tepelerden bir tanesi v_i ve v_i 'yi B_n 'e bağlayan ayrıt e_i olsun. Bu durumda, $B_n \circ P_m$ grafindan $\{e_1, e_2, \dots, e_{2^n}\}$ ayrıt kümesi çıkarılırsa, geriye kalan bileşenlerin sayısı $\omega((B_n \circ P_m)/\{e_1, e_2, \dots, e_{2^n}\}) = 2 \cdot 2^n$ 'dir.

Ayrıt-komşu-scattering sayısının tanımından,

$$\begin{aligned}ENS_S(B_n \circ P_m) &= \max_{S \subseteq E(B_n \circ P_m)} \{\omega((B_n \circ P_m)/S) - |S|\} \\ &\geq \omega((B_n \circ P_m)/\{e_1, e_2, \dots, e_{2^n}\}) - |\{e_1, e_2, \dots, e_{2^n}\}| \\ &= 2^{n+1} - 2^n = 2^n\end{aligned} \quad (18)$$

elde edilir.

(17) ve (18) ifadelerinden,

$$ENS_S(B_n \circ P_m) = 2^n \quad (19)$$

elde edilir.

Durum 2: S kümesi, B_n 'deki ayrıtların bir altkümesi olsun. $B_n \circ P_m$ grafindaki herhangi iki $B_{n-1} \circ P_m$ 'i bağlayan ayrıt e_i^* ile gösterilsin. Bütün e_i^* 'lerin kümesi de E_i^* ile adlandırılınsın. Bu durumda, $i \in \{1, \dots, n\}$ olmak üzere, S kümesi için

$|E_i^*| = 2^{i-1}$ 'dir. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, $S = E_i^*$ kümesi, $B_n \circ P_m$ grafından çıkarılırsa geriye kalan grafın bileşen sayısı

$$\omega(B_n \circ P_m) = 2^i(n-i) + 2 \cdot 2^{i-1} = 2^i(n-i+1)$$

olduğundan

$$ENS_S(B_n \circ P_m) = \max \left\{ \omega((B_n \circ P_m)/S) - |S| \right\} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ 2^i(n-i+1) - 2^{i-1} \right\}$$

elde edilir.

$$f(x) = 2^{x-1}(2n-2x+1) \text{ fonksiyonu maksimum değerini } x = \left\lfloor n - \frac{1}{2} \right\rfloor \text{ 'de}$$

alır. $n \geq 3$ olacak şekilde, her n değeri için $x = \left\lfloor n - \frac{1}{2} \right\rfloor = n-1$ olduğu açıktır.

Yerine koyulursa

$$ENS_S(B_n \circ P_m) = 3 \cdot 2^{n-2} \quad (20)$$

elde edilir.

Sonuç olarak, (19) ve (20) ifadelerinden ispat tamamlanır.

□

Teorem 2.1.2.2 : B_n , 2^n tepeli binomial bir ağaç ve C_m , m tepeli bir çevre graf olmak üzere; $n, m \geq 3$ için $ENS(B_n \circ C_m) = 3 \cdot 2^{n-2}$ 'dir.

İspat: S kümesi, $S \subseteq E(B_n \circ C_m)$ olmak üzere, $B_n \circ C_m$ grafının ayrıt-komşu-scattering sayısını sağlayan bir küme olsun. Bu durumda, S kümesi ya bir tepesi B_n grafında, diğeri C_m grafının kopyalarından birinde olan ayrıtların bir altkümesi ya da iki tepesi de B_n 'de olan ayrıtların bir altkümesi olmak zorundadır.

$|S| = r$ olsun.

Durum 1: S kümesi, uç tepelerinden biri B_n grafında, diğeri C_m grafının kopyalarından birinde olan ayrıtların bir altkümesi olsun. S kümesindeki

ayrıtların uç tepelerinin oluşturduğu küme $V^*(S)$ olmak üzere $V^*(S) \cap V(B_n) = A$ ve $|A| = m$ olsun. Durum 1, m 'e bağlı olarak üç durumda incelenmelidir:

- $0 \leq i \leq n-1$ olmak üzere $m = 2^i$ ise, geriye kalan grafin bileşen sayısı

$$\omega((B_n \circ C_m) / S) \leq (n-i) \cdot 2^i + r$$

olduğundan (Kırlangıç, 2002),

$$\begin{aligned} ENS_S(B_n \circ C_m) &\leq \max \{ \omega((B_n \circ C_m) / S) - |S| \} \\ &= \max_{0 \leq i \leq n-1} \{ (n-i) \cdot 2^i + r - r \} \\ &= \max_{0 \leq i \leq n-1} \{ 2^i \cdot (n-i) \} \end{aligned} \quad (21)$$

elde edilir.

- $2 \leq i \leq n-1$ olmak üzere $2^{i-1} < m < 2^i$ ise, geriye kalan grafin bileşen sayısı

$$\omega((B_n \circ C_m) / S) \leq (n-(i-1)) \cdot 2^{i-1} + (m-2^{i-1}) \cdot (n-(i+1)) + r$$

olduğundan (Kırlangıç, 2002),

$$\begin{aligned} ENS_S(B_n \circ C_m) &\leq \max \{ \omega((B_n \circ C_m) / S) - |S| \} \\ &= \max_{2 \leq i \leq n-1} \{ (n-(i-1)) \cdot 2^{i-1} + (m-2^{i-1}) \cdot (n-(i+1)) + r - r \} \\ &= \max_{2 \leq i \leq n-1} \{ 2^i + m(n-i-1) \} \\ &< \max_{2 \leq i \leq n-1} \{ 2^i + 2^i(n-i-1) \} \\ &= \max_{2 \leq i \leq n-1} \{ 2^i(n-i) \} \end{aligned} \quad (22)$$

(21) ve (22) ifadelerinden,

$$ENS_S(B_n \circ C_m) \leq \max_{2 \leq i \leq n-1} \{ 2^i(n-i) \}$$

elde edilir.

$f(x) = 2^x(n-x)$ fonksiyonu maksimum değerini $x = n - \frac{1}{\ln 2}$ 'de alır.

$n \geq 3$ olmak üzere, her n değeri için $x = \left\lfloor n - \frac{1}{\ln 2} \right\rfloor = n-2$ olduğu açıktır.

Yerine koyulursa

$$ENS_S(B_n \circ C_m) \leq 2^{n-1} \quad (23)$$

elde edilir.

- $m > 2^{n-1}$ ise, geriye kalan grafın bileşen sayısı

$$\begin{aligned}\omega((B_n \circ C_m)/S) &\leq (n - (n-1)) \cdot 2^{n-1} - (m - 2^{n-1}) + r \\ &= 2^n - m + r\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}ENS_S(B_n \circ C_m) &\leq \max\{2^n - m + r - r\} \\ &= \max\{2^n - m\} \text{ 'dir.}\end{aligned}$$

$f(x) = 2^n - x$ fonksiyonu azalan fonksiyon olduğundan, maksimum değerini sınırdaki, yani $m = 2^{n-1} + 1$ 'de alır. Yerine koyulursa,

$$ENS_S(B_n \circ C_m) \leq 2^n - (2^{n-1} + 1) = 2^{n-1} - 1 \quad (24)$$

elde edilir.

(23) ve (24) ifadelerinden,

$$ENS(B_n \circ C_m) \leq 2^{n-1} \quad (25)$$

elde edilir.

Durum 2: S kümesi, B_n 'deki ayrıtların bir altkümesi olsun. $B_n \circ C_m$ grafındaki herhangi iki $B_{n-1} \circ C_m$ 'i bağlayan ayrıt e_i^* ile gösterilsin. Bütün e_i^* 'lerin kümesi de E_i^* ile adlandırılınsın. Bu durumda, $i \in \{1, \dots, n\}$ olmak üzere, S kümesi bir E_i^* olmalıdır. $|E_i^*| = 2^{i-1}$ 'dir. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, $S = E_i^*$ kümesi $B_n \circ C_m$ grafından çıkarılırsa, geriye kalan grafın bileşen sayısı

$$\omega(B_n \circ C_m) = 2^i(n-i) + 2 \cdot 2^{i-1} = 2^i(n-i+1)$$

olduğundan,

$$ENS_S(B_n \circ C_m) = \max\{\omega((B_n \circ C_m)/S) - |S|\} = \max_{1 \leq i \leq n}\{2^i(n-i+1) - 2^{i-1}\}$$

elde edilir.

$f(x) = 2^{x-1}(2n-2x+1)$ fonksiyonu maksimum değerini $x = \left\lfloor n - \frac{1}{2} \right\rfloor$ 'de

alır. $n \geq 3$ olacak şekilde, her n değeri için $x = \left\lfloor n - \frac{1}{2} \right\rfloor = n-1$ olduğu açıktır.

Yerine koyulursa,

$$ENS_S(B_n \circ C_m) = 3 \cdot 2^{n-2} \quad (26)$$

elde edilir.

Sonuç olarak, (25) ve (26) ifadelerinden

$$ENS(B_n \circ C_m) \leq 3 \cdot 2^{n-2} \quad (27)$$

elde edilir.

Diğer yandan, $B_n \circ C_m$ grafinin $S^* = E_i^*$, $i = n-1$ olacak şekilde bir ayrıt-kesim-strateji'sinin seçilebileceği de açıkça görülür. Bu durumda geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\omega((B_n \circ C_m) / S^*) = 2^{n-1}(n - (n-1) + 1) = 2^n$$

olur. Ayrıt-komşu-scattering sayısının tanımından,

$$\begin{aligned} ENS(B_n \circ C_m) &\geq \omega((B_n \circ C_m) / S^*) - |S^*| \\ &= 2^n - 2^{(n-1)-1} \\ &= 3 \cdot 2^{n-2} \end{aligned} \quad (28)$$

yazılabilir.

Sonuç olarak, (27) ve (28) ifadelerinden ispat tamamlanır. □

Teorem 2.1.2.3 : B_n , 2^n tepeli binomial bir ağaç, K_m , m tepeli bir tam graf olmak üzere; $n, m \geq 3$ için $ENS(B_n \circ K_m) = 3 \cdot 2^{n-2}$ 'dir.

İspat: İspat, Teorem 2.1.2.2'ye benzer şekilde yapılır.

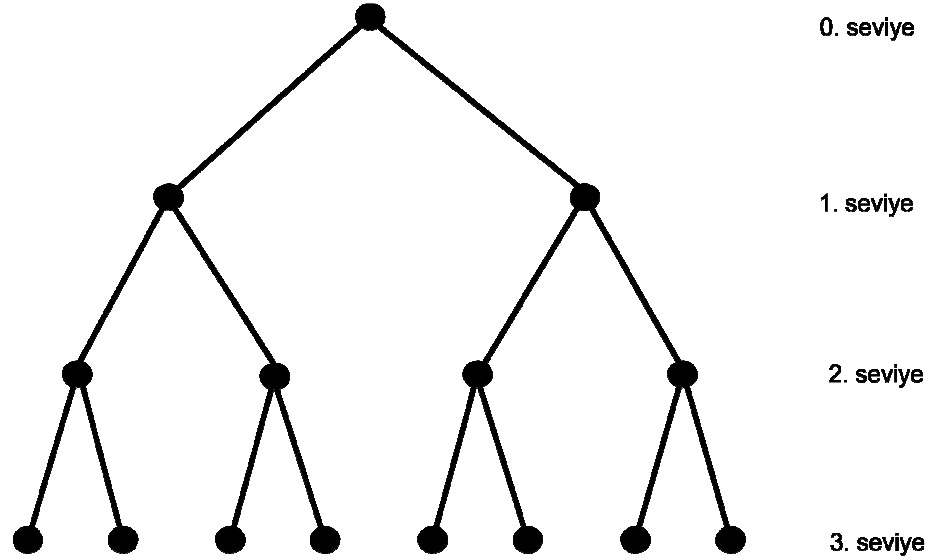
Teorem 2.1.2.4 : B_n , 2^n tepeli binomial bir ağaç, $W_{1,m}$, $m+1$ tepeli bir tekerlek graf olmak üzere; $n, m \geq 3$ için $ENS(B_n \circ W_{1,m}) = 3 \cdot 2^{n-2}$ 'dir.

İspat: İspat, Teorem 2.1.2.2'ye benzer şekilde yapılır.

2.2. Tam k-ary Ağaçlar

Bu kısımda, öncelikle k-ary ağaçlar tanımlanmış olup bu ağaçların ayrıt-komşu-scattering sayısı hesaplanmıştır.

Tanım 2.2.1 (Cormen et al., 2001) : *Tam k-ary ağaç (complete k-ary tree)*, her yaprağı aynı derinliğe sahip ve yapraklar haricindeki her tepesinin derecesi k olan ağaçtır. Bir tam k-ary ağacın $\frac{k^{n+1}-1}{k-1}$ tepesi ve $\frac{k^{n+1}-1}{k-1} - 1 = \frac{k^{n+1}-k}{k-1}$ ayrıtı vardır. *Tam ikili ağaç (complete binary tree)* ise, $k = 2$ olan tam k-ary ağaçtır.



Şekil 2.2.1. 3 seviyeli tam ikili ağaç

Teorem 2.2.1: $k \geq 3$ olmak üzere, H_n , n seviyeli tam k -ary ağaç olsun.

$$ENS(H_n) = \begin{cases} \frac{k^{n+2} + k + 1}{k^2 + k + 1} & , n \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{k^{n+3} - k^{n+2} - k^3 - k + 2}{k^3 - 1} & , n \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{k^{n+3} - k^{n+2} - k^2 + k}{k^3 - 1} & , n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \text{ 'dir.}$$

İspat: H_n grafında kök tepenin seviyesi 0 olsun ve yapraklardaki tepelerin seviyesi de n olsun. Benzer şekilde, kök tepeden çıkan ayrıtlar E_0 kümesini oluşturmak üzere, bir tepesi j . seviyede ve diğer tepesi $(j+1)$. seviyede olan ayrıtlar kümesi, $0 \leq j \leq n-1$ olmak üzere, E_j ile gösterilsin. $|E_j| = k^{j+1}$ 'dir.

$S \subseteq E(G)$ ve $|S| = r$ olmak üzere, ispat grafın seviyesi olan n 'e göre üç durumda incelenmelidir:

1) $n \equiv 0 \pmod{3}$ olsun.

i) Eğer $1 \leq r \leq \frac{k^{n+1} - k}{k^3 - 1} - 1$ ise, geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\omega(H_n / S) \leq (2k - 1)r + 1$$

olduğundan

$$ENS_S(H_n) \leq \max_r \{(2k - 1)r + 1 - r\} = \max_r \{(2k - 2)r + 1\} \text{ 'dir.}$$

$f(x) = (2k - 2)x + 1$ fonksiyonu artan fonksiyon olduğundan maksimum

değerini üst sınırdaki, yani $r = \frac{k^{n+1} - k}{k^3 - 1} - 1 = \frac{k^{n+1} - k^3 - k + 1}{k^3 - 1}$ 'de, alır. Böylece

$$\begin{aligned} ENS_S(H_n) &\leq \frac{(2k - 2)(k^{n+1} - k^3 - k + 1)}{k^3 - 1} + \frac{k^3 - 1}{k^3 - 1} \\ &= \frac{2(k - 1)(k^{n+1} - k^3 - k + 1)}{(k - 1)(k^2 + k + 1)} + \frac{(k - 1)(k^2 + k + 1)}{(k - 1)(k^2 + k + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2k^{n+1} - 2k^3 - 2k + 2 + k^2 + k + 1}{k^2 + k + 1} \\
&= \frac{2k^{n+1} - 2k^3 + k^2 - k + 3}{k^2 + k + 1} \tag{29}
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii) Eğer $\frac{k^{n+1} - k}{k^3 - 1} \leq r \leq \frac{k^{n+2} - k^2}{k^3 - 1}$ ise, geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\begin{aligned}
\omega(H_n / S) &\leq 1 + (2k - 1)(k^1 + k^4 + \dots + k^{n-2}) + r(k - 1) - (k - 1) \cdot \frac{k^{n+1} - k}{k^3 - 1} \\
&= 1 + \frac{k^{n+1} - k}{k^3 - 1} \cdot (2k - 1 - k + 1) + r(k - 1) \\
&= 1 + \frac{k^{n+2} - k^2}{k^3 - 1} + r(k - 1)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$ENS_S(H_n) \leq \max_r \left\{ 1 + \frac{k^{n+2} - k^2}{k^3 - 1} + r(k - 1) - r \right\} = \max_r \left\{ \frac{k^{n+2} - k^2}{k^3 - 1} + r(k - 2) + 1 \right\} \text{ dir.}$$

$$f(x) = \frac{k^{n+2} - k^2}{k^3 - 1} + x(k - 2) + 1 \text{ fonksiyonu artan fonksiyon olduğundan}$$

maksimum değerini üst sınırdaki, yani $r = \frac{k^{n+2} - k^2}{k^3 - 1}$ 'de, alır. Böylece

$$\begin{aligned}
ENS_S(H_n) &\leq \frac{k^{n+2} - k^2}{k^3 - 1} (1 + k - 2) + 1 \\
&= \frac{k^{n+2} - k^2}{(k - 1)(k^2 + k + 1)} \cdot (k - 1) + 1 \\
&= \frac{k^{n+2} + k + 1}{k^2 + k + 1} \tag{30}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer yandan, eğer S kümesi, $S = E_1 \cup E_4 \cup \dots \cup E_{n-2}$ olacak şekilde seçilirse $|S| = \frac{k^{n+2} - k^2}{k^3 - 1}$ 'dir ve $\frac{k^{n+1} - k}{k^3 - 1} \leq |S| \leq \frac{k^{n+2} - k^2}{k^3 - 1}$ olduğu kolayca görülür.

Bu durumda geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\omega(H_n/S) = \frac{k^{n+3} - 1}{k^3 - 1}, \text{dir.}$$

Ayrıt-komşu-scattering sayısı tanımından,

$$\begin{aligned} ENS_S(H_n) &\geq \frac{k^{n+3} - 1}{k^3 - 1} - \frac{k^{n+2} - k^2}{k^3 - 1} \\ &= \frac{k^{n+2} + k + 1}{k^2 + k + 1} \end{aligned} \quad (31)$$

elde edilir.

(30) ve (31) ifadelerinden,

$$ENS_S(H_n) = \frac{k^{n+2} + k + 1}{k^2 + k + 1} \quad (32)$$

elde edilir.

iii) Eğer $\frac{k^{n+2} - k^2}{k^3 - 1} + 1 \leq r \leq \frac{k^{n+1} - k}{k - 1}$ ise geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\begin{aligned} \omega(H_n/S) &\leq \frac{k^{n+3} - 1}{k^3 - 1} - \left(r - \frac{k^{n+2} - k^2}{k^3 - 1} \right) + 1 \\ &= \frac{k^{n+3} - 1 + k^{n+2} - k^2 + k^3 - 1}{k^3 - 1} - r \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} ENS_S(H_n) &\leq \max_r \left\{ \frac{k^{n+3} + k^{n+2} + k^3 - k^2 - 2}{k^3 - 1} - r - r \right\} \\ &= \max_r \left\{ \frac{k^{n+3} + k^{n+2} + k^3 - k^2 - 2}{k^3 - 1} - 2r \right\}, \text{dir.} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{k^{n+3} + k^{n+2} + k^3 - k^2 - 2}{k^3 - 1} - 2x \quad \text{fonksiyonu} \quad \text{azalan} \quad \text{fonksiyon}$$

olduğundan maksimum değerini alt sınırdaki, yani $r = \frac{k^{n+2} - k^2}{k^3 - 1} + 1$ 'de, alır.

Böylece

$$\begin{aligned} ENS_S(H_n) &\leq \frac{k^{n+3} + k^{n+2} + k^3 - k^2 - 2}{k^3 - 1} - 2 \left(\frac{k^{n+2} - k^2}{k^3 - 1} + 1 \right) = \\ &= \frac{k^{n+3} + k^{n+2} + k^3 - k^2 - 2 - 2k^{n+2} + 2k^2 - 2k^3 + 2}{k^3 - 1} \\ &= \frac{k^{n+3} - k^{n+2} - k^3 + k^2}{k^3 - 1} \\ &= \frac{k^{n+2}(k-1) - k^2(k-1)}{k^3 - 1} \\ &= \frac{(k-1)(k^{n+2} - k^2)}{(k-1)(k^2 + k + 1)} \\ &= \frac{k^{n+2} - k^2}{k^2 + k + 1} \end{aligned} \quad (33)$$

elde edilir.

Sonuç olarak, (29), (32) ve (33) ifadelerinden, $n \equiv 0 \pmod{3}$ ise

$$ENS(H_n) = \frac{k^{n+2} + k + 1}{k^2 + k + 1}$$

elde edilir.

2) $n \equiv 1 \pmod{3}$ olsun.

i) Eğer $1 \leq r \leq \frac{k^{n+1} - k^2}{k^3 - 1}$ ise geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\omega(H_n / S) \leq (2k - 1)r + 1$$

olduğundan

$$\begin{aligned} ENS_S(H_n) &\leq \max_r \{(2k - 1)r + 1 - r\} \\ &= \max_r \{(2k - 2)r + 1\} \text{ 'dir.} \end{aligned}$$

$f(x) = (2k-2)x+1$ fonksiyonu artan fonksiyon olduğundan maksimum değerini üst sınırdaki, yani $r = \frac{k^{n+1}-k^2}{k^3-1}$ de alır. Böylece

$$\begin{aligned}
 ENS_S(H_n) &\leq (2k-2) \cdot \frac{k^{n+1}-k^2}{k^3-1} + \frac{k^3-1}{k^3-1} \\
 &= \frac{2(k-1)(k^{n+1}-k^2)}{(k-1)(k^2+k+1)} + \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k-1)(k^2+k+1)} \\
 &= \frac{2k^{n+1}-2k^2+k^2+k+1}{k^2+k+1} \\
 &= \frac{2k^{n+1}-k^2+k+1}{k^2+k+1} \tag{34}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) Eğer $r = \frac{k^{n+1}-k^2}{k^3-1} + 1$ ise geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\begin{aligned}
 \omega(H_n/S) &\leq (2k-1) \cdot k^2 \cdot \frac{k^{n-1}-1}{k^3-1} + k-1 \\
 &= (2k-1) \frac{k^{n+1}-k^2}{k^3-1} + k-1
 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
 ENS_S(H_n) &\leq \max_r \left\{ \frac{k^{n+1}-k^2}{k^3-1} (2k-1) + k-1 - r \right\} \\
 &= \frac{k^{n+1}-k^2}{k^3-1} (2k-1) + k-1 - \frac{k^{n+1}-k^2}{k^3-1} - 1 = \frac{k^{n+1}-k^2}{k^3-1} (2k-2) + k-2 \\
 &= \frac{2(k^{n+1}-k^2)}{k^2+k+1} + k-2 \tag{35}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

iii) Eğer $\frac{k^{n+1} - k^2}{k^3 - 1} + 1 < r \leq \frac{k^{n+2} - k^3}{k^3 - 1} + 1$ ise geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\begin{aligned}\omega(H_n / S) &\leq (2k-1) \cdot \frac{k^{n+1} - k^2}{k^3 - 1} + (k-1) + \left(r - \frac{k^{n+1} - k^2}{k^3 - 1} - 1 \right) (k-1) \\ &= \frac{k^{n+1} - k^2}{k^3 - 1} (2k-1-k+1) + (k-1)(1+r-1) \\ &= \frac{k^{n+2} - k^3}{k^3 - 1} + r(k-1)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}ENS_S(H_n) &\leq \max_r \left\{ \frac{k^{n+2} - k^3}{k^3 - 1} + r(k-1) - r \right\} \\ &= \max_r \left\{ \frac{k^{n+2} - k^3}{k^3 - 1} + r(k-2) \right\} \text{ 'dir.}\end{aligned}$$

$f(x) = \frac{k^{n+2} - k^3}{k^3 - 1} + x(k-2)$ fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğundan

maksimum değerini üst sınırdaki, yani $x = \frac{k^{n+2} - k^3}{k^3 - 1} + 1$ 'de, alır. Böylece

$$\begin{aligned}ENS(H_n) &\leq \frac{k^{n+2} - k^3}{k^3 - 1} + \frac{k^{n+2} - k^3 + k^3 - 1}{k^3 - 1} (k-2) \\ &= \frac{k^{n+3} - k^{n+2} - k^3 - k + 2}{k^3 - 1}\end{aligned}\quad (36)$$

elde edilir.

Diğer yandan, eğer S kümesi, $S = E_2 \cup E_5 \cup \dots \cup E_{n-2} \cup \{e_*\}$, $e_* \in E_0$

olacak şekilde seçilirse $|S| = \frac{k^{n+2} - k^3}{k^3 - 1} + 1$ 'dir ve $\frac{k^{n+1} - k^2}{k^3 - 1} + 1 < |S| \leq \frac{k^{n+2} - k^3}{k^3 - 1} + 1$

olduğu kolayca görülür. Bu durumda geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\omega(H_n / S) = \frac{k^{n+3} - k^3 - k + 1}{k^3 - 1} \text{ 'dir.}$$

Ayrıt-komşu-scattering sayısı tanımından,

$$ENS_S(H_n) \geq \frac{k^{n+3} - k^3 - k + 1}{k^3 - 1} - \frac{k^{n+2} - k^3}{k^3 - 1} - 1$$

$$= \frac{k^{n+3} - k^{n+2} - k^3 - k + 2}{k^3 - 1} \quad (37)$$

elde edilir.

(36) ve (37) ifadelerinden,

$$ENS_s(H_n) = \frac{k^{n+3} - k^{n+2} - k^3 - k + 2}{k^3 - 1} \quad (38)$$

elde edilir.

iv) Eğer $\frac{k^{n+2} - k^3}{k^3 - 1} + 2 \leq r \leq \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1} - 1$ ise geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\begin{aligned} \omega(H_n / S) &\leq \frac{k^{n+2} - k^3}{k^3 - 1} + \left(\frac{k^{n+2} - k^3}{k^3 - 1} + 1 \right) (k - 1) \\ &= \frac{k^{n+2} - k^3}{k^3 - 1} + \frac{k^{n+3} - k^{n+2} - k + 1}{k^3 - 1} \\ &= \frac{k^{n+3} - k^3 - k + 1}{k^3 - 1} \end{aligned}$$

olduğundan

$$ENS_s(H_n) \leq \max_r \left\{ \frac{k^{n+3} - k^3 - k + 1}{k^3 - 1} - r \right\}, \text{dir.}$$

$f(x) = \frac{k^{n+3} - k^3 - k + 1}{k^3 - 1} - x$ fonksiyonu azalan fonksiyon olduğundan,

maksimum değerini alt sınırdaki, yani $x = \frac{k^{n+2} - k^3}{k^3 - 1} + 2$ 'de, alır. Böylece

$$\begin{aligned} ENS(H_n) &\leq \frac{k^{n+3} - k^3 - k + 1}{k^3 - 1} - \frac{k^{n+2} - k^3}{k^3 - 1} - 2 \\ &= \frac{k^{n+3} - k^3 - k + 1 - k^{n+2} + k^3 - 2k^3 + 2}{k^3 - 1} \\ &= \frac{k^{n+3} - k^{n+2} - 2k^3 - k + 3}{k^3 - 1} \quad (39) \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak; (34), (35), (38) ve (39) ifadelerinden, $n \equiv 1 \pmod{3}$ ise

$$ENS_S(H_n) = \frac{k^{n+3} - k^{n+2} - k^3 - k + 2}{k^3 - 1}$$

elde edilir.

3) $n \equiv 2 \pmod{3}$ olsun.

i) Eğer $1 \leq r \leq \frac{k^{n+1} - 1}{k^3 - 1} - 1$ ise, geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\omega(H_n / S) \leq (2k - 1)r + 1$$

olduğundan

$$ENS_S(H_n) \leq \max_r \{(2k - 1)r + 1 - r\} = \max_r \{(2k - 2)r + 1\} \text{ 'dir.}$$

$f(x) = (2k - 2)x + 1$ fonksiyonu artan fonksiyon olduğundan maksimum

değerini üst sınırdadır, yani $r = \frac{k^{n+1} - 1}{k^3 - 1} - 1 = \frac{k^{n+1} - k^3}{k^3 - 1}$ 'de alır. Böylece

$$\begin{aligned} ENS_S(H_n) &\leq \frac{k^{n+1} - k^3}{k^3 - 1} \cdot (2k - 2) + 1 \\ &= \frac{2k^{n+2} - 2k^4 - 2k^{n+1} + 2k^3 + k^3 - 1}{k^3 - 1} \\ &\leq \frac{2k^{n+2} - 2k^{n+1} - 2k^4 + 3k^3 - 1}{k^3 - 1} \end{aligned} \quad (40)$$

elde edilir.

ii) Eğer $\frac{k^{n+1} - 1}{k^3 - 1} \leq r \leq \frac{k^{n+2} - k}{k^3 - 1}$ ise, geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\begin{aligned} \omega(H_n / S) &\leq (2k - 1) \frac{k^{n+1} - 1}{k^3 - 1} + \left(r - \frac{k^{n+1} - 1}{k^3 - 1} \right) (k - 1) \\ &= \frac{k^{n+2} - k}{k^3 - 1} + r(k - 1) \text{ 'dir.} \end{aligned}$$

olduğundan,

$$ENS_S(H_n) \leq \max_r \left\{ \frac{k^{n+2} - k}{k^3 - 1} + r(k - 1) - r \right\}$$

$$= \max_r \left\{ \frac{k^{n+2} - k}{k^3 - 1} + r(k-1-1) \right\} \text{ 'dir.}$$

$f(x) = \frac{k^{n+2} - k}{k^3 - 1} + r(k-2)$ fonksiyonu artan fonksiyon olduğundan

maksimum değerini üst sınırdaki, yani $r = \frac{k^{n+2} - k}{k^3 - 1}$ 'de, alır. Böylece

$$\begin{aligned} ENS(H_n) &\leq \frac{k^{n+2} - k}{k^3 - 1} + \frac{k^{n+2} - k}{k^3 - 1} (k-2) \\ &= \frac{k^{n+2} - k}{k^3 - 1} + \frac{k^{n+3} - k^2}{k^3 - 1} - \frac{2k^{n+2} - 2k}{k^3 - 1} \\ &= \frac{k^{n+2} - k + k^{n+3} - k^2 - 2k^{n+2} + 2k}{k^3 - 1} \\ &= \frac{k^{n+3} - k^{n+2} - k^2 + k}{k^3 - 1} \end{aligned} \quad (41)$$

elde edilir.

Diğer yandan, eğer S kümesi, $S = E_0 \cup E_3 \cup \dots \cup E_{n-2}$ olacak şekilde seçilirse $|S| = \frac{k^{n+2} - k}{k^3 - 1}$ 'dir ve $\frac{k^{n+1} - 1}{k^3 - 1} \leq |S| \leq \frac{k^{n+2} - k}{k^3 - 1}$ olduğu kolayca görülür. Bu

durumda geriye kalan bileşenleri sayısı $\omega(H_n/S) = \frac{k^{n+3} - k^2}{k^3 - 1}$ 'dir.

Ayrıt-komşu-scattering sayısı tanımından,

$$ENS_S(H_n) \geq \frac{k^{n+3} - k^2}{k^3 - 1} - \frac{k^{n+2} - k}{k^3 - 1} = \frac{k^{n+3} - k^{n+2} - k^2 + k}{k^3 - 1} \quad (42)$$

elde edilir.

(41) ve (42) ifadelerinden,

$$ENS_S(H_n) = \frac{k^{n+3} - k^{n+2} - k^2 + k}{k^3 - 1} \quad (43)$$

elde edilir.

iii) Eğer $\frac{k^{n+2} - k}{k^3 - 1} + 1 \leq r \leq \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1} - 1$ ise geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\begin{aligned}
\omega(H_n / S) &\leq \frac{k^{n+2} - k}{k^3 - 1} + \frac{k^{n+2} - k}{k^3 - 1} (k - 2) \\
&= \frac{k^{n+2} - k}{k^3 - 1} (1 + k - 2) = \frac{k^{n+2} - k}{k^3 - 1} (k - 1) \\
&= \frac{k^{n+3} - k^{n+2} - k^2 + k}{k^3 - 1}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$ENS_S(H_n) \leq \max_r \left\{ \frac{k^{n+3} - k^{n+2} - k^2 + k}{k^3 - 1} - r \right\}, \text{dir.}$$

$f(x) = \frac{k^{n+3} - k^{n+2} - k^2 + k}{k^3 - 1} - x$ fonksiyonu azalan fonksiyon olduğundan

maksimum değerini alt sınırdaki, yani $r = \frac{k^{n+1} - 1}{k^3 - 1} + 1 = \frac{k^{n+1} - 1 + k^3 - 1}{k^3 - 1}$, de, alır.

Böylece

$$\begin{aligned}
ENS_S(H_n) &\leq \frac{k^{n+3} - k^{n+2} - k^2 + k}{k^3 - 1} - \frac{k^{n+1} - 2 + k^3}{k^3 - 1} \\
&= \frac{k^{n+3} - k^{n+2} - k^{n+1} - k^3 - k^2 + k + 2}{k^3 - 1} \quad (44)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak; (40), (43) ve (44) ifadelerinden, $n \equiv 2 \pmod{3}$ ise

$$ENS(H_n) = \frac{k^{n+3} - k^{n+2} - k^2 + k}{k^3 - 1}$$

elde edilir. □

Yukarıdaki teorem k -ary ($k \geq 3$) bir H_n grafi için geçerlidir ancak, n seviyeli tam ikili (2-ary/binary) ağaç için geçerli değildir. Örneğin bu teoremi, 4 seviyeli ikili (2-ary) bir ağaca uygularsak, Teorem 2.2.1'e göre sonucun 8 olması gerektiği, ama gerçek sonucun 9 olduğu kolayca görülebilir. Bu durumda, n seviyeli tam ikili (2-ary/binary) H_n grafinin ayrıt-komşu-scattering sayısı ise aşağıdaki teoremden verilmiştir.

Teorem 2.2.2: H_n , n seviyeli tam ikili ağaç olsun.

$$ENS(H_n) = \begin{cases} \frac{2^{n+2} + 3}{7} & , n \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{2^{n+2} - 1}{7} & , n \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{2^{n+2} - 2}{7} & , n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \text{ 'dir.}$$

İspat: H_n grafında kök tepenin seviyesi 0 olsun ve yapraklardaki tepelerin seviyesi de n olsun. Benzer şekilde, kök tepeden çıkan ayrıtlar E_0 kümesini oluşturmak üzere, bir tepesi j . seviyede ve diğer tepesi $(j+1)$. seviyede olan ayrıtlar kümesi, $0 \leq j \leq n-1$ olmak üzere, E_j ile gösterilsin. $|E_j| = 2^{j+1}$ 'dir.

$S \subseteq E(G)$ ve $|S| = r$ olmak üzere, ispat grafın seviyesi olan n 'e göre üç durumda incelenmelidir:

1) $n \equiv 0 \pmod{3}$ olsun.

i) Eğer $1 \leq r \leq \frac{2^{n+1} - 9}{7}$ ise geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\omega(H_n / S) \leq 3r + 1$$

olduğundan

$$ENS_S(H_n) \leq \max_r \{3r + 1 - r\} = \max_r \{2r + 1\}$$

elde edilir.

$f(x) = 2x + 1$ fonksiyonu artan fonksiyon olduğundan maksimum değerini

üst sınırdaki, yani $r = \frac{2^{n+1} - 9}{7}$ 'de, alır. Böylece

$$ENS_S(H_n) \leq 2 \cdot \frac{2^{n+1} - 9}{7} + 1 = \frac{2^{n+2} - 11}{7} \quad (45)$$

elde edilir.

ii) Eğer $\frac{2^{n+1}-9}{7} < r \leq \frac{2(2^{n+1}-2)}{7}$ ise geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\omega(H_n / S) \leq \frac{2(2^{n+1}-2)}{7} + r + 1$$

olduğundan

$$ENS_S(H_n) \leq \max_r \left\{ \frac{2(2^{n+1}-2)}{7} + r + 1 - r \right\} = \frac{2^{n+2}+3}{7} \quad (46)$$

elde edilir.

Diğer yandan, eğer S kümesi, $S = E_1 \cup E_4 \cup \dots \cup E_{n-2}$ olacak şekilde seçilirse $|S| = \frac{2^2(2^n-1)}{7}$, dir ve $\frac{2^{n+1}-9}{7} < |S| \leq \frac{2(2^{n+1}-2)}{7}$ olduğu kolayca görülür. Bu durumda geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\omega(H_n \setminus S) = \frac{2^{n+3}-1}{7}, \text{ dir.}$$

Ayrıt-komşu-scattering sayısı tanımından,

$$ENS_S(H_n) \geq \frac{2^{n+3}-1}{7} - \frac{2^{n+2}-2^2}{7} = \frac{2^{n+2}+3}{7} \quad (47)$$

elde edilir.

$$(46) \text{ ve } (47) \text{ ifadelerinden, } ENS_S(H_n) = \frac{2^{n+2}+3}{7} \text{ elde edilir.} \quad (48)$$

iii) Eğer $\frac{2(2^{n+1}-2)}{7} + 1 \leq r \leq 2^{n+1} - 2$ ise geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\omega(H_n / S) \leq \frac{3 \cdot 2^{n+2} - 5}{7} - r$$

olduğundan

$$ENS_S(H_n) \leq \max_r \left\{ \frac{3 \cdot 2^{n+2} - 5}{7} - r - r \right\} = \max_r \left\{ \frac{3 \cdot 2^{n+2} - 5}{7} - 2r \right\}, \text{ dir.}$$

$f(x) = \frac{3 \cdot 2^{n+2} - 5}{7} - 2x$ fonksiyonu azalan fonksiyon olduğundan

maksimum değerini alt sınırdaki, yani $r = \frac{2(2^{n+1} - 2)}{7} + 1 = \frac{2^{n+2} + 3}{7}$, de, alır.

Böylece

$$ENS_S(H_n) \leq \frac{3 \cdot 2^{n+2} - 5}{7} - \frac{2(2^{n+2} + 3)}{7} = \frac{2^{n+2} - 11}{7} \quad (49)$$

elde edilir.

Sonuç olarak; (45), (48) ve (49) ifadelerinden, $n \equiv 0 \pmod{3}$ ise

$$ENS(H_n) = \frac{2^{n+2} + 3}{7}$$

elde edilir.

2) $n \equiv 1 \pmod{3}$ olsun.

i) Eğer $1 \leq r \leq \frac{2^{n+1} - 11}{7}$ ise geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\omega(H_n / S) \leq 3r + 1$$

olduğundan

$$ENS_S(H_n) \leq \max_r \{3r + 1 - r\} = \max_r \{2r + 1\} \text{ dir.}$$

$f(x) = 2x + 1$ fonksiyonu artan fonksiyon olduğundan maksimum değerini üst sınırdaki, yani $r = \frac{2^{n+1} - 11}{7}$, de, alır. Böylece

$$ENS_S(H_n) \leq 2 \cdot \frac{2^{n+1} - 11}{7} + 1 = \frac{2^{n+2} - 15}{7} \quad (50)$$

elde edilir.

ii) Eğer $\frac{2^{n+1} - 11}{7} < r \leq \frac{2(2^{n+1} - 4)}{7}$ ise geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\omega(H_n / S) \leq \frac{2 \cdot 2^{n+1} - 1}{7} + r$$

olduğundan

$$ENS_S(H_n) \leq \max_r \left\{ \frac{2(2^{n+1}-1)}{7} + r - r \right\} = \frac{2^{n+2}-1}{7} \quad (51)$$

elde edilir.

Diğer yandan, eğer S kümesi, $S = E_2 \cup E_5 \cup \dots \cup E_{n-2}$ olacak şekilde seçilirse $|S| = \frac{2^{n+2}-8}{7}$, dir ve $\frac{2^{n+1}-11}{7} < |S| \leq \frac{2(2^{n+1}-4)}{7}$ olduğu kolayca görülür.

Bu durumda geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\omega(H_n \setminus S) = \frac{2^{n+3}-9}{7}, \text{ dir.}$$

Ayrıt-komşu-scattering sayısı tanımından,

$$ENS_S(H_n) \geq \frac{2^{n+3}-9}{7} - \frac{2^{n+2}-8}{7} = \frac{2^{n+2}-1}{7} \quad (52)$$

elde edilir.

(51) ve (52) ifadelerinden,

$$ENS_S(H_n) = \frac{2^{n+2}-1}{7} \quad (53)$$

elde edilir.

iii) Eğer $\frac{2(2^{n+1}-4)}{7} + 1 \leq r \leq 2^{n+1} - 2$ ise geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\omega(H_n / S) \leq \frac{2^{n+3}-9}{7}$$

olduğundan

$$ENS_S(H_n) \leq \max_r \left\{ \frac{2^{n+3}-9}{7} - r \right\}, \text{ dir.}$$

$f(x) = \frac{2^{n+3}-9}{7} - x$ fonksiyonu azalan fonksiyon olduğundan maksimum

değerini alt sınırdaki, yani $r = \frac{2(2^{n+1}-4)}{7} + 1$ 'de, alır. Böylece

$$ENS_S(H_n) \leq \frac{2^{n+3}-9}{7} - \frac{2(2^{n+1}-4)}{7} = \frac{2^{n+2}-8}{7} \quad (54)$$

Sonuç olarak; (50), (53) ve (54) ifadelerinden, $n \equiv 1 \pmod{3}$ ise

$$ENS(H_n) = \frac{2^{n+2}-1}{7}$$

elde edilir.

3) $n \equiv 2 \pmod{3}$ olsun.

i) Eğer $1 \leq r \leq \frac{2^{n+1}-8}{7}$ ise, geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\omega(H_n / S) \leq 3r + 1$$

olduğundan

$$ENS_S(H_n) \leq \max_r \{3r + 1 - r\} = \max_r \{2r + 1\} \text{ 'dir.}$$

$f(x) = 2x + 1$ fonksiyonu artan fonksiyon olduğundan maksimum değerini

üst sınırdaki, yani $r = \frac{2^{n+1}-8}{7}$ 'de, alır. Böylece

$$ENS_S(H_n) \leq 2 \cdot \frac{2^{n+1}-8}{7} + 1 = \frac{2^{n+2}-9}{7} \quad (55)$$

elde edilir.

ii) Eğer $\frac{2^{n+1}-8}{7} < r \leq \frac{2(2^{n+1}-1)}{7}$ ise geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\omega(H_n / S) \leq \frac{2^{n+2}-2}{7} + r$$

olduğundan

$$ENS_S(H_n) \leq \max_r \left\{ \frac{2^{n+2}-2}{7} + r - r \right\} = \frac{2^{n+2}-2}{7} \quad (56)$$

elde edilir.

Diğer yandan, eğer S kümesi, $S = E_0 \cup E_3 \cup \dots \cup E_{n-2}$ olacak şekilde seçilirse $|S| = \frac{2 \cdot (2^{n+1} - 1)}{7}$, dir ve $\frac{2^{n+1} - 8}{7} < |S| \leq \frac{2(2^{n+1} - 1)}{7}$ olduğu kolayca görülür. Bu durumda geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\omega(H_n \setminus S) = \frac{2^2(2^{n+1} - 1)}{7}, \text{dir.}$$

Ayrıt-komşu-scattering sayısı tanımından,

$$ENS_S(H_n) \geq \frac{2^2(2^{n+1} - 1)}{7} - \frac{2 \cdot (2^{n+1} - 1)}{7} = \frac{2^{n+2} - 2}{7} \quad (57)$$

elde edilir.

(56) ve (57) ifadelerinden,

$$ENS_S(H_n) = \frac{2^{n+2} - 2}{7} \quad (58)$$

elde edilir.

iii) Eğer $\frac{2(2^{n+1} - 1)}{7} + 1 \leq r \leq 2^{n+1} - 2$ ise geriye kalan bileşenlerin sayısı

$$\omega(H_n / S) \leq \frac{3 \cdot 2^{n+2} - 6}{7} - r$$

olduğundan

$$ENS_S(H_n) \leq \max_r \left\{ \frac{3 \cdot 2^{n+2} - 6}{7} - r - r \right\} = \max_r \left\{ \frac{3 \cdot 2^{n+2} - 6}{7} - 2r \right\}, \text{dir.}$$

$f(x) = \frac{3 \cdot 2^{n+2} - 6}{7} - 2x$ fonksiyonu azalan fonksiyon olduğundan

maksimum değerini alt sınırdaki, yani $r = \frac{2(2^{n+1} - 1)}{7} + 1$ 'de, alır. Böylece

$$ENS_S(H_n) \leq \frac{3 \cdot 2^{n+2} - 6}{7} - \frac{2(2^{n+2} + 5)}{7} = \frac{2^{n+2} - 16}{7} \quad (59)$$

elde edilir.

Sonuç olarak; (55), (58) ve (59) ifadelerinden, $n \equiv 0 \pmod{3}$ ise

$$ENS(H_n) = \frac{2^{n+2} - 2}{7}$$

elde edilir.

□

3.SONUÇ

Bir grafın zedelenebilirliği, grafın hasarlara karşı ne kadar dirençli olduğunun ölçümüdür. Bu ölçümü yapabilmek için birçok parametre tanımlanmıştır. Tepeler üzerinde tanımlanan parametreler, bazı ağ türlerinde hasara karşı olan direnci istenilen şekilde ölçmeyince ayrıtlar üzerinde de parametreler tanımlanmıştır. Bu ayrıt-zedelenebilirlik parametrelerinden biri olan, Wei, Li ve Zhang tarafından tanımlanan ayrıt-komşu-scattering sayısı, bir grafta zedelenen ayrıtların sayısı ve bu ayrıtlar çıkarıldıktan sonra geriye kalan bileşenlerin sayısı arasındaki farkın alacağı maksimum değer olarak hesaplanır. Bu tezde, binomial ve k-ary ağaç yapılarının ayrıt-komşu-scattering sayısı hesaplanmıştır. Ayrıca bilinen bazı graf işlemleri, binomial graf ile temel bazı graf türlerine uygulanarak oluşan grafın ayrıt-komşu-scattering sayısı hesaplanmıştır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Bondy, J.A. and Murty, U.S.R.**, 1976, Graph Theory with Applications, American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 264 p.
- Buckley, F. and Harary, F.**, 1990, Distance in Graphs, Addison-Wesley Publishing Company, 335 p.
- Cormen, T.H., Leiserson, C.E., Rivest, R.L. and Stein C.**, 2001, Introduction to Algorithms, MIT Pres, Cambridge, Massachusetts, 1180 p.
- Gunther, G.**, 1986, On the existence of neighbor-connected graphs, *Congressus Numerantium*. 54, 105-110 p.
- Gunther, G. and Hartnell, B.L.**, 1978, On minimizing the effects of betrayals in a resistance movement, *Proc. Eighth Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing*, 285-306 p.
- Gunther, G. and Hartnell, B.L.**, 1980, Optimal K-secure graphs, *Discrete Appl. Math.* 2, 225-231 p.
- Harary, F.**, 1971, Graph Theory, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 274 p.
- Jung, H.A.**, 1978, On a class of posets and the corresponding comparability graphs, *J. Combinatorial Theory Ser. B* 24, 125-133 p.
- Kırlangıç, A.**, 2002, A measure of graph vulnerability: scattering number, *Int. J. Math. Math. Sci.* 30 (1), 1-8 p.
- Li, F. and Li, X.**, 2005, Computational complexity and bounds for neighbor-scattering number of graphs, *Parallel Architectures, Algorithms and Networks, 2005. ISPAN 2005. Proceedings. 8th International Symposium on*, 6 p.
- Li, Y.**, 2010, The vulnerability of complete k-ary trees, *Bull.Soc.Math. Banja Luka*, 17, 33-42 pp.

Ulusal Yüksek Başarımlı Hesaplama Merkezi,
<http://www.uybhm.itu.edu.tr/inner/hakkimizda.html> (Erişim Tarihi: 30 Kasım 2010)

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Wei, Z., (supervisor X. Li),** 2003, On the reliability parameters of networks, M.S.Thesis, Northwestern Polytechnical University, 30–40 pp.
- Wei, Z., Li, Y. and Zhang, J.,** 2007, Edge-neighbor-scattering number of graphs, *Ars Combinatoria* 85, 271-277 p.
- White, D.R. and Harary, F.,** 2001, The cohesiveness of blocks in social networks: Node connectivity and conditional density. *Sociological Methodology* 31, 305–359 p.

ÖZGEÇMİŞ

18 Eylül 1985'te İzmir'de doğan Gülnaz BORUZANLI ilköğrenimini 1991-1996 yılları arasında Dokuzeylül İlkokulu'nda tamamladı. Anadolu Liseleri Giriş Sınavı'nda Yunus Emre Anadolu Lisesi'ni kazanıp ortaöğrenimini burada tamamladıktan sonra, 2000 yılında Fen Liseleri Giriş Sınavı'nda İzmir Fen Lisesi'ni kazandı. İki yıl burada okuduktan sonra, lise öğreniminin son yılını Özel Ege Lisesi'nde burs kazanarak tamamladı. 2003 yılında Öğrenci Seçme Sınavı'nda Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandı ve 2008 yılında mezun oldu. Aynı yıl, Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisans programına başladı.

Haziran 2009'dan bu yana Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.