28425

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÇİFT İNDİSLİ DİZİ UZAYLARI

Ayşegül TÜRKMENOĞLU

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ
1993

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÇİFT İNDİSLİ DİZİ UZAYLARI

Ayşegül TÜRKMENOĞLU

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez , ... tarihinde , Aşağıda Belirtilen Jüri Tarafından Oybirliği / Oyçokluğu ile Başarılı / Başarısız Olarak Değerlendirilmiştir.

....

Danışman
Doç.Dr.Rıfat ÇOLAK

İÇİNDEKİLER

Sayfa No.

ÖZET

Doktora Tezi

BAZI ÇİFT İNDİSLİ DİZİ UZAYLARI

Ayşegül TÜRKMENOĞLU

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
1993 , Sayfa : 47

Dört Bölümden oluşan bu çalışmada $l^2_\infty(p)$, $c^2(p)$, $c^2_0(p)$, $l^2(p)$, $c^2_\infty(p)$ ve $c^2_{0,\infty}(p)$ çift indisli dizi uzayları tanımlanarak bu uzayların bazı özellikleri incelenmiştir.

Birinci bölümde konu ile ilgili bilinen temel tanım ve teoremler ; ikinci bölümde tanımlanan bu dizi uzaylarının , önceden bilinen l^2_∞ , c^2, c^2_0 , c^2_∞ , $c^2_{0,\infty}$ uzayları ile aralarındaki bağıntılar incelenmiştir. Ayrıca bu uzayların hangi şartlar altında lineer ve paranormlu birer uzay oldukları incelendikten sonra , bu uzaylar üzerinde bir paranorm tanımlanıp, tam oldukları ispatlanmıştır. Son olarak üçüncü bölümde de bu uzayların α- , β- ve γ- dualleri verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Çift indisli dizi uzayı , Paranormlu uzay , Lineer metrik uzay, Tam uzay , α- duali , β-duali ve γ- duali .

SUMMARY

Ph.D Thesis

SOME DOUBLE SEQUENCE SPACES

Ayşegül TÜRKMENOĞLU

Fırat University
Graduate School of Naturel and Applied Sciences
Department of Mathematics

1993 , Page : 47

In this study , we define double sequence spaces $l_{\infty}^{2}(p)$, $c^{2}(p)$, $c_{0}^{2}(p)$, $l^{2}(p)$ $c_{\infty}^{2}(p)$ and $c_{0,\infty}^{2}(p)$ and also examine some properties of these sequence spaces .

In the first chapter we give the fundamental definitions and theorems related to the subject . In the second chapter , we give the relations between the sequence spaces, which are defined in this chapter and the double sequence spaces l_{∞}^{2} , c^{2}, c_{0}^{2} , c_{∞}^{2} and $c_{0,\infty}^{2}$. Furthermore we show that these double sequence spaces are complete paranormed spaces, under some certain conditions.

In the last chapter we give the $\alpha-$, $\beta-$ and $\gamma-$ duals of these double sequence spaces.

KEY WORDS: Double sequence spaces , Paranormed space , Linear metric space , Complete space , $\alpha-$ dual, $\beta-$ dual and $\gamma-$ dual.

TEŞEKKÜR

Bana bu çalışmayı veren , bu çalışmanın planlanmasında ve düzenli bir şekilde yürütülmesinde yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Doç.Dr.Rifat ÇOLAK 'a minnet ve şükranlarımı sunarım.

Ayşegül TÜRKMENOĞLU

SİMGELER

N	Doğal sayılar cümlesi
C	Kompleks sayılar cümlesi
w^2	**C** üzerinde tanımlı bütün çift indisli diziler uzayı
l_∞^2	Kompleks terimli çift indisli diziler uzayı
c^2	Pringsheim anlamında yakınsak olan bütün kompleks terimli diziler uzayı
c_0^2	Pringsheim anlamında sıfıra yakınsayan bütün kompleks terimli diziler uzayı
c_∞^2	$c^2 \cap l_\infty^2$ olan diziler uzayı
$c_{0,\infty}^2$	$c_0^2 \cap l_\infty^2$ olan diziler uzayı
$\sup p_{mn}$	$\sup_{m,n\geq 1} p_{mn}$
$\inf p_{mn}$	$\inf_{m,n\geq 1} p_{mn}$
$\sum x_{mn}$	$\sum_{m,n=1}^{\infty} x_{mn}$
X^α	X dizi uzayının α– duali
X^β	X dizi uzayının β– duali
X^γ	X dizi uzayının γ– duali

I.TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu kısımda daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bilinen tanımlar, teoremler , eşitsizlikler ve temel kavramlar verilmiştir.

TANIM I.1. (Maddox , 1970) : X boş olmayan bir cümle ve K reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun.

$+ : X \times X \to X$

$. : X \times X \to X$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X cümlesine K cismi üzerinde bir **vektör (lineer) uzay** denir.Her $\lambda , \mu \in K$ ve $x,y,z \in X$ için

L1 : $x + y = y + x$
L2 : $(x + y) + z = x + (y + z)$
L3 : $x + \theta = \theta + x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.
L4 : Her $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.
L5 : $1.x = x$
L6 : $\lambda (x+y) = \lambda.x+ \lambda.y$
L7 : $(\lambda + \mu) x = \lambda.x + \mu.x$
L8 : $\lambda (\mu x) = (\lambda \mu) x$

TANIM I.2. (Maddox , 1970) : X boş olmayan bir cümle ve $d:X \times X \to R$ bir fonksiyon olsun. Her $x , y , z \in X$ için

M1 : $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$

M2 : $d(x,y) = d(y,x)$

M3 : $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

özelliklerini sağlayan d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve (X,d) ' ye de bir **metrik uzay** denir.

TANIM I.3. (Maddox , 1970) : $X \neq \phi$ bir lineer uzay ve d 'de X üzerinde tanımlı bir metrik olsun.Eğer X üzerinde tanımlanan toplama ve skaler ile çarpım işlemleri sürekli ise X 'e **lineer metrik uzay** denir.

TANIM I.4 .(Maddox , 1970) : X bir lineer uzay ve $g : X \to R$ bir fonksiyon olsun.

P1 : $g(\theta) = 0$

P2 : $g(x) = g(-x)$

P3 : $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$

P4 : $\lambda \to \lambda_0$ ve $x \to x_0 \Rightarrow \lambda x \to \lambda_0 x_0$

özelliklerini sağlayan g fonksiyonuna X üzerinde bir paranorm ve (X,g) 'ye de bir **paranormlu uzay** denir.

TANIM I.5. (Burkill ve Burkill , 1980) : N doğal sayılar cümlesi ve X boş olmayan herhangi bir cümle olmak üzere

$$f: N \times N \to X$$
$$(m\,,n) \to x_{mn}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna **çift indisli dizi** denir. Çift indisli bir $x = (x_{mn})$ dizisinin x_{mn} elemanlarını

$$\begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\cdots \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n}\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn}\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

şeklinde bir tablo olarak düşünebiliriz.

Biz bu çalışmamızda kompleks terimli bütün çift indisli dizilerin cümlesini w^2 ile göstereceğiz. Buna göre , C kompleks sayılar cümlesini göstermek üzere

$$w^2 = \{ x=(x_{mn}) : \forall\, m,n \in N \text{ için } x_{mn} \in C \}$$

olup bu cümle $\forall \alpha \in C$ ve $\forall x,y \in w^2$ için $\alpha x = (\alpha x_{mn})$ ve $x+y = (x_{mn} + y_{mn})$ işlemleri altında bir lineer uzaydır.

TANIM I. 6. (Apostol , T. , 1978) : Kompleks terimli bir dizi $x = (x_{mn})$ olsun. Eğer verilen $\forall\ \varepsilon > 0$ için $m,n > N$ olduğunda

$$| x_{mn} - a | < \varepsilon$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı varsa $x = (x_{mn})$ dizisi $a \in C$ sayısına yakınsaktır denir ve bunu göstermek için

$$m\ ,\ n \to \infty \quad \text{için } x_{mn} \to a$$

veya

$$\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = a$$

yazılır. Buradaki a değerine x dizisinin **çift limiti (veya Pringsheim limiti)** denir.

Bu çalışmada Pringsheim anlamında yakınsak olan bütün dizilerin cümlesini c^2 ile göstereceğiz. Buna göre

$$c^2 = \left\{ x = (x_{mn}) \in w^2 : \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = a \text{ olacak sekilde bir tek } a \in C \text{ vardır.} \right\}$$

dır.

UYARI I. 1 (Apostol , T., 1978) : $\lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} x_{mn})$ ve $\lim_{n\to\infty} (\lim_{m\to\infty} x_{mn})$ limitlerine **sıralı (iterated,repeated)** limitler denir.

Eğer $\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = a$ ve herbir m için $\lim_{n\to\infty} x_{mn}$ mevcut (herbir n için $\lim_{m\to\infty} x_{mn}$ mevcut) ise $\lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} x_{mn}) = a$ ($\lim_{n\to\infty} (\lim_{m\to\infty} x_{mn}) = a$) dır. Fakat bu önermenin tersi doğru değildir. Gerçekten $x_{mn} = mn/(m^2+n^2)$ (m=1,2,... ve n=1,2,...) genel terimli $x = (x_{mn})$ dizisi her bir $n \in N$ için $\lim_{m\to\infty} mn/(m^2 + n^2) = 0$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} (\lim_{m\to\infty} x_{mn}) = 0$ dır. Fakat $m = n$ için $x_{mn} = 1/2$ ve $m = 2n$ için $x_{mn} = 2/5$ olduğundan çift limit mevcut değildir.

TANIM I. 7. (Moricz , F. ve Rhoades , B.E. ,1988) : $x = (x_{mn})$ kompleks terimli bir dizi olmak üzere

$$\sup_{m,n\geq 1} |x_{mn}| < \infty$$

oluyorsa x 'e **sınırlı dizi** denir.

Bu çalışmada sınırlı çift indisli dizilerin cümlesini l_∞^2 ile göstereceğiz. Buna göre

$$l_\infty^2 = \left\{ (x_{mn}) \in w^2 : \sup_{m,n\geq 1} |x_{mn}| < \infty \right\}$$

dur.

TANIM I.8. (Burkill ve Burkill , 1980) : $x = (x_{mn})$ kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ için $m,n,p,q > N$ olduğunda

$$|x_{mn} - x_{pq}| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı varsa x 'e bir **Cauchy dizisi** denir.

TEOREM I.1 (Burkill ve Burkill , 1980) : Kompleks terimli bir $x = (x_{mn})$ dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart bir Cauchy dizisi olmasıdır.

TANIM I.9. (Maddox,I,J. 1970) : (X, d) bir metrik uzay olsun. X 'deki her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa X uzayı **tamdır** denir.

TANIM I.10. (Apostol,Tom M.1978) : $\sum_{m,n=1}^{\infty} x_{mn}$ kompleks terimli bir seri ve

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \qquad (m, n = 1,2,\ldots)$$

olsun. (S_{mn}) dizisine verilen serinin kısmi toplamlar dizisi denir. Eğer $\lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = s$ oluyorsa $\sum_{m,n=1}^{\infty} x_{mn}$ serisi s 'ye yakınsıyor denir ve $\sum_{m,n=1}^{\infty} x_{mn} = s$ olarak yazılır.

UYARI I. 2: (Apostol ,Tom M.,1978) : $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{mn}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} x_{mn}$ serilerine **sıralı seriler** denir. Sıralı seriler aynı toplama sahip olmak zorunda değildirler. Gerçekten

$$x_{mn} = \begin{cases} 1 & , \ m = n+1 \quad , \ n = 1,2,\ldots \text{ ise} \\ -1 & , \ m = n-1 \quad , \ n = 1,2,\ldots \text{ ise} \\ 0 & , \ \text{diger hallerde} \end{cases}$$

için $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{mn} = -1$ fakat $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} x_{mn} = 1$ 'dir .

Bu tezde inceleyeceğimiz konuların tümünde aksini belirtmedikçe yalnızca kompleks terimli çift dizileri ve serileri ele alaca ğız. Ayrıca $\sum_{m,n=1}^{\infty} x_{mn}$ yerine kısaca $\sum x_{mn}$ ifadesini kullanacağız.

TEOREM I.2.(Protter,M.H. ve Morrey, C.B. , 1964) : $\sum_{m,n=1}^{\infty} x_{mn}$ ve $\sum_{m,n=1}^{\infty} y_{mn}$ yakınsak iki seri ve a,b herhangi iki sabit olsun.Bu takdirde $\sum_{m,n=1}^{\infty}(a x_{mn} + b y_{mn})$ seriside yakınsaktır , ve

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} (a x_{mn} + b y_{mn}) = a \sum_{m,n=1}^{\infty} x_{mn} + b \sum_{m,n=1}^{\infty} y_{mn}$$

dir.

TANIM I. 11.(Protter,M.H. ve Morrey,C.B. , 1964) : Eğer $\sum_{m,n=1}^{\infty} |x_{mn}|$ serisi yakınsak ise $\sum_{m,n=1}^{\infty} x_{mn}$ serisine mutlakyakınsak seri denir.

TEOREM I.3.(Protter, M.H.ve Morrey, C.B. 1964): Mutlak yakınsak bir çift indisli seri aynı zamanda yakınsaktır.

TEOREM I.4 . (Apostol, T.M. 1978) : Pozitif terimli bir serinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart bu serinin kısmi toplamlar dizisinin sınırlı olmasıdır.

UYARI I.3. (Robinson, G.M. 1926): Yakınsak bir çift indisli serinin kısmi toplamları sınırlı olmak zorunda değildir. Gerçekten genel terimi

$$u_{mn} = \begin{cases} 1 & m = 1 \quad \text{ise} \\ -1 & m = 2 \quad \text{ise} \\ 0 & m \geq 3 \quad \text{ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}$ serisi yakınsak fakat kısmi toplamlar dizisi sınırlı değildir.

TEOREM I.5.(Protter, M.H.ve Morrey,C.B., 1964):$\forall$ m,n $\in$ N için $0 \leq a_{mn} \leq A_{mn}$ $\sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}$ serisi yakınsak ise bu taktirde $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ seriside yakınsaktırve

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \leq \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}$$

dir.

TEOREM I.6 .(Protter , M.H. ve Morrey , C.B. 1964): $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mutlak yakınsak iki seri olsun.Bu takdirde $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_m b_n$ seriside mutlak yakınsaktır ve

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_m b_n = \left[\sum_{m=1}^{\infty} a_m \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right]$$

dir.

TANIM I.12.(Maddox, I.J.,1970) : $a,b \geq 0$ ve $0 < p \leq 1$ olsun. Bu takdirde

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p \qquad \ldots (1.1)$$

dir.

TANIM I.13. (Maddox, I.J.,1970): $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $a\geq 0$, $b\geq 0$ herhangi iki sayı olsun. Bu takdirde

$$a.b \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \qquad \ldots (1.2)$$

eşitsizliği sağlanır.

TANIM I.14.(Kreyszig, E.,1978) : $x=(x_m)\in l^p$, $y=(y_m)\in l^p$ ve $p\geq 1$ olsun. Bu taktirde

$$\left[\sum_{m=1}^{\infty}|x_m+y_m|^p\right]^{1/p} \leq \left[\sum_{m=1}^{\infty}|x_m|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{m=1}^{\infty}|y_m|^p\right]^{1/p}$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu eşitsizliği çift indisli dizilere uygulayabiliriz. Bu takdirde $p \geq 1$ ve $\sum_{m,n=1}^{\infty}|y_{mn}|^p<\infty$, $\sum_{m,n=1}^{\infty}|x_{mn}|^p<\infty$ olmak üzere

$$\left[\sum_{m,n=1}^{\infty}|x_{mn}+y_{mn}|^p\right]^{1/p} \leq \left[\sum_{m,n=1}^{\infty}|y_{mn}|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{m,n=1}^{\infty}|x_{mn}|^p\right]^{1/p} \qquad \ldots (1.3)$$

eşitsizliği sağlanır.

II. BAZI ÇİFT İNDİSLİ DİZİ UZAYLARI VE BU UZAYLARIN ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde $l^2_\infty(p), c^2(p), c^2_0(p)$ ve $l^2(p)$ çift indisli dizi uzayları ve bu uzaylar arasındaki bağıntılar elde edilmiştir. Daha sonra bu uzayların hangi şartlar altında lineer uzay oldukları ve $l^2_\infty(p), c^2(p), c^2_0(p), c^2_\infty(p), c^2_{0,\infty}(p)$ uzayları ile bilinen l^2_∞ c^2, c^2_0, c^2_∞, $c^2_{0,\infty}$ uzayları arasındaki bağıntılar verilmiştir. Ayrıca $p = (p_{mn})$ dizisine bazı şartlar konularak, bu uzaylar üzerinde bir paranorm tanımlanmış ve bu uzayların paranormlu birer tam uzay oldukları ispatlanmıştır.

TANIM II.1. Her $m,n \in N$ için $p_{mn} > 0$ olmak üzere, $p = (p_{mn})$ reel terimli herhangi bir dizi olsun.

$$l^2_\infty(p) = \{ x = (x_{mn}) \in w^2 : \sup_{m,n\geq 1} |x_{mn}|^{p_{mn}} < \infty \}$$

$$c^2(p) = \{ x = (x_{mn}) \in w^2 : \lim_{m,n\to\infty} |x_{mn} - L|^{p_{mn}} = 0 \text{ olacak şekilde bir } L\in C \text{ vardır.}\}$$

$$c^2_0(p) = \{ x = (x_{mn}) \in w^2 : \lim_{m,n\to\infty} |x_{mn}|^{p_{mn}} = 0 \}$$

$$l^2(p) = \{ x = (x_{mn}) \in w^2 : \sum_{m,n=1}^{\infty} |x_{mn}|^{p_{mn}} < \infty \}$$

dizi uzaylarını tanımlayalım. $c^2_0(p) \subset c^2(p)$ olduğu aşikardır. Şimdi $x = (x_{mn})$ dizisini

$$x_{mn} = \begin{cases} (1+n)^{1/p_{mn}}, & m = 1 \text{ ve } n = 1,2,\ldots \text{ için} \\ 0, & \text{diğer haller için} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Açıkca görüldüğü gibi $x\in c^2_0(p)$ olmasına karşın $x \notin l^2_\infty(p)$ dir. Bu ise $c^2_0(p)$ ve $c^2(p)$ cümlelerinin $l^2_\infty(p)$ tarafından kapsanmadığını gösterir. Herhangi bir $x \in l^2(p)$ dizisi için $S_{mn} = \sum_{i,j=1}^{m,n} |x_{ij}|^{p_{ij}}$ ve $S_{0,n} = S_{m,0} = S_{00} = 0$ olmak üzere

$$|x_{mn}|^{p_{mn}} = S_{mn} - S_{m-1,n} - S_{m,n-1} + S_{m-1,n-1}$$

olarak yazılabildiğinden $x \in l^2_\infty(p) \cap c^2_0(p)$ olduğu açıktır. Bundan sonraki bölümlerde

$$l^2_\infty(p) \cap c^2(p) = c^2_\infty(p) \quad \text{ve} \quad l^2_\infty(p) \cap c^2_0(p) = c^2_{0,\infty}(p)$$

ile göstereceğiz. Yani $l^2(p) \subset c^2_{0,\infty}(p)$ dir.

Eğer $p \in \mathbf{R}$ bir sabit olmak üzere her $m,n \in \mathbf{N}$ için $p_{mn} = p$ alırsak $l^2_\infty(p) = l^2_\infty$ ve $l^2(p) = l^2_p$ uzaylarını elde ederiz. Ayrıca herhangi bir $N \in \mathbf{N}$ sabiti için $m,n \geq \mathbf{N}$ iken $p_{mn} = p$ alırsak $c^2_0(p) = c^2_0$ ve $c^2(p) = c^2$ elde ederiz. Burada tanımlanan (p_{mn}) dizisinde ilk N satır veya ilk N sütun keyfi olduğundan sabit, sınırlı veya infimumu sıfırdan büyük olmak zorunda değildir. Örneğin $p > 0$ herhangi bir reel sayı olmak üzere genel terimi

$$p_{mn} = \begin{cases} n-1, & m = 1 \text{ ve } n = 1, 2, \dots \text{ için} \\ p & , \text{ diğer haller için} \end{cases}.$$

olan (p_{mn}) dizisini ele alalım. Bu dizi için $c^2(p) = c^2$ ve $c_0^2(p) = c_0^2$ olduğu aşikardır.

Şimdi $l_\infty^2(p)$, $c_0^2(p)$, $c^2(p)$, $c_\infty^2(p)$, $c_{0,\infty}^2(p)$ uzaylarının hangi şartlar altında sırasıyla l_∞^2, c_0^2, c^2, c_∞^2 ve $c_{0,\infty}^2$ uzaylarına eşit olduklarını gösteren teoremleri verecegiz.

TEOREM II.1. $p = (p_{mn})$ pozitif reel sayıların herhangi bir dizisi olsun. Bu takdirde

(i) $l_\infty^2(p) \subset l_\infty^2 \Leftrightarrow p = \inf_{m,n\geq 1} p_{mn} > 0,$

(ii) $l_\infty^2 \subset l_\infty^2(p) \Leftrightarrow H = \sup_{m,n\geq 1} p_{mn} < \infty$

(iii) $l_\infty^2(p) = l_\infty^2 \Leftrightarrow 0 < \inf_{m,n\geq 1} p_{mn} \leq \sup_{m,n\geq 1} p_{mn} < \infty$, olmasıdır.

İSPAT: (i) $(\Leftarrow)$: $x \in l_\infty^2(p)$ olsun. Bu takdirde her $m,n \in \mathbf{N}$ için $|x_{mn}|^{p_{mn}} \leq K$ olacak şekilde bir $K \in \mathbf{R}^+$ vardır. Buradan her $m,n \in \mathbf{N}$ için

$$|x_{mn}| \leq K^{1/p_{mn}} \leq \max(1, K^{1/p})$$

yazabiliriz ki bu $x \in l_\infty^2$ olduğunu gösterir.

$(\Rightarrow)$: $l_\infty^2(p) \subset l_\infty^2$ fakat $\inf_{m,n\geq 1} p_{mn} = 0$ olsun. Bu takdirde her $i,j > 0$ için

$$p_{m(i),n(j)} < \frac{1}{i} \qquad \dots (2,1)$$

olacak şekilde en az biri kesin artan diğeri azalmayan $(m(i))$ ve $(n(j))$ dizileri vardır. Yani $\exists\, k_0 \in \mathbf{N}$ ($\exists\, l_0 \in \mathbf{N}$) için $n(k_0)$ ($m(l_0)$) doğal sayısı ve kesin artan bir $(m(i))$ ($(n(j))$)
dizisi veya her ikiside kesin artan $(m(i))$ ve $(n(j))$ dizileri vardır. Şimdi genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} i & , \quad m = m(i) \text{ ve } n = n(j) \\ 0 & , \quad \text{diğer haller için} \end{cases} \qquad \dots (*)$$

olan $x = (x_{mn})$ dizisini tanımlayalım. Her i, $j > 0$ doğal sayısı için (2,1) 'den

$$|x_{mn}|^{p_{mn}} = |i|^{p_{m(i),n(j)}} < i^{1/i} < 2$$

olup, bu $(x_{mn}) \in l_\infty^2(p)$ olduğunu gösterir. Fakat $(x_{mn}) \notin l_\infty^2$ 'dir. Bu ise bir çelişki olduğundan $\inf_{m,n\geq 1} p_{mn} > 0$ olmalıdır.

UYARI : $p_{m(i),n(j)} < 1/i$ olacak şekilde $\exists\, k_0 \in \mathbf{N}$ için $n(k_0)$ ve kesin artan $(m(i))$ dizisinin mevcut olması halinde genel terimi (*) 'da tanımlanan x dizisinde $n = n(k_0)$ alınarak ispat benzer şekilde yapılabilir. Aynı ispat i ve j ' lerin rolleri değiştirilerek $\exists\, l_0 \in \mathbf{N}$ için $m(l_0)$ ve kesin artan bir $(n(j))$ dizisi için de kolayca yapılabilir. Bu nedenle bundan sonraki ispatlarımızda aksini belirtmedikçe kesin artan $(m(i))$ ve $(n(j))$ dizileri için x dizisini tanımlayacağız.

(ii) $(\Leftarrow)$: Herhangi bir $x \in l_\infty^2$ alalım. O halde $\sup_{m,n\geq 1} |x_{mn}| = K$ olacak şekilde bir K sayısı vardır. Bu durumda her $m,n \in N$ için

$$\left|x_{mn}\right|^{p_{mn}} \leq K^{p_{mn}} \leq \max\,(1, K^{H})$$

elde edilir ki bu $x \in l^{2}_{\infty}$ olduğunu gösterir.

$(\Rightarrow)$: $l^{2}_{\infty} \subset l^{2}_{\infty}(p)$ ve $\sup_{m n \geq 1} p_{mn} = \infty$ olsun. Bu takdirde her $i,j > 0$ için

$$p_{m(i),n(j)} > i+j \qquad \ldots (2.2)$$

olacak şekilde en az biri kesin artan diğeri azalmayan $(m(i))$ ve $(n(j))$ dizileri vardır. Yani $\exists\, k_0 \in N$ ($\exists\, l_0 \in N$) için $n(k_0)$ ($m(l_0)$) doğal sayısı ve kesin artan bir $(m(i))$ ($(n(j))$) dizisi veya her ikiside kesin artan $(m(i))$ ve $(n(j))$ dizileri vardır. Şimdi genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} 2 & , \quad m = m(i) \text{ ve } n = n(j) \text{ için} \\ 0 & , \quad \text{diğer haller için} \end{cases}$$

olan $x = (x_{mn})$ dizisini ele alalım. Açıkca görüldüğü gibi $x \in l^{2}_{\infty}$ dir. Fakat (2.2)'den

$$2^{i+j} < 2^{p_{m(i),n(j)}}$$

dir. Bu eşitsizlikte $\sup_{i,j} 2^{i+j} = \infty$ olduğundan $\sup_{m,n \geq 1} |x_{mn}|^{p_{mn}} = \infty$ olur ki bu $x \notin l^{2}_{\infty}(p)$ olduğunu gösterir. Bu ise kabulümüzle çelişir.

(iii) İspat (i) ve (ii) 'den aşikardır.

TANIM II.2 : $x = (x_{mn})$ reel değerli bir dizi olsun. En az bir $N \in N$ için $\sup_{m,n \geq N} x_{mn}$ sonlu olmak üzere

$$L = \lim_{N \to \infty} \left(\sup_{m,n \geq N} x_{mn} \right)$$

değerine x dizisinin **üst limiti** diyeceğiz ve bunu

$$\overline{\lim}\, x_{mn} \text{ veya } \lim\sup x_{mn}$$

ile göstereceğiz.

En az bir $N \in N$ için $\inf_{m,n \geq N} x_{mn}$ sonlu olmak üzere

$$K = \lim_{N \to \infty} \left(\inf_{m,n \geq N} x_{mn} \right)$$

değerine x dizisinin **alt limiti** diyeceğiz ve bunu

$$\underline{\lim}\, x_{mn} \text{ veya } \lim\inf x_{mn}$$

ile göstereceğiz.

TEOREM II.2 :

(i) $\lim_{N \to \infty} \left(\sup_{m,n \geq N} x_{mn} \right) = L \Leftrightarrow$ Verilen bir $\varepsilon > 0$ için

(a) Yeteri kadar büyük her $m,n \geq N$ için $x_{mn} < L + \varepsilon$

ve

(b) Sonsuz çoklukta (m, n) için $x_{mn} > L - \varepsilon$

olmasıdır.

(ii) $\lim_{N\to\infty} (\inf_{m,n\geq N} x_{mn}) = K \Leftrightarrow$ Verilen bir $\varepsilon > 0$ için

(a') Yeteri kadar büyük her $m,n \geq N$ için $x_{mn} > K - \varepsilon$

ve

(b') Sonsuz çoklukta (m,n) için $x_{mn} < K + \varepsilon$

olmasıdır.

İSPAT: (i) $(\Rightarrow)$: (a) $\sup_{m,n\geq N} x_{mn} = K_N$ diyelim .O halde her $m,n \geq N$ için $x_{mn} \leq K_N$ dir. Ayrıca $\lim_{N\to\infty} K_N = L$ olduğundan verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq N > N_0$ olduğunda

$$x_{mn} \leq K_N < L + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu ise (a) 'nın sağladığını gösterir.

(b) $\sup_{m,n\geq N} x_{mn} < \infty$ olacak şekildeki her $N \in \mathbb{N}$ için oluşturulacak (K_N) dizisi azalandır. O halde bu şartı sağlayan her $N \in \mathbb{N}$ için $K_N \geq L$ dir. Burada verilen bir $p \geq N$ doğal sayısı için $m > p$ ve $n > p$ olmak üzere $x_{mn} > L-\varepsilon$ olacak şekilde bir m ve n sayısının mevcut olduğunu gösterirsek ispatı yapmış olacağız. Sup' un tanımından verilen bir $\varepsilon > 0$ ve $p \geq N$ doğal sayısı için $m_0, n_0 > p$ olduğunda

$$x_{m_0,n_0} > K_p - \varepsilon \geq L - \varepsilon$$

olacak şekilde m_0 ve n_0 doğal sayıları vardır.

$(\Leftarrow)$: (a) ve (b) sağlansın. Bu takdirde (a) 'dan yeteri kadar büyük her $N > N_0$ için $K_N \leq L+\varepsilon$ dur. (b) 'den $\sup_{m,n\geq N} x_{mn} < \infty$ olacak şekildeki her N için $K_N > L-\varepsilon$ dur.

Bu ise bize $\lim_{N\to\infty} K_N = L$ olduğunu verir.

(ii) İspat (i) 'ye benzer olarak kolaylıkla yapılabilir.

Çift indisli bir dizinin limsup ve liminf 'inin mevcut olması o dizinin infimum ve supremumunun sonlu bir değer olarak mevcut olmasını gerektirmez. Gerçektende

$$x_{mn} = \begin{cases} (-1)^n . n \ , & m = 1 \text{ ve } n \geq 1 \text{ için} \\ (-1)^{m+n} \ , & m \geq 2 \text{ ve } n \geq 1 \text{ için} \end{cases}$$

olarak tanımlayacağımız x dizisi için $\inf_{m,n\geq 1} x_{mn} = -\infty$ $\sup_{m,n\geq 1} x_{mn} = +\infty$ fakat $\lim\sup x_{mn} = +1$ ve $\lim\inf x_{mn} = -1$ dir.

Bundan sonraki bölümlerde aksi belirtilmedikçe $\sup_{m,n\geq 1} x_{mn}$ ve $\inf_{m,n\geq 1} x_{mn}$ yerine kısaca $\sup x_{mn}$ ve $\inf x_{mn}$ ifadeleri kullanılacaktır.

SONUÇ II. 1: $\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lim\inf x_{mn} = \lim\sup x_{mn} = L$$

olmasıdır.

İSPAT : ($\Rightarrow$) $\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$ olsun. Bu takdirde verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık yeteri kadar büyük her m , n için

$$L - \varepsilon < x_{mn} < L + \varepsilon$$

olur. Bu ise $\lim(\inf x_{mn}) = L$ ve $\lim(\sup x_{mn}) = L$ olduğunu gösterir.

($\Leftarrow$) : Teorem II.2 (a) ve (a') 'den $\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$ dir.

TEOREM II.3: $p = (p_{mn})$ pozitif reel sayıların herhangi bir dizisi olsun. Bu durumda

(i) $c^2 \subset c^2(p) \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \lim\inf p_{mn} > 0$,

(ii) $c^2(p) \subset c^2 \quad \Leftrightarrow \quad M = \lim\sup p_{mn} < \infty$,

(iii) $c^2(p) = c^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \lim\inf p_{mn} \leq \lim\sup p_{mn} < \infty$,

olmasıdır.

İSPAT : (i) ($\Leftarrow$) $\mu > 0$ ve $x \in c^2$ yani $\lim_{m,n\to\infty} | x_{mn} - L | = 0$ olacak şekilde bir $L \in C$ mevcut olsun. $\mu > 0$ olduğundan yeteri kadar büyük her $m,n \geq N$ için $p_{mn} > \alpha$ olacak şekilde bir $\alpha > 0$ sayısı bulabiliriz. Ayrıca kabulümüzden her $0 < \varepsilon < 1$ sayısına karşılık yeteri kadar büyük m,n 'ler için $| x_{mn} - L | < \varepsilon^{1/\alpha}$ dır. Böylece bu şartı sağlayan m,n 'ler için $| x_{mn} - L | < 1$ olacağından

$$|x_{mn} - L|^{p_{mn}} < |x_{mn} - L|^{\alpha} < \varepsilon$$

yazabiliriz ki bu $x \in c^2(p)$ olduğunu gösterir.

($\Rightarrow$) $c^2 \subset c^2(p)$ ve $\mu = 0$ olsun. Bu takdirde $\forall i > 0$ doğal sayısı için

$$p_{m(i),n(i)} < \frac{1}{i} \qquad \ldots (2,3)$$

olacak şekilde $m(i), n(i) \geq N(i) > 1$ olmak üzere kesin artan $(N(i))$ dizisini bulabiliriz. Şimdi keyfi olarak bazı terimleri 0 , bazı terimleri de 1 olacak şekildeki (y_{mn}) dizisini ve bu diziye bağlı olarak genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} n^{1/p_{mn}} & , \quad m = 1 \quad \text{ve} \quad n = 1,2 \ \ldots \ \text{için} \\ \left[\dfrac{y_{mn}+1}{4}\right]^{1/p_{mn}} & , \quad m = m(i) \ \text{ve} \quad n = n(i) \ \ldots \ \text{için} \\ 0 & , \quad \text{diğer haller için} \end{cases}$$

olan $x = (x_{mn})$ dizisini tanımlayalım. Her $i > 0$ doğal sayısı için

$\dfrac{y_{m(i),n(i)}+1}{4} \leq \dfrac{1}{2}$ dir. Bunu ve (2,3) 'ü kullanarak

$$\lim_{m,n\to\infty} | x_{mn} | = \lim_{i\to\infty} \left[\frac{y_{m(i),n(i)}+1}{4}\right]^{1/p_{m(i),n(i)}} \leq \lim_{i\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 0$$

elde edilir ki bu $x \in c^2$ olduğunu gösterir. Fakat $x \notin c^2(p)$ dir. Gerçektende $L \neq 0$ olmak üzere herhangi bir $L \in C$ için $z_{mn} = |x_{mn} - L|^{p_{mn}}$ dizisini ele alalım. (2,3) 'den $\lim_{i\to\infty} p_{m(i),n(i)} = 0$ olduğunu kullanarak

$$\lim_{i\to\infty} \ln z_{m(i),n(i)} = \lim_{i\to\infty} p_{m(i),n(i)} \ln \left| \left(\frac{y_{m(i),n(i)}+1}{4}\right)^{1/p_{m(i),n(i)}} - L \right|$$

$$\leq \lim_{i\to\infty} p_{m(i),n(i)} \ln \left| \frac{1}{2^i} - L \right| = 0$$

elde ederiz ki bu bize $\lim_{i\to\infty} \ln z_{m(i),n(i)} = 0$ yani $\lim_{i\to\infty} z_{m(i),n(i)} = 1$ olduğunu verir.

O halde $L \neq 0$ olmak üzere $|x_{mn} - L|^{p_{mn}} \to 0$ olacak şekilde bir $L \in C$ mevcut değildir.

Şimdi $L = 0$ alalım. Bu takdirde

$$\left|x_{m(i),n(i)}\right|^{p_{m(i),n(i)}} = \frac{y_{m(i),n(i)}+1}{4}$$

olduğundan bu $|x_{mn}|^{p_{mn}} \to 0$ yani $L = 0$ olamayacağını gösterir. Bu ise kabulümüzle çeliştiğinden $\mu > 0$ olmalıdır.

(ii) ($\Leftarrow$): $M < \infty$ ve $|x_{mn} - L|^{p_{mn}} \to 0$ olsun. Bu takdirde yeteri kadar büyük her $m,n \geq N$ için $p_{mn} < \alpha$ olacak şekilde bir $\alpha > 0$ sayısı vardır. Ayrıca kabulümüzden her $0 < \varepsilon < 1$ için $m,n > n_0 \geq N$ olduğunda $|x_{mn} - L|^{p_{mn}} < \varepsilon^{\alpha}$ olacak şekilde bir $n_0 \in N$ vardır. $m,n > n_0 \geq N$ olacak şekildeki bütün m, n 'ler için $|x_{mn} - L|^{p_{mn}} < 1$ olduğundan

$$|x_{mn} - L|^{\alpha} < |x_{mn} - L|^{p_{mn}}$$

yazabiliriz. Bu ise bize yeteri kadar büyük m , n 'ler için

$$|x_{mn} - L| < \varepsilon$$

olduğunu yani $x \in c^2$ yi verir.

($\Rightarrow$): $c^2(p) \subset c^2$ ve $M = \infty$ olsun . Bu takdirde her $i > 0$ doğal sayısı için $m(i)$, $n(i) \geq N(i) > 1$ olmak üzere

$$p_{m(i),n(i)} > i \qquad \ldots (2.4)$$

olacak şekilde kesin artan $(N(i))$ dizisi bulabiliriz. Keyfi olarak bazı terimleri 0, bazı terimleri de 1 olacak şekildeki (y_{mn}) dizisini ve bu diziye bağlı olarak genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} n & , \ m = 1 \quad \text{ve} \quad n = 1,2 \ \ldots \text{ise} \\ \dfrac{y_{mn}+1}{4} & , \ m = m(i) \ \text{ve} \quad n = n(i) \ \ldots \text{ise} \\ 0 & , \ \text{diğer haller için} \end{cases}$$

olan $x = (x_{mn})$ dizisini tanımlayalım. Her $i > 0$ doğal sayısı için $\dfrac{y_{m(i),n(i)}+1}{4} \leq \dfrac{1}{2}$ olduğunu ve (2.4) 'ü kullanarak

$$\lim_{m,n\to\infty} |x_{mn}|^{p_{mn}} \le \lim_{i\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{p_{m(i),n(i)}} < \lim_{i\to\infty} \frac{1}{2^i} = 0$$

elde ederiz ki bu $x \in c^2(p)$ olduğunu gösterir. Fakat $x \notin c^2$ dir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $M < \infty$ olmalıdır.

(iii) İspatı (i) ve (ii) 'den aşikardır.

TEOREM II.4: $p = (p_{mn})$ pozitif reel sayıların herhangi bir dizisi olsun. Bu durumda

(i) $c_0^2 \subset c_0^2(p) \Leftrightarrow \liminf p_{mn} > 0$,

(ii) $c_0^2(p) \subset c_0^2 \Leftrightarrow \lim\sup p_{mn} > 0$,

(iii) $c_0^2(p) = c_0^2 \Leftrightarrow 0 < \liminf p_{mn} \le \lim\sup p_{mn} < \infty$

olmasıdır.

İSPAT : (i) ($\Leftarrow$) İspat Teorem II.3 (i) 'de $L = 0$ alınarak kolaylıkla yapılabilir.

($\Rightarrow$) : $c_0^2 \subset c_0^2(p)$ fakat $\lim_{N\to\infty} (\inf_{m,n\ge N} p_{mn}) = 0$ olsun. Bu takdirde her $i > 0$ doğal sayısı için

$$p_{m(i),n(i)} < \frac{1}{i} \qquad \ldots (2,5)$$

olacak şekilde $m(i), n(i) \ge N(i) > 1$ olmak üzere kesin artan $(N(i))$ dizisi bulabiliriz. Şimdi genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} n \ , & m = 1 \quad \text{ve} \quad n = 1,2,3,\ldots \quad \text{için} \\ \frac{1}{i} \ , & m = m(i) \quad \text{ve} \quad n = n(i) \quad \text{için} \\ 0 \ , & \text{diğer haller için} \end{cases}$$

olan $x = (x_{mn})$ dizisini tanımlayalım. Açıkca görüldüğü gibi $x \in c_0^2$ dir. Fakat $x \notin c_0^2(p)$ dir. Gerçektende her $i > 0$ doğal sayısı için $\frac{1}{i} \le 1$ olduğundan (2.5)'i de kullanarak

$$\left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{1}{i}} \le \left(\frac{1}{i}\right)^{p_{m(i),n(i)}}$$

yazabiliriz ki bu eşitsizlikte $\lim_{i,j\to\infty} \left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{1}{i}} = 1$ olduğundan

$$\lim_{m,n\to\infty} |x_{mn}|^{p_{mn}} = \lim_{i,j\to\infty} \left(\frac{1}{i}\right)^{p_{m(i)n(i)}} \ne 0$$

dır. Bu ise kabulümüzle çelişir.

(ii) ($\Leftarrow$) : İspat ,Teorem II.3 (ii) 'nün ispatında $L = 0$ alınarak kolaylıkla yapılabilir.

($\Rightarrow$) : $c_0^2(p) \subset c_0^2$ ve $\lim_{N\to\infty} (\sup_{m,n\ge N} p_{mn}) = \infty$ olsun. Bu takdirde her $i > 0$ doğal sayısı için

$$p_{m(i),n(i)} > i \qquad \ldots (2.6)$$

olacak şekilde $m(i),n(i) \geq N(i) > 1$ olmak üzere kesin artan $(N(i))$ dizisini bulabiliriz. Şimdi genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} n^{\frac{1}{p_{mn}}} & , \quad m = 1 \quad \text{ve} \quad n = 1,2,3,\ldots \quad \text{için} \\ (\frac{1}{i})^{\frac{1}{p_{mn}}} & , \quad m = m(i) \text{ ve } n = n(i) \quad \text{için} \\ 0 & , \quad \text{diğer haller için} \end{cases}$$

olan $x=(x_{mn})$ dizisini tanımlayalım. $|x_{m(i),n(i)}|^{p_{m(i),n(i)}} = 1/i$ olduğundan $x \in c_0^2(p)$ olduğu aşikârdır. Fakat her $i > 0$ doğal sayısı için $1/i \leq 1$ olduğundan (2.6) 'yı kullanarak

$$(\frac{1}{i})^{\frac{1}{p_{m(i),n(i)}}} > (\frac{1}{i})^{\frac{1}{i}}$$

yazabiliriz. Oysa bu eşitsizlikte $\lim_{i,j\to\infty} (\frac{1}{i})^{\frac{1}{i}} = 1$ dir. Bu ise $x \notin c_0^2$ olduğunu gösterir. Bu ise kabulümüzle çelişir.

(iii) İspat (i) ve (ii) 'den aşikardır.

UYARI : Tek indisli dizilerde $c_0(p) = c_0$ ve $c(p) = c$ olması için gerek ve yeter şart $0 < \inf p_m \leq \sup p_m < \infty$ [Lascarides, C.G. 1971] olmasıdır. Fakat Teorem II.3 ve Teorem II.4 'de tanımlanan $p = (p_{mn})$ dizisinin ilk N satırı veya ilk N sütunundaki (yani baştan sonlu sayıda satır veya sütundaki) elemanların infumumu 0 ve supremumu ∞ olabilir. Bu durumda şunu söyleyebiliriz:

Tek indisli yakınsak dizilerde bilinenin aksine, yakınsak çift indisli dizilerde $\inf p_{mn} = 0$ ve $\sup p_{mn} = \infty$ olduğu halde $c^2(p) = c^2$ ve $c_0^2(p) = c_0^2$ olacak şekilde (p_{mn}) dizileri vardır.

TEOREM II.5: $c_\infty^2(p) = c_\infty^2 \Leftrightarrow 0 < p = \inf p_{mn} \leq H = \sup p_{mn} < \infty$ olmasıdır.

İSPAT : ($\Leftarrow$) Herhangi bir $x \in c_\infty^2(p)$ alalım. Bu taktirde $\sup |x_{mn}|^{p_{mn}} = K$ olacak şekilde bir $K \in \mathbf{R}$ ve $\lim_{m,n\to\infty} |x_{mn} - L|^{p_{mn}} = 0$ olacak şekilde bir $L \in \mathbf{C}$ mevcuttur. Böylece her $0 < \varepsilon < 1$ 'e karşılık $m, n > n_0$ olduğunda

$$|x_{mn} - L|^H < |x_{mn} - L|^{p_{mn}} < \varepsilon^H$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbf{N}$ mevcut ve her $m,n \in \mathbf{N}$ için

$$|x_{mn}| \leq K^{1/p_{mn}} \leq \max(1, K^{1/p})$$

olduğundan $x \in c_\infty^2$ dir. O halde $c_\infty^2(p) \subset c_\infty^2$ dir.

$c_\infty^2 \subset c_\infty^2(p)$ olduğu da kolaylıkla gösterilebilir .

$(\Rightarrow): c^2_\infty(p) = c^2_\infty$ ve $p = 0$ veya $H = \infty$ olsun.

(i) $\inf p_{mn} = 0$ olması halinde

$$p_{m(i),(j)} < \frac{1}{i+j} \qquad \ldots (2,7)$$

olacak şekilde en az biri kesin artan diğeri azalmayan $(m(i))$ ve $(n(j))$ dizileri vardır.

Şimdi $\exists\ k_0 \in N$ (veya $\exists\, l_0 \in N$) için $n(k_0)$ (veya $m(l_0)$) doğal sayısı ve kesin artan bir $(m(i))$ (veya $(n(j))$) dizisi için (2.7) 'nin sağlandığını kabul edelim.

Şimdi genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} i \ , & m = m(i) \ \text{ ve } \ n = n(k_0) \text{ için} \\ 0 \ , & \text{diger haller için} \end{cases} \qquad \ldots (2.8)$$

$$(\text{ veya } \ x_{mn} = \begin{cases} j \ , & m = m(l_0) \ \text{ ve } \ n = n(j) \text{ için} \\ 0 \ , & \text{diger haller için} \end{cases} \ )$$

olan diziyi alalım.(2.7) 'de $\frac{1}{i+j} < \frac{1}{i}$ (veya $\frac{1}{i+j} < \frac{1}{j}$) yazabiliriz .$x \in c^2(p)$ ve

$|x_{mn}|^{p_{mn}} = i^{p_{m(i),n(j)}} < i^{1/i+j} < i^{1/i} < 2$ (veya $|x_{mn}|^{p_{mn}} = j^{p_{m(i),n(j)}} < j^{1/j} < 2$)

olduğundan $x \in c^2_\infty(p)$ dir.Fakat $x \notin l^2_\infty$ olduğundan $x \notin c^2_\infty$ dir.Bu ise kabulümüzle . çelişir.

Şimdi de (2.7) 'yi sağlayan $(m(i))$ ve $(n(j))$ dizilerinin her ikisinin kesin artan olduğunu kabul edelim. Bu takdirde Teorem II.3 (i) 'de tanımladığımız (y_{mn}) ve genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} \left[\dfrac{y_{mn}+1}{4}\right]^{\frac{1}{p_{mn}}} , & m = m(i) \ \text{ ve } \ n = n(j) \ \text{ için} \\ 0 \ , & \text{diğer haller için} \end{cases}$$

olan diziyi tanımlayalım. $x \in c^2_\infty$ fakat $x \notin c^2_\infty(p)$ olduğu Teorem II.3 (i) 'ye benzer olarak kolaylıkla yapılabilir. Bu ise kabulümüzle çelişir. O halde $p > 0$ olmalıdır.

(ii) $H = \infty$ olması halinde

$$p_{m(i),n(j)} > i+j \qquad \ldots (2.9)$$

olacak şekilde en az biri kesin artan diğeri azalmayan $(m(i))$ ve $(n(j))$ dizileri vardır.

Şimdi $\exists\ k_0 \in N$ (veya $\exists\, l_0 \in N$) için $n(k_0)$ (veya $m(l_0)$) doğal sayısı ve kesin artan bir $(m(i))$ (veya $(n(j))$) dizisi için (2.9) 'un sağlandığını kabul edelim.

Şimdi genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} 2 \ , & m = m(i) \ \text{ ve } \ n = n(k_0) \text{ için} \\ 0 \ , & \text{diğer haller için} \end{cases} \qquad \ldots (2.10)$$

(veya $x_{mn} = \begin{cases} 2 & , \quad m = m(l_0) \quad \text{ve} \quad n = n(j) \text{ için} \\ 0 & , \quad \text{diğer haller için} \end{cases}$)

olan diziyi tanımlayalım. $x \in c^2_\infty$ ve $x \in c^2(p)$ olduğu aşikardır. Fakat (2.9) 'dan

$$2^{i+j} < 2^{p_{m(i),n(j)}}$$

olup $\sup_{i,j} 2^{i+j} = \infty$ olduğundan $x \notin l^2_\infty(p)$ dir. Bu ise $x \notin c^2_\infty(p)$ olduğunu gösterir. Bu da hipotezimizle çelişir.

Şimdi (2.8) 'i sağlayan $(m(i))$ ve $(n(j))$ dizilerinin her ikisinin kesin artan olduğunu kabul edelim. Teorem II.3 (ii) 'de tanımlanan (y_{mn}) ve genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} \dfrac{y_{mn}+1}{4} & , \quad m = m(i) \text{ ve } \quad n = n(j) \quad \text{için} \\ 0 & , \quad \text{diğer haller için} \end{cases}$$

olan $x = (x_{mn})$ dizisini alalım. $\forall\, m,n \in N$ için $\dfrac{y_{mn}+1}{4} \le \dfrac{1}{2}$ olduğundan

$$|x_{mn}|^{p_{mn}} \le 2^{-p_{m(i),n(j)}} < 2^{-(i+j)} < 1$$

den $x \in l^2_\infty(p)$ ve

$$\lim_{m,n\to\infty} |x_{mn}|^{p_{mn}} \le \lim_{i,j\to\infty} 2^{-(i+j)} = 0$$

olduğundan $x \in c^2_\infty(p)$ dir. Fakat $x \notin c^2$ olduğundan $x \notin c^2_\infty$ dir. Bu ise kabulümüzle çelişir. O halde $H < \infty$ olmalıdır.

TEOREM II.6: $c^2_{0,\infty}(p) = c^2_{0,\infty} \Leftrightarrow 0 < p = \inf p_{mn} \le H = \sup p_{mn} < \infty$ olmasıdır.

İSPAT : $(\Leftarrow)$ İspat , Teorem II.5 'in ispatında $L = 0$ alınarak kolaylıkla yapılabilir.

$(\Rightarrow)$: $c^2_{0,\infty}(p) = c^2_{0,\infty}$ ve $p = 0$ veya $H = \infty$ olsun.

(i) $p = 0$ olsun. Bu takdirde

$$p_{m(i),n(j)} < \frac{1}{i+j} < \frac{1}{i} \qquad \ldots (2,11)$$

sağlanacak şekilde en az biri kesin artan diğeri azalmayan $(m(i))$ ve $(n(j))$ dizileri vardır.

Şimdi $\exists\, k_0 \in N$ (veya $\exists\, l_0 \in N$) için $n(k_0)$ (veya $m(l_0)$) doğal sayısı ve kesin artan bir $(m(i))$ (veya $(n(j))$) dizisi için (2.11) 'in sağlandığını kabul edelim. Bu takdirde Teorem II.5 'in ispatında tanımlanan (2.8) dizisi için $x \in c^2_{0,\infty}(p)$ ve $x \notin c^2_{0,\infty}$ olduğu kolayca gösterilebilir. Bu ise kabulümüzle çelişir.

Şimdi de (2.11) ' i sağlayan $(m(i))$ ve $(n(j))$ dizilerinin her ikisinin de kesin artan olduğunu kabul edelim. Genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{i} , & m = m(i) \quad \text{ve} \quad n = n(j) \text{ için} \\ 0 , & \text{diğer haller için} \end{cases}$$

olan dizi için $x \in c^2_{0,\infty}(p)$ dir.Fakat $x \notin c^2_0(p)$ olduğu Teorem II.4 (i) 'den aşikardır.

O halde $x \notin c^2_{0,\infty}$ dir. Bu ise hipotezimizle çeliştiğinden $p > 0$ olmalıdır.

(ii) $H = \infty$ olması halinde

$$p_{m(i),n(j)} > i + j > i \qquad \ldots(2.12)$$

olacak şekilde en az biri kesin artan diğeri azalmayan $(m(i))$ ve $(n(j))$ dizileri vardır.

Şimdi $\exists\, k_0 \in \mathbf{N}$ (veya $\exists\, l_0 \in \mathbf{N}$) için $n(k_0)$ (veya $m(l_0)$) doğal sayısı ve kesin artan bir $(m(i))$ (veya $(n(j))$) dizisi için (2.12) 'nin sağlandığını kabul edelim.Bu takdirde Teorem II.5 'in ispatında tanımlanan (2.10) dizisinin $x \in c^2_{0,\infty}$ ve $x \notin c^2_{0,\infty}(p)$ olduğu kolayca gösterilebilir.Bu ise kabulümüzle çelişir.

Şimdi de (2.12) ' yi sağlayan $(m(i))$ ve $(n(j))$ dizilerinin her ikisinin kesin artan olduğunu kabul edip , genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} \left[\frac{1}{i}\right]^{\frac{1}{p_{mn}}} , & m = m(i) \quad \text{ve} \quad n = n(j) \text{ için} \\ 0 , & \text{diğer haller için} \end{cases}$$

olan $x = (x_{mn})$ dizisini göz önüne alalım. $x \in c^2_{0,\infty}(p)$ olduğu aşikardır.Fakat $x \notin c^2_0$ olduğu Teorem II.4 (ii) 'nin ispatından aşikardır.Yani $x \notin c^2_{0,\infty}$ dir.Bu ise kabulümüzle çelişir.O halde $H < \infty$ olmalıdır.

Şimdi tanımladığımız cümlelerin hangi şartlar altında lineer uzay olduğunu ve üzerlerinde birer paranorm tanımlanabileceğini ifade eden teoremleri verelim.

TEOREM II.7: $l^2_\infty(p)$ 'nin bir lineer uzay olması için gerek ve yeter şart $H = \sup p_{mn} < \infty$ olmasıdır.

İSPAT : $M = \max(1,H)$ olsun.

($\Leftarrow$) : $x,y \in l^2_\infty(p)$, yani her $m,n \in \mathbf{N}$ için $|x_{mn}|^{p_{mn}} \le K_1$ ve $|y_{mn}|^{p_{mn}} \le K_2$ olacak şekilde K_1, K_2 sabitleri mevcut olsun.Her $m,n \in \mathbf{N}$ için $p_{mn}/M \le 1$ olduğundan (1.1) eşitsizliğinden

$$|x_{mn} + y_{mn}|^{p_{mn}/M} \le |x_{mn}|^{p_{mn}/M} + |y_{mn}|^{p_{mn}/M}$$

yazabiliriz.Bu eşitsizlikten her m , $n \in \mathbf{N}$ için

$$|x_{mn} + y_{mn}|^{p_{mn}} \le (K_1^{1/M} + K_2^{1/M})^M$$

elde ederiz ki bu $x+y \in l^2_\infty(p)$ olduğunu gösterir.

Şimdi herhangi bir $\alpha \in \mathbf{C}$ ve $x \in l_{\infty}^{2}(p)$ alalım.Bu takdirde her m , n $\in \mathbf{N}$ için $|\alpha|^{p_{mn}} \leq \max(1, |\alpha|^{M})$ olduğundan

$$|\alpha x_{mn}|^{p_{mn}} \leq \max(1, |\alpha|^{M}) . |x_{mn}|^{p_{mn}}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.Bu ise bize $\alpha x \in l_{\infty}^{2}(p)$ olduğunu verir.

($\Rightarrow$) : $l_{\infty}^{2}(p)$ lineer bir uzay ve $\sup p_{mn} = \infty$ olsun. Bu takdirde her i,j > 0 doğal sayı çifti için

$$p_{m(i),n(j)} > i+j \qquad \ldots (2.13)$$

olacak şekilde en az biri kesin artan diğeri azalmayan (m(i)) ve (n(j)) dizileri vardır. Yani (2.13) sağlanacak şekilde kesin artan bir (m(i)) dizisi ve en az bir $k_0 \in \mathbf{N}$ (veya $l_0 \in \mathbf{N}$) için n(k_0) (veya m(l_0)) doğal sayısı veya her ikiside kesin artan (m(i)) ve (n(j)) dizileri vardır.Şimdi genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} , & m = m(i) \quad \text{ve} \quad n = n(j) \text{ için} \\ 0 , & \text{diğer haller için} \end{cases}$$

olan $x = (x_{mn})$ dizisini tanımlayalım.Böylece her i,j > 0 doğal sayısı için (2.13) 'ü kullanarak

$$2^{-p_{m(i),n(j)}} \leq 2^{-(i+j)} \leq 2^{-1}$$

elde ederiz.Buradan her m,n $\in \mathbf{N}$ için $|x_{mn}|^{p_{mn}} \leq 2^{-1}$ yani $x \in l_{\infty}^{2}(p)$ dir.Fakat $4x \notin l_{\infty}^{2}(p)$ dir.Gerçekten , yine (2.13) 'ü kullanarak

$$|4.x_{m(i),n(j)}|^{p_{m(i),n(j)}} = 2^{p_{m(i),n(j)}} > 2^{i+j}$$

elde ederizki bu , $l_{\infty}^{2}(p)$ 'nin lineerliği ile çelişir.

TEOREM II.8: (i) $c^{2}(p)$,

(ii) $c_{0}^{2}(p)$,

cümlelerinin bir lineer uzay olmas ı için gerek ve yeter şart $M = \lim_{N \to \infty} \sup_{m,n \geq N} p_{mn} < \infty$ olmasıdır.

İSPAT : (i) ($\Leftarrow$) :M < ∞ ve $\lim_{m,n \to \infty} |x_{mn} - L|^{p_{mn}} = 0$, $\lim_{m,n \to \infty} |y_{mn} - L'|^{p_{mn}} = 0$ olsun. M < ∞ olduğundan yeteri kadar büyük her m,n ≥ N için $p_{mn} < \alpha$ olacak şekilde bir $\alpha > 0$ sayısı vardır. Bu şekildeki m,n 'ler için $p_{mn} / \alpha < 1$ olduğundan (1.1) eşitsizliğinden

$$|(x_{mn} + y_{mn}) - (L + L')|^{p_{mn}/\alpha} \leq |x_{mn} - L|^{p_{mn}/\alpha} + |y_{mn} - L'|^{p_{mn}/\alpha}$$

yazabiliriz.Bu eşitsizlik de bize $x+y \in c^2(p)$ olduğunu verir.

Herhangi bir $\lambda \in C$ sabiti ve $x \in c^2(p)$ alalım. Bu takdirde yeteri kadar büyük her $m,n \geq N$ için $|\lambda|^{p_{mn}} \leq \max(1, |\lambda|^M)$ dir.Böylece bu şartı sağlayan her $m,n \geq N$ için

$$|\lambda x_{mn} - \lambda L|^{p_{mn}} \leq \max(1, |\lambda|^{\alpha}) \, . \, |x_{mn} - L|^{p_{mn}}$$

yazabiliriz.Bu ise bize $\lambda x \in c^2(p)$ olduğunu verir.

$(\Rightarrow)$: $c^2(p)$ lineer bir uzay ve $M = \infty$ olsun.Bu takdirde her $i > 0$ doğal sayısı için $m(i)$, $n(i) \geq N(i) > 1$ olmak üzere

$$p_{m(i),n(i)} > i \qquad \ldots \; (2.14)$$

olacak şekilde kesin artan bir $(N(i))$ dizisi vardır.Şimdi genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} n^{\frac{1}{p_{mn}}} & , \quad m = 1 \text{ ve } n = 1,2,\ldots \text{ için} \\ \left[\frac{1}{i}\right]^{\frac{1}{p_{mn}}} & , \quad m = m(i) \quad \text{ve} \quad n = n(i) \text{ için} \\ 0 & , \quad \text{diğer haller için} \end{cases}$$

olan diziyi tanımlayalım. $\lim_{i,j \to \infty} |x_{m(i),n(i)}|^{p_{m(i),n(i)}} = \lim_{i,j \to \infty} \frac{1}{i} = 0$ olduğundan $x \in c_o^2(p) \subset c^2(p)$ dir.Fakat (2.14) 'ü kullanarak

$$|2x_{m(i),n(i)}|^{p_{m(i),n(i)}} = 2^{p_{m(i),n(i)}} \, . \, i^{-1} > 2^i / i$$

de $\lim_{i,j \to \infty} (2^i / i) = \infty$ olduğundan $2x \notin c^2(p)$ elde ederiz ki bu kabulümüzle çelişir. O halde $M < \infty$ olmalıdır.

(ii) $(\Leftarrow)$: İspat (i) 'de $L = 0$ ve $L' = 0$ alınarak kolayca yapılabilir.

$(\Rightarrow)$: İspat (i) 'den aşikardır.

UYARI: Tek indisli dizilerde $c(p)$ ve $c_0(p)$ 'nin lineer uzay olması için gerek ve yeter şart $\sup p_m < \infty$ [Lascarides, C. G. , 1971] olmasıdır. Fakat Teorem II. 8 'de tanımlanan $p = (p_{mn})$ dizisinin baştan sonlu sayıda satır veya sütunundaki elemanların infimumu 0 ve supremumu ∞ olabilir.

TEOREM II.9 . (i) $c^2_{\infty}(p)$,

(ii) $c^2_{0,\infty}(p)$

cümlelerinin birer lineer uzay olması için gerek ve yeter şart $H = \sup p_{mn} < \infty$ olmasıdır.

İSPAT: $(\Leftarrow)$: $H < \infty$ ve $M = \max(1, H)$, x , $y \in c^2_{\infty}(p)$ olsun.Bu takdirde $\lim_{m,n \to \infty} |x_{mn} - L|^{p_{mn}} = 0$ $\lim_{m,n \to \infty} |y_{mn} - L'|^{p_{mn}} = 0$ ve her $m,n \in N$ için $|x_{mn}|^{p_{mn}} \leq K_1$

$|y_{mn}|^{p_{mn}} \leq K_2$ olacak şekilde $L, L' \in \mathbf{C}$ ve $K_1, K_2 \in \mathbf{R}^+$ sayıları vardır. Her $m,n \in \mathbf{N}$ için $p_{mn}/H \leq 1$ olduğundan (1.1) eşitsizliğinden herhangi iki $\lambda, \beta \in \mathbf{C}$ sabiti için

$$|(\lambda x_{mn}+\beta y_{mn})-(\lambda L+\beta L')|^{p_{mn}/M} \leq \max(1,|\lambda|).|x_{mn}-L|^{p_{mn}/M} + \max(1,|\beta|).|y_{mn}-L'|^{p_{mn}/M} \quad \ldots(2.15)$$

ve

$$|\lambda x_{mn}+\beta y_{mn}|^{p_{mn}/M} \leq \max(1,|\lambda|).|x_{mn}|^{p_{mn}/M} + \max(1,|\beta|).|y_{mn}|^{p_{mn}/M} \quad \ldots(2.16)$$

yazabiliriz. Böylece (2.15) 'den

$$\lim_{m,n\to\infty}|(\lambda x_{mn}+\beta y_{mn})-(\lambda L+\beta L')|^{p_{mn}} = 0$$

ve (2,16) 'dan

$$|\lambda x_{mn}+\beta y_{mn}|^{p_{mn}} \leq [\max(1,|\lambda|)K_1^{1/M} + \max(1,|\beta|)K_2^{1/M}]^M$$

elde ederizki bu $\lambda.x+\beta.y \in c^2_\infty(p)$ olduğunu gösterir.

($\Rightarrow$): $c^2_\infty(p)$ lineer bir uzay ve $\sup p_{mn} = \infty$ olsun. Bu takdirde her $i, j > 0$ için

$$p_{m(i),n(j)} > i+j \quad \ldots(2.17)$$

olacak şekilde en az biri kesin artan diğeri azalmayan $(m(i))$ ve $(n(j))$ dizileri vardır.

Şimdi en az bir $k_0 \in \mathbf{N}$ (veya $l_0 \in \mathbf{N}$) için $n(k_0)$ (veya $m(l_0)$) doğal sayısı ve kesin artan bir $(m(i))$ (veya $(n(j))$) dizisi için (2.17) 'nin sağlandığını kabul edelim. Genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & m = m(i) \text{ ve } n = n(k_0) \text{ için} \\ 0, & \text{diğer haller için} \end{cases}$$

olan $x = (x_{mn})$ dizisi için $x \in c^2_0(p) \subset c^2(p)$ olduğu aşikardır. Ayrıca Teorem II.7 ' den $x \in l^2_\infty(p)$ fakat $4x \notin l^2_\infty(p)$ olduğu kolayca ispatlanır.Bu ise bize $x \in c^2_{0,\infty}(p) \subset c^2_\infty(p)$ fakat $4x \notin c^2_\infty(p)$ olduğunu gösterir.Bu ise kabulümüzle çelişir .

Şimdi (2,17) ' yi sağlayan $(m(i))$ ve $(n(j))$ dizilerinin her ikisinin de kesin artan olduğunu kabul edelim. Böylece genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{i}\right]^{\frac{1}{p_{mn}}}, & m = m(i) \text{ ve } n = n(j) \text{ için} \\ 0, & \text{diğer haller için} \end{cases}$$

olan $x = (x_{mn})$ dizisini tanımlayalım $x \in c^2_{0,\infty}(p) \subset c^2(p)$ olduğu aşikardır. Fakat $2x \notin c^2_\infty(p)$ dir. Gerçektende (2.17)' yi kullanarak

$$|2x_{m(i),n(j)}|^{p_{m(i),n(j)}} = 2^{p_{m(i),n(j)}}.i^{-1} > 2^{i+j}/i$$

elde ederiz.Bu eşitsizlikte $\lim_{i,j\to\infty}(2^{i+j}/i)=\infty$ olduğundan $2x \notin c_\infty^2(p)$ dir.Bu ise kabulümüzle çelişir.O halde $\sup p_{mn} < \infty$ olmalıdır.

(ii) ($\Leftarrow$): İspat , (i) 'de $L = 0$ ve $L' = 0$ alınarak kolaylıkla yapılabilir.

($\Rightarrow$): İspat , (i) 'den aşikardır.

TEOREM II.10: $l^2(p)$ 'nin bir lineer uzay olması için gerek ve yeter şart $H = \sup p_{mn} < \infty$ olmasıdır.

İSPAT : ($\Leftarrow$) : $x,y \in l^2(p)$ ve $M = \max(1,H)$ olsun.Bu takdirde (1.1) ve (1.3) eşitsizliğini kullanarak

$$\left[\sum\left(|x_{mn}+y_{mn}|^{p_{mn}/M}\right)^M\right]^{1/M} \le \left[\sum\left(|x_{mn}|^{p_{mn}/M}+|y_{mn}|^{p_{mn}/M}\right)^M\right]^{1/M}$$

$$\le \left[\sum|x_{mn}|^{p_{mn}}\right]^{1/M} + \left[\sum|y_{mn}|^{p_{mn}}\right]^{1/M}$$

elde ederiz ki bu eşitsizlik bize $x+y \in l^2(p)$ olduğunu verir.

Herhangi bir $\alpha \in \mathbf{C}$ sabiti ve $x \in l^2(p)$ için

$$\sum|\alpha x_{mn}|^{p_{mn}} \le \max(1,|\alpha|^M).\sum|x_{mn}|^{p_{mn}}$$

eşitsizliği $\alpha.x \in l^2(p)$ olduğunu verir.

($\Rightarrow$) : $l^2(p)$ lineer uzay ve $\sup p_{mn} = \infty$ olsun. Bu takdirde her i,j doğal sayısı için

$$p_{m(i),n(j)} > i+j \qquad \text{. . . (2.18)}$$

olacak şekilde en az biri kesin artan diğeri azalmayan $(m(i))$ ve $(n(j))$ dizileri vardır. Yani (2.18) 'i sağlayan kesin artan bir $(m(i))$ dizisi ve en az bir $k_0 \in \mathbf{N}$ (veya $l_0 \in \mathbf{N}$) için $n(k_0)$ (veya $m(l_0)$) doğal sayısı veya her ikiside kesin artan $(m(i))$ ve $(n(j))$ dizileri vardır.Şimdi genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} 2^{-(i+j)/p_{mn}}, & m = m(i) \text{ ve } n = n(j) \text{ için} \\ 0, & \text{diğer haller için} \end{cases}$$

olan diziyi tanımlayalım.

$$\sum|x_{mn}|^{p_{mn}} = \sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{1}{2^{i+j}} < \infty$$

olur ki bu $x \in l^2(p)$ olduğunu gösterir. Fakat $2x$ 'i ele alırsak (2.18) 'i kullanarak

$$\sum\left|2x_{mn}\right|^{p_{mn}} = \sum_{i,j} 2^{p_{m(i),n(j)}} \cdot \frac{1}{2^{i+j}} > \sum_{i,j} 2^{i+j} \frac{1}{2^{i+j}} = \sum_{i,j} 1 = \infty$$

elde ederiz ki bu $2x \notin l^2(p)$ olduğunu gösterir. Bu ise kabulümüzle çelişir.

Şimdi bu uzayların hangi şartlar altında bir paranorm tanımladıklarını ve bu paranormlara göre hangi şartlar altında tam olduklarını inceleyen teoremleri verelim.

TEOREM II.11- $H = \sup p_{mn}$, $p = \inf p_{mn}$ ve $M = \max(1, H)$ olsun.

(i) $l_\infty^2(p)$ 'nin $g(x) = \sup_{m,n} |x_{mn}|^{p_{mn}/M}$ ile paranormlu uzay olması için gerek ve yeter şart $p > 0$ olmasıdır.

(ii) $l_\infty^2(p)$, (i) 'de tanımlanan paranorm altında tam bir lineer metrik uzaydır.

İSPAT:(i) $(\Rightarrow)$: $l_\infty^2(p)$, $g(x) = \sup_{m,n} \left|x_{mn}\right|^{p_{mn}/M}$ ile tanımlı paranormlu uzay ve $p = 0$ olsun. Şimdi x 'i sabit ve özel olarak $x = (1) \in l_\infty^2(p)$ olarak tanımlayalım. $0 < |\lambda| \leq 1$ olacak şekildeki her $\lambda \in \mathbf{C}$ ve her $m,n \in \mathbf{N}$ için

$$|\lambda|^{p_{mn}/M} \leq |\lambda|^{p/M} = |\lambda|^0 = 1$$

olur ki bu $\sup_{m,n} |\lambda|^{p_{mn}/M} = 1$ olduğunu gösterir.O halde $\lambda \to 0$ ve $x = (1)$ iken

$$g(\lambda.x) = \sup_{m,n} |\lambda|^{p_{mn}/M} = 1$$

elde ederiz ki bu $g(\lambda.x) \to 0$ olması ile yani g 'nin paranorm olması ile çelişir. O halde $p > 0$ olmalıdır.

$(\Leftarrow)$: $p > 0$ olsun.

P1: $g(\theta) = 0$ ve

P2: $g(-x) = g(x)$ olduğu aşikardır.

P3: Her $m,n \in \mathbf{N}$ için $p_{mn}/M \leq 1$ olduğundan (1.1) eşitsizliğinden

$$|x_{mn} + y_{mn}|^{p_{mn}/M} \leq |x_{mn}|^{p_{mn}/M} + |y_{mn}|^{p_{mn}/M}$$

elde ederiz. Böylece bu eşitsizlik $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$ 'nin sağlandığını gösterir.

P 4: Herhangi bir $\lambda \in \mathbf{C}$ için

$$|\lambda| \geq 1 \text{ iken her } m,n \in \mathbf{N} \text{ için } |\lambda|^{p_{mn}} \leq |\lambda|^M$$

ve

$$|\lambda| < 1 \text{ iken her } m,n \in \mathbf{N} \text{ için } |\lambda|^{p_{mn}} < |\lambda|^p$$

olduğundan her $m,n \in \mathbf{N}$ için

$$|\lambda|^{p_{mn}} \leq \max\left(|\lambda|^p, |\lambda|^M\right)$$

yazabiliriz.Buradan

$$g(\lambda x) \leq \max\left(|\lambda|, |\lambda|^{p/M}\right).g(x)$$

elde ederiz.Bu eşitsizlikten

x sabit , $\lambda \to 0$ iken $\lambda.x \to \theta$

$\lambda \to 0$ ve $x \to \theta$ iken $\lambda.x \to \theta$

ve

λ sabit ve $x \to \theta$ iken $\lambda x \to \theta$

olduğu kolayca ispatlanabilir.

(ii) $x^{kl} = (x^{kl}_{mn})_{m,n \in N}$ olmak üzere (x^{kl}), $l^2_\infty(p)$ Cauchy dizisi olsun.

Cauchy dizisinin tanımından her $0 < \varepsilon < 1$ için $k,l,r,t > N$ olduğunda

$$g(x^{kl} - x^{rt}) = \sup_{m,n} \left| x^{kl}_{mn} - x^{rt}_{mn} \right|^{\frac{p_{mn}}{M}} < \varepsilon \qquad \text{. . . (2,19)}$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbf{N}$ vardır.Buradan sabit her m ,n çifti için $\left| x^{kl}_{mn} - x^{rt}_{mn} \right| < 1$ olacağından

$$\left| x^{kl}_{mn} - x^{rt}_{mn} \right| < \left| x^{kl}_{mn} - x^{rt}_{mn} \right|^{\frac{p_{mn}}{M}} < \varepsilon$$

yazabiliriz ki bu bize $(x^{kl}_{mn})_{k,l \in N}$ dizisinin $\mathbf{C}$' de bir Cauchy dizisi oldugunu gösterir . **C** 'de her bir Cauchy dizisi yakınsak olduğundan her bir sabit m,n için

$$\lim_{k,l \to \infty} x^{kl}_{mn} = x_{mn} \qquad \text{. . . (2.20)}$$

olacak şekilde bir x_{mn} kompleks sayısı mevcuttur. Bu şekilde elde ettiğimiz x_{mn} kompleks sayılarını kullanarak $x = (x_{mn})$ dizisini oluşturalım.Her bir $k,l \in \mathbf{N}$ için $x^{kl} \in l^2_\infty(p)$ olduğundan

$$\sup_{m,n} \left| x^{kl}_{mn} \right|^{p_{mn}/M} = K$$

olacak şekilde bir $K \in \mathbf{R}$ vardır.Burada $k, l \to \infty$ için limit alırsak (2.20) 'den

$$\sup_{m,n} \left| x_{mn} \right|^{p_{mn}/M} = K$$

elde edilir ki bu $x \in l^2_\infty(p)$ olması demekdir.(2.19) 'da $r,t \to \infty$ için limit alırsak ,(2.14) 'ü de kullanarak $\varepsilon > 0$ için $k,l > N$ olduğunda

$$g(x^{kl} - x) < \varepsilon$$

bulunur. Yani

$$\lim_{k,l \to \infty} x^{kl} = x$$

dir.

$d(x,y) = g(x-y)$ ile tanımlı metrik altında bir lineer metrik uzay olduğu kolayca gösterilebilir.

TEOREM II.12: $N_1 = \min\{n_0 : \sup_{m,n \geq n_0} |x_{mn}|^{p_{mn}} < \infty\}$

$N_2 = \min\{n_0 : \sup_{m,n \geq n_0} p_{mn} < \infty\}$ ve $N = \max(N_1, N_2)$ olsun.

$\mu = \lim_{N \to \infty} \inf_{m,n \geq N} p_{mn}$ ve $M = \max(1, \sup_{m,n \geq N} p_{mn})$ olmak üzere

(i) : $c^2(p)$ ' nin

$$g(x) = \lim_{N \to \infty} \sup_{m,n \geq N} \left| x_{mn} \right|^{p_{mn}/M} \qquad \text{. . . (2.21)}$$

ile paranormlu bir uzay olması için gerek ve yeter şart $\mu > 0$ olmasıdır.

(ii) $c^2(p)$, (2.21) paranormu altında bir tam uzaydır.

İSPAT : (i) ($\Rightarrow$) : $c^2(p)$, (2.21) ile tanımlı bir paranormlu uzay ve $\mu = 0$ olsun. Bu takdirde $\alpha = \inf_{m,n \geq N} p_{mn} = 0$ dır. Şimdi x ' i sabit ve özel olarak $x = (1) \in c^2(p)$ olarak tanımlayalım. Her $\lambda \in (0, 1]$ ve her m , n $\geq$ N için $|\lambda|^{p_{mn}} \leq |\lambda|^{\alpha} = 1$ olduğundan $\sup_{m,n \geq N} |\lambda|^{p_{mn}/M} = 1$ dir.Böylece

$$g(\lambda x) = \lim_{N \to \infty} \sup_{m,n \geq N} |\lambda|^{p_{mn}/M} = 1$$

elde edilirki bu $\lambda \to 0$ ve x sabit iken $\lambda x \to \theta$ 'ı gerektirmediğini gösterir.Bu ise (2.21) 'in bir paranorm olması ile çelişir.O halde $\mu > 0$ olmalıdır.

($\Leftarrow$): $\mu > 0$ olsun.

P1: $g(\theta)=0$

P2: $g(-x) = g(x)$

P3: $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$

aksiyomlarının sağlandığı aşikardır.

P4: $\mu > 0$ olduğundan yeteri kadar büyük her m, n için $p_{mn} > \beta$ olacak şekilde bir $\beta > 0$ sayısı vardır. Böylece herhangi bir $\lambda \in \mathbf{C}$ için

$|\lambda| \geq 1$ iken her m,n $\geq$ N için $|\lambda|^{p_{mn}} \leq |\lambda|^{M}$

ve

$|\lambda| < 1$ iken yeteri kadar büyük her m,n $\geq$ N için $|\lambda|^{p_{mn}} < |\lambda|^{\beta}$

olduğundan yeteri kadar büyük her m,n $\geq$ N için

$|\lambda|^{p_{mn}} \leq \max(|\lambda|^{M}, |\lambda|^{\beta})$

yazabiliriz.Böylece

$g(\lambda x) \leq \max(|\lambda|, |\lambda|^{\beta/M}).g(x)$

elde ederiz.Bu eşitsizlikten

x sabit , $\lambda \to 0$ iken $\lambda.x \to \theta$

$\lambda \to 0$ ve $x \to \theta$ iken $\lambda.x \to \theta$

ve

λ sabit ve $x \to \theta$ iken $\lambda x \to \theta$

olduğu kolayca ispatlanabilir.

(ii) $x^{kl} = (x^{kl}_{mn})_{m,n \in \mathbf{N}}$ olmak üzere (x^{kl}) , $c^2(p)$ 'de bir Cauchy dizisi olsun . O halde her $0 < \varepsilon < 1$ için k , l , r , t $> s_0$ olduğunda

$$g(x^{kl} - x^{rt}) = \lim_{N \to \infty} \sup_{m,n \geq N} \left| x^{kl}_{mn} - x^{rt}_{mn} \right|^{\frac{p_{mn}}{M}} < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{... (2.22)}$$

olacak şekilde bir $s_0 \in \mathbf{N}$ vardır.Buradan $N > n_0$ için

$$\sup_{m,n\geq N}\left| x_{mn}^{kl}-x_{mn}^{rt}\right|^{\frac{p_{mn}}{M}}<\frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbf{N}$ sayısının mevcut olduğunu söyleyebiliriz.Yani her $0<\varepsilon<1$ için $k,l,r,t > s_0$ ve $m,n > n_0$ olduğunda

$$\left| x_{mn}^{kl}-x_{mn}^{rt}\right|^{\frac{p_{mn}}{M}} < \frac{\varepsilon}{3} < 1 \qquad \ldots (2.23)$$

elde edilir.Bu şartları sağlayan her bir k,l,r,t ve m,n için

$$\left| x_{mn}^{kl}-x_{mn}^{rt}\right| < 1$$

olduğundan ve (2.23) 'den

$$\left| x_{mn}^{kl}-x_{mn}^{rt}\right| < \left| x_{mn}^{kl}-x_{mn}^{rt}\right|^{\frac{p_{mn}}{M}} < \frac{\varepsilon}{3}$$

yazabiliriz.Bu ise her sabit $m,n > n_0$ için $(x^{kl}_{mn})_{k,l\in \mathbf{N}}$ dizisinin $\mathbf{C}$ 'de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.O halde her sabit $m,n > n_0$ için

$$\lim_{k,l\to\infty} x^{kl}_{mn} = x_{mn} \qquad \ldots (2.24)$$

olacak şekilde $x_{mn} \in \mathbf{C}$ 'ler mevcuttur.Bu şekilde elde edeceğimiz x_{mn} 'lerden $m,n > n_0$ olmak üzere $x = (x_{mn})$ dizisini oluşturalım.(2.24) 'ü kullanarak (2.22) 'de $r,t \to\infty$ iken limit alırsak $k,l > s_0$ için

$$g(x^{kl}-x) = \lim_{N\to\infty} \sup_{m,n\geq N}\left| x_{mn}^{kl}-x_{mn}\right|^{\frac{p_{mn}}{M}} < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \ldots (2.25)$$

elde edilir ki bu

$$\lim_{k,l\to\infty} x^{kl} = x$$

olduğunu gösterir.Şimdi $x \in c^2(p)$ olduğunu gösterelim.Her sabit $k, l \in \mathbf{N}$ için x^{kl}, $c^2(p)$ 'de bir dizi olduğundan verilen bir $0<\varepsilon<1$ ve her sabit $k, l \in \mathbf{N}$ için $m, n > n_1$ olduğunda

$$\left| x_{mn}^{kl}-L^{kl}\right|^{\frac{p_{mn}}{M}} < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \ldots (2.26)$$

olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbf{N}$ vardır. (2.26) ve (2.23) 'den verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $k,l,r,t > s_0$ ve $m, n > n_2 = \max(n_0, n_1)$ için

$$\left| L^{kl}-L^{rt}\right|^{\frac{p_{mn}}{M}} \leq \left| x_{mn}^{kl}-L^{kl}\right|^{\frac{p_{mn}}{M}} + \left| x_{mn}^{kl}-x_{mn}^{rt}\right|^{\frac{p_{mn}}{M}} + \left| x_{mn}^{rt}-L^{rt}\right|^{\frac{p_{mn}}{M}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3}$$

elde ederiz.Burada $k,l,r,t > s_0$ için $| L^{kl} - L^{rt} | < 1$ olduğundan $0<\varepsilon<1$ ve $m,n > n_2$ için

$$\left| L^{kl}-L^{rt}\right| \leq \left| L^{kl}-L^{rt}\right|^{\frac{p_{mn}}{M}} < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \ldots (2.27)$$

yazabiliriz ki bu (L^{kl}) 'nin $\mathbf{C}$ 'de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. O halde

$$\lim_{k,l\to\infty} L^{kl} = L$$

olacak şekilde bir $L \in \mathbf{C}$ mevcuttur.O halde verilen herhangi bir $0<\varepsilon<1$ ve $k, l > s_1$

için

$$|L^{kl} - L| < (\varepsilon/3)^{M/p}$$

olacak şekilde bir $s_1 \in N$ vardır. $(\varepsilon/3)^{M/p} < 1$ olduğundan her $m,n \in \mathbf{N}$ için

$$[(\varepsilon/3)^{M/p}]^{p_{mn}} < [(\varepsilon/3)^{M/p}]^{p} = (\varepsilon/3)^{M}$$

olup buradan

$$|L^{kl} - L|^{p_{mn}/M} < [(\varepsilon/3)^{M/p}]^{p_{mn}/M} < \varepsilon/3 \qquad \ldots (2.28)$$

elde ederiz. (2.25) , (2.26) ve (2.28) 'den verilen her $\varepsilon > 0$ için $k , l > \max(s_0, s_1)$ ve $m , n > \max(n_0, n_1)$ için (1.1) eşitsizliğini de kullanarak

$$\left|x_{mn} - L\right|^{\frac{p_{mn}}{M}} \leq \left|x^{kl}_{mn} - x_{mn}\right|^{\frac{p_{mn}}{M}} + \left|x^{kl}_{mn} - L^{kl}\right|^{\frac{p_{mn}}{M}} + \left|L^{kl} - L\right|^{\frac{p_{mn}}{M}}$$

$$< \varepsilon$$

bulunur.Yani $x \in c^2(p)$ 'dir.

TEOREM II.13. $p = \inf p_{mn}$, $H = \sup p_{mn}$ ve $M = \max(1, H)$ olmak üzere

(i) $c^2_\infty(p)$ 'nin

$$g(x) = \sup \left|x_{mn}\right|^{p_{mn}/M} \qquad \ldots (2.29)$$

ile paranomlu bir uzay olması için gerek ve yeter şart $p > 0$ olmasıdır.

(ii) $c^2_\infty(p)$ uzayı (2.29) ile tan ımlanan paranorm alt ı nda tam bir lineer metrik uzaydır.

İSPAT : (i) ($\Rightarrow$) :İspat Teorem II.12 (i) 'de $N = 1$ ve $\alpha = p$ alınarak benzer şekilde yapılabilir.

($\Leftarrow$) : **P1** , **P2** ve **P3** aksiyomlarının sağlandığı aşikardır.

P4 : Çarpımın sürekliliği ise

$$g(\lambda x) \leq \max(|\lambda|, |\lambda|^{p/M}).g(x)$$

eşitsizliğinden kolaylıkla gösterilebilir.

(ii) $c^2_\infty(p)$ 'nin $d(x,y) = g(x-y)$ ile tanımlı metrik altında lineer metrik uzay olduğu kolayca gösterilebilir.

Şimdi $c^2_\infty(p)$ 'nin (2.29) ile tanımlı paranorm altında tam olduğunu gösterelim. Bunun için $x^{kl} = (x^{kl}_{mn})_{m,n\in N}$ olmak üzere (x^{kl}), $c^2_\infty(p)$ 'de bir Cauchy dizisi olsun.Bu takdirde verilen herhangi bir $0 < \varepsilon < 1$ için $k,l,r,t > s_0$ olduğunda

$$g(x^{kl} - x^{rt}) = \sup\left|x^{kl}_{mn} - x^{rt}_{mn}\right|^{\frac{p_{mn}}{M}} < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \ldots (2.30)$$

olacak şekilde bir $s_0 \in \mathbf{N}$ vardır.Buradan her $m , n \in \mathbf{N}$ için $k , l , r , t > s_0$ olunca

$$\left|x^{kl}_{mn} - x^{rt}_{mn}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

elde ederiz ki bu m,n sabit olmak üzere $(x^{kl}_{mn})_{k,l\in N}$ 'nin **C** 'de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.O halde m,n sabit olmak üzere

$$\lim_{k,l\to\infty} x^{kl}_{mn} = x_{mn} \qquad \ldots (2.31)$$

olacak şekilde x_{mn} 'ler mevcuttur.Bu şekilde elde edeceğimiz x_{mn} 'lerden $x = (x_{mn})$ dizisini oluşturalım. (2.30) eşitsizliğinde $r, t \to \infty$ iken limit alıp (2.31) 'i kullanırsak

$$g(x^{kl} - x) = \sup \left| x^{kl}_{mn} - x_{mn} \right|^{\frac{p_{mn}}{M}} < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \ldots (2.32)$$

elde ederiz.Bu ise $x^{kl} \to x$ demektir.Her sabit $k, l \in \mathbf{N}$ için $x^{kl} \in c^2_\infty(p)$ olduğundan

$$\sup \left| x^{kl}_{mn} \right|^{\frac{p_{mn}}{M}} \le K$$

olacak şekilde bir $K \in \mathbf{R}$ vardır.Bu eşitsizlikte $k, l \to \infty$ iken limit alırsak (2.31) 'den

$$\sup \left| x_{mn} \right|^{\frac{p_{mn}}{M}} \le K$$

elde ederiz ki bu $x \in l^2_\infty(p)$ olduğunu gösterir.Ayrıca her $k, l \in \mathbf{N}$ sabitleri için

$$\lim_{m,n\to\infty} \left| x^{kl}_{mn} - L^{kl} \right|^{p_{mn}} = 0$$

olacak şekilde bir $L^{kl} \in \mathbf{C}$ vardır.O halde k, l sabit olmak üzere her $0 < \varepsilon < 1$ ve $m,n > n_0$ olduğunda

$$\left| x^{kl}_{mn} - L^{kl} \right|^{\frac{p_{mn}}{M}} < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \ldots (2.33)$$

olacak şekilde bir $n_0 \in N$ vardır. (2.30) ve (2.33) 'den $m, n > n_0$ ve $k, l, r, t > s_0$ olduğunda

$$\left| L^{rt} - L^{kl} \right|^{\frac{p_{mn}}{M}} \le \left| x^{rt}_{mn} - L^{rt} \right|^{\frac{p_{mn}}{M}} + \left| x^{rt}_{mn} - x^{kl}_{mn} \right|^{\frac{p_{mn}}{M}} + \left| L^{kl} - x^{kl}_{mn} \right|^{\frac{p_{mn}}{M}}$$

$$< \varepsilon$$

elde edilir.Buradan $m, n > n_0$ ve $k, l, r, t > s_0$ için

$$\left| L^{rt} - L^{kl} \right| < \left| L^{rt} - L^{kl} \right|^{\frac{p_{mn}}{M}} < \varepsilon$$

olduğunu yani (L^{kl}) 'nin $\mathbf{C}$ 'de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. O halde

$$\lim_{k,l\to\infty} L^{kl} = L$$

olacak şekilde bir $L \in \mathbf{C}$ vardır.Buradan her $\varepsilon > 0$ için $k, l > s_1$ ve her $m, n \in \mathbf{N}$ için

$$\left| L^{kl} - L \right|^{\frac{p_{mn}}{M}} < \left| L^{kl} - L \right|^{\frac{p}{M}} < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \ldots (2.34)$$

yazabiliriz.Böylece (2.32) , (2.33) ve (2.34) 'den $m, n > n_0$ ve $k, l > \max(s_0, s_1)$ için

$$| x_{mn} - L |^{p_{mn}/M} \le \varepsilon$$

elde ederiz.Bu ise $c^2_\infty(p)$ olduğunu gösterir.

$x = (x_{mn}) \in w^2$ ve $N = \min \{n_0 : \sup_{m,n \ge n_0} | x_{mn} | < \infty\}$ olsun. Şimdi $K_N = \sup_{m,n \ge N} | x_{mn} |$ olmak üzere $\{ K_N, K_{N+1}, \ldots \}$ cümlesini ele alalım.Bu cümleyi oluşturan her $N \in \mathbf{N}$ için $K_N \ge K_{N+1}$ olduğundan

$$\sup_N\{ K_N , K_{N+1} , \dots \} = K_N$$

dir.Aynı şekilde $k_N = \inf_{m,n \ge N} | x_{mn} |$ olmak üzere $k_{N+1} \ge k_N$ olduğundan

$$\inf_N\{ k_N , k_{N+1} , \dots \} = k_N$$

dir.Bu nedenle çalışmamızın bundan sonraki kısmında $\sup_N(\sup_{m,n \ge N} | x_{mn} |)$ ve $\inf_N(\inf_{m,n \ge N} | x_{mn} |)$ yerine kısaca $\sup_{m,n \ge N} | x_{mn} |$ ve $\inf_{m,n \ge N} | x_{mn} |$ ifadelerini kullanacağız.

TEOREM II.14 : $N_1 = \min\{n_0 : \sup_{m,n \ge n_0} | x_{mn} |^{p_{mn}} < \infty\}$ $N_2 = \min\{n_0 : \sup_{m,n \ge n_0} p_{mn} < \infty\}$ ve $N = \max (N_1 , N_2)$ olsun. $M = \max(1, \sup_{m,n \ge N} p_{mn})$ olmak üzere

(i) $c_0^2(p)$ 'nin

$$g(x) = \sup_{m,n \ge N} | x_{mn} |^{p_{mn}/M} \qquad \dots (2.35)$$

altında paranormlu bir uzay olması için gerek ve yeter şart $p = \inf_{m,n \ge N} p_{mn} > 0$ olmasıdır.

(ii) $c_0^2(p)$, (2.35) ile tanımlanan paranorm altında bir tam uzaydır.

İSPAT : (i) ($\Rightarrow$) **:** (2.35) ile tanımlı g , $c_0^2(p)$ 'de bir paranorm ve $p = 0$ olsun.

Şimdi $\lambda \to 0$ ve $x \in c_0^2(p)$ 'yi sabit ve özel olarak genel terimini

$$x_{mn} = \begin{cases} (m.n)^{\frac{1}{p_{mn}}} & , \ 1 \le m \le N-1 \text{ ve } n \ge 1 \text{ için} \\ (m.n)^{\frac{1}{p_{mn}}} & , \ m \ge N \text{ ve } 1 \le n \le N-1 \text{ için} \\ 1 & , \ m = N \text{ ve } n > N-1 \text{ için} \\ 0 & , \ m > N \text{ ve } n > N-1 \text{ için} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.Bu takdirde her $\lambda \in (0,1]$ ve her $m,n \ge N$ için $|\lambda|^{p_{mn}} \le |\lambda|^p = |\lambda|^0 = 1$ olduğundan $\sup_{m,n \ge N} | x_{mn} |^{p_{mn}/M} = 1$ dir.Böylece

$$g(\lambda x) = \sup_{m,n \ge N} | \lambda x_{mn} |^{p_{mn}/M} = \sup_{n \ge N, m=N} | \lambda |^{p_{mn}/M} = 1$$

elde ederiz ki bu $\lambda x \to \theta$ olamayacağını gösterir.Bu ise kabulümüzle çelişir.

($\Leftarrow$) :$p > 0$ olsun.

P1 , **P2** , ve **P3** aksiyomlarının sağlandığı aşikardır.

P4 : Her $m,n \ge N$ için $p \le p_{mn}$ olduğundan her $\lambda \in \mathbf{C}$ ve $m,n \ge N$ için

$$| \lambda | \ge 1 \text{ iken } | \lambda |^{p_{mn}} \le | \lambda |^M$$

ve

$|\lambda| < 1$ iken $|\lambda|^{p_{mn}} < |\lambda|^{p}$

olduğundan

$|\lambda|^{p_{mn}} \leq \max(|\lambda|^{M}, |\lambda|^{p})$

yazabiliriz.Buradan

$g(\lambda x) \leq \max(|\lambda|, |\lambda|^{p/M}).g(x)$

elde ederiz.Bu eşitsizlik ise bize çarpımın sürekliliğini verir.

(ii) $x^{kl} = (x^{kl}_{mn})_{m,n\in N}$ olmak üzere (x^{kl}), $c_0^2(p)$ 'de bir Cauchy dizisi olsun.

O halde özel olarak her $0 < \varepsilon < 1$ için $k, l, r, t > s$ olduğunda

$$g(x^{kl} - x^{rt}) = \sup_{m,n\geq N} \left| x^{kl}_{mn} - x^{rt}_{mn} \right|^{\frac{p_{mn}}{M}} < \varepsilon \qquad \ldots (2.36)$$

olacak şekilde bir $s \in \mathbf{N}$ vardır.Buradan $k, l, r, t > s$ olduğunda her bir $m, n \geq N$ için

$$\left| x^{kl}_{mn} - x^{rt}_{mn} \right| < \varepsilon$$

elde ederiz.O halde $m, n \geq N$ olmak üzere $(x^{kl}_{mn})_{k,l\in N}$ dizisi $\mathbf{C}$ 'de bir Cauchy dizisidir. $\mathbf{C}$ 'de her Cauchy dizisi yakınsak olduğundan $m, n \geq N$ için

$$\lim_{k,l\to\infty} x^{kl}_{mn} = x_{mn} \qquad \ldots (2.37)$$

olacak şekilde x_{mn} 'ler mevcuttur.O halde $m, n \geq N$ için (2.37) 'yi sağlayacak şekildeki $x=(x_{mn})$ dizisini oluşturalım. (2.36) 'da $r, t \to \infty$ iken limit alınırsa

$$g(x^{kl} - x) = \sup_{m,n\geq N} \left| x^{kl}_{mn} - x_{mn} \right|^{\frac{p_{mn}}{M}} < \varepsilon$$

elde edilir ki bu $x^{kl} \to x$ olduğunu gösterir. Her sabit $k, l \in \mathbf{N}$ için x^{kl}, $c_0^2(p)$ ' de bir dizi olduğundan

$$\lim_{m,n\to\infty} \left| x^{kl}_{mn} \right|^{p_{mn}/M} = 0$$

dır. Bu eşitsizlikte $k,l \to \infty$ iken limit alınırsa (2.37) 'den

$$\lim_{m,n\to\infty} \left| x_{mn} \right|^{p_{mn}/M} = 0$$

elde edilir ki bu $x \in c_0^2(p)$ olduğunu gösterir.

TEOREM II.15. $H = \sup p_{mn}$, $p = \inf p_{mn}$ ve $M = \max(1, H)$ olsun.

(i) $c^2_{0,\infty}(p)$ 'nin

$$g(x) = \sup |x_{mn}|^{p_{mn}/M} \qquad \ldots (2.38)$$

ile paranormlu bir uzay olması için gerek ve yeter şart $p > 0$ olmasıdır.

(ii) $c^2_{0,\infty}(p)$, (2.38) paranormu altında tam bir lineer metrik uzaydır.

İSPAT: İspat , Teorem II.14 'de $N_1 = N_2 = 1$ alınarak kolaylıkla yapılabilir.

TEOREM II.16. $H = \sup p_{mn}$ ve $M = \max(1, H)$ olmak üzere

(i) $l^2(p)$ uzayı

$$g(x) = \left[\sum_{m,n} |x_{mn}|^{p_{mn}}\right]^{\frac{1}{M}} \qquad \ldots (2.39)$$

altında paranormlu bir uzaydır.

(ii) $l^2(p)$ uzayı (2.39) ile tanımlanan paraenorm altında tam bir lineer metrik uzaydır.

İSPAT : (i) **P1** ve **P2** aksiyomlarının sağlandığı aşikardır.

P3 : Her m , n $\in$ **N** için $p_{mn}/M \leq 1$ dir.Böylece (1.1) 'den

$$|x_{mn}+y_{mn}|^{p_{mn}/M} \leq |x_{mn}|^{p_{mn}/M} + |y_{mn}|^{p_{mn}/M}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Böylece bu eşitsizliği ve (1.3) eşitsizliğini kullanarak her $x, y \in l^2(p)$ için

$$g(x+y) = \left[\sum_{m,n}\left(|x_{mn}+y_{mn}|^{p_{mn}/M}\right)^M\right]^{\frac{1}{M}}$$

$$\leq \left[\sum_{m,n}\left(|x_{mn}|^{p_{mn}/M}\right)^M\right]^{\frac{1}{M}} + \left[\sum_{m,n}\left(|y_{mn}|^{p_{mn}/M}\right)^M\right]^{\frac{1}{M}}$$

$$\leq g(x) + g(y)$$

yazabiliriz.

P4: Herhangi bir $\lambda \in C$ için

$$g(\lambda x) \leq \max(1, |\lambda|).g(x)$$

dir.Bu eşitsizlikten

$\lambda \to 0$ ve $x \to \theta$ iken $\lambda.x \to \theta$

ve

λ sabit ve $x \to \theta$ iken $\lambda x \to \theta$

olduğu kolayca ispatlanabilir. Şimdi x sabit ve $\lambda \to 0$ olsun.Bu takdirde $x \in l^2(p)$ olduğundan

$$R(x) = \sum_{m=1}^{K}\sum_{n=N+1}^{\infty}|x_{mn}|^{p_{mn}} + \sum_{m=K+1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N}|x_{mn}|^{p_{mn}} + \sum_{m=K+1}^{\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty}|x_{mn}|^{p_{mn}}$$
$$< \varepsilon/2$$

olacak şekilde K, N > 1 sayıları mevcuttur.Böylece $|\lambda| < 1$ olmak üzere

$$R(\lambda x) < \varepsilon/2 \qquad \ldots (2.40)$$

dır.m = 1 , 2, ... , K ve n = 1, 2 , ... , N için

$$S_{KN} = \sum_{m,n=1}^{K,N}|x_{mn}|^{p_{mn}}$$

olmak üzere $|\lambda|^{p_{mn}} < \dfrac{\varepsilon}{2.S_{KN}}$ olacak şekilde δ 'yı yeteri kadar küçük seçersek $|\lambda| < \delta$ olduğunda

$$\sum_{m,n=1}^{K,N} \left|\lambda\, x_{mn}\right|^{p_{mn}} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \ldots (2.41)$$

yazabiliriz. Böylece $|\lambda| < \min(1, \delta)$ olduğunda (2.40) ve (2.41) 'den

$$[g(\lambda x)]^M = \sum_{m,n=1}^{K,N} \left|\lambda\, x_{mn}\right|^{p_{mn}} + R(\lambda x) < \varepsilon$$

elde edilir ki bu $\lambda \to 0$ ve $x \in l^2(p)$ sabit iken $\lambda x \to \theta$ olduğunu gösterir.

(ii) $x^{kl} = (x^{kl}_{mn})$ olmak üzere (x^{kl}), $l^2(p)$ 'de bir Cauchy dizisi olsun. O halde verilen herhangi bir $0 < \varepsilon < 1$ için $k, l, r, t > N$ olduğunda

$$g(x^{kl} - x^{rt}) = \left[\sum_{m,n} |x^{kl}_{mn} - x^{rt}_{mn}|^{p_{mn}}\right]^{1/M} < \varepsilon \qquad \ldots (2.42)$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbf{N}$ vardır. Buradan her bir m, n sabiti için.

$$|x^{kl}_{mn} - x^{rt}_{mn}| \leq g(x^{kl} - x^{rt}) < \varepsilon$$

yazabiliriz ki bu $(x^{kl}_{mn})_{k,l \in \mathbf{N}}$ dizisinin $\mathbf{C}$ 'de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. O halde m, n sabit olmak üzere

$$\lim_{k,l \to \infty} x^{kl}_{mn} = x_{mn} \qquad \ldots (2.43)$$

olacak şekilde x_{mn} ' ler mevcuttur. Bu yolla elde ettiğimiz x_{mn} ' lerden $x = (x_{mn})$ dizisini oluşturalım. Her $k, l \in \mathbf{N}$ için $x^{kl} \in l^2(p)$ olduğundan herhangi iki $P, Q \in \mathbf{N}$ için

$$\sum_{m,n=1}^{P,Q} \left| x^{kl}_{mn}\right|^{p_{mn}} \leq K$$

olacak şekilde bir $K \in \mathbf{R}$ vardır. Bu eşitsizlikte önce $k, l \to \infty$ daha sonra da $P, Q \to \infty$ iken limit alırsak (2.43) 'den

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \left| x_{mn}\right|^{p_{mn}} \leq K$$

elde ederiz ki bu $x \in l^2(p)$ olduğunu gösterir. Ayrıca (2.42) 'den herhangi iki $P, Q \in \mathbf{N}$ için

$$\left[\sum_{m,n=1}^{P,Q} |x^{kl}_{mn} - x^{rt}_{mn}|^{p_{mn}}\right]^{1/M} \leq g(x^{kl} - x^{rt}) < \varepsilon$$

yazabiliriz. Bu eşitsizlikte önce $r, t \to \infty$ ve daha sonra da $P, Q \to \infty$ iken limit alırsak (2.43) ' den

$$\left[\sum_{m,n=1}^{\infty} |x^{kl}_{mn} - x_{mn}|^{p_{mn}}\right]^{1/M} < \varepsilon$$

elde ederiz. Bu ise $k, l > N$ olmak üzere $g(x^{kl}_{mn} - x) < \varepsilon$ yani $x^{kl} \to x$ olduğunu gösterir.

III.DUAL UZAYLAR

Bu bölümde çift indisli dizi uzaylarının β- ve γ- dual uzayları tanımlanacak ve $l_\infty^2(p)$, $c_{0,\infty}^2(p)$, $c_\infty^2(p)$ ile $l^2(p)$ dizi uzaylar ının α-, β- ve γ- dualleri verilecektir .

TANIM III.1. $X \subset w^2$ olsun.

$$X^\alpha = \left\{(y_{mn}) : \forall x \in X \text{ için } \sum_{m,n} \left|x_{mn}\, y_{mn}\right| < \infty\right\}$$

$$X^\beta = \left\{(y_{mn}) : \forall x \in X \text{ için } \left|\sum_{m,n} x_{mn}\, y_{mn}\right| < \infty\right\}$$

$$X^\gamma = \left\{(y_{mn}) : \forall x \in X \text{ için } \sup_{M,N} \left|\sum_{m,n=1}^{M,N} x_{mn}\, y_{mn}\right| < \infty\right\}$$

şeklinde tanımlanan X^α, X^β, X^γ 'ya sırasıyla X 'in α-, β-, γ- dualleri diyeceğiz. Çift indisli diziler için α- dualinin tanımı M. Gupta ve P.K. Kamthan (1980) tarafından verilmiştir.

Teorem I.3 'den $X^\alpha \subset X^\beta$ ve Teorem I.4 ' den de $X^\alpha \subset X^\gamma$ olduğunu söyliyebiliriz.

LEMMA III.1. $X, Y \subset w^2$ olsun. Eğer $X \subset Y$ ise $\eta = \alpha, \beta$ veya γ için $Y^\eta \subset X^\eta$ dir.

İspat: $\eta = \alpha$ için ispatı yapalım. $X \subset Y$ ve herhangi bir $x \in Y^\alpha$ alalım. Bu takdirde $\forall\ y \in Y$ için $\sum |x_{mn}\, y_{mn}| < \infty$ dır. $X \subset Y$ olduğundan özel olarak $\forall\ y = z \in X$ için de $\sum |x_{mn}\, z_{mn}| < \infty$ olur ki bu $x \in X^\alpha$ olduğunu gösterir. O halde $Y^\alpha \subset X^\alpha$ dır.

$\eta = \beta$ veya γ olması halinde de ispat benzer olarak kolaylıkla yapılabilir.

TEOREM III.1. $M_\infty^2(p) = \bigcap_{N \in \mathbf{N}-\{1\}} \left\{x = (x_{mn}) : \sum_{m,n} |x_{mn}| . N^{1/p_{mn}} < \infty\right\}$

ve $\forall m, n \in \mathbf{N}$ için $p_{mn} > 0$ olmak üzere her $p = (p_{mn})$ dizisi için

(i) $[l_\infty^2(p)]^\beta = M_\infty^2(p)$,

(ii) $[l_\infty^2(p)]^\alpha = M_\infty^2(p)$,

(iii) $[l_\infty^2(p)]^\gamma = M_\infty^2(p)$,

dir.

İspat: (i) $M_\infty^2(p) \subset [l_\infty^2(p)]^\beta$ oldugunu göstermek için herhangi bir $x \in M_\infty^2(p)$ ve $y \in l_\infty^2(p)$ alalım. $y \in l_\infty^2(p)$ olduğundan

$$|y_{mn}|^{p_{mn}} < \max(1, \sup_{m,n} |y_{mn}|^{p_{mn}}) < N$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbf{N}$ seçebiliriz. Böylece

$$|\sum_{m,n} x_{mn} y_{mn}| \le \sum_{m,n} |x_{mn} y_{mn}| \le \sum_{m,n} |x_{mn}|.\, N^{1/p_{mn}}$$

yazabiliriz. $x \in M^2_\infty(p)$ olduğundan sağ taraf yakınsaktır. Bu ise bize $x \in [l^2_\infty(p)]^\beta$ olduğunu gösterir.

Şimdi de $[l^2_\infty(p)]^\beta \subset M^2_\infty(p)$ olduğunu gösterelim.Bunun için $x \in [l^2_\infty(p)]^\beta$ fakat $x \notin M^2_\infty(p)$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

$$\sum_{m,n} |x_{mn}|.\, N^{1/p_{mn}} = \infty$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbf{N}-\{1\}$ vardır. Şimdi genel terimi

$$y_{mn} = N^{1/p_{mn}}.\mathrm{sgn}\, x_{mn}$$

olan $y = (y_{mn})$ dizisini tanımlayalım. $y \in l^2_\infty(p)$ dir. Fakat

$$\left|\sum x_{mn} y_{mn}\right| = \sum_{m,n} |x_{mn}|.\, N^{1/p_{mn}} = \infty$$

olduğundan $x \notin [l^2_\infty(p)]^\beta$ dır. Bu ise kabulümüzle çelişir. O halde $x \in M^2_\infty(p)$ dir.

(ii) $[l^2_\infty(p)]^\alpha \subset [l^2_\infty(p)]^\beta$ olduğundan (i) 'den $[l^2_\infty(p)]^\alpha \subset M^2_\infty(p)$ olduğunu söyleyebiliriz.

$M^2_\infty(p) \subset [l^2_\infty(p)]^\alpha$ olduğu da (i) 'deki ispattan aşikardır.

(iii) $[l^2_\infty(p)]^\alpha \subset [l^2_\infty(p)]^\gamma$ olduğundan (ii) 'den $M^2_\infty(p) \subset [l^2_\infty(p)]^\gamma$ olduğunu söyliyebiliriz.

$[l^2_\infty(p)]^\gamma \subset M^2_\infty(p)$ olduğunu gösterelim.Bunun için $x \in [l^2_\infty(p)]^\gamma$ fakat $x \notin M^2_\infty(p)$ olduğunu kabul edelim.Bu takdirde her $i,j \ge 1$ için $m(i) < m(i+1)$ ve $n(j) < n(j+1)$ olmak üzere en az bir $N \in \mathbf{N}-\{1\}$ için

$$\sum_{k=1}^{m(i)} \sum_{l=1}^{n(j)} |x_{kl}|\,.\, N^{1/p_{kl}} > 2^{i+j}$$

olacak şekilde kesin artan $(m(i))$ ve $(n(j))$ dizilerini bulabiliriz. Şimdi

$$y_{mn} = N^{1/p_{mn}}\,.\,\mathrm{sgn}\, x_{mn}$$

olarak tanımlayacağımız $y = (y_{mn})$ dizisini alalım. $\sup_{m,n} |y_{mn}|^{p_{mn}} = N$ olduğundan $y \in l^2_\infty(p)$ dir. Fakat her $i, j \ge 1$ için

$$\left|\sum_{k=1}^{m(i)} \sum_{l=1}^{n(j)} x_{kl}\, y_{kl}\right| = \sum_{k=1}^{m(i)} \sum_{l=1}^{n(j)} |x_{kl}|\,.\, N^{1/p_{kl}} > 2^{i+j}$$

olduğundan $x \notin [l^2_\infty(p)]^\gamma$ dır.Bu ise kabulümüzle çelişir.O halde $x \in M^2_\infty(p)$ olmalıdır.

LEMMA III.2. $M^2_0(p) = \bigcup_{N \in \mathbf{N}-\{1\}} \left\{ x = (x_{mn}) : \sum_{m,n} |x_{mn}|.N^{-1/p_{mn}} < \infty \right\}$

olmak üzere

(i) $M_0^2(p) \subset l_1^2 \Leftrightarrow p = \inf p_{mn} > 0$ olması dır.
(ii) $l_1^2 \subset M_0^2(p)$ dir.
(iii) $M_0^2(p) = l_1^2 \Leftrightarrow \inf p_{mn} > 0$ olmasıdır.

İspat: $(\Leftarrow)$: $p = \inf p_{mn} > 0$ ve $x \in M_0^2(p)$ olsun.Bu durumda en az bir $N \in \mathbf{N}-\{1\}$ için $\sum |x_{mn}|.N^{-1/p_{mn}} < \infty$ dur. Ayrıca $N > 1$ olduğundan $N^{-1/p} < N^{-1/p_{mn}}$ olup her $m, n \in \mathbf{N}$ için

$$|x_{mn}| . N^{-1/p} < |x_{mn}| . N^{-1/p_{mn}}$$

dir.Bu eşitsizlik ise $\sum |x_{mn}| < \infty$ olmasını gerektirir.

$(\Rightarrow)$: $M_0^2(p) \subset l_1^2$ ve $\inf p_{mn} = 0$ olsun Bu durumda $\forall\ i,j > 0$ için

$$p_{m(i),n(j)} < \frac{1}{i+j} \qquad \ldots \quad (3.1)$$

olacak şekilde en az bir $k_0 \in \mathbf{N}$ (en az bir $l_0 \in \mathbf{N}$) için $n(k_0)$ $(m(l_0))$ doğal sayısı ve kesin artan bir $(m(i))$ (veya $(n(j))$) dizisi yada her ikiside kesin artan $(m(i))$ ve $(n(j))$ dizileri vardır.Şimdi (x_{mn}) dizisini genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} \dfrac{N^{1/p_{m(i),n(j)}}}{N^{i+j}} & , m = m(i) \text{ ve } n = n(j) \text{ için} \\ 0 & , \text{diğer haller için} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlayalım. Her $N \in \mathbf{N}-\{1\}$ için

$$\sum_{m,n} |x_{mn}| . N^{-1/p_{mn}} = \sum_{i,j} |x_{m(i),n(j)}| . N^{-1/p_{m(i),n(j)}}$$

$$= \sum_{i,j} \frac{1}{N^{i+j}} < \infty$$

olduğundan $x \in M_0^2(p)$ dir.Fakat (3.1) 'den her $i,j > 0$ için

$$i + j < \frac{1}{p_{m(i),n(j)}}$$

olduğunu kullanırsak

$$\sum_{m,n} |x_{mn}| = \sum_{i,j} \frac{1}{N^{i+j}} . N^{1/p_{m(i),n(j)}} > \sum_{i,j} \frac{1}{N^{i+j}} . N^{i+j} = \infty$$

olur ki bu $x \notin l_1^2$ olduğunu gösterir.Bu ise $M_0^2(p) \subset l_1^2$ olduğu kabulümüzle çelişir.

(ii) $l_1^2 \subset M_0^2(p)$ olduğunu göstermek için herhangi bir $x \in l_1^2$ ve herhangi bir $N \in \mathbf{N}-\{1\}$ alalım . Her $m,n \in \mathbf{N}$ için

$$|x_{mn}| . N^{-1/p_{mn}} < |x_{mn}|$$

eşitsizliğinden

$$\sum |x_{mn}| . N^{-1/p_{mn}} < \sum |x_{mn}| < \infty$$

yazabiliriz ki bu $x \in M_0^2(p)$ olduğunu gösterir.

(iii) İspat (i) ve (ii) 'den aşikardır.

LEMMA III.3:

(i) $l_1^2 \subset M_\infty^2(p) \Leftrightarrow p = \inf p_{mn} > 0$ olmasıdır.

(ii) $M_\infty^2(p) \subset l_1^2$ dir.

(iii) $M_\infty^2(p) = l_1^2 \Leftrightarrow \inf p_{mn} > 0$ olmasıdır.

İSPAT: (i) ($\Leftarrow$): $p > 0$ ve $x \in l_1^2$ olsun. Her $N \in \mathbf{N}-\{1\}$ ve her $m,n \in \mathbf{N}$ için

$$N^{1/p_{mn}} < N^{1/p}$$

eşitsizliği sağlanacağından

$$|x_{mn}| \,.\, N^{1/p_{mn}} < |x_{mn}| \,.\, N^{1/p}$$

yazabiliriz. Böylece $x \in l_1^2$ olduğundan

$$\sum |x_{mn}| \,.\, N^{1/p_{mn}} < \sum |x_{mn}| \,.\, N^{1/p} < \infty$$

yazabiliriz ki bu $x \in M_\infty^2(p)$ olduğunu gösterir.

(ii): $l_1^2 \subset M_\infty^2(p)$ ve $\inf p_{mn} = 0$ olduğunu kabul edelim.Bu takdirde her $i,j > 0$ için (3.1) sağlanacak şekilde en az bir $k_0 \in \mathbf{N}$ (veya $\exists\, l_0 \in \mathbf{N}$) için $n(k_0)$ (veya $(m(l_0))$ doğal sayısı ve kesin artan bir $(m(i))$ (veya $(n(j))$) yada her ikiside kesin artan ($m(i)$) ve ($n(j)$) dizileri vardır.Şimdi $N \in \mathbf{N}-\{1\}$ herhangi bir sabit olmak üzere genel terimini

$$x_{mn} = \begin{cases} N^{-(i+j)}, & m=m(i) \text{ ve } n=n(j) \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer haller için} \end{cases}$$

olarak tanımlayacağımız $x = (x_{mn})$ dizisini alalım.

$$\sum_{m,n} |x_{mn}| = \sum_{i,j} \frac{1}{N^{i+j}} < \infty$$

olduğundan $x \in l_1^2$ dir. Fakat

$$\sum_{m,n} |x_{mn}| .\, N^{1/p_{mn}} = \sum_{i,j} \frac{1}{N^{i+j}} .\, N^{1/p_{m(i),n(j)}} > \sum_{i,j} \frac{1}{N^{i+j}} .\, N^{i+j} = \infty$$

dan $x \notin M_\infty^2(p)$ elde ederiz ki bu kabulümüz ile çelişir.O halde $\inf p_{mn} > 0$ olmalıdır.

(ii) $x \in M_\infty^2(p)$ herhangi bir dizi olsun.Her $N \in \mathbf{N}-\{1\}$ ve her $m, n \in \mathbf{N}$ için

$$|x_{mn}| < |x_{mn}| \,.\, N^{1/p_{mn}}$$

eşitsizliğinden $x \in l_1^2$ elde ederiz.

(iii) İspat (i) ve (ii) 'den aşikardır.

TEOREM III.2.

(i) $M_0^2(p) \subset \left[c_{0,\infty}^2(p) \right]^\beta \Leftrightarrow p = \inf p_{mn} > 0$

(ii) $\left[c_{0,\infty}^2(p) \right]^\beta \subset M_0^2(p)$

(iii) $\left[c_{0,\infty}^2(p) \right]^\beta \subset M_0^2(p) \Leftrightarrow \inf p_{mn} > 0$

olmasıdır.

İspat: (i) $(\Leftarrow)$: $p > 0$ ve $x \in M_0^2(p)$ olsun. Bu durumda $\exists\, N \in \mathbf{N}-\{1\}$ için $\sum |x_{mn}|.N^{-1/p_{mn}} < \infty$ ve Lemma III.2 (i) 'den $\sum |x_{mn}| < \infty$ dır. Şimdi herhangi bir $y \in c_{0,\infty}^2(p)$ alalım. O halde $N \in \mathbf{N}-\{1\}$ olmak üzere $m, n > K$ olduğunda $|y_{mn}|^{p_{mn}} < N^{-1}$ olacak şekilde bir $K \in \mathbf{N}$ vardır. Ayrıca Teorem II.1 (i) 'den her $m,n \in \mathbf{N}$ için $|y_{mn}| \le M$ olacak şekilde bir $M \in \mathbf{R}$ mevcuttur. Böylece bunları kullanarak

$$\left| \sum_{m,n} x_{mn}\, y_{mn} \right| \le M \left[\sum_{m,n=1}^{K} |x_{mn}| + \sum_{m=1}^{K} \sum_{n=K+1}^{\infty} |x_{mn}| + \sum_{m=K+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{K} |x_{mn}| \right]$$

$$+ \sum_{m,n=K+1}^{\infty} |x_{mn}| . N^{-1/p_{mn}}$$

eşitsizliğinden $x \in \left[c_{0,\infty}^2(p) \right]^\beta$ elde ederiz.

$(\Rightarrow)$ $M_0^2(p) \subset \left[c_{0,\infty}^2(p) \right]^\beta$ ve $\inf p_{mn} = 0$ olsun. Bu takdirde

$$p_{m(i),n(j)} < \frac{1}{i+j} \qquad \ldots (3.2)$$

sağlanacak şekilde en az bir $k_0 \in \mathbf{N}$ (veya $l_0 \in \mathbf{N}$) için $n(k_0)$ (veya $m(l_0)$) doğal sayısı ve kesin artan bir $(m(i))$ (veya $n(j)$) dizisi ya da her ikiside kesin artan $(m(i))$ ve $(n(j))$ dizileri vardır.Şimdi $N > 1$ herhangi bir doğal sayı olmak üzere genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} \dfrac{N^{1/p_{mn}}}{i^2} & , m = m(i) \text{ ve } n = n(1) \\ 0 & , \text{diğer haller için} \end{cases}$$

olan diziyi alalım.Bu durumda

$$\sum_{m,n} |x_{mn}|.N^{-1/p_{mn}} = \sum_i \frac{1}{i^2} < \infty$$

olduğundan $x \in M_0^2(p)$ 'dir. Şimdi de genel terimi

$$y_{mn} = \begin{cases} i^2 & , m = m(i) \text{ ve } n = n(1) \\ 0 & , \text{diğer haller için} \end{cases}$$

olan $y = (y_{mn})$ dizisini tanımlayalım. (3.2) 'yi kullanarak her $i > 0$ için

$$|y_{mn}|^{p_{mn}} = (i^2)^{p_{m(i),n(1)}} < (i^2)^{1/1+i} < 2$$

den $y \in l_{\infty}^{2}(p)$ ve $|y_{mn}|^{p_{mn}} \to 0$ olduğundan $y \in c_{0,\infty}^{2}(p)$ 'dir. Fakat (3.2) 'den elde edeceğimiz

$$1+i < \frac{1}{p_{m(i),n(1)}}$$

eşitsizliğini kullanarak

$$\left|\sum x_{mn}y_{mn}\right| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N^{1/p_{m(i),n(1)}}}{i^2}.i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} N^{1/p_{m(i),n(1)}} > \sum_{i=1}^{\infty} N^{1+i} = \infty$$

olduğundan $x \notin [c_{0,\infty}^{2}(p)]^{\beta}$ elde ederiz ki bu kabulümüzle çelişir. O halde $\inf p_{mn} > 0$ olmalıdır.

(ii) $x \in [c_{0,\infty}^{2}(p)]^{\beta}$ fakat $x \notin M_0^2(p)$ olsun. Bu takdirde her $i, j > 0$ doğal sayı çifti için $l(0) = 0$ ve $k(0) = 0$ olmak üzere

$$M_{ij} = \sum_{m=l(i-1)+1}^{l(i)} \sum_{n=k(j-1)+1}^{k(j)} |x_{mn}|.(i+j)^{-1/p_{mn}} > 1 \qquad \text{... (3.3)}$$

olacak şekilde kesin artan $(l(i))$ ve $(k(j))$ dizileri vardır.Şimdi her $i,j > 0$ için $l(i-1)+1 \le m \le l(i)$ ve $k(j-1)+1 \le n \le k(j)$ olmak üzere genel terimi

$$y_{mn} = (i+j)^{-1/p_{mn}}.\operatorname{sgn} x_{mn}$$

olan $y = (y_{mn})$ dizisini tanımlayalım.$m, n \to \infty$ iken $i, j \to \infty$ olduğundan

$\lim\limits_{m,n\to\infty} |y_{mn}|^{p_{mn}} = \lim\limits_{i,j\to\infty} \dfrac{1}{i+j} = 0$ ve $\forall i,j \in N$ için $\dfrac{1}{i+j} < 1$ 'den $y \in c_{0,\infty}^{2}(p)$ 'dir.

Böylece

$$\left|\sum x_{mn}y_{mn}\right| = \sum_{m=1}^{l(1)} \sum_{n=1}^{k(1)} |x_{mn}|.2^{-1/p_{mn}} + \ldots + \sum_{m=1}^{l(1)} \sum_{n=k(j-1)+1}^{k(j)} |x_{mn}|.(j+1)^{-1/p_{mn}} + \ldots$$

$$+ \sum_{m=l(1)+1}^{l(2)} \sum_{n=1}^{k(1)} |x_{mn}|.3^{-1/p_{mn}} + \ldots + \sum_{m=l(1)+1}^{l(2)} \sum_{n=k(j-1)+1}^{k(j)} |x_{mn}|.(j+2)^{-1/p_{mn}} + \ldots$$

$$+ \;.\;.\;.\;.\;.$$

$$+ \sum_{m=l(i-1)+1}^{l(i)} \sum_{n=1}^{k(1)} |x_{mn}|.(i+1)^{-1/p_{mn}} + \ldots + \sum_{m=l(i-1)+1}^{l(i)} \sum_{n=k(j-1)+1}^{k(j)} |x_{mn}|.(i+j)^{-1/p_{mn}} + \ldots$$

$$+ \;.\;.\;.\;.\;.$$

elde ederiz.Burada (3.3) 'ü kullanırsak

$$\left|\sum x_{mn}y_{mn}\right| > 1 + 1 + 1 + \ldots$$

elde edilir.Bu ise $x \notin [\, c^2_{0,\infty}(p)\,]^{\beta}$ olduğunu gösterir.Oysa bu kabulümüzle çelişir. O halde $x \in M^2_0(p)$ olmalıdır.

(iii) İspat (i) ve (ii) 'den aşikardır.

UYARI III.1. $c^2_{0,\infty}(p) \subset c^2_0(p)$ olduğundan Lemma III.1 'den $[c^2_0(p)]^{\beta} \subset [\,c^2_{0,\infty}(p)]^{\beta}$ ve Teorem III.2 (ii) 'den $[c^2_0(p)]^{\beta} \subset M^2_0(p)$ olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi $M^2_0(p) \subset [\,c^2_0(p)]^{\beta}$ ve $\inf p_{mn} = 0$ olduğunu kabul edelim.Bu takdirde

$$p_{m(i),n(j)} < \frac{1}{i+j} \qquad \ldots (3.4)$$

sağlanacak şekilde en az bir $k_0 \in \mathbf{N}$ (veya $l_0 \in \mathbf{N}$) için $n(k_0)$ (veya $m(l_0)$) doğal sayısı ve kesin artan bir $(m(i))$ (veya $(n(j))$) dizisi veya her ikiside kesin artan $(m(i))$ ve $(n(j))$ dizileri vardır. $N > 1$ herhangi bir doğal sayı olmak üzere genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} \dfrac{N^{1/p_{mn}}}{2^{i+j}} & , m = m(i) \text{ ve } n = n(j) \text{ (veya } (n = n(k_0)) \text{ için} \\ 0 & , \text{diğer haller için} \end{cases}$$

olan $x = (x_{mn})$ dizisini tanımlayalım. Burada

$$\sum_{m,n} |x_{mn}|.N^{-1/p_{mn}} = \sum_{i,j} \frac{1}{2^{i+j}} < \infty$$

olduğundan $x \in M^2_0(p)$ 'dir.Şimdi genel terimi

$$y_{mn} = \begin{cases} (2^{i+j}.N^{-1})^{1/p_{mn}} & , m = m(i) \text{ ve } n = n(1) \\ 0 & , \text{diğer haller için} \end{cases}$$

olarak tanımlayacağımız $y \in c^2_0(p)$ dizisini alalım.Bu takdirde (3.4) 'ü de kullanarak

$$\left|\sum_{m,n} x_{mn}\, y_{mn}\right| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2^{i+1})^{1/p_{m(i),n(1)}}}{2^{i+1}} > \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2^{i+1})^{i+1}}{2^{i+1}}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i^2+i} = \infty$$

olur ki buradan kabulümüzle çelişen $x \notin [c^2_0(p)]^{\beta}$ sonucunu elde ederiz.O halde $M^2_0(p) \subset [c^2_0(p)]^{\beta}$ iken $\inf p_{mn} > 0$ dır.Fakat $\inf p_{mn} > 0$ olması $M^2_0(p) \subset [c^2_0(p)]^{\beta}$ olmasını gerektirmez.Gerçekten özel olarak her $m, n \in \mathbf{N}$ için $p_{mn} = 1$ olarak alırsak $M^2_0(p) = l^2_1$ ve $c^2_0(p) = c^2_0$ elde ederiz. Burada $l^2_1 \not\subset [\,c^2_0]^{\beta}$ dır.Gerçekten de $x = \left(\dfrac{1}{2^{m+n}}\right) \in l^2_1$ ve genel terimi

$$y_{mn} = \begin{cases} 2^{m+n} & , m = 1 \text{ ve } n = 1,2 \ldots \text{ için} \\ 0 & , \text{diğer haller için} \end{cases}$$

olarak tanımlayacağımız $y \in c_0^2$ dizisi için

$$\left|\sum x_{mn} y_{mn}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

elde ederiz.Bu ise $x \notin [\, c_0^2 \,]^{\beta}$ olduğunu gösterir.

TEOREM III.3:

(i) $M_0^2(p) \subset [c_{0,\infty}^2(p)]^{\alpha}$ olması için gerek ve yeter şart $\inf p_{mn} > 0$ olmasıdır.

(ii) $[c_{0,\infty}^2(p)]^{\alpha} \subset M_0^2(p)$ dir.

(iii) $[c_{0,\infty}^2(p)]^{\alpha} = M_0^2(p)$ olması için gerek ve yeter şart $\inf p_{mn} > 0$ olmasıdır.

İSPAT : (i) İspat , Teorem III.2.(i) 'nin ispatından aşikardır.

(ii) $[c_{0,\infty}^2(p)]^{\alpha} \subset [c_{0,\infty}^2(p)]^{\beta}$ olduğundan Teorem III.2. (ii) 'den $[c_{0,\infty}^2(p)]^{\alpha} \subset M_0^2(p)$ dir.

(iii) İspat (i) ve (ii) 'den aşikardır.

TEOREM III.4:

(i) $M_0^2(p) \subset [c_{0,\infty}^2(p)]^{\gamma}$ olması için gerek ve yeter şart $\inf p_{mn} > 0$ olmasıdır.

(ii) $[c_{0,\infty}^2(p)]^{\gamma} \subset M_0^2(p)$ dir.

(iii) $[c_{0,\infty}^2(p)]^{\gamma} = M_0^2(p)$ olması için gerek ve yeter şart $\inf p_{mn} > 0$ olmasıdır.

İSPAT : (i) ($\Leftarrow$) $\inf p_{mn} > 0$ olsun. Bu takdirde $[\, c_{0,\infty}^2(p)]^{\alpha} \subset [c_{0,\infty}^2(p)]^{\gamma}$ olduğundan Teorem III.3 (i) 'den $M_0^2(p) \subset [c_{0,\infty}^2(p)]^{\gamma}$ olduğunu söyleyebiliriz.

($\Rightarrow$) : $M_0^2(p) \subset [c_{0,\infty}^2(p)]^{\gamma}$ ve $\inf p_{mn} = 0$ olsun. Bu takdirde

$$p_{m(i),n(j)} < \frac{1}{i+j} \qquad \ldots (3.5)$$

sağlanacak şekilde en az bir $k_0 \in \mathbb{N}$ (veya $l_0 \in \mathbb{N}$) için $n(k_0)$ (veya $m(l_0)$) doğal sayısı ve kesin artan bir $(m(i))$ (veya $(n(j))$) dizisi veya her ikiside kesin artan $(m(i))$ ve $(n(j))$ dizileri vardır.Şimdi Teorem III.2 (i) 'nin ispatında tanımlanan

$x \in M_0^2(p)$ ve $y \in c_{0,\infty}^2(p)$ dizilerini alalım. Bu takdirde (3.5) 'i de kullanarak $0 < m(k) \le M$ olmak üzere

$$\sup_{M,N}\left|\sum_{m,n=1}^{M,N} x_{mn} y_{mn}\right| = \sup_k \sum_{i=1}^{k} N^{1/p_{m(i),n(l)}} > \sup_k \sum_{i=1}^{k} N^{l+i} = \infty$$

elde ederiz ki bu $x \notin [\, c_{0,\infty}^2(p)]^{\gamma}$ olduğunu gösterir. Bu ise kabulümüzle çelişir.O halde $\inf p_{mn} > 0$ olmalıdır.

(ii) Herhangi bir $x \in [\, c_{0,\infty}^2(p)]^{\gamma}$ alalım ve $x \notin M_0^2(p)$ olduğunu kabul edelim.

Bu takdirde her i,j doğal sayı çifti için

$$\left| S_{m(i),\, n(j)} \right| = \sum_{k=1}^{m(i)} \sum_{l=1}^{n(j)} \left| x_{kl} \right| .\, (i+j)^{-1/p_{kl}} > i+j$$

olacak şekilde kesin artan (m (i)) ve (n (j)) dizilerini bulabiliriz.Şimdi her $i, j > 0$ için genel terimi

$$y_{kl} = \begin{cases} (i+j)^{-1/p_{kl}} \operatorname{sgn} x_{kl} & , \ 1 \le k \le m(i) \ \text{ve} \ 1 \le l \le n(j) \ \text{için} \\ 0 & , \ \text{diğer haller için} \end{cases}$$

olan $y = (y_{kl})$ dizisini tanımlayalım. $\lim_{i,j\to\infty} \frac{1}{i+j} = 0$ olduğundan $\lim_{k,l\to\infty} | y_{kl} |^{p_{kl}} = 0$ ve $\sup_{i,j} \frac{1}{i+j} < \infty$ olduğundan $\sup_{k,l} | y_{kl} |^{p_{kl}} < \infty$ olup $y \in c^2_{0,\infty}(p)$ 'dir.Fakat $\forall$ i,j > 0 için

$$\left| \sum_{k=1}^{m(i)} \sum_{l=1}^{n(j)} x_{kl}\, y_{kl} \right| = \sum_{k=1}^{m(i)} \sum_{l=1}^{n(j)} | x_{kl} | .(i+j)^{-1/p_{kl}} > i+j$$

olduğundan $x \notin [\, c^2_{0,\infty}(p)]^{\gamma}$ dır. Bu ise kabulümüzle çelişir.

(iii) İspat (i) ve (ii) 'den aşikardır.

UYARI III.2: $\eta = \alpha$ veya γ olmak üzere $[c^2_0(p)]^{\eta} \subset M^2_0(p)$ olduğunu Teo.III.3 (i) ve Teo.III.4 (i) 'den söyleyebiliriz.Ayrıca

$$M^2_0(p) \subset [c^2_0(p)]^{\eta} \Rightarrow \inf p_{mn} > 0$$

olduğunun ispatı da Uyarı III.1 'deki ispattan aşikardır.

TEOREM III.5:

(i) $M^2_0(p) \subset [c^2_\infty(p)]^{\beta}$ olması için gerek ve yeter şart $\inf p_{mn} > 0$,

(ii) $[c^2_\infty(p)]^{\beta} \subset M^2_0(p)$

(iii) $[c^2_\infty(p)]^{\beta} = M^2_0(p)$ olması için gerek ve yeter şart $\inf p_{mn} > 0$ olmasıdır.

İSPAT:(i) ($\Leftarrow$) : $\inf p_{mn} > 0$ ve $x \in M^2_0(p)$ olsun. Bu takdirde en az bir $N > 1$ doğal sayısı için $\sum | x_{mn} |. N^{-1/p_{mn}} < \infty$ ve Lemma III.2 (i) 'den $\sum | x_{mn} | < \infty$ dır. Herhangi bir $y \in c^2_\infty(p)$ için $N > 1$ bir doğal sayı olmak üzere $m,n > K$ olduğunda $| y_{mn} - L |^{p_{mn}} < N^{-1}$ olacak şekilde bir $K \in \mathbf{N}$ mevcut ve $y \in l^2_\infty(p)$ olduğundan Teorem II.1 (i) gereğince $y \in l^2_\infty$ dir. O Halde her $m,n \in \mathbf{N}$ için $| y_{mn} - L | < M$ olacak şekilde bir $M \in \mathbf{R}$ vardır. Bunları kullanarak

$$| \sum x_{mn} y_{mn} | \le \sum | x_{mn} (y_{mn} - L) | + L. \sum | x_{mn} |$$

$$= M\left\{\sum_{m,n=1}^{K}|x_{mn}| + \sum_{m=1}^{K}\sum_{n=K+1}^{\infty}|x_{mn}| + \sum_{m=K+1}^{\infty}\sum_{n=1}^{K}|x_{mn}|\right\}$$

$$+ \sum_{m,n=K+1}^{\infty}|x_{mn}|.N^{-1/p_{mn}} + L\sum|x_{mn}|$$

eşitsizliğinden $x \in [c^2_\infty(p)]^\beta$ elde ederiz.

($\Rightarrow$) :$M^2_0(p) \subset [c^2_\infty(p)]^\beta$ fakat $\inf p_{mn} = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde Teorem III.2 (i) 'deki ispattan $\inf p_{mn} > 0$ olması gerektiği aşikardır.

(ii) $c^2_{0,\infty}(p) \subset c^2_\infty(p)$ olduğundan , Lemma III.1 ve Teorem III.2 (ii) 'den

$$[c^2_\infty(p)]^\beta \subset [c^2_{0,\infty}(p)]^\beta \subset M^2_0(p)$$

yazabiliriz.

(iii) İspatı (i) ve (ii) 'den aşikardır.

TEOREM III.6:

(i) $M^2_0(p) \subset [c^2_\infty(p)]^\alpha$ olması için gerek ve yeter şart $\inf p_{mn} > 0$ olmasıdır.

(ii) $[c^2_\infty(p)]^\alpha \subset M^2_0(p)$ dir.

(iii) $[c^2_\infty(p)]^\alpha = M^2_0(p)$ olması için gerek ve yeter şart $\inf p_{mn} > 0$ olmasıdır.

İSPAT: (i) Teorem III.5 (i) 'nin ispatından aşikardır.

(ii) $[c^2_\infty(p)]^\alpha \subset [c^2_\infty(p)]^\beta$ olduğundan Teo III.5 (ii) 'den

$$[c^2_\infty(p)]^\alpha \subset M^2_0(p)$$

elde ederiz.

(iii) İspat (i) ve (ii) 'den aşikardır.

TEOREM III.7:

(i) $M^2_0(p) \subset [c^2_\infty(p)]^\gamma$ olması için gerek ve yeter şart $\inf p_{mn} > 0$ olmasıdır.

(ii) $[c^2_\infty(p)]^\gamma \subset M^2_0(p)$ dir.

(iii) $[c^2_\infty(p)]^\gamma = M^2_0(p)$ olması için gerek ve yeter şart $\inf p_{mn} > 0$ olmasıdır.

İSPAT: (i) $\inf p_{mn} > 0$ olsun. Teorem III.6 (i) 'den

$$M^2_0(p) \subset [c^2_\infty(p)]^\alpha \subset [c^2_\infty(p)]^\gamma$$

yazabiliriz.

($\Rightarrow$) : $M^2_0(p) \subset [c^2_\infty(p)]^\gamma$ fakat $\inf p_{mn} = 0$ olduğunu kabul edelim.Bu takdirde Teo III.4 (i) 'deki ispattan $\inf p_{mn} > 0$ olması gerektiği kolayca görülebilir.

(ii) $c^2_{0,\infty}(p) \subset c^2_{\infty}(p)$ olduğundan Lemma III.1 'den ve Teorem III. 4 (ii) 'den

$$[c^2_{\infty}(p)]^{\gamma} \subset [c^2_{0,\infty}(p)]^{\gamma} \subset M^2_0(p)$$

yazabiliriz.

UYARI III.4: $\eta = \alpha, \beta$ veya γ 'yı göstersin. $c^2_{\infty}(p) \subset c^2(p)$ olduğundan Lemma III.1 'den $[c^2(p)]^{\eta} \subset [c^2_{\infty}(p)]^{\eta}$ ve yukarda verdiğimiz son üç teoremden $[c^2(p)]^{\eta} \subset M^2_0(p)$ olduğunu söyleyebiliriz.Ayrıca $M^2_0(p) \subset [c^2(p)]^{\eta} \Rightarrow \inf p_{mn} > 0$ olduğu fakat bu önermenin tersinin sağlanmadığının ispatı ise Uyarı III.1 'in ispatından aşikardır.

TEOREM III.8: Her $m,n \in \mathbf{N}$ için $p_{mn} > 1$ ve

$$\frac{1}{p_{mn}} + \frac{1}{q_{mn}} = 1$$

olsun.

$$M^2(p) = \bigcup_{N \in \mathbf{N}-\{1\}} \left\{ (x_{mn}) : \sum |x_{mn}|^{q_{mn}} . N^{-q_{mn}/p_{mn}} < \infty \right\}$$

olmak üzere

(i) $[l^2(p)]^{\beta} = M^2(p)$

(ii) $[l^2(p)]^{\alpha} = M^2(p)$

(iii) $[l^2(p)]^{\gamma} = M^2(p)$

dir.

İSPAT: (i) $M^2(p) \subset [l^2(p)]^{\beta}$ olduğunu göstermek için herhangi bir $x \in M^2(p)$ ve $y \in l^2(p)$ alalım. (1.2) eşitsizliğinden.

$$|x_{mn} y_{mn}| \le \frac{|x_{mn}|^{q_{mn}}}{q_{mn}} + \frac{|y_{mn}|^{p_{mn}}}{p_{mn}} \le |x_{mn}|^{q_{mn}} + |y_{mn}|^{p_{mn}}$$

elde ederiz. Böylece bu eşitsizlikten $N \in \mathbf{N}-\{1\}$ olmak üzere

$$|x_{mn} y_{mn}| = |x_{mn} . N^{-1/p_{mn}} . N^{1/p_{mn}} . y_{mn}|$$

$$\le |x_{mn}|^{q_{mn}} . N^{-q_{mn}/p_{mn}} + N . |y_{mn}|^{p_{mn}} \qquad \ldots (3.6)$$

ve buradan

$$\left|\sum x_{mn} y_{mn}\right| \le \sum |x_{mn}|^{q_{mn}} . N^{-q_{mn}/p_{mn}} + N . \sum |y_{mn}|^{p_{mn}}$$

elde ederiz. Bu ise bize $x \in M^2(p)$ ve $y \in l^2(p)$ olduğundan $x \in [l^2(p)]^{\beta}$ 'yı verir.

$[l^2(p)]^{\beta} \subset M^2(p)$ olduğunu göstermek için de herhangi bir $x \in [l^2(p)]^{\beta}$ alalım ve $x \notin M^2(p)$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $l(0) = 0$ ve $k(0) = 0$ olmak üzere

$$M_{ij} = \sum_{m=l(i-1)+1}^{l(i)} \sum_{n=k(j-1)+1}^{k(j)} \left|x_{mn}\right|^{q_{mn}} . (i.j)^{-q_{mn}/p_{mn}} > 1 \quad \ldots (3.7)$$

olacak şekilde kesin artan $(l(i))$ ve $(k(j))$ dizilerini bulabiliriz.Şimdi genel terimi her $i,j>0$ için $l(i-1)+1 \leq m \leq l(i)$ ve $k(j-1)+1 \leq n \leq k(j)$ olmak üzere

$$y_{mn} = M_{ij}^{-1}(i.j)^{-q_{mn}} . \left|x_{mn}\right|^{q_{mn}-1} \operatorname{sgn} x_{mn} \quad \ldots (3.8)$$

olan $y = (y_{mn})$ dizisini tanımlayalım.Her $i,j>0$ için

$$I = \sum_{m=l(i-1)+1}^{l(i)} \sum_{n=k(j-1)+1}^{k(j)} \left|x_{mn}\right|^{p_{mn}}$$

$$= \sum_{m=l(i-1)+1}^{l(i)} \sum_{n=k(j-1)+1}^{k(j)} \left|x_{mn}\right|^{p_{mn}(q_{mn}-1)} (i.j)^{-q_{mn}p_{mn}} . M_{ij}^{-p_{mn}}$$

eşitsizliğinde $p_{mn}(q_{mn}-1) = q_{mn}$ ve $-q_{mn}p_{mn} = -q_{mn} - p_{mn}$ olduğunu kullanırsak

$$I = \sum_{m=l(i-1)+1}^{l(i)} \sum_{n=k(j-1)+1}^{k(j)} \left|x_{mn}\right|^{q_{mn}} . (i.j)^{-q_{mn}-p_{mn}} . M_{ij}^{-p_{mn}}$$

elde ederiz . $p_{mn} > 1$ ve $M_{ij} > 1$ olduğundan $M_{ij}^{-p_{mn}} < M_{ij}^{-1}$ ($\forall$ i,j m,n > 0) ve $(i.j)^{-p_{mn}} < (i.j)^{-1}$ dir. Bu eşitsizlikleri kullanarak

$$I \leq \sum_{m=l(i-1)+1}^{l(i)} \sum_{n=k(j-1)+1}^{k(j)} \left|x_{mn}\right|^{q_{mn}} . (i.j)^{-q_{mn}} . M_{ij}^{-1} (i.j)^{-1}$$

$$= (i.j)^{-2} M_{ij}^{-1} \sum_{m=l(i-1)+1}^{l(i)} \sum_{n=k(j-1)+1}^{k(j)} \left|x_{mn}\right|^{q_{mn}} . (i.j)^{-q_{mn}+1}$$

$-q_{mn}+1 = -\dfrac{q_{mn}}{p_{mn}}$ oldugundan

$$I \leq (i.j)^{-2} M_{ij}^{-1} \sum_{m=l(i-1)+1}^{l(i)} \sum_{n=k(j-1)+1}^{k(j)} \left|x_{mn}\right|^{q_{mn}} . (i.j)^{-q_{mn}/p_{mn}}$$

elde ederiz. Bu eşitsizlikten (3.7) 'yi kullanarak

$$I \leq \frac{1}{(i.j)^2}$$

elde ederiz ki bu $(y_{mn}) \in l^2(p)$ olmasını gerektirir. Fakat

$$\sum_{m=l(i-1)+1}^{l(i)} \sum_{n=k(j-1)+1}^{k(j)} x_{mn} y_{mn} = \sum_{m=l(i-1)+1}^{l(i)} \sum_{n=k(j-1)+1}^{k(j)} \left|x_{mn}\right|^{q_{mn}} (i.j)^{-q_{mn}} . M_{ij}^{-1}$$

$$= \sum_{m=l(i-1)+1}^{l(i)} \sum_{n=k(j-1)+1}^{k(j)} \left|x_{mn}\right|^{q_{mn}} (i.j)^{-q_{mn}+1} . M_{ij}^{-1} (i.j)^{-1}$$

$$= (i.j)^{-1} M_{ij}^{-1} \sum_{m=l(i-1)+1}^{l(i)} \sum_{n=k(j-1)+1}^{k(j)} |x_{mn}|^{q_{mn}} . (i.j)^{-q_{mn}/p_{mn}}$$

$$= (i.j)^{-1} M_{ij}^{-1} . M_{ij} \qquad \ldots (3,9)$$

olduğundan $\sum x_{mn} y_{mn}$ serisi ıraksaktır.Bu ise $x \notin [l^2(p)]^{\beta}$ olduğunu gösterir ki bu kabulümüzle çelişir.

(ii) $[l^2(p)]^{\alpha} \subset [l^2(p)]^{\beta}$ olduğundan (i)'den $[l^2(p)]^{\alpha} \subset M^2(p)$ 'dir. $M^2(p) \subset [l^2(p)]^{\alpha}$ olduğu da (i)'nin ispatından aşikardır.

(iii) (ii)'den $M^2(p) = [l^2(p)]^{\alpha} \subset [l^2(p)]^{\gamma}$ olduğu açıktır. $[l^2(p)]^{\gamma} \subset M^2(p)$ olduğunu göstermek için herhangi bir $x \in [l^2(p)]^{\gamma}$ alalım ve $x \notin M^2(p)$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde (3.7) sağlanacak şekilde kesin artan $(l(i))$ ve $(k(j))$ dizilerini bulabiliriz. Şimdi (3.8)'de tanımlanan $y \in l^2(p)$ dizisini alalım. $\sum 1/i.j$ olarak tanımlanan pozitif terimli seri ıraksak olduğundan kısmi toplamlar dizisi sınırlı değildir.
O halde her sabit $p,q \in N$ için (3.9)'dan

$$\sum_{m=1}^{l(p)} \sum_{n=1}^{k(q)} x_{mn} y_{mn} = \sum_{i,j=1}^{p,q} \frac{1}{i.j}$$

yazılabildiğinden $x \notin [l^2(p)]^{\gamma}$ dır. Bu ise kabulümüz ile çelişir.

TEOREM III.9 : Her $m,n \in N$ için $0 < \inf p_{mn} = p \le p_{mn} \le 1$ olsun.

(i) $[l^2(p)]^{\beta} = l^2_{\infty}(p)$

(ii) $[l^2(p)]^{\alpha} = l^2_{\infty}(p)$

(iii) $[l^2(p)]^{\gamma} = l^2_{\infty}(p)$

dir.

İSPAT: (i) Herhangi bir $x \in [l^2(p)]^{\beta}$ alalım ve $x \notin l^2_{\infty}(p)$ olduğunu kabul edelim.Bu takdirde her $i,j > 0$ doğal sayısı için $m(i) < m(i+1)$ ve $n(j) < n(j+1)$ olmak üzere

$$|x_{m(i),n(j)}|^{p_{m(i),n(j)}} > (i+j)^3 \qquad \ldots (3.10)$$

olacak şekilde $(m(i))$ ve $(n(j))$ dizilerini bulabiliriz. Şimdi genel terimi

$$y_{mn} = \begin{cases} (x_{m(i),n(j)})^{-1} , & m = m(i) \text{ ve } n = n(j) \text{ için} \\ 0 , & \text{diğer haller için} \end{cases} \qquad \ldots (3.11)$$

olan $y = (y_{mn})$ dizisini tanımlayalım (3.9)'u kullanarak

$$\sum |y_{mn}|^{p_{mn}} = \sum_{i,j} \left| \frac{1}{x_{m(i),n(j)}} \right|^{p_{m(i),n(j)}} < \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{1}{(i+j)^3} < \infty$$

elde ederiz ki $y \in l^2(p)$ olduğunu gösterir. Fakat

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} x_{mn} y_{mn} = \sum_{i,j} x_{m(i),n(j)} \frac{1}{x_{m(i),n(j)}} = \sum 1 = \infty$$

olduğundan $x \notin [l^2(p)]^{\beta}$ dır. Bu ise kabulümüzle çelişir.O halde $x \in l^2_{\infty}(p)$ dir.

Şimdi $l^2_{\infty}(p) \subset [l^2(p)]^{\beta}$ olduğunu gösterelim. Bunun için herhangi bir $x \in l^2_{\infty}(p)$ ve $y \in l^2(p)$ alalım. Böylece her $m,n \in \mathbf{N}$ için $|x_{mn}|^{p_{mn}} \leq K$ olacak şekilde bir $K \in \mathbf{R}$ vardır. Ayrıca $l^2(p)$ lineer olduğundan

$$\left(\frac{y_{mn}}{N}\right) \in l^2(p)$$

olup

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \left|\frac{y_{mn}}{N}\right|^{p_{mn}} \leq \frac{1}{N^p} \sum_{m,n=1}^{\infty} |y_{mn}|^{p_{mn}} \leq \frac{1}{K}$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbf{N} - \{1\}$ vardır.Bu ise her $m,n \in \mathbf{N}$ için

$$\left|\frac{y_{mn}}{N}\right|^{p_{mn}} \leq \frac{1}{K}$$

olmasını gerektirir.Bunları kullanarak her $m,n \in \mathbf{N}$ için

$$\left|x_{mn} \frac{y_{mn}}{N}\right|^{p_{mn}} \leq 1$$

elde ederiz.Buradan

$$\left|x_{mn} \frac{y_{mn}}{N}\right| \leq \left|x_{mn} \frac{y_{mn}}{N}\right|^{p_{mn}} \leq 1$$

eşitsizliğini ve böylece

$$\left|\frac{1}{N} \sum_{m,n} x_{mn} y_{mn}\right| \leq \frac{1}{N} \sum_{m,n} |x_{mn} y_{mn}| \leq \sum_{m,n} \left|x_{mn} \frac{y_{mn}}{N}\right|^{p_{mn}} < \infty$$

elde edilir. Yani $x \in [l^2(p)]^{\beta}$ dır.

(ii) $[l^2(p)]^{\alpha} \subset [l^2(p)]^{\beta}$ olduğundan (i) 'den $[l^2(p)]^{\alpha} \subset l^2_{\infty}(p)$ olduğu aşikardır.

$l^2_{\infty}(p) \subset [l^2(p)]^{\alpha}$ olduğu ise (i) 'nin ispatından aşikardır.

(iii) (ii) 'yi kullanarak $l^2_{\infty}(p) = [l^2(p)]^{\alpha} \subset [l^2(p)]^{\gamma}$ olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi $[l^2(p)]^{\gamma} \subset l^2_{\infty}(p)$ olduğunu gösterelim.Bunun için herhangi bir

$x \in [l^2(p)]^{\gamma}$ alalım ve $x \notin l^2_{\infty}(p)$ olduğunu kabul edelim.Bu takdirde her $i,j > 0$ için (3.10) sağlanacak şekilde kesin artan $(m(i))$ ve $(n(j))$ dizilerini bulabiliriz.Şimdi genel terimini (3.11) 'de tanımladığımız $y = (y_{mn}) \in l^2(p)$ dizisini alalım.Her sabit $p, q \in \mathbf{N}$ için

$$\sup_{p,q} \left|\sum_{m=1}^{m(p)} \sum_{n=1}^{n(q)} x_{mn} y_{mn}\right| = \sup_{p,q} \left|\sum_{i,j=1}^{p,q} 1\right| = \sup_{p,q} p \cdot q = \infty$$

elde ederiz. Bu ise $x \notin [l^2(p)]^{\gamma}$ olduğunu gösterir.Oysa bu kabulümüzle çelişir.

Şimdi tek indisli diziler ile çift indisli dizilerin mukayesesinde kolaylık olması amacıyla tek indisli dizi uzaylarının $\alpha-$, $\beta-$, $\gamma-$ duallerini verelim.

Her bir $p = (p_k)$ için

$l_{\infty}^{\alpha}(p) = M_{\infty}(p)$, $c_0^{\alpha}(p) = M_0(p)$, $c^{\alpha}(p) = c_0^{\alpha}(p) \cap l_1$ ve her $k \in \mathbf{N}$ için $p_k > 1$ olmak üzere $l^{\alpha}(p) = M(p)$, $0 < p_k \leq 1$ için $l^{\alpha}(p) = l_{\infty}(p)$ dir. (Çolak vd. 1992)

Her bir $p = (p_k)$ için

$l_{\infty}^{\beta}(p) = M_{\infty}(p)$, $c_0^{\beta}(p) = M_0(p)$, $c^{\beta}(p) = c_0^{\beta}(p) \cap \gamma$ burada $\gamma = \{(x_k) : |\sum x_k| < \infty\}$ ve her $k \in \mathbf{N}$ için $p_k > 1$ olmak üzere $l^{\beta}(p) = M(p)$, $0 < p_k \leq 1$ için $l^{\beta}(p) = (l_{\infty}(p))$ dir.(Lascarides , 1971).

Her $k \in \mathbf{N}$ için $p_k > 0$ ve $p = (p_k) \in m$ olmak üzere $l_{\infty}^{\gamma}(p) = M_{\infty}(p)$, $c_0^{\gamma}(p) = M_0(p)$, her $k \in \mathbf{N}$ için $p_k > 0$ ve $p \in m$ olmak üzere $l^{\gamma}(p) = M(p)$, her $k \in \mathbf{N}$ için $0 < p_k \leq 1$ için $l^{\gamma}(p) = l_{\infty}(p)$ ve her bir $p = (p_k)$ dizisi için

$$m_s = \left\{ a = (a_k) : \sup_n \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| < \infty \right\}$$

olmak üzere $c^{\gamma}(p) = c_0^{\gamma}(p) \cap m_s$ dir. [Çolak, 1992]

KAYNAKLAR :

APOSTOL , T. , (1978) . **Mathematical Analysis** .Addison-Wesley Publishing Company Inc.London.

BURKİLL and BURKİLL (1980). **A Second Course in Mathematical Analysis.** Cambridge University Press.London.

ÇOLAK , R., (1992) .**On Some Sequence Spaces and Their γ -Duals.**Jour.Inst. Maths.Comp.Sc.(Math.Ser.) Vol.5,No:1,105 - 108.

ÇOLAK , R., SRİVASTAVA , P.D. and NANDA , S. (1992) . **On Certain Sequence Spaces and Their Köthe - Toeplitz Duals.**Rendiconti di Matematica , Serie VII , Vol.12 , Roma.

GUPTA , M. and KAMTHAN, P. K . (1980). **Infinite Matrices and Tensorial Transformations.**Acta.Matematica Vietnamica,Tom 5 , No:1 33 - 42.

KREYSZIG , E. (1978).**Introductory Functional Analysis with Applications.**John Wiley and sons . Inc.

LASCARİDES , C.G.(1971).**Study of Certain Sequence Spaces of Maddox and a Generalization of a theorem of Iyer.**Pacific Journal of Mathematics,Vol,38, No:2 , 487 - 500.

____________ and MADDOX , I.J. (1970).**Matrix Transformations Between Some Classes of Sequences.**Proc.Camb.Phil.Soc.(68) 99 -104 .

MADDOX , I.J. (1969).**Some Proparties of Paranormed Sequences Spaces.** London J. Math. Soc.(2), 316 - 322.

__________ (1970).**Elements of Functional Analysis.**Cambridge Univ.Press. London.

MORİCZ ,F. ve RHOADES , B.E. (1988).**Almost Convergence of Double Sequences and Strong Regularity of Summability**

Matrices. Math.Proc.Camb.Phil.Soc.,(104), 283-293.

NANDA , S. (1986).**Two Applications of Functional Analysis I: Matrix Transformations and Sequence Spaces.**Queen's Papers in Pure and Appl.Math.Queen's Univ.Press.No:74.

PROTTER , M.H. ve MORREY , C.B. (1964).**Modern Matematical Analysis.** Addison - Wesley Publishing Company , Inc.London.

ROBİSON , G. M. (1926).**Divergent Double Sequences and Series.**Trans.Amer. Math.Soc. 28 , 50 -73.