QUASİ KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALARI

Çetin YILDIZ

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR

2011

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

QUASİ KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALARI

Çetin YILDIZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2011

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

Quasi Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler ve Uygulamaları

Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR danışmanlığında, Çetin YILDIZ tarafından hazırlanan bu çalışma 17/01/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği/oy çokluğu (…/…)** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR *İmza* :

Üye : Doç. Dr. Uğur S. KIRMACI *İmza* :

Üye : Doç. Dr. Halit ORHAN *İmza* :

(imza)
Yukarıdaki sonucu onaylıyorum
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

QUASİ KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALARI

Çetin YILDIZ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR

Bu tezde, quasi konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler incelenerek Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli yeni eşitsizliklere yer verilmiştir. Tezin ilk bölümünde Eşitsizliklerin tarihinden bahsedilmiş, ikinci bölümünde konvekslik ve quasi konvekslikle ilgili tanım, teorem ve örneklere yer verilmiş, üçüncü bölümünde literatürde bulunan quasi konvekslikle ilgili teoremler derlenmiş, dördüncü bölümünde ise elde edilen yeni Lemmalar kullanılarak quasi konveks fonksiyonlarla ilgili yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Son olarak beşinci bölümde ise elde edilen yeni eşitsizliklerle ilgili sonuçlar ve uygulamalar verilmiştir.

Bu tezin amacı, quasi konveks fonksiyonları detaylı olarak incelemek ve bu tip fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler elde edip bu eşitsizliklerin uygulamalarında yeni üst sınırlar bulmaktır.

2011, 75 sayfa

Anahtar Kelimeler: Eşitsizlikler, konveks fonksiyon, quasi konveks fonksiyon, Hermite-Hadamard Eşitsizliği, Ostrowski Eşitsizliği, Simpson Eşitsizliği.

ABSTRACT

Master Thesis

INEQUALITIES FOR QUASI CONVEX FUNCTIONS AND APPLICATIONS

Çetin YILDIZ

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR

In this thesis, Hermite-Hadamard, Ostrowski and Simpson typed new inequilities are included by investigating inequilities for quasi convex functions. In the first chapter of the thesis, the history of inequalities is mentioned, in the second chapter definition, theories and examples on convexity and quasi-convexity are given, in the third chapter the theories found in the literature on convexity are given and in the fourth chapter new inequalities on quasi convex functions are given by using newly obtained Lemmas. Lastly in the fifth chapter new results and applications related to newly obtained inequalities are given.

The aim of this thesis is to make a detailed investigation of quasi convex functions and to find new upper bounds in this type inequalities by obtaining new inequalities for this type of inequalities.

2011, 75 pages

Keywords: Inequalities, convex function, quasi convex function, Hermite-Hadamard Inequality, Ostrowski Inequality, Simpson Inequality.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim boyunca, benden bilgi ve deneyimlerini esirgemeyen, çalışmalarımın tamamlanabilmesi için her türlü şartı sağlayan ve bana her zaman her türlü desteği sunan çok değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR'e teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında değerli yardımları ile bana yardımcı olan arkadaşlarım Sayın Havva KAVURMACI, Sayın Merve AVCI, Sayın Öğr. Gör. Ahmet Ocak AKDEMİR ve Sayın Arş. Gör. Mustafa GÜRBÜZ'e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Eğitimim tüm süreçlerinde her türlü destekleriyle beni hiç yalnız bırakmayan aileme teşekkür ederim.

Çetin YILDIZ
Ocak 2011

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\leq$	Küçük veya Eşittir
$\geq$	Büyük veya Eşittir
$\subset$	Alt Küme
$\subseteq$	Alt Kümesi veya Eşit
$\supseteq$	Kapsar veya Eşit
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı Değildir
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	n −boyutlu Euclidean Uzay
I	$\mathbb{R}$'de Bir Aralık
I°	I'nın İçi
$L_1[a,b]$	$[a,b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
$L[a,b]$	$[a,b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
f'	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
f''	f Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi
max	Maksimum
min	Minimum
$sup\ A$	A' nın Supremumu

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Eşitsizlik teorisi, matematiğin hemen hemen tüm dallarında önemli rol oynamaktadır. Eşitsizlik teorisinin temeli 18. ve 19. yüzyıllarda K. F. Gauss (1777-1855), A. L. Cauchy (1789-1857) ve P. L. Chebyshev (1821-1894) gibi matematikçiler tarafından atıldı. Daha sonraki yıllarda eşitsizliklerin önemi gittikçe arttı ve eşitsizlik konuları, H. Poincare (1854-1912), A. M. Lyapunav (1857-1918), O. Hölder (1859-1937) ve J. Hadamard (1865-1963) gibi ünlü matematikçilerin dikkatini çekti. Bu alan matematiğin tüm branşlarında rol oynamasına rağmen, matematiğin bir branşı olarak gelişmesi 1934'de G. H. Hardy, J. E. Littlewood ve G.Polya tarafından "Inequalities" adlı çalışmayla gerçekleşmiştir. Diğer matematikçiler tarafından geliştirilen bu teorik temeller, birçok yeni eşitsizliklerin bulunmasına ve matematiğin matematiksel analiz, uygulamalı matematik, olasılık teorisi gibi değişik alanlarında ilginç uygulamalara zemin oluşturmuştur. Eşitsizliklerle ilgili detaylı çalışmalar; 1961'de E. F. Beckenbach ve R. Bellman'nın "Inequalities" kitabında, D. S. Mitrinović'in 1970, 1991ve 1992'de, Agarwal ve Pang'ın 1995'de yayınlanan "Analytic Inequalities" kitaplarında bulunmaktadır. Bu temel kaynakların yanı sıra Mitrinović *et al.* (1993) tarafından "Classical and New Inequalities in Analysis", Pachpatte (2005) tarafından "Mathematical Inequalities" ve son yıllarda da Sever S. Dragomir, V. Lakshmikantham, Ravi P. Agarwal gibi araştırmacılar tarafından eşitsizlikler konusunda pek çok kitap, makale ve monografi yazılmıştır.

Konveks fonksiyonların tarihi çok eskiye dayanmakla birlikte başlangıcı 19. yüzyılın sonları olarak gösterilmektedir. Bu tarihten sonra literatürde konveks fonksiyonları ima eden sonuçlara rastlanılmasına rağmen konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen tarafından çalışıldığı ve Jensen'ın bu öncü çalışmalarından itibaren konveks fonksiyonlar teorisinin hızlı bir gelişme gösterdiği kabul edilmektedir. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak (Convex Funtions: Inequalities) 1987 yılında J.Pečarić tarafından yazılmıştır. Ayrıca Roberts and Varberg (1973), Pečarić *et al*. (1992), Niculescu and Persson (2006) gibi pek çok matematikçi konveks fonksiyonlar üzerinde eşitsizliklerle ilgili çok sayıda çalışma yapmışlardır. Bu çalışmaların bir kısmını integral eşitsizlikleri oluşturmaktadır.

Bugün en önemli integral eşitsizliklerinden biri konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard (veya Hadamard) integral eşitsizliğidir. Hermite (1822-1901), Ekim 1881'de, Journal Mathesis dergisine ispatsız olarak yazdığı aşağıdaki ifadeyi bir mektup ile sundu. Bu mektup Mathesis 3 de (1883, p.82) aşağıdaki gibi basıldı.

"**Sur deux limites d'une integrale definie**. Soit $f(x)$ une Fonction qui varie toujours dans le même sens de $x = a$, $x = b$. On aura les relations

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \int_a^b f(x)dx < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

ou bien

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \int_a^b f(x)dx > (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

suivant que la courbe $y = f(x)$ tourne sa convexité ou sa concavite vers l'axe des abcisses."

Bu önemli eşitsizlikler, integraller için ortalama değer teoreminin fonksiyon ve görüntülerin ortalama değerlerine ilişkin bir eşitsizlik olup fonksiyonun konkav veya konvekslik durumuna göre değişir.

1953'de, Quasi konveks fonksiyonlar sınıfını oluşturan, isimlendiren ve geliştiren kişilerin başında W. Fenchel gelmektedir. Fenchel'in "Convexs Cones, Sets and Functions" adlı ders notları bu sınıfın ilk kaynaklarındandır.

Eşitsizlikler üzerine yapılan çalışmalar yeni eşitsizlikleri keşfetmek ve klasik yaklaşımları güçlendirmeye dayanmaktadır. Modern eşitsizlik teorisi matematiğin yüzyıllardır önemini yitirmeden derin temellere dayalı bir alanı olarak devam etmektedir. Eşitsizlik konuları sürekli çalışılan, hala araştırmalarda aktif rol oynayan ve büyüleyiciliği sonsuz olan bir branş olmaya devam ediyor.

Sunulan bu tezde Quasi konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli eşitsizlikler incelenmiştir. Bu çalışmanın ikinci bölümünde, konveks fonksiyonlarla ilgili temel tanım, teorem ve kavramlarla birlikte pozitif reel sayıların özel ortalamalarına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde de bazı önemli eşitsizlikler ve bunların ispatlarının yanı sıra Quasi konveks fonksiyonlarla ilgili literatürde bulunan bazı eşitsizlikler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Quasi konveks fonksiyonlar için yeni teoremler ve genelleştirmeler yazılmıştır. Quasi konveks fonksiyonlar için elde edilen yeni integral eşitsizliklerinin ispatında Hölder ve Power mean integral eşitsizlikleri kullanılmıştır.

Beşinci bölümde ise, çalışmamızda elde ettiğimiz bazı sonuçlar ve bu sonuçlarla ilgili özel uygulamalar verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Tanım 2.1.1. (Lineer Uzay): L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+: L \times L \to L$ ve $\cdot : F \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir:

A) $L, +$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

$G1$. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir,

$G2$. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir,

G3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır,

$G4$. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır,

$G5$. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

$L1$. $\alpha . x \in L$ dir,

$L2$. $\alpha .(x + y) = \alpha . x + \alpha . y$ dir,

$L3$. $(\alpha + \beta). x = \alpha . x + \beta . x$ dir,

$L4$. $(\alpha\beta). x = \alpha .(\beta . x)$ dir,

$L5$. $1. x = x$ dir (Burada 1, F nin birim elemanıdır).

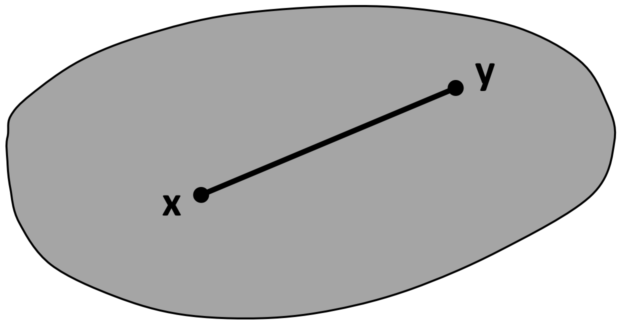
$F = \mathbb{R}$ ise L ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye kompleks lineer uzay adı verilir (Anton 1994).

Tanım 2.1.2. (Konveks Küme): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

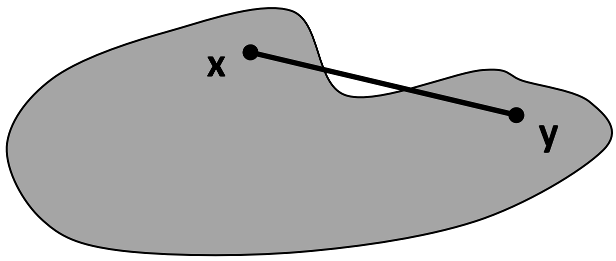
$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1 - \alpha) y, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1 - \alpha) y$ eşitliğindeki x ve y'nin katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1 - \alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayılarını alabiliriz.

Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümeye konveks küme denir.



Şekil 2.1. Konveks küme



Şekil 2.2. Konveks olmayan küme

Tanım 2.1.3. (Konveks Fonksiyon): I, $\mathbb{R}$ de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{2.1}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Niculescu and Persson 2006).

Eğer $t \in (0,1)$ aralığında alınırsa bu durumda

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$$

olur. Bu f fonksiyonuna da strictly konveks fonksiyon denir.

"$-f$" konveks (strictly konveks) ise o zaman f'ye konkav (strictly konkav) denir.

Tanım 2.1.4. Eğer f fonksiyonu hem konveks hem de konkav ise f'ye afindir(lineerdir) denir (Greenberg and Pierskalla 1971).

Teorem 2.1.1. (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi bir x, y reel sayıları için

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$
$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|,$$
$$\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|,$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović *et al*. 1993).

Teorem 2.1.2. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): f, $[a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \qquad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al*. 1993).

Örnek 2.1.1. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.

Çözüm: f'nin konveks olduğunu göstermek için $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

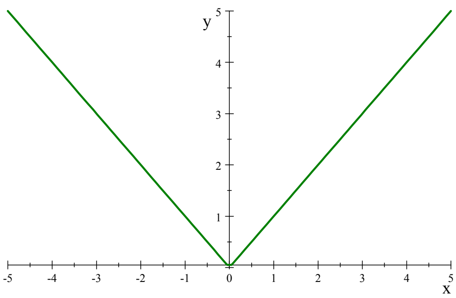
$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

olduğunu göstermeliyiz. Buna göre

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &= |tx + (1-t)y| \\ &\leq |tx| + |(1-t)y| \qquad \text{''üçgen eşitsizliğinden''} \\ &= t|x| + (1-t)|y| \\ &= tf(x) + (1-t)f(y) \end{aligned}$$

elde edilir. İlk ve son ifadeden f fonksiyonunun konveksliği ispatlanmış olur.

$f(x) = |x|$ mutlak değer fonksiyonu $x = 0$ da türeve sahip olmamasına rağmen konveks fonksiyondur.



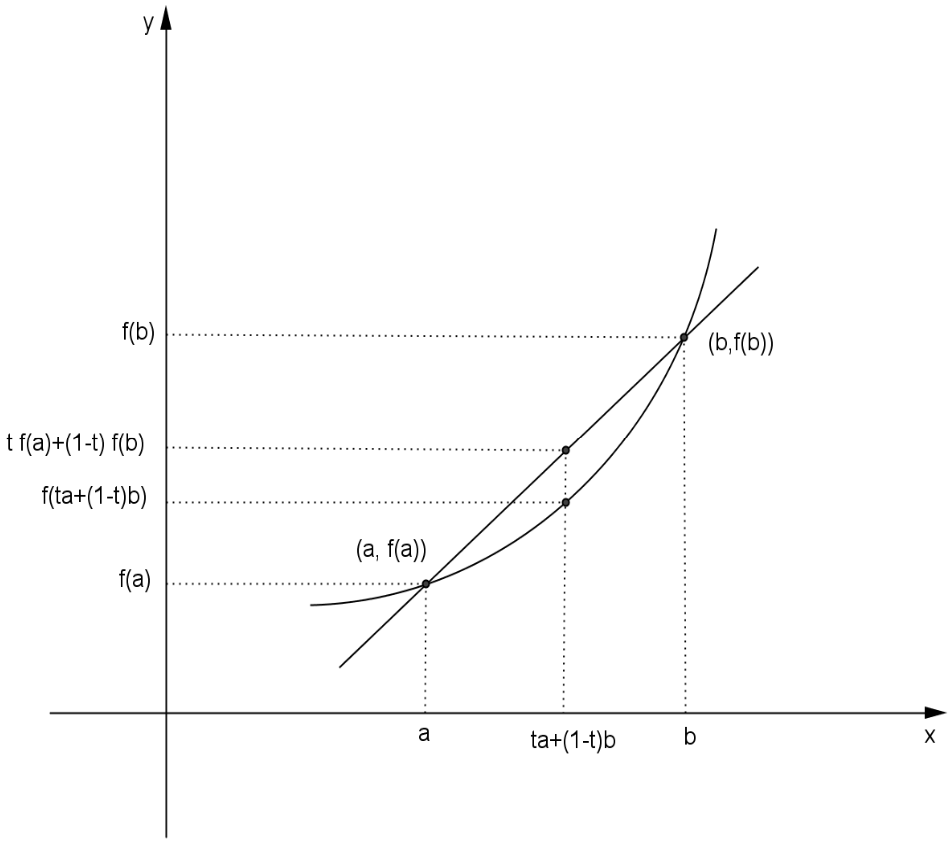
Şekil 2.3. Aralık üzerinde konveks fonksiyon

Sonuç 2.1.1. $x, y \in \mathbb{R}$ ve $p + q > 0$ olmak üzere

$$f\left(\frac{px + qy}{p + q}\right) \leq \frac{pf(x) + qf(y)}{p + q}$$

eşitsizliği (2.1) eşitsizliğine denktir (Mitrinović *et al.* 1993).

Konveks fonksiyonun geometrik anlamı aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.4. Konveks fonksiyon

Geometrik olarak $ta + (1-t)b$ noktasında; f'nin eğri üzerinde aldığı değer $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı değerden her zaman daha küçüktür, yani bu iki noktayı birleştiren kiriş (doğru parçası) her zaman eğrinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya üstündedir. Şekil 2.4. den de görüldüğü gibi $t \in [0,1]$ olduğundan $tf(a) \leq f(a)$ dir. Benzer şekilde $(1-t)f(b) \leq f(b)$ dir. Yani $tf(a)$, $f(a)$'nın $(1-t)f(b)$ de $f(b)$'nin altındadır. Dolayısıyla $tf(a) + (1-t)f(b)$, $f(a)$ ile $f(b)$ arasında olur. Konkav fonksiyon için kiriş f'nin grafiğinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya altındadır.

Teorem 2.1.3. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise

a. f, (a,b) aralığında süreklidir ve

b. f, $[a,b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia 1994).

Tanım 2.1.5. (J −Konveks Fonksiyon): I, ℝ'de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen konveks veya J −konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.6. (Kesin J − Konveks Fonksiyon): Her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde kesin J −konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Teorem 2.1.4. (Hölder Eşitsizliği): $a = (a_1, \ldots, a_n)$ ve $b = (b_1, \ldots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n −lisi olsun. Bu taktirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

(a) $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

(b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović 1970).

Teorem 2.1.5. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al*. 1993).

Benzer şekilde iki katlı integraller için Hölder eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\int_a^b \int_a^b |f(x)g(x)|\, dxdy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x)|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \int_a^b |g(x)|^q dx\, dy\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ayrıca Hölder Eşitsizliğinin bir sonucu olan Power Mean eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilir. Bu eşitsizlik kullanılarak daha iyi üst sınırlar bulunmaktadır.

Sonuç 2.1.2. (Power Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Benzer şekilde iki katlı integraller için Power Mean eşitsizliği

$$\int_a^b \int_a^b |f(x)g(x)|\, dxdy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x)| dxdy\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b \int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\, dy\right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.7. (Quasi Konveks Fonksiyon): $f: S \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $S \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı konveks küme olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq max\{f(x), f(y)\}$$

ise f'ye quasi konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Eğer

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < max\{f(x), f(y)\}$$

ise f'ye strictly quasi konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq max\{f(x), f(y)\}$$

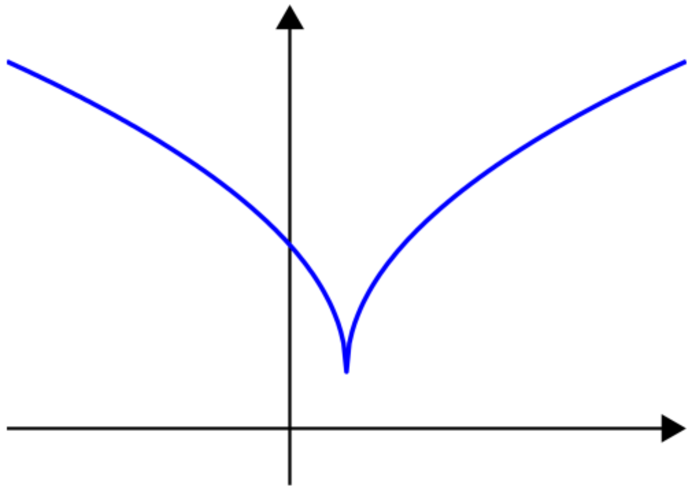
ise f'ye quasi konkav fonksiyon ve

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) > max\{f(x), f(y)\}$$

ise f'ye strictly quasi konkav fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

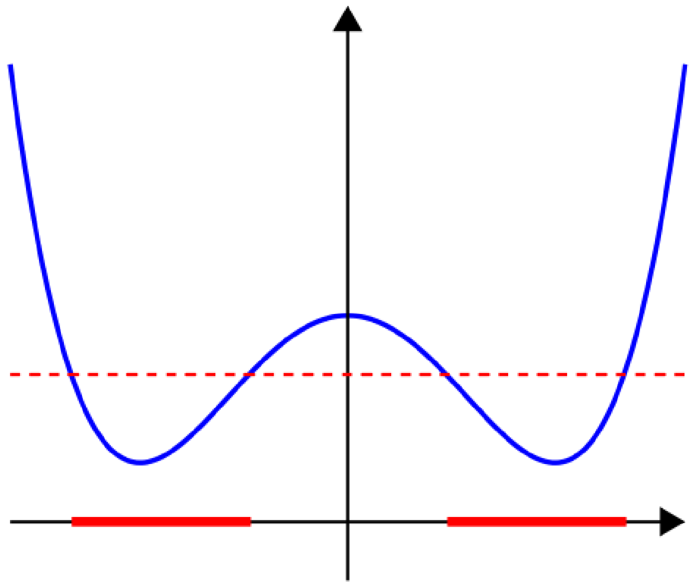
Tanım 2.1.8. f hem quasi konveks hem de quasi konkav ise f'ye quasi monotonik denir (Greenberg and Pierskalla 1971).

Not: Her konveks fonksiyon aynı zamanda quasi konvekstir. Fakat quasi konveks fonksiyon olup da konveks olmayan fonksiyonlarda vardır.



Şekil 2.5. Quasi konveks olup konveks olmayan fonksiyon

Aşağıdaki grafikte, kırmızı ile gösterilen aralıklarda fonksiyon quasi konvekstir. Ama eğrinin tamamını düşünülürse bu fonksiyon quasi konveks değildir.



Şekil 2.6. Aralıkta quasi konveks fonksiyon

2.2. İki Pozitif Sayı İçin Bazı Ortalamalar:

a, b pozitif iki reel sayı olmak üzere;

(1) Aritmetik ortalama:

$$A = A(a,b) := \frac{a+b}{2},$$

(2) Geometrik ortalama:

$$G = G(a,b) := \sqrt{ab},$$

(3) Harmonik ortalama:

$$H = H(a,b) := \frac{2ab}{a+b},$$

(4) Logaritmik ortalama:

$$L = L(a,b) := \begin{cases} a, & a = b \\ \dfrac{b-a}{lnb - lna}, & a \neq b \end{cases},$$

(5) İdentrik ortalama:

$$I = I(a,b) := \begin{cases} a, & a = b \\ \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}, & a \neq b \end{cases},$$

(6) $p -$ Logaritmik ortalama:

$$L_p = L_p(a,b) := \begin{cases} a, & a = b \\ \left[\dfrac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}}, & a \neq b \end{cases},$$

ortalamaları vardır.

Bu ortalamalar arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir:

$$H \leq G \leq L \leq I \leq A.$$

Son olarak, x, y pozitif sayılarının r. kuvvetlerinin genelleştirilmiş logaritmik ortalaması

$$L_r(x,y) = \begin{cases} \frac{r}{r+1} . \frac{x^{r+1} - y^{r+1}}{x^r - y^r}, & r \neq 0, -1, x \neq y \\ \frac{x-y}{lnx - lny}, & r = 0, x \neq y \\ xy\frac{lnx - lny}{x-y}, & r = -1, x \neq y \\ x, & x = y \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Konveks Fonksiyonlar İçin Temel Eşitsizlikler

Teorem 3.1.1. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): I, $\mathbb{R}$'de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.1.1}$$

eşitsizliği literatürde konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Pečarić *et al.* 1992).

İspat: Teorem 2.1.3'de f fonksiyonu, I üzerinde konveks olduğundan (a,b) aralığında sürekli ve $[a,b]$ aralığında sınırlıdır. Dolayısıyla f, [a,b] aralığında integrallenebilir. O halde $x = (ta + (1-t)b)$, $0 \leq t \leq 1$ için

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

yazabiliriz. Bu ifadenin her iki yanı $[0,1]$ üzerinden t ye göre integre edilirse,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f(ta+(1-t)b)dt &\leq \int_0^1 (tf(a) + (1-t)f(b))dt \\ &= f(a)\int_0^1 tdt + f(b)\int_0^1 (1-t)dt \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 (f(ta+(1-t)b)dt$$

olur ki bu (3.1.1) eşitsizliğinin sağ tarafıdır. Şimdi (3.1.1)'ın sol tarafının ispatını verelim.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

integralini

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\right] \qquad (3.1.2)$$

biçiminde yazıp, $x = a + t(b-a)/2$ değişken değiştirmesi ile ilk terim

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

biçiminde elde edilir.

Daha sonra $x = b - t(b-a)/2$ değişken değiştirmesi ile ikinci terim

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx = -\frac{b-a}{2}\int_1^0 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$
$$= \frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

biçiminde elde edilir.

(3.1.2) eşitliğinde bu sonuçlar yazılır ve konveksliğin tanımı uygulanırsa,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right) + f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)\right]dt$$
$$\geq \int_0^1 f\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)dt = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ∎

Teorem 3.1.2. (Ostrowski Eşitsizliği): $f: I \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $I^o(I'nın\ içi)$ üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$ ve $a, b \in I$ için $a < b$ olsun. Eğer $|f'(x)| \leq M$ ise

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{M}{b-a}\left[\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2}\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu eşitsizliğe Ostrowski Eşitsizliği denir (Ostrowski 1938).

İspat: Bu teoremi ispatlamak için aşağıdaki eşitlik kullanılacaktır. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda $x \in [a,b]$ için

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt + \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt$$

$$p(x,t) := \begin{cases} t-a, & a \leq t \leq x\ için \\ t-b, & x < t \leq b\ için \end{cases}$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikten

$$f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\int_a^x (t-a)f'(t)dt + \int_x^b (t-b)f'(t)dt\right]$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafı mutlak değer içine alınırsa

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| = \left| \frac{1}{b-a}\left[\int_a^x (t-a)f'(t)dt + \int_x^b (t-b)f'(t)dt\right] \right|$$

olur. İntegralin mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{1}{b-a}\left[\int_a^x |t-a||f'(t)|dt + \int_x^b |t-b||f'(t)|dt\right]$$

yazılır. $|f'(x)| \leq M$ olduğundan

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{M}{b-a}\left[\int_a^x (t-a)dt + \int_x^b (b-t)dt\right]$$

$$= \frac{M}{b-a}\left[\left(\frac{t^2}{2}-ta\right)\Big|_a^x + \left(tb-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_x^b\right]$$

$$= \frac{M}{b-a}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2}\right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur (Dragomir and Sofo 2002). ■

Teorem 3.1.3. (Simpson Eşitsizliği): $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) üzerinde dördüncü mertebeden türevi sürekli olan bir fonksiyon ve $\left\|f^{(4)}\right\|_\infty = sup_{x\in(a,b)}\left|f^{(4)}(x)\right| < \infty$ olsun. Bu durumda

$$\left|\frac{1}{3}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{1}{2880}\left\|f^{(4)}\right\|_\infty (b-a)^4$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik literatürde Simpson Eşitsizliği olarak bilinmektedir (Dragomir *et al.* 2000a).

İspat: Bu teoremi ispatlamak için aşağıdaki eşitlik kullanılacaktır. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) üzerinde dördüncü mertebeden türevi sürekli olan bir fonksiyon ve $\left\|f^{(4)}\right\|_\infty = sup_{x\in(a,b)}\left|f^{(4)}(x)\right| < \infty$ olmak üzere

$$\int_a^b S(x)f^{(4)}(x)dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{1}{24}(x-a)^3\left(x-\frac{a+2b}{3}\right)f^{(4)}(x)dx$$
$$+\int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{1}{24}(x-b)^3\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)f^{(4)}(x)dx \tag{3.1.3}$$

yazılır. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınıp üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\int_a^b S(x)f^{(4)}(x)dx\right| = \left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{1}{24}(x-a)^3\left(x-\frac{a+2b}{3}\right)f^{(4)}(x)dx\right.$$

$$\left. + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{1}{24}(x-b)^3\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)f^{(4)}(x)dx\right|$$

$$\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{1}{24}|x-a|^3\left|x-\frac{a+2b}{3}\right|\left|f^{(4)}(x)\right|dx$$

$$+ \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{1}{24}|x-b|^3\left|x-\frac{2a+b}{3}\right|\left|f^{(4)}(x)\right|dx$$

$$\leq \frac{\|f^4\|_\infty}{24}\left\{\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^3\left(-x+\frac{a+2b}{3}\right)dx\right.$$

$$\left. + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)^3\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)dx\right\}$$

$$= \frac{\|f^4\|_\infty}{2880}(b-a)^5$$

olur. İlk ve son terimlerden

$$\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{1}{24}(x-a)^3\left(x-\frac{a+2b}{3}\right)f^{(4)}(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{1}{24}(x-b)^3\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)f^{(4)}(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{\|f^4\|_\infty}{2880}(b-a)^5 \qquad (3.1.4)$$

elde edilir. Son bulunan ifade Simpson Eşitsizliğinin sağ tarafıdır.

Şimdi (3.1.3) eşitliğine adım adım kısmi integrasyon metodu uygulanırsa

$$\left|\int_a^b S(x) f^{(4)}(x)dx\right|$$

$$= \left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{1}{24}(x-a)^3\left(x-\frac{a+2b}{3}\right)f^{(4)}(x)dx\right.$$

$$\left. + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{1}{24}(x-b)^3\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)f^{(4)}(x)dx\right|$$

$$= \left|-\frac{2}{3}(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{6}(b-a)[f(a)+f(b)]+\int_a^b f(x)dx\right| \qquad (3.1.5)$$

elde edilir. (3.1.3) eşitliğinde (3.1.4) ve (3.1.5) ifadeleri kullanılırsa

$$\left|-\frac{2}{3}(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{6}(b-a)[f(a)+f(b)]+\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$= \left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{1}{24}(x-a)^3\left(x-\frac{a+2b}{3}\right)f^{(4)}(x)dx\right.$$

$$\left. + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{1}{24}(x-b)^3\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)f^{(4)}(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{\|f^4\|_\infty}{2880}(b-a)^5$$

yazılır. Buradan

$$\left|-\frac{2}{3}(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{6}(b-a)[f(a)+f(b)]+\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{\|f^4\|_\infty}{2880}(b-a)^5$$

olur. Her iki taraf $(b-a)$'ya bölünürse

$$\left|\frac{1}{3}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{1}{2880}\left\|f^{(4)}\right\|_\infty (b-a)^4$$

eşitsizliği elde edilir. ■

3.2. Quasi Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilmiş Sonuçlar

Tanım 3.2.1. $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x, y \in I$ olsun. Eğer

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq max\{f(x), f(y)\}$$

eşitsizliği varsa f fonksiyonuna Jensen veya J-quasi konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 3.2.2. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\frac{1}{2}[f(tx + (1-t)y) + f((1-t)x + ty)] \leq max\{f(x), f(y)\}$$

eşitsizliğine Wright-quasi konveks denir (Dragomir and Pearce 1998).

Yukarıdaki tanımlardan yararlanarak aşağıdaki teoremler gösterilmiştir.

Teorem 3.2.1. $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde W-quasi konveks bir fonksiyon olsun. Kabul edelim ki $a, b \in I \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$ ve $f \in L_1[a, b]$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq max\{f(a), f(b)\}$$

eşitsizliği elde edilir (Dragomir and Pearce 1998).

Teorem 3.2.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde $WQC(I)$ Wright-quasi konveks, $JQC(I)$ ile J-quasi konveks ve $QC(I)$ ile de Quasi konveks fonksiyonlar sınıfını gösterirsek

$$QC(I) \subset WQC(I) \subset JQC(I)$$

olur (Dragomir and Pearce 1998).

Teorem 3.2.3. $I \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde $C(I)$ ile Konveks fonksiyonlar sınıfı ve $J(I)$ ile de Jensen konveks fonksiyonlar sınıfı gösterildiğine göre

$$W(I) \subset WQC(I), C(I) \subset QC(I), J(I) \subset JQC(I)$$

elde edilir (Dragomir and Pearce 1998).

Lemma 3.2.1. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere, $f: I^{\circ} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt$$

eşitliği sağlanır (Dragomir and Agarwal 1998).

Ion, yukarıdaki Lemma'yı kullanarak aşağıdaki iki teoremi elde etmiştir.

Teorem 3.2.4. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere, $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde quasi konveks ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{b-a}{4} max\{|f'(a)|, |f'(b)|\} \tag{3.2.1}$$

eşitsizliği elde edilir (Ion 2007).

Teorem 3.2.5. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere, $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $p > 1$ için $|f'|^{p/(p-1)}$, $[a, b]$ üzerinde quasi konveks ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{2(p+1)^{1/p}}\left[max\left\{|f'(a)|^{p/(p-1)},|f'(b)|^{p/(p-1)}\right\}\right]^{(p-1)/p} \tag{3.2.2}$$

eşitsizliği elde edilir (Ion 2007).

Lemma 3.2.1'i kullanarak Alomari *et al.* aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 3.2.6. $f: I^\circ \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a,b \in I^\circ$, $a<b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde quasi konveks ve $q \geq 1$ ise bu durumda

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{b-a}{4}\left(max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}\right)^{1/q} \tag{3.2.3}$$

dır (Alomari *et al.* 2009).

Lemma 3.2.2. $f: I^\circ \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a,b \in I^\circ$, $a<b$ olsun. Eğer $f' \in L[a,b]$ ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\int_0^1 K(t)f'(ta+(1-t)b)dt$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$K(t)=\begin{cases} t, & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right] \\ t-1, & t\in\left(\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$$

dır (Kırmacı 2004).

Alomari *et al.* yukarıdaki Lemma'yı kullanarak 2009 da yeni teoremler ispatlamışlar ve bu teoremlerde Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı için yeni üst sınırlar elde etmişlerdir. Bulunan eşitsizlikler aşağıdaki teoremlerle verilmiştir.

Teorem 3.2.7. $f: I^\circ \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde quasi konveks ise

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \\ \leq \frac{b-a}{8}\left[max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|, |f'(b)|\right\} + max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|, |f'(a)|\right\}\right] \tag{3.2.4}$$

eşitsizliği bulunur (Alomari *et al.* 2009).

Teorem 3.2.8. $f: I^\circ \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^{p/(p-1)}$, $[a, b]$ üzerinde quasi konveks ve $p > 1$ ise

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \\ \leq \frac{b-a}{4(p+1)^{1/p}}\left[\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{p/(p-1)}, |f'(b)|^{p/(p-1)}\right\}\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ + \left(max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{p/(p-1)}, |f'(a)|^{p/(p-1)}\right\}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right] \tag{3.2.5}$$

eşitsizliği elde edilir (Alomari *et al.* 2009).

Teorem 3.2.9. $f: I^\circ \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde quasi konveks ve $q \geq 1$ ise bu durumda

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \tag{3.2.6}$$

$$\leq \frac{b-a}{8}\left[\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q, |f'(b)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q, |f'(a)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

elde edilir (Alomari *et al.* 2009).

Lemma 3.2.3. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I°$ üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I°$, $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$= \frac{b-a}{4}\left[\int_0^1 (-t)f'\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right)dt + \int_0^1 tf'\left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a\right)dt\right]$$

(Alomari *et al.* 2010a).

Yukarıdaki Lemma kullanılarak aşağıdaki teoremler elde edilmiştir.

Teorem 3.2.10. $f: I \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $I°$ üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I$, $a < b$ olsun. $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde quasi konveks ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{8}\left[max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|, |f'(a)|\right\} + max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|, |f'(b)|\right\}\right] \tag{3.2.7}$$

elde edilir (Alomari *et al.* 2010a).

Teorem 3.2.11. $f: I \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $I°$ üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I$, $a < b$ olsun. $|f'|^{p/(p-1)}$, $[a, b]$ üzerinde quasi konveks ve $p > 1$ ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{4(p+1)^{1/p}}\left[\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{p/(p-1)}, |f'(a)|^{p/(p-1)}\right\}\right)^{(p-1)/p}\right.$$
$$\left.+\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{p/(p-1)}, |f'(b)|^{p/(p-1)}\right\}\right)^{(p-1)/p}\right] \tag{3.2.8}$$

elde edilir (Alomari *et al.* 2010a).

Teorem 3.2.12. $f: I° \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I°$ üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I°$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde quasi konveks ve $q \geq 1$ ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{8}\left[\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}, |f'(a)|^{q}\right\}\right)^{1/q}\right.$$
$$\left.+\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}, |f'(b)|^{q}\right\}\right)^{1/q}\right] \tag{3.2.9}$$

eşitsizliği elde edilir (Alomari *et al.* 2010a).

Alomari *et al.* aşağıdaki Lemma'yı kullanarak ikinci mertebeden türevinin mutlak değeri quasi konveks olan fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler elde etmişlerdir. Bulunan bu sonuçlar Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı için yeni üst sınırlardır.

Lemma 3.2.4. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I°$ üzerinde ikinci mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun. f'', $[a, b]$ üzerinde integrallenebiliyorsa

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)f''(ta+(1-t)b)\,dt$$

eşitliği yazılır (Alomari *et al.* 2010b).

Teorem 3.2.13. $a,b\in I$ ve $a<b$ olmak üzere $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I° üzerinde ikinci mertebeden türevi olan bir fonksiyon ve f'', $[a,b]$ üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $|f''|$, $[a,b]$ üzerinde quasi *i* konveks ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{(b-a)^2}{12}max\{|f''(a)|,|f''(b)|\} \tag{3.2.10}$$

elde edilir (Alomari *et al.* 2010b).

Tanım 3.2.3. Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{x-1}dt,\quad x>0$$

şeklinde tanımlanır (Dragomir *et al.* 2000b).

Teorem 3.2.14. $a,b\in I$ ve $a<b$ olmak üzere $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I° üzerinde ikinci mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun. Eğer $p>1$ için $|f''|^{p/(p-1)}$, $[a,b]$ üzerinde quasi konveks ve $q=p/(p-1)$ ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^2}{8}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)}\right)^{\frac{1}{p}}(max\{|f''(a)|^q,|f''(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \tag{3.2.11}$$

eşitsizliği elde edilir (Alomari *et al.* 2010b).

Teorem 3.2.15. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde ikinci mertebeden türevi olan bir fonksiyon ve f'', $[a, b]$ üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $q \geq 1$ için $|f''|^q$, $[a, b]$ üzerinde quasi konveks ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)^2}{12}\left(max\{|f''(a)|^q, |f''(b)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}} \quad (3.2.12)$$

elde edilir (Alomari *et al.* 2010b).

Lemma 3.2.5. $a, b \in I^{\circ}$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I^{\circ} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde ikinci mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun. Eğer $f'' \in L_1[a, b]$ ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 m(t)[f''(ta+(1-t)b) + f''(tb+(1-t)a)]dt$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$m(t) := \begin{cases} t^2 & , \quad t \in [0, \frac{1}{2}) \\ (1-t)^2, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

dir (Sarıkaya *et al.* 2010).

Sarıkaya *et al.* yukarıdaki Lemma'yı kullanarak, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı için yeni üst sınırlar bulmuştur. Bu üst sınırlar literatürde bulunan en iyi üst sınırlardır. Bu eşitsizlikler ikinci mertebeden türevi olan fonksiyonlar için elde edilmiş sonuçlardır.

Bu Lemma kullanılarak aşağıdaki eşitsizlikler elde edilmiştir.

Teorem 3.2.16. $f: I^{\circ} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde ikinci mertebeden türevi olan bir fonksiyon ve $a, b \in I$, $a < b$, $f'' \in L_1[a, b]$ olsun. Eğer $|f''|$, $[a, b]$ üzerinde quasi konveks ise

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{(b-a)^2}{24} max\{|f''(a)|, |f''(b)|\} \tag{3.2.13}$$

elde edilir (Sarıkaya *et al.* 2010).

Teorem 3.2.17. $f: I^{\circ} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde ikinci mertebeden türevi olan bir fonksiyon ve $a, b \in I$, $a < b$, $f'' \in L_1[a, b]$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $[a, b]$ üzerinde quasi konveks, $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^2}{8(2p+1)^{\frac{1}{p}}} (max\{|f''(a)|^q, |f''(b)|^q\})^{1/q} \tag{3.2.14}$$

eşitsizliği bulunur (Sarıkaya *et al.* 2010).

Teorem 3.2.18. $f: I^{\circ} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde ikinci mertebeden türevi olan bir fonksiyon ve $a, b \in I$, $a < b$, $f'' \in L_1[a, b]$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $[a, b]$ üzerinde quasi konveks ve $q \geq 1$ ise

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{(b-a)^2}{24} max\{|f''(a)|^q, |f''(b)|^q\}^{1/q} \tag{3.2.15}$$

eşitsizliği elde edilir (Sarıkaya *et al.* 2010).

Lemma 3.2.6. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^{\circ}$ve $a < b$ olsun. $f' \in L[a, b]$ ise

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$=\frac{b-a}{2}\int_0^1\int_0^1 [f'(ta+(1-t)b)-f'(sa+(1-s)b)](s-t)dtds$$

dir (Sarıkaya *et al*. 2009).

Teorem 3.2.19. $a,b\in I^{\circ}$, $a<b$ ve $f: I^{\circ}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde quasi konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq (b-a)\left(\frac{2}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}[max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}]^{1/q} \qquad (3.2.16)$$

dır (Set 2010).

Teorem 3.2.20. $a,b\in I^{\circ}$, $a<b$ ve $f: I^{\circ}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $q\geq 1$ ve $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde quasi konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{(b-a)}{3}(max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \qquad (3.2.17)$$

dır (Set 2010).

Tanım 3.2.4. $a,b\in\mathbb{R}$ olmak üzere maksimum ifadesi

$$max\{a,b\}=\frac{a+b+|a-b|}{2}$$

şeklinde tanımlanır.

Aşağıda gösterilmiş olan teoremler maksimum ifadesinin yukarıdaki tanımı kullanılarak elde edilmiştir.

Teorem 3.2.21. $f \in QC(I) \cap L_1[a,b]$ olsun. $s: [a,b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilen ve $\frac{a+b}{2}$ de simetrik bir fonksiyon olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b s(x)dx \leq \int_a^b f(x)s(x)dx + I_1(a,b) \tag{3.2.18}$$

olur.

Burada

$$I_1(a,b) = \frac{1}{2}\int_a^b |f(x) - f(a+b-x)|s(x)dx$$

dır (Tseng *et al.* 2003).

Teorem 3.2.22. $f \in JQC(I) \cap L_1[a,b]$ olmak üzere (3.2.18) eşitsizliği elde edilir (Tseng *et al.* 2003).

Teorem 3.2.23. $f \in QC(I) \cap L_1[a,b]$ ve $p(x) = p\left(\frac{b-a}{2} + x\right)$ ile $p: [a,b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilen bir fonksiyon olsun. O halde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b p(x)dx \leq \int_a^b f(x)p(x)dx + I_2(a,b) \tag{3.2.19}$$

olur. Burada

$$I_2(a,b) = \frac{1}{2}\int_a^b \left|f\left(\frac{x+a}{2}\right) - f\left(\frac{x+b}{2}\right)\right| p\left(\frac{x+a}{2}\right)dx$$

dir (Tseng *et al.* 2003).

Teorem 3.2.24. $f \in WQC(I) \cap L_1[a,b]$ olsun. $s:[a,b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilen ve $\frac{a+b}{2}$ de simetrik bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_a^b f(x)s(x)dx \leq max\{f(a),f(b)\} \int_a^b s(x)dx \tag{3.2.20}$$

eşitsizliği elde edilir (Tseng *et al.* 2003).

Set *et al.* tarafından aşağıdaki Lemma kullanılarak quasi konveks fonksiyonlar için Simpson tipli yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

Lemma 3.2.7. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, I° üzerinde düzgün sürekli bir fonksiyon ve $a,b \in I$, $a < b$ olsun. O halde

$$\frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$= (b-a)\int_0^1 p(t)f'(tb + (1-t)a)dt$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$p(t) = \begin{cases} t - \frac{1}{6}, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ t - \frac{5}{6}, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

dır (Set *et al.* 2010).

Teorem 3.2.25. $f' \in L[a,b]$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a,b \in I$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde quasi konveks ise

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{5(b-a)}{36} max\{|f'(a)|,|f'(b)|\} \tag{3.2.21}$$

eşitsizliği elde edilir (Set *et al.* 2010).

Teorem 3.2.26. $f' \in L[a,b]$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a,b \in I$, $a < b$ olsun. $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde quasi konveks, $q > 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{6}\left(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} (max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \tag{3.2.22}$$

eşitsizliği elde edilir (Set *et al.* 2010).

Teorem 3.2.27. $f' \in L[a,b]$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a,b \in I$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde quasi konveks ve $q \geq 1$ ise

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{5(b-a)}{36} (max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \tag{3.2.23}$$

eşitsizliği elde edilir (Set *et al.* 2010).

Lemma 3.2.8. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde düzgün sürekli bir fonksiyon ve $a,b \in I$, $a < b$ olsun. $f'' \in L[a,b]$ olmak üzere

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$
$$= (b-a)^2 \int_0^1 p(t)f''(tb + (1-t)a)dt$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}t(3t-1), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1}{6}(t-1)(3t-2), & t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

dir (Alomari and Darus 2010a).

Alomari and Darus yukarıdaki Lemma'yı kullanarak quasi konveks fonksiyonlar için Simpson tipli eşitsizlikler elde etmiştir.

Teorem 3.2.28. $f: I \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $I°$ üzerinde düzgün sürekli bir fonksiyon ve $a, b \in I$, $a < b$, $f'' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f''|$, [a,b] üzerinde quasi konveks ise

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^2}{162}\left[max\left\{|f''(a)|, \left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right\} + max\left\{\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|, |f''(b)|\right\}\right] \tag{3.2.24}$$

elde edilir (Alomari and Darus 2010a).

Tanım 3.2.5. Beta fonksiyonu

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \qquad x, y > 0$$

şeklindedir. Bu eşitlik Euler tipi Beta integral fonksiyonu yada birinci çeşit Euler integrali olarak adlandırılır (Dragomir *et al.* 2000b).

Teorem 3.2.29. $f: I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$, I° üzerinde düzgün sürekli bir fonksiyon ve $a, b \in I$, $a < b$, $f'' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f''|^{p/(p-1)}$, [a,b] üzerinde quasi konveks ve $p > 1$ ise

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{6}\left(3^{-p-1}\beta(p+1,p+1) + \frac{4(3)^{-p} + 3(2)^{-p}(p-1)}{12(2+3p+p^2)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left[\left(max\left\{|f''(a)|^{p/(p-1)}, \left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{p/(p-1)}\right\}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right. \tag{3.2.25}$$

$$\left.+\left(max\left\{\left|f''\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\right|^{p/(p-1)}, |f''(b)|^{p/(p-1)}\right\}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

elde edilir (Alomari and Darus 2010a).

Teorem 3.2.30. $f: I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$, I° üzerinde düzgün sürekli bir fonksiyon ve $a, b \in I$, $a < b$, $f'' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $[a,b]$ üzerinde quasi konveks ve $q \geq 1$ olmak üzere

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{162}\left[\left(max\left\{|f''(a)|^q, \left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \tag{3.2.26}$$

$$\left.+\left(max\left\{\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q, |f''(b)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

elde edilir (Alomari and Darus 2010a).

Aşağıdaki Lemma Ostrowski tipli eşitsizlikler için birçok teoremde kullanılmıştır. Bu çalışmada quasi konveks fonksiyonlar için elde edilmiş sonuçlar verilmiştir.

Lemma 3.2.9. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L[a,b]$ ve $t \in [a,b]$ ise

$$f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du = (b-a)\int_0^1 p(t)f'(ta+(1-t)b)dt$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$p(t) = \begin{cases} t, & t \in \left[0, \frac{b-x}{b-a}\right] \\ t-1, & t \in \left(\frac{b-x}{b-a}, 1\right] \end{cases}$$

dır (Alomari and Darus 2010b).

Teorem 3.2.31. $f: I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I$, $a < b$, $f' \in L[a,b]$ olsun. $x \in [a,b]$ ve $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde quasi konveks ise

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\ \leq \frac{(b-x)^2}{2(b-a)} max\{|f'(x)|, |f'(b)|\} + \frac{(x-a)^2}{2(b-a)} max\{|f'(x)|, |f'(a)|\} \tag{3.2.27}$$

elde edilir (Alomari and Darus 2010b).

Teorem 3.2.32. $f: I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I$, $a < b$, $f' \in L[a,b]$ olsun. $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde quasi konveks, $x \in [a,b]$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq\left(\frac{(b-x)^{p+1}}{(b-a)(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}[max\{|f'(x)|^q,|f'(b)|^q\}]^{\frac{1}{q}} \tag{3.2.28}$$

$$+\left(\frac{(x-a)^{p+1}}{(b-a)(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}[max\{|f'(x)|^q,|f'(a)|^q\}]^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir (Alomari and Darus 2010b).

Teorem 3.2.33. $f: I\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a,b\in I$, $a<b$, $f'\in L[a,b]$ olsun. $q\geq 1$ olmak üzere eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde quasi konveks ise

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \tag{3.2.29}$$

$$\leq\frac{(b-x)^2}{2(b-a)}(max\{|f'(x)|^q,|f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}}+\frac{(x-a)^2}{2(b-a)}(max\{|f'(x)|^q,|f'(a)|^q\})^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir (Alomari and Darus 2010b).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde araştırma sonucunda elde edilmiş olan yeni Lemmalar'dan faydalanarak quasi konveks fonksiyonlar için genelleştirmeler yapılmıştır. Elde edilen bu sonuçlar Quasi konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli eşitsizliklerle ilişkilidir.

Lemma 4.1. $a,b \in I$, $a < b$ ve $x \in [a,b]$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L[a,b]$ ise

$$\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du$$

$$= \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 (t-1)f'(tx+(1-t)a)dt + \frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)f'(tx+(1-t)b)dt$$

eşitliği elde edilir (Kavurmacı *et al.* 2010).

İspat: Bu Lemma'yı ispatlamak için ilk önce

$$I = \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 (t-1)f'(tx+(1-t)a)dt + \frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)f'(tx+(1-t)b)dt$$

olsun. Kısmi integrasyon metodu kullanarak

$$I = \frac{(x-a)^2}{b-a}\left[(t-1)\frac{f(tx+(1-t)a)}{x-a}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{f(tx+(1-t)a)}{x-a}dt\right]$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left[(1-t)\frac{f(tx+(1-t)b)}{x-b}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{f(tx+(1-t)b)}{x-b}dt\right]$$

$$= \frac{(x-a)^2}{b-a}\left[\frac{f(a)}{x-a} - \frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(u)du\right]$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left[-\frac{f(b)}{x-b} + \frac{1}{(x-b)^2}\int_b^x f(u)du\right]$$

$$= \frac{(b-x)f(b) + (x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.1. $a, b \in I$, $a < b$ ve $x \in [a, b]$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ de quasi konveks ise

$$\left|\frac{(b-x)f(b) + (x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$
$$\leq \frac{(x-a)^2}{2(b-a)} max\{|f'(x)|, |f'(a)|\} + \frac{(b-x)^2}{2(b-a)} max\{|f'(x)|, |f'(b)|\} \tag{4.1}$$

eşitsizliği elde edilir (Yıldız *et al.* 2010).

İspat: Lemma 4.1'den ve integraller için mutlak değer eşitsizliğinden

$$\left|\frac{(b-x)f(b) + (x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{(b-a)}\int_0^1 (1-t)|f'(tx + (1-t)a)|dt$$

$$+\frac{(b-x)^2}{(b-a)}\int_0^1 (1-t)|f'(tx + (1-t)b)|dt$$

yazılır. $|f'|$ quasi konveks olduğundan

$$\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{(b-a)}\int_0^1 (1-t)max\{|f'(x)|,|f'(a)|\}dt$$

$$+\frac{(b-x)^2}{(b-a)}\int_0^1 (1-t)max\{|f'(x)|,|f'(b)|\}dt$$

$$=\frac{(x-a)^2}{2(b-a)}max\{|f'(x)|,|f'(a)|\}+\frac{(b-x)^2}{2(b-a)}max\{|f'(x)|,|f'(b)|\}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.2. $a, b \in I$, $a < b$ ve $x \in [a, b]$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $p > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $|f'|^{p/(p-1)}$, $[a, b]$ üzerinde quasi konveks ise

$$\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(max\left\{|f(x)|^{p/(p-1)},|f(a)|^{p/(p-1)}\right\}\right)^{\frac{p-1}{p}} \tag{4.2}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(max\left\{|f(x)|^{p/(p-1)},|f(b)|^{p/(p-1)}\right\}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

elde edilir (Yıldız *et al.* 2010).

İspat: Lemma 4.1 ve mutlak değerin özelliği kullanılarak,

$$\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{(b-a)}\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)a)|dt$$

$$+\frac{(b-x\,)^2}{(b-a)}\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)b)|dt$$

olur. İntegraller için Hölder Eşitsizliği ve $|f'|^{p/(p-1)}$'in quasi konveks olduğu kullanılarak

$$\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{(b-a)}\left(\int_0^1 (1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$+\frac{(b-x\,)^2}{(b-a)}\left(\int_0^1 (1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(tx+(1-t)b)|^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{(b-a)}\left(\int_0^1 (1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 max\left\{|f\,(x)|^{\frac{p}{p-1}},|f\,(a)|^{\frac{p}{p-1}}\right\}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$+\frac{(b-x\,)^2}{(b-a)}\left(\int_0^1 (1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 max\left\{|f\,(x)|^{\frac{p}{p-1}},|f\,(b)|^{\frac{p}{p-1}}\right\}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$= \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(max\left\{|f(x)|^{\frac{p}{p-1}},|f(a)|^{\frac{p}{p-1}}\right\}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(max\left\{|f(x)|^{\frac{p}{p-1}},|f(b)|^{\frac{p}{p-1}}\right\}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.3. $a,b \in I$, $a < b$ ve $x \in [a,b]$ olmak üzere $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ de quasi konveks ve $q \geq 1$ ise

$$\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \tag{4.3}$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{2(b-a)}(max\{|f(x)|^q,|f(a)|^q\})^{\frac{1}{q}}+\frac{(b-x)^2}{2(b-a)}(max\{|f(x)|^q,|f(b)|^q\})^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir (Yıldız *et al.* 2010).

İspat: Lemma 4.1 ve integraller için Power Mean Eşitsizliği kullanılarak

$$\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{(b-a)}\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)a)|dt$$

$$+\frac{(b-x\,)^2}{(b-a)}\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)b)|dt$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{(b-a)}\left(\int_0^1 (1-t)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{(b-a)}\left(\int_0^1 (1-t)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

bulunur. $|f'|^q$ quasi konveks olduğundan

$$\int_0^1 (1-t)\left|f'(tx+(1-t)a)\right|^q dt \leq \frac{1}{2} max\{\left|f'(x)\right|^q, \left|f'(a)\right|^q\}$$

ve

$$\int_0^1 (1-t)\left|f'(tx+(1-t)a)\right|^q dt \leq \frac{1}{2} max\{\left|f'(x)\right|^q, \left|f'(b)\right|^q\}$$

olur. Buradan

$$\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{2(b-a)}(max\{|f(x)|^q, |f(a)|^q\})^{\frac{1}{q}}+\frac{(b-x)^2}{2(b-a)}(max\{|f(x)|^q, |f(b)|^q\})^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir.

Lemma 4.2. $a, b \in I$, $a < b$ ve $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: I \to \mathbb{R}$, I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ ise

$$(1-\lambda)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\lambda\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b K(x)f'(x)dx$$

$$K(x)=\begin{cases} x-\left(a+\lambda\dfrac{b-a}{2}\right), & a\le x\le \dfrac{a+b}{2} \\ x-\left(b-\lambda\dfrac{b-a}{2}\right), & \dfrac{a+b}{2}<x\le b \end{cases}$$

elde edilir.

İspat: Bu eşitliği ispatlamak için önce eşitliğin sağ tarafına kısmi integrasyon metodu uygulanırsa;

$$\int_a^b K(x)f'(x)dx$$

$$=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left[x-\left(a+\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right]f'(x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left[x-\left(b-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right]f'(x)dx$$

$$=\left[x-\left(a+\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right]f(x)\Big|_a^{\frac{a+b}{2}}+\left[x-\left(b-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right]f(x)\Big|_{\frac{a+b}{2}}^b-\int_a^b f(x)dx$$

$$=(1-\lambda)f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\lambda\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)(b-a)-\int_a^b f(x)dx$$

olur. Her iki taraf $(b-a)$ ya bölünürse Lemma 4.2 deki eşitlik elde edilir.

Yukarıdaki Lemma'yı kullanarak, diferensiyellenebilen fonksiyonlar için yeni genelleştirmeler elde edilmiştir. Bu genelleştirmeler kullanılarak da yeni sonuçlar bulunmuştur.

Teorem 4.4. $a,b\in I$, $a<b$ ve $I\subset\mathbb{R}$ olmak üzere $f\colon I\to\mathbb{R}$, I° de diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde quasi konveks ve $0\le\lambda\le 1$ ise

$$\left|(1-\lambda)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\lambda\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)}{4}(2\lambda^2-2\lambda+1)max\{|f'(a)|,|f'(b)|\} \tag{4.4}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 4.2.'den

$$\left|(1-\lambda)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\lambda\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b K(x)f'(x)dx\right|$$

olur. İntegraller için üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\left|(1-\lambda)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\lambda\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\left\{\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|x-\left(a+\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right||f'(x)|dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|x-\left(b-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right||f'(x)|dx\right\}$$

$$=\frac{1}{b-a}\left\{\int_a^{a+\lambda\frac{b-a}{2}}\left[-x+\left(a+\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right]|f'(x)|dx\right.$$
$$+\int_{a+\lambda\frac{b-a}{2}}^{\frac{a+b}{2}}\left[x-\left(a+\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right]|f'(x)|dx+$$
$$+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b-\lambda\frac{b-a}{2}}\left[-x+\left(b-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right]|f'(x)|dx$$
$$\left.+\int_{b-\lambda\frac{b-a}{2}}^{b}\left[x-\left(b-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right]|f'(x)|dx\right\},$$

$x=(1-t)a+tb, dx=(b-a)dt$ alınırsa

$$\left|(1-\lambda)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\lambda\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \int_0^{\frac{\lambda}{2}}\left[-t(b-a)+\lambda\frac{b-a}{2}\right]\left|f'\big((1-t)a+tb\big)\right|dt$$

$$+\int_{\frac{\lambda}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[t(b-a)-\lambda\frac{b-a}{2}\right]\left|f'\big((1-t)a+tb\big)\right|dt$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{\lambda}{2}}\left[(1-t)(b-a)-\lambda\frac{b-a}{2}\right]\left|f'\big((1-t)a+tb\big)\right|dt$$

$$+\int_{1-\frac{\lambda}{2}}^{1}\left[(t-1)(b-a)+\lambda\frac{b-a}{2}\right]|f'((1-t)a+tb)|dt$$

olur. $|f'|$’nin quasi konveksliği kullanılarak

$$\left|(1-\lambda)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\lambda\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \int_0^{\frac{\lambda}{2}}\left[-t(b-a)+\lambda\frac{b-a}{2}\right]max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}dt$$

$$+\int_{\frac{\lambda}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[t(b-a)-\lambda\frac{b-a}{2}\right]max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}dt$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{\lambda}{2}}\left[(1-t)(b-a)-\lambda\frac{b-a}{2}\right]max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}dt$$

$$+\int_{1-\frac{\lambda}{2}}^{1}\left[(t-1)(b-a)+\lambda\frac{b-a}{2}\right]max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}dt$$

$$\leq \frac{(b-a)}{4}(2\lambda^2-2\lambda+1)max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.5. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$, $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $|f'|^{p/(p-1)}$, $[a, b]$ üzerinde quasi konveks ise

$$\left|(1-\lambda) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \lambda\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)}{2}(1-2\lambda+2\lambda^2)\left(max\left\{|f'(a)|^{p/(p-1)}, |f'(b)|^{p/(p-1)}\right\}\right)^{\frac{p-1}{p}} \tag{4.5}$$

elde edilir.

İspat: Lemma 4.2 ve integraller için mutlak değerin özelliğinden,

$$\left|(1-\lambda) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \lambda\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\left\{\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left|x - \left(a + \lambda\frac{b-a}{2}\right)\right| |f'(x)|dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left|x - \left(b - \lambda\frac{b-a}{2}\right)\right| |f'(x)|dx\right\}$$

$$= \frac{1}{b-a}\left\{\int_a^{a+\lambda\frac{b-a}{2}} \left[-x + \left(a + \lambda\frac{b-a}{2}\right)\right] |f'(x)|dx\right.$$
$$+ \int_{a+\lambda\frac{b-a}{2}}^{\frac{a+b}{2}} \left[x - \left(a + \lambda\frac{b-a}{2}\right)\right] |f'(x)|dx$$
$$+ \int_{\frac{a+b}{2}}^{b-\lambda\frac{b-a}{2}} \left[-x + \left(b - \lambda\frac{b-a}{2}\right)\right] |f'(x)|dx$$
$$\left.+ \int_{b-\lambda\frac{b-a}{2}}^{b} \left[x - \left(b - \lambda\frac{b-a}{2}\right)\right] |f'(x)|dx\right\}$$

yazılır. Daha sonra $x = (1-t)a + tb, dx = (b-a)dt$ değişken değiştirmesi yapılıp, integraller için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|(1-\lambda)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\lambda\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq\left(\int_0^{\frac{\lambda}{2}}\left[-t(b-a)+\lambda\frac{b-a}{2}\right]^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{\lambda}{2}}\left|f'\big((1-t)a+tb\big)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$+\left(\int_{\frac{\lambda}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[t(b-a)-\lambda\frac{b-a}{2}\right]^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{\lambda}{2}}^{\frac{1}{2}}\left|f'\big((1-t)a+tb\big)\right|^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{\lambda}{2}}\left[(1-t)(b-a)-\lambda\frac{b-a}{2}\right]^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{\lambda}{2}}\left|f'\big((1-t)a+tb\big)\right|^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$+\left(\int_{1-\frac{\lambda}{2}}^{1}\left[(t-1)(b-a)+\lambda\frac{b-a}{2}\right]^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{1-\frac{\lambda}{2}}^{1}|f'((1-t)a+tb)|^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

elde edilir. Diğer taraftan $|f'|$'nin quasi konveksliği kullanılıp gerekli işlemler yapılırsa (4.5) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.6. $a,b\in\mathbb{R}$ ve $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferensiyellenebilen fonksiyon olsun. $q\geq 1$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde quasi konveks ise

$$\left|(1-\lambda)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\lambda\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq\frac{(b-a)}{8}(2\lambda^2-2\lambda+1)(max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \tag{4.6}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 4.2. ve üçgen eşitsizliğinden

$$\left|(1-\lambda)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\lambda\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\left\{\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|x-\left(a+\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right||f'(x)|dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left|x-\left(b-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right||f'(x)|dx\right\}$$

$$=\frac{1}{b-a}\left\{\int_a^{a+\lambda\frac{b-a}{2}}\left[-x+\left(a+\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right]|f'(x)|dx\right.$$

$$+\int_{a+\lambda\frac{b-a}{2}}^{\frac{a+b}{2}}\left[x-\left(a+\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right]|f'(x)|dx$$

$$+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b-\lambda\frac{b-a}{2}}\left[-x+\left(b-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right]|f'(x)|dx$$

$$\left.+\int_{b-\lambda\frac{b-a}{2}}^{b}\left[x-\left(b-\lambda\frac{b-a}{2}\right)\right]|f'(x)|dx\right\},$$

$x=(1-t)a+tb, dx=(b-a)dt$ değişken değiştirmesi yapılıp, integraller için Power Mean eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|(1-\lambda)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\lambda\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq\left(\int_0^{\frac{\lambda}{2}}\left[-t(b-a)+\lambda\frac{b-a}{2}\right]dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^{\frac{\lambda}{2}}\left[-t(b-a)+\lambda\frac{b-a}{2}\right]\left|f'\big((1-t)a+tb\big)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_{\frac{\lambda}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[t(b-a)-\lambda\frac{b-a}{2}\right]dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_{\frac{\lambda}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[t(b-a)-\lambda\frac{b-a}{2}\right]\left|f'\big((1-t)a+tb\big)\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{\lambda}{2}}\left[(1-t)(b-a)-\lambda\frac{b-a}{2}\right]dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{\lambda}{2}}\left[(1-t)(b-a)-\lambda\frac{b-a}{2}\right]\left|f'\big((1-t)a+tb\big)\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_{1-\frac{\lambda}{2}}^{1}\left[(t-1)(b-a)+\lambda\frac{b-a}{2}\right]dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_{1-\frac{\lambda}{2}}^{1}\left[(t-1)(b-a)+\lambda\frac{b-a}{2}\right]|f'((1-t)a+tb)|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. $|f'|$'nun quasi konveksliği kullanılarak gerekli işlemler yapılırsa

$$\left|(1-\lambda)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\lambda\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)}{8}(2\lambda^{2}-2\lambda+1)(max\{|f'(a)|^{q},|f'(b)|^{q}\})^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. ■

Lemma 4.3. $a<b$, $I\subset\mathbb{R}$ olmak üzere ve $f:I\to\mathbb{R}$, I° üzerinde ikinci mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun. f'', $[a,b]$ aralığında integrallenebilir ve $0\leq\lambda\leq1$ ise

$$(1-\lambda)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\lambda\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)dx$$

$$=(b-a)^{2}\int_{0}^{1}k(t)f''(ta+(1-t)b)\,dt$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$k(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}t(t-\lambda), & 0 \le \lambda \le \dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{1}{2}(1-t)(1-\lambda-t), & \dfrac{1}{2} < \lambda \le 1 \end{cases}$$

dır (Sarıkaya and Aktan 2010).

İspat: Bu eşitliği ispatlamak için, ilk önce

$$I = \int_a^b k(t)f''(ta+(1-t)b)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}[t(t-\lambda)]f''(ta+(1-t)b)dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}[(1-t)(1-\lambda-t)]\,f''(ta+(1-t)b)dt \tag{4.7}$$

$$= I_1 + I_2$$

olsun. I_1 ve I_2 eşitliklerine sırayla kısmı integrasyon metodu iki kez uygulanırsa

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}[t(t-\lambda)]f''(ta+(1-t)b)dt$$

$$= \frac{1}{2}[t(t-\lambda)]\frac{f'(ta+(1-t)b)}{a-b}\bigg|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(2t-\lambda)\frac{f'(ta+(1-t)b)}{a-b}dt$$

$$= \frac{1}{4(b-a)}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left[(2t-\lambda)\frac{f(ta+(1-t)b)}{(a-b)^2}\bigg|_0^{\frac{1}{2}} - 2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{f(ta+(1-t)b)}{(a-b)^2}dt\right]$$

$$= \frac{1}{4(b-a)}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(\lambda - 1)}{2(b-a)^2} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$- \frac{\lambda}{2(b-a)^2} f(b) + \frac{1}{(b-a)^2}\int_0^{\frac{1}{2}} f(ta + (1-t)b)dt \tag{4.8}$$

olur. Benzer şekilde

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} [(1-t)(1-\lambda - t)]\, f''(ta + (1-t)b)dt$$

$$= \frac{1}{2}[(1-t)(1-\lambda-t)]\frac{f'(ta + (1-t)b)}{a-b}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(2t + \lambda - 2)\frac{f'(ta + (1-t)b)}{a-b}dt \tag{4.9}$$

$$= -\frac{1}{4(b-a)}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(\lambda - 1)}{2(b-a)^2} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$- \frac{\lambda}{2(b-a)^2} f(a) + \frac{1}{(b-a)^2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(ta + (1-t)b)dt$$

elde edilir. (4.8) ve (4.9) eşitlikleri (4.7)'de yerlerine yazılırsa

$$I = \frac{1}{(b-a)^2}\left[(\lambda - 1) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \lambda \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{1}{b-a}\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt\right]$$

olur. $t \in [0,1]$ için $x = ta + (1-t)b$ değişken değiştirmesi yapılıp her iki taraf $(b-a)^2$ ile çarpılırsa Lemma 4.3 elde edilir.

Teorem 4.7. $a, b \in I$ ile $a < b$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $|f''|$, $[a,b]$ üzerinde quasi konveks ve $0 \le \lambda \le 1$ ise

$$\left|(1-\lambda)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\lambda\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq\begin{cases}\dfrac{(b-a)^2}{24}(8\lambda^3-3\lambda+1)max\{|f''(a)|,|f''(b)|\}, & 0\leq\lambda\leq\dfrac{1}{2}\\[2ex] \dfrac{(b-a)^2}{24}(3\lambda-1)max\{|f''(a)|,|f''(b)|\}, & \dfrac{1}{2}<\lambda\leq 1\end{cases} \tag{4.10}$$

elde edilir.

İspat: Lemma 4.3. kullanılarak

$$\left|(1-\lambda)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\lambda\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^2}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}|t(t-\lambda)|\,|f''(ta+(1-t)b)|dt\right. \tag{4.11}$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}|(1-t)(1-\lambda-t)||f''(ta+(1-t)b)|dt\right]$$

elde edilir. Kabul edelim ki $0\leq\lambda\leq\frac{1}{2}$ olsun. $|f''|$ quasi konveks olduğundan

$$\int_0^{\frac{1}{2}}|t(t-\lambda)|\,|f''(ta+(1-t)b)|dt$$

$$=\int_0^{\lambda}\big(t(\lambda-t)\big)\,|f''(ta+(1-t)b)|dt$$

$$+\int_{\lambda}^{\frac{1}{2}}\big(t(t-\lambda)\big)\,|f''(ta+(1-t)b)|dt \tag{4.12}$$

$$\leq max\{|f''(a)|,|f''(b)|\}\left[\int_0^{\lambda}\big(t(\lambda-t)\big)\,dt+\int_{\lambda}^{\frac{1}{2}}\big(t(t-\lambda)\big)\,dt\right]$$

$$= max\{|f''(a)|, |f''(b)|\}\left(\frac{\lambda^3}{3} - \frac{\lambda}{8} + \frac{1}{24}\right)$$

olur. Benzer şekilde

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} |(1-t)(1-\lambda-t)||f''(ta+(1-t)b)|dt$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1-\lambda} \big((1-t)(1-\lambda-t)\big)|f''(ta+(1-t)b)|dt$$

$$+ \int_{1-\lambda}^{1} \big((1-t)(t+\lambda-1)\big)|f''(ta+(1-t)b)|dt$$

$$\leq max\{|f''(a)|, |f''(b)|\}\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1-\lambda} \big((1-t)(1-\lambda-t)\big)dt + \int_{1-\lambda}^{1} \big((1-t)(t+\lambda-1)\big)dt\right] \tag{4.13}$$

$$= max\{|f''(a)|, |f''(b)|\}\left(\frac{\lambda^3}{3} - \frac{\lambda}{8} + \frac{1}{24}\right)$$

olur. (4.11) eşitsizliğinde, (4.12) ve (4.13) eşitsizlikleri yerlerine yazılırsa Teorem 4.7'nin ilk eşitsizliği elde edilmiş olur.

Diğer taraftan, $\frac{1}{2} < \lambda \leq 1$ olduğunu kabul edelim. Buna göre (4.11) eşitsizliğinden

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} |t(t-\lambda)|\,|f''(ta+(1-t)b)|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} |(1-t)(1-\lambda-t)||f''(ta+(1-t)b)|dt$$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{2}} \big(t(\lambda-t)\big)\,|f''(ta+(1-t)b)|dt$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^{1} \big((1-t)(t+\lambda-1)\big)|f''(ta+(1-t)b)|dt,$$

$|f''|$ quasi konveks olduğundan

$$\leq max\{|f''(a)|, |f''(b)|\}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \big(t(\lambda - t)\big)\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \big((1-t)(t+\lambda-1)\big) dt\right]$$

$$= max\{|f''(a)|, |f''(b)|\}\left(\frac{\lambda}{4} - \frac{1}{12}\right)$$

olur ki bu da (4.10) eşitsizliğinin ikinci tarafıdır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.8. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I°$ üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $|f''|^q$, $[a, b]$ üzerinde quasi konveks, $0 \leq \lambda \leq 1$ ve $q \geq 1$ ise

$$\left|(1-\lambda) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \lambda\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \begin{cases} \dfrac{(b-a)^2}{48}(8\lambda^3 - 3\lambda + 1)(max\{|f''(a)|^q, |f''(b)|^q\})^{\frac{1}{q}}, & 0 \leq \lambda \leq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{(b-a)^2}{48}(3\lambda - 1)(max\{|f''(a)|^q, |f''(b)|^q\})^{\frac{1}{q}}, & \dfrac{1}{2} < \lambda \leq 1 \end{cases} \tag{4.14}$$

elde edilir.

İspat: Lemma 4.3 ve integraller için Power Mean eşitsizliği kullanılarak

$$\left|(1-\lambda) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \lambda\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} |t(t-\lambda)|\, |f''(ta+(1-t)b)| dt\right.$$

$$\left. + \int_{\frac{1}{2}}^{1} |(1-t)(1-\lambda-t)| |f''(ta+(1-t)b)| dt\right]$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{2}\left\{\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|t(t-\lambda)|\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|t(t-\lambda)|\,|f''(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}|(1-t)(1-\lambda-t)|dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \tag{4.15}$$

$$\left.\times\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}|(1-t)(1-\lambda-t)||f''(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ olsun. $|f''|^q$, $[a,b]$ üzerinde quasi konveks olduğundan

$$\int_0^{\frac{1}{2}}|t(t-\lambda)|\,|f''(ta+(1-t)b)|^q dt$$

$$= \int_0^{\lambda}\big(t(\lambda-t)\big)\,|f''(ta+(1-t)b)|^q dt + \int_{\lambda}^{\frac{1}{2}}\big(t(t-\lambda)\big)\,|f''(ta+(1-t)b)|^q dt$$

$$\leq max\{|f''(a)|^q, |f''(b)|^q\}\left[\int_0^{\lambda}\big(t(\lambda-t)\big)\,dt + \int_{\lambda}^{\frac{1}{2}}\big(t(t-\lambda)\big)\,dt\right]$$

$$= max\{|f''(a)|^q, |f''(b)|^q\}\left(\frac{\lambda^3}{3}-\frac{\lambda}{8}+\frac{1}{24}\right) \tag{4.16}$$

yazılır.

Benzer şekilde

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}|(1-t)(1-\lambda-t)||f''(ta+(1-t)b)|^q dt$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1-\lambda}\big((1-t)(1-\lambda-t)\big)|f''(ta+(1-t)b)|^q dt$$

$$+ \int_{1-\lambda}^{1}\big((1-t)(t+\lambda-1)\big)|f''(ta+(1-t)b)|^q dt$$

$$\leq max\{|f''(a)|^q, |f''(b)|^q\}\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1-\lambda}\big((1-t)(1-\lambda-t)\big)dt\right.$$

$$\left.+\int_{1-\lambda}^{1}\big((1-t)(t+\lambda-1)\big)dt\right] \tag{4.17}$$

$$= max\{|f''(a)|^q, |f''(b)|^q\}\left(\frac{\lambda^3}{3}-\frac{\lambda}{8}+\frac{1}{24}\right)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\int_0^{\frac{1}{2}}|t(t-\lambda)|\,dt = \int_0^{\lambda}\big(t(\lambda-t)\big)\,dt + \int_{\lambda}^{\frac{1}{2}}\big(t(t-\lambda)\big)\,dt = \frac{\lambda^3}{3}+\frac{1-3\lambda}{24} \tag{4.18}$$

ve

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}|(1-t)(1-\lambda-t)|dt$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1-\lambda}\big((1-t)(1-\lambda-t)\big)dt + \int_{1-\lambda}^{1}\big((1-t)(t+\lambda-1)\big)dt$$

$$= \frac{\lambda^3}{3}+\frac{1-3\lambda}{24} \tag{4.19}$$

olur.

(4.16)-(4.19) eşitsizlikleri (4.15)'de yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa, Teorem 4.8'deki ilk eşitsizlik elde edilir.

Şimdi $\frac{1}{2} < \lambda \leq 1$ olarak alalım. $|f''|^q$, $[a, b]$ üzerinde quasi konveks olduğundan

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |t(t-\lambda)|\,|f''(ta+(1-t)b)|^q dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \big(t(\lambda-t)\big)\,|f''(ta+(1-t)b)|^q dt \\
&\le max\{|f''(a)|^q, |f''(b)|^q\} \int_0^{\lambda} \big(t(\lambda-t)\big)\,dt \qquad (4.20)\\
&= max\{|f''(a)|^q, |f''(b)|^q\} \left(\frac{\lambda}{8}-\frac{1}{24}\right)
\end{aligned}
$$

olur. Benzer şekilde

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} |(1-t)(1-\lambda-t)||f''(ta+(1-t)b)|^q dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \big((1-t)(t+\lambda-1)\big)|f''(ta+(1-t)b)|^q dt \\
&\le max\{|f''(a)|^q, |f''(b)|^q\} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \big((1-t)(t+\lambda-1)\big)dt \\
&= max\{|f''(a)|^q, |f''(b)|^q\} \left(\frac{\lambda}{8}-\frac{1}{24}\right) \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |t(t-\lambda)| = \int_{\frac{1}{2}}^{1} |(1-t)(1-\lambda-t)|dt = \left(\frac{\lambda}{8}-\frac{1}{24}\right) \qquad (4.22)$$

dır.

(4.15) eşitsizliğinde (4.20), (4.21) ve (4.22) eşitsizlikleri yerlerine yazılırsa, (4.14)'ün ikinci eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Şimdi son olarak, mutlak değeri quasi konveks fonksiyon olan ve farklı türden eşitsizlikleri veren yeni genelleştirmeleri verelim.

Lemma 4.4. $a,b \in I$, $a < b$ ve $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: I \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $f' \in L[a,b]$ için $\lambda \in [0,1]$ ve $x \in [a,b]$ ise

$$f(x)(1-2\lambda) + \lambda\big(f(a)+f(b)\big) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du$$

$$= (a-b)\int_0^1 \mathrm{m(t)} f'(ta+(1-t)b)dt$$

olur. Burada

$$m(t) = \begin{cases} (t-\lambda), & t \in \left[0, \dfrac{b-x}{b-a}\right] \\ (t-1+\lambda), & t \in \left[\dfrac{b-x}{b-a}, 1\right] \end{cases}$$

dır.

İspat: Bu eşitliğin ikinci tarafı alınıp $m(t)$ kullanıldığında

$$\int_0^1 m(\mathrm{t}) f'(ta+(1-t)b)dt$$

$$= \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} (\mathrm{t}-\lambda) f'(ta+(1-t)b)dt + \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (\mathrm{t}-1+\lambda) f'(ta+(1-t)b)dt$$

yazılır. Kısmi integrasyon metodu kullanarak

$$= (t-\lambda)\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\Bigg|_0^{\frac{b-x}{b-a}} - \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt$$

$$+ (t-1+\lambda)\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\Bigg|_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} - \int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt$$

$$= \frac{f(x)}{a-b}[1-2\lambda] + \frac{\lambda}{a-b}[f(a)+f(b)] - \frac{1}{a-b}\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafını $(a-b)$ ile çarpılıp, $u = ta+(1-t)b$, değişken değişikliği yapılırsa Lemma 4.4 elde edilir. ■

Teorem 4.9. $a, b \in I$ ve $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: I \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $f' \in L[a,b]$ ve $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde quasi konveks olmak üzere

$$\left| f(x)(1-2\lambda) + \lambda\big(f(a)+f(b)\big) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du \right|$$

$$\le \left[\frac{1-2\lambda+2\lambda^2}{2}(b-a) - (1-\lambda)(b-x) + \frac{(b-x)^2}{2(b-a)}\right] max\{|f'(x)|, |f'(a)|\}$$

$$+ \left[\lambda^2(b-a) - \lambda(b-x) + \frac{(b-x)^2}{2(b-a)}\right] max\{|f'(x)|, |f'(b)|\} \tag{4.23}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $\lambda \in [0,1]$ ve $x \in [a,b]$ dir.

İspat: Lemma 4.4 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\left| f(x)(1-2\lambda) + \lambda\big(f(a)+f(b)\big) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du \right|$$

$$= \left| (a-b)\int_0^1 \mathrm{K(t)} f'(ta+(1-t)b)dt \right|$$

$$\leq |a-b|\left\{\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} |\mathrm{t}-\lambda||f'(ta+(1-t)b)|dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} |\mathrm{t}-1+\lambda||f'(ta+(1-t)b)|dt\right\}$$

yazılır. $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde quasi konveks olduğundan

$$\left|f(x)(1-2\lambda)+\lambda\big(f(a)+f(b)\big)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq (b-a)\left\{\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} |\mathrm{t}-\lambda| max\{|f'(x)|,|f'(b)|\}dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} |\mathrm{t}-1+\lambda| max\{|f'(x)|,|f'(a)|\}dt\right\}$$

$$=(b-a)\left\{max\{|f'(x)|,|f'(b)|\}\left[\int_0^{\lambda}(-\mathrm{t}+\lambda)dt+\int_{\lambda}^{\frac{b-x}{b-a}}(\mathrm{t}-\lambda)dt\right]\right.$$

$$\left.+max\{|f'(x)|,|f'(a)|\}\left[\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1-\lambda}(-\mathrm{t}+1-\lambda)dt+\int_{1-\lambda}^{1}(\mathrm{t}-1+\lambda)dt\right]\right\}$$

$$=\left[\frac{1-2\lambda+2\lambda^2}{2}(b-a)-(1-\lambda)(b-x)+\frac{(b-x)^2}{2(b-a)}\right]max\{|f'(x)|,|f'(a)|\}$$

$$+\left[\lambda^2(b-a)-\lambda(b-x)+\frac{(b-x)^2}{2(b-a)}\right]max\{|f'(x)|,|f'(b)|\}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.10. $a,b\in I$ ve $I\subset\mathbb{R}$ olmak üzere $f\colon I\to\mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $f'\in L[a,b]$ olsun. $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde quasi konveks, $\lambda\in[0,1]$, $x\in[a,b]$ ve $q\geq 1$ olmak üzere

$$\left|f(x)(1-2\lambda)+\lambda\big(f(a)+f(b)\big)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq\left[\frac{1-2\lambda+2\lambda^2}{2}(b-a)-(1-\lambda)(b-x)+\frac{(b-x)^2}{2(b-a)}\right]$$

$$\times\left(max\{|f'(x)|^q,|f'(a)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.24}$$

$$+\left[\lambda^2(b-a)-\lambda(b-x)+\frac{(b-x)^2}{2(b-a)}\right]\left(max\{|f'(x)|^q,|f'(a)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 4.4 ve integraller için Power Mean eşitsizliği kullanılarak

$$\left|f(x)(1-2\lambda)+\lambda\big(f(a)+f(b)\big)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$=\left|(a-b)\int_0^1 \mathrm{K(t)}f'(ta+(1-t)b)dt\right|$$

$$\leq|a-b|\left\{\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}|\mathrm{t}-\lambda||f'(ta+(1-t)b)|dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1|\mathrm{t}-1+\lambda||f'(ta+(1-t)b)|dt\right\}$$

$$\leq(b-a)\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}|\mathrm{t}-\lambda|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}|\mathrm{t}-\lambda||f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1|\mathrm{t}-1+\lambda|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1|\mathrm{t}-1+\lambda||f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

yazılır. Burada

$$\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} |\mathrm{t}-\lambda| dt = \int_0^{\lambda} (-\mathrm{t}+\lambda) dt + \int_{\lambda}^{\frac{b-x}{b-a}} (\mathrm{t}-\lambda) dt = \lambda^2 - \lambda\left(\frac{b-x}{b-a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2$$

ve

$$\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} |\mathrm{t}-1+\lambda| dt = \int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1-\lambda} (-\mathrm{t}+1-\lambda) dt + \int_{1-\lambda}^{1} (\mathrm{t}-1+\lambda) dt$$

$$= \frac{1-2\lambda+\lambda^2}{2} - (1-\lambda)\left(\frac{b-x}{b-a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2$$

dır. $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde quasi konveks olduğundan

$$\left| f(x)(1-2\lambda) + \lambda\big(f(a)+f(b)\big) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du \right|$$

$$\leq \left[\lambda^2 - \lambda\left(\frac{b-x}{b-a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2\right]^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} |\mathrm{t}-\lambda| max\{|f'(x)|^q, |f'(b)|^q\} dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \left[\frac{1-2\lambda+\lambda^2}{2} - (1-\lambda)\left(\frac{b-x}{b-a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2\right]^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} |\mathrm{t}-1+\lambda| max\{|f'(x)|^q, |f'(a)|^q\} dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left[\frac{1-2\lambda+2\lambda^2}{2}(b-a) - (1-\lambda)(b-x) + \frac{(b-x)^2}{2(b-a)}\right] (max\{|f'(x)|^q, |f'(a)|^q\})^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \left[\lambda^2(b-a) - \lambda(b-x) + \frac{(b-x)^2}{2(b-a)}\right] (max\{|f'(x)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}}$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

5. SONUÇ

Bu bölümde, Araştırma Bulguları'ndaki teoremler kullanılarak yeni sonuçlar ve bu yeni sonuçlara dayalı yeni uygulamalar verilecektir.

5.1. Elde Edilen Yeni Sonuçlar

Sonuç 5.1.1. Teorem 4.1'de $x = \frac{a+b}{2}$ seçilirse (3.2.7) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.1.2. Teorem 4.2'de $x = \frac{a+b}{2}$ seçilirse (3.2.8) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.1.3. Teorem 4.3'de $x = \frac{a+b}{2}$ seçilirse (3.2.9) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.1.4. $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere Teorem 4.4'de

$\boldsymbol{i.}$ $\lambda = 0$ seçilirse,

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{(b-a)}{4} max\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$$

eşitsizliği,

$\boldsymbol{ii.}$ $\lambda = 1$ seçilirse, (3.2.1) eşitsizliği,

$\boldsymbol{iii.}$ $\lambda = \frac{1}{3}$ seçilirse, (3.2.21) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.1.5. $\lambda \in [a, b]$ ve $p > 1$ olmak üzere Teorem 4.5'de

$\boldsymbol{i.}$ $\lambda = 0$ seçilirse,

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \le \frac{(b-a)}{2}\left(max\left\{|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}, |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}\right\}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

eşitsizliği;

ii. $\lambda = 1$ seçilirse,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{(b-a)}{2}\left(max\left\{|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}, |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}\right\}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

eşitsizliği;

iii. $\lambda = \frac{1}{3}$ seçilirse,

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\le \frac{5(b-a)}{18}\left(max\left\{|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}, |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}\right\}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.1.6. $\lambda \in [a,b]$ ve $q \ge 1$ olmak üzere Teorem 4.6'de

i. $\lambda = 0$ için

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \le \frac{(b-a)}{8}\left(max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği;

ii. $\lambda = 1$ için

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{(b-a)}{8}\left(max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği;

iii. $\lambda = \frac{1}{3}$ için

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{5(b-a)}{72}\left(max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği bulunur.

Sonuç 5.1.7. $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere Teorem 4.7'de

i. $\lambda = 0$ için (3.2.15) eşitsizliği,

ii. $\lambda = 1$ için (3.2.12) eşitsizliği,

iii. $\lambda = \frac{1}{3}$ için

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{81} max\{|f''(a)|, |f''(b)|\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.1.8. $0 \leq \lambda \leq 1$ ve $q \geq 1$ olmak üzere Teorem 4.8'de

i. $\lambda = 0$ için

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{(b-a)^2}{48}\left(max\{|f''(a)|^q, |f''(b)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği;

ii. $\lambda = 1$ için

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)^2}{24}\left(max\{|f''(a)|^q, |f''(b)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği;

iii. $\lambda = \frac{1}{3}$ için

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{162}\left(max\{|f''(a)|^q, |f''(b)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.1.9. $\lambda \in [0,1]$ ve $x \in [a, b]$ olmak üzere Teorem 4.9'dan

i. $\lambda = 0$ için (3.2.27) eşitsizliği;

ii. $\lambda = \frac{1}{2}$ için

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \left[\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{4(b-a)}\right]\left[max\{|f'(x)|, |f'(a)|\} + max\{|f'(x)|, |f'(b)|\}\right]$$

eşitsizliği, $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa (3.2.7) eşitsizliği;

iii. $\lambda = \frac{1}{6}$ ve $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{5(b-a)}{72}\left[max\left\{|f'(a)|,\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right\}+max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|,|f'(b)|\right\}\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.1.10. $\lambda \in [0,1]$ ve $x \in [a,b]$ olmak üzere Teorem 4.10'dan

i. $\lambda = 0$ için (3.2.29) eşitsizliği;

ii. $\lambda = \frac{1}{2}$ için

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{4(b-a)}\right]\left[(max\{|f'(x)|^q,|f'(a)|^q\})^{\frac{1}{q}}+(max\{|f'(x)|^q,|f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği, $x=\frac{a+b}{2}$ alınırsa (3.2.9) eşitsizliği;

iii. $\lambda = \frac{1}{6}$ ve $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{5(b-a)}{72}\left[\left(max\left\{|f'(a)|^q,\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q,|f'(b)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

5.2. Özel Anlamlar İçin Uygulamalar

Bu bölümde pozitif reel sayıların bilinen anlamlarıyla elde edilen sonuçların uygulamaları verilmiştir.

Önerme 5.2.1. $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$ ve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ olsun. Bu durumda

$$|L_n^n(a,b) - A^n(a,b)| \leq n\frac{b-a}{4} max\{a^{n-1}, b^{n-1}\}$$

olur.

İspat: $x \in [a,b]$ olmak üzere Sonuç 5.1.4'ün $i.$ şıkkına $f(x) = x^n$ quasi konveks fonksiyonu uygulanırsa istenilen sonuç elde edilir.

Önerme 5.2.2. $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$ ve $0 \notin [a,b]$ olsun. $q \geq 1$ için

$$|L^{-1}(a,b) - A^{-1}(a,b)| \leq \frac{b-a}{8}(max\{a^{-2q}, b^{-2q}\})^{\frac{1}{q}}$$

olur.

İspat: $x \in [a,b]$ olmak üzere Sonuç 5.1.6'nın $i.$ şıkkına $f(x) = \frac{1}{x}$ quasi konveks fonksiyonu uygulanırsa istenilen sonuç bulunur.

Önerme 5.2.3. $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$ ve $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ olsun. Bu durumda

$$|A(a^n, b^n) - L_n^n(a,b)| \leq n\frac{b-a}{8}\left(max\left\{a^{q(n-1)}, b^{q(n-1)}\right\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir.

İspat: $x \in [a,b]$ olmak üzere Sonuç 5.1.6'nın $ii.$ şıkkına $f(x) = x^n$ quasi konveks fonksiyonu uygulanırsa istenilen sonuç bulunur.

Önerme 5.2.4. $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$ ve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ olsun. Bu durumda

$$|L_n^n(a,b) - A^n(a,b)| \leq n(n-1)\frac{(b-a)^2}{48}\left(max\left\{a^{q(n-2)}, b^{q(n-2)}\right\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

olur.

İspat: $x \in [a,b]$ olmak üzere Sonuç 5.1.8'in $i.$ şıkkına $f(x) = x^n$ quasi konveks fonksiyonu uygulanırsa istenilen sonuç elde edilir.

Önerme 5.2.5. $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$ ve $0 \notin [a,b]$ olsun. $q \geq 1$ için

$$|L^{-1}(a,b) - A^{-1}(a,b)| \leq \frac{(b-a)^2}{24}(max\{a^{-3q}, b^{-3q}\})^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: $x \in [a,b]$ olmak üzere Sonuç 5.1.8'in $i.$ şıkkına $f(x) = \frac{1}{x}$ quasi konveks fonksiyonu uygulanırsa istenilen sonuç elde edilir.

Önerme 5.2.6. $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$ ve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ olsun. Bu durumda

$$|A(a^n, b^n) - L_n^n(a,b)| \leq n(n-1)\frac{(b-a)^2}{24}\left(max\left\{a^{q(n-2)}, b^{q(n-2}\right\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

olur.

İspat: $x \in [a,b]$ olmak üzere Sonuç 5.1.8'in $ii.$ şıkkına $f(x) = x^n$ quasi konveks fonksiyonu uygulanırsa istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur.

Önerme 5.2.7. $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$ ve $0 \notin [a, b]$ olsun. $q \geq 1$ için

$$|A(a^{-1}, b^{-1}) - L^{-1}(a, b)| \leq \frac{(b-a)^2}{12} (max\{a^{-3q}, b^{-3q}\})^{\frac{1}{q}}$$

bulunur.

İspat: $x \in [a, b]$ olmak üzere Sonuç 5.1.8'in $ii.$ şıkkına $f(x) = \frac{1}{x}$ quasi konveks fonksiyonu uygulanırsa istenilen sonuç bulunur.

Önerme 5.2.8. $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$ ve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ olsun. Bu durumda

$$\left|\frac{1}{3} A(a^n, b^n) + \frac{2}{3} A^n(a, b) - L_n^n(a, b)\right|$$
$$\leq n(n-1) \frac{(b-a)^2}{162} \left(max\left\{a^{q(n-2)}, b^{q(n-2)}\right\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir.

İspat: $x \in [a, b]$ olmak üzere Sonuç 5.1.8'in $iii.$ şıkkına $f(x) = x^n$ quasi konveks fonksiyonu uygulanırsa istenilen sonuç bulunur.

Önerme 5.2.9. $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$ ve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ olsun. Bu durumda

$$|A(a^n, b^n) - L_n^n(a, b)|$$
$$\leq n \left(\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{4(b-a)}\right) [max\{x^{n-1}, a^{n-1}\} + max\{x^{n-1}, b^{n-1}\}]$$

olur.

İspat: $x \in [a, b]$ olmak üzere Sonuç 5.1.9'un $ii.$ şıkkına $f(x) = x^n$ quasi konveks fonksiyonu uygulanırsa istenilen sonuç bulunur.

Önerme 5.2.10. $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$ ve $0 \notin [a, b]$ olsun. Bu durumda

$$|A(a^{-1}, b^{-1}) - L^{-1}(a, b)|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{4(b-a)} [max\{x^{-2}, a^{-2}\} + max\{x^{-2}, b^{-2}\}]$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: $x \in [a, b]$ olmak üzere Sonuç 5.1.9'un $ii.$ şıkkına $f(x) = \frac{1}{x}$ quasi konveks fonksiyonu uygulanırsa istenilen sonuç elde edilir.

Önerme 5.2.11. $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$ olsun. Bu durumda

$$\left|\frac{1}{3} H^{-1}(a, b) + \frac{2}{3} A^{-1}(a, b) - L^{-1}(a, b)\right|$$

$$\leq \frac{5(b-a)}{72} \left[max\left\{a^{-2}, \left(\frac{a+b}{2}\right)^{-2}\right\} + max\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-2}, b^{-2}\right\}\right]$$

olur.

İspat: $0 \notin [a, b]$ ve $x \in [a, b]$ olmak üzere Sonuç 5.1.9'un $iii.$ şıkkına $f(x) = \frac{1}{x}$ quasi konveks fonksiyonu uygulanırsa istenilen sonuç elde edilir.

KAYNAKLAR

Alomari, M. and Darus, M., 2010. On some inequalities Simpson-type via quasi-convex functions with applications. RGMIA Res. Rep. Coll., 13, 1, Article 8. [ONLINE: http://ajmaa.org/RGMIA/v13n1.php].

Alomari, M. and Darus, M., 2010. Some Ostrowski type inequalities for quasi-convex functions with applications to special means. RGMIA Res. Rep. Coll., 13, 2, Article 3. [ONLINE: http://ajmaa.org/RGMIA/v13n2.php].

Alomari, M., Darus, M. and Dragomir, S.S., 2010. New inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose second derivatives absolute values are quasi-convex. Tamkang Journal of Mathematics, 41(4), 353-359.

Alomari, M., Darus, M. and Dragomir, S.S., 2009. Inequalities of Hermite-Hadamard's type for functions whose derivatives absolute values are quasi-convex. RGMIA Res. Rep. Coll., 12, Supplement, Article 14. [ONLINE: http://ajmaa.org/RGMIA/v12(E).php].

Alomari, M., Darus, M., and Kirmacı, U.S., 2010. Refinements of Hadamard-type inequalities for quasi-convex functions with applications to trapezoidal formula and to special means. Computers and Mathematics with Applications, 59, 225-232.

Anton, H., 1994. Elementary Linear Algebra. Jhon Wiley & Sons, Inc.

Azpeitia, A.G., 1994. Convex functions and the Hadamard inequality, Rev. Colombiana Mat., 28, 7-12.

Dragomir, S.S. and Agarwal, R.P., 1998. Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and trapezoidal formula, Appl. Math. Lett., 11(5), 91-95.

Dragomir, S.S. and Pearce, C. E. M., 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality, Bull. Austral. Math. Soc., 57, 377-385.

Dragomir, S.S., Agarwal, R.P. and Cerone, P., 2000. On Simpson's Inequality and Applications. J. of Inequal. & Appl, 5, 533-579.

Dragomir, S.S., Agarwal, R.P. and Barnett, N.S., 2000. Inequalities for Beta and Gamma Functions via Some Classical and New Integral Inequalities. J. of Inequal. and Appl., 5, 103-165.

Dragomir, S.S. and Sofo, A., 2002. Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are convex. RGMIA Res. Rep. Coll., 5, Supplement, Article 30. [ONLINE: http://ajmaa.org/RGMIA/v5(E).php].

Greenberg, H.J. and Pierskalla, W.P., 1970. A review of quasi convex functions. Reprinted from Operations Research, 19, 7.

Ion, D.A., 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser., 34, 82-87.

Kavurmacı, H., Avcı, M. and Özdemir, M.E., 2010. New Inequalities of Hermite-Hadamard Type for Convex Functions with Applications. Arxiv:1006.1593v1.

Kırmacı, U.S, 2004. Inequalities for differentiable mappings and applicatios to special means of real numbers to midpoint formula, Appl. Math. Comp., 147, 137-146.

Mitrinović, D.S., 1970. Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.

Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.

Niculescu, C. and Persson, L.E., 2006. Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach, Springer Science+Business Media, Inc.

Ostrowski, A., 1938. Uber die Absolutabweichung einer differentienbaren Funktionen von ihren Integralmittelwert, Comment. Math. Hel, 10, 226-227.

Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y.L., 1992. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Inc.

Sarıkaya, M.Z., Set, E. and Özdemir, M.E., 2009. New inequalities of Hermite-Hadamard's type, submitted. RGMIA Res. Rep. Coll., 12, 4, Article 11. [ONLINE: http://ajmaa.org/RGMIA/v12n4.php]

Sarıkaya, M.Z., Sağlam, A. and Yıldırım, H., 2010. New inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose second derivatives absolute values are convex and quasi-convex. Arxiv:1005.0451v1.

Sarıkaya, M.Z. and Aktan, N., 2010. On generalization some integral inequalities and their applications. Arxiv:1005.2879.

Set, E., 2010. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Set, E., Özdemir, M.E. and Sarıkaya, M.Z., 2010. On new inequalities of Simpson's type for quasi-convex functions with applications. RGMIA Res. Rep. Coll., 13, 1, Article 6.
[ONLINE: http://ajmaa.org/RGMIA/v13n1.php].

Tseng, K.L., Yang, G.S. and Dragomir, S.S., 2003. On quasi convex functions and Hadamard's inequality. RGMIA Res. Rep. Coll., 6, 3, Article 1.
[ONLINE: http://ajmaa.org/RGMIA/v6n3.php].

Yıldız, Ç., Akdemir, A.O. and Avcı, M., 2010. Some Inequalities of Hermite-Hadamard Type for Functions Whose Derivatives Absolute Values are Quasi Convex. accepted.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Erzurum'un Horasan ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzurum'da tamamladı. 2004 yılında Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümüne girerek lisans öğrenimine başladı ve 2008 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen aynı bölümde yüksek lisans yapmaktadır.