



**T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ORTOTROPİK DERECELENDİRİLMİŞ
MALZEMELERİN TEMAS MEKANIĞININ
ANALİZİ**

**Ayşegül KÜÇÜKSUCU
DOKTORA TEZİ**

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

**Nisan-2011
KONYA
Her Hakkı Saklıdır**

TEZ KABUL VE ONAYI

Ayşegül KÜÇÜKSUCU tarafından hazırlanan “Ortotropik Derecelendirilmiş Malzemelerin Temas Mekanizmasının Analizi” adlı tez çalışması 31/03/2011 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makina Mühendisliği Anabilim Dalı’nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Doç.Dr. Mehmet Ali GÜLER

Danışman

Prof.Dr. Ahmet AVCI

Üye

Doç.Dr. Mesut UYANER

Üye

Doç.Dr. Hacı SAĞLAM

Üye

Yrd. Doç. Dr. Ömer Sinan ŞAHİN

Yukarıdaki sonucu onaylarım.
Prof. Dr. Bayram SADE
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all materials and results that are not original to this work.


Ayşegül KÜÇÜKSUCU
Tarih: 27.04.2014

ÖZET

DOKTORA TEZİ

ORTOTROPİK DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMELERİN TEMAS MEKANİĞİNİN ANALİZİ

Ayşegül KÜÇÜKSUCU

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ahmet AVCI

2011, 141 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Ahmet AVCI

Doç. Dr. Mehmet Ali GÜLER

Doç. Dr. Mesut UYANER

Doç. Dr. Hacı SAĞLAM

Yrd. Doç. Dr. Ömer Sinan ŞAHİN

Bu tezde, kayma temasına maruz kalmış ortotropik fonksiyonel derecelendirilmiş malzemedeki gerilme dağılımları hesaplanmıştır. Temas mekaniğinde bugüne kadar geliştirilen analitik metotların büyük bölümü izotropik fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler ile ilgilidir. Üretim tekniklerinden dolayı malzemeler anizotropik malzemeye dönüşebileceğinden, ortotropik fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerle ilgili etkili metotların geliştirilmesinin gereği açıktır. Bu çalışmanın amacı, ortotropik fonksiyonel derecelendirilmiş yarı düzlemde rijit baskı sebebi ile oluşmuş temas mekaniği problemleriyle ilgili çözüm metodu geliştirmektir. Malzeme derecelendirmesinin düşey yönde üstel olarak değiştiği var sayılmıştır. Temas probleminin düzlem şekil değiştirme veya genelleştirilmiş düzlem gerilme şartları altında formüle edildiği kabul edilmiştir. Problemin sınır şartları ve genel kısmî diferansiyel denklemler Fourier dönüşümü ile sağlanmıştır. Karışık değerli sınır şartlı problemin düzlem elastisite denge denklemleri ikinci dereceden tekil integral denklemine dönüştürülmüştür. İntegral denkleminin kernelinden tekillikleri çıkarmak için asimptotik analiz yapılmıştır. Elde edilen integral denklemi, temas gerilme dağılımı bilinmeyenleri ortogonal Jacobi polinomları serilerine açılarak ve uygun sıralama noktaları kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Parametrik analizde, dikdörtgen profilli baskı için malzeme ortotropisi ve heterojenliğin temas gerilme dağılımı üzerindeki etkisi incelenmiştir. Sayısal sonuçlar, düşey yöndeki heterojenliğin ve sürtünme katsayısının temas gerilme dağılımı üzerindeki etkisini göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Düzlem Temas Mekaniği, Ortotropik Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme, Tekil İntegral Denklemi, Düşey Derecelendirme.

ABSTRACT

Ph. D THESIS CONTACT MECHANICS ANALYSIS of ORTHOTROPICALLY GRADED MATERIALS

Ayşegül KÜÇÜKSUCU

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE
OF SELÇUK UNIVERSITY

THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MECHANICAL ENGINEERING

Advisor: Prof. Dr. Ahmet AVCI

2011, 141 Pages

Jury

Prof. Dr. Ahmet AVCI

Doç. Dr. Mehmet Ali GÜLER

Doç. Dr. Mesut UYANER

Doç. Dr. Hacı SAĞLAM

Yrd. Doç. Dr. Ömer Sinan ŞAHİN

In this thesis the stress distributions in orthotropic functionally graded materials under sliding contact loading are studied. Most of the existing analytical methods are developed on the contact mechanics in isotropic functionally graded materials. Since materials can become anisotropic depending on the nature of processing techniques, it is necessary to develop an efficient method for orthotropic functionally graded materials. The aim of this work is to develop a solution method on the contact mechanics problems due to sliding contact by a rigid stamp in an orthotropically graded half plane. The material grading is assumed to be exponential in the depth direction. Under the assumption of plane strain or generalized plane stress conditions, the contact problem is formulated. The governing partial differential equations and the boundary conditions of the problem are satisfied by using Fourier transformation. The plane elasticity equations of the mixed boundary value problem are converted into a singular integral equation of the second kind. An asymptotic analysis is performed to extract the singularities from the kernels of the integral equation. The resulting integral equation is solved numerically by expanding the unknown contact stress distribution into a series of orthogonal Jacobi polynomials by using suitable collocation points. In the parametric analysis, the effect of the material orthotropy and nonhomogeneity parameter on the contact stress distribution for the case of a flat stamp is investigated. The numerical results show the effects of nonhomogeneity in depth direction and the coefficient of friction on the contact stress distribution.

Keywords: Plane Contact Mechanics, Sliding Contact, Orthotropic Functionally Graded Materials, Singular Integral Equation, Vertical Gradation.

ÖNSÖZ

Makine Mühendisliği disiplininde, belirli bir ihtiyaç ile başlayan tasarım ve geliştirme sürecinin en önemli girdilerinden birisi de malzemenin seçimidir. Sanayi Devrimi ile birlikte yeni buluşların üretime olan etkisi ve buhar gücüyle çalışan makinelerin, makineleşmiş sanayiye doğurması malzemeye duyulan ihtiyacı artmıştır. Üretimde kullanılan geleneksel malzemeler, zaman içinde değişen ve farklılaşan ihtiyaçları karşılamakta zorlandığı için yeni nesil malzemeler üzerinde çalışılmaya başlanmıştır. Bu durum, genelde kompozit malzeme ve özelde de 1980'lerin sonlarına doğru fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme kavramlarını ortaya çıkarmıştır. Dolayısı ile ihtiyaca yönelik olarak malzemelerin de tasarlanabilmesi kavramı süreçteki yerini almıştır.

Temas mekaniği de makine tasarımında en temel konudur, çünkü makine elemalarının istenilen fonksiyonları yerine getirebilmesi için belirli kuvvetleri iletmesi yani temasta olması gerekmektedir. Bu çalışmada, ortotropik fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin temas mekaniği ele alınmıştır. Üretim süreci sonucu tasarlanan özelliklerini yitirebilen izotropik olarak modellenmiş malzemeler yerine malzemelerin ortotropik olarak modellenmesinin gerçeğe daha yakın olduğu görülmüştür. Dolayısı ile literatürde izotropik fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin temas mekaniği üzerinde yapılan çalışmalarda kullanılan metod, ortotropik fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeye uyarlanmıştır.

“Ortotropik Derecelendirilmiş Malzemelerin Temas Mekaniğinin Analizi” konulu tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde, sonuçlandırılmasında ve sonuçlarının değerlendirilmesinde destek ve yardımlarını esirgemeyen tez hocam Sayın Prof. Dr. Ahmet AVCI Beyefendi'ye teşekkür ederim.

Aradaki mesafeye rağmen her zaman destek olan, ilk formülün yazılmasından son grafiğin çizilmesine kadar yapılan çalışmalarda değerli zamanını harcayarak rehberlik eden, yardımları olmasa idi tezi kesinlikle tamamlayamayacağım hocam Sayın Doç. Dr. Mehmet Ali GÜLER Beyefendi'ye, bizi evinde misafir eden, manevi destek veren değerli eşi Sayın Zeynep GÜLER Hanımefendi'ye ve özellikle son zamanlarda daha fazla fedakârlık gösteren küçük kızlarına gönülden teşekkür ederim.

Tez savunma jürisindeki değerli hocalarımın her birine vakitlerini ayırdıkları için teşekkür ederim. Hocam Sayın Doç. Dr. Mesut UYANER Beyefendi'ye tezimi okumakta gösterdiği titizlikten dolayı ayrıca teşekkür ederim. Tezi tamamlamama vesile olan hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN Beyefendi'ye teşekkür ederim.

Eğitim hayatım süresince bana her zaman maddi ve manevi destek veren değerli BULU ailesine, benden maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen değerli KÜÇÜKSUCU ailesine ve küçük kızlarımızla her zaman ilgilenen değerli BÖKE ailesine gönülden teşekkür ederim.

Son olarak ve en çok tez çalışması boyunca bana verdiği maddi ve manevi destek, göstermiş olduğu sabır ve anlayıştan ve görmediği kusurlarımdan dolayı biricik dostum, değerli eşim Sayın Av. Süleyman KÜÇÜKSUCU Beyefendi'ye ve doğduklarından beri her gün annelerini bu tezle paylaşan bazen kitaplarımı çizerek tezle ilgili yorumlar yapan, her zaman varlıkları bizi neşelendiren çok değerli kızlarımız A.Yüksel ve M. Şevval'e teşekkür ederim.

Ayşegül KÜÇÜKSUCU
KONYA-2011

İTHAF

Annem, Babam ve Ailem için...

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖNSÖZ	vi
İTHAF	vii
İÇİNDEKİLER	viii
ŞEKİL ve TABLOLARIN LİSTESİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR	xiii
1.GİRİŞ	1
2.KAYNAK ARAŞTIRMASI	6
2.1.Temas Mekanığı ile İlgili Yapılan Çalışmalar	6
2.2.FDM' lerin Temas Mekanığı ile İlgili Yapılan Çalışmalar	8
3.FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMELER	12
3.1.Ortotropik Malzemeler	12
3.2.Kompozit Malzemeler	14
3.3.Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler	15
3.4.Ortotropik Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler	19
3.5.Elastisite Modülünün Derecelendirilmesi	20
3.6.Çalışmanın Önemi	23
4.GENEL ELASTİSİTE DENKLEMLERİ	26
4.1.Ortotropik Malzemelerde Gerilme-Şekil Değişirme Bağlıları	26
4.2.Ortotropik FDM' lerde Gerilme-Şekil Değişirme Bağlıları	29
5.PROBLEMİNİN FORMÜLASYONU	30
5.1.Giriş	30
5.2.Düşey Yönde Derecelendirilmiş Ortotropik FDM' de Temas Mekanığı Problemi	30
5.2.1. Sınır şartları	36
5.2.2. Temas probleminin formülasyonu	37
5.3.İntegral Denkleminin Elde Edilmesi	48
5.4.Normalizasyon	50
5.5.Temel Denklem	53
5.6.Sayısal Çözüm	55
5.6.1.Dikdörtgen Profilli Baskı Problemi	59
6.ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA	63

7.SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	87
7.1.Sonuçlar	87
7.2.Öneriler	87
8.KAYNAKLAR.....	91
EKLER	98
EK-A Kernellerin Asimptotik Analizi.....	98
EK-B Fredholm Kernellerin Sayısal Olarak Hesaplanması	112
EK-C Logaritmik Kernellerin Hesaplanması	116
EK-D Bilinmeyen Fonksiyonun Tekil Davranışının İncelenmesi.....	121
EK-E Gauss Sayısal İntegral Alma Yöntemi	125
ÖZGEÇMİŞ	128

ŞEKİL ve TABLOLARIN LİSTESİ

Şekil 3.1.	FDM' nin farklı uygulamaları	16
Şekil 3.2.	Elastik derecelendirilmiş yüzeyin baskılama tepkisi.....	22
Şekil 5.1.	Düşey yönde derecelendirilmiş ortotropik malzemedeki düzlem temas mekaniği probleminin genel gösterimi.....	31
Şekil 5.2.	Düşey yönde derecelendirilmiş ortotropik malzemedeki düzlem temas mekaniği problemi için dikdörtgen baskı profilinin geometrisi	60
Şekil 6.1.	$\kappa = 0.99, \nu = 3 / 7, \delta^4 = 1.001, \eta = 0.0,$ ve farklı γa , heterojenlik parametresi değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.....	64
Şekil 6.2.	$\kappa = 0.99, \nu = 3 / 7, \delta^4 = 1.001, \eta = 0.1,$ ve farklı γa , heterojenlik parametresi değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.....	66
Şekil 6.3.	$\kappa = 0.99, \nu = 3 / 7, \delta^4 = 1.001, \eta = 0.1,$ ve farklı γa , heterojenlik parametresi değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.....	67
Şekil 6.4.	$\kappa = 0.99, \nu = 3 / 7, \delta^4 = 1.001, \eta = 0.3,$ ve farklı γa , heterojenlik parametresi değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.....	68
Şekil 6.5.	$\kappa = 0.99, \nu = 3 / 7, \delta^4 = 1.001, \eta = 0.3,$ ve farklı γa , heterojenlik parametresi değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.....	69
Şekil 6.6.	$\kappa = 0.99, \nu = 3 / 7, \delta^4 = 1.001, \eta = 0.5,$ ve farklı γa , heterojenlik parametresi değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.....	70
Şekil 6.7.	$\kappa = 0.5, \nu = 3 / 7, \delta^4 = 2.0, \eta = 0.0,$ ve farklı γa , heterojenlik parametresi değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.....	71
Şekil 6.8.	$\kappa = 0.5, \nu = 3 / 7, \delta^4 = 2.0, \eta = 0.3,$ ve farklı γa , heterojenlik parametresi değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.....	72
Şekil 6.9.	$\nu = 3 / 7, \gamma a = 1.0, \delta^4 = 2.0, \eta = 0.3,$ ve farklı κ , kayma parametresi değerleri için için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.....	73

- Şekil 6.10.** $\kappa = 0.5$, $\nu = 3/7$, $\gamma a = 1.0$, $\eta = 0.3$, ve farklı δ^4 , katılık oranı değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı 74
- Şekil 6.11.** $\kappa = 0.5$, $\gamma a = 1.0$, $\delta^4 = 2.0$, $\eta = 0.3$, ve farklı ν , Poisson oranı değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı 75
- Şekil 6.12.** $\kappa = -0.75$, $\nu = 0.8$, $\gamma a = 1.0$, $\delta^4 = 2.0$, ve farklı η , sürtünme katsayısı değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı..... 76
- Şekil 6.13.** $\kappa = -0.25$, $\nu = 3/7$, $\gamma a = 1.0$, $\delta^4 = 2.0$, ve farklı η , sürtünme katsayısı değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı..... 77
- Şekil 6.14.** $\kappa = 0.5$, $\nu = 3/7$, $\gamma a = 1.0$, $\delta^4 = 2.0$, ve farklı η , sürtünme katsayısı değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı..... 78
- Şekil 6.15.** $\kappa = -0.75$, $\nu = 0.8$, $\gamma a = 1.0$, $\eta = 0.5$, ve farklı δ^4 , katılık oranı değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı 79
- Şekil 6.16.** $\kappa = -0.25$, $\nu = 3/7$, $\gamma a = 1.0$, $\eta = 0.5$, ve farklı δ^4 , katılık oranı değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı..... 80
- Şekil 6.17.** $\kappa = 0.5$, $\nu = 3/7$, $\gamma a = 1.0$, $\eta = 0.5$, ve farklı δ^4 , katılık oranı değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı 81
- Şekil 6.18.** $\kappa = -0.75$, $\nu = 0.8$, $\gamma a = 1.0$, $\eta = 0.3$, ve farklı δ^4 , katılık oranı değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı 82
- Şekil 6.19.** $\kappa = -0.25$, $\nu = 3/7$, $\gamma a = 1.0$, $\eta = 0.3$, ve farklı δ^4 , katılık oranı değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı..... 83
- Şekil 6.20.** $\kappa = -0.75$, $\nu = 0.8$, $\gamma a = 1.0$, $\delta^4 = 2.0$, ve farklı η , sürtünme katsayısı değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı..... 84
- Şekil 6.21.** $\kappa = -0.25$, $\nu = 3/7$, $\gamma a = 1.0$, $\delta^4 = 2.0$, ve farklı η , sürtünme katsayısı değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı..... 85

Şekil 6.22. $\kappa = 0.5$, $\nu = 3/7$, $\gamma a = 1.0$, $\delta^4 = 2.0$, ve farklı η , sürtünme katsayısı değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı..... 86

Şekil D.1. p kuvvetinin uygulanmasının gösterimi..... 124

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$p(\)$:	Bilinmeyen basınç fonksiyonu
γ	:	(x, y) Dönüştürülmüş düzlemde y yönündeki heterojenlik parametresi
$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$:	(x_1, x_2) Fiziksel düzlemdeki gerilmeler
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$:	(x, y) Dönüştürülmüş düzlemdeki gerilmeler
E_{11}, E_{22}	:	(x_1, x_2) Eksenlerine göre Young modülü (GPa)
u_1, u_2	:	(x_1, x_2) Eksenlerine göre yer değiştirme bileşenleri
u, v	:	(x, y) Eksenlerine göre yer değiştirme bileşenleri
ν	:	Poisson oranı (<i>Poisson's ratio</i>)
E	:	Etkin parametre, etkin katılık (GPa) (<i>effective parameter, effective stiffness</i>)
α	:	Fourier dönüşüm parametresi
κ_i	:	İntegral denkleminin indeksi
A_i	:	İntegrallerin kesme noktaları
$P_n^{(\alpha, \beta)}$:	Jacobi polinomu
w	:	Jacobi polinomunun ağırlıkları
c_n	:	Jacobi polinomunun bilinmeyen katsayıları
n	:	Karakteristik denklemin kökleri
G_{12}	:	Kayma modülü (GPa) (<i>shear modulus</i>)
κ	:	Kayma parametresi (<i>shear parameter</i>)
δ	:	Katılık oranı (<i>stiffness ratio</i>)
P	:	Normal yükleme
s, r	:	Sıralama noktaları (<i>collocation points</i>)
N	:	Sıralama noktalarının sayısı
η	:	Sürtünme katsayısı
β	:	(x_1, x_2) Düzleminde x_2 yönündeki heterojenlik parametresi
ν_{ij}	:	i -yönündeki yüklemekten dolayı j yönünde oluşmuş tepkiyi gösteren Poisson oranı
α, β	:	Gerilme tekilliğinin kuvvetleri (<i>powers of stress singularities</i>)

Kısaltmalar

FDM	:	Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme (FGM, <i>Functionally Graded Material</i>)
-----	---	--

1. GİRİŞ

Bu çalışmada; düşey yöndeki heterojenliğin, (*heterogeneous, inhomogeneous, nonhomogeneous*) elastik olarak derecelendirilmiş ortotropik malzemelerin yüzeyinde oluşan düzlem temas gerilme dağılımlarına etkisi incelenmiştir. Amaç; etkin katılık, E , kayma parametresi, κ , Poisson oranı, ν , katılık oranı, δ , heterojenlik parametresi, γ , ve sürtünme katsayısı, η , ve baskı konumunun a , temas gerilme dağılımları üzerindeki etkisini araştırmaktır.

Bu çalışmada izlenen yol, yarı sonsuz düzlemdeki temas problemleri için geliştirilen analitik metottur. Problem, elastisite teorisi kullanılarak formüle edilmiş ve tekil integral denkleme indirgenmiştir. İntegral denklemi sayısal olarak çözülmüş ve etkin katılık, E , kayma parametresi, κ , Poisson oranı, ν , katılık oranı, δ , heterojenlik parametresi, γ , ve sürtünme katsayısı, η , ve baskı konumunun a , temas gerilme dağılımları üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Bu çalışmanın amacı; bugüne kadar, izotropik fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme için temas problemlerinde kullanılan metodu ortotropik fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeye uyarlayarak yeni bir metot geliştirmektir.

Bu çalışmada geçen temel kavramlar Elastisite modülü, E , düzlem kayma temas problemi, fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme ve ortotropik malzemedir.

Elastisite modülü, E , deformasyon tamamen elastik olduğu zaman gerilmenin şekil değiştirme oranı, aynı zamanda malzemenin katılığının ölçüsüdür. Çekme testinde eğer deformasyon lineer elastik ise gerilme-şekil değiştirme bağıntısı Hooke kanunu olarak tanımlanır: $\sigma = E \varepsilon$. Elastisite modülü, E ' nin değeri arttıkça malzemenin katılığı da artar. Atom seviyesinde ise elastisite modülü arttığında atomlar arası bağ da kuvvetlenir, elastisite modülü azaldığında ise atomlar arası bağlar da zayıflar. Elastisite modülü, E , her zaman malzemenin her yönünde aynı değildir. İzotropik malzemelerin mekanik özellikleri malzemenin her yönünde aynıdır. Fakat metaller ve seramikler bazı katışıklıklarla (*impurity*) işlem görür. Bunun sonucunda malzemeler anizotropik olur ve Elastisite modülü, E , kuvvetin uygulandığı yöne bağlı olarak değişir. Ortotropik malzemedeki Elastisite modülü, E , ilk defa Krenk (1979) tarafından tanımlanan etkin katılık oranı, E , ile değiştirilmiştir.

Temas problemlerinde, genellikle temas halindeki iki parçanın mükemmel elastik, düzlemde veya aksel simetrik konumda olduğu kabul edilir (Beer ve Johnston, 1996). Bunlara ilâveten; temas bölgesinde oluşan deformasyon eğrisinin gereği kadar küçük ve parçanın gereği kadar esnek olduğundan hareketle parçaların rijit olduğu kabul edilir. Alan denklemlerindeki elastik sabitler ve elastostatik sınır şartları bu konuda gerek teorik gerekse deney çalışanların analizlerinin oldukça karmaşıklaşmasına sebep olur.

Temas problemleri sürtünmesiz ve sürtünmeli olmak üzere iki bölümde incelenir. İlkinde, temas halindeki katıların arasındaki sürtünme yok kabul edilir. Bu ise problemi belirgin şekilde basitleştirir. Gereği kadar yağlanmış parçaların temas problemlerinde bu yaklaşım iyi sonuç verir. İkinci grupta, sürtünme kuvveti yeterince küçük değildir. Dolayısı ile sürtünmenin etkisi yok kabul edilemez. Burada ise iki durum ortaya çıkar: İlk durumda, elastik bir katı diğerine göre kayar ve hareket çok yavaş olduğu için dinamik etki yok kabul edilebilir, ikinci durumda ise elastik yapıya göre rijit baskı tüm olarak yer değiştiremez. Fakat $\sigma_{xy} < \eta \sigma_{yy}$ olduğu zaman katı bağlantı (yapışma (*stick*)) olur. $\sigma_{xy} > \eta \sigma_{yy}$ olduğu zaman ise göreceli yer değiştirme (kayma (*slip*)) temastaki iki yapı arasında gerçekleşir (Güler, 2000).

Statik ya da Coulomb sürtünmesi, birbirine göre hareket etmeyen iki parça arasındaki kuvvettir. Örneğin, statik sürtünme bir parçanın eğimli bir yüzeyden kaymasını önler. Statik sürtünme katsayısı genellikle μ_s , (bu çalışmada η , ile gösterilmiştir) ile gösterilir ve dinamik sürtünme katsayısından büyüktür. Bir parçayı hareket ettirmek için gerekli ilk kuvvet genellikle statik sürtünme kuvveti olarak gösterilir.

Bu çalışmada geçen malzemelerle ilgili tanımlardan bir diğeri ise temelde kompozit, özelde ise Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme ya da kısaca FDM' dir. İstenen amaç için tek başına ihtiyacı karşılayamayan farklı iki ya da daha fazla malzemeyi istenen özellikleri sağlayacak şekilde belirli şartlar ve oranlarda bir araya getirerek elde edilen malzemeye kompozit malzeme denir. Bir kompozit malzemedeki; elyaflar tek yönlü sürekli veya iki yönlü takviyeli olarak düzenlenirse elyaf doğrultusunda yüksek mukavemet ve rijitlik elde edilebilir. Bu mekanik özellikler gayet tabidir ki kullanılan elyafın içeriği ile değişecektir. Bunun sonucunda; tek yönlü doğrultuda yapılan elyaf düzenlemesinde, elyafa dik doğrultudaki eksen ile karşılaştırıldığında yüksek dayanım ve elastik modülü değeri elyaf eksenine paralel doğrultuda elde edilecektir. İki yönlü doğrultuda, yani hem eksene paralel hem de dik yönde elyaflarla takviyelendirilen

kompozitte ise ortogonal yönde dayanım ve elastik modülü eşit olur. Böyle kompozitler, birbirlerine dik doğrultuda iki eksenle simetrik malzeme özelliği gösterir ve "ortotropik" olarak adlandırılır (Kaw, 1997).

Kompoziti meydana getiren bileşenler genel olarak iki şekilde dağılırlar. Matris-parçacık ve bazı matris-elyaf kompozitlerde yapısal bileşen neredeyse bütün matris içerisine dağılmış durumdadır, dolayısıyla bunlar homojendir. İkinci olarak ise, bileşenlerin değişken olmasıdır. Bunda ise tekrar edilmeyecek şekilde ya iç yapı ya da malzeme vardır. Bu çeşit kompozitler derecelendirilmiş (*graded*) veya dereceli (*gradient*) kompozitler olarak isimlendirilirler. Pek çok farklı tabakadan oluşan tabakalı kompozitler bu gruba girer. İplikçik sarım (*filament wound*) kompozitler ayrıca değişik elyaf dağılımları ile tasarlanabilirler. Hem homojen hem de derecelendirilmiş kompozitlerdeki yapısal bileşenler (elyaf veya pulcuk) yönlendirilmiş veya rastgele şekilde düzenlenebilir (Schwartz, 1992).

En basit şekliyle, FDM, bir ucunda bir malzeme diğer bir ucunda ise başka malzeme olan ve ara tabakası bileşimi ve morfolojisi bir malzemedan diğerine pürüzsüzce mikro yapı seviyesinde değişen malzeme olarak tanımlanabilir. Geçiş profiline eldeki mühendislik uygulamasının özel ihtiyaçlarını karşılayacak şekilde malzeme tasarımı (*tailoring*) yapılır. FDM' deki derecelendirme geleneksel süreçler kullanılarak üretilen sıradan malzemelerde de ortaya çıkmaktadır. Malzeme özelliği derecesi (kimyasal ve mikro yapısal derece dâhil) FDM' yi geleneksel kompozit malzemedan oldukça farklı kılar (Niino ve ark., 1987).

FDM' nin ortaya çıkışı Japonya' da süper ısı dirençli malzemelerin araştırılmaya başlandığı olan 1987 yılı olarak kabul edilebilir (Niino ve Maeda, 1990). Araştırmada FDM' nin uygulanabilirliği kanıtlamış ve FDM kelimesi ilk defa kullanılmıştır. Bu çalışmaya göre öncelikle malzeme tasarımında ihtiyaç duyulan yapı ve sınır şartları belirlenir. Daha sonra seçilmiş çeşitli malzeme kombinasyonları için karışım oranı dağılımları kabul edilir. FDM' deki ısıl gerilme ve sıcaklık dağılımı FDM' nin mikro yapılarından tahmin edilen malzeme özellikleri kullanılarak hesaplanır. Diğer muhtemel kombinasyonlar ve farklı karışım oranı dağılımları optimum kombinasyon ve karışım oranı dağılımları elde edilene kadar devam eder.

Pratikte, FDM' lerin bazı üretim tekniklerinin yapısı malzemenin izotropisinin kaybedilmesine sebep olmaktadır. Örneğin; Kim ve Paulino' ya göre (2003) elektron demeti fiziksel buharla çökeltme yöntemi ile üretilmiş FDM' lerin sütunlu bir yapısı vardır.

Bu ise kalınlık yönünde daha yüksek katılığa, zayıf sınıra ve dik kırılma düzlemlerine sebep olur. Buna ilâveten; plazma püskürtme yöntemi ile üretilen derecelendirilmiş malzemeler genellikle ince tabakalı (*lamellar*) bir yapı kazanır. Bu ise; düzleştirilmiş plakalar (*splat*) ve daha zayıf plaka sınırları, yüksek katılığa sahip ve sınıra paralel zayıf (*cleavage*) düzlemleri olan yönlendirilmiş bir malzeme meydana getirir. Gömülü çatlaklar, zayıf düzlemlerde özellikle karışık mod mekanik veya ısıl yükleme altında başlar. Bu tür kırılma mekaniği problemlerinin incelenmesinde ortotropik fonksiyonel derecelendirilmiş ortam ortotropinin asal yönleri serbest yüzeye dik ve paralel olacak şekilde modellenir.

Öztürk ve Erdoğan (1997) tarafından da anlatıldığı gibi üretim tekniğinin yapısı nedeni ile derecelendirilmiş malzemeler çok nadiren izotropiktir. Örneğin; plazma püskürtme tekniği kullanılarak üretilen malzemeler daha önce de bahsedildiği gibi genellikle ince tabakalı olur (Sampath ve ark., 1995). Bunun aksine, elektron demeti fiziksel buharlaştırma çökme yöntemi sütunlu yapıya sebep olur (Kaysser ve Ilschner, 1995). Dolayısı ile derecelendirilmiş malzemenin mekaniğinin çalışılmasında en uygun model heterojen ortotropik sürekliliğidir.

Kompozit malzemelerin uygulandığı neredeyse sınırsız denilebilecek endüstriyel alanda yaşanan bağlanma mukavemeti, yüksel ısıl ve kalıntı gerilmeler, düşük tokluk problemleri izotropik FDM' lerle aşılmaya çalışılmış ve bu malzemelerin kalıntı gerilmeleri azaltıp bağlanma mukavemetini artırdığı görülmüştür. Fakat üretim teknikleri izotropik FDM' lerin yapısını değiştirmektedir. Bu da tasarım sırasında kullanılacak ortotropik FDM modelinin uygulanabilirliğinin artacağını göstermektedir. Bu çalışmada geliştirilen analitik metot ortotropik FDM içeren yapıların tasarımında faydalı olacaktır.

Bölüm 2' de bu çalışmadaki problemin konusu ile ilgili literatürde bulunan eserlerin incelenmesine yer verilmiştir. Temas mekaniği ve FDM' lerin temas mekaniği ile ilgili yapılan çalışmalar ara başlıkları ile konunun tarihçesi ve yapılan çalışmaların özetleri verilmiştir. Bölüm 3' de ortotropik malzemeler, kompozit malzemeler, FDM' ler ve ortotropik FDM' lerle ilgili genel bilgi verilmiş bu konularda yapılan çalışmalardan örnekler verilmiştir. Bölüm 4' de, ortotropik malzemelerde gerilme-şekil değiştirme bağıntıları ve ortotropik FDM' lere gerilme-şekil değiştirme bağıntıları verilmiştir. Bölüm 5' de düşey yönde ortotropik FDM' de düzlem temas mekaniği problemi ele alınmıştır. Düşey yönde derecelenmiş bir yüzeyin rijit bir baskı ile kayma temasında olduğu kabul edilmiştir. Problem, elastisite teorisi kullanılarak formüle edilmiş ve tekil integral denklemine indirgenmiştir. İntegral denklemi sayısal olarak dikdörtgen baskı profili için

çözölmüştür. Bölüm 6' de parametrik olarak etkin katılık, E , kayma parametresi, κ , Poisson oranı, ν , katılık oranı, δ , heterojenlik parametresi, γ , ve sürtünme katsayısı, η , ve baskı konumununun α , temas gerilme dağılımları üzerindeki etkileri incelenmiştir. Bölüm 7' de problemle ilgili sonuç ve öneriler verilmiş, Bölüm 8' da ise çalışmada faydalanılan kaynaklara yer ver verilmiştir.

2.KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1.Temas Mekanığı ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Temas problemi, sanayileşmenin başladığı yıllardan bu yana pek çok önemli uygulamada sıkça karşılaşılan en önemli konudur. Özellikle hasar ve şekil verme süreçlerini açıklamada temel model olduğundan genelde üzerinde çalışılan bir problem olmuştur. Özellikle, 1860 yılından sonra Hertz' in "temas alanı temastaki parçaların geometrilerine göre yeterince küçükse ve diğer yüzeylerden yeterince uzaksa" kabulü ile birlikte elastisite teorisindeki yerini almıştır (Hertz teorisi ile ilgili olarak Johnson (1985) ve Caillteaud ve ark. (2010) tarafından hazırlanan referans dokümanlara bakılabilir). Düzlem baskı problemlerinin çözümünde kullanılan en temel metotlardan birisi analitik süreklilik tekniğinin (*analytical continuation technique*) yardımı ile karmaşık değişken teorisine (*complex variable theory*) dayanmaktadır. Bu konu ile ilgili çalışmalara, 20.yy' ın başlarında Kolosov' un getirdiği karmaşık değişken teorisindeki yaklaşım metodu, formülasyonun uygulanmasını kolaylaştırmıştır. Analitik süreklilik metodu izlenerek baskı problemlerinin genel çözümünü, temel Plemelj fonksiyonu türünden lineer bağıntılara indirgemek formülasyona sadelik getirmiştir. 1930' larda, Muskhelishvili' nin sürtünmesiz düzlem temas problemi ile çalışmalar hız kazanmış, özellikle Sneddon'un elastisite teorisinde Fredholm integral dönüşümlerini kullanması ile de büyük ilerlemeler kaydedilmiştir. Sonrasında, sürtünme de bu problemlere yeni değişkenler eklemiştir.

Temas mekaniğı, katı cisimler mekaniğinin merkezindedir. Çünkü temas şekil değiştirebilen bir yapıya (*deformable body*) yük uygulamanın en temel metodudur ve sonucunda oluşan gerilme konsantrasyonu genellikle yapının en kritik noktasıdır. Temas, tek yönlü eşitsizlikle karakterize edilir. Sürtüme kuvvetleri göz önüne alındığında ilâve eşitsizlikler ve/veya lineer olmayan durumlar ortaya çıkar. Bu karmaşık değer sınır şartları statige benzer çözümün varlığı, tekillik ile ilgili problemler ve sayısal algoritmelerin uyumlu olmaması ile sonuçlanabilir. Ayrıca; sürtünme problemlerinde, yapışma-kayma hareketi ve sürtünmenin sebep olduğu titreşimin oluşturduğu dengesizlik de vardır. Eğer malzeme lineer değilse, temas probleminin çözümü büyük ölçüde karmaşıklaşır. Dolayısı ile yüklemenin tüm geçmişi bu durumlarda tek bir problemin (genellikle sayısal) çözümü olarak tanımlanabilir. Temastaki gerçek yüzeyler pürüzlüdür ve mikroskobik gerçek temas alanının kümesinde temas konsantrasyonuna sebep olur. Bu ise; mekanik temas sürecinin

yanında, ısı ve elektriğin ara yüzey boyunca iletimini etkiler. Bu tür sistemlerin uygun tanımlanmaları rasgele işlem (*random process*) veya istatistiksel yaklaşım (*statistical treatment*) gerektirmektedir. Elde edilen sonuçlar; pürüzlü veya parçalı özelliklere sahip yüzeylerde, bu tanımlamaların daha etkili matematik metotların elde edilmesinde kullanılabileceğini göstermektedir. Temas problemleri temas halindeki yapıların küçük profil değişikliklerine karşı oldukça hassastır ve dolayısı ile ısıl elastik (*thermoelastic*) bozulmadan da (*distortion*) etkilenirler (Barber ve Ciavarella, 2000).

Chao ve Gao' nun (2000) çalışmasında, sanayinin gelişmeye başlamasından itibaren önemli ve geniş uygulama alanları olan temas probleminin analitik olarak çözümünde kullanılan metotlar genel hatları ile anlatılmıştır. Daha önce de belirtildiği gibi, düzlem baskı problemlerini çözenin en etkin metotlarından birisi de analitik süreklilik tekniğinin yardımı ile karmaşık değişkenler teorisine dayanır. Analitik süreklilik metodunun sonrasında baskı problemini genel çözümü temel Plemelj fonksiyonla ifade edilebilen lineer denklem sistemine indirgemek uygundur. Bu metot kullanılarak Muskhelishvili (1953) ve England (1971) kitaplarında çeşitli baskı problemlerine çözüm önermişlerdir.

Fan ve Hwu (1996), Stroh (1958) formülasyonunu ve süreklilik teoremini birleştirerek anizotropik elastik yarı düzlem için baskı problemini çözmüşlerdir. Anizotropik ve düzlem elastik katı cisimlerin iki boyutlu deformasyonlarının analizinde hem Lekhnitskii (1963) ve hem de Stroh (1958) formülasyonları kullanılabilmektedir. Aralarındaki fark Lekhnitskii formülasyonuna iki boyutlu gerilmelerle, Stroh formülasyonuna iki boyutlu şekil değiştirmelerle başlanmasıdır. Buna ilâveten Lekhnitskii formülasyonuna üçüncü boyut ilave edilebilirken, Stroh formülasyonu iki boyutlu problemlerde daha kolay ve işlevsel bir matematik formülasyonu sağlamaktadır (Detay için Hwu (2010) referansına bakılabilir).

Baskı problemlerini çözmek için kullanılan diğer bir metot ise, problemin integral denklemleri türünden formüle edildiği integral dönüşümlerine dayanır. İntegral denklemleri Gladwell ve England (1977) ve Gladwell (1978) tarafından özetlenen ortogonal polinom açılımları kullanılarak elde edilmiştir. Elastik yarı düzlemde farklı profillere sahip baskı problemi, karşılıklı mesafe kavramına dayanan integral denklemini ortaya koyan Fabrikant (1986-I, II) tarafından verilmiştir. Willis (1966) ise, anizotropik yapılarda temas problemini Fourier dönüşüm metoduna dayandırarak çalışmıştır. Swanson

(2004) yaptığı çalışmada, temas gerilmesi sonucu oluşmuş gerilmelerin hesaplanması için daha önceki iki çözüm tekniğinin birleşimi olan genel prosedürü göstermektedir.

2.2. FDM' lerin Temas Mekanîği ile İlgili Yapılan Çalışmalar

FDM' ler, havacılık endüstrisinde hafif ağırlıklı, yüksek mukavemetli kompozitlere ihtiyaç duyulduğu günden beri ilgi çeken bir araştırma konusu olmuştur. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme olarak da bilinen dereceli malzemeler, sürekli olarak hacim oranları değişen çok fazlı kompozitlerdir. FDM' ler, kaplama ve ara yüzeylerde malzeme özellikleri uyumsuzluğu sebebi ile oluşan ısıl ve mekanik gerilmeleri azaltır, bağlama mukavemetini artırır ve olumsuz çevreye karşı koruma sağlar.

Günümüzde homojen olmayan malzemeler, pek çok teknolojik uygulamada kullanılmaktadır. Heterojenlik özelliği, malzemelerin termomekanik performanslarını geliştirmek amacıyla bilinçli olarak sonradan kazandırılabilir. FDM' ler, bu tür bir uygulamanın örneğidir. Heterojenlik özelliği, toprak gibi bazı doğal malzemelerin asal özelliği olabilmektedir.

Homojen alt tabaka ile sınırlandırılmış ve dikdörtgen ve üçgen profildeki rijit baskılarla yüklenmiş derecelendirilmiş kaplamadaki temas mekanîği problemi Güler ve Erdoğan (2004) tarafından çalışılmıştır.

Özatağ (2003) tarafından yapılan yüksek lisans çalışması, yarı sonsuz düzlemdeki yatay yönde izotropik fonksiyonel derecelendirilmiş yüzeylerin temas mekanîği üzerinedir. Literatürdeki çalışmaların çoğunda elastik derecelenmenin derinlik yönünde olduğu varsayılmıştır. Yanal yöndeki elastik derecelendirme toprakta olduğu gibi malzemenin doğal yapısında bulunabilir ya da FDM' lerde olduğu gibi yapıya sonradan da kazandırılabilir. Dağ ve ark., (2009) tarafından yapılan çalışmada ise, yanal yöndeki heterojenlik özelliklerinin elastik olarak derecelendirilmiş malzemelerin yüzeyindeki temas gerilmesi dağılımı üzerindeki etkisi incelemiştir. Kayma modülünün üstel olarak yatay yönde değiştiği kabul edilmiştir. Bu problemi incelemek için geliştirilen modelde, yanal yönde derecelendirilmiş bir yüzeyin rijit bir baskı ile kayma temasında olduğu varsayılmıştır. Problem; elastisite teorisi kullanılarak formüle edilmiş ve tekil integral denkleme indirgenmiştir. İntegral denklemi sayısal olarak çözülmüş ve parametrik çalışmalar yürütülerek, heterojenlik sabitlerinin, sürtünme katsayısının ve baskı konumunun temas gerilmesi dağılımı üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Sarıkaya (2005) tarafından hazırlanan yüksek lisans çalışmasında; karışık Mod yüklemesi altındaki ortotropik FDM'deki gömülü çatlak problemini inceleyebilmek için yarı analitik teknikler geliştirilmiştir. Problem, ortalama düzlem ortotropik elastisite sabitleri kullanılarak formüle edilmiştir. Dönüşüm teknikleri kullanılarak, problem sayısal olarak çözülebilmesi için bir çift tekil integral denklemi sistemine indirgenmiştir. Hesaplanmış sonuçlar Mod I ve Mod II gerilme şiddet faktörleri ve çatlak uçlarındaki enerji yayılım oranından oluşmaktadır. Bu çalışmada aynı problem üç farklı sınır şartı için incelenmiştir.

Gökay (2005) tarafından tamamlanan yüksek lisans çalışmasında, izotropik yüzeyin kayma modülünde yatay ve düşey yönde üstel olarak birlikte değiştiği kabulünün yapıldığı temas problemi ele almıştır. Temas gerilme dağılımındaki önemsiz etkileri sebebi ile Poisson oranının sabit olduğu varsayılmıştır. Problemin formülasyonunda fonksiyonel derecelendirilmiş yüzeyin rijit dikdörtgen profilli baskı ile kayma temasında olduğu varsayılmıştır. Problem ikinci tür tekil integral denkleminde elastisite teorisi ve derecelendirilmiş ortam için yarı sonsuz düzlem yaklaşımı kullanılarak indirgenmiştir. İntegral denklemi sayısal olarak temas gerilme dağılım bilinmeyenleri Jacobi polinomları serilerine açılarak ve uygun sıralama noktaları kullanılarak çözülmüştür. Geliştirilen metodun doğruluğu homojen malzeme için üretilmiş kapalı form çözümle karşılaştırılarak sınanmıştır.

Derecelendirilmiş malzemelerin mekanik açıdan en önemli özelliği makroskobik olarak homojen olmamalarıdır. Derecelendirilmiş malzemelerin termomekanik özellikleri elastik modülü ve ısı genleşme katsayısı gibi, mukavemetle ilgili özellikleri akma mukavemeti ve kırılma tokluğu gibi genellikle koordinatın kalınlık yönünde değişir. Dolayısı ile, homojen veya parçalı malzemelerin davranışlarının homojen ortam temeline oturtulmuş teorik modeller FDM'lerin davranışlarının tahmin edilmesinde kullanılamaz. Derecelendirilmiş malzemelerin hasar davranışlarının tahmin edilebilmesi için gerekli metotlar, son yıllarda pek çok araştırmacı tarafından çalışılmaktadır. Bu çalışmalarda derecelendirilmiş malzemelerin kırılma mekaniği ve ısı gerilme analizi öncelikle ele alınmaktadır. Malzeme bilim adamlarına, tasarım ve üretim mühendislerine teknik destek sağlamak amacı ile pek çok önemli sonuç elde edilmiş ve teorik altyapı oluşturulmuştur.

Dağ (2001) tarafından yapılan doktora çalışmasında izotropik fonksiyonel derecelendirilmiş ortamda farklı profillere sahip rijit baskı aracılığı ile kayma temasına maruz bırakılmış yüzey çatlak problemi incelenmiştir. Derecelendirilmiş ortamda çatlak

ve temas probleminin elastisite formülasyonu yapılmıştır. Öncelikle; derecelendirilmiş malzemedeki yüzey çatlak problemi bilinen çatlak yüzeyi kuvvetleri için çözülmüştür. Bu problem, sayısal olarak çözülecek iki ayrı tekil integral denkleme dönüştürülmüştür. Son olarak; dereceli ortamda kaymalı temas sebebi ile oluşmuş çatlak problemi incelenmiştir. Bu sistem üç tekil integral denklem sistemine dönüştürülerek ve düzenleme metodu kullanılarak çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar başlıca; malzemenin heterojenlik parametresinin ve sürtünmenin çatlak ucundaki karışık Mod gerilme şiddet faktörlerine etkisinden, temas gerilmelerinden ve gerekli temas kuvvetinden oluşur.

Güler (2000) tarafından yapılan doktora çalışmasında, izotropik fonksiyonel derecelendirilmiş kaplamalar için temas problemi ele almıştır. Çalışmanın ilk bölümünde rijit bir baskı ile yüklenmiş homojen alt tabaka (*substrate*) ile bağlı FDM tabakadaki temas problemi formüle edilmiştir. Kaplamanın heterojen, izotropik ve lineer elastik ve problemin düzlem şekil değiştirme (*plain strain*) olduğu kabul edilmiştir. FDM kaplamanın kayma modülü üstel fonksiyonla gösterilmiştir. Poisson oranının, ν , sabit olduğu kabul edilmiştir. Temas problemi dikdörtgen, üçgen, yarı dairesel ve silindirik de dâhil olmak üzere farklı baskı profilleri için çözülmüştür.

Öztürk ve Erdoğan tarafından çalışılan makalede (Öztürk ve Erdoğan, 1999) düzlem elastisitede karışık mod çatlak problemi derecelendirilmiş ve yönlendirilmiş malzemede ele alınmıştır. Çatlağın ise derecelendirmenin olduğu yöne dik yerleştiği kabul edilmiştir. Ayrıca ortotropinin asal eksenlerinin çatlakla paralel ve dik olduğu kabul edilmiştir.

Benzer şekilde, Öztürk ve Erdoğan (1997) tarafından yapılan başka bir çalışmada malzemenin hem yönlendirilmiş hem de derecelendirilmiş olduğu kabul edilmiştir. Ortamın özelliklerinin x_1 yönünde değiştiği kabul edilmiş ve x_1 ile x_2 eksenlerinin ortotropi için asal olduğu, ayrıca çatlağın x_1 eksenine boyunca olduğu kabul edilmiştir. Yükleme, $x_2 = 0$ eksenine simetri düzlemi olacak şekildedir. Mod I çatlak problemi heterojen ortotropik yarı düzlemde formüle edilmiş ve çözüm farklı yükleme şartları ve malzeme parametreleri için elde edilmiştir. Formülasyonda dört bağımsız E_{11}, E_{22}, G_{12} ve ν_{12} mühendislik sabiti sırası ile katılık parametresi, $E = \sqrt{E_{11}E_{22}}$, katılık oranı, $\delta = (E_{11} / E_{22})^{1/4}$, Poisson oranı, $\nu = \sqrt{\nu_{12}\nu_{21}}$, ve kayma parametresi ile $\kappa = (E / 2G_{12}) - \nu$, değiştirilmiştir. Sonuçlar göstermektedir ki, gerilme şiddet faktörleri

katılık parametresi, E ve katılık oranından, δ , bağımsızdır ve genellikle kayma parametresi κ ve Poisson oranının, ν , gerilme şiddet faktörü üzerindeki etkisi belirgin değildir. κ ' nin değerlerinin -1' e yaklaştığı durumlar istisnadır, burada κ ' nin fiziksel değeri $-1 < \kappa < \infty$ aralığındadır. İzotropik durumda ilgili denkleminin kerneli kapalı formda hesaplanmıştır, bu ise integral sayısal çözümü kolaylaştırıp sonucun hassasiyetini artırmıştır.

Güler (1996) tarafından yapılan yüksek lisans çalışması, izotropik fonksiyonel derecelendirilmiş yüzeylerin temas mekaniği üzerinedir. Bu çalışmada; düşey yöndeki heterojenlik özelliklerinin, elastik olarak derecelendirilmiş malzemelerin yüzeyindeki temas gerilmesi dağılımı üzerindeki etkileri incelenmiştir. Elastisite parametresi kayma modülünün üstel olarak düşey yönde değiştiği kabul edilmiştir. Problem, düşey yönde derecelenmiş bir yüzeyin rijit bir baskı ile kayma temasında olduğu varsayımı ile modellenmiş, elastisite teorisi kullanılarak formüle edilmiş ve tekil integral denklemine indirgenmiştir. İntegral denklemini sayısal olarak çözülmüş ve parametrik çalışmalar yürütülerek, heterojenlik sabitlerinin, sürtünme katsayısının ve baskı konumunun temas gerilmesi dağılımı üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Sonuç olarak; Güler (1996) ve Güler (2000) referansları temel alınarak elastik ortamda izotropik FDM' lerde temas probleminin çözülmesinde kullanılan metot, Krenk (1979), Çınar ve Erdoğan (1983), Öztürk ve Erdoğan (1997), Öztürk ve Erdoğan (1999), referanslarında tanımlanan ortotropik parametrelerin yardımı ile ortotropik FDM' ye uyarlanarak formüle edilmiştir.

3. FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMELER

Bu bölümde problemde kullanılan malzeme olan ortotropik FDM' ler, ortotropik malzemedan başlanarak sırası ile kompozit malzemeler, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler ve ortotropik fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler başlıkları altında detaylı olarak incelenecektir. Ayrıca, elastisite modülünün derecelendirilmesi ve çalışmanın önemi de anlatılacaktır.

3.1.Ortotropik Malzemeler

Bir birine dik üç ekseninde farklı fiziksel ve ısıl karakteristik gösterecek şekilde yapılmış malzeme ortotropik malzeme olarak adlandırılır. Tahta, bu kategoriye giren doğal bir malzemedir. Yapay malzemeye verilecek örnek ise birbirine dik üç tabakadan oluşan kontraplaktır. Yapay malzemeye diğer bir örnek ise, tek katmanlı elyaf olan elyafli kompozit malzemedir. Bu örneklerden görüleceği gibi, ortotropik malzemenin yapısı ve bu yapı ile birleşmiş iç ortogonal yapı gözle görülebilir. Eğer malzemenin iç yapısı gözle görülebilecek kadar belirgin değilse malzeme gene de ortotropik olarak adlandırılabilir. Bu durum, malzeme farklı yönlerde yüklenerek ve yerdeğiştirme tepkisi kontrol edilerek test edilebilir. Eğer sabit miktartlı normal kuvvet, tork veya moment (*tractions*) bu yönlerde peş peşe uygulandığında kayma şekil değiştirmenin olmadığı birbirine dik üç yön bulunursa ve aynı yönlerdeki dik şekil değiştirme farklı ise malzeme diğer üç ortogonal yöne göre ortotropiktir. Ortotropik malzemenin davranışını tanımlamanın en basit şekli malzemenin yapısı ile aynı şekilde olan birbirine dik üç koordinat yönünde olandır. Ortotropik malzemenin farklı yönleri için farklı Poisson oranı, ν , vardır. Bu yüzden her bir oranın iki alt simgesi vardır. İlki yer değiştirmenin etkisinin olduğu yönü gösterir, diğeri ise etkisinin transfer edileceği yönü gösterir. Kayma gerilmesi aynı malzeme eksenine göre kayma şekil değiştirmesidir. Ortotropik malzemenin özellikleri farklı malzeme yönleri için farklı olduğu için aynı kayma gerilmesi altında bile malzeme eksenine ile tanımlanmış düzlemdeki kayma şekil değiştirmesi farklıdır (Donaldson, 2008).

İzotropik/anizotropik malzemelerden yapılmış iki yarı düzlemin kazımalı (*freeting*) temas problemi Pakalapati (2001) tarafından ele alınmıştır. Yapılan çalışmada, kısmi kaymalı temasta olan izotropik/anizotropik malzemelerden yapılmış iki yarı düzlemin

normal kuvvet, tork veya momentini elde etmek için birleştirilmiş Cauchy tekil integral denkleminin çözümüne dayanan sayısal metot ortaya konulmuştur.

Elastik filmlerle takviyelenmiş ortotropik alt tabaka için çeşitli temas ve çatlak problemleri Mahajan ve ark. (1993) tarafından ele alınmıştır. Film, zar ve alt tabaka olarak ortotropinin asal eksenleri sınıra dik ve paralel olacak şekilde ortotropik yarı düzlem olarak modellenmiştir. Problem tekil integral denklemleri sistemi türünden formüle edilmiştir. Çeşitli asimptotik analizler, gerilme tekilliklerinin doğasını belirlemek için yapılmıştır. Çatlaksız takviyelenmiş yarı düzlem için, takviyesiz çatlaklı yarı düzlem için, tek takviyeli ve çatlağın takviyenin son noktasında başladığı ortotropik yarı düzlem ve çatlaklı yarı düzlemde kırılmış takviye gibi özel durumlar için çözümler elde edilmiş ve sonuçlar verilmiştir. Her bir durum için göreceli çatlak/takviye boyutları, film/alt tabaka takviye boyutları ve gerilme şiddet faktörlerinin malzeme ortotropisi üzerindeki etkileri çalışılmış ve bazı örnek sonuçlar verilmiştir.

Ortotropik malzeme ile yapılan çalışmalara başka bir örnek ise Bakırtaş (1984) tarafından yapılan çalışmadır. Bu çalışmada, ortotropik ve homojen olmayan malzemeden oluşmuş elastik yarı düzlemdaki rijit baskı problemi ele alınmıştır. Ortotropinin eksenlerinin birisinin yarı düzlemin kenarına paralel diğeri buna dik olacak şekilde kartezyen koordinat sistemi ile çakıştığı kabul edilmiştir. Heterojenlik, ortotropinin her iki ekseninde de sürekli fonksiyonlar olarak tanımlanmıştır. Fourier dönüşüm tekniği kullanılarak, karışık değerli sınır problem sayısal olarak çözülebilecek tekil integral denkleminde dönüştürülmüştür. Problemin formülasyonu, farklı şekillere sahip rijit baskılar için elde edilmiştir.

Krenk (1979) ise, ortotropik malzemenin elastiklik parametrelerinin tanımlanması ile ilgili çalışmış ve sonraki araştırmacılar için referans niteliğinde bir çalışma ortaya koymuştur. Bu çalışmaya göre, düzlem ortotropik elastisitesine ait dört bağımsız malzeme parametresi etkin katılık, E , etkin Poisson oranı, ν , etkin katılık oranı, δ , ve etkin kayma parametresi, κ , olarak tanımlanmıştır. İç konturlardaki sıfır bileşke kuvveti ile gerilme sınır değer problemlerinin etkin katılık, E , etkin Poisson oranından, ν , bağımsız gerilme alanları oluşturduğu ispatlanmış ve katılık oranının, δ , değişimine eşit olan genel dönüşüm tanımlanmıştır. Bu özellikler diğeri bir parametre olan malzemenin asal ekseninin 90° dönmesine göre değişmemesi gibi ilginç bir özelliği olan kayma parametresinin önemini ortaya çıkarmaktadır.

3.2. Kompozit Malzemeler

FDM' ler kompozit malzeme olduğu için öncelikle kompozit malzemenin özelliklerinin verilmesi daha uygundur.

Kompozit malzemenin ne zaman kullanılmaya başlandığı bilinmemekle birlikte, kaydedilen tarih bazı kompozit malzeme şekillerini içermektedir. Meselâ; eski Mısırlıların kullandığı kontraplakta Mısırlılar tahtanın yeniden düzenlenerek daha yüksek mukavemet ve ısı genleşmeye direnç kazandığını görmüşlerdir. Ortaçağda, kılıç ve zırh farklı malzeme tabakaları ile yapılmıştır. Yirminci yüzyılda, elyaf takviyeli reçine kompozitler hava taşıtları ve uzay araçlarında kullanılmıştır. Kompozit malzeme kullanmanın giderek rağbet görmesi aşağıdaki çeşitli faktörlere bağlanmıştır:

- 1- Ağırlığın yüksek mukavemet ve rijitliğe oranı,
- 2- Kendisini oluşturan malzemelerin ve genellikle hiçbir zaman sahip olamayacağı özelliklerin geliştirilmesi.

Korozyon direnci, aşınma direnci ve yorulma ömrü, sıcaklığa bağlı davranış, ısı yalıtım ve ısı iletkenlik bu özelliklerinden bazılarıdır. Fakat başka bazı malzemeler gibi kompozitlerin de ara yüzeyde bağlanma problemleri ve genellikle kalıntı gerilme ile sonuçlanacak ısı uyumsuzluk gibi bazı sakıncaları vardır. Bağlanma problemleri, genellikle üretim sırasında veya kullanımın başlarında ortaya çıkan çatlakla karakterize edilir. Malzemede yarık ve çatlakların varlığı genellikle uygulanan yük ve kusurlar içeren parçanın yapısal geometrisi ile ilişkilendirilmiştir.

Daha önce de bahsedildiği gibi, kompozit malzemelerin sakıncalarından birisi de, kompoziti oluşturanlar arasındaki ısı uyumsuzluktur. Buna kompozitin üretildiği sıcaklığın kompozitin çalışacağı sıcaklık aralığına inmemesi sebebi ile oluşan kalıntı gerilmeler de ilâve edilir. Daha önceki eğilim, mikro yapıyı kontrol eden özellikleri dolayısı ile ısı mekanik özellikleri kontrol eden metal matris kompozitler, metaller arası ve elyaf veya iplik takviyeli kompozitler gibi homojen olan malzemelerin üretilmesiydi. Homojen malzemelerin, yüksek sıcaklık uygulamalarında oldukça yüksek, ulaşılması güç tasarım şartlarını sağlamak için uygun olmadığı ispatlanmıştır. Bunun yanında seramiklerde mukavemet ve tokluk azdır. Bu nedenle, metal/seramik kompozitler ve seramik ısı bariyerli kaplamalarda kullanılır. Kaplamanın ara yüzeydeki bağlanma problemi, yüksek kalıntı gerilmeler ve ısı gerilmeler başlıca kusurlarıdır. Dolayısı ile bu kusurları azaltabilecek özel malzemeler FDM' ler olarak bilinir.

3.3.Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler

Bu bölümde, FDM' nin farklı tanımlarına konunun önemi sebebi ile yer verilmiş ve malzemenin özellikleri üzerinde durulmuştur.

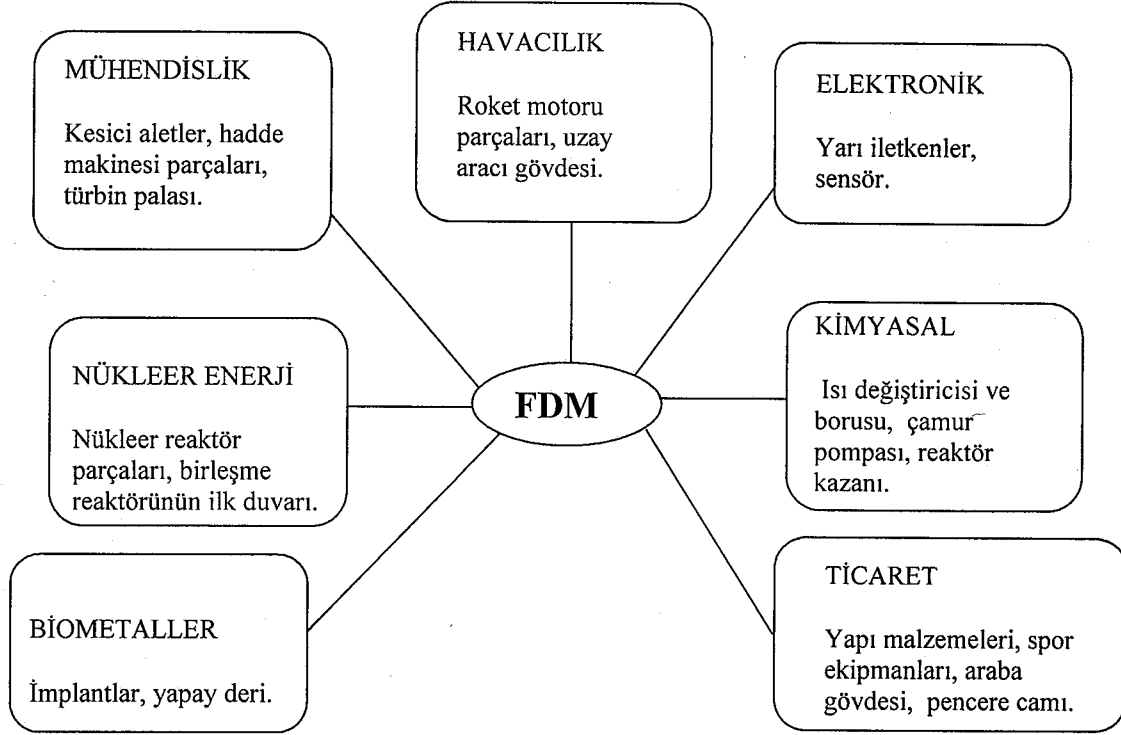
FDM, Erdoğan (1995) tarafından daha önceden belirlenmiş birleşim profili verecek şekilde metal/seramik kompozitlerden tasarlanmış, bileşenlerinin hacim oranları kalınlıkları yönünde sürekli olarak değişen malzemeler olarak tanımlanmıştır. Bu malzeme tasarımıyla amaçlanan ise, verilen malzeme sisteminin ısıl-mekanik tepkisini istenilen yönde geliştirecek şekilde bahsi geçen değişimi düzenleyebilmektir.

Prasad ve ark.' na göre (2009) mühendislik tasarımında derecelendirme; ısı ve/veya mekanik gerilmelerin yeniden dağılımını malzemenin tepkisi olarak kontrol ve optimize etmek, kusurun çekirdeklenmesi ile oluşan gerilme konsantrasyonlarının ve tipik olarak keskin ara yüzlerde oluşan beklenmedik gerilme sıçramalarının ortadan kaldırılması (Suresh ve ark.,1994) ve yerel çatlak itici kuvvetin kontrolünü (Suresh, 2001) sağlamak demektir. FDM' ler hasar-dirençli yüzeylerde oldukça farklı uygulamalarda, hava ve uzay araçlarında, zırhlı araç plaklarında, endüstriyel ekipman ve kesici takımlarda kullanım alanı bulmuştur. Sonuçta pek çok araştırmacı Prasad ve arkadaşları tarafından da ifade edildiği gibi, düşük sıcaklıklardaki uygulamalara normal temas ve hasar direnci için özellikle mekanik derecelendirme çalışmalarına yönelmişlerdir (Giannakopoulos ve Suresh, (1997); Jitcharoen ve ark., (1998); Suresh ve ark., (1999); Giannakopoulos (2002); Cao ve Lu (2004); Choi ve ark. (2008-I), Choi ve ark., (2008-II)). Elastik-plastik malzemelerde mekanik derecelendirmede derecelendirme ya Young modülü, E , değişimi ile ya da plastik akma mukavemeti iledir. Bu malzemeler sırası ile Elastik Derecelendirilmiş Malzemeler ve Plastik Derecelendirilmiş Malzemeler adlandırılırlar.

FDM' nin kullanımı, kaplama teknolojisindeki ara yüzey problemlerinin üstesinden gelinmesi ile sınırlı değildir, ayrıca malzeme özellikleri parçanın kalınlığı boyunca sürekli olarak değişen parçaların sentezinde de kullanılabilir. Sahip olduğu farklı özellikleri sebebi ile içten yanmalı motorlar, uzay yapıları, biomedikal implantlar ve kaynaşım (*fusion*) reaktörleri FDM' nin uygulanmasının önerildiği yerlerden sadece birkaçıdır.

FDM' ler ile bileşenlerin tamamının performansı optimize edilerek gerçekleşmesi beklenen şartlara ulaşılır. Bu kavram doğada yaşayan organizmaların pek çoğunun yapısında görülmüştür (Notaga, 1997).

Bu tarz malzemeler FDM gibi, üzerinde işlem yapılmasının temel amacı gelişen yeni teknolojilerin şartlarını karşılayabilmektir. FDM' nin uygulanabildiği alanlar aşağıdaki şekilde Miyamoto (1997) tarafından özetlenmiştir:



Şekil 3.1. FDM' nin farklı uygulamaları.

FDM son zamanlarda dikkatleri üzerine çeken bir kavram olmasına rağmen, bu tarz heterojen malzemelerin doğada olduğu hep bilinen bir gerçektir. Örneğin; tortul kaya, farklı özellikte tabakalarla büyük ölçüde FDM' dir ve kemik, yapısında sert dış tabaka yumuşak iç kısımlara geçişi sağlayan dereceli kompozittir. En çok dikkat çeken doğal FDM bambu olup sahip olduğu düzenli sırada yapısıyla şu anda üretilen FDM' lerden bir adım öndedir (Amada ve ark.1996).

Malzemenin profil tasarımında nicel özellik tahmininde; malzemenin tüm bileşim aralığını kapsayan malzemenin gerçek mikro yapılarının etkisini hesaba katan uygun tek bir eşitlik yoktur. Dolayısı ile kimyasal bileşim ve malzeme özellikleri deneysel olarak belirlenmelidir. Sentezde FDM önceden tasarlanmış malzeme geçiş profiline göre çeşitli imalat süreçleri kullanılarak üretilir (Sampath ve ark. 1996).

FDM' ler, birleşimi sürekli olarak bir yönde değişen özel kompozitlerdir. Malzeme özelliklerindeki geçiş alaşımı ve kaplamalı kompozitlerde tecrübe edilen ısıl uyumsuzluk

problemlerini azaltır. FDM'nin mikro yapısı genellikle heterojendir ve FDM'nin baskın hasar modu hatadan (*inclusion*) başlayan ve ilerleyen çatlaktır. Dolayısı ile FDM içeren parçaların tasarımında çatlak büyümesi ve ilerlemesi ile ilgili bilgi önemlidir (Marur, 1999).

FDM'ler takviye faz(lar)ın dağılımının her yerinde mikro yapısal detayların mekâna bağlı olarak değiştiği yeni nesil malzemelerdir. Mühendisler bu işlemi takviyeleri farklı özelliklerde, büyüklüklerde ve şekillerde kullanarak buna ilâveten takviye ve matris fazların fonksiyonlarını sürekli şekilde bir birleri arasında değiştirerek gerçekleştirirler. Sonuçta elde edilen ise makro ölçekte veya süreklilik ölçeğinde sürekli ya da süreksiz değişen ısıl ve mekanik özellikleri olan mikro yapıdır. Malzemelerin mikro yapısı ile ilgili bu yeni kavram, hem malzeme biliminde hem de malzemelerin mekaniği alanında dönüm noktasıdır. Çünkü ilk defa yapısal parçanın son tasarımında yapısal ve malzeme ile ilgili kriterlerin tamamını bir araya getirebilmesine imkân tanınmıştır (Hirai, 1996). FDM'ler hava taşımacılığı ve uzay araçları motorlarından bilgisayar devre kartlarına kadar ciddi ısıl değişimleri olan uygulamalar için namzettir. Fonksiyonel derecelendirilmiş mikro yapıların tasarımını kontrol eden pek çok değişken olmasından dolayı, FDM'lerin potansiyellerinin tam anlamı ile kullanılabilmesi amacı ile birleştirilmiş ısıl mekanik yüklere olan tepkisi için uygun modelleme stratejilerinin geliştirilmesi gerekmektedir. Öncesinde, FDM'lerin tepkisi için pek çok hesaplama yöntemi malzemenin heterojen mikro yapısını genel yapısal analiz ile birleştirmemiştir. Daha çok, FDM'de verilen bir noktadaki öncelikle seçilen mikromekanik yerel etki veya makroskobik özellikler tamamı ile homojen kabulü ile seçilen mikro mekanik plana göre elde edilir ve genel ısıl mekanik analizde kullanılırdı.

FDM'de oluşan mikro yapı üretim sürecine sıkı sıkıya bağlıdır ve genellikle mikro yapı üretim sırasında yüksek ısıl ve kalıntı gerilmeler sebebi ile (özellikle malzemeler yüksek sıcaklık ve basınç altında işlem gördüyse) heterojendir. FDM içeren yapıların baskın hasar çeşidi daha önce de belirtildiği gibi çatlak başlaması ve hatadan başlayarak büyümesidir. FDM'deki mikro çatlakların ve boşluklar büyük ölçekli yarıklara yol açar bu ise bütün parçanın kırılmasına sebep olabilir. Dolayısı ile çatlak büyüme ve ilerleme bilgisi FDM içeren parçaların tasarımında ve kırılma tokluğunun gelişmesinde önemlidir. Homojen ve ikili malzeme çatlakları alanında geliştirilen kırılma mekaniği prensipleri çatlak büyümesinin etkisi ve FDM'deki çatlak ilerlemesine karşı malzeme direnci adres gösterilerek geliştirilebilir. Bu ise, hem çatlak tahrik kuvvetinin hesaplanmasını, hem de malzemenin karakteristik direncinin hesaplanmasını gerektirmektedir.

Başlangıcında FDM, uzay aracı projesindeki yüksek sıcaklıklardaki yapısal elemanlar için oldukça sıkı şartları sağlayacak şekilde önerilmiştir. Sıcak yüzey okside bir çevrede hedeflenen çalışma sıcaklığı olan 2000 °K (yaklaşık olarak 1726.85°C) civarındayken soğuk yüzey yaklaşık 1000 °K (yaklaşık olarak 726.85 °C) civarındadır. Sıcak bölge için seramikler seçilirken; sert, tok ve ısıl geçirgenliği olan malzemeler soğuk yüzeyler için seçilmiştir. Yüzeyler arasında metal veya karbon matris kompozitler derecelenmiştir (Mortensen ve ark., 1995).

Prensip, fonksiyonel derecelenmiş malzemeler pek çok açıdan faydalıdır. Derecelendirmenin muhtemel yararları aşağıdakileri içermektedir:

- 1- Isıl kalıntı gerilmeleri azaltmak,
- 2- Çatlağın büyümesi için çatlak tahrik kuvvetini azaltmak,
- 3- Başlangıçtaki plastik akmayı veya mikro çatlamayı bastırmak,
- 4- Ara yüzey bağ mukavemetini ve benzer olmayan katıların kırılma tokluğunu geliştirmek,
- 5- En yüksek gerilmeyi azaltmak ve çatlığa hassas belli yüzeylerdeki gerilme tekilliklerini ortadan kaldırmak,

Süper ısı dirençli alaşımların gelişmesi, havacılık ve nükleer bölünme/kaynaşım endüstrilerindeki araştırmalar için öncelikli alan olmuştur. Bu malzemeler için istenen şartlar yüksek sıcaklık direnci ile birlikte yüksek tokluk ve ısıl iletkenliktir. Dişliler ve yataklar gibi yüksek aşınmaya maruz kalan parçalarda, malzemede yüksek aşınma direnci ve tokluk istenmektedir. Bu alanlarda kısıtlı kullanılabilirliği olan klasik homojen malzemelerde temel malzeme, sıcaklık veya aşınma dirençli malzemelerle kaplanarak elde edilen süper alaşım kaplama teknolojisindeki araştırmaları hızlandırmıştır. Bu kaplamalar, genellikle seramiktir ve düşük ağırlıklı, yüksek dirençli ve göreceli olarak yüksek mekanik güvenilirliği olan seramiklerin bu çeşit kompozitlerin kullanımı sırasında karşılaşılan problemleri çözebileceği beklenmektedir. Doğal olarak, kaplama ve alt tabakanın birbirinden farklı kimyasal ve ısıl-mekanik özellikleri vardır. En belirgin sonucu ise, kaplama sürecinde yüksek kalıntı gerilmeler ve kullanım sırasında yüksek ısıl gerilmeler ortaya çıkmasıdır. Dolayısı ile kaplama ile alt tabakanın ara yüzeyi zayıflık düzlemidir ve kullanım sırasında hasara uğramaya eğilimlidir. Benzer durumlar, istenilen fonksiyonu gerçekleştirebilmek için farklı malzemelerin bağlanmasını gerektiren parçalarda mikro elektronikten yapısal mühendisliğe kadar farklı alanlarda ortaya çıkmaktadır.

FDM toz metalürjisi Bishop ve ark.' na göre (1993), kaymalı döküm/ tabakalı kaymalı döküm Chu ve ark.' na göre (1993) buhar çökertme metotları Sasaki ve Hirai' ye göre (1991), vb. kullanılarak başarı ile üretilir. FDM bir kere üretildiğinde, mikro yapısı ve malzeme özellikleri dağılımı tasarlandığı ile aynı olduğunu anlamak için değerlendirilir. Bunun için, geleneksel bazı test metotları uygulanabildiği gibi, yeni tekniklerin geliştirilmesi malzeme özelliklerindeki sürekli değişiminin ölçülmesinde meydana gelecek zorluklar için gereklidir.

3.4. Ortotropik Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler

Ortotropik FDM' lerle ilgili yapılmış çalışmalardan bazıları, konunun kapsamının görülmesi açısından tarihsel sıralama ile aşağıda verilmiştir.

Batra ve Jiang (2008), Stroh formülasyonunu kullanılarak mükemmel rijit kabul edilmiş alt tabakaya bağlanmış lineer elastik sonlu genişlik ve kalınlıktaki anizotropik tabakanın çok küçük (*infinitesimal*) deformasyonlarını analitik olarak çalışmış ve eksenel yük ile nüfuziyet (*penetration*) derinliği arasındaki ilişkiyi elde etmek için farklı profillerdeki baskılar aracılığı ile kuvvet uygulamışlardır.

Xu ve ark. (2008), malzeme özellikleri aynı üstel fonksiyonla derecelendirilmiş çizgi yüke maruz bırakılmış ortotropik ve yarı sonsuz problem üzerinde çalışmışlardır. Temel kısmî diferansiyel denklemler tamamen kapalı formda ve basit fonksiyonlar cinsinden çözülmüştür. Çizgi yükün yakınındaki yerel gerilmeler ve yerel yer değiştirme alanlarının analitik çözümleri elde edilmiştir. Çözüm izotropik FDM' ye de indirgenebilmektedir.

Kahya ve ark. (2007) tarafından, tabaka ve yarı düzlemden oluşan anizotropik elastik ortamdaki temas problemi ele alınmıştır. Ortam, konstantre yük ile rijit dairesel baskı aracılığı ile yüklenmiştir. Sürtünme ve yer çekim kuvvetlerinin olmadığı ve ara yüzeylerden sadece baskı kuvvet, moment ve torklarının geçtiği kabul edilmiştir. Fourier dönüşüm tekniği kullanılarak verilen tabaka ve yarı sonsuz düzlem için temel denklemler için genel çözümler elde edilmiştir. Sayısal sonuçlar; temas gerilmeleri $p_1(x)$, e bağlı olarak ara yüzeydeki elyaf aralığı, θ , ara yüzeydeki temas uzunlukları, $2a$, ve $2b$, cinsinden verilmiştir.

Küçük (2007) tarafından yapılan çalışmada, homojen bir birleşme (*bond*) tabakası ve homojen bir alt tabakaya bağlanmış ortotropik FDM ile kaplamaların karışık mod

kırılma davranışının araştırılması amaçlanmıştır. Gömülü çatlak problemlerini mekanik veya ısıl yüklenme koşulları altında çözmek için analitik ve sayısal yöntemler kullanılmıştır. FDM kaplama malzeme özellik değişiminin kalınlık yönünde ve çatlakların sınırlara paralel olduğu varsayılmıştır. Ortotropinin ana eksenleri sınırlara paralel ve diktir. Ortotropik FDM kaplama içindeki çatlak yüzeylerinin ya düzgün yayılı normal veya düzgün yayılı kayma gerilmelerine maruz bırakıldığı varsayılarak analitik olarak incelenmiştir.

Günümüzdeki uygulamaların zor şartlarına karşı koyabilmesi için, araştırmalarda FDM geleneksel malzemeye alternatif olmaya aday olarak gösterilmiştir (Kasmalkar, 1997). Bu heterojen malzemeler, bağlanma mukavemetini artırarak ve ısıl uyumsuzluğu azaltarak ara yüzey özelliklerinde iyileştirmeler önermektedir. Bu malzemeleri uygulamaya koymadan önce, FDM' nin tasarımında en önemli adım gerilme ve kırılma analizleridir. Kasmalkar tarafından yapılan çalışmada, homojen alt tabakaların üzerinde FDM kaplamaların kırılma performansı üzerinde odaklanılmıştır.

3.5.Elastisite Modülünün Derecelendirilmesi

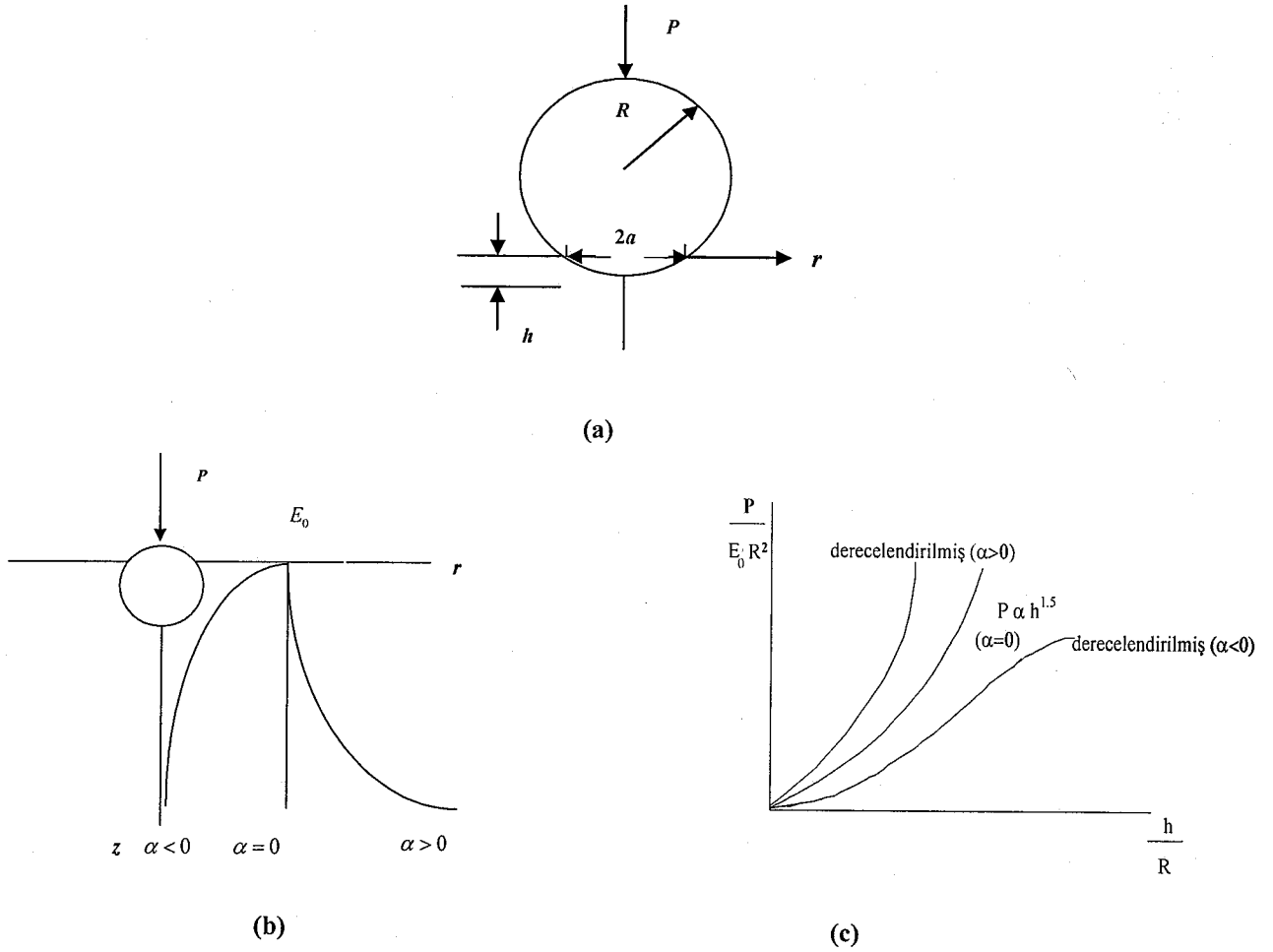
Geçen birkaç on yıldır geometrik mekanikçiler (Suresh, 2001) nokta yükü altındaki elastik derecelendirilmiş alt tabakalarda çalışmışlardır. Bu çalışmalarda, Young modülü E , kuvvet kanunu $E = E_0 z^k$ baskılanmış (*indented*) yüzeyin derinliği, z , nin fonksiyonunu olarak değişmektedir. Burada, E_0 , yüzeydeki referans Young modülüdür ve $0 \leq k < 1$ (homojen malzemeler için $k = 0$)'dir. Elastik modülündeki, E , bu değişimler, tipik olarak kumlu topraklar ve takviye edilmiş kil yataklarında görülebilir. Bu çalışmalarda; bilinen baskı geometrileri (küre, koni, silindir veya piramit gibi) için baskının yüzeye girişindeki nüfuziyet derinliği olarak bilinen h , veya baskının (*indenter*) alt tabaka ile olan temas yarıçapı, a , baskılama (*indentation*) yükünün, P , değişimi için genel çözüm sağlamaz, bu tür teorilerin doğrudan deneysel olarak doğrulanması gereklidir.

Young modülünün derinlik yönünde iki farklı genel değişimi yani $E = E_0 z^k$ kuvvet kanunu değişimi ve $E = E_0 e^{\alpha z}$ üstel değişimi için (burada $(1/\alpha)$ ($\alpha \neq 0$) olmadığı durumlarda yüzeyin altında modülün derecelendirilmesi ile birlikte uzunluk ölçüsünü göstermektedir) ve Poisson oranı, ν , (tek eksenli çekme deneyinde yanal şekil değiştirme

değerinin negatifinin aksenel şekil değiştirmenin değerine oranı) mekân içinde (*spatially*) değişken olacak şekilde herhangi bir belirli değeri için, elastik derecelendirilmiş malzemelerin nokta yükler ve asimetrik baskılarla sürtünmesiz normal baskılaması için genel teori geliştirilmiştir (Giannakopoulos ve Suresh, 1997). Açık (*explicit*) analitik bağıntılar, farklı baskı geometrileri için baskılama yükü, P , nüfuziyet derinliği, h , veya temas yarıçapı, a , ilişkilendirmek için üretilmiştir.

Sabit Poisson oranı, ν , ile elastik derecelendirilmiş bir malzemenin çapı, R , olan bir küre ile baskılandığı kabul edilsin (Şekil 3.2a). Young modülünün, E , derinliğin z , bir fonksiyonu olarak üstel olarak azalıp ($\alpha < 0$), çoğaldığı ($\alpha > 0$) ya da ($\alpha = 0$) sabit kaldığı kabul edilsin (Şekil 3.2b). Homojen elastik malzeme P ' nin $h^{1.5}$ ile bağıntılı baskılama tepkisi vermektedir (Şekil 3.2c). Eğer elastik modülü, E , baskılanmış yüzeyin altında artarsa baskılama tepkisi daha katıdır. Tepkinin katılığı elastik modülünün ulaştığı üstel artışın limiti gibi düşey asimptota ulaşır.

Eğer ($\alpha < 0$) ise, baskılanmış yüzeyin altındaki elastik olarak yumuşak malzeme homojen malzeme ile karşılaştırıldığında daha az tepki verir. Baskılamanın yük taşıma kapasitesi E , yüzeyin altında üstel olarak azalırken asimptotik limit de ortadan kalkar.



Şekil 3.2. Elastik derecelendirilmiş yüzeyin baskılama tepkisi.

- (a) P yüküne maruz kalmış küre baskının altındaki temas bölgesinin detayları.
- (b) Baskılanmış yüzeyin altında yüzeyin Young modülünü, E_0 , ve ($\alpha = 0$) elastik homojen malzemeyi göstermek şartı ile $E = E_0 e^{\alpha z}$ Young modülündeki derinlik z ' nin fonksiyonu olarak üstel artışın ($\alpha > 0$) veya azalışın ($\alpha < 0$) şematik gösterimi.
- (c) Homojen ve derecelendirilmiş yüzeyler için normalize edilmiş baskılama yükünün normalize edilmiş nüfuziyet derinliğinin fonksiyonu olarak değişiminin şematik gösterimi. Derecelendirilmiş yüzeyler için nüfuziyet derinliği, h , ile P , ' nin değişimi yüzey ve baskının özelliklerinin, baskı yarıçapının ve elastik modülündeki α , ' nin karmaşık fonksiyonudur (Giannakopoulos ve Suresh, 1997).

3.6.Çalışmanın Önemi

Güler ve Erdoğan (2006) tarafından da bahsedildiği gibi çok önemli bazı yapısal parçaların hasar modu, temas gerilmesi ile oluşmuş yüksek gerilme konsantrasyonunun sebep olduğu yorulma ve kırılmadır. Yüzeyin uygun olarak hazırlanması, dolayısı ile yük transfer elemanlarının Meselâ; bilyalı yatak ve kaymalı yataklarda, dişlilerde makine takımlarında, kamlarda ve yüksek performanslı sabit gaz türbinlerindeki contalarda tasarım ve üretim süreci çok önemlidir. Bu da FDM' lere olan ilgiyi artırmıştır.

Bunun yanında, üretim sonucu malzemedeki değişimler de göz önüne alınacak olursa fonksiyonel olarak derecelendirilmiş ortotropik malzemeler ile ilgili yapılacak modellemelere ihtiyaç duyulmaktadır. Klasik malzemelerin problemlerini gidermek ve ihtiyaçlara daha yüksek verimde karşılık verecek malzemeleri elde etmek için başlayan çalışmalar önce kompozit malzemeleri, sonrasında kaplamalı kompozitleri ortaya çıkarmıştır. Bu malzemelerin problemleri ise izotropik fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme ile çözülmeye çalışılmış fakat üretim teknikleri sebebi ile bu malzemelerin tasarımda istenilen özelliklerini yitirdikleri görülmüştür.

Fiziksel problemin hasar analizindeki mekanizma sürtünmenin olduğu ortamda kaymalı temas sebebi ile oluşmuş yüzey çatlağının başlaması ve ilerlemesidir ki bunun sonucunda kazımalı yorulma (*fretting fatigue*) meydana gelir. Bu kapsamda, temas gerilmeleri sebebi ile oluşmuş çatlamlar çalışılmış ve verilen temas alanı için gerilme şiddet faktörlerinin hesaplanması literatürdeki çalışmalarda genellikle kullanılmıştır. Pek çok durumda, homojen yarı düzlem veya ince homojen tabaka tarafından homojen alt tabakaya kaplama üzerinde çalışılmıştır. Kazımalı yorulma problemleri ile ilgili referanslar arasında (Dağ (2001); Hills ve ark. (1993); Hills ve ark.,(1994)) verilebilir.

FDM' lerin, yapıları sebebi ile özellikle metal ve seramiklerin birleşiminde istenmeyen özellikleri daha etkili bir şekilde azalttığı görülmüştür. Dereceli malzemelerin kalıntı gerilmeleri azalttığı, belirgin bir şekilde bağlanma mukavemetini artırdığı ve kalınlık yönünde kırılma tokluğunu artırdığı görülmüştür. Fiziksel problemler kabuller üzerine kuruludur. Homojenlik özelliği genellikle mekanik problemlerinde çözülmesi daha kolay modellemeleri oluşturmak için kullanılmıştır. Bu ise gerçeğe yakın değildir. Ortotropik FDM' ler; doğada bulunan veya imalat süreçleri sonucunda tasarlandığı özellikleri yitiren izotropik FDM' lerin modellenmesi için parametre sayısı arttığı ve gerçek malzemeye yaklaştığı için uygundur.

Malzemenin ısıl-mekanik özelliklerinin derecelenmesi kavramı tasarım için önemli bir araç sağlar. Bu yeni yöntemin tüm avantajlarından yararlanabilmek için sadece etkili işleme yöntemleri ve malzeme karakterize etme yöntemleri geliştirmek için değil, bunun yanında FDM parçalarının güvenlik ve dayanıklılığı ile ilgili temel mekanik çalışmaları gerçekleştirmek için de araştırmalar gerekmektedir. Bu çalışmalar, genellikle maksimum gerilmelerin olduğu yüzeylerdeki bazı parçaların aşınma ve yıpranmalara karşı korunmalarına yardımcı olabilir.

Çok fonksiyonlu malzemelerin bileşenlerindeki ideal davranışların avantajlarını aldığı bilinmektedir. Meselâ; seramiklerin ısı ve korozyon direnci ile birlikte metallerin mekanik mukavemet ve tokluğu bir araya getirilebilir. Bu malzemelerin bir kısmı üretim tekniklerinin değiştirilemeyen özellikleri sebebi ile tasarlandığı doğal yapısının izotropisini kaybetmektedir. Örneğin, plazma püskürtme tekniği uygulanan FDM' ler genellikle ince tabakalar şeklinde sıralanmıştır. Bu zayıf sınırlar ise derecelendirilmiş malzeme daha yüksek katılık ve sınıra paralel daha zayıf ayrılma (*clevage*) düzlemleri oluşturmuştur. Elektro ışın fiziksel buharlaştırma tekniği ile kalınlık yönünde daha fazla katılık ve sınıra dik zayıf kırılma düzlemlerde oluşmuştur. Bunlar ise tercih edilen birbirine paralel malzeme yönü ile ortotropik olmuştur (Kim ve Paulino, 2003).

Derecelendirilmiş malzemeler üretim tekniğine bağlı olarak anizotropik malzemeye dönüşebilmektedir (Rao ve Rahman, 2003). Literatürde, heterojen yüzeylerin düzlem temas mekaniği üzerine birçok çalışma vardır. Fakat ortotropik FDM' lerle ilgili temas problemlerine çok fazla rastlanmamıştır.

Literatürde genellikle düşey yönde derecelendirme çalışılmıştır (Güler (1996); Dağ (2001)). Bu çalışmada buna ilave olarak yatay yönde heterojenlik de matematiksel olarak modellenmiştir (Özatağ, 2003).

Yukarıda da anlatıldığı gibi FDM' lerin kırılma mekaniği üzerine çalışılırken ortamın izotropik olmasının kabulü gerçekçi değildir. Erdoğan' ın (2001) çalışmasında da belirttiği gibi, heterojen ortamın asal eksenlerin sınıra paralel ve dik olacak şekilde ortotropik olduğunun kabul edilmesi gerçeğe daha yakın yaklaşımdır.

Ortotropik FDM' de temas yüzeyinde oluşan gerilme dağılımındaki malzeme özelliği değişiminin etkisinin elde edilmesi tasarım ve üretimde bazı parçaların aşınma ve yıpranmalara karşı korunmalarını sağlar. Bazı özel uygulamalara bağlı olarak; temas halindeki parçaların tasarımında pek çok faktör göz önüne alınmalıdır. Belki de en önemli tasarım faktörü malzemenin seçimidir.

Malzeme özellikleri isteğe bağı olarak derecelendirilir ama yönelme (*orientation*) genellikle malzemenin gördüğü işlem sürecinin sonucudur (Öztürk ve Erdoğan, 1999). Endüstriyel kullanım alanlarında ihtiyaç duyulan farklı ve değişken tasarım girdileri olan malzemelerin fonksiyonel olarak derecelendirilmiş ortotropik malzeme olarak modellenmesi öngörülmektedir.

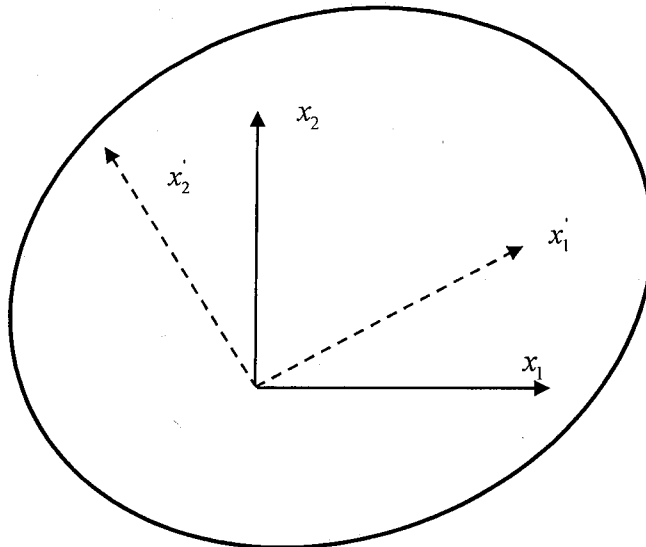
Sonuç olarak; yukarıda da referanslara dayandırılarak anlatıldığı üzere, endüstride duyulan ihtiyacı karşılamak hedefi ile düşey yönde izotropik fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin temas mekaniğinden yola çıkılarak hazırlanan bu çalışmada düşey yönde ortotropik fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin temas mekaniği için gerekli metot geliştirilmiştir.

4.GENEL ELASTİSİTE DENKLEMLERİ

Anizotropik elastik malzemelerde dış kuvvet sebebi ile oluşmuş gerilme-şekil değiştirme bağıntılarını elde etmek için klasik elastisite teorisinden yola çıkılır. Bunu yapabilmek için ise bazı kabuller yapmak gerekmektedir. Bunlardan ilki, klasik elastisite teorisinde olduğu gibi cisimin katı olması yani ortamın sürekli olması kabulüdür. İkinci kabul ise, sadece küçük şekil değiştirmelerin olduğunun göz önünde bulundurulmasıdır. Üçüncüsü ise gerilme-şekil değiştirme bağıntılarının lineer olduğu yani malzemenin genel Hooke kanununa uygun hareket ettiği kabulüdür. Dolayısı ile, bu lineer bağıntıdaki katsayılar ya sabit (homojen katı cisimlerde) ya da değişken yani konumun fonksiyonu, sürekli veya süreksiz (homojen olmayan katı cisimlerde) olur. Son olarak ise, sadece dış yüklemenin olduğu (dış kuvvetin dışında oluşmuş iç gerilmelerin, ısıl gerilmelerin ve dinamik etkinin olmadığı) kabul edilir.

4.1. Ortotropik Malzemelerde Gerilme-Şekil Değiştirme Bağıntıları

Bir malzemeye izotropik denilebilmesi için verilen herhangi bir noktadaki tüm malzeme özelliklerinin yönden bağımsız olmaları gerekir. Diğer taraftan, bir malzemenin anizotropik olabilmesi için yöne bağlı malzeme özelliklerinin olması gerekir. Seçilmiş koordinat sistemine göre eğer m malzeme özelliği olarak tanımlanırsa izotropik malzemeler için $m = m'$ ve anizotropik malzemeler için $m \neq m'$ dir. Şekil 4.1' de herhangi bir malzeme için koordinat sistemi oryantasyonu görülmektedir.



Şekil 4.1. İzotropik ve anizotropik malzemelerin tanımlarının şematik gösterimi.

Anizotropik malzeme için gerilme-şekil değiştirme bağıntıları aşağıdaki şekilde verilir:

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl} \sigma_{kl} \quad 4.1.$$

ε_{ij} şekil değiştirme tensörü, σ_{kl} gerilme tensörü ve C_{ijkl} dördüncü dereceden uygunluk (*compliance*) tensörüdür. Uygunluk tensörünün 81 elemanı olmasına rağmen gerilme ve şekil değiştirme tensörlerinde simetri uygulanarak bağımsız elemanların sayısı 36'ya iner.

$$\varepsilon_i = C_{ij} \sigma_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad 4.2.$$

Kompozit yapıların mukavemetlerinin belirlenmesi ve gerilme analizlerinin gerçekleştirilebilmesi için öncelikle kompozit malzemelerde gerilme-şekil değiştirme bağıntısının incelenmesi gerekmektedir (Kaw, 1997). Temel Hooke kanunu üç boyutlu bir cisim için şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad 4.3.$$

Burada C_{ij} elastiklik katsayılarıdır. Şekil değiştirme enerji yoğunluğu fonksiyonu U_0 kullanılarak bağımsız parametrelerin sayısı 21'e iner.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & & & & & \\ & C_{22} & & & & \\ & & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad 4.4$$

simetrik

$$\sigma_1 = \sigma_{11}, \sigma_2 = \sigma_{22}, \sigma_3 = \sigma_{33}, \sigma_4 = \sigma_{23}, \sigma_5 = \sigma_{13}, \sigma_6 = \sigma_{12}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}, \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}, \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23}, \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13}, \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12} \quad 4.5.$$

Denklem 4.3' de verilen bağıntı anizotropik malzemelerin gerilme-şekil değiştirme bağıntılarının en genel halidir. Bazı anizotropik malzemelerde malzeme simetrisi vardır.

Bu durum ise uygunluk matrisinin bağımsız eleman sayısını azaltır. Yukarıda bahsedilen simetri ise, elastik simetri düzlemi olarak tanımlanır. Bu terim, Yılmaz (2006)' da bahsedildiği gibi, Ochoa ve Reddy (1992) tarafından şu şekilde tanımlanmıştır: “Bir noktadaki elastik katsayıları, belirli bir düzlemdeki her bir koordinat sistemi çifti için bir değerinin yansıması olacak şekilde aynı değerlere sahiptir. Bu düzlem, adı geçen nokta için elastik simetri düzlemi olarak tanımlanır.” Ortotropik malzemenin birbirine dik üç elastik simetri düzlemi vardır. Bu durumda genelleştirilmiş Hooke kanunu x, y, z koordinatlarında gerilme-şekil değiştirme bağıntıları için Lekhnitskii (1968) tarafından aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= C_{11}\sigma_x + C_{12}\sigma_y + C_{13}\sigma_z \\
 \varepsilon_y &= C_{12}\sigma_x + C_{22}\sigma_y + C_{23}\sigma_z \\
 \varepsilon_z &= C_{13}\sigma_x + C_{23}\sigma_y + C_{33}\sigma_z \\
 \gamma_{yz} &= C_{44}\tau_{yz} \\
 \gamma_{xz} &= C_{55}\tau_{xz} \\
 \gamma_{xy} &= C_{66}\tau_{xy}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ortotropik malzemelerde birbirlerine dik doğrultuda üç eksenle simetrik malzeme özelliği mevcuttur. Bağımsız malzeme parametrelerinin sayısı 9' a inmiştir. Bu malzemeler için gerilme-şekil değiştirme ilişkisi şu şekilde ifade edilmektedir:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \tag{4.7}$$

Ortotropik malzemeler için uygunluk matrisi $[C]$ mühendislik sabitleri cinsinden şu şekilde yazılabilir:

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{12}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$$

4.8.

4.2.Ortotropik FDM' lerde Gerilme-Şekil Değişirme Bağlıları

İzotropik FDM için Hooke kanunu aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\sigma_{xx}(x, y) = \frac{\mu(x, y)}{\kappa - 1} \left[(\kappa + 1) \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) + (3 - \kappa) \frac{\partial}{\partial y} v(x, y) \right] \quad 4.9a$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = \frac{\mu(x, y)}{\kappa - 1} \left[(\kappa + 1) \frac{\partial}{\partial y} v(x, y) + (3 - \kappa) \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) \right] \quad 4.9b$$

$$\sigma_{xy}(x, y) = \mu(x, y) \left[\frac{\partial}{\partial y} u(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) \right] \quad 4.9c$$

Ortotropik FDM için ise Hooke kanunu aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\sigma_{xx}(x, y) = \frac{\bar{E}(x, y)}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) + \nu \frac{\partial}{\partial y} v(x, y) \right] \quad 4.10a$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = \frac{\bar{E}(x, y)}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial}{\partial y} v(x, y) + \nu \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) \right] \quad 4.10b$$

$$\sigma_{xy}(x, y) = \frac{\bar{E}(x, y)}{2(\kappa + \nu)} \left[\frac{\partial}{\partial y} u(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) \right] \quad 4.10c$$

Yukarıdaki u ve v sırası ile yerdeğiştirmenin x ve y yönlerindeki bileşenleridir.

$\bar{E}(x, y)$ ' nin tanımı ise derecelendirmenin yönüne göre değişmektedir.

5. PROBLEMİN FORMÜLASYONU

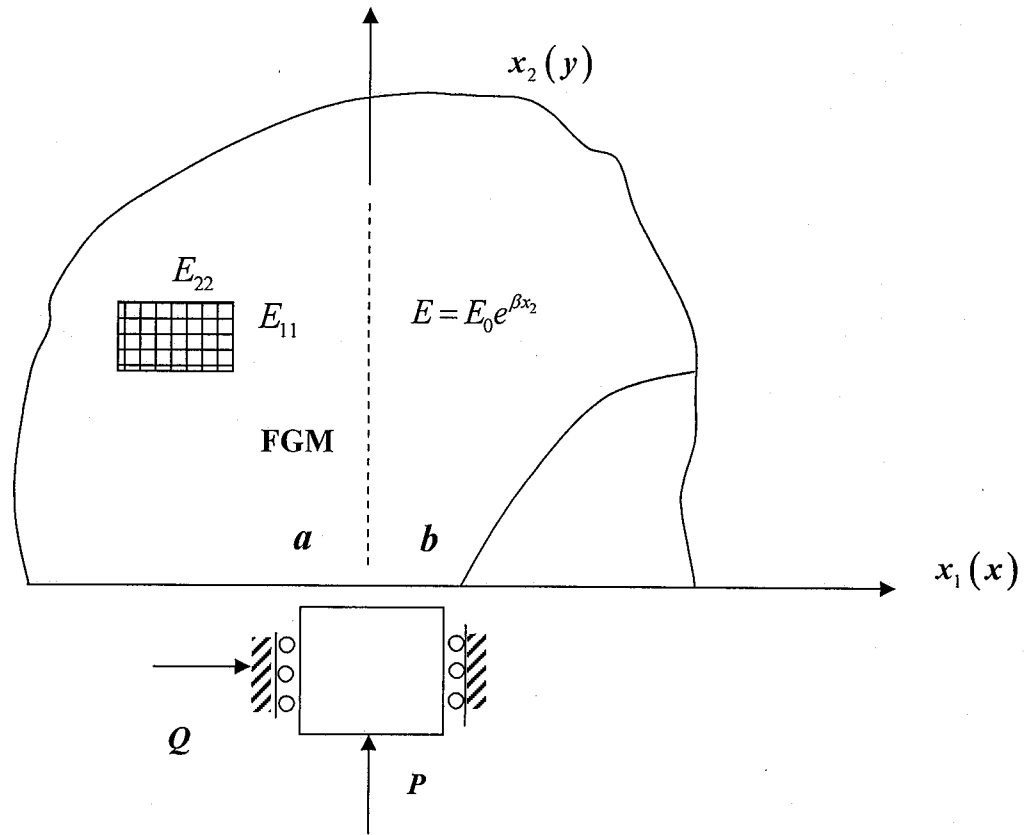
5.1.Giriş

Bu bölümde amaç, yarı sonsuz düzlemde $E_0 \exp(\gamma y)$ şeklinde modellenmiş ortotropik FDM' de rijit baskı aracılığı ile oluşmuş kayma temas problemini incelemektir. Malzemenin düşey yönde derecelendirilmiş ortotropik, düzlem elastik olduğu kabul edilmiştir. Problem dikdörtgen baskı profili (*flat stamp*) için sayısal olarak çözülecektir.

5.2. Düşey Yönde Derecelendirilmiş Ortotropik FDM' de Temas Mekanîği Problemi

Bu çalışmadaki temel problem; yüzeydeki kuvvet, rijit baskı aracılığı ile elastik derecelendirilmiş yarı düzleme transfer edildiği zaman oluşan temas bölgesindeki gerilme dağılımını elde etmektir. Bu bölüm; Güler (1996)' da izotropik FDM' lerin temas mekanîği formülasyonunda kullanılan metot, Krenk (1979), Öztürk ve Erdoğan (1997) ve Öztürk ve Erdoğan (1999) tarafından ortotropik FDM' ler için geliştirilen metotla birleştirilerek çözülmüştür.

Şekil 5.1.' de, düşey yönde heterojen ortotropik yarı sonsuz düzlemdeki kayma düzlem temas mekanîği probleminin genel şekli verilmiştir:



Şekil 5.1. Düşey yönde derecelendirilmiş ortotropik malzemedeki düzlem temas mekaniği probleminin genel gösterimi.

Yukarıdaki şekilde, rijit dikdörtgen profilli baskı ortotropik FDM'ye uygulanmaktadır ve x_1 ve x_2 eksenleri ortotropinin asal eksenleridir. Malzeme, x_2 yönünde derecelendirilmiştir. Temas alanı, derecelendirmenin yönüne diktir.

Bu düzlem elastisite probleminde; temas bölgesinden ortalama normal kuvvet, P , ve kaymalı temas olduğu için aksenal kuvvet (*tangential force*), ηP , aktarılmaktadır. η yarı düzlemin üst yüzeyindeki sabit sürtünme katsayısını göstermektedir. Bu problemde Coulomb sürtünme modeli kullanılacağından temas sonucu aktarılan aksenal kuvvetin yeterince büyük ve normal kuvvet ile sürtünme katsayısının çarpımına eşit olduğu kabul edilir. Temas alanı Şekil 5.1'de gösterilen $x_1 = a$ ile $x_1 = b$ arasındadır. Kaymalı temasın ara yüzeyde olduğu kabul edilmektedir. Ayrıca, temas alanına yakın bölgedeki gerilme dağılımı arandığı için baskı altındaki katıya yarı sonsuz düzlem kabulü ile yaklaşılmaktadır. Çünkü; düzlemin alanı temas alanı, $b - a$, ile karşılaştırıldığında çok büyüktür. Hertz' in temas alanı temastaki parçaların geometrilerine göre yeterince küçükse ve diğer yüzeylerden yeterince uzakta kabulü de yarı düzlem yaklaşımını işaret eder.

Başka bir deyişle, temas halindeki katıların yerel olarak yüzeysel eğriliklerinin olduğu kabul edilir. Bu eğriliklerin boyutunun $(a + b)$ karşılaştırıldığında baskı yarıçapları olan R_1 ve R_2 ' ye göre küçük olduğu kabul edilir. Elastik modülüne üstel yaklaşım derecelendirilmiş malzemede sadece malzeme özelliklerine yakın yaklaşım sağlamakla kalmaz, bunun yanında integral dönüşüm metodu kullanılarak çözülebilen sabit katsayılı diferansiyel denklem elde edilmesini de sağlar. Temas probleminin çözümü Poisson oranı, ν ' den bağımsız olduğundan sabittir (Dağ, 2001).

Bu bölümde, yarı düzlemin yüzeyindeki bilinmeyen temas gerilmesi sebebi ile oluşmuş kayma temas gerilme ve yer değiştirme alanları genel elastisite denklemleri E_{ij}, G_{ij} kullanılarak formüle edilecek ve tekil integral denklemine dönüştürülecektir. Malzeme heterojenliğinin, sürtünmenin temas gerilmesi üzerindeki etkisi incelenecektir. Gerilmeler ve yer değiştirmeler bilinmeyen fonksiyon, $p(x)$, cinsinden elde edilecektir.

Heterojen ortotropik ortamda $a < x_1 < b$ arasında temas gerilmesi olan düzlem elastisite problemi ele alınsın. Bilinen tanımlaması ile $u_1(x_1, x_2)$ ve $u_2(x_1, x_2)$ sırası ile x_1 ve x_2 eksenlerindeki yer değiştirme bileşenleridir. $\sigma_{11}(x_1, x_2), \sigma_{22}(x_1, x_2), \sigma_{12}(x_1, x_2)$ malzemenin asal eksenlerine göre gerilme bileşenleri ve $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$, malzemenin asal eksenlerine göre şekil değiştirme bileşenleridir. Bu problemin çözümünde; düşey yönde derecelenmiş bir yüzeyin rijit bir baskı ile kayma temasında olduğu, temas gerilme dağılımındaki önemsiz etkileri sebebiyle Poisson oranının sabit olduğu ve elastik derecelenmenin derinlik yönünde olduğu varsayılmıştır. Mühendislik elastik parametreleri dört yeni parametre ile yani etkin katılık, E , etkin Poisson oranı, ν , kayma parametresi κ , ve katılık oranı, δ , ile ilk olarak Krenk (Krenk, 1979) tarafından değiştirilmiştir. Bu çalışmada da adı geçen parametreler kullanılacaktır. Bu dört yeni parametre ile lineer gerilme-şekil değiştirme bağıntısı aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \delta^{-2} & -\nu & 0 \\ -\nu & \delta^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 2(\kappa + \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \delta^{-2} & \nu & 0 \\ \nu & \delta^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu^2}{2(\kappa+\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad 5.2$$

Burada:

$$E = \sqrt{E_{11}E_{22}}, \quad \delta^4 = \frac{E_{11}}{E_{22}} = \frac{\nu_{12}}{\nu_{21}}, \quad \nu = \sqrt{\nu_{12}\nu_{21}}, \quad \kappa = \frac{E}{2G_{12}} - \nu \quad 5.3$$

düzlem gerilme durumu için verilmiştir. Düzlem şekil değiştirme durumunda bu dört parametre aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$E = \sqrt{\frac{E_{11}E_{22}}{(1-\nu_{13}\nu_{31})(1-\nu_{23}\nu_{32})}}, \quad \nu = \sqrt{\frac{(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32})(\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31})}{(1-\nu_{13}\nu_{31})(1-\nu_{23}\nu_{32})}}, \quad 5.4$$

$$\delta^4 = \frac{E_{11}}{E_{22}} \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{1-\nu_{13}\nu_{31}}, \quad \kappa = \frac{E}{2G_{12}} - \nu$$

Young modülü, E_i , Poisson oranı, ν_i , ve $\delta = \kappa = 1$, özel bir durum olup izotropik malzemeyi verir ve düzlem gerilme için:

$$E = E_i, \quad \nu = \nu_i \quad 5.5$$

ve düzlem şekil değiştirme için:

$$E = \frac{E_i}{1-\nu_i^2}, \quad \nu = \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \quad 5.6$$

şeklinde tanımlanır.

Homojen ortotropik ortamlarda $-1 < \kappa < \infty$ ve $\kappa \leq -1$ fiziksel olarak herhangi bir anlamı yoktur (Öztürk ve Erdoğan, 1997).

Katılık oranı, δ , dan bağımsız değişkenleri elde etmek için koordinat dönüşümü yapılır. Burada x ve y , $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ ve $\sigma_{xx}(x, y)$, $\sigma_{yy}(x, y)$ ve $\sigma_{xy}(x, y)$ sırası ile dönüştürülmüş koordinat sistemindeki yeni apsis ve ordinat, yer değiştirme bileşenleri ve gerilmelerdir (Krenk, 1979):

$$x = \frac{x_1}{\sqrt{\delta}}, \quad y = x_2 \sqrt{\delta}, \quad u(x, y) = \sqrt{\delta} u_1(x_1, x_2), \quad v(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} u_2(x_1, x_2)$$

$$\sigma_{xx}(x, y) = \frac{\sigma_{11}(x_1, x_2)}{\delta}, \quad \sigma_{yy}(x, y) = \delta \sigma_{22}(x_1, x_2), \quad \sigma_{xy}(x, y) = \sigma_{12}(x_1, x_2), \quad 5.7$$

Hacimsel kuvvetler yok kabul edilirse, denge denklemleri düzlemde kartezyen koordinat sisteminde durağan durum (*steady state*) için aşağıdaki şekilde elde edilir. Yer değiştirmelerin $x-y$ düzleminde olduğu kabul edilmiştir:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad 5.8a$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = 0, \quad 5.8b$$

Elastik parametrelerin dağılımı ile ilgili iki kabul yapılabilir. İlki, malzemedeki heterojenlik durumu ile ilgili olarak E_{11} , E_{22} ve G_{12} dağılımının orantısal olduğudur. İkinci kabul ise daha önce de bahsedildiği gibi temas probleminin çözümünün ν , ' den bağımsız olduğudur (Dağ, 2001). Dolayısı ile ν , κ , ve δ , ' nın sabit olduğu kabul edilir.

Formülasyonda ortotropik ortam için geliştirilen elastisite teorisi ve yarı sonsuz düzlem yaklaşımı kullanılacaktır. Ortotropik kabulün anlamı, malzeme özelliklerinin üç ortogonal asal eksenlerinde farklı olmasıdır. Sadece küçük şekil değiştirmelerin olduğu kabul edilmiştir. Böylece, temas alanı deforme olmamış yüzeylerin eğrisinin yarıçapından çok küçük olduğu durumlarda yüksek seviyedeki şekil değiştirmelerin yok kabul edilmesi uygundur. Bu kabuller altında temastaki her yapı, düzlem bir yüzeyle sınırlandırılmış yarı-sonsuz yapı olarak görülürse ki yarı sonsuz düzlem olarak adlandırılır her yüzeydeki gerilmeler daha iyi bir tahminle hesaplanabilir. Bu kabulleri ya da idealleştirmeleri temas mekaniğinde kullanmak gelenek haline gelmiştir ve bunlar ilk defa Hertz (1881) tarafından tanımlanmıştır.

Küçük şekil değiştirmelerin olduğu kabulü ve ortotropik düzlem elastik ortamda düzlem şekil değiştirme veya genelleştirilmiş düzlem gerilme şartları altında gerilme-şekil değiştirme bağıntıları olan Hooke kanunu dönüştürülmüş koordinat sisteminde aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\sigma_{xx}(x, y) = \frac{\bar{E}(x, y)}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \nu \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right] \quad 5.9a$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = \frac{\bar{E}(x, y)}{1-\nu^2} \left[\nu \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right] \quad 5.9b$$

$$\sigma_{xy}(x, y) = \frac{\bar{E}(x, y)}{2(\kappa+\nu)} \left\{ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right\} \quad 5.9c$$

Burada:

$$\bar{E}(x, y) = E(x_1, x_2) \quad 5.10$$

Etkin katılık, E , etkin Poisson oranı, ν , kayma parametresi ve δ , katılık oranı sabitleri ve $E(x_1, x_2)$ fonksiyonunun tanımladığı fiziksel parametreler aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$E_{11}(x_1, x_2) = E(x_1, x_2)\delta^2, \quad E_{22}(x_1, x_2) = E(x_1, x_2)/\delta^2, \quad G(x_1, x_2) = \frac{E(x_1, x_2)}{2(\kappa + \nu)},$$

$$\nu_{12} = \nu\delta^2, \quad \nu_{21} = \nu/\delta^2, \quad 5.11$$

Düzlem temas problemleri için, temel kısmî diferansiyel denklemler yerdeğiştirme denklemleri kullanılarak elde edilir. 5.9a, 5.9b ve 5.9c. denklemler, 5.8a ve 5.8b.' denklemlerde yerine konulursa aşağıdaki Navier denklemleri yani temel (*governing*) yer değiştirme denklemleri elde edilir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \beta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\beta_1}{E} \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{E} \frac{\partial \bar{E}}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad 5.12a$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\beta_1}{E} \frac{\partial \bar{E}}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{E} \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad 5.12b$$

Burada:

$$\beta_1 = \frac{2(\kappa + \nu)}{1 - \nu^2} \quad 5.13a$$

$$\beta_2 = 1 + \nu\beta_1 \quad 5.13b$$

Bunlara ilâveten; malzeme özelliklerinin sadece x_2 ' nin fonksiyonu olduğu kabul edilir ve matematiksel amaca uygunluk için $E(x_1, x_2)$ fonksiyonuna üstel olduğu kabulü ile yaklaşılabilir:

$$E(x_1, x_2) = E(x_2) = E_0 e^{\beta x_2} \quad 5.14a$$

$$\bar{E}(x, y) = \bar{E}(y) = E_0 e^{\gamma y} \quad 5.14b$$

$$\gamma = \frac{\beta}{\sqrt{\delta}} \quad 5.14c$$

Yukarıdaki denklemde γ Birimi 1/uzunluktur ve eğri uydurmak (*curve-fitting*) için kullanılır. Dönüştürülmüş koordinat sisteminde gerilmeler aşağıdaki şekli alır:

$$\sigma_{xx}(x, y) = \frac{E_0 e^{\gamma y}}{(1-\nu_0^2) 1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \nu \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right\} \quad 5.15a$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = \frac{E_0 e^{\gamma y}}{(1-\nu_0^2) 1-\nu^2} \left\{ \nu \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right\} \quad 5.15b$$

$$\sigma_{xy}(x, y) = \frac{E_0 e^{\gamma y}}{(1-\nu_0^2) 2(\kappa + \nu)} \left\{ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right\} \quad 5.15c$$

5.14b. denklem, 5.12a. ve 5.12b. denklemlerde yerine konulursa:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \beta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad 5.16a$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \beta_1 \gamma \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad 5.16b$$

elde edilir. Sonraki bölümlerde yer değiştirmeler ve gerilme alanları aşağıdaki bilinmeyen fonksiyon cinsinden elde edilecektir.

5.2.1. Sınır şartları

Şekil 5.1 göz önüne alınır sağlanması gereken sınır şartları aşağıdadır. Temas alanı dışında herhangi bir kuvvet, tork veya moment uygulanmadığı için temas alanı dışında normal veya kayma gerilmesi yoktur:

$$\sigma_{22}(x_1, 0) = \begin{cases} -p(x_1) & a < x_1 < b \\ 0 & -\infty < x_1 < a, \quad b < x_1 < \infty \end{cases} \quad 5.17a$$

$$\sigma_{12}(x_1, 0) = \begin{cases} -q(x_1) & a < x_1 < b \\ 0 & -\infty < x_1 < a, \quad b < x_1 < \infty \end{cases} \quad 5.17b$$

Bu çalışmada dinamik etkilerin olmadığı ve kaymalı temas kabul edildiği için temas alanındaki kayma gerilmesi Coulomb kanunu ile elde edilir:

$$\sigma_{12}(x_1, 0) = \eta \sigma_{22}(x_1, 0) \quad a < x_1 < b \quad 5.17c$$

$$q(x_1, 0) = \eta p(x_1, 0) \quad a < x_1 < b \quad 5.17d$$

Yukarıda verilen sınır şartlarından, 5.17b. denklem ve 5.17c denklem birleştirilmiş sınır şartlarını yani aynı yarı düzlem yüzeyinde gerilme ve yer değiştirmeleri birleştirdiği için karışık değerli sınır şartlarını (*mixed value boundary conditions*) meydana getirir.

Aslında verilen sınır şartları gerilmeler için olduğu gibi yer değiştirmeler için de geçerlidir. Bu tür çalışmalarda genel denklemler tekil integral denklemine indirgenirler (Erdoğan, 1978). Başka bir deyişle, bu tarz problemlerde, 5.17a,b. denklemler olduğu gibi yer değiştirmeler yüzey gerilmelerini belirlemek için temas bölgesinin yüzeyinde belirlendiği için karışık değerli sınır şartlı problemler olarak adlanırlar. Tekil integral denklemler ortogonal polinomlar kullanılarak sayısal olarak çözülürler. Tekil integral denklemlerin uygulandığı mekanikte karşılaşılan karışık değerli sınır şartlı problemlerin çözüm tekniği Erdoğan (1978) tarafından geliştirilen metottur. Bu çalışmada da bahsi geçen metot izlenecektir.

5.2.2. Temas probleminin formülasyonu

5.16a ve 5.16b. denklemlerin genel çözümü x yönündeki Fourier dönüşümü kullanılarak elde edilir. Bunun için yer değiştirme bileşenleri $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ Fourier dönüşümleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$F(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad 5.18a$$

$$G(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, y) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad 5.18b$$

Burada $i = \sqrt{-1}$. $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ fonksiyonları aşağıdaki ters dönüşümlerle verilir:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha, y) e^{i\alpha x} d\alpha \quad 5.19a$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\alpha, y) e^{i\alpha x} d\alpha \quad 5.19b$$

Fourier dönüşümünün kullanılmasındaki amaç, kısmî diferansiyel denklemleri adi diferansiyel denklemlere dönüştürmek ve çözümü lineerleştirmektir.

5.19a. ve 5.19b. denklemler, 5.16a. ve 5.16b. denklemlerde yerine konulursa sabit katsayılı diferansiyel denklemler elde edilir:

$$\frac{d^2 F}{dy^2} - \alpha^2 \beta_1 F + \beta_2 i \alpha \frac{dG}{dy} + \gamma \frac{dF}{dy} + i \alpha \gamma G = 0 \quad 5.20a$$

$$\beta_1 \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \beta_1 \gamma \frac{\partial G}{\partial y} - \alpha^2 G + \beta_2 i \alpha \frac{dF}{dy} + \beta_1 \gamma \nu i \alpha F = 0 \quad 5.20b$$

Çözümün aşağıdaki şekilde olduğu kabul edilirse:

$$F(\alpha, y) = C(\alpha) e^{ny} \quad 5.21a$$

$$G(\alpha, y) = D(\alpha) e^{ny} \quad 5.21b$$

5.20a ve 5.20b. denklemlerin çözümü aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$F(\alpha, y) = \sum_{j=1}^4 C_j(\alpha) e^{n_j y} \quad 5.22a$$

$$G(\alpha, y) = \sum_{j=1}^4 D_j(\alpha) e^{n_j y} \quad 5.22b$$

5.20 ve 5.21. denklemler, matris şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} (n^2 + \gamma n - \beta_1 \alpha^2) & (i \beta_2 \alpha n + i \gamma \alpha) \\ (i \beta_2 \alpha n + i \alpha \beta_1 \gamma \nu) & (\beta_1 n^2 + \beta_1 \gamma n - \alpha^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C(\alpha) \\ D(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 5.23$$

Karakteristik denklem aşağıdaki gibi verilebilir:

$$(n^2 + \gamma n - \kappa \alpha^2 - i |\alpha| \delta_1)(n^2 + \gamma n - \kappa \alpha^2 + i |\alpha| \delta_1) = 0 \quad 5.24$$

Karakteristik denklemin kökleri aşağıdadır:

$$n_1 = \frac{1}{2} \left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4\kappa \alpha^2 + 4i |\alpha| \delta_1} \right) \quad \Re(n_1) > 0 \quad 5.25a$$

$$n_2 = \frac{1}{2} \left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4\kappa \alpha^2 + 4i |\alpha| \delta_1} \right) \quad \Re(n_2) < 0 \quad 5.25b$$

$$n_3 = \frac{1}{2} \left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4\kappa \alpha^2 - 4i |\alpha| \delta_1} \right) \quad \Re(n_3) > 0 \quad 5.25c$$

$$n_4 = \frac{1}{2} \left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4\kappa\alpha^2 - 4i|\alpha|\delta_1} \right) \quad \Re(n_4) < 0 \quad 5.25d$$

Burada:

$$\delta_1 = \sqrt{\nu\gamma^2 + (1 - \kappa^2)\alpha^2}$$

$n_j, j = 1, \dots, 4$, 5.24. denklemin kökleridir. $C_j(\alpha)$ ve $D_j(\alpha) j = 1, \dots, 4$ bilinmeyen fonksiyonlardır ve birbirlerinden bağımsız olmayıp aralarındaki ilişki 5.22a ve 5.22b.denklemler, 5.20b. denklemde yerine konularak elde edilir:

$$C_j(\alpha) = A_j D_j(\alpha) \quad j = 1, 2 \quad 5.26a$$

$$C_j(\alpha) = -\bar{A}_j D_j(\alpha) \quad j = 3, 4 \quad 5.26b$$

Burada $A_j(\alpha)$:

$$A_j(\alpha) = \frac{(\beta_1 \kappa - 1)\alpha^2 + i\beta_1 |\alpha| \delta_1}{-i\alpha(\beta_2 n_j + \beta_1 \gamma \nu)} \quad 5.27$$

Çözüm sonsuzda sınırlı olduğu için düzenlilik (*regularity*) sınır şartı aşağıdaki dönüştürülmüş koordinat sisteminde aşağıdaki gibidir:

$$\sigma_{xx}(x, y), \sigma_{xy}(x, y) \rightarrow 0 \quad |x^2 + y^2| \rightarrow \infty \quad 5.28$$

Dikkat edilirse, $|x^2 + y^2| \rightarrow \infty$ $\sigma_{yy}(x, y)$ ve $\sigma_{xy}(x, y)$ fonksiyonlarının sınırlı olması gerekir. Bu durum $\Re(n_j) < 0$ gerektirir. Buna göre, karakteristik denklemin köklerinden gerçek kısımları negatif olanlar yani $\Re(n_j) < 0 j = 2, 4$ seçilir. Dolayısı ile, 5.22a. ve 5.22b. denklemdeki $D_1(\alpha)$ ve $D_3(\alpha)$ sıfır olur. 5.22.denklemin aşağıdaki şekli alır:

$$F(\alpha, y) = A_2 D_2(\alpha) e^{n_2 y} - \bar{A}_4 D_4(\alpha) e^{n_4 y} \quad 5.29a$$

$$G(\alpha, y) = D_2(\alpha) e^{n_2 y} + D_4(\alpha) e^{n_4 y} \quad 5.29b$$

Sınırdaki kuvvet, tork veya momentin Fourier dönüşümleri aşağıdaki şekilde tanımlanırsa:

$$P(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{yy}(t, 0) e^{-i\alpha t} dt \quad 5.30a$$

$$Q(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{xy}(t, 0) e^{-i\alpha t} dt \quad 5.30b$$

$D_2(\alpha)$ ve $D_4(\alpha)$ bilinmeyen fonksiyonları elde etmek için 5.15b. ve 5.15c. denklemlerin x yönündeki Fourier dönüşümleri alınır ve $y=0$ ' da 5.30a ve 5.30b. denklemler de yerine konulursa aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$\frac{d}{dy} G(\alpha, 0) + \nu i \alpha F(\alpha, 0) = \frac{(1-\nu^2)(1-\nu_0^2)}{E_0} P(\alpha) \quad 5.31a$$

$$\frac{d}{dy} F(\alpha, 0) + i \alpha G(\alpha, 0) = \frac{2(\kappa+\nu)(1-\nu_0^2)}{E_0} Q(\alpha) \quad 5.31b$$

Dolayısı ile $D_2(\alpha)$ ve $D_4(\alpha)$ aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$D_2(\alpha) = \frac{(1-\nu_0^2)}{E_0 \Delta_0(\alpha)} \left[-(1-\nu^2) \bar{Z}_2(\alpha) P(\alpha) - 2(\kappa+\nu) \bar{Z}_1(\alpha) Q(\alpha) \right] \quad 5.32a$$

$$D_4(\alpha) = \frac{(1-\nu_0^2)}{E_0 \Delta_0(\alpha)} \left[-(1-\nu^2) Z_2(\alpha) P(\alpha) + 2(\kappa+\nu) Z_1(\alpha) Q(\alpha) \right] \quad 5.32b$$

Burada:

$$Z_1(\alpha) = n_2 + i \alpha \nu A_2(\alpha) \quad 5.33a$$

$$Z_2(\alpha) = A_2(\alpha) n_2 + i \alpha \quad 5.33b$$

$$\Delta_0(\alpha) = -Z_1(\alpha) \bar{Z}_2(\alpha) - \bar{Z}_1(\alpha) Z_2(\alpha) = -[Z_1(\alpha) \bar{Z}_2(\alpha) + \bar{Z}_1(\alpha) Z_2(\alpha)] \quad 5.34$$

Şu ana kadar $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ ' yi elde edebilmek için bilinmeyen sabitler $D_2(\alpha)$, $D_4(\alpha)$ Fourier tanımlı alanında (*domain*) elde edildi. Daha önce de Bölüm 5.2.1' de de anlatıldığı gibi, yer değiştirme vektörü sınırın $x_2 = 0$, kısmında ve kuvvet, moment veya tork vektörü $x_1 = 0$ kısmında tanımlı olduğu için karışık değerli sınır şartlı bir problemdir. Problemin girdisi yer değiştirme vektörünün x_2 bileşenidir ve bilinmeyenler $\sigma_{12}(x_1, 0)$ ve $\sigma_{22}(x_1, 0)$ ' dir. 5.19a ve 5.19b denklemlerin türevleri x ' e göre alınırsa aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\frac{d}{dx}v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\alpha G(y, \alpha) \exp(i\alpha x) d\alpha \quad 5.35a$$

$$\frac{d}{dx}u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\alpha F(\alpha, y) \exp(i\alpha x) d\alpha \quad 5.35b$$

5.29a ve 5.29b. denklemler, 5.35a ve 5.35b. denklemlerde yerine konular ve 5.30a ve 5.30b. denklemler de kullanılarak aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$2\pi \frac{E_0}{2(1+\nu_0)} \frac{d}{dx}v(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{11}(x, y, t) \sigma_{yy}(t, y) dt + \int_{-\infty}^{\infty} K_{12}(x, y, t) \sigma_{xy}(t, y) dt \quad 5.36a$$

$$2\pi \frac{E_0}{2(1+\nu_0)} \frac{d}{dx}u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{21}(x, y, t) \sigma_{yy}(t, y) dt + \int_{-\infty}^{\infty} K_{22}(x, y, t) \sigma_{xy}(t, y) dt \quad 5.36b$$

Burada:

$$K_{11}(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_{11}(\alpha, y) e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha \quad 5.37a$$

$$K_{21}(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_{21}(\alpha, y) e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha \quad 5.37b$$

$$K_{12}(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_{12}(\alpha, y) e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha \quad 5.37c$$

$$K_{22}(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_{22}(\alpha, y) e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha \quad 5.37d$$

$$H_{11}(\alpha, y) = -\frac{i\alpha(1-\nu_0)}{\Delta_0(\alpha)} \left[\frac{(1-\nu^2)}{2} \{ \bar{Z}_2(\alpha) e^{n_2 y} + Z_2(\alpha) e^{n_4 y} \} \right] \quad 5.38a$$

$$H_{21}(\alpha, y) = -\frac{i\alpha(1-\nu_0)}{\Delta_0(\alpha)} \left[\frac{(1-\nu^2)}{2} \{ A_2 \bar{Z}_2(\alpha) e^{n_2 y} - \bar{A}_2 Z_2(\alpha) e^{n_4 y} \} \right] \quad 5.38b$$

$$H_{12}(\alpha, y) = \frac{i\alpha(1-\nu_0)}{\Delta_0(\alpha)} \left[(\kappa + \nu) \{ -\bar{Z}_1(\alpha) e^{n_2 y} + Z_1(\alpha) e^{n_4 y} \} \right] \quad 5.38c$$

$$H_{22}(\alpha, y) = \frac{i\alpha(1-\nu_0)}{\Delta_0(\alpha)} \left[(\kappa + \nu) \{ -A_2(\alpha) \bar{Z}_1(\alpha) e^{n_2 y} - \bar{A}_2(\alpha) Z_1(\alpha) e^{n_4 y} \} \right] \quad 5.38d$$

Burada:

$$\kappa_1 = \sqrt{\kappa^2 - 1} \quad 5.39$$

$$r_1 = \sqrt{\kappa - \sqrt{\kappa^2 - 1}} \quad r_2 = \sqrt{\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 1}} \quad 5.40$$

$$a_{10} + a_{20} = -\frac{\sqrt{\kappa + \kappa_1} \kappa_1 \sqrt{\kappa - \kappa_1}}{-\sqrt{\kappa - \kappa_1} + \sqrt{\kappa + \kappa_1}} \quad 5.41a$$

$$\mathcal{A}_{10} + \mathcal{A}_{20} = (1 - \nu_0)(a_{10} + a_{20}) \quad 5.41b$$

$$c_{10} + c_{20} = -\frac{1}{2} \frac{(\sqrt{\kappa + \kappa_1} \nu - \sqrt{\kappa + \kappa_1} \kappa_1 + \sqrt{\kappa + \kappa_1} \kappa - \sqrt{\kappa - \kappa_1} \nu - \sqrt{\kappa - \kappa_1} \kappa_1 - \sqrt{\kappa - \kappa_1} \kappa)}{\sqrt{\kappa - \kappa_1} - \sqrt{\kappa + \kappa_1}} \quad 5.42a$$

$$C_{10} + C_{20} = (1 - \nu_0)(c_{10} + c_{20}) \quad 5.42b$$

Kernellerin içerisindeki tekillikler integrandın asimptotik davranışdır. Asimptotik analiz $\alpha \rightarrow \infty$ tekilliklerin çıkarılması için yapılmalıdır. Kerneller $K_{11}(x, y, t), K_{12}(x, y, t),$

$K_{21}(x, y, t)$ ve $K_{22}(x, y, t)$ ' in asimptotik açılımlarının detayları, EK-A' da verilmiştir (Murray, 1984). Fredholm kernellerin sayısal olarak hesaplanması EK-B' de ve logaritmik kernellerin hesaplanması EK-C' de verilmiştir. Sonsuz integrallerin asimptotik olarak $\alpha \rightarrow \infty$ açılmasının iki sebebi vardır: Birincisi integral denklemi ve çözümünün tekil davranışının integrandların kernellerinin α ' nin büyük açılımından elde edilen öncü terimden gelmesi, ikincisi ise, sayısal olarak tekil integral denkleminin çözümündeki hassasiyeti artırmasıdır. $\alpha \rightarrow \infty$ $H_{11}(\alpha, y)$, $H_{12}(\alpha, y)$, $H_{21}(\alpha, y)$ ve $H_{22}(\alpha, y)$ ' ün asimptotik davranışı aşağıda verilmiştir:

$$H_{11}(\alpha, y) = \frac{i\alpha}{|\alpha|} (1 - \nu_0) \left[\left(a_{10} + a_{11} \frac{\gamma}{|\alpha|} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \right) e^{-r_1|\alpha|y} + \left(a_{20} + a_{21} \frac{\gamma}{|\alpha|} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \right) e^{-r_2|\alpha|y} \right] \quad 5.43a$$

$$H_{21}(\alpha, y) = (1 - \nu_0) \left[\left(b_{10} + b_{11} \frac{\gamma}{|\alpha|} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \right) e^{-r_1|\alpha|y} + \left(b_{20} + b_{21} \frac{\gamma}{|\alpha|} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \right) e^{-r_2|\alpha|y} \right] \quad 5.43b$$

$$H_{12}(\alpha, y) = (1 - \nu_0) \left[\left(c_{10} + c_{11} \frac{\gamma}{|\alpha|} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \right) e^{-r_1|\alpha|y} + \left(c_{20} + c_{21} \frac{\gamma}{|\alpha|} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \right) e^{-r_2|\alpha|y} \right] \quad 5.43c$$

$$H_{22}(\alpha, y) = \frac{i\alpha}{|\alpha|} (1 - \nu_0) \left[\left(d_{10} + d_{11} \frac{\gamma}{|\alpha|} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \right) e^{-r_1|\alpha|y} + \left(d_{20} + d_{21} \frac{\gamma}{|\alpha|} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \right) e^{-r_2|\alpha|y} \right] \quad 5.43d$$

5.36a ve ve 5.36b. denklemler aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} 2\pi \frac{E_0}{2(1 + \nu_0)} \frac{d}{dx} v(x, y) = & \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} [K_{11}(x, y, t) - K_{11\infty}(x, y, t)] \sigma_{yy}(t, y) dt \\ & + \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} [K_{12}(x, y, t) - K_{12\infty}(x, y, t)] \sigma_{xy}(t, y) dt \\ & + \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} K_{11\infty}(x, y, t) \sigma_{yy}(t, y) dt \\ & + \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} K_{12\infty}(x, y, t) \sigma_{xy}(t, y) dt \end{aligned} \quad 5.44a$$

$$\begin{aligned}
\lim_{y \rightarrow 0} 2\pi \frac{E_0}{2(1+\nu_0)} \frac{d}{dx} u(x, y) = & \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} [K_{21}(x, y, t) - K_{21\infty}(x, y, t)] \sigma_{yy}(t, y) dt \\
& + \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} [K_{22}(x, y, t) - K_{22\infty}(x, y, t)] \sigma_{xy}(t, y) dt \\
& + \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} K_{21\infty}(x, y, t) \sigma_{yy}(t, y) dt \\
& + \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} K_{22\infty}(x, y, t) \sigma_{xy}(t, y) dt
\end{aligned} \tag{5.44b}$$

$K_{11}(x, y, t), K_{21}(x, y, t), K_{12}(x, y, t)$ ve $K_{22}(x, y, t)$ aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$K_{11}(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[H_{11}(\alpha, y) - \frac{i\alpha}{|\alpha|} [\mathcal{A}_{10} e^{-\eta|\alpha|y} + \mathcal{A}_{20} e^{-r_2|\alpha|y}] \right] e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha + K_{11\infty} \tag{5.45a}$$

$$K_{21}(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[H_{21}(\alpha, y) - [\mathcal{B}_{10} e^{-\eta|\alpha|y} + \mathcal{B}_{20} e^{-r_2|\alpha|y}] \right] e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha + K_{21\infty} \tag{5.45b}$$

$$K_{12}(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[H_{12}(\alpha, y) - [\mathcal{C}_{10} e^{-\eta|\alpha|y} + \mathcal{C}_{20} e^{-r_2|\alpha|y}] \right] e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha + K_{12\infty} \tag{5.45c}$$

$$K_{22}(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[H_{22}(\alpha, y) - \frac{i\alpha}{|\alpha|} [\mathcal{D}_{10} e^{-\eta|\alpha|y} + \mathcal{D}_{20} e^{-r_2|\alpha|y}] \right] e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha + K_{22\infty} \tag{5.45d}$$

Burada:

$$K_{11\infty} = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{|\alpha|} \mathcal{A}_{10} e^{-\eta|\alpha|y} e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{|\alpha|} \mathcal{A}_{20} e^{-r_2|\alpha|y} e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha \tag{5.46a}$$

$$K_{21\infty} = \mathcal{B}_{10} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta|\alpha|y} e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha + \mathcal{B}_{20} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r_2|\alpha|y} e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha \tag{5.46b}$$

$$K_{12\infty} = \mathcal{C}_{10} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta|\alpha|y} e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha + \mathcal{C}_{20} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r_2|\alpha|y} e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha \tag{5.46c}$$

$$K_{22\infty} = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{|\alpha|} \mathcal{D}_{10} e^{-\eta|\alpha|y} e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{|\alpha|} \mathcal{D}_{20} e^{-r_2|\alpha|y} e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha \tag{5.46d}$$

Öztürk ve Erdoğan (1999)' da da anlatıldığı gibi kerneller, $K_{ij}(x, y, t)$, 5.46.

denklemdaki gibi öncü terim olarak $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{|\alpha|} e^{-\eta|\alpha|y} e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha$ ve $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{|\alpha|} e^{-r_2|\alpha|y} e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha$ gibi

integreller içerir. Burada geçen r_1, r_2 ve κ_1 5.39. ve 5.40. denklemlerde tanımlanmıştır

$\kappa \leq -1$ için r_1 ve r_2 tamamen karmaşık yani sanal olur ve integraller tanımlanamaz. Dolayısı ile problemin fiziksel olarak anlamlı bir çözümü olmaz. Ayrıca, homojen ortotropik malzemeler için $\kappa \leq -1$ olduğu durumlarda elastiklik matrisi pozitif olarak tanımlı değildir (Chaou,1962). Dolayısı ile gerçek malzemelerde homojen ya da heterojen kayma parametresi $-1 < \kappa < \infty$ aralığı için tanımlıdır. 5.45a-d.' denklemlerdeki ilk integraller sınırlıdır ve 5.36a-b. denklemlerde yerine konulursa limit integralden sonra konulabilir. Dolayısı ile:

$$K_{11\infty} = \mathcal{A}_{10} \frac{2(t-x)}{r_1^2 y^2 + (t-x)^2} + \mathcal{A}_{20} \frac{2(t-x)}{r_2^2 y^2 + (t-x)^2} \quad 5.47a$$

$$K_{21\infty} = \mathcal{B}_{10} \frac{2y}{r_1^2 y^2 + (t-x)^2} + \mathcal{B}_{20} \frac{2y}{r_2^2 y^2 + (t-x)^2} \quad 5.47b$$

$$K_{12\infty} = \mathcal{C}_{10} \frac{2y}{r_1^2 y^2 + (t-x)^2} + \mathcal{C}_{20} \frac{2y}{r_2^2 y^2 + (t-x)^2} \quad 5.47c$$

$$K_{22\infty} = \mathcal{D}_{10} \frac{2(t-x)}{r_1^2 y^2 + (t-x)^2} + \mathcal{D}_{20} \frac{2(t-x)}{r_2^2 y^2 + (t-x)^2} \quad 5.47d$$

şeklinde yazılabilir. 5.45a-d. denklemlerde $y = 0$ için:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\mathcal{A}_{10} \frac{2(t-x)}{r_1^2 y^2 + (t-x)^2} + \mathcal{A}_{20} \frac{2(t-x)}{r_2^2 y^2 + (t-x)^2} \right] = 2[\mathcal{A}_{10} + \mathcal{A}_{20}] \frac{1}{t-x} \quad 5.48a$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\mathcal{B}_{10} \frac{2y}{r_1^2 y^2 + (t-x)^2} + \mathcal{B}_{20} \frac{2y}{r_2^2 y^2 + (t-x)^2} \right] = 2[\mathcal{B}_{10} + \mathcal{B}_{20}] \pi \delta(t-x) \quad 5.48b$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\mathcal{C}_{10} \frac{2y}{r_1^2 y^2 + (t-x)^2} + \mathcal{C}_{20} \frac{2y}{r_2^2 y^2 + (t-x)^2} \right] = 2[\mathcal{C}_{10} + \mathcal{C}_{20}] \pi \delta(t-x) \quad 5.48c$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\mathcal{D}_{10} \frac{2(t-x)}{r_1^2 y^2 + (t-x)^2} + \mathcal{D}_{20} \frac{2(t-x)}{r_2^2 y^2 + (t-x)^2} \right] = 2[\mathcal{D}_{10} + \mathcal{D}_{20}] \frac{1}{t-x} \quad 5.48d$$

yazılabilir. Yukarıdaki denklem Cauchy tekillikleri ve serbest terimler içermektedir. Dolayısı ile denklemler 5.44a ve 5.44b. denklemler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\mathcal{A}_{10}+\mathcal{A}_{20})} \frac{E_0}{2(1+\nu_0)} \frac{d}{dx} v(x,0) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\mathcal{A}_{10}+\mathcal{A}_{20})} \int_{-\infty}^{\infty} I_{11}(t,x) \sigma_{yy}(t,0) dt \\ &+ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\mathcal{A}_{10}+\mathcal{A}_{20})} \int_{-\infty}^{\infty} I_{12}(t,x) \sigma_{xy}(t,0) dt \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{yy}(t,0)}{t-x} dt + \left(\frac{C_{10}+C_{20}}{\mathcal{A}_{10}+\mathcal{A}_{20}} \right) \sigma_{xy}(x,0) \end{aligned} \quad 5.49a$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\mathcal{D}_{10}+\mathcal{D}_{20})} \frac{E_0}{2(1+\nu_0)} \frac{d}{dx} u(x,0) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\mathcal{D}_{10}+\mathcal{D}_{20})} \int_{-\infty}^{\infty} I_{21}(t,x) \sigma_{yy}(t,0) dt \\ &+ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\mathcal{D}_{10}+\mathcal{D}_{20})} \int_{-\infty}^{\infty} I_{22}(t,x) \sigma_{xy}(t,0) dt \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{xy}(t,0)}{t-x} dt + \left(\frac{\mathcal{B}_{10}+\mathcal{B}_{20}}{\mathcal{D}_{10}+\mathcal{D}_{20}} \right) \sigma_{yy}(x,0) \end{aligned} \quad 5.49b$$

$$I_{11}(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[H_{11}(\alpha,0) - (\mathcal{A}_{10}+\mathcal{A}_{20}) \frac{i\alpha}{|\alpha|} \right] e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha \quad 5.50a$$

$$I_{21}(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[H_{21}(\alpha,0) - (\mathcal{B}_{10}+\mathcal{B}_{20}) \right] e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha \quad 5.50b$$

$$I_{12}(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[H_{12}(\alpha,0) - (C_{10}+C_{20}) \right] e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha \quad 5.50c$$

$$I_{22}(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[H_{22}(\alpha,0) - (\mathcal{D}_{10}+\mathcal{D}_{20}) \frac{i\alpha}{|\alpha|} \right] e^{-i\alpha(t-x)} d\alpha \quad 5.50d$$

5.49a ve 5.49b.denklemlerdeki kerneller $I_{11}(t,x)$, $I_{12}(t,x)$, $I_{21}(t,x)$ ve $I_{22}(t,x)$ aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} I_{11}(t,x) &= 2 \int_0^{\infty} \Re \left\{ \left[\begin{aligned} & \left(-\frac{i\alpha}{\Delta_0(\alpha)} (1-\nu_0) \left[\frac{(1-\nu^2)}{2} \{ \bar{Z}_2(\alpha) e^{n_2 y} + Z_2(\alpha) e^{n_4 y} \} \right] \right) \\ & -i(\mathcal{A}_{10}+\mathcal{A}_{20}) \frac{\alpha}{|\alpha|} \end{aligned} \right] e^{-i\alpha(t-x)} \right\} d\alpha \\ &= 2 \int_0^{\infty} \left\{ \left[\begin{aligned} & \left(-\frac{\alpha}{\Delta_0(\alpha)} (1-\nu_0) \left[\frac{(1-\nu^2)}{2} \{ \bar{Z}_2(\alpha) e^{n_2 y} + Z_2(\alpha) e^{n_4 y} \} \right] \right) \\ & -(\mathcal{A}_{10}+\mathcal{A}_{20}) \frac{\alpha}{|\alpha|} \end{aligned} \right] \sin[\alpha(t-x)] \right\} d\alpha \end{aligned} \quad 5.51a$$

$$\begin{aligned}
I_{21}(t,x) &= 2 \int_0^{\infty} \Re \left\{ \frac{-i\alpha}{\Delta_0(\alpha)} (1-\nu_0) \left[\frac{(1-\nu^2)}{2} \{A_2 \bar{Z}_2(\alpha) e^{n_2 y} - \bar{A}_2 Z_2(\alpha) e^{n_4 y}\} \right] e^{-i\alpha(t-x)} \right\} d\alpha \\
&= 2 \int_0^{\infty} \left\{ \frac{-i\alpha}{\Delta_0(\alpha)} (1-\nu_0) \left[\frac{(1-\nu^2)}{2} \{A_2 \bar{Z}_2(\alpha) e^{n_2 y} - \bar{A}_2 Z_2(\alpha) e^{n_4 y}\} \right] \cos[\alpha(t-x)] \right\} d\alpha
\end{aligned} \tag{5.51b}$$

$$\begin{aligned}
I_{12}(t,x) &= 2 \int_0^{\infty} \Re \left\{ \frac{i\alpha}{\Delta_0(\alpha)} (1-\nu_0) [(\kappa+\nu) \{-\bar{Z}_1(\alpha) e^{n_2 y} + Z_1(\alpha) e^{n_4 y}\}] e^{-i\alpha(t-x)} \right\} d\alpha \\
&= 2 \int_0^{\infty} \left\{ \frac{i\alpha}{\Delta_0(\alpha)} (1-\nu_0) [(\kappa+\nu) \{-\bar{Z}_1(\alpha) e^{n_2 y} + Z_1(\alpha) e^{n_4 y}\}] \cos[\alpha(t-x)] \right\} d\alpha
\end{aligned} \tag{5.51c}$$

$$\begin{aligned}
I_{22}(t,x) &= 2 \int_0^{\infty} \Re \left\{ \frac{i\alpha}{\Delta_0(\alpha)} (1-\nu_0) [(\kappa+\nu) \{-A_2(\alpha) \bar{Z}_1(\alpha) e^{n_2 y} - \bar{A}_2(\alpha) Z_1(\alpha) e^{n_4 y}\}] e^{-i\alpha(t-x)} \right\} d\alpha \\
&= 2 \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\alpha}{\Delta_0(\alpha)} (1-\nu_0) [(\kappa+\nu) \{-A_2(\alpha) \bar{Z}_1(\alpha) e^{n_2 y} - \bar{A}_2(\alpha) Z_1(\alpha) e^{n_4 y}\}] \sin[\alpha(t-x)] \right\} d\alpha
\end{aligned} \tag{5.51d}$$

5.49a ve 5.49b.denklemler aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{yy}(t,0)}{t-x} dt + \lambda_1 \sigma_{xy}(x,0) + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{yy}(t,0) J_{11}(t,x) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{xy}(t,0) J_{12}(t,x) dt = f(x) \tag{5.52a}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{xy}(t,0)}{t-x} dt + \lambda_2 \sigma_{yy}(x,0) + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{yy}(t,0) J_{21}(t,x) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{xy}(t,0) J_{22}(t,x) dt = g(x) \tag{5.52b}$$

Burada:

$$\lambda_1 = \frac{C_{10} + C_{20}}{A_{10} + A_{20}} \tag{5.53a}$$

$$\lambda_2 = \frac{B_{10} + B_{20}}{D_{10} + D_{20}} \tag{5.53b}$$

$$f(x) = \frac{1}{(\mathcal{A}_{10} + \mathcal{A}_{20})} \frac{E_0}{2(1+\nu_0)} \frac{d}{dx} v(x, 0) \quad 5.54a$$

$$g(x) = \frac{1}{(\mathcal{D}_{10} + \mathcal{D}_{20})} \frac{E_0}{2(1+\nu_0)} \frac{d}{dx} u(x, 0) \quad 5.54b$$

$$J_{11}(t, x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\mathcal{A}_{10} + \mathcal{A}_{20})} \int_0^\infty \Phi_{11}(\alpha) \sin[\alpha(t-x)] d\alpha \quad 5.55a$$

$$J_{21}(t, x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\mathcal{D}_{10} + \mathcal{D}_{20})} \int_0^\infty \Phi_{21}(\alpha) \cos[\alpha(t-x)] d\alpha \quad 5.55b$$

$$J_{12}(t, x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\mathcal{A}_{10} + \mathcal{A}_{20})} \int_0^\infty \Phi_{12}(\alpha) \cos[\alpha(t-x)] d\alpha \quad 5.55c$$

$$J_{22}(t, x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\mathcal{D}_{10} + \mathcal{D}_{20})} \int_0^\infty \Phi_{22}(\alpha) \sin[\alpha(t-x)] d\alpha \quad 5.55d$$

$$\Phi_{11}(\alpha) = -\frac{\alpha}{\Delta_0(\alpha)} (1-\nu_0) \left[\frac{(1-\nu^2)}{2} \{ \bar{Z}_2(\alpha) e^{n_2 y} + Z_2(\alpha) e^{n_4 y} \} \right] - (\mathcal{A}_{10} + \mathcal{A}_{20}) \frac{\alpha}{|\alpha|} \quad 5.56a$$

$$\Phi_{21}(\alpha) = -\frac{i\alpha}{\Delta_0(\alpha)} (1-\nu_0) \left[\frac{(1-\nu^2)}{2} \{ A_2 \bar{Z}_2(\alpha) e^{n_2 y} - \bar{A}_2 Z_2(\alpha) e^{n_4 y} \} \right] - (\mathcal{B}_{10} + \mathcal{B}_{20}) \quad 5.56b$$

$$\Phi_{12}(\alpha) = \frac{i\alpha}{\Delta_0(\alpha)} (1-\nu_0) \left[(\kappa + \nu) \{ -\bar{Z}_1(\alpha) e^{n_2 y} + Z_1(\alpha) e^{n_4 y} \} \right] - (\mathcal{C}_{10} + \mathcal{C}_{20}) \quad 5.56c$$

$$\Phi_{22}(\alpha) = \frac{\alpha}{\Delta_0(\alpha)} (1-\nu_0) \left[(\kappa + \nu) \{ -A_2(\alpha) \bar{Z}_1(\alpha) e^{n_2 y} - \bar{A}_2(\alpha) Z_1(\alpha) e^{n_4 y} \} \right] - (\mathcal{D}_{10} + \mathcal{D}_{20}) \frac{\alpha}{|\alpha|} \quad 5.56d$$

5.3. İntegral Denkleminin Elde Edilmesi

Bu bölümde tekil integral denklemleri, y -doğrultusundaki yer değiştirme için asimptotik analiz ve Gauss-Sayısal İntegral Alma Yöntemi (EK-E' ye bakınız) kullanılarak elde edilmiştir.

Uygulamalı fizikte ve mühendislikte karışık değerli sınır şartlı problemlerin formülasyonunda tekil integral denklemleri kullanılır. Bu metod, mekanikte özellikle temas ve çatlak problemlerinin büyük çoğunluğunun çözümünde oldukça sık kullanılır. Bu problemdeki integral denklemindeki kerneller basit Cauchy tür tekilliğe ($\frac{1}{t}$ düzeninde)

sahiptir (Muskhelishvili, 1953). Çünkü t ve y değerleri sırası ile uç noktalarda eş zamanlı olarak sıfıra gider (Dağ ve Erdoğan, 2002). Fredholm integralinin en genel hali aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$A(x)p(x) + \frac{1}{\pi} \int_a^b B(t)p(t) \frac{dt}{t-x} + \int_a^b K(x,t)p(t)dt = f(x) \quad a < x < b \quad 5.57$$

5.57. denklemdaki $p = (p_i)$, $(i = 1, \dots, N)$ bilinmeyen fonksiyonlardan oluşan vektör olan tanımlanır. Bu problem için bilinmeyen fonksiyon basıncıdır.

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ kare matrisleri $(i, j = 1, \dots, n)$ $A \mp B$ $a < x < b$ aralığında tekil değildir. K kare matrisinin elemanları $k_{ij}(x, t)$, $(i, j = 1, \dots, n)$ Fredholm kerneli olarak bilinir ve $f = (f_i)$, $(i, j = 1, \dots, n)$ Hölder şartlarını $[a, b]$ kapalı aralığında sağlayan bilinen fonksiyonlardan oluşan bir vektördür. $\varphi(t)$, L yayı üzerinde (genellikle karmaşık olan) konum fonksiyonu olsun. t , $t = t(x, y)$ noktasını ve $t = x + iy$ gösterebilir. $\varphi(t)$ Fonksiyonunun Hölder şartını L üzerinde sağlayabilmesi için L üzerindeki herhangi iki noktanın t_1 ve t_2 gibi aşağıdaki şartı sağlaması gerekmektedir. Buradaki A Hölder sabiti μ ise Hölder indeksidir ve her ikisi de pozitiftir $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq A|t_2 - t_1|^\mu$ (Muskhelishvili, 1953).

$A = (a_{ij})$, $(i, j = 1, \dots, n)$ sürtünmeden dolayı meydana gelen kare matristir. Yarı düzlem ile baskı arasında sabit sürtünme katsayısı veya mükemmel yapışma olduğunda ilgili tekil integral denklemini Fredholm ikinci tür tekil integral denklemini olarak sınıflandırılır. Fakat baskı probleminde integral denklemlerinin baskın parçaları genellikle birleştirilmemiş yani A ve B matrisleri genellikle diagonal olduğu için, değişkenlerin basit değişim ile normalize edilir. Herhangi bir A matrisinin diagonal olduğunun söylenebilmesi için tekil olmayan P matrisinin ve diagonal D matrisinin aşağıdaki şart sağlaması gerekmektedir:

$$D = P^{-1}AP$$

- Herhangi bir $n \times n$ A matrisinin diagonalize edilebilmesi için ancak ve ancak n tane lineer olarak bağımsız öz (*eigen*) değerinin olması gerekmektedir.
- Herhangi bir $n \times n$ A matrisinin diagonalize edilebilmesi için ancak ve ancak karakteristik denkleminin bütün köklerinin gerçek ve farklı n olması

gerekmektedir. Bu özellik lineer sistemler ve sürekli sistemler çalışılırken özellikle önemlidir. EK-E' ye bakınız.

Dolayısı ile, a ve b ' nin sabit olması kabulü problemin yapısını değiştirmez (Erdoğan ve ark., 1973). Bu çalışmadaki problemde yarı düzlem ile rijit baskı arasında sabit sürtünme katsayısı olduğu için A matrisi sıfır değildir ve bundan dolayı integral denklemi Fredholm ikinci tür tekil integral denklemi olarak sınıflandırılır. 5.52a. denklemden aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$\lambda_1 \sigma_{xy}(x,0) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{yy}(t,0)}{t-x} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{yy}(t,0) J_{11}(t,x) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{xy}(t,0) J_{12}(t,x) dt = f(x) \quad 5.58$$

5.17a.' denklemdaki $p(x_1)$ her zaman için bilinmeyendir ve a ve b baskı profilinin şekline bağlıdır. Problemin fiziksel yapısına bağlı olarak denge şartı (*equilibrium condition*) (eğer $p(t)$ gerilme bileşeni ise) veya uyumluluk şartı (*consistency condition*) veya tek değerlilik şartı (*single valuedness condition*) uygulanarak bulunabilir (Erdoğan ve ark., 1973). Bu problemde denge denklemleri kullanılacaktır. Baskının dengede olması, temas alanı üzerindeki toplam basıncın baskı üzerindeki toplam yüke eşit olmasını gerektirir, başka bir deyişle denge denklemleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\int_a^b \sigma_{22}(x_1,0) dx_1 = -P \quad 5.59a$$

ya da

$$\int_a^b p(x_1) dx_1 = P \quad 5.59b$$

olarak tanımlanır. Burada P , baskıya maruz kalan temas alanının dışında uygulanan y - yönünde birim derinliğe düşen bilinen baskı (*compressive*) kuvvetidir. Başka bir deyişle uygulanan kuvvetinin büyüklüğü P , y - eksenine paralel olarak baskı yer değiştirmesi olarak tanımlanır.

5.4. Normalizasyon

$p(t)$ ' nin $a \leq t \leq b$ aralığında Hölder sürekliliğe sahip olduğu kabul edilirse integral uniform olarak yakınsak olur ve böylece integralin sırası değişir (Arın ve

Erdoğan,1971). 5.58.denkleimde verilen ifade parametrelerin daha kolay hesaplanabilmesi için ilerleyen paragraflardaki eşitlikler yardımı ile fonksiyonlar ve integralin alınma aralığı boyutsuz hale getirilerek normalize edilir yani (a,b) aralığı $(-1,1)$ ' e dönüştürülür.

Eğer P ve Q kuvvetlerinin yönleri Şekil 5.1' deki gibi alınırsa temas alanı dışında herhangi bir kuvvet, tork veya moment uygulanmadığı için temas alanı dışında normal veya kayma gerilmesinin olmadığı kabulü ve $a=-a$ ve $b=a$ için 5.17a. ve 5.17b. denklemler aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$\sigma_{22}(x_1, 0) = \begin{cases} -p(x_1) & -a < x_1 < a \\ 0 & x_1 < -a, \quad x_1 > a \end{cases} \quad 5.60a$$

$$\sigma_{12}(x_1, 0) = \begin{cases} -q(x_1) & -a < x_1 < a \\ 0 & x_1 < -a, \quad x_1 > a \end{cases} \quad 5.60b$$

5.7., 5.60a. ve 5.60b. denklemler kullanılarak sınır şartları dönüştürülmüş koordinat sistemi için yeniden yazılabilir:

$$\sigma_{yy}(x, 0) = \begin{cases} -\delta p(x) & -\frac{a}{\sqrt{\delta}} < x < \frac{a}{\sqrt{\delta}} \\ 0 & x_1 < -\frac{a}{\sqrt{\delta}}, \quad x_1 > \frac{a}{\sqrt{\delta}} \end{cases} \quad 5.61a$$

$$\sigma_{xy}(x, 0) = \begin{cases} -q(x) & -\frac{a}{\sqrt{\delta}} < x < \frac{a}{\sqrt{\delta}} \\ 0 & x_1 < -\frac{a}{\sqrt{\delta}}, \quad x_1 > \frac{a}{\sqrt{\delta}} \end{cases} \quad 5.61b$$

5.17c. ve 5.17d. denklemlerden:

$$\sigma_{12}(x_1, 0) = \eta \sigma_{22}(x_1, 0) \quad 5.62$$

$$\sigma_{xy}(x_1, 0) = \eta \frac{1}{\delta} \sigma_{yy}(x, 0) \quad 5.63$$

$$q(x) = \eta p(x) \quad 5.64$$

5.58. denklemden:

$$\lambda_1 [-q(x)] + \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{a}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{a}{\sqrt{\delta}}} \frac{[-p(t)\delta]}{t-x} dt + \int_{-\frac{a}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{a}{\sqrt{\delta}}} [-p(t)\delta] J_{11}(t,x) dt + \int_{-\infty}^{\infty} [-q(t)] J_{12}(t,x) dt = f(x) \quad 5.65$$

veya

$$-Ap(x) - \frac{\delta}{\pi} \int_{\frac{a}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{a}{\sqrt{\delta}}} \frac{p(t)}{t-x} dt - \delta \int_{\frac{a}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{a}{\sqrt{\delta}}} p(t) J_{11}(t,x) dt - \eta \int_{\frac{a}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{a}{\sqrt{\delta}}} p(t) J_{12}(t,x) dt = f(x) \quad 5.66$$

Burada:

$$A = \lambda_1 \eta = \left(\frac{C_{10} + C_{20}}{\mathcal{A}_{10} + \mathcal{A}_{20}} \right) \eta \quad 5.67$$

5.59b' deki denge denklemi $a = -a$ ve $b = a$ için aşağıdaki şekilde tekrar yazılabilir:

$$\int_{-a}^a p(x_1) dx_1 = P \quad 5.68$$

İntegral denklemini normalize edebilmek için aşağıdaki parametreler yazılabilir:

$$x = \frac{a}{\sqrt{\delta}} r \quad -1 < r < 1 \quad 5.69$$

$$t = \frac{a}{\sqrt{\delta}} s \quad -1 < s < 1 \quad 5.70$$

$$\sigma_0 = \frac{P}{2a} \quad 5.71$$

$$p(t) = 2\sigma_0 \phi(s) \quad 5.72$$

5.66. denklem aşağıdaki yeniden yazılabilir:

$$-A2\sigma_0 \phi(r) - \frac{\delta}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{2\sigma_0 \phi(s) \frac{a}{\sqrt{\delta}}}{(s-r) \frac{a}{\sqrt{\delta}}} ds - \delta \int_{-1}^1 2\sigma_0 \phi(s) \frac{J_{11}^*(s,r) \frac{a}{\sqrt{\delta}}}{\frac{a}{\sqrt{\delta}}} ds - \eta \int_{-1}^1 2\sigma_0 \phi(s) \frac{J_{12}^*(s,r) \frac{a}{\sqrt{\delta}}}{\frac{a}{\sqrt{\delta}}} ds = f^*(r) \quad 5.73$$

$$\gamma^* = \frac{a}{\sqrt{\delta}} \gamma \quad 5.74$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{\delta}}{a} \gamma^* \quad 5.75$$

$$\begin{aligned} \beta &= \gamma \sqrt{\delta} \\ &= \frac{\delta}{a} \gamma^* \end{aligned} \quad 5.76$$

5.73. denklem aşağıdaki şekli alır:

$$\begin{aligned}
 -A\phi(r) - \frac{\delta}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(s)}{s-r} ds - \delta \int_{-1}^1 J_{11}^*(s,r) \phi(s) ds \\
 -\eta \int_{-1}^1 J_{12}^*(s,r) \phi(s) ds = f^*(r) \quad -1 < r < 1
 \end{aligned} \tag{5.77}$$

$$J_{11}(s,r) = \frac{J_{11}^*(s,r)}{\frac{a}{\sqrt{\delta}}} \tag{5.78}$$

$$J_{12}(s,r) = \frac{J_{12}^*(s,r)}{\frac{a}{\sqrt{\delta}}} \tag{5.79}$$

$$J_{11}^*(s,r) = \frac{1}{\pi(\mathcal{A}_{10} + \mathcal{A}_{20})} \int_0^\infty \Phi_{11}^*(\zeta) \sin[\zeta(s-r)] d\zeta \tag{5.80}$$

$$J_{12}^*(s,r) = \frac{1}{\pi(\mathcal{A}_{10} + \mathcal{A}_{20})} \int_0^\infty \Phi_{12}^*(\zeta) \cos[\zeta(s-r)] d\zeta \tag{5.81}$$

$$\Phi_{11}^*(\zeta) = -\frac{\zeta}{\Delta_0(\zeta)} \frac{(1-\nu^2)(1-\nu_0)}{2} [\bar{Z}_2(\zeta) + Z_2(\zeta)] - (\mathcal{A}_{10} + \mathcal{A}_{20}) \frac{\zeta}{|\zeta|} \tag{5.82}$$

$$\Phi_{12}^*(\zeta) = \frac{i\zeta}{\Delta_0(\zeta)} (\kappa + \nu)(1-\nu_0) [-\bar{Z}_1(\zeta) + Z_1(\zeta)] - (C_{10} + C_{20}) \tag{5.83}$$

$$\zeta = \frac{a}{\sqrt{\delta}} \alpha \tag{5.84}$$

$$\gamma^* = \frac{a}{\sqrt{\delta}} \gamma \tag{5.85}$$

Bu denklemlerle düşey yönde elastik olarak derecelendirilmiş yarı düzlem için temas problemi tamamlanmıştır. Bir sonraki bölümde bilinmeyen temas gerilmesinin Jacobi polinomlarının sonsuz açılımı olduğu kabul edilecektir. Sıralama tekniği kullanılarak problem bilinmeyen katsayılı c_n lineer denklem sistem denklemlerine dönüştürülerek dikdörtgen profilli baskı için sayısal çözüm getirilecektir.

5.5. Temel denklem

İkinci dereceden tekil integral denklemi olan 5.77. denklemin baskın (*dominant*) bölümü aşağıdaki şekildedir:

$$A\phi(r) + \frac{B}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(s)}{s-r} ds = f^*(r), \quad -1 < r < 1 \quad 5.86$$

Buradaki sınırlı (*bounded*) $f^*(r)$ integral denkleminin Fredholm kernelleri ile integral denkleminin parçasıdır. Aşağıdaki tanımlama yapılırsa:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\phi(s)}{s-z} ds, \quad 5.87$$

Aşağıdaki genel Plemelj formülleri kullanılarak:

$$F^+(r) - F^-(r) = \begin{cases} 2i\phi(r) & -1 < r < 1, \\ 0 & r < -1, r > 1, \end{cases} \quad 5.88a$$

$$F^+(r) + F^-(r) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(s)}{s-r} ds & -1 < r < 1, \\ 4iF(r) & r < -1, r > 1, \end{cases} \quad 5.88b$$

5.86. denklem kısmî holomorfik fonksiyon $F(z)$ için aşağıdaki Riemann-Hilbert problemine dönüşür:

$$F^+(r) - \frac{A-Bi}{A+Bi} F^-(r) = \frac{2if^*(r)}{A+Bi}, \quad 5.89$$

Aşağıdaki homojen denklem ele alınır:

$$X^+(r) - \frac{A-Bi}{A+Bi} X^-(r) = 0, \quad 5.90$$

5.86. denklemdeki $X(z)$ ve $w(x)$ için temel çözüm Muskhelishvili'ye (1953) göre:

$$X(z) = (z-1)^\alpha (z+1)^\beta, \quad 5.91$$

$$w(r) = (1-r)^\alpha (r+1)^\beta, \quad 5.92$$

Burada:

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{A-Bi}{A+Bi} + N = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{1-\delta i}{1+\delta i} + N \quad -1 < \Re(\alpha) < 1 \quad 5.93$$

$$\beta = -\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{A-Bi}{A+Bi} + M = -\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{1-\delta i}{1+\delta i} + M \quad -1 < \Re(\beta) < 1 \quad 5.94$$

Aşağıdaki tanım tekrar yazılacak olursa:

$$A = \lambda_1 \eta = \left(\frac{C_{10} + C_{10}}{\mathcal{A}_{10} + \mathcal{A}_{10}} \right) \eta \quad 5.95$$

$$B = \delta \quad 5.96$$

Eğer $A > 0$ olursa:

$$\left. \begin{aligned} A + \delta i &= r e^{i\theta} \\ A - \delta i &= r e^{-i\theta} \end{aligned} \right\} \quad 5.97$$

$$\theta = \arctan \frac{B}{A} = \arctan \frac{\delta}{A} \quad 5.98$$

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{r e^{-i\theta}}{r e^{i\theta}} + N = \frac{1}{2\pi i} \ln e^{2i\theta} + N = -\frac{2i\theta}{2\pi i} + N = -\frac{\theta}{\pi} + N \quad 5.99a$$

$$\beta = -\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{r e^{-i\theta}}{r e^{i\theta}} + M = -\frac{1}{2\pi i} \ln e^{2i\theta} + M = \frac{2i\theta}{2\pi i} + M = \frac{\theta}{\pi} + M \quad 5.99b$$

Değişkenler α ve β dikdörtgen profilli baskı için temas bölgesinin sınırlarındaki gerilme tekilliğinin kuvvetleridir. Karmaşık fonksiyon teorisi kullanılarak α ve β elde etmek mümkündür. Daha detaylı bilgi için Dağ (2001) ve EK-D' ye bakılabilir. Gerilme tekilliğinin kuvvetleri olan α ve β sadece sürtünme kuvvetine, FDM tabakasındaki Poisson oranına, ν , dolayısı ile kayma parametresine, κ , bağlıdır. Bu çalışmada Poisson oranı başlangıçta da söylendiği gibi sabit kabul edilmiştir ve dolayısı ile α ve β heterojenlik parametresi γ ' dan bağımsızdır. Burada, N ve M (pozitif, sıfır veya negatif) rastgele tam sayılardır ve bunlar problemin fiziksel tanımından gelmektedir. İntegral denkleminin indeksi aşağıdaki gibidir:

$$\kappa_i = -(\alpha + \beta) = -(N + M) \quad 5.100$$

Eğer $A > 0$, $\delta > 0$ ise $\theta > 0 \rightarrow N = 0, M = -1$ $\kappa_i = 1$ tekil integral denkleminin kapalı form çözümü yoktur. Dolayısı ile, sayısal metot kullanılmalıdır. Bu çalışmada, Jacobi polinomları tekil integral denklemini sonlu lineer denklem sistemine dönüştürmek için kullanılmıştır.

5.6. Sayısal Çözüm

Baskı problemi için tekil integral denklemi elde edilmiştir. İntegral denklemi Cauchy kerneli ve iki tane Fredholm kerneli içermektedir. 5.77. denklemde verilen tekil integral denkleminin çözümü ya Muskhelishvili (1953) tarafından temel verilen fonksiyonların matrisinin elde edilebileceği kısmî holomorfik fonksiyonlar seti için integral sistemin baskın tarafının kolayca Riemann-Hilbert problemine dönüştürülmesi

metodu ile ya da Erdoğan ve Gupta (1972) tarafından verilen özdeğer (*eigenvalue*) problemine dönüştürmek ve temel matrisin kolayca elde edileceği bir metod kullanılarak elde edilmiştir. Bu çalışmada Erdoğan ve arkadaşları tarafından verilen Erdoğan ve ark. (1973) ağırlık fonksiyonları $w(s)$ ile Jacobi polinomları ile temsil edilen bilinmeyen fonksiyonlar ile ortogonal polinomlar metodu kullanılmıştır. Gauss Sayısal İntegral Alma Yönteminin çözümü EK-E' de anlatılmıştır.

Tekil integral denkleminin kapalı form çözümü yoktur. Dolayısı ile sayısal metod kullanılmalıdır. Bu çalışmada, Jacobi polinomları tekil integral denklemini sonlu lineer denklem sistemine dönüştürmek için kullanılmıştır.

İntegral denkleminin temel fonksiyonu $w(s)$ belirlendikten sonra, denklem 5.77 aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\phi(s) = g(s)w(s) \quad -1 < s < 1 \quad 5.101$$

$g(s)$ sınırlı sürekli fonksiyondur ve her zaman sonlu seri ile ifade edilir. $w(s)$ Jacobi polinomunun ağırlık fonksiyonudur ve aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$\phi(s) = \sum_0^{\infty} c_n w(s) P_n^{(\alpha, \beta)}(s), \quad 5.102$$

Burada $c_n, (n = 0, 1, \dots)$ belirlenmemiş sabitlerdir. ve $P_n^{(\alpha, \beta)}$ Jacobi polinomlarıdır.

5.77. denklemde 5.102. denklem yerine konulmadan önce $\kappa_i = (-1, 0, 1)$ için aşağıdaki bağıntı Güler (1996)' de de bahsedildiği gibi Tricomi' den (1951) yazılabilir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{w(t) P_n^{(\alpha, \beta)}(t)}{t-x} dt = \\ \cot(\pi\alpha) w(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - \frac{2^{\alpha+\beta} \Gamma(\alpha) \Gamma(n+\beta+1)}{\pi \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} F\left(n+1, -n-\alpha-\beta, 1-\alpha, \frac{1-x}{2}\right) \\ \Re(\alpha) > -1, \quad \Re(\beta) > -1, -1 < x < 1, \\ \kappa_i = -(\alpha + \beta), \quad \Re(\alpha) \neq (0, 1, \dots) \end{aligned} \quad 5.103$$

$$P_{n-\kappa_i}^{(-\alpha, -\beta)}(x) = \frac{\Gamma(n-\kappa_i-\alpha+1)}{\Gamma(n-\kappa_i+1)\Gamma(1-\alpha)} F\left(n+1, -n+\kappa_i, 1-\alpha, \frac{1-x}{2}\right), \quad 5.104$$

$\kappa_i = -(\alpha + \beta)$ 5.104. denklemde yerine konulursa:

$$F\left(n+1, -n+\kappa_i, 1-\alpha, \frac{1-x}{2}\right) = \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+\beta+1)} P_{n-\kappa_i}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \quad 5.105$$

5.105. deklemler, 5.103. denklemde yerine konulursa aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{w(t) P_n^{(\alpha, \beta)}(t)}{t-x} dt = \frac{\cos(\pi\alpha)}{\sin(\pi\alpha)} w(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - 2^{-\kappa_i} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\pi} P_{n-\kappa_i}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \quad -1 < x < 1, \quad 5.106$$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \quad 5.107$$

Jacobi polinomunun aşağıdaki özelliği yazılacak olursa 5.103. denklem aşağıdaki şekle döndürür:

$$AP_n^{(\alpha, \beta)}(r)w(r) + \frac{B}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(s)w(s)}{s-r} ds = -2^{-\kappa_i} \frac{B}{\sin(\pi\alpha)} P_{n-\kappa_i}^{(-\alpha, -\beta)}(r) \quad -1 < r < 1, \quad \Re(\alpha) > -1, \quad \Re(\beta) > -1, \quad \kappa_i = -(\alpha + \beta), \quad \Re(\alpha) \neq (0, 1, \dots). \quad 5.108$$

5.77. denklemde 5.102. denklem yerine konular ve 5.108. denklem de kullanılarak aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\sum_0^\infty c_n \left[-\frac{2^{-\kappa_i} B}{\sin(\pi\alpha)} P_{n-\kappa_i}^{(\alpha, \beta)}(r) + h_n^1(r) + h_n^2(r) \right] = f^*(r), \quad -1 < r < 1, \quad 5.109$$

Burada:

$$h_n^1(r) = -\delta \int_{-1}^1 J_{11}^*(s, r) P_n^{(\alpha, \beta)}(s) w(s) ds \quad 5.110$$

$$h_n^2(r) = -\eta \int_{-1}^1 J_{12}^*(s, r) P_n^{(\alpha, \beta)}(s) w(s) ds \quad 5.111$$

Ve $f^*(r) = 0$ 'dır.

Fredholm denklemler $h_n^1(r)$ ve $h_n^2(r)$ 'nin sayısal çözümü EK-B' de verilmiştir. Fredholm kernellerinin hesaplanmasında işaret fonksiyonunun integrali $\frac{|s-r|}{s-r}$ ve logaritmik fonksiyonun integrali $\ln|s-r|$ ile karşılaşılmaktadır Bu terimler fonksiyonun hassasiyeti için uygunsuz davranan (*ill-behaved*) bileşenlerdir. $h_n^1(r)$ ve $h_n^2(r)$ fonksiyonlarının $(-1, 1)$ aralığında integralleri alınırken integradın düzenlenebilmesi için bu terimlerin integranda eklenip çıkarılması gerekmektedir.

5.109. denklem, c_n 'yi içeren denklem sistemine uygun sıralama (*collocation*) tekniği kullanılarak dönüştürülür. 5.109. denklemin sayısal çözümünde problemin indeksine bağlı olarak Jacobi polinomunun kökleri ($r_i, i = 0, 1, \dots, N$) sıralama noktaları

(*collocation points*) (ayrıca açılım modeli ya da açılma-sıralama şeması olarak da (*expansion model, expansion-collocation scheme*) (Dağ, 2008) olarak seçilmesi ile kenarlardaki sıralama noktalarının yoğunluğu artırılarak yüksek hassasiyet elde edilebilir. Jacobi polinomlarının ortogonalite bağıntıları aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\int_{-1}^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(t)P_j^{(\alpha,\beta)}(t)w(t)dt = \begin{cases} 0 & n \neq j \\ \theta_j^{(\alpha,\beta)} & n = j \end{cases} \quad j = 0,1,2,\dots \quad 5.112$$

Burada:

$$\theta_j(\alpha,\beta) = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(j+\alpha+1)\Gamma(j+\beta+1)}{(2j+\alpha+\beta+1)j!\Gamma(j+\alpha,\beta+1)} \quad 5.113$$

Veya Abramowitz ve Stegun' un (1965) çalışmasındaki binomial katsayı özelliği kullanılarak aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$\theta_j(\alpha,\beta) = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(j+\alpha+1)\Gamma(j+\beta+1)}{(2j+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)\Gamma(j+\alpha+\beta+1)} \quad 5.114$$

$$\theta_0(\alpha,\beta) = \int_{-1}^1 w(t)dt = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} \quad 5.115$$

Fonksiyonel 5.109. denklem, c_n ' yi içeren sonlu cebirsel denklem sistemine denklemin her iki tarafı da Jacobi polinomunun serisine açarak dönüştürülür. $P_j^{(-\alpha,-\beta)}(r)$ ($j=0,1,\dots$) ve ilgili katsayılar karşılaştırılsın. Serinin kesilmesi (*truncating*) aşağıdaki seriyi verir:

$$-\frac{2^{-\kappa_i}}{\sin(\pi\alpha)}\theta_j(-\alpha,\beta)c_{j+\kappa_i} + \sum_{j=0}^N (d_{nj}^1 + d_{nj}^2)c_n = F_j^*, \quad (j=0,1,\dots,N) \quad 5.116$$

$$d_{nj}^1 = \int_{-1}^1 P_j^{(-\alpha,-\beta)}(r)w(-\alpha,-\beta,r)h_n^1(r)dr, \quad 5.117$$

$$d_{nj}^2 = \int_{-1}^1 P_j^{(-\alpha,-\beta)}(r)w(-\alpha,-\beta,r)h_n^2(r)dr, \quad 5.118$$

$$F_j^* = \int_{-1}^1 P_j^{(-\alpha,-\beta)}(r)w(-\alpha,-\beta,r)f^*(r)dr, \quad 5.119$$

$$w(-\alpha,-\beta,r) = (1-r)^{-\alpha}(1+r)^{-\beta} = w^{-1}(r) \quad 5.120$$

Rodriges formülü aşağıda verilmiştir:

$$w^{(\alpha,\beta)}(t)P_n^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = -\frac{(-1)^n d^n}{2^\alpha n! dt^n} \left[w^{(\alpha+n,\beta+n)}(t) \right], \quad n = 0,1,2,\dots \quad 5.121a$$

$$w^{(\alpha,\beta)}(t)P_n^{(\alpha,\beta)}(t) = -\frac{1}{2n} \frac{d}{dt} \left[w^{(\alpha+1,\beta+1)}(t)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(t) \right], \quad 5.121b$$

Aşağıdaki tekrarlama (*recurrence*) bağıntı, Güler (2000)' de de belirtildiği gibi Ghizetti ve Ossicini (1970) tarafından verilmiştir.

$$P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(y) - P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(y)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (x-y) \frac{\theta_j^{(\alpha,\beta)}}{A_n^{(\alpha,\beta)}} \sum_{j=0}^n \frac{P_j^{(\alpha,\beta)}(x)P_j^{(\alpha,\beta)}(y)}{\theta_j(\alpha,\beta)} \quad 5.122$$

Burada:

$$A_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)} \quad 5.123$$

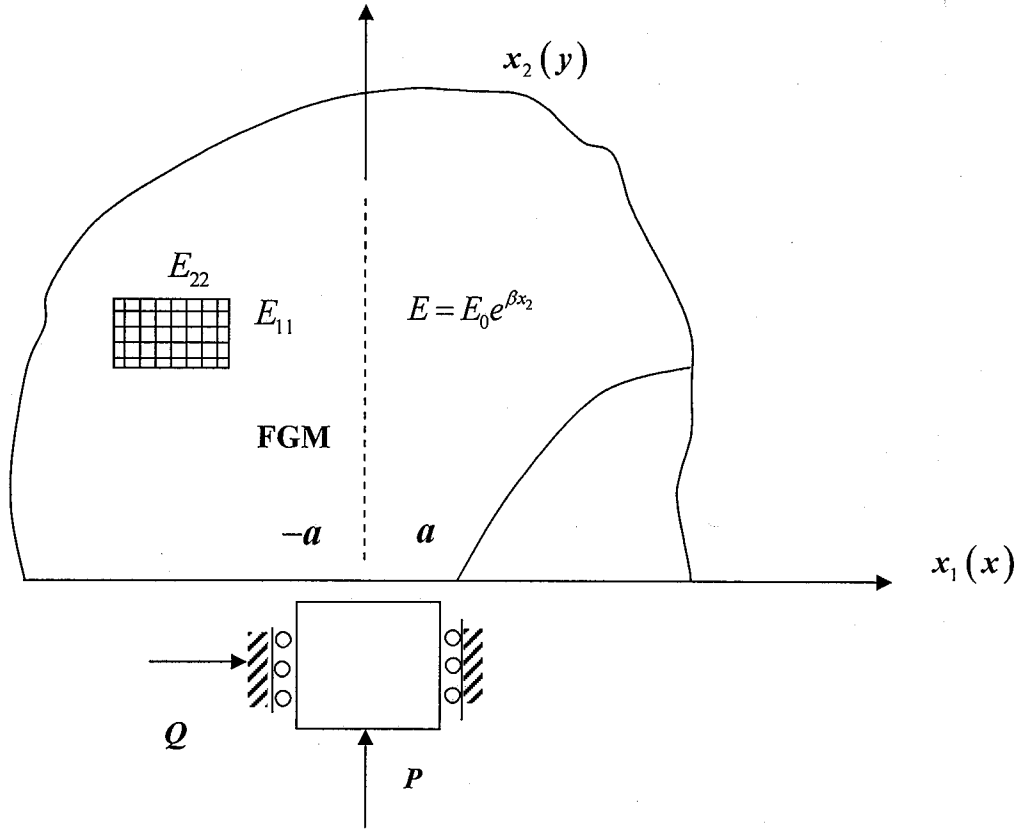
$\theta_j(\alpha,\beta)$ ise 5.114. ve 5.115. denklemlerde verilmiştir.

5.6.1. Dikdörtgen Profilli Baskı Problemi

Dikdörtgen profilli baskı için, temas alanında yer değiştirmenin türevi sabittir.

Dolayısı ile aşağıdaki bağıntı yazılabilir:

$$u_2(x_1, 0) = u_0 = \text{sabit}, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} u_2(x_1, 0) = 0 \quad -a < x_1 < a \quad 5.124$$



Şekil 5.2. Düşey yönde derecelendirilmiş ortotropik malzemedeki düzlem temas mekaniği problemi için dikdörtgen baskı profilinin geometrisi.

elde edilir ve 5.61a. ve 5.61b. sınır şartları ve 5.52a. denklem aşağıdaki şekli alır:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{yy}(t,0)}{t-x} dt + \lambda_1 \sigma_{xy}(x,0) + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{yy}(t,0) J_{11}(t,x) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{xy}(t,0) J_{12}(t,x) dt = f(x) \quad 5.125$$

5.54a. denklemden 5.58. denklemin girdi fonksiyonu $f(x)$ türevi 5.124. denklemden gibi verilir:

$$f(x) = \frac{1}{(\mathcal{A}_{10} + \mathcal{A}_{20})} \frac{E_0}{2(1+\nu_0)} \frac{d}{dx} v(x,0) = 0 \quad 5.126$$

Denklemler 5.77'den:

$$-A\phi(r) - \frac{\delta}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(s)}{s-r} ds - \delta \int_{-1}^1 J_{11}^*(s,r) \phi(s) ds - \eta \int_{-1}^1 J_{12}^*(s,r) \phi(s) ds = 0 \quad 5.127$$

ve 5.68. denge denklemlerinden:

$$\int_{-1}^1 \phi(s) ds = 1 \quad 5.128$$

$\kappa_i = 1$ olduğu için çözümün 5.101' deki gibi olduğu kabul edilirse 5.127. denklem aşağıdaki şekli alır:

$$\sum_0^N c_n \left[-2^{-1} \frac{B}{\sin(\pi\alpha)} P_{n-\kappa_i}^{(-\alpha_1, -\alpha_2)}(r) + h_n^1(r) + h_n^2(r) \right] = 0, \quad 5.129$$

$h_n^1(r_i)$ ve $h_n^2(r_i)$ 5.110 ve 5.111' de verilmiştir. 5.129. denklem N adet denklem için $N + 1$ bilinmeyen sabit $c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_n$ sağlar. Tek bir çözüm için gerekli ilâve 5.128. denklemde verilen denge şartından sağlanır:

$$\sum_0^N c_n \int_{-1}^1 w(s) P_n^{(\alpha, \beta)}(s) ds = 1 \quad 5.130$$

$\phi(s)$ Jacobi polinomlarının 5.128. denklemde yerine konur ve 5.114. denklemdeki ortogonallik şartı kullanılırsa sıfır olmayan tek katsayı c_0 denklem aşağıdaki gibi bulunur:

$$c_0 \theta_0 = P_0^{(\alpha_1, \alpha_2)}(r) = 1 \quad 5.131$$

$\alpha + \beta = -1$ durumunda θ_0 ve c_0 aşağıdaki gibi olur:

$$c_0 = -\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \quad \theta_0 = -\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \quad 5.132$$

Ortogonalite şartı kullanılarak $N + 1$ denklem elde edilir:

$$c_0 \theta_0 = 1 \quad 5.133$$

$$\sum_0^N c_n F_n(r_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad 5.134$$

Baskı sınırlarının yakınındaki sıralama noktalarının yoğunluğu problemin indeksine bağlı olarak Jacobi polinomlarını $r_i, i = 1, \dots, N$ sıralama noktaları seçerek artırıldığı zaman sayısal çözümde yüksek hassasiyet elde edilir. Bu sıralama noktaları kullanılarak integral denklemleri $(N + 1)$ boyutunda lineer denklem sistemine dönüştürülür ve c_n bilinmeyen elde edilir. 5.134. denklemdeki $r_i, i = 1, \dots, N$:

$$P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(r_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad 5.135$$

$$F_n(r_i) = -\frac{2\delta}{\sin(\pi\alpha)} P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(r_i) + h_n^1(r_i) + h_n^2(r_i) \quad 5.136$$

Dolayısı ile:

$$\sigma_0 = \frac{P}{2a} \quad 5.137$$

$$p(t) = 2\sigma_0\phi(s) = \frac{P}{a}\phi(s) \quad 5.138$$

$$\begin{aligned} p(r) &= 2\sigma_0\phi(r) \\ &= 2\sigma_0w(r)\sum_{n=0}^N c_n P_n^{(\alpha,\beta)}(r) \end{aligned} \quad 5.139$$

$$p(x_1) = 2\sigma_0 \left(1 - \frac{\sqrt{\delta}}{a}x\right)^\alpha \left(1 + \frac{\sqrt{\delta}}{a}x\right)^\beta \sum_{n=0}^N c_n P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{\sqrt{\delta}}{a}x\right) \quad 5.140$$

$$p(x_1) = 2\sigma_0 \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^\alpha \left(1 + \frac{x_1}{a}\right)^\beta \sum_{n=0}^N c_n P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{x_1}{a}\right) \quad 5.141$$

Gerilme dağılımı boyutsuz bir şekilde aşağıdaki gibi elde edilir:

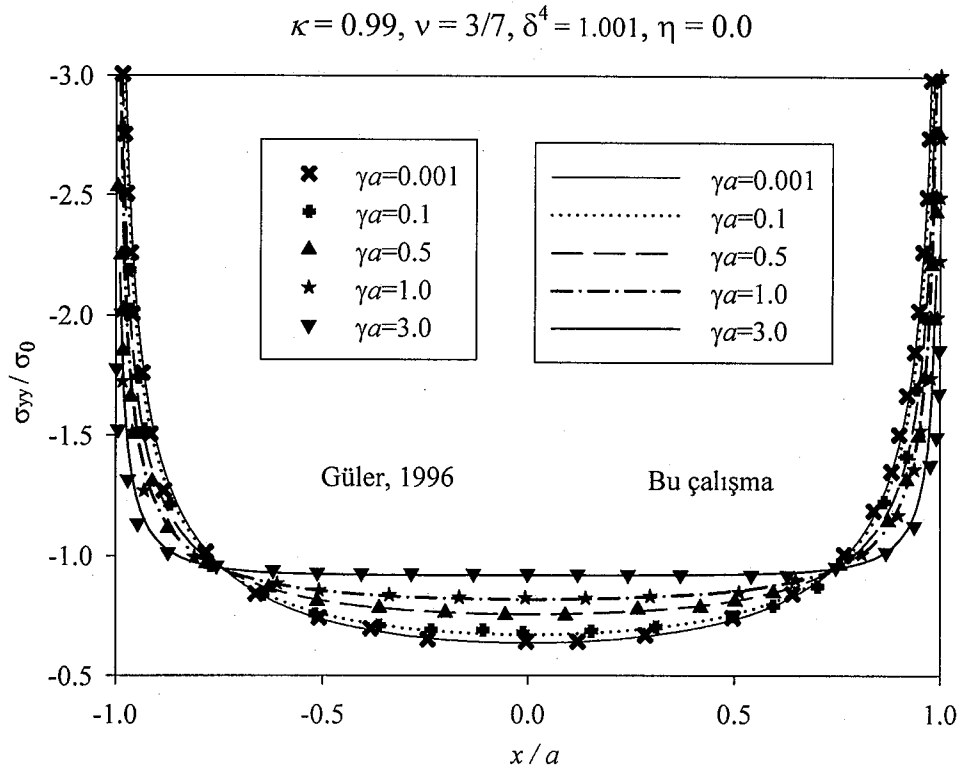
$$\frac{\sigma_{22}(x_1, 0)}{\sigma_0} = \frac{p(x_1)}{\sigma_0} = -2 \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^\alpha \left(1 + \frac{x_1}{a}\right)^\beta \sum_{n=0}^N c_n P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{x_1}{a}\right) \quad 5.142$$

$$\frac{\sigma_{12}(x_1, 0)}{\sigma_0} = -\eta \frac{p(x_1)}{\sigma_0} \quad 5.143$$

6.ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde düşey yönde elastik olarak ortotropik derecelenmiş malzemelerin yüzeyindeki düzlem temas gerilme dağılımı probleminin çözümü olarak elde edilen sayısal sonuçlar verilmiştir. Heterojenlik parametreleri ve sürtünme katsayısının gerilme dağılımı üzerindeki etkisi üzerinde durulmuştur.

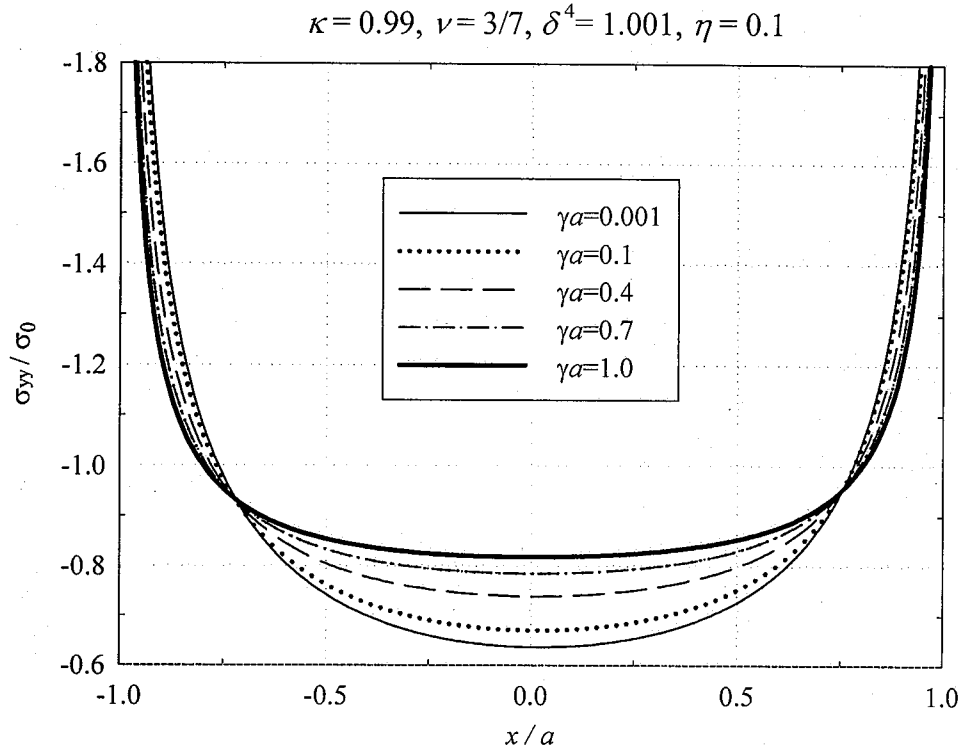
Düşey yönde derecelendirilmiş ortotropik ortamda dikdörtgen profilli baskının koordinat sistemine göre simetrik olduğu kabul edilerek, düzlem şekil değiştirme şartları altında farklı kayma parametresi, κ , Poisson oranı, ν , katılık oranı, δ , heterojenlik parametresi, γ , ve sürtünme katsayısı, η , değerleri için sayısal sonuçlar verilmiştir. Çözümün hassasiyeti açısından $N = 21$ olarak alınmıştır. Denklemler 5.3 ve 5.4'e göre fiziksel sınırlar sebebi ile $\kappa + \nu$ değerinin sıfırdan büyük olması gerekmektedir. Elde edilen sayısal sonuçlar öncelikle Güler (1996)'daki izotropik FGM $\kappa = 1$ ve $\delta = 1$ sonuçlarla doğrulanmıştır. $\gamma \approx 0$ ise homojen, $\eta = 0.0$ ise sürtünmesiz ortamdaki sonuçlar elde edilmiştir.



Şekil 6.1. $\kappa = 0.99, \nu = 3/7, \delta^4 = 1.001, \eta = 0.0$, ve farklı γa , heterojenlik parametresi değerleri için dikdörtgen profilili baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.

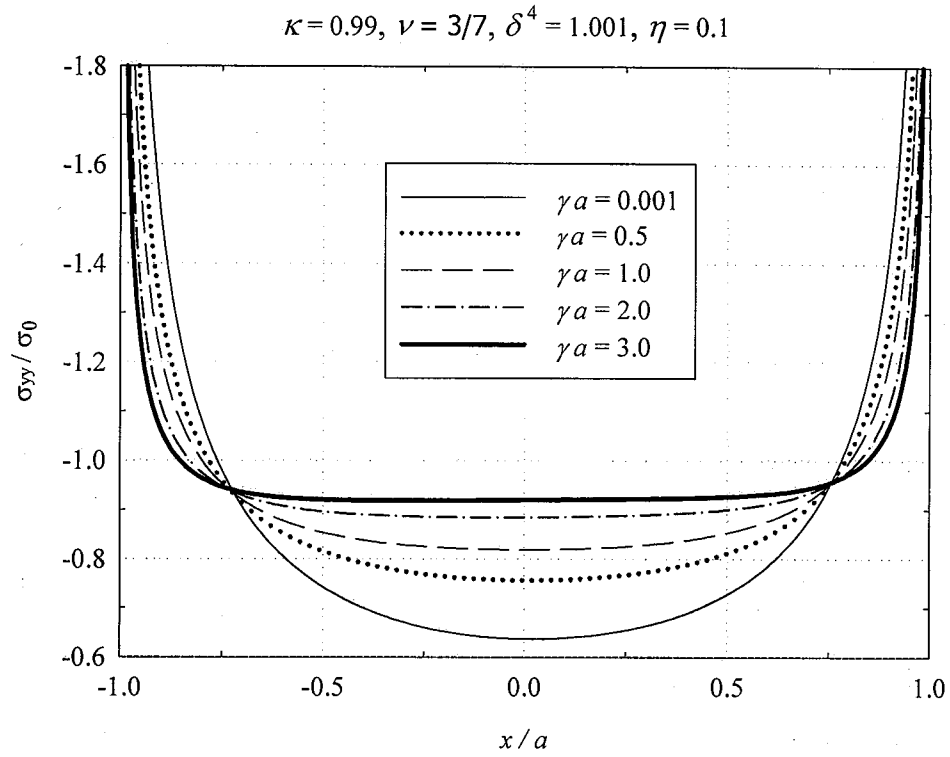
Şekil 6.1' de $\kappa = 0.99, \nu = 3/7, \delta^4 = 1.001, \eta = 0.0$, ve farklı heterojenlik parametresi değerleri, γa , için gerilme dağılımı verilmiştir. Dikkat edilirse sürtünmesiz ortam, $\eta = 0.0$, durumu ele alınmıştır. Yani temas bölgesinde Coulomb sürtünmesi vardır. Bu durumda aksenal kuvvet olmadığından dolayı $\theta \rightarrow \pi/2$, gerilme tekilliğinin kuvvetleri de $\alpha \rightarrow -0.5, \beta \rightarrow -0.5$, her iki uçta da aynı değere yaklaştığı için gerilme dağılımları simetriktir. Bu durum sürtünmesiz kaymalı baskı için karekök tekilliği (*square-root singularity*) olarak bilinir. α , ve β , sırası ile gerilme dağılımının başladığı $x = a$ (*leading end*) ve bittiği $x = -a$ (*trailing end*) uçlardaki gerilme tekilliğinin kuvvetleridir. Temas problemlerinde α ve β malzemenin heterojenlik parametresinden, γ , bağımsızdır ve sürtünme kuvveti katsayısına, η , Poisson oranına, ν , dolayısı ile kayma parametresine, κ , ve katılık oranına, δ , bağlıdır. Gerilme dağılımı baskının uçlarında sınırlı değildir (*unbounded*) başka bir deyişle $x = a$ ve $x = -a$ ' da tekildir. Bu da bu uç noktalarında

keskin köşeleri olan dikdörtgen profilli baskı için beklenen bir sonuçtur. Limit durumlarında yani heterojenlik parametresinin değeri çok küçük olduğu durumda $\gamma a = 0.001$, çözüm homojen çözüme yaklaşmaktadır ve heterojenlik parametresinin değeri γa , sonsuza yaklaştığı zaman ise sonsuz ortam rijit ortam gibi davranmaktadır ve bu durumda basınç profili $\sigma_{yy}(x,0) = P/2a$ olmaktadır. Güler (1996) ile çözümün karşılaştırıldığında çözümün uyumlu olduğu görülmektedir.



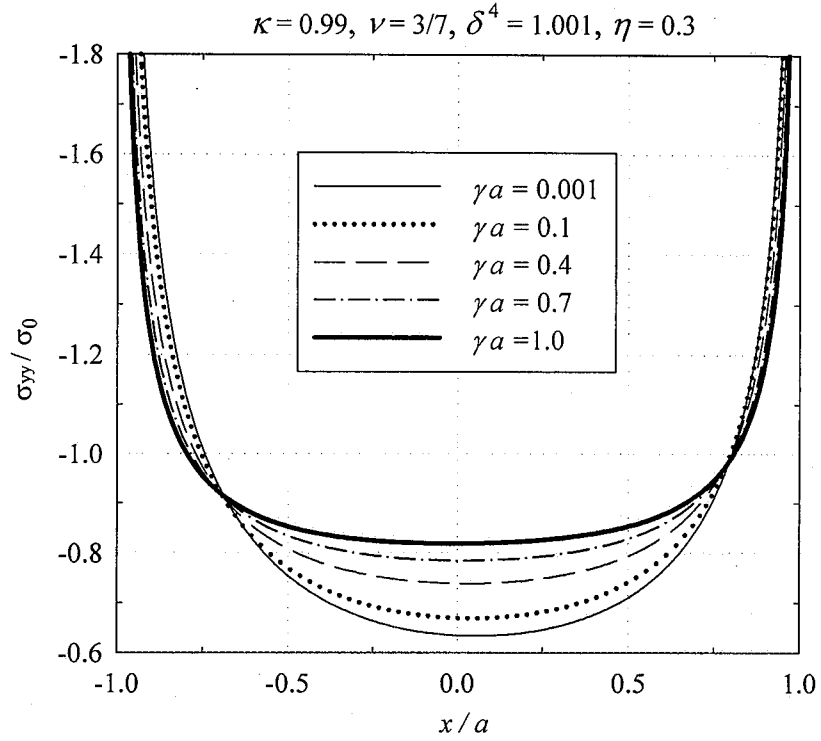
Şekil 6.2. $\kappa = 0.99, \nu = 3/7, \delta^4 = 1.001, \eta = 0.1$, ve farklı γa , heterojenlik parametresi değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.

Şekil 6.2' de $\kappa = 0.99, \nu = 3/7, \delta^4 = 1.001, \eta = 0.1$, ve farklı heterojenlik parametresi değerleri, γa , için gerilme dağılımı verilmiştir. Sürtünme kuvveti, $\eta = 0.0$ ' dan farklı olduğu için aksenal kuvvet vardır ve gerilme tekilliğinin kuvvetleri eşit olmayıp her iki uçta da $\alpha = -0.4909$ ve $\beta = -0.5091$ farklıdır. Gerilme dağılımı baskının uçlarında sınırlı değildir. Baskının bittiği uçtaki tekillik başladığı uçtakinden fazladır $|\beta| > |\alpha|$. $\gamma a = 0.001$ ' den $\gamma a = 1.0$ ' e kadar gerilme dağılımları sürtünme katsayısının artması ile $x/a = -1.0$ ' den temas alanının ortalarına doğru artmakta ve $x/a = 1.0$ ' e doğru azalmaktadır. Sürtünme katsayısı, $\eta = 0.1$, olduğu için gerilme dağılımının simetrisi bozulmasına rağmen için γa ' nın artması ile gerilme dağılımının $x/a = 0.0$ ' a göre simetrisi daha az bozulmuştur.



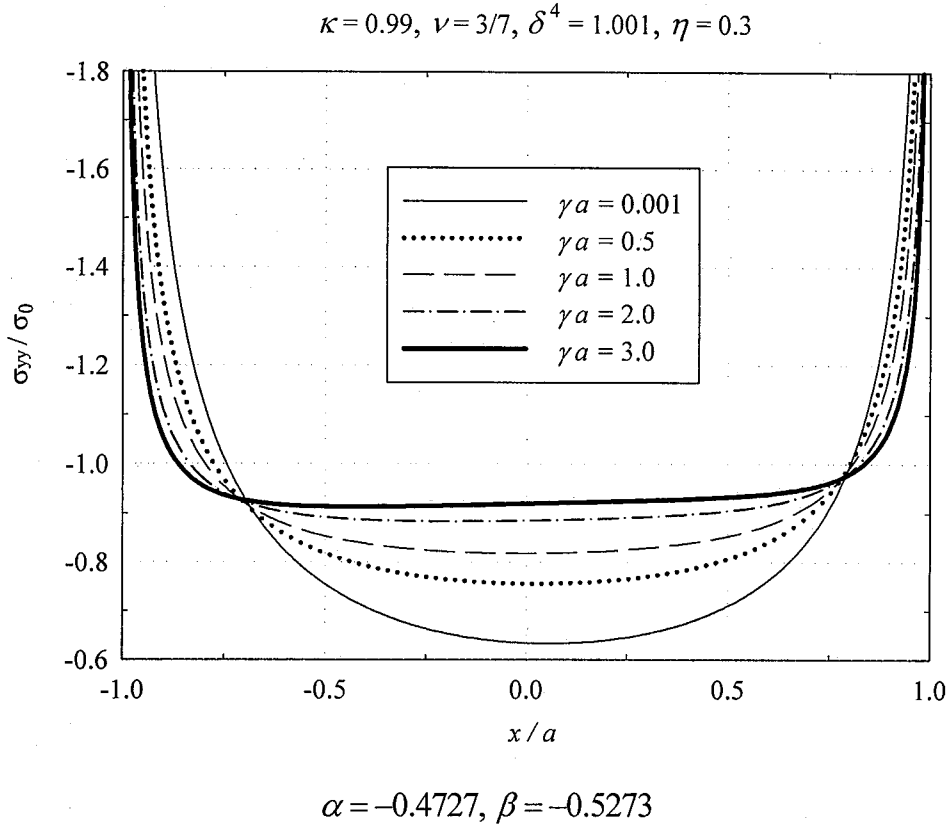
Şekil 6.3. $\kappa = 0.99, \nu = 3/7, \delta^4 = 1.001, \eta = 0.1$, ve farklı γa , heterojenlik parametresi değerleri için dikdörtgen profilili baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.

Şekil 6.3' de $\kappa = 0.99, \nu = 3/7, \delta^4 = 1.001, \eta = 0.1$, ve farklı heterojenlik parametresi değerleri, γa , için gerilme dağılımı verilmiştir. Şekil 6.2' den farklı olarak $\gamma a = 2.0$ ve $\gamma a = 3.0$ değerleri için de gerilme dağılımı verilmiştir. $\gamma a = 0.001$ ' den $\gamma a = 3.0$ ' e kadar gerilme dağılımları sürtünme katsayısının artması ile $x/a = -1.0$ ' den temas alanının ortalarına doğru artmakta ve $x/a = 1.0$ ' e doğru azalmaktadır. Heterojenlik parametresi değerleri, γa ' nın artması gerilme dağılımını $x/a = 0.0$ ' a göre daha simetrik yapmıştır.



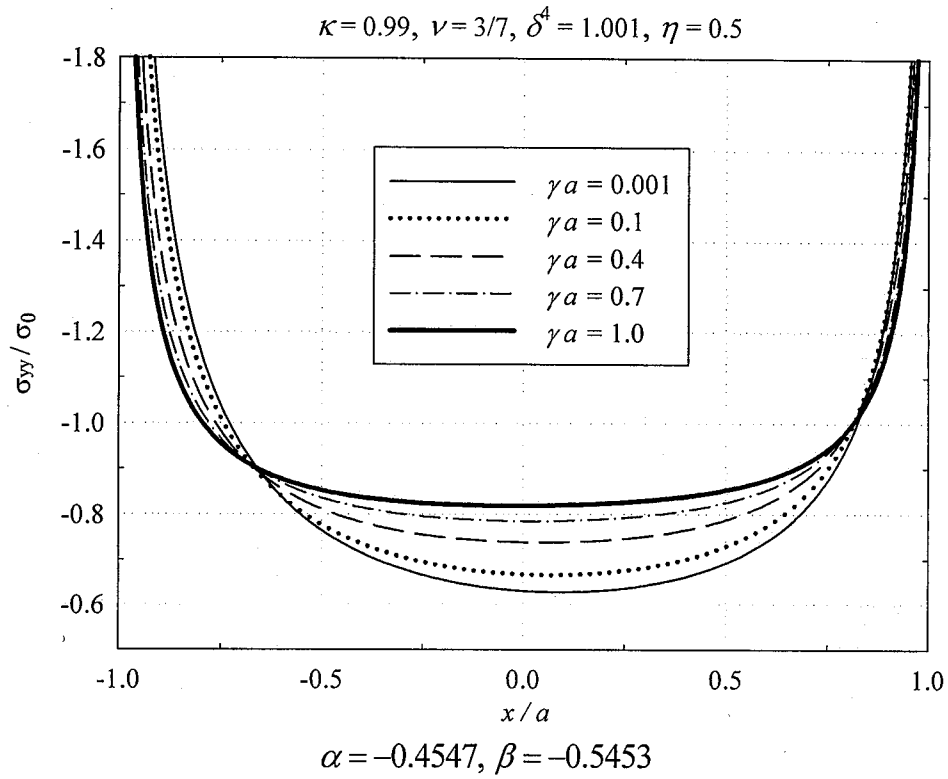
Şekil 6.4. $\kappa = 0.99, \nu = 3/7, \delta^4 = 1.001, \eta = 0.3$, ve farklı γa , heterojenlik parametresi değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.

Şekil 6.4' de $\kappa = 0.99, \nu = 3/7, \delta^4 = 1.001, \eta = 0.3$, ve farklı heterojenlik parametresi değerleri, γa , için gerilme dağılımı verilmiştir. Şekil 6.4' de, Şekil 6.2' den farklı olarak $\eta = 0.3$, değerleri için gerilme dağılımı elde edilmiştir. Sürtünme katsayısının değeri, η , arttıkça β , değeri artmaktadır. Baskının bittiği uçtaki gerilme tekilliğinin kuvveti, β , Şekil 6.2' deki değerden daha fazladır.



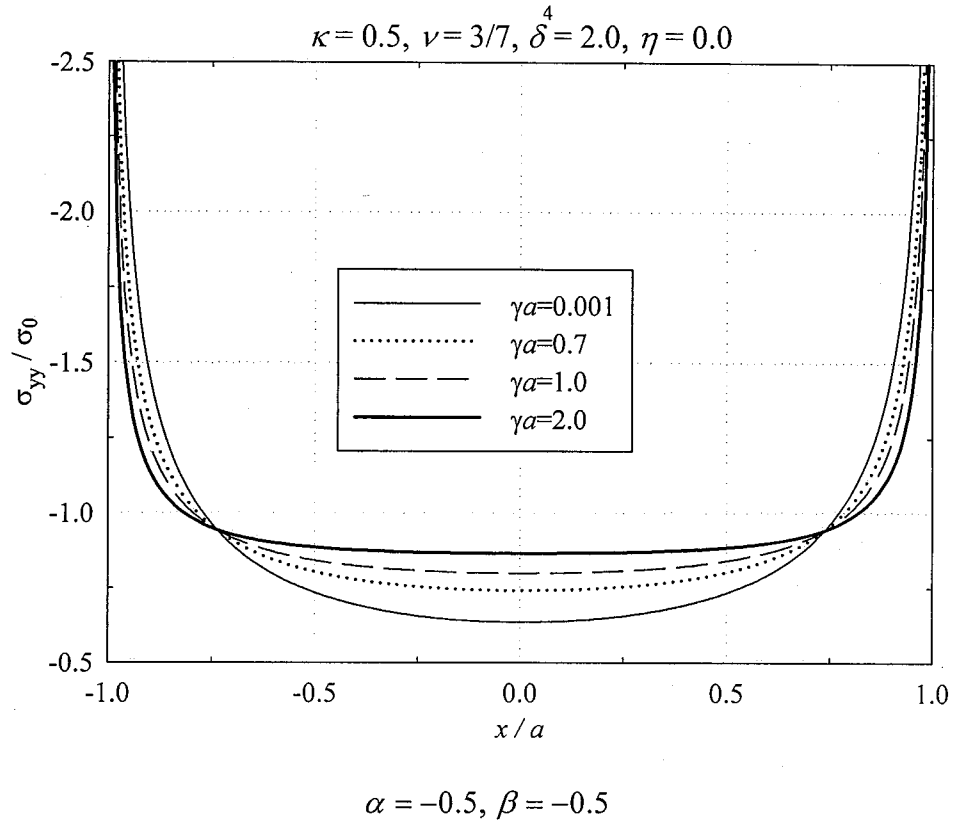
Şekil 6.5. $\kappa = 0.99, \nu = 3/7, \delta^4 = 1.001, \eta = 0.3$, ve farklı γa , heterojenlik parametresi değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.

Şekil 6.5' de $\kappa = 0.99, \nu = 3/7, \delta^4 = 1.001, \eta = 0.3$, ve farklı heterojenlik parametresi değerleri, γa , için gerilme dağılımı verilmiştir. Şekil 6.4' den farklı olarak $\gamma a = 2.0$ ve $\gamma a = 3.0$ değerleri için de gerilme dağılımı verilmiştir. Şekil 6.5' de, Şekil 6.3' den farklı olarak $\eta = 0.3$, değerleri için gerilme dağılımı elde edilmiştir. Şekil 6.5' deki, baskının bittiği uçtaki gerilme tekilliğinin kuvveti β , Şekil 6.3' deki değerinden daha fazladır.



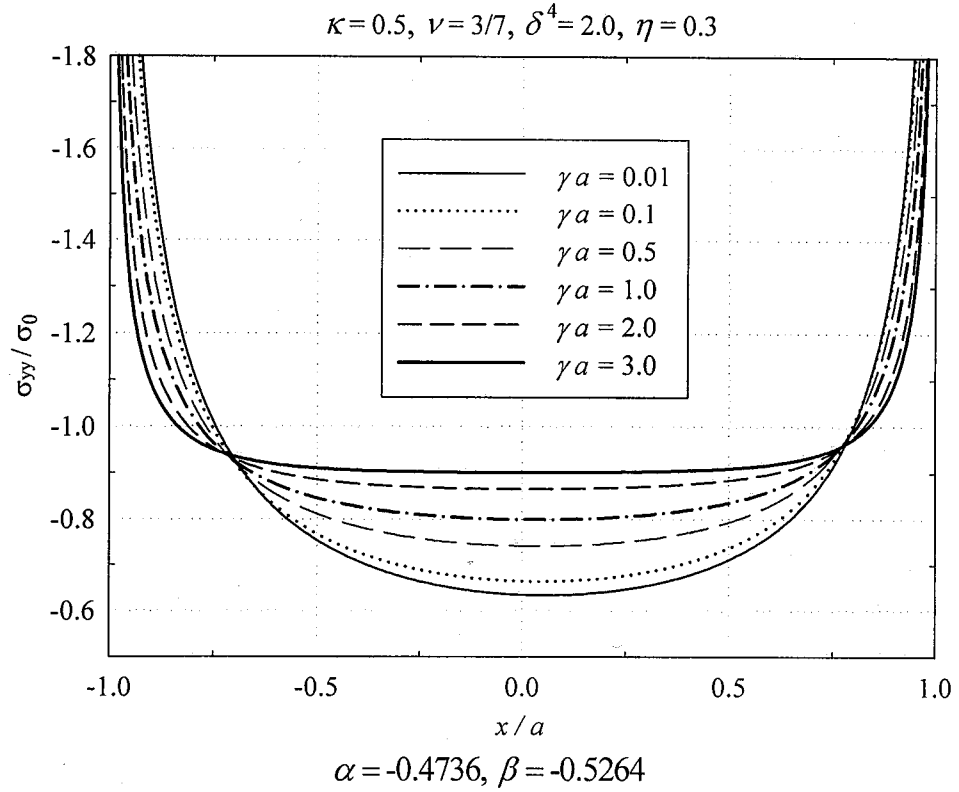
Şekil 6.6. $\kappa = 0.99, \nu = 3/7, \delta^4 = 1.001, \eta = 0.5$, ve farklı γa , heterojenlik parametresi değerleri için dikdörtgen profilili baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.

Şekil 6.6' da, $\kappa = 0.99, \nu = 3/7, \delta^4 = 1.001, \eta = 0.5$, ve farklı γa , heterojenlik parametresi değerleri için gerilme dağılımı elde edilmiştir. Şekil 6.2 ve Şekil 6.4' den farklı olarak $\eta = 0.5$, değeri için gerilme dağılımı elde edilmiştir. Şekil 6.6' daki, baskının bittiği uçtaki gerilme tekilliğinin kuvveti, β , Şekil 6.2 ve Şekil 6.4' de baskının bittiği uçtaki gerilme tekilliğinin kuvveti, β , değerinden daha fazladır. Bu da sürtünme katsayısının η , etkisini göstermektedir.



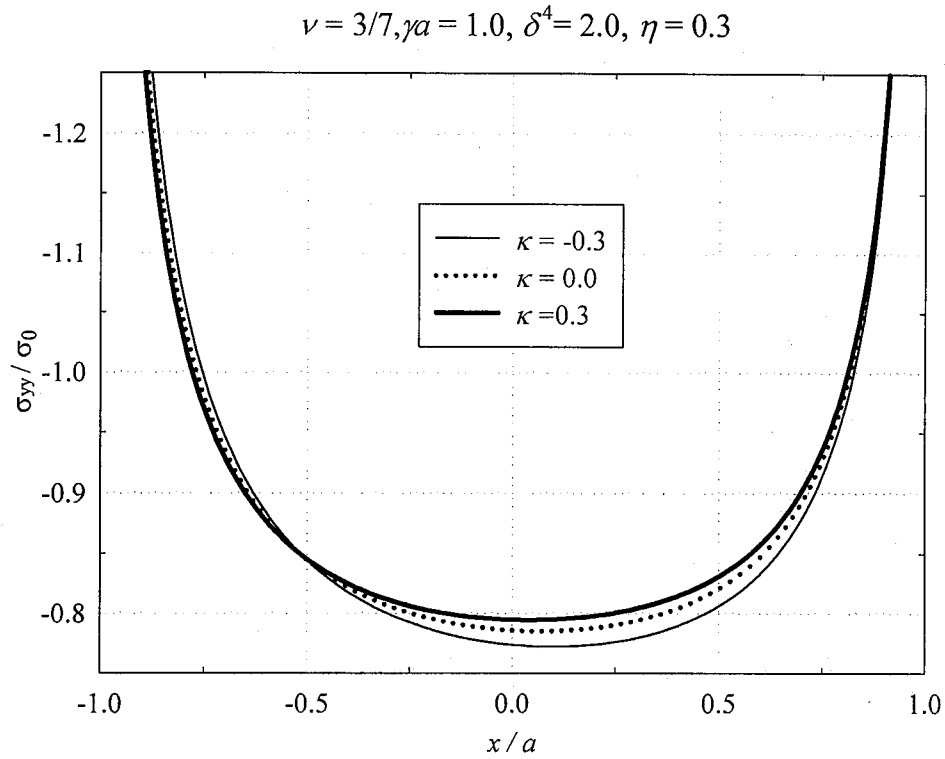
Şekil 6.7. $\kappa = 0.5, \nu = 3/7, \delta^4 = 2.0, \eta = 0.0$, ve farklı γa , heterojenlik parametresi değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.

Şekil 6.7' de, $\kappa = 0.5, \nu = 3/7, \delta^4 = 2.0, \eta = 0.0$, ve farklı γa , heterojenlik parametresi değerleri için gerilme dağılımı elde edilmiştir. Şekil 6.7' de, Şekil 6.1' den farklı olarak $\kappa = 0.5, \nu = 3/7, \delta^4 = 2.0, \eta = 0.0$, değerleri için gerilme dağılımı elde edilmiştir. Gerilme dağılımları sürtünme katsayısı $\eta = 0.0$, olduğu için $x/a = 0.0$ göre simetriktir. $\gamma a = 0.001$ ' den $\gamma a = 1.0$ kadar gerilme dağılımı temas alanının ortalarına doğru artmakta ve baskının uçlarına doğru azalmaktadır.



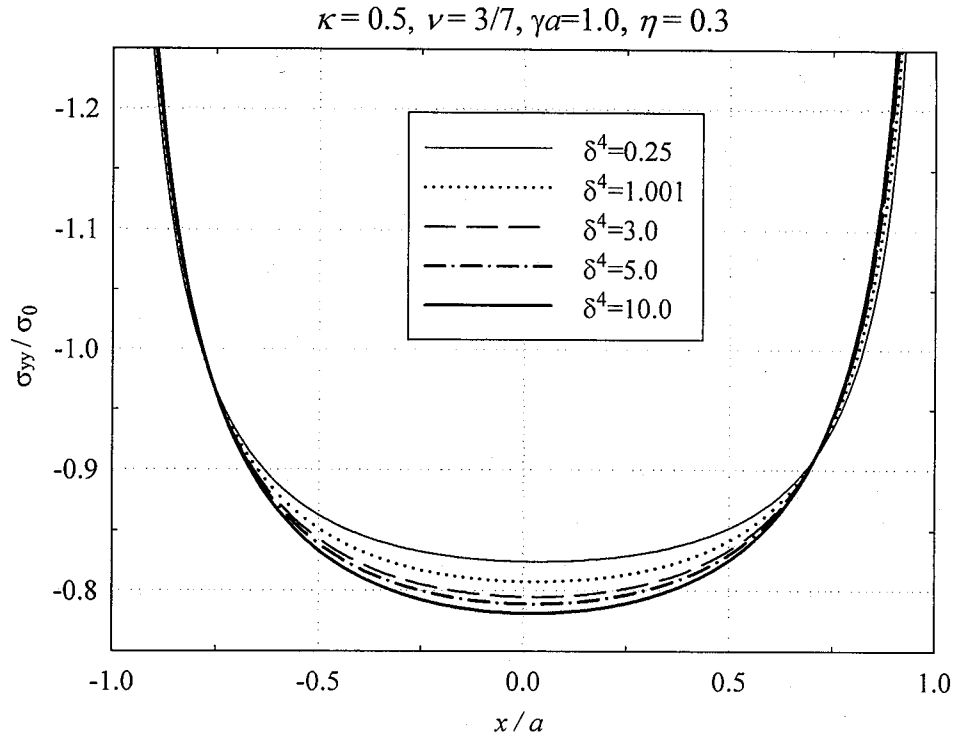
Şekil 6.8. $\kappa=0.5, \nu=3/7, \delta^4=2.0, \eta=0.3$ ve farklı γa , heterojenlik parametresi değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.

Şekil 6.8' de, $\kappa=0.5, \nu=3/7, \delta^4=2.0, \eta=0.3$ ve farklı γa , heterojenlik parametresi değerleri için gerilme dağılımı elde edilmiştir. Şekil 6.8' de, Şekil 6.7' den farklı olarak $\eta=0.3$ olduğu için grafiğin simetrisi bozulmuştur. Gerilme dağılımı baskının uçlarında sınırlı değildir. Baskının bittiği uçtaki tekillik başladığı uçtakinden fazladır $|\beta| > |\alpha|$. Şekil 6.8' de, Grafik 6.7' den farklı olarak baskının bittiği uçtaki gerilme tekilliğinin kuvveti, β , değerleri arasındaki fark sürtünme katsayısının, η , etkisini göstermektedir.



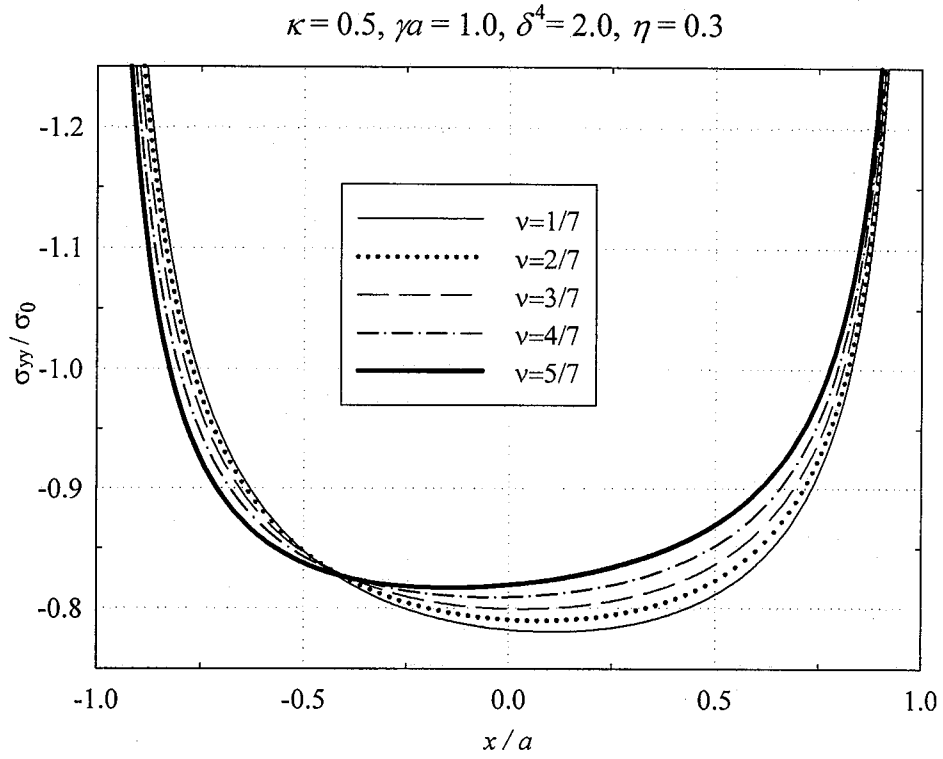
Şekil 6.9. $\nu = 3/7, \gamma a = 1.0, \delta^4 = 2.0, \eta = 0.3$, ve farklı kayma parametresi κ , değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.

Şekil 6.9' da $\gamma a = 1.0, \nu = 3/7, \delta^4 = 2.0, \eta = 0.3$, değerleri sabitken kayma parametresinin, κ , gerilme dağılımı üzerindeki etkisi görülmektedir. Gerilme dağılımı sürtünme katsayısının değeri, $\eta = 0.3, \eta = 0.0$ ' den farklı olduğu için simetrik değildir. Gerilme dağılımı gerilme alanını merkezine doğru artmakta ve sınırlarında azalmaktadır. Kayma parametresi, $\kappa = -0.3, \kappa = 0.0, \kappa = 0.3$, iken sırası ile baskının bittiği uçtaki gerilme tekilliğinin kuvveti, $\beta = -0.5386, \beta = -0.5323, \beta = -0.5284$ değerlerine eşittir. Kayma parametresi, κ , arttıkça, gerilme dağılımı üzerindeki etkisi azalmaktadır. Öztürk ve Erdoğan (1997)' ye göre $\kappa < -0.5$, iken gerilme şiddet faktörleri üzerindeki etkisinin artması gibi temas gerilmesinde de aynı etki gözlenmiştir.



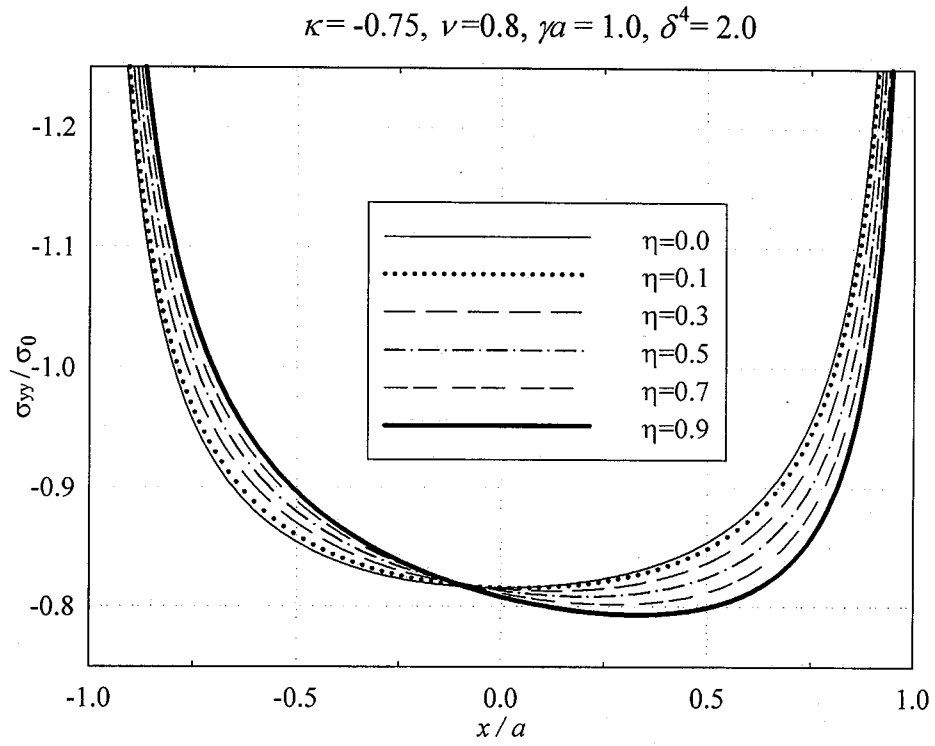
Şekil 6.10. $\kappa = 0.5, \nu = 3/7, \gamma a = 1.0, \eta = 0.3$, ve farklı δ^4 , katılık oranı değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.

Şekil 6.10' da $\kappa = 0.5, \nu = 3/7, \gamma a = 1.0, \eta = 0.3$, değerleri sabitken katılık oranı değerlerinin δ , gerilme dağılımı üzerindeki etkisi görülmektedir. Gerilme dağılımı sürtünme katsayısının değeri $\eta = 0.0$ farklı olduğu için simetrik değildir. Katılık oranı $\delta^4 = 0.25$, ve $\delta^4 = 10.0$, iken sırası ile baskının bittiği uçtaki gerilme tekilliğinin kuvveti, $\beta = -0.5443$ ve $\beta = -0.5177$ değerlerine eşittir. Katılık oranı değerinin, δ , azalması ile heterojenlik parametresinin, γa , gerilme dağılımı üzerindeki etkisi artmaktadır.



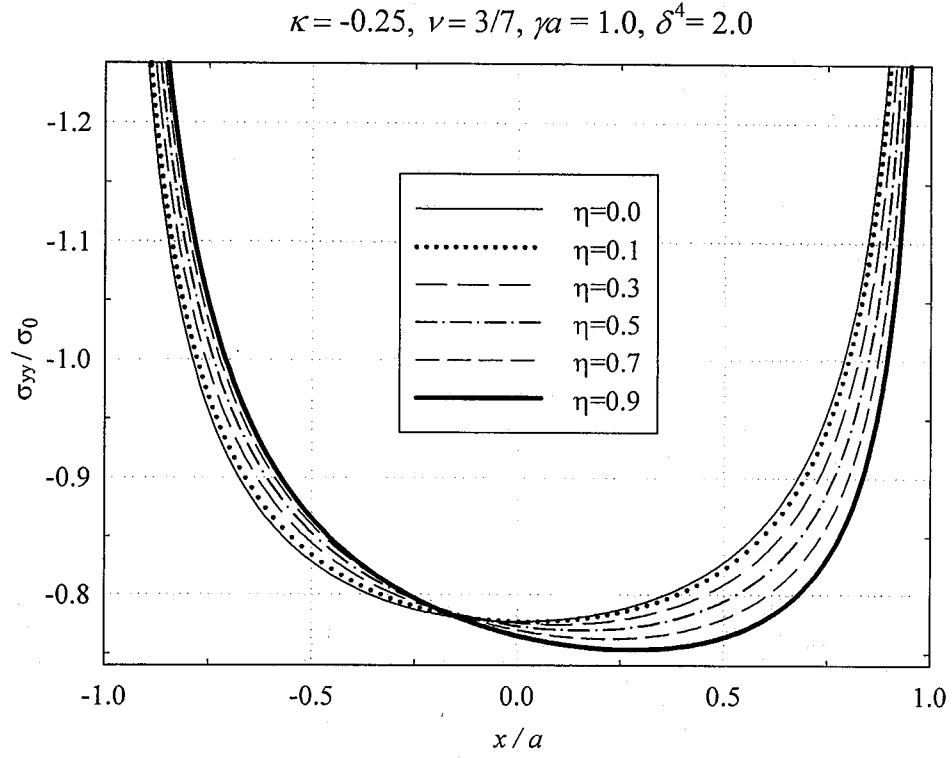
Şekil 6.11. $\kappa = 0.5, \gamma a = 1.0, \delta^4 = 2.0, \eta = 0.3$, ve farklı ν , Poisson oranı değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.

Şekil 6.11.' de $\kappa = 0.5, \gamma a = 1.0, \delta^4 = 2.0, \eta = 0.3$, değerleri sabitken Poisson oranının ν , gerilme dağılımı üzerindeki etkisi görülmektedir. Poisson oranı sırası ile $\nu = 1/7$ 'den $\nu = 5/7$ ' e artarken baskının bittiği uçtaki gerilme tekilliğinin kuvveti, $\beta = -0.5395$ ' den $\beta = -0.5132$ ' e azalmaktadır.



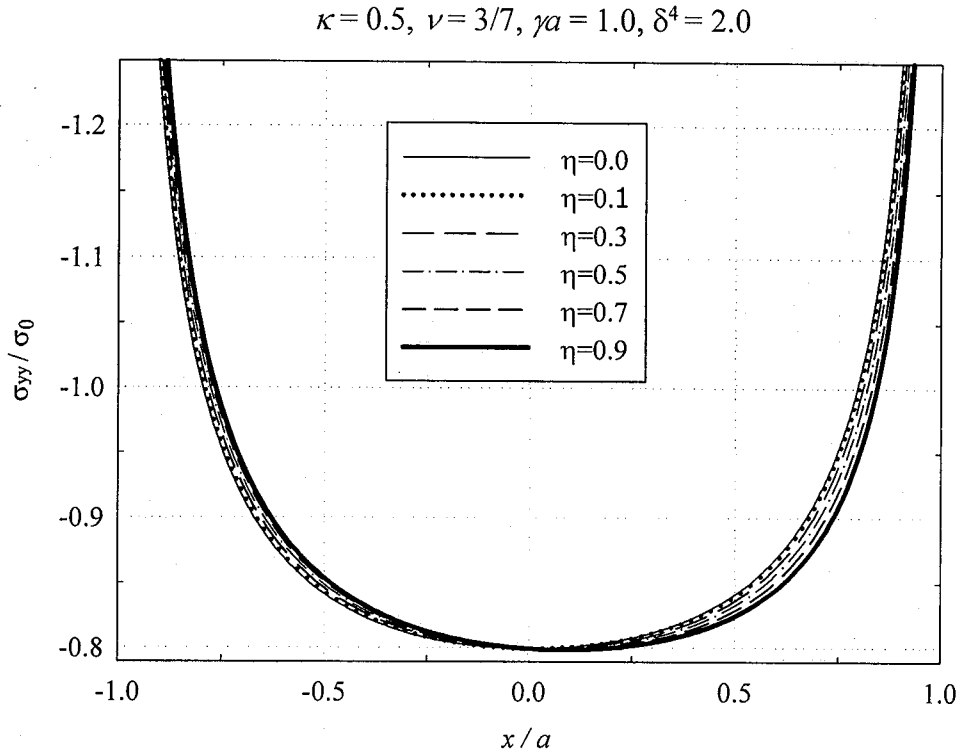
Şekil 6.12. $\kappa = -0.75, \nu = 0.8, \gamma a = 1.0, \delta^4 = 2.0$, ve farklı η , sürtünme katsayısı değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.

Şekil 6.12' de $\kappa = -0.75, \nu = 0.8, \gamma a = 1.0, \delta^4 = 2.0$, değerleri sabitken sürtünme katsayısının η , gerilme dağılımı üzerindeki etkisi görülmektedir. Gerilme dağılımı $\eta = 0.0$ için simetriktir. Temas bölgesinde uç noktalar haricinde sürtünme katsayısının η , değeri $\eta = 0.0$ 'dan $\eta = 0.9$ artarken sırası ile baskının bittiği uçtaki gerilme tekilliğinin kuvvetinin değerleri $\beta = -0.5$ 'dan $\beta = -0.5671$ ' e artmaktadır.



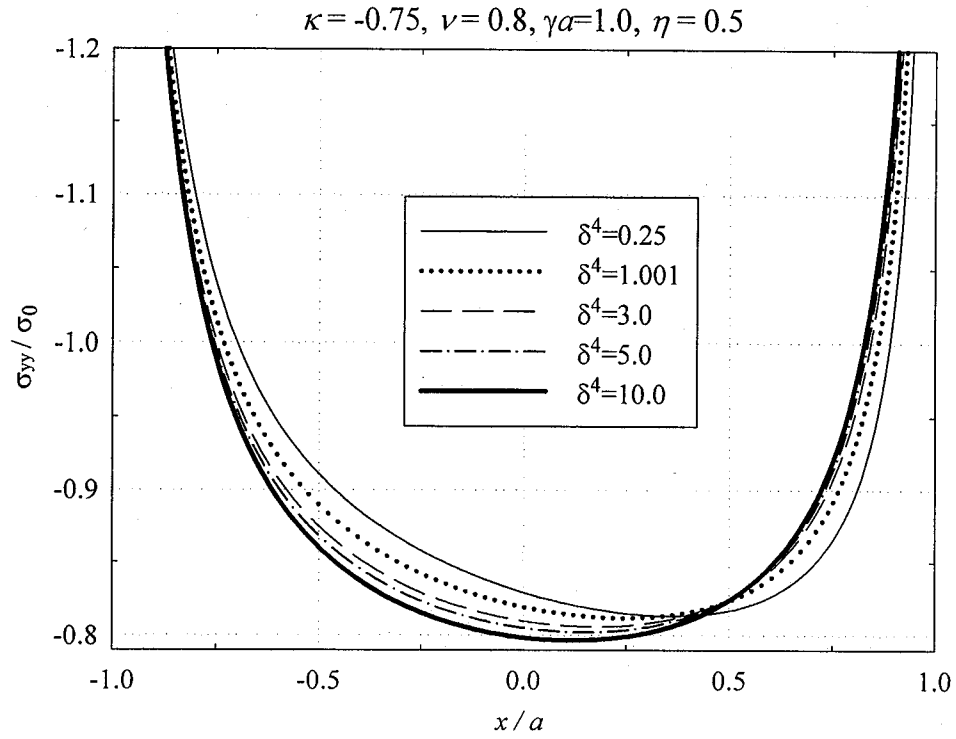
Şekil 6.13. $\kappa = -0.25, \nu = 3/7, \gamma a = 1.0, \delta^4 = 2.0$, ve farklı η , sürtünme katsayısı değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.

Şekil 6.13' de $\kappa = -0.25, \nu = 3/7, \gamma a = 1.0, \delta^4 = 2.0$, değerleri sabitken η , sürtünme katsayısının gerilme dağılımı üzerindeki etkisi görülmektedir. Gerilme dağılımı $\eta = 0.0$, için simetriktir. Temas bölgesinde uç noktalar haricinde sürtünme katsayısının η , değeri $\eta = 0.0$ 'dan $\eta = 0.9$, artarken sırası ile baskının bittiği uçtaki gerilme tekilliğinin kuvvetinin değerleri $\beta = -0.5$ 'dan $\beta = -0.6080$ ' e artmaktadır.



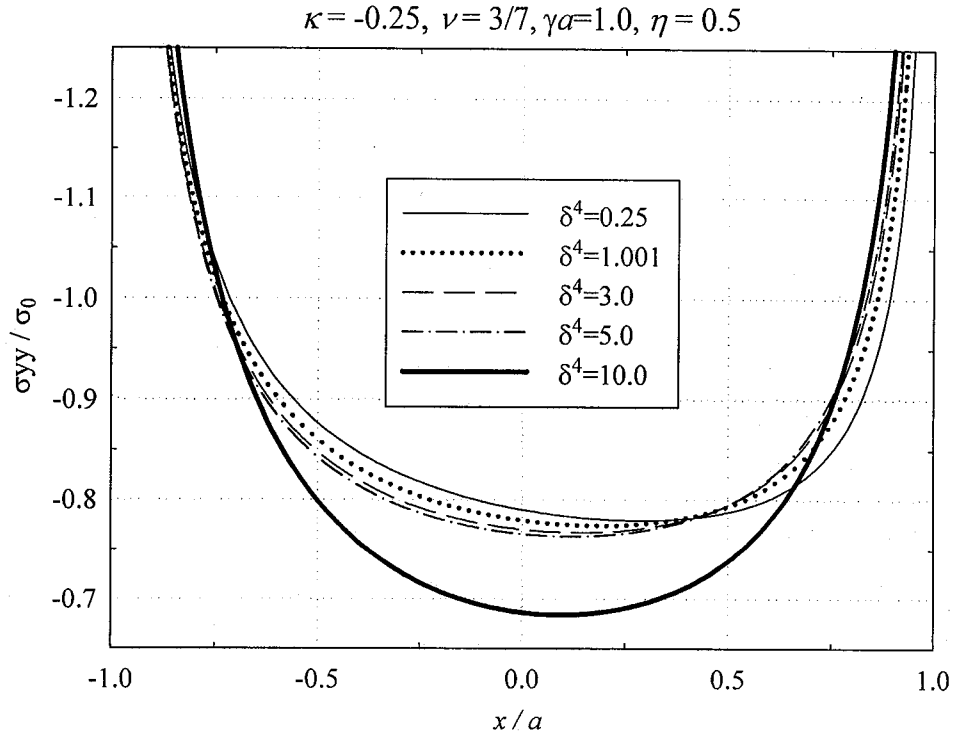
Şekil 6.14. $\kappa = 0.5, \nu = 3/7, \gamma a = 1.0, \delta^4 = 2.0$, ve farklı η , sürtünme katsayısı değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.

Şekil 6.14' de $\kappa = 0.5, \nu = 3/7, \gamma a = 1.0, \delta^4 = 2.0$, değerleri sabitken sürtünme katsayısının η , gerilme dağılımı üzerindeki etkisi görülmektedir. Şekil 6.12 ve Şekil 6.13' de olduğu gibi, temas bölgesinde uç noktalar haricinde sürtünme katsayısının η , değeri $\eta = 0.0$ 'dan $\eta = 0.9$, artarken sırası ile baskının bittiği uçtaki gerilme tekilliğinin kuvvetinin değerleri $\beta = -0.5$ 'den $\beta = -0.5779$ ' a artmaktadır. Yalnız dikkat edilirse kayma parametresinin değeri arttıkça κ , sürtünme katsayısının η , gerilme dağılımı üzerindeki etkisi azalmaktadır.



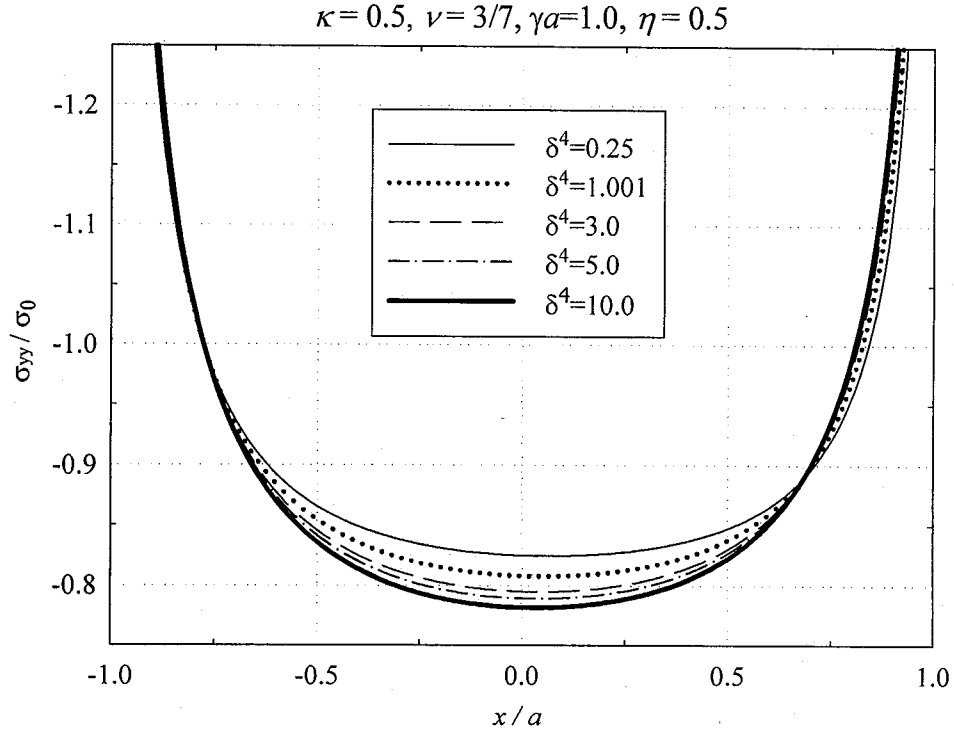
Şekil 6.15. $\kappa = -0.75, \nu = 0.8, \gamma a = 1.0, \eta = 0.5$, farklı δ^4 , katılık oranı değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.

Şekil 6.15' de $\kappa = -0.75, \nu = 0.8, \gamma a = 1.0, \eta = 0.5$, değerleri sabitken farklı katılık oranı değerlerinin δ , gerilme dağılımı üzerindeki etkisi görülmektedir. Gerilme dağılımı sürtünme katsayısının değeri $\eta = 0.0$ farklı olduğu için simetrik değildir. Katılık oranı sırası ile $\delta^4 = 0.25$ ' den $\delta^4 = 10.0$ ' a değişirken baskının bittiği uçtaki gerilme tekilliğinin kuvvetinin değerleri $\beta = -0.5628$ ' den $\beta = -0.5253$ ' e azalmaktadır.



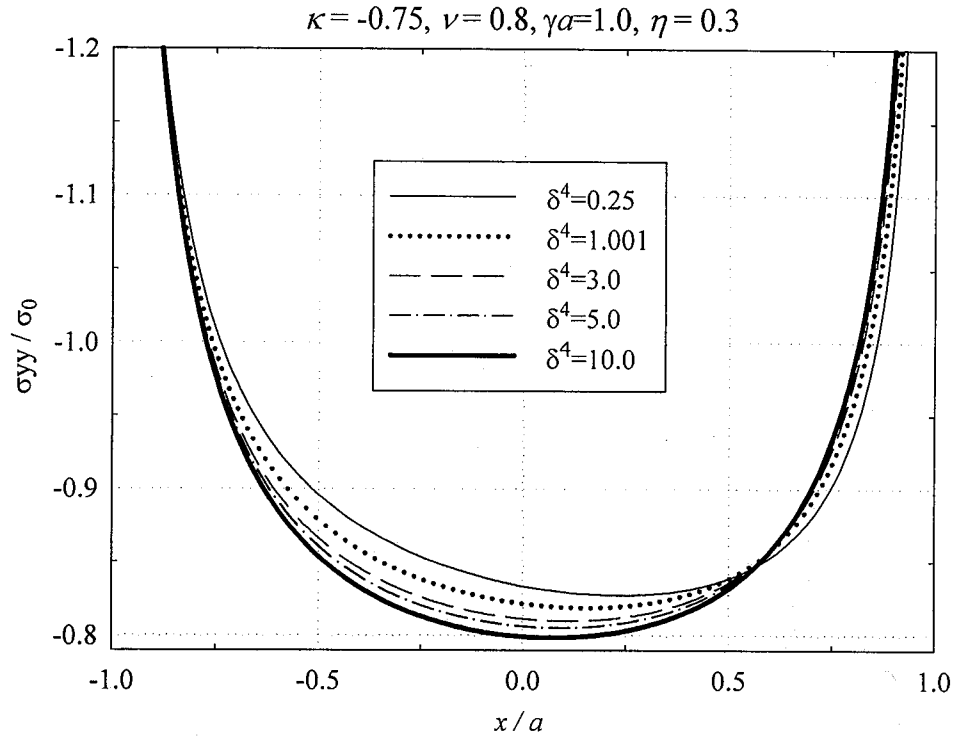
Şekil 6.16. $\kappa = -0.25, \nu = 3/7, \gamma a = 1.0, \eta = 0.5$, ve farklı δ^4 , katılık oranı değerleri için dikdörtgen profilili baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.

Şekil 6.16' de $\kappa = -0.25, \nu = 3/7, \gamma a = 1.0, \eta = 0.5$, değerleri sabitken farklı katılık oranı değerlerinin δ , gerilme dağılımı üzerindeki etkisi görülmektedir. Katılık oranı sırası ile $\delta^4 = 0.25$ ' den $\delta^4 = 10.0$ ' a değişirken baskının bittiği uçtaki gerilme tekilliğinin kuvvetinin değerleri $\beta = -0.6014$ 'den $\beta = -0.5415$ 'e azalmaktadır.



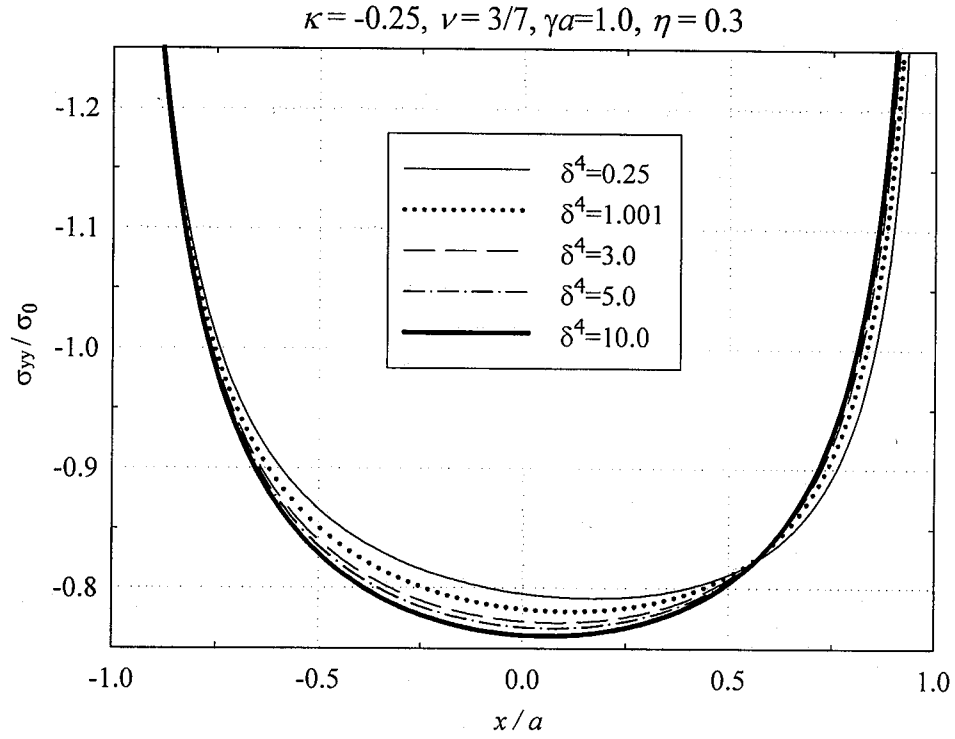
Şekil 6.17. $\kappa = 0.5, \nu = 3/7, \gamma a = 1.0, \eta = 0.5$, ve farklı δ^4 , katılık oranı değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.

Şekil 6.17' de $\kappa = 0.5, \nu = 3/7, \gamma a = 1.0, \eta = 0.5$, değerleri sabitken farklı katılık oranını değerlerinin δ , gerilme dağılımı üzerindeki etkisi görülmektedir. Katılık oranı sırası ile $\delta^4 = 0.25$ ' den $\delta^4 = 10.0$ ' a değişirken baskının bittiği uçtaki gerilme tekilliğinin kuvvetinin değerleri $\beta = -0.5730$ ' dan $\beta = -0.5294$ ' e azalmaktadır. Şekil 6.10' da sürtünme katsayısı, $\eta = 0.3$, katılık oranı $\delta^4 = 0.25$ ve $\delta^4 = 10.0$ iken sırası ile $\beta = -0.5443$ ve $\beta = -0.5177$ değerlerine eşittir. Sürtünme katsayısının değeri η , arttıkça gerilme dağılımı üzerinde katılık oranının δ , etkisi de artmaktadır.



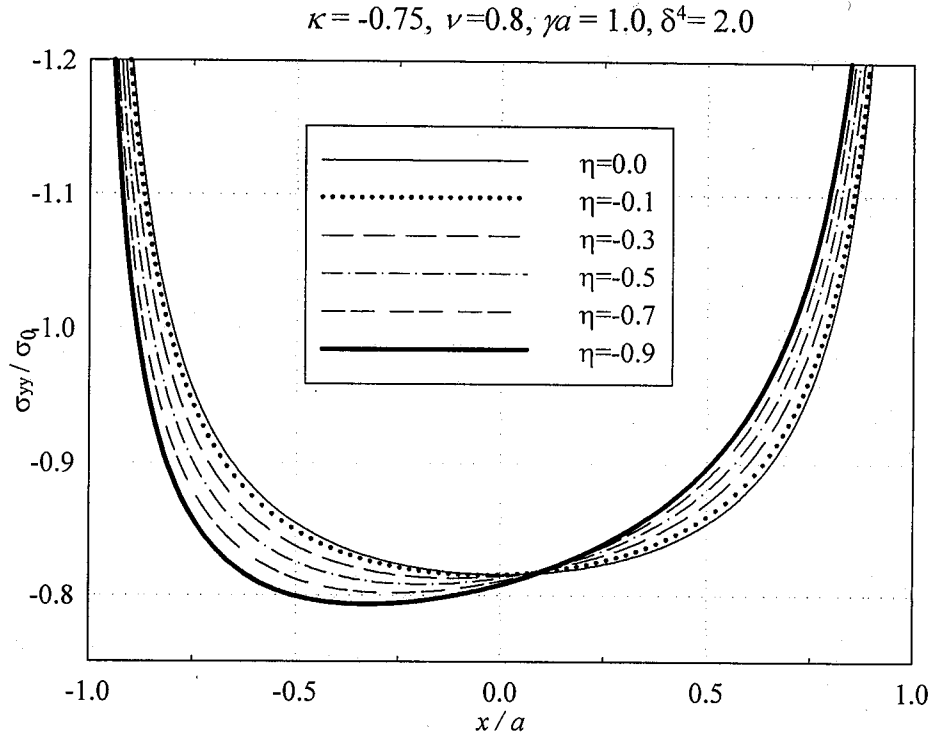
Şekil 6.18. $\kappa = -0.75, \nu = 0.8, \gamma a = 1.0, \eta = 0.3$, ve farklı δ^4 , katılık oranı değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.

Şekil 6.18' de $\kappa = -0.75, \nu = 0.8, \gamma a = 1.0, \eta = 0.3$, değerleri sabitken farklı katılık oranı değerlerinin δ , gerilme dağılımı üzerindeki etkisi görülmektedir. Gerilme dağılımı sürtünme katsayısının değeri $\eta = 0.0$ ' dan farklı olduğu için simetrik değildir. Katılık oranı sırası ile $\delta^4 = 0.25$ ' den $\delta^4 = 10.0$ ' a değişirken baskının bittiği uçtaki gerilme tekilliğinin kuvvetinin değerleri $\beta = -0.5380$ 'den $\beta = -0.5151$ 'e azalmaktadır. Şekil 6.15' de sürtünme katsayısı, $\eta = 0.5$, katılık oranı $\delta^4 = 0.25$ ve $\delta^4 = 10.0$ iken sırası ile baskının bittiği uçtaki gerilme tekilliğinin kuvvetinin değerleri $\beta = -0.5628$ ve $\beta = -0.5253$ değerlerine eşittir. Sürtünme katsayısının değeri η , arttıkça gerilme dağılımı üzerinde katılık oranının etkisi de artmaktadır.



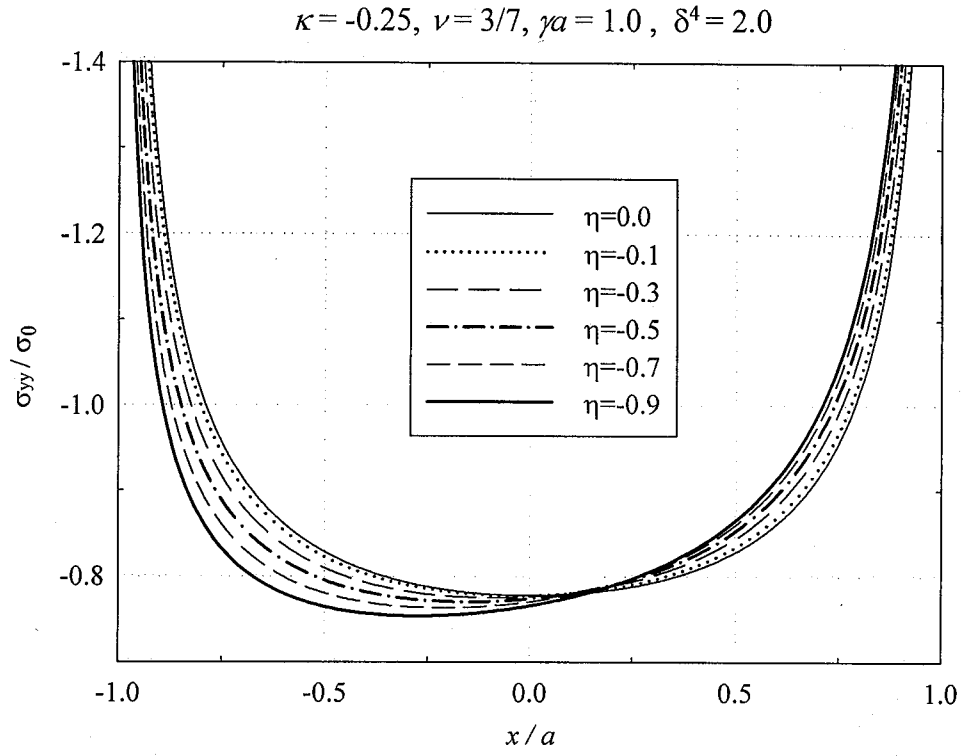
Şekil 6.19. $\kappa = -0.25, \nu = 3/7, \gamma a = 1.0, \eta = 0.3$, ve farklı δ^4 , katılık oranı değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.

Şekil 6.19' de $\kappa = -0.25, \nu = 3/7, \gamma a = 1.0, \eta = 0.3$, değerleri sabitken katılık oranı değerlerinin δ , gerilme dağılımı üzerindeki etkisi görülmektedir. Gerilme dağılımı sürtünme katsayısının değeri $\eta = 0.0$ ' dan farklı olduğu için simetrik değildir. Katılık oranı sırası ile $\delta^4 = 0.25$ ' den $\delta^4 = 10.0$ ' a değişirken baskının bittiği uçtaki gerilme tekilliğinin kuvvetinin değerleri $\beta = -0.5622$ ' den $\beta = -0.5250$ 'e azalmaktadır. Şekil 6.16' da $\eta = 0.5$, iken katılık oranı değerleri, $\delta^4 = 0.25$ ve $\delta^4 = 10.0$ iken sırası ile $\beta = -0.6014$ ve $\beta = -0.5415$ değerlerine eşittir. Sürtünme katsayısı arttıkça katılık oranı değerinin δ , gerilme dağılımı üzerindeki etkisi de artmaktadır.



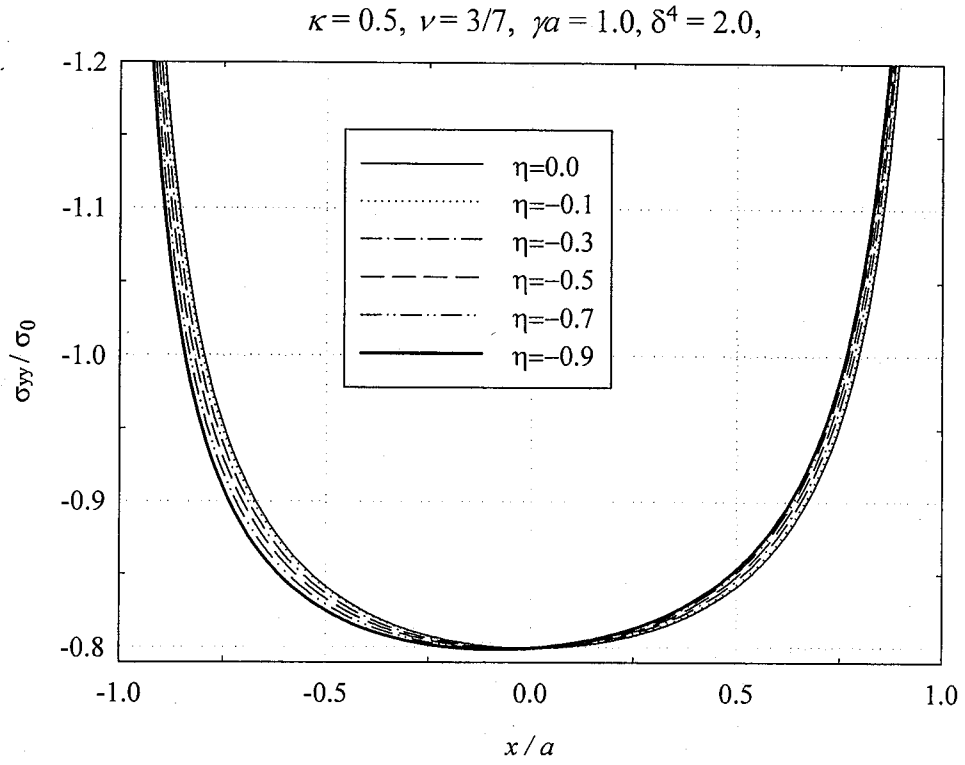
Şekil 6.20. $\kappa = -0.75, \nu = 0.8, \gamma a = 1.0, \delta^4 = 2.0$, ve farklı η , sürtünme katsayısı değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.

Şekil 6.20' de $\kappa = -0.75, \nu = 0.8, \gamma a = 1.0, \delta^4 = 2.0$, değerleri sabitken sürtünme katsayısının η , gerilme dağılımı üzerindeki etkisi görülmektedir. Şekil 6.12' de pozitif ve sıfır sürtünme katsayısı göz önüne alınmıştır. Burada ise sıfır ve negatif sürtünme katsayısı değerleri ele alınmıştır. Negatif sürtünme katsayısının uygulanan aksenal kuvvetin yönünü değiştirdiğini göstermektedir. Bu çalışmadaki işaret kabulüne göre pozitif sürtünme katsayısı aksenal kuvvetin Şekil 5.2' de olduğu gibi $x_1(\mathbf{x})$ yönünde olmasıdır.



Şekil 6.21. $\kappa = -0.25, \nu = 3/7, \gamma a = 1.0, \delta^4 = 2.0$, ve farklı η , sürtünme katsayısı değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.

Şekil 6.21' de $\kappa = -0.25, \nu = 3/7, \gamma a = 1.0, \delta^4 = 2.0$, değerleri sabitken sürtünme katsayısının η , gerilme dağılımı üzerindeki etkisi görülmektedir. Şekil 6.13' den farkı grafiklerin yön değiştirmesidir.



Şekil 6.22. $\kappa = 0.5, \nu = 3/7, \gamma a = 1.0, \delta^4 = 2.0,$ ve farklı η , sürtünme katsayısı değerleri için dikdörtgen profilli baskı ile yüklenmiş düşey yönde derecelendirilmiş malzemenin yüzeyindeki gerilme dağılımı.

Şekil 6.22' de $\kappa = 0.5, \nu = 3/7, \gamma a = 1.0, \delta^4 = 2.0,$ değerleri sabitken η , sürtünme katsayısının gerilme dağılımı üzerindeki etkisi görülmektedir. Şekil 6.14' den farkı grafiklerin yön değiştirmesidir.

7.SONUÇLAR ve ÖNERİLER

7.1.Sonuçlar

1. Bu problemde normalize temas gerilme dağılımı malzeme heterojenlik parametresine, γ , sürtünme katsayısına, η , baskı boyutuna, α , Poisson oranına ν , dolayısı ile kayma parametresine κ , ve katılık oranına, δ , bağlıdır.
2. Kayma parametresi, κ , $\kappa < -0.5$ (Öztürk ve Erdoğan, 1997) iken gerilme dağılımı üzerindeki etkisi daha belirgindir. Bunun dışında Poisson oranının ν , ve kayma parametresinin κ , etkisi çok belirgin değildir.
3. $\kappa + \nu$, parametresinin gerilme dağılımı üzerinde $\kappa < -0.5$ belirgin bir etkisi vardır. Bunun yanında ortotropik malzemelerde ν , 0.5' den büyük olabilir (Öztürk ve Erdoğan, 1997).
4. Sürtünme katsayısı, η , gerilme tekiliklerinin kuvvetini etkilediğinden gerilme dağılımı üzerinde baskın bir etkisi vardır.
5. Katılık oranı, δ , heterojenlik parametresine, γ , ile doğrudan bağlantılıdır fakat gerilme dağılımı üzerindeki etkisi etkisi belirgin değildir.
6. Eksenel kuvvetin yönü değiştiğinde gerilme dağılımının yönü değişmektedir.

7.2.Öneriler

Bu çalışmada; düşey yönde elastik olarak derecelenmiş ortotropik malzemenin yüzeyindeki düzlem temas gerilme dağılımı ele alınmıştır. Hesaplanan ana nicelikler gerilme dağılımı, yük/temas uzunluğu dağılımıdır. Elastik rijit baskı altındaki ortotropik FDM temas problemi öncelikle temel denklemler Fourier dönüşümü ile adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülmüştür. Sonuçta elde edilen integral denklemi sayısal olarak çözülmüştür. Bu çalışmada kullanılan parametreler heterojenlik parametresi, γ , sürtünme katsayısı, η , ve farklı uzunluk parametreleridir. Dikdörtgen profilli baskı P yükünü aktarmak için kullanılmıştır (Güler, 2000). Sonuçlar, düşey yönde elastik derecelendirmenin yüzeydeki temas gerilmesi dağılımları üzerinde nasıl etkili olduğunu göstermiştir.

Bu çalışmanın sonrasında yapılabilecek başka çalışmalarla ilgili bazı öneriler aşağıda verilmiştir:

1. Dereceli malzemeler için kaymalı temas problemlerinde, temas gerilmelerinin asimptotik davranışını tanımlayan ağırlık fonksiyonu, aynen homojen malzemelerde olduğu gibi, sadece sürtünme katsayısı ve Poisson oranının yüzey değerine bağlıdır ve diğer tüm malzeme sabitleri ve uzunluk parametrelerinden bağımsızdır. Dolayısı ile derecelendirilmiş kaplamalar için olan genel kayma temas probleminin asimptotik çözümünün öncü terimi ilgili homojen yarı düzlemin basitleştirilmiş baskı geometrileri için kapalı çözümünden elde edilebilir. Daha önce homojen ortotropik malzemeler için kaymalı temas problemi çalışılmadığı için, yukarıda bahsedilen karşılaştırma yapılamamıştır. Genellikle temas alanın bittiği uçtaki gerilme konsantrasyonu başladığı uçtakinden daha fazladır. Örneğin dikdörtgen baskıda $|\alpha| > |\beta|$, $\alpha < 0$, $\beta < 0$ α , ve β , sırası ile son ve başlangıç uçlarındaki gerilme tekilliğinin kuvvetleridir. Yalnız dikkat edilirse bu çalışmadaki $Q = \eta P$, ile Güler ve Erdoğan, (2004) $Q = \eta P$, yönü farklıdır. Sonuçlar; derecelendirilmiş kaplamalar için kaymalı temas problemlerinde temas gerilmesi ve özellikle gerilme şiddet faktörleri üzerinde, beklenildiği gibi sadece sürtünme katsayısının, η , değil, buna ilâveten malzeme heterojenlik parametresi, γ , de etkisinin olduğunu göstermiştir.
2. Ortotropik derecelendirilmiş malzemenin direncinin daha iyi görülebilmesi için temas problemi homojen ortotropik ortamda dikdörtgen, üçgen, dairesel ve silindirik baskı profilleri için de çözülebilir.
3. Düşey yönde ortotropik derecelendirilmiş malzeme için düzlem temas problemine düzlemdeki (*in plane*) $\sigma_{xx}(x, y)$ gerilmeler ve gerilme şiddet faktörleri de eklenebilir (Güler, 2000).
4. Düşey yönde ortotropik derecelendirilmiş malzeme için düzlem temas problemi üçgen, dairesel ve silindirik baskı profilleri için çözülebilir.
5. Yatay yönde ortotropik derecelendirilmiş malzeme için düzlem temas problemi dikdörtgen, üçgen, dairesel ve silindirik baskı profilleri için çözülebilir (Güler ve ark., 2007).
6. Baskı sonucunda oluşabilecek yüzey çatlakları hasar modu halinde yüzey çatlaklarının

davranışını inceleyebilmek için hem düşey, hem yatay, hem de düşey ve yatay yönlerde ortotropik FDM için birleştirilmiş temas ve çatlak problemi dikdörtgen, üçgen, dairesel ve silindirik baskı profilleri için çözülebilir. (Dağ, 2001), (El-Borgi ve ark., 2004).

7. Yukarıdaki problemler farklı elastik derecelendirmeler için, örneğin Young modülü farklı fonksiyonlarla (trigonometrik, üstel vb.) tanımlanarak çözülebilir (Giannakopoulos ve Pallot, 2000).
8. Yukarıdaki problemlere kaplamanın etkisi katılarak yapılacak çalışmalar tekrarlanabilir (Güler, 2000).
9. Malzemenin plastik bölgeye geçtiği kabulü ile problem çözülebilir. Çözüm metodunda bazı sınırlamalar vardır. Bunlardan birisi plastik bölgeye geçilmesidir. Keskin köşeli dikdörtgen baskı profiline son derece az yüklemeye bile plastik bölge oluşması mümkündür. Plastik bölgenin boyutu önemlidir. Eğer bu bölge yeterince büyükse plastik analiz de gerekmektedir (Civelek, 1972). Choi ve ark. (2008-I) ve Choi ve ark. (2008-II) çalışmalarındaki gibi plastik bölgede de çalışılabilir.
10. Bu çalışmada ele alınan temas mekaniği probleminde Coulomb sürtünme modeli kullanılmıştır. Fakat bu model sadece uygulanan aksenal kuvvetin yeterince büyük olduğu durumlarda geçerlidir. Bunun geçerli olmadığı durumlarda temas alanında bazı yerlerde kayma olurken diğer yerlerde yapışma olabilir. Yani, yarı kaymalı temas mekaniği problemi ortaya çıkar. Bu durum ortotropik FDM için hem düşey hem yatay, hem de düşey ve yatay yönlerde çalışılabilir. Bunun sonucu oluşan çatlak ilerlemesi problemi ile de birleştirilirse fiziksel uygulama alanı oldukça geniş olan bir problem çözülmüş olur. Normal, tam yapışma ve yuvarlanma temas problemi de ele alınabilir. Böylece kayan yüzeylerde sürünme (*creep*), aşınma (*wear*) ve kazımalı yorulma (*freeing fatigue*) için dirençli ortotropik FDM' ler modellenmiş olur (Giannakopoulos ve Pallot, 2000).
11. Yukarıdaki problemlere yüzey sıcaklığı da eklenebilir. Böylece tribolojik uygulamalar için daha uygun matematik modeller elde edilebilir (Dağ, 2006).
12. Ortotropik derecelendirilmiş malzemeler için yukarıda matematiksel modellemesi yapılan çalışmalar aynı zamanda deneysel olarak da gerçekleştirilirse malzemenin gerçek davranışı ile matematik modeli güçlendirilebilir.

13. Elde edilen sonuçlarlar, Sonlu Elemanlar Metodu (*Finite Elements Method*) veya Sınır Elemanlar Metodu (*Boundary Elements Method*) kullanılarak elde edilecek sonuçlarla karşılaştırılabilir (Dağ ve ark., 2009).
14. Bu analizde sadece statik durum göz önüne alınmıştır. Eğer, yükleme zamanı kısa ise dinamik yüklemenin etkileri önemlidir. Dinamik yükleme tarafından oluşturulan gerilme dalgaları gerilme alanını etkiler (Civelek, 1972). Dinamik yükleme kabulü ile problem yeniden modellenebilir.
15. Düzenli periyodik profilleri olan yüzeylerin kısmî temasında sürtümesiz temas, kaymalı temas, tamamen yapışan ve kısmî kaymalı gibi farklı yükleme şartları ele alınmıştır. Karşılaşan yüzeylerin elastik olarak benzer ve benzer olmayan malzemeden olması durumlarında çözümler Coulomb sürtünmesi kabulü ile hesaplanmıştır (Block, 2007). Düzenli periyodik profiller ile problem yeniden modellenebilir.

8. KAYNAKLAR

- Abramowitz, M., Stegun, I.A., 1965, Handbook of mathematical functions, *Dover Publications*, New York, USA.
- Amada, S., Munekata, T., Nagase, Y., Ichikawa, Y., Kirigai, A., Zhifei, Y., 1996, The mechanical structures of bamboos in viewpoint of functionally gradient and composite materials, *Journal of Composite Materials*, Vol. 30, No:7, pp. 800-819.
- Arın, K., Erdoğan F., 1971, Penny shaped crack in an elastic layer bounded to dissimilar half spaces, *International Journal of Engineering Science*, Vol.9, pp.213-232,221.
- Bakırtaş, I.,1984, The contact problem of a orthotropic non-homogeneous elastic half space, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 22, No. 4, pp. 347-359.
- Barber, J.R. and Ciavarella, 2000, M., Contact mechanics in research trends in solid mechanics, (ed. G.Dvorak), *International Journal of Solids and Structures*, Vol.37, pp.29-43.
- Batra, R.C., Jiang, W., 2008, Analytical solution of the contact problem of a rigid indenter and an anisotropic linear elastic layer, *International Journal of Solids and Structures*,45, 5814–5830.
- Beer, F.P., Johnston Jr. E.R., 1996, Vector Mechanics for engineers: Statics and dynamics, Sixth Edition, *McGraw-Hill*, 397–400.
- Bishop, A., Navaratnam, M., Rawlings, R.D. and McShane, H.B., 1993, Functionally graded materials produced by powder metallurgical process, *Journal of Material Science Letters*, 12, 1516-1517.
- Block, J.M., 2007, Periodic contact problems in plane elasticity, *Northwestern University* Ph.D. Thesis.
- Cailletaud, G., Basseville, S., Yastrebov, V.A., 2010, WEMESURF Short course on contact mechanics and tribology [online], Paris, France. http://mms2.enscm.fr/tribo_paris/lectures/Contact_mechanics_I.pdf [Ziyaret Tarihi: 3 Mart 2011].
- Cao, Y.P., Lu J., 2004, A new scheme for computational modeling of conical indentation in plastically graded materials, *Journal of Materials Research* ,19:1703.
- Chao, C., Gao, B., 2000, Rigid stamp indentation for thermoelastic half plane, *International Journal of Solids and Structures*, 37, 4635-4654.
- Choi, I.S., Dao, M., Suresh, S., 2008, Mechanics of indentation of plastically graded materials, I. Analysis, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56:157.

- Choi, I.S, Detor, A.J, Schwaiger, R., Dao, M., Schuh, C.A, Suresh, S., 2008, Mechanics of indentation of plastically graded materials: II. Experiment on nanocrystalline alloys with grain size gradients , *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56:172-183.
- Chou, Y.T. ,1962, Interaction of parallel dislocations in a hexagonal crystal, *Journal of Applied Physics* **33**,2747–2751.
- Chu, J., Ishibashi H., Hayashi K., Takebe H., Morinaga K., 1993, Slip casting of continuous functionally graded material, *Journal of Ceramic Society of Japan*, 101, pp. 841-844.
- Civelek, M.B., 1972, The axisymmetric contact problem for an elastic layer on a frictionless half-space, Ph.D. Dissertation, *Lehigh University*.
- Çınar, A., Erdoğan F., 1983, Crack and wedging problem for an orthotropic strip, *International Journal of Fracture*, 23, pp. 83–102.
- Dağ, S., 2001, Crack and contact problems in graded materials, Ph.D Dissertation, *Lehigh University*.
- Dağ, S., Erdoğan, F., 2002, A surface crack in a graded medium loaded by a rigid stamp, *Engineering Fracture Mechanics*, 69, 1729–1751.
- Dağ, S., 2006, Thermal fracture analysis of orthotropic functionally graded materials using an equivalent domain integral approach, *Engineering Fracture Mechanics*, Volume 73, Issue 18, Pages 2802-2827.
- Dağ S., 2008, Multiscale and functionally graded materials 2006: (M&FGM 2006); *AIP Conference Proceedings*, Volume 973, pp. 820-825.
- Dağ, S., Güler, M.A., Yıldırım B., and Özatağ, A.C., 2009, Sliding frictional contact between a rigid punch and a laterally graded elastic medium, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, pp. 4038-4053.
- Donaldson, B.K., 2008, Analysis of aircraft structures, *Cambridge Aerospace Series*, 2nd Edition.
- El-Borgi, S., Keer L., Said W.B., 2004, An embedded crack in a functionally graded coating bonded to a homogeneous substrate under frictional hertzian contact, *Wear*, 257, pp. 760–776.
- El-Borgi, S., Sellami, M. and Kallel Kammoun, I., 2006, Contact mechanics of an orthotropic graded coating bonded to a homogeneous substrate, *Proceedings of the Third International Conference on Advances in Mechanical Engineering and Mechanics*, Hammamet, Tunisia.
- England, A.H., 1971, Complex variable methods in elasticity, *Wiley Interscience*, London.

- Erdoğan, F., Gupta G.D., 1972, On the numerical solution of singular integral equations, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol.29, pp. 525-534.
- Erdoğan, F., Gupta G.D., Cook T.S., 1973, Methods of analysis and solutions of crack problems, *Nordhoff International Publishing*, Leyden, pp. 368-425.
- Erdoğan, F., 1978, Mixed boundary value problems in mechanics mechanics today, Vol. 4, Nemat – Nasser, S., ed., *Pergamon*, New York, USA, pp. 1 – 84.
- Erdoğan, F., 1995, Fracture mechanics of functionally graded materials, *Composites Engineering*, Vol. 5, pp. 753-770.
- Erdoğan, F., 2001, Fracture mechanics and contact problems in materials invoking graded coatings and interfacial zones, Final Technical Report, *US Air Force Office of Scientific Research*, Grant No. F49620-98-1-0028.
- Fabrikant, V.I., 1986, Flat punch of arbitrary shape on an elastic half-space, *International Journal of Engineering Science*, Volume 24, Issue 11, 1731-1740.
- Fabrikant, V.I., 1986, Inclined at punch of an arbitrary shape on an elastic half-space, *Journal of Applied Mechanics*, 53, 798-806.
- Fan, C.W., Hwu, C., 1996, Punch problems for an anisotropic elastic half-plane, *Journal of Applied Mechanics*, 63, Issue 1, 69-76.
- Ghizetti, A. and Ossicini A., 1970, Quadrature formulae, *Academic Verlag*, Berlin.
- Giannakopoulos, A.E. and Suresh, S., 1997, Indentation of solids with gradients in elastic properties: part i point force solution, Part II. Axisymmetric indenters, *International Journal of Solids and*, 34 (19), 2357–2427.
- Giannakopoulos, A.E. and Pallot, P., 2000, Two-dimensional contact analysis of elastic graded materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 48, pp. 1597-1631.
- Giannakopoulos, A.E., 2002, Indentation of plastically graded substrates by sharp indenters, *International Journal of Solids and Structures*, 39:2495.
- Gladwell, G.M.L. and England, A.H., 1977, Orthogonal polynomial solutions to some mixed boundary value problems in elasticity theory, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 30, 175-185.
- Gladwell, G.M.L., 1978, Polynomial solutions for an ellipse on an anisotropic elastic half-space, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 31, 251-260.
- Güler, M.A., 1996, The problem of a rigid punch with friction on a graded elastic medium, Msc. Thesis, *Lehigh University*.

- Güler, M.A., 2000, Contact mechanics of FGM coatings, Ph.D. Dissertation, *Lehigh University*.
- Güler, M.A., Erdoğan, F., 2004, Contact mechanics of graded coatings, *International Journal of Solids and Structures*, 41, 3865–3889.
- Güler, M.A., Erdoğan, F., 2006, Contact mechanics of two deformable elastic solids with graded coatings, *Mechanics of Materials*, 38, 633–646.
- Güler, M.A., Erdoğan, F., 2007, The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings, *International Journal of Mechanical Sciences*, 49 (2), pp 161-182.
- Gökay, K., 2005, Contact mechanics of graded materials with two dimensional material property variation, Msc. Thesis, *The Graduate School of Natural and Applied Sciences, METU, Ankara*.
- Hertz, H., 1881, On the contact of elastic solid, *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)*.
- Hills, D.A., Nowell, D., Sackfield, A., 1993, Mechanics of elastic contacts, *Butterworth, Heinemann, Oxford*.
- Hills, D.A., Nowell, D. 1994, Mechanics of fretting fatigue, *Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, USA*.
- Hirai, T., 1996, Functional gradient materials processing of ceramics, *Richard J. Brook, et al., eds., Weinheim, New York, NY, pt. 2, vol. 17B, pp. 293-341*.
- Hwu, C., 2010, Anisotropic elastic plates, *Springer*.
- Jitcharoen, J., Padture, NP, Giannakopoulos, A.E., Suresh, S., 1998, Hertzian crack suppression in ceramics with elastic-modulus-graded surfaces, *American Ceramic Society*, 81:2301.
- Johnson, K. L. 1985, Contact mechanics, *Cambridge University Press, Cambridge*.
- Kahya, V. Özşahin, T. S., Birinci, A., Erdol, R., A 2007, Receding contact problem for an anisotropic elastic medium consisting of a layer and a half plane, *International Journal of Solids and Structures*, 44, 5695–5710.
- Kasmalkar, M., 1997, The surface crack problem for a functionally graded coating bonded to a homogeneous layer, Ph.D. Thesis, *Lehigh University*.
- Kaysser, W. A., Ilschner B., 1995, FGM research activities in Europe, *M.R.S. Bulletin* 20 (1), pp. 22-26.

- Kaw, A.K., 1997, *Mechanics of composite materials*, CRC Press LLC, New York, 71-127.
- Kim, J.-H., Paulino, G.H., 2003, The interaction integral for fracture of orthotropic functionally graded materials: evaluation of stress intensity factors, *International Journal of Solids and Structures*, Vol 40, pp. 3967-4001.
- Krenk, S., 1979, On the elastic constants of plane orthotropic elasticity, *Journal of Composite Materials*, 13: 108-116.
- Küçük, A.İ., 2007, Mixed-mode fracture analysis of orthotropic FGM coatings under mechanical and thermal loads, Ph.D. Dissertation, *The Graduate School of Natural and Applied Sciences, METU, Ankara*.
- Lekhnitskii, S.G., 1963, *Theory of elasticity of an anisotropic body*, MIR Publisher, Moscow.
- Lekhnitskii, S.G., 1968, *Anisotropic plates*, Gordon and Breach Science Publisher, New York.
- Mahajan, R., Erdogan F., Chou, Y.,T., 1993, The crack problem for an orthotropic half-plane stiffened by elastic films international, *Journal of Engineering Science*, vol. 31, no3, pp. 403-424.
- Marur, P., 1999, *Fracture behaviour of functionally graded materials*, Ph.D.Dissertation, Auburn University.
- Miyamoto, M. 1997, Applications of FGM in Japan in functionally graded materials: Manufacture, properties and applications (eds. A.Ghosh *et. all*), *Ceramic Transactions, American Ceramic Society*, vol 76, pp. 171-192.
- Mortensen, A., Suresh, S., 1995, Functionally graded materials and metal ceramic composites: Part I "Processing", *International Materials Reviews*, 40 (6), pp. 239-265.
- Murray, J.D, 1984, *Asymptotic analysis with 25 illustrations*, Springer Verlag.
- Muskhelishvili, N.L., 1953, *Singular integral equations*, P. Noordhoff Ltd., Groningen, The Netherlands (based on the second Russian edition published in 1946).
- Muskhelishvili, N.I., 1953, Some basic problems of the mathematical theory of elasticity (J.R.M. Radok, Trans.), P. Noordhoff Ltd., Groningen, The Netherlands.
- Niino, M., Hirai T., Watanabe R., 1987, The functionally gradient materials, *Journal of Japan Society of Composite Materials*, 13(6) 257-264.
- Niino, M., Maeda, S., 1990, Recent development status of functionally graded materials, *ISIJ International*, Vol. 30, No: 9, pp.699-703.

- Notaga, F. 1997, Learning about design concepts from natural functionally graded materials, *Composites and Functionally Graded Materials*, MD-80-vol.80 New York, 11-17.
- Ochoa, O.O., Reddy, J.N. 1992, Finite element analysis of composite laminates, *Dordrecht: Kluwer Academic Publishers*.
- Özatağ, A. C., 2003, Contact mechanics of a graded surface with elastic gradation in lateral direction, Msc Thesis, *The Graduate School of Natural and Applied Sciences, METU, Ankara*.
- Öztürk, M., Erdoğan F., 1997, Mode I crack problem in an inhomogeneous orthotropic medium, *International Journal of Engineering*, Sci.Vol.35. No. 9, pp. 869-883.
- Öztürk, M., Erdoğan F., 1999, The mixed mode crack problem in an inhomogeneous orthotropic medium, *International Journal of Fracture*, 98: 243–261,
- Pakalapati, R. T., 2001, Freeing Contact of Dissimilar Isotropic/Anisotropic Materials, Ph.D.Dissertation, *Purdue University*.
- Popov, G., Ia., 1969, On the Method of Orthogonal Polynomials in Contact Problems of the Theory of Elasticity, *PMM*. Vol. (33) 3.
- Prasad, A., Dao M., Suresh, S., 2009, Steady-state frictional sliding contact on surfaces of plastically graded materials, *Acta Materialia*, 57: 511–524.
- Press, W., Teukolsky S., Vetterling W., B.Flannery, 1996, Numerical recipes in FORTRAN 90 the art of paralel scientific computing volume I and II, *Cambridge Press*.
- Rao, B.N. and Rahman, S., 2003, An interaction integral method for analysis of cracks in orthotropic functionally graded materials, *Computational Mechanics*, Vol. 32,2003, pp. 40–51.
- Sampath, S., Herman, H., Shimoda, N., Saito, T., 1995, Thermal spray processing of FGMS, *MRS Bulletin*, v. 20, pp. 27-31.
- Sampath, S., Gansert, R., and Herman, H., 1996, Lamsa spray forming ceramics and layered composites, *Journal of Metals*, 47, pp. 30-33.
- Sarıkaya, D., 2005, Mixed–mode fracture analysis of orthotropic functionally graded materials, Msc. Thesis, *The Graduate School of Natural and Applied Sciences, METU, Ankara*.
- Sasaki, M., Hirai T., 1991, Fabrication and properties of functionally gradient materials, *Journal of the Ceramic Society of Japan*, International edition, 99, pp. 970-980.
- Schwartz, M.M., 1992, Composite materials handbook, *McGraw-Hill, Inc.*, Second Edition.

- Stroh, A.N., 1958, Dislocations and cracks in anisotropic elasticity, *Philosophical Magazine*, 7, 625-646.
- Suresh, S., Giannakopoulos, A.,E. and Olsson, M., 1994, Elastoplastic analysis of thermal cycling: Layered materials with sharp interfaces, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 42:979- 1018.
- Suresh, S., Olsson, M., Giannakopoulos, A.E., Pature, N.P, Jitcharoen J., 1999, Engineering the resistance to sliding-contact damage through controlled gradients in elastic properties at contact surfaces, *Acta Materialia*, 47:3915.
- Suresh, S., 2001, Graded Materials for Resistance to Contact Deformation and Damage, *Science*, 292:2447.
- Swanson, S.R., 2004, Hertzian contact of orthotropic materials, *International Journal of Solids and Structures*, 41 1945–1959.
- Tricomi, F.G., 1951, On the Finite hilbert transformation, *The Quarterly Journal of Mathematics Oxford Series*, Vol. 2, pp. 199-211.
- Willis, J.R., 1966, Hertzian contact of anisotropic bodies, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*,14, 163-176.
- Xu, H.M., Yao, X.F., Feng, X.Q., Yeh, H.Y., 2008, Fundamental solution of a power-law orthotropic and half-space functionally graded material under line loads, *Composites Science and Technology*, pp.6827–34.
- Yilmaz, 2006, Buckling driven delamination of orthotropic functionally graded materials, Msc. Thesis, *The Graduate School of Natural and Applied Sciences, METU, Ankara*.

EKLER

EK-A Kernellerin Asimptotik Analizi

A1. Düşey Yönde Derecelendirme için Kernellerin Asimptotik Analizi

İntegral denkleminin elde edilmesinde 5.80. ve 5.81. denklemlerdeki sonsuz integralin asimptotik değerlerinin bulunması önemlidir. Sonsuz integrallerin $\alpha \rightarrow \infty$ asimptotik olarak açılmasının iki sebebi vardır. İlki integral denkleminin tekil davranışı 5.82. ve 5.83. denklemlerin integrandlarında kernellerin büyük açılımlarında α öncü sıra teriminden gelmektedir. İkinci olarak, 5.77. denklemdaki tekil integral denklemini sayısal olarak çözümünde sonsuza açılımdaki sonraki terimler hesaplamanın verimliliğini kolaylaştırır.

Sonsuz integrallerin integrandlarında kullanılan asimptotik analiz köklerin asimptotik analizi ile başlar. Öncelikle karakteristik denklemin kökleri 5.25b ve 5.25d asimptotik olarak analiz edilir. Yeni bir değişken tanımlanırsa:

$$r = \frac{\gamma}{|\alpha|} \qquad s = \frac{\gamma}{|\gamma|} \qquad \text{A.1}$$

$$\begin{aligned} n_2 &= \frac{1}{2} \left[-\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4\kappa\alpha^2 + 4i|\alpha|\delta_1} \right] \\ &= \frac{|\alpha|}{2} N_2 \end{aligned} \qquad \text{A.2}$$

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \sqrt{\nu\gamma^2 + (1-\kappa^2)\alpha^2} \\ &= |\alpha|\delta'_1 \end{aligned} \qquad \text{A.3}$$

$$\begin{aligned} \delta'_1 &= \sqrt{\nu r^2 s^2 + (1-\kappa^2)} \\ N_2 &= -rs - \sqrt{r^2 s^2 + 4\kappa + 4i\delta'} \end{aligned} \qquad \text{A.4}$$

5.25d. denklemdaki diğer kök n_4 :

$$n_4 = \frac{1}{2} \left[-\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4\kappa\alpha^2 - 4i|\alpha|\delta_1} \right] = \bar{n}_2$$

A.2. denklemin, 5.27. denkleminde yerine konulursa:

$$A_2(\alpha) = \frac{i\alpha}{|\alpha|} \frac{A_3}{A_4} \quad \text{A.6}$$

Burada:

$$A_3 = 2(\beta_1\kappa - 1) + 2i\beta_1\sqrt{\nu r^2 s^2 + (1 - \kappa^2)} \quad \text{A.7}$$

$$A_4 = \beta_2 N_2 + 2\beta_1 r s \nu \quad \text{A.8}$$

Böylece $Z_1(\alpha)$ aşağıdaki şekli alır:

$$\begin{aligned} Z_1(\alpha) &= i\alpha\nu A_2(\alpha) + n_2 \\ &= |\alpha| Z_3 \\ &= |\alpha| \frac{Z'_3}{A_4} \end{aligned} \quad \text{A.9}$$

$$Z_3 = \left(\frac{-2\nu A_3 + A_4 N_2}{2A_4} \right) \quad Z'_3 = \frac{-2\nu A_3 + A_4 N_2}{2} \quad \text{A.10}$$

Benzer şekilde $Z_2(\alpha)$:

$$\begin{aligned} Z_2(\alpha) &= n_2 A_2(\alpha) + i\alpha \\ &= i\alpha Z_4 \\ &= i\alpha \frac{Z'_4}{A_4} \end{aligned} \quad \text{A.11}$$

$$Z_4 = \frac{A_3 N_2 + 2A_4}{2A_4} \quad Z'_4 = \frac{A_3 N_2 + 2A_4}{2} \quad \text{A.12}$$

5.34. denklemden:

$$\begin{aligned} \Delta_0(\alpha) &= -[Z_1(\alpha)\bar{Z}_2(\alpha) + \bar{Z}_1(\alpha)Z_2(\alpha)] \\ &= -\frac{i\alpha|\alpha|}{(|A_4|)^2} \Delta_1 \end{aligned} \quad \text{A.13}$$

$$\Delta_1 = [\bar{Z}'_3(\alpha)Z'_4(\alpha) - Z'_3(\alpha)\bar{Z}'_4(\alpha)] \quad \text{A.14}$$

denklem 5.38 aşağıdaki şekilde yeniden yazılırsa:

$$H_{11}(\alpha, y) = -\frac{i\alpha}{\Delta_0(\alpha)} (1 - \nu_0) \left[\frac{(1 - \nu^2)}{2} \{ \bar{Z}_2(\alpha) e^{n_2 y} + Z_2(\alpha) e^{n_4 y} \} \right] \quad \text{A.15}$$

$$H_{21}(\alpha, y) = -\frac{i\alpha}{\Delta_0(\alpha)} (1 - \nu_0) \left[\frac{(1 - \nu^2)}{2} \{ A_2 \bar{Z}_2(\alpha) e^{n_2 y} - \bar{A}_2 Z_2(\alpha) e^{n_4 y} \} \right] \quad \text{A.16}$$

$$H_{12}(\alpha, y) = \frac{i\alpha}{\Delta_0(\alpha)}(1-\nu_0) \left[(\kappa + \nu) \left\{ -\bar{Z}_1(\alpha) e^{n_2 y} + Z_1(\alpha) e^{n_4 y} \right\} \right] \quad \text{A.17}$$

$$H_{22}(\alpha, y) = \frac{i\alpha}{\Delta_0(\alpha)}(1-\nu_0) \left[(\kappa + \nu) \left\{ -A_2(\alpha) \bar{Z}_1(\alpha) e^{n_2 y} - \bar{A}_2(\alpha) Z_1(\alpha) e^{n_4 y} \right\} \right] \quad \text{A.18}$$

A.4, A.7, A.8, A.10, A.12 ve A.14. denklemlerin asimptotik açılımlarının $r \rightarrow 0$ ya da $\alpha \rightarrow \infty$ giderken $r_1 = \sqrt{\kappa - \sqrt{\kappa^2 - 1}}$, $n_2 = -r_1 |\alpha|$ ve $r_2 = \sqrt{\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 1}}$, $n_4 = -r_2 |\alpha|$ eşit olur ve A.15-A.18. denklemlerde yerine konulursa:

$$H_{11}(\alpha, y) = \frac{i\alpha}{|\alpha|} (1-\nu_0) \left[h_{111} e^{-r_1 |\alpha| y} + h_{112} e^{-r_2 |\alpha| y} \right] \quad \text{A.19}$$

$$h_{111} = -\frac{(1-\nu^2)}{2} \frac{\bar{Z}'_4 A_4}{\Delta_1}$$

$$h_{112} = \frac{(1-\nu^2)}{2} \frac{Z'_4 \bar{A}_4}{\Delta_1}$$

$$H_{21}(\alpha, y) = (1-\nu_0) \left[h_{211} e^{-r_1 |\alpha| y} + h_{212} e^{-r_2 |\alpha| y} \right] \quad \text{A.20}$$

$$h_{211} = \frac{(1-\nu^2)}{2} \frac{\bar{Z}'_4 A_3}{\Delta_1}$$

$$h_{212} = -\frac{(1-\nu^2)}{2} \frac{Z'_4 \bar{A}_3}{\Delta_1}$$

$$H_{12}(\alpha, y) = (1-\nu_0) \left[h_{121} e^{-r_1 |\alpha| y} + h_{122} e^{-r_2 |\alpha| y} \right] \quad \text{A.21}$$

$$h_{121} = (\kappa + \nu) \frac{\bar{Z}'_3 A_4}{\Delta_1}$$

$$h_{122} = -(\kappa + \nu) \frac{Z'_3 \bar{A}_4}{\Delta_1}$$

$$H_{22}(\alpha, y) = \frac{i\alpha}{|\alpha|} (1-\nu_0) \left[h_{221} e^{-r_1 |\alpha| y} + h_{222} e^{-r_2 |\alpha| y} \right] \quad \text{A.22}$$

$$h_{221} = (\kappa + \nu) \frac{\bar{Z}'_3 A_3}{\Delta_1}$$

$$h_{222} = -(\kappa + \nu) \frac{Z_3' \bar{A}_3}{\Delta_1}$$

$$\begin{aligned} H_{11}(\alpha, y) &= (1 - \nu_0) \left[\sum_{n=0}^{10} a_{1n} \frac{\gamma^n}{|\alpha|^n} + \sum_{n=0}^{10} a_{2n} \frac{\gamma^n}{|\alpha|^n} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{10} \mathcal{A}_{1n} \frac{\gamma^n}{|\alpha|^n} + \sum_{n=0}^{10} \mathcal{A}_{2n} \frac{\gamma^n}{|\alpha|^n} \end{aligned}$$

A.23

$$\begin{aligned} H_{21}(\alpha, y) &= (1 - \nu_0) \left[\sum_{n=0}^{10} b_{1n} \frac{\gamma^n}{|\alpha|^n} + \sum_{n=0}^{10} b_{2n} \frac{\gamma^n}{|\alpha|^n} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{10} \mathcal{B}_{1n} \frac{\gamma^n}{|\alpha|^n} + \sum_{n=0}^{10} \mathcal{B}_{2n} \frac{\gamma^n}{|\alpha|^n} \end{aligned}$$

A.24

$$\begin{aligned} H_{12}(\alpha, y) &= (1 - \nu_0) \left[\sum_{n=0}^{10} c_{1n} \frac{\gamma^n}{|\alpha|^n} + \sum_{n=0}^{10} c_{2n} \frac{\gamma^n}{|\alpha|^n} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{10} \mathcal{C}_{1n} \frac{\gamma^n}{|\alpha|^n} + \sum_{n=0}^{10} \mathcal{C}_{2n} \frac{\gamma^n}{|\alpha|^n} \end{aligned}$$

A.25

$$\begin{aligned} H_{22}(\alpha, y) &= (1 - \nu_0) \left[\sum_{n=0}^{10} d_{1n} \frac{\gamma^n}{|\alpha|^n} + \sum_{n=0}^{10} d_{2n} \frac{\gamma^n}{|\alpha|^n} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{10} \mathcal{D}_{1n} \frac{\gamma^n}{|\alpha|^n} + \sum_{n=0}^{10} \mathcal{D}_{2n} \frac{\gamma^n}{|\alpha|^n} \end{aligned}$$

A.26

$$\kappa_1 = \sqrt{\kappa^2 - 1}$$

$$r_1 = \sqrt{\kappa - \sqrt{\kappa^2 - 1}}$$

$$r_2 = \sqrt{\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 1}}$$

$$a_{10} + a_{20} = -\frac{r_1 \kappa_1 r_2}{-r_1 + r_2}$$

$$a_{11} + a_{21} = \frac{(\kappa^2 + \kappa \nu - r_1 \nu r_2 - 1)}{(r_1 - r_2)^2} s$$

$$a_{12} + a_{22} = \frac{1}{4} \frac{(2\kappa^4 r_2 r_1 + 4\kappa^3 \nu r_2 r_1 + \kappa^3 - 2\kappa^2 \nu - 5\kappa^2 r_2 r_1 - 8\kappa \nu r_2 r_1 - \kappa + 6\nu + 3r_2 r_1)}{(r_1 - r_2)^3 \kappa_1}$$

$$a_{13} + a_{23} = \frac{1}{2} \frac{(\kappa^3 r_1 r_2 + 2\kappa^2 \nu r_1 r_2 - \kappa^2 - 4\kappa \nu - \kappa r_1 r_2 + 2\nu r_1 r_2 + 1)}{(-r_1 + r_2)^4} s$$

$$a_{14}+a_{24} = -\frac{1}{32} \frac{\left(\begin{array}{l} 4\kappa^8 r_1 r_2 + 16\kappa^7 v r_1 r_2 - 10\kappa^7 + 16\kappa^6 v^2 r_1 r_2 - 40v\kappa^6 - 9\kappa^6 r_1 r_2 - 40v^2 \kappa^5 - 4v\kappa^5 r_1 r_2 + 36\kappa^5 \\ + 12\kappa^4 r_1 r_2 v^2 + 84\kappa^4 v - 3\kappa^4 r_1 r_2 + 32\kappa^3 v^2 - 56\kappa^3 v r_1 r_2 - 42\kappa^3 - 8\kappa^2 r_1 r_2 v^2 - 32\kappa^2 v \\ + 17\kappa^2 r_1 r_2 - 24\kappa v^2 + 44\kappa v r_1 r_2 + 16\kappa + 12v^2 r_1 r_2 - 12v - 9r_1 r_2 \end{array} \right)}{\kappa_1^3 r_1^2 r_2^2 (r_2 - r_1)^5}$$

$$a_{15}+a_{25} = -\frac{1}{8} \frac{\left(\begin{array}{l} \kappa^5 r_1 r_2 + 4\kappa^4 r_1 r_2 v - 3\kappa^4 + 4v^2 \kappa^3 r_1 r_2 - 12v\kappa^3 + 2r_1 r_2 \kappa^3 - 12v^2 \kappa^2 + 12\kappa^2 r_1 r_2 v + 2\kappa^2 + 12v^2 \kappa r_1 r_2 \\ - 4\kappa v - 3r_1 r_2 \kappa - 4v^2 + 1 \end{array} \right)}{r_1^2 r_2^2 (r_2 - r_1)^6} s$$

$$a_{16}+a_{26} = \frac{1}{128} \frac{\left(\begin{array}{l} -150\kappa^4 r_1 r_2 - 95\kappa^8 r_1 r_2 - 108v\kappa^4 + 32\kappa^2 r_1 r_2 - 300\kappa^3 v^2 - 27\kappa - 312\kappa^3 v r_1 r_2 + 24\kappa v r_1 r_2 - 18v + 5r_1 r_2 \\ + 144\kappa^2 v + 60\kappa^3 + 200\kappa^6 r_1 r_2 - 36v^2 r_1 r_2 + 196\kappa v^2 - 312v\kappa^6 - 260\kappa^5 v^2 + 10\kappa^5 - 120\kappa^7 \\ - 504v\kappa^7 r_1 r_2 - 876\kappa^6 r_1 r_2 v^2 + 696v\kappa^5 r_1 r_2 + 916\kappa^4 r_1 r_2 v^2 - 260\kappa^5 v^2 r_1 r_2 + 128v^3 \kappa^7 r_1 r_2 - 560\kappa^5 v^3 r_1 r_2 \\ - 112\kappa v^3 r_1 r_2 + 224\kappa^3 v^3 r_1 r_2 - 224v^3 \kappa^8 - 56\kappa^4 v^3 - 8\kappa^2 v^3 + 700v^2 \kappa^7 + 392\kappa^6 v^3 + 462v\kappa^8 \\ - 168v\kappa^{10} - 336\kappa^9 v^2 + 40v^3 + 105\kappa^9 - 28\kappa^{11} + 8\kappa^{12} r_1 r_2 + 160\kappa^8 v^2 r_1 r_2 + 64\kappa^9 v^3 r_1 r_2 + 48\kappa^9 v r_1 r_2 \\ + 96\kappa^{10} r_1 r_2 v^2 + 48\kappa^{11} v r_1 r_2 \end{array} \right)}{\kappa_1^5 r_1^3 r_2^3 (r_1 - r_2)^7}$$

$$a_{17}+a_{27} = \frac{1}{16} \frac{\left(\begin{array}{l} \kappa^7 r_1 r_2 + 6r_1 r_2 \kappa^6 v - 4\kappa^6 + 12r_1 r_2 \kappa^5 v^2 - 24\kappa^5 v + 5\kappa^5 r_1 r_2 + 8r_1 r_2 \kappa^4 v^3 - 48\kappa^4 v^2 + 34\kappa^4 r_1 r_2 v \\ - 32\kappa^3 v^3 + 72\kappa^3 v^2 r_1 r_2 - 16\kappa^3 v - 5r_1 r_2 \kappa^3 + 48r_1 r_2 \kappa^2 v^3 - 48\kappa^2 v^2 - 6\kappa^2 r_1 r_2 v + 4\kappa^2 \\ - 32v^3 \kappa + 12v^2 \kappa r_1 r_2 + 8v\kappa - r_1 r_2 \kappa + 8r_1 r_2 v^3 - 2r_1 r_2 \end{array} \right)}{(r_2 - r_1)^8 r_1^3 r_2^3} s$$

$$a_{18}+a_{28} = \frac{1}{2048} \frac{\left(\begin{array}{l} -32\kappa + 120v + 1640v\kappa^2 + 528v^2 \kappa - 672v^3 + 812\kappa^3 - 10800\kappa^4 v - 2940\kappa^5 + 4704\kappa^8 v^3 - 13728\kappa^3 v^2 \\ + 20880v\kappa^6 + 40992\kappa^5 v^2 + 37952v^3 \kappa^4 - 8960v^3 \kappa^2 + 3920\kappa^7 - 1400\kappa^9 - 38016\kappa^7 v^2 - 46464v^3 \kappa^6 \\ - 1428\kappa^{11} + 6400v^4 \kappa^3 - 24576\kappa^5 v^4 - 13160\kappa^8 v - 4920\kappa^{10} v + 24960\kappa^{10} v^3 + 22176\kappa^{11} v^2 + 11328\kappa^9 v^4 \\ - 2624v^4 \kappa - 3312\kappa^9 v^2 + 4992\kappa^7 v^4 - 11520\kappa^{12} v^3 - 8640\kappa^{13} v^2 + 9120v\kappa^{12} - 5760\kappa^{11} v^4 - 2880\kappa^{14} v \\ + 1428\kappa^{13} - 360\kappa^{15} + 2680\kappa^3 r_1 r_2 v - 920v\kappa r_1 r_2 + 259r_1 r_2 \kappa^4 - 290r_1 r_2 \kappa^2 + 21r_1 r_2 - 2275r_1 r_2 \kappa^{12} \\ - 6144\kappa^3 v^3 r_1 r_2 + 4704v^3 \kappa r_1 r_2 - 24768\kappa^5 v^3 r_1 r_2 + 67200\kappa^7 v^3 r_1 r_2 + 66168\kappa^8 v^2 r_1 r_2 - 54432\kappa^9 v^3 r_1 r_2 \\ + 30280\kappa^9 v r_1 r_2 - 44232\kappa^{10} r_1 r_2 v^2 - 16360v\kappa^{11} r_1 r_2 - 5285\kappa^8 r_1 r_2 - 360r_1 r_2 v^2 r_1 r_2 + 1960r_1 r_2 \kappa^6 + 80\kappa^{16} r_1 r_2 \\ + 5334\kappa^{10} r_1 r_2 + 196r_1 r_2 \kappa^{14} + 640\kappa^{15} r_1 r_2 v + 2560\kappa^{13} v^3 r_1 r_2 + 1280\kappa^{12} v^4 r_1 r_2 + 5696\kappa^{10} v^4 r_1 r_2 \\ + 10880\kappa^{11} v^3 r_1 r_2 + 2080\kappa^{13} v r_1 r_2 + 7392\kappa^{12} r_1 r_2 v^2 + 1920\kappa^{14} v^2 r_1 r_2 - 288\kappa^4 v^4 r_1 r_2 + 28224\kappa^6 v^4 r_1 r_2 \\ - 26160\kappa^8 v^4 r_1 r_2 + 720r_1 r_2 v^4 + 768\kappa^2 v^4 r_1 r_2 - 22160\kappa^7 r_1 r_2 v - 34704\kappa^6 r_1 r_2 v^2 + 3760\kappa^5 r_1 r_2 v \\ - 1008\kappa^4 r_1 r_2 v^2 + 4824\kappa^2 r_1 r_2 v^2 \end{array} \right)}{\kappa_1^7 r_1^4 r_2^4 (r_2 - r_1)^9}$$

$$a_{19} + a_{29} = \frac{1}{128} \frac{\left(\begin{aligned} &-1 + 24v^2 + 24vk - 4k^2 - 25k^8 - 80v^4 + 50k - 20k^6 + 1600k^4r_1r_2v^3 + 1176k^5r_1r_2v^2 - 120r_1r_2v^2k \\ &+ 800k^3r_1r_2v^4 - 40k^4r_1r_2v + 376k^6vr_1r_2 + 40r_1r_2vk^8 + 360k^3r_1r_2v^2 + 800r_1r_2v^3k^2 + 400r_1r_2v^4k \\ &- 120r_1r_2vk^2 + 160k^6r_1r_2v^3 + 120r_1r_2k^7v^2 + 80v^4k^5r_1r_2 - 280vk^5 - 200vk^5 - 400vk^7 - 800k^5v^3 \\ &- 600k^6v^2 - 1080k^4v^2 + 44r_1r_2k^7 + 5k^9r_1r_2 + 5r_1r_2k - 20k^3r_1r_2 - 34r_1r_2k^5 - 800v^4k^2 + 120k^2v^2 \\ &+ 200k^3v - 160v^3k - 1600v^3k^3 \end{aligned} \right)}{r_1^4 r_2^4 (r_1 - r_2)^{10}} s$$

$$\begin{aligned}
& 21861\kappa^7 - 47313\kappa^9 + 221760\kappa^{14}\nu^3 + 132000\kappa^{15}\nu^2 \\
& + 410432\nu^5\kappa^6 + 1176032\nu^4\kappa^7 + 1510256\kappa^8\nu^3 \\
& - 599040\kappa^7\nu^2 - 404768\nu^4\kappa^5 - 683904\kappa^6\nu^3 - 20544\nu^5\kappa^4 \\
& - 265090\kappa^8\nu + 1012840\kappa^9\nu^2 - 21021\kappa^{13} \\
& + 348530\kappa^{10}\nu - 1300640\kappa^{10}\nu^3 + 270864\kappa^{12}\nu^3 \\
& - 1881\kappa^{15} + 257\kappa - 210\nu - 18960\nu^4\kappa^3 + 31248\nu^4\kappa \\
& + 11808\nu^5\kappa^2 + 1610\kappa^4\nu + 25040\kappa^3\nu^2 - 4970\kappa^2\nu \\
& - 8040\kappa\nu^2 - 2160\nu^3 - 197890\kappa^{12}\nu \\
& + 6930\kappa^{14}\nu - 1201200\nu^4\kappa^9 + 322608\nu^4\kappa^{11} - 718960\kappa^{11}\nu^2 \\
& + 93720\kappa^{13}\nu^2 - 463584\nu^5\kappa^8 + 140448\nu^5\kappa^{10} \\
& + 71808\nu^5\kappa^{12} + 193600\nu^4\kappa^{13} - 999\kappa^3 - 2919\kappa^5 + 3744\nu^5 \\
& + 82950\kappa^6\nu + 111720\kappa^5\nu^2 + 39904\nu^3\kappa^2 + 42480\nu^3\kappa^4 \\
& - 1232\kappa^{19} + 48363\kappa^{11} + 40040\kappa^{16}\nu + 4884\kappa^{17} \\
& - 49280\kappa^{17}\nu^2 - 98560\nu^4\kappa^{15} - 39424\nu^5\kappa^{14} - 98560\kappa^{16}\nu^3 \\
& - 12320\kappa^{18}\nu + 27r_1r_2 - 77616\nu^4\kappa^2r_1r_2 + 3827r_1r_2\nu^3\kappa \\
& - 38016\kappa^7\nu^5r_1r_2 - 239360\kappa^5\nu^5r_1r_2 - 462176\kappa^6\nu^4r_1r_2 \\
& + 501600\kappa^5\nu^3r_1r_2 - 454560\kappa^{10}\nu^2r_1r_2 - 280\nu\kappa^9r_1r_2 \\
& + 118300\nu\kappa^7r_1r_2 + 44352\nu^5\kappa^3r_1r_2 + 366080\kappa^4\nu^4r_1r_2 \\
& - 437888\kappa^7\nu^2r_1r_2 + 350640\kappa^6\nu^2r_1r_2 - 240240\kappa^8\nu^4r_1r_2 \\
& - 280\kappa r_1r_2\nu + 16660\kappa^3r_1r_2\nu + 18880r_1r_2\kappa^2\nu^2 \\
& + 346368\kappa^9\nu^5r_1r_2 - 16896\kappa\nu^5r_1r_2 - 163720\kappa^8\nu^2r_1r_2 \\
& - 154920r_1r_2\kappa^4\nu^2 + 967824\kappa^{10}\nu^4r_1r_2 - 77280\kappa^5r_1r_2\nu \\
& - 491040\kappa^9\nu^3r_1r_2 - 145728\kappa^3\nu^3r_1r_2 + 1164992r_1r_2\kappa^{11}\nu^3 \\
& - 707616\kappa^{12}\nu^4r_1r_2 - 275136\kappa^{11}\nu^5r_1r_2 - 748128\kappa^{13}\nu^3r_1r_2 \\
& - 201460\kappa^{11}r_1r_2\nu + 734440\kappa^{12}\nu^2r_1r_2 - 403920\kappa^{14}\nu^2r_1r_2 \\
& - 110460\kappa^9\nu^3r_1r_2 + 238000\kappa^{13}r_1r_2\nu + 134400\kappa^{15}\nu^3r_1r_2 \\
& + 63360\kappa^{16}\nu^2r_1r_2 + 139520\kappa^{14}\nu^4r_1r_2 + 17920\kappa^{16}\nu^4r_1r_2 \\
& + 56832\kappa^{13}\nu^5r_1r_2 + 7168\kappa^{15}\nu^5r_1r_2 + 17920\kappa^{17}\nu^3r_1r_2 \\
& + 2240\kappa^{19}r_1r_2\nu + 8960\kappa^{18}\nu^2r_1r_2
\end{aligned}$$

$$a_{110} + a_{210} = -\frac{1}{8192} \frac{r_2^5 r_1^5 (-r_1 + r_2)^{11} \kappa_1^9}{r_2^5 r_1^5 (-r_1 + r_2)^{11} \kappa_1^9}$$

$$b_{10} + b_{20} = -\frac{1}{2} \frac{r_2\kappa - r\kappa + r_2\nu - r_1\nu - r_2\kappa_1 - r_1\kappa_1}{r_2 - r_1}$$

$$b_{11} + b_{21} = -\frac{1}{2} \frac{\kappa_1}{r_2 - r_1} s$$

$$b_{12} + b_{22} = \frac{1}{4} \frac{r_1 r_2 \kappa^2 + 2r_1 r_2 \nu \kappa - 2\nu - r_1 r_2}{(r_2 - r_1)^2}$$

$$b_{13} + b_{23} = -\frac{1}{8} \frac{(\kappa^3 r_1 r_2 + 2\nu r_1 r_2 \kappa^2 - \kappa^2 - 4\nu \kappa - r_1 r_2 \kappa + 2r_1 r_2 \nu + 1)}{(r_2 - r_1)^3 \kappa_1} s$$

$$b_{14} + b_{24} = -\frac{1}{16} \frac{(\kappa^4 r_1 r_2 + 4r_1 r_2 \kappa^3 \nu - 2\kappa^3 + 4\nu^2 \kappa^2 r_1 r_2 - 8\nu \kappa^2 - 8\nu^2 \kappa + 4r_1 r_2 \nu \kappa + 2\kappa + 4r_1 r_2 \nu^2 - r_1 r_2)}{r_2^2 r_1^2 (-r_1 + r_2)^4}$$

$$b_{15} + b_{25} = \frac{1}{64} \frac{\left(\begin{aligned} &2\kappa r_1 r_2 + 8r_1 r_2 \nu \kappa^6 - 5\kappa^6 + 8r_1 r_2 \nu^2 \kappa^5 - 20\nu \kappa^5 - 20\nu^2 \kappa^4 + 4r_1 r_2 \nu \kappa^4 + 9\kappa^4 + 24\nu \kappa^3 - 6r_1 r_2 \kappa^3 \\ &+ 40\nu^2 \kappa^2 - 16r_1 r_2 \nu^2 \kappa^2 - 3\kappa^2 - 40r_1 r_2 \nu^2 \kappa - 4\nu \kappa + 4r_1 r_2 \kappa + 12\nu^2 + 4r_1 r_2 \nu - 1 \end{aligned} \right)}{\kappa_1^3 r_1^2 r_2^2 (r_1 - r_2)^5} s$$

$$b_{16} + b_{26} = -\frac{1}{32} \frac{\left(\begin{aligned} &r_1 r_2 \kappa^6 + 6r_1 r_2 \nu \kappa^5 - 3\kappa^5 + 12r_1 r_2 \nu^2 \kappa^4 - 18\nu \kappa^4 + 2r_1 r_2 \kappa^4 + 8r_1 r_2 \nu^3 \kappa^3 - 36\nu^2 \kappa^3 + 16r_1 r_2 \kappa^3 \nu + 2\kappa^3 \\ &- 24\nu^3 \kappa^2 - 3r_1 r_2 \kappa^2 + 36\nu^2 \kappa^2 r_1 r_2 + 24r_1 r_2 \nu^3 \kappa - 12\nu^2 \kappa - 6r_1 r_2 \nu \kappa + \kappa - 8\nu^3 + 2\nu \end{aligned} \right)}{-r_1^3 r_2^3 (r_1 - r_2)^6}$$

$$b_{17} + b_{27} = \frac{1}{256} \frac{\left(\begin{aligned} &-1 - 48r_1 r_2 \kappa^2 + 10\kappa^2 + 36\nu \kappa - 6\nu r_1 r_2 - 20\kappa^3 r_1 r_2 + r_1 r_2 \kappa - 20\kappa^6 - 14\kappa^{10} + 35\kappa^8 - 48\nu \kappa^5 \\ &- 28\nu^2 \kappa^4 - 72\nu \kappa^3 - 132\nu^2 \kappa^2 - 280\nu^3 \kappa^4 r_1 r_2 - 40\kappa^7 r_1 r_2 + 56r_1 r_2 \nu^3 + 392\nu^3 \kappa^2 r_1 r_2 + 56r_1 r_2 \nu^3 \kappa^6 \\ &+ 308r_1 r_2 \nu^2 \kappa^3 + 92r_1 r_2 \nu^2 \kappa^7 + 32\nu^3 \kappa^8 r_1 r_2 + 48\nu^2 \kappa^9 r_1 r_2 - 28r_1 r_2 \nu^2 \kappa - 420\nu^2 \kappa^5 r_1 r_2 - 216r_1 r_2 \nu \kappa^6 \\ &+ 5\kappa^9 r_1 r_2 + 4\kappa^{11} r_1 r_2 + 204r_1 r_2 \nu \kappa^4 + 224\nu^3 \kappa^5 - 168\nu^2 \kappa^8 - 112\nu^3 \kappa^7 + 168\nu \kappa^7 - 84\nu \kappa^9 \\ &+ 308\nu^2 \kappa^6 - 112\nu^3 \kappa^3 - 256\nu^3 \kappa + 42r_1 r_2 \nu \kappa^8 + 24\nu r_1 r_2 \kappa^{10} + 50r_1 r_2 \kappa^5 - 10\kappa^4 + 20\nu^2 \end{aligned} \right)}{-\kappa_1^5 r_1^3 r_2^3 (r_1 - r_2)^7} s$$

$$b_{18} + b_{28} = -\frac{1}{256} \frac{\left(\begin{aligned} &-4\kappa + 20\kappa^3 - 20\kappa^7 - 24r_1 r_2 \nu \kappa + r_1 r_2 + 24r_1 r_2 \kappa^6 + 80r_1 r_2 \nu^4 \kappa^4 + 160\nu^3 r_1 r_2 \kappa^5 \\ &+ 120\nu^2 \kappa^6 r_1 r_2 + 40r_1 r_2 \kappa^7 \nu + 480\nu^4 r_1 r_2 \kappa^2 + 5r_1 r_2 \kappa^8 + 80r_1 r_2 \nu^4 + 4\kappa^5 - 64\nu \kappa^4 - 384\nu^2 \kappa^3 \\ &- 640\nu^3 \kappa^2 + 160r_1 r_2 \nu^3 \kappa - 640\nu^3 \kappa^4 - 480\nu^2 \kappa^5 - 320\nu^4 \kappa^3 - 160\nu \kappa^6 - 320\nu^4 \kappa + 696r_1 r_2 \nu^2 \kappa^4 \\ &+ 960r_1 r_2 \nu^3 \kappa^3 + 216\nu r_1 r_2 \kappa^5 + 96\nu \kappa^2 + 96\nu^2 \kappa - 30r_1 r_2 \kappa^4 - 24r_1 r_2 \nu^2 - 104r_1 r_2 \kappa^3 \nu - 24\nu^2 \kappa^2 r_1 r_2 \end{aligned} \right)}{(-r_1 + r_2)^8 r_1^4 r_2^4}$$

$$b_{19} + b_{29} = -\frac{1}{4096} \frac{\left(\begin{aligned} &5 + 70\kappa^2 + 29568r_1r_2v^3\kappa^6 - 7776r_1r_2v^2\kappa^5 - 4224r_1r_2v^3\kappa^2 - 2592r_1r_2v^2\kappa^3 + 680r_1r_2v\kappa^2 \\ &- 20208r_1r_2v^2\kappa^9 + 1296r_1r_2v^2\kappa - 4720r_1r_2v\kappa^6 + 1120\kappa^6 - 805\kappa^8 - 525\kappa^4 + 14080v^3\kappa^3 \\ &- 928v^3\kappa - 1800v\kappa^3 + 13008v^2\kappa^4 + 6000v\kappa^5 - 2472v^2\kappa^2 + 40v\kappa - 17424v^2\kappa^6 \\ &- 23232v^3\kappa^7 + 1680\kappa^9r_1r_2 - 980\kappa^{11}r_1r_2 + 140r_1r_2\kappa^3 + 140r_1r_2\kappa^5 + 480r_1r_2v^3 - 40r_1r_2v \\ &- 1120\kappa^7r_1r_2 - 24192r_1r_2v^2\kappa^7 - 26400r_1r_2v^3\kappa^4 - 400r_1r_2v\kappa^4 - 6336r_1r_2v^3\kappa^4 \\ &+ 10040r_1r_2v\kappa^8 - 7160v r_1r_2\kappa^{10} - 168v^2 - 210\kappa^{10} - 40r_1r_2\kappa + 1232v^4 - 180\kappa^{14} \\ &+ 525\kappa^{12} - 5760v^3\kappa^{11} + 6096v^4\kappa^8 + 9144v^2\kappa^{10} + 1344v^2\kappa^6 - 10272v^4\kappa^4 \\ &+ 16128r_1r_2v^4\kappa^5 - 9216r_1r_2v^4\kappa^3 + 2752v^4r_1r_2\kappa^9 - 13440v^4r_1r_2\kappa^7 + 1280r_1r_2v\kappa^{12} \\ &+ 320r_1r_2v\kappa^{14} - 7104r_1r_2v^4\kappa + 960r_1r_2v^2\kappa^{13} + 1280r_1r_2v^3\kappa^{12} + 640r_1r_2v^4\kappa^{11} \\ &+ 4128r_1r_2v^2\kappa^{11} + 5632r_1r_2v^3\kappa^{10} + 140\kappa^{13}r_1r_2 + 40\kappa^{15}r_1r_2 + 3480v\kappa^{11} - 1440v\kappa^{13} \\ &- 4320v^2\kappa^{12} - 2880v^4\kappa^{10} + 14720v^4\kappa^2 + 11616v^3\kappa^9 \end{aligned} \right) s}{\kappa_1^7 r_1^4 r_2^4 (-r_2 + r_1)^9}$$

$$b_{110} + b_{210} = -\frac{1}{512} \frac{\left(\begin{aligned} &-6v - 3\kappa - 20\kappa^3 + 15r_1r_2\kappa^2 + 70\kappa^9v r_1r_2 + 560r_1r_2v^4\kappa^6 - 20\kappa^7 + 560\kappa^7v^3r_1r_2 + 280r_1r_2v^2\kappa^8 \\ &+ 224\kappa^5v^5r_1r_2 + 2240\kappa^3v^5r_1r_2 + 1120v^5\kappa r_1r_2 + 30r_1r_2v\kappa - 62\kappa^6r_1r_2 + 5600224r_1r_2v^4\kappa^4 \\ &+ 5520v^3r_1r_2\kappa^5 + 2680v^2\kappa^6r_1r_2 + 640r_1r_2\kappa^7v + 2800r_1r_2v^4\kappa^2 + 60r_1r_2\kappa + 78\kappa^5 + 80v^3 \\ &+ 500v\kappa^4 + 920v^2\kappa^3 + 240v^3\kappa^2 + 7\kappa^{10}r_1r_2 - 35\kappa^9 - 2800v^3\kappa^6 - 1400v^2\kappa^7 - 350v\kappa^8 \\ &- 2800v^4\kappa^5 - 1120v^5\kappa^4 - 2240v^5\kappa^2 - 400r_1r_2v^3\kappa - 5200v^3\kappa^4 - 2200v^2\kappa^5 - 5600v^4\kappa^3 \\ &- 400v\kappa^6 - 560v^4\kappa - 224v^5 + 200r_1r_2v^2\kappa^4 + 2000r_1r_2v^3\kappa^3 - 244r_1r_2v\kappa^5 + 120v^2\kappa \\ &- 20r_1r_2\kappa^4 - 240r_1r_2\kappa^3v - 600v^2\kappa^2r_1r_2 \end{aligned} \right) s}{(r_2 - r_1)^{10} (-r_2)^5 (r_2)^5}$$

$$c_{10} + c_{20} = -\frac{1}{2} \frac{(r_2v - r_2\kappa_1 + r_2\kappa - r_1v - r_1\kappa_1 - r_1\kappa)}{r_1 - r_2}$$

$$c_{11} + c_{21} = \frac{1}{2} \frac{\kappa_1}{(-r_1 + r_2)} s$$

$$c_{12} + c_{22} = -\frac{1}{4} \frac{(-2v + 2v\kappa r_1r_2 + \kappa^2 r_1r_2 - r_1r_2)}{(-r_1 + r_2)^2}$$

$$c_{13} + c_{23} = \frac{1}{8} \frac{(-4\kappa v + 2v\kappa^2 r_1r_2 + 2v r_1r_2 + 1 - \kappa r_1r_2 - \kappa^2 + \kappa^3 r_1r_2)}{(-r_1 + r_2)^3 \kappa_1} s$$

$$c_{14} + c_{24} = \frac{1}{16} \frac{(4\kappa^2 r_1r_2v^2 - 8\kappa^2v + 4v^2 r_1r_2 + 4v\kappa r_1r_2 + 4v\kappa^3 r_1r_2 - 8\kappa v^2 + 2\kappa + \kappa^4 r_1r_2 - 2\kappa^3 - r_1r_2)}{(r_2 - r_1)^4 r_1^2 r_2^2}$$

$$c_{15} + c_{25} = -\frac{1}{64} \frac{\left(\begin{aligned} &12\nu^2 + 40\kappa^2\nu^2 - 20\kappa^4\nu^2 - 40\nu^2\kappa r_1 r_2 + 8r_1 r_2 \kappa^5 \nu^2 - 20\kappa^5 \nu + 24\kappa^3 \nu - 16\kappa^2 r_1 r_2 \nu + 4\kappa^4 r_1 r_2 \nu \\ &+ 4r_1 r_2 \nu + 8r_1 r_2 \nu \kappa^6 - 4\nu \kappa - 1 - 6r_1 r_2 \kappa^3 - 3\kappa^2 - 5\kappa^6 + 2\kappa^7 r_1 r_2 + 9\kappa^4 + 4r_1 r_2 \kappa \end{aligned} \right)}{(r_2 - r_1)^5 r_1^2 r_2^2 \kappa_1^3} s$$

$$c_{16} + c_{26} = -\frac{1}{32} \frac{\left(\begin{aligned} &8\nu^3 \kappa^3 r_1 r_2 + 24\nu^3 \kappa r_1 r_2 - 8\nu^3 - 24\kappa^2 \nu^3 - 36\kappa^3 \nu^2 - 12\nu^2 \kappa + 36\kappa^2 \nu^2 r_1 r_2 + 12\kappa^4 r_1 r_2 \nu^2 - 18\kappa^4 \nu + 2\nu \\ &+ 6\nu \kappa^5 r_1 r_2 + 16\kappa^3 \nu r_1 r_2 - 6\nu \kappa r_1 r_2 - 3\kappa^2 r_1 r_2 + \kappa + 2\kappa^3 - 3\kappa^5 + 2\kappa^4 r_1 r_2 + \kappa^6 r_1 r_2 \end{aligned} \right)}{(r_1 - r_2)^6 r_1^3 r_2^3}$$

$$c_{17} + c_{27} = \frac{1}{2} \frac{\left(\begin{aligned} &-1 + 20\nu^2 + 36\nu\kappa + 10\kappa^2 - 10\kappa^4 - 20\kappa^6 - 48\kappa^5 \nu - 132\kappa^2 \nu^2 - 72\kappa^3 \nu - 256\kappa \nu^3 + 35\kappa^8 \\ &- 112\kappa^3 \nu^3 - 28\kappa^4 \nu^2 - 6r_1 r_2 \nu - 20r_1 r_2 \kappa^3 + r_1 r_2 \kappa - 84\nu \kappa^9 - 168\nu^2 \kappa^8 - 14\kappa^{10} + 168\nu \kappa^7 \\ &- 112\nu^3 \kappa^7 + 308\nu^2 \kappa^6 + 224\nu^3 \kappa^5 - 40r_1 r_2 \kappa^7 - 48\kappa^2 r_1 r_2 \nu - 28\nu^2 \kappa r_1 r_2 - 420\kappa^5 \nu^2 r_1 r_2 \\ &+ 204\kappa^4 r_1 r_2 \nu - 216\kappa^6 \nu r_1 r_2 + 56r_1 r_2 \nu^3 + 5\kappa^9 r_1 r_2 + 50\kappa^5 r_1 r_2 + 32r_1 r_2 \nu^3 \kappa^8 + 48r_1 r_2 \nu^2 \kappa^9 \\ &+ 42\nu r_1 r_2 \kappa^8 - 280\nu^3 \kappa^4 r_1 r_2 + 56\kappa^6 \nu^3 r_1 r_2 + 92\kappa^7 \nu^2 r_1 r_2 + 24r_1 r_2 \nu \kappa^{10} + 392r_1 r_2 \nu^3 \kappa^2 \\ &+ 308\nu^2 \kappa^3 r_1 r_2 + 4\kappa^{11} r_1 r_2 \end{aligned} \right)}{(r_1 - r_2)^7 r_1^3 r_2^3 \kappa_1^5} s$$

$$c_{18} + c_{28} = \frac{1}{256} \frac{\left(\begin{aligned} &-4\kappa + 4\kappa^5 + 960\nu^3 \kappa^3 r_1 r_2 + 160r_1 r_2 \nu^3 \kappa + 696\nu^2 \kappa^4 r_1 r_2 + 216\nu \kappa^5 r_1 r_2 + 24\kappa^6 r_1 r_2 - 384\nu^2 \kappa^3 \\ &- 24\nu^2 \kappa^2 r_1 r_2 - 24\nu^2 r_1 r_2 - 20\kappa^7 - 104\nu \kappa^3 r_1 r_2 - 30\kappa^4 r_1 r_2 + 96\nu^2 \kappa + 96\nu \kappa^2 + 20\kappa^3 - 24\nu \kappa r_1 r_2 \\ &- 64\nu \kappa^4 + r_1 r_2 - 640\nu^3 \kappa^2 + 80\nu^4 \kappa^4 r_1 r_2 + 40\nu \kappa^7 r_1 r_2 + 480\nu^4 \kappa^2 r_1 r_2 + 160\nu^3 \kappa^5 r_1 r_2 + 120\nu^2 \kappa^6 r_1 r_2 \\ &- 320\nu^4 \kappa - 480\nu^2 \kappa^5 - 640\nu^3 \kappa^4 - 160\nu \kappa^6 - 320\nu^4 \kappa^3 + 5r_1 r_2 \kappa^8 + 80\nu^4 r_1 r_2 \end{aligned} \right)}{r_1^4 r_1^4 (-r_1 + r_2)^8}$$

$$c_{19} + c_{29} = \frac{1}{4096} \frac{\left(\begin{aligned} &5 + 680\nu\kappa^2 r_1 r_2 + 525\kappa^{12} - 180\kappa^{14} + 40\nu\kappa + 6096\kappa^8 \nu^4 + 6000\nu\kappa^5 - 2472\nu^2 \kappa^2 - 1800\nu\kappa^3 \\ &- 928\nu^3 \kappa - 5760\nu^3 \kappa^{11} + 14080\nu^3 \kappa^3 + 13008\nu^2 \kappa^4 - 2880\kappa^{10} \nu^4 - 120\kappa^9 \nu + 1344\nu^4 \kappa^6 \\ &+ 2232\nu^2 \kappa^8 + 9144\nu^2 \kappa^{10} + 11616\nu^3 \kappa^9 + 3480\nu\kappa^{11} - 6160\nu\kappa^7 + 4224\nu^3 \kappa^7 + 14720\nu^4 \kappa^2 \\ &- 10272\nu^4 \kappa^4 - 17424\nu^2 \kappa^6 - 23232\nu^3 \kappa^5 - 4320\nu^2 \kappa^{12} - 1440\nu\kappa^{13} - 40r_1 r_2 \nu + 140\kappa^3 r_1 r_2 \\ &- 40r_1 r_2 \kappa - 1120\kappa^7 r_1 r_2 + 480\nu^3 r_1 r_2 + 1680r_1 r_2 \kappa^9 + 1296\nu^2 r_1 r_2 \kappa - 7776\nu^2 r_1 r_2 \kappa^5 - 400\nu\kappa^4 r_1 r_2 \\ &- 4720\nu\kappa^6 r_1 r_2 - 26400\nu^3 \kappa^8 r_1 r_2 - 20208\nu^2 r_1 r_2 \kappa^9 + 10040\nu\kappa^8 r_1 r_2 - 6336\nu^3 r_1 r_2 \kappa^4 \\ &+ 29568\nu^3 r_1 r_2 \kappa^6 + 24192\nu^2 r_1 r_2 \kappa^7 - 7160r_1 r_2 \nu\kappa^{10} - 4224\nu^3 \kappa^2 r_1 r_2 - 2592\nu^2 \kappa^3 r_1 r_2 \\ &- 7104\nu^4 r_1 r_2 \kappa + 4128\nu^2 r_1 r_2 \kappa^{11} + 320r_1 r_2 \nu\kappa^{14} + 1280\kappa^{12} \nu^3 r_1 r_2 + 960\nu^2 \kappa^{13} r_1 r_2 \\ &+ 1280r_1 r_2 \nu\kappa^{12} + 640\nu^4 \kappa^{11} r_1 r_2 + 2752\nu^4 \kappa^9 r_1 r_2 + 16128\nu^4 \kappa^5 r_1 r_2 - 13440\nu^4 \kappa^7 r_1 r_2 \\ &+ 5632\nu^3 \kappa^{10} r_1 r_2 - 9216\nu^4 \kappa^3 r_1 r_2 + 140\kappa^5 r_1 r_2 - 980\kappa^{11} r_1 r_2 + 140\kappa^{13} r_1 r_2 + 40\kappa^{15} r_1 r_2 \\ &- 168\nu^2 + 70\kappa^2 + 1232\nu^4 - 805\kappa^8 - 525\kappa^4 + 1120\kappa^6 - 210\kappa^{10} \end{aligned} \right)}{(-r_1 + r_2)^9 r_1^4 r_2^4 \kappa_1^7} s$$

$$c_{110} + c_{210} = \frac{1}{512} \frac{\left(\begin{aligned} &-350\nu\kappa^8 - 560\kappa\nu^4 - 2800\kappa^6 \nu^3 - 2800\kappa^5 \nu^4 - 1120\kappa^4 \nu^5 - 3\kappa - 6\nu - 20\kappa^7 + 15\kappa^2 r_1 r_2 \\ &- 20\kappa^4 r_1 r_2 + 80\nu^3 - 20\kappa^3 + 78\kappa^5 - 224\nu - 35\kappa^9 - 240\kappa^3 \nu r_1 r_2 + 30\kappa r_1 r_2 \nu - 2240\kappa^2 \nu^5 \\ &- 5600\kappa^3 \nu^4 - 62r_1 r_2 \kappa^6 + 60r_1 r_2 \kappa^8 + 7r_1 r_2 \kappa^{10} - 2200\kappa^5 \nu^2 + 920\kappa^3 \nu^2 - 400\kappa^6 \nu - 1400\kappa^7 \nu^2 \\ &+ 120\kappa\nu^2 - 5200\nu^3 \kappa^4 + 240\kappa^2 \nu^3 + 224r_1 r_2 \kappa^5 \nu^5 + 560r_1 r_2 \kappa^7 \nu^3 + 2240r_1 r_2 \kappa^3 \nu^5 \\ &+ 2800r_1 r_2 \nu^4 \kappa^2 + 5600r_1 r_2 \nu^4 \kappa^4 + 560r_1 r_2 \nu^4 \kappa^6 - 400r_1 r_2 \nu^3 \kappa + 2000r_1 r_2 \nu^3 \kappa^3 + 1120r_1 r_2 \nu^5 \kappa \\ &- 600r_1 r_2 \nu^2 \kappa^2 + 70r_1 r_2 \nu\kappa^9 - 244r_1 r_2 \nu\kappa + 640r_1 r_2 \nu\kappa^7 + 200r_1 r_2 \nu^2 \kappa^4 + 2680r_1 r_2 \nu^2 \kappa^6 \\ &+ 280r_1 r_2 \nu^2 \kappa^8 + 5520r_1 r_2 \kappa^5 \nu^3 + 500\nu\kappa^4 \end{aligned} \right)}{(-r_2)^5 r_1^2 (r_1 - r_2)^{10}}$$

$$d_{10} + d_{20} = -\frac{\kappa_1}{r_2 - r_1}$$

$$d_{11} + d_{21} = -\frac{-\kappa + r_1 r_2}{(-r_2 + r_1)^2} s$$

$$d_{12} + d_{22} = \frac{1}{4} \frac{r_1 r_2 \kappa^3 + 2r_1 r_2 \nu\kappa^2 - \kappa^2 - 4\nu\kappa - r_1 r_2 \kappa + 2r_1 r_2 \nu + 1}{(-r_2 + r_1)^3 \kappa_1}$$

$$d_{13} + d_{23} = 0$$

$$d_{14} + d_{24} = \frac{1}{64} \frac{\left(\begin{aligned} & -r_2 - r_1 - 8\kappa_1 v^2 \kappa^5 r_2 + 16r_2 v \kappa^2 \kappa_1 - 16r_1 v \kappa^2 \kappa_1 + 40r_2 v^2 \kappa \kappa_1 - 40r_1 v^2 \kappa \kappa_1 + 8r_1 \kappa_1 v^2 \kappa^5 + 4r_1 v \kappa^4 \kappa_1 \\ & - 8\kappa^6 r_2 \kappa_1 v - 4\kappa^4 r_1 v \kappa_1 + 8r_1 \kappa^6 \kappa_1 v + 8r_2 \kappa^6 v^2 - 4r_2 v \kappa_1 + 6r_1 \kappa^3 \kappa_1 - 20r_1 \kappa^4 v^2 + 8r_1 \kappa^6 v^2 - 20r_1 \kappa^4 v^2 \\ & + 8r_1 v \kappa^7 - 16r_1 \kappa^5 v + 8r_1 v \kappa^3 + 8r_2 v \kappa^7 - 16r_2 \kappa^5 v + 8r_2 v \kappa^3 + 4r_1 v \kappa_1 - 6r_1 \kappa_1 \kappa^3 + 4r_1 \kappa \kappa_1 - 4r_2 \kappa \kappa_1 \\ & + 2r_1 \kappa_1 \kappa^7 - 2r_2 \kappa_1 \kappa^7 + r_1 \kappa^2 + r_2 \kappa^2 + 12r_1 v^2 + 12r_2 v^2 + 2r_2 \kappa^8 - 5r_2 \kappa^6 + 3r_2 \kappa^4 + 3r_1 \kappa^4 + 2r_1 \kappa^8 \\ & - 5r_1 \kappa^6 \end{aligned} \right)}{(r_2 - r_1)^4 r_1^2 r_2^2 \kappa_1^2}$$

$$d_{15} + d_{25} = 0$$

$$d_{16} + d_{26} = \frac{1}{128} \frac{\left(\begin{aligned} & -1 - 112v^3 \kappa^3 - 256v^3 \kappa - 72v \kappa^3 - 28v^2 \kappa^4 - 48v \kappa^5 - 132v^2 \kappa^2 - 14\kappa^{10} + 5\kappa^9 r_1 r_2 + 4\kappa^{11} r_1 r_2 \\ & + r_1 r_2 \kappa - 20r_1 r_2 \kappa^3 + 50r_1 r_2 \kappa^5 + 20v^2 + 56v^3 r_1 r_2 - 6v r_1 r_2 + 36v \kappa + 10\kappa^2 - 40\kappa^7 r_1 r_2 - 216r_1 r_2 \kappa^6 \\ & + 56v^3 r_1 r_2 \kappa^6 - 20\kappa^6 - 420v^2 \kappa^5 r_1 r_2 + 392v^3 \kappa^2 r_1 r_2 + 308v^2 \kappa^3 r_1 r_2 - 48v \kappa^2 r_1 r_2 + 48v^2 \kappa^5 r_1 r_2 - \\ & 28v^2 \kappa r_1 r_2 + 92v^2 \kappa^7 r_1 r_2 + 32v^3 \kappa^8 r_1 r_2 + 204v \kappa^4 r_1 r_2 - 280v^3 \kappa^4 r_1 r_2 + 42v r_1 r_2 \kappa^8 + 24r_1 r_2 v \kappa^{10} \\ & + 35\kappa^8 - 10\kappa^4 + 308v^2 \kappa^4 + 224v^3 \kappa^5 - 84v \kappa^9 + 168v \kappa^7 - 168v^2 \kappa^8 - 112v^3 \kappa^7 \end{aligned} \right)}{\kappa_1^5 (-r_2 + r_1)^7 (-r_2)^3 (r_1)^3}$$

$$d_{17} + d_{27} = 0$$

$$d_{18} + d_{28} = \frac{1}{2048} \frac{\left(\begin{aligned} & 5 + 140\kappa^{13} r_1 r_2 + 40\kappa^{15} r_1 r_2 + 14080v^3 \kappa^3 - 928v^3 \kappa - 1800v \kappa^3 + 13008v^2 \kappa^4 + 6000v \kappa^5 \\ & - 2472v^2 \kappa^2 + 1232v^4 - 180\kappa^{14} + 525\kappa^{12} - 210\kappa^{10} + 1680\kappa^9 r_1 r_2 + 140r_1 r_2 \kappa^3 + 140r_1 r_2 \kappa^5 \\ & - 168v^2 + 480r_1 r_2 v^3 - 40r_1 r_2 v + 40\kappa v + 70\kappa^2 - 1120\kappa^7 r_1 r_2 - 4720\kappa^6 r_1 r_2 v + 29568\kappa^6 r_1 r_2 v^3 \\ & + 1120\kappa^6 - 7776v^2 \kappa^5 r_1 r_2 - 4224v^3 \kappa^2 r_1 r_2 - 2592v^2 \kappa^3 r_1 r_2 + 680v \kappa^2 r_1 r_2 - 20208v^2 \kappa^9 r_1 r_2 \\ & + 1296v^2 \kappa r_1 r_2 + 24192v^2 \kappa^7 r_1 r_2 - 26400v^3 \kappa^8 r_1 r_2 - 400v \kappa^4 r_1 r_2 - 6336v^3 \kappa^4 r_1 r_2 \\ & + 10040v \kappa^8 r_1 r_2 - 7160v \kappa^{10} r_1 r_2 - 805\kappa^8 + 640v^4 \kappa^{11} r_1 r_2 + 4128v^2 \kappa^{11} r_1 r_2 - 7104v^4 \kappa r_1 r_2 \\ & + 960v^2 \kappa^{13} r_1 r_2 + 1280v^3 \kappa^{12} r_1 r_2 + 16128v^4 \kappa^5 r_1 r_2 - 9216v^4 \kappa^3 r_1 r_2 + 2752v^4 \kappa^9 r_1 r_2 \\ & - 13440v^4 \kappa^7 r_1 r_2 + 1280v \kappa^{12} r_1 r_2 + 320v^4 \kappa^{14} r_1 r_2 - 525\kappa^4 + 1440v \kappa^{13} - 4320v^2 \kappa^{12} \\ & + 3480v \kappa^{11} - 2880v^4 \kappa^{10} - 5760v^3 \kappa^{11} + 6096v^4 \kappa^8 + 9144v^2 \kappa^{10} + 1344v^4 \kappa^6 \\ & - 10272v^4 \kappa^4 + 14720v^4 \kappa^2 + 11616v^3 \kappa^9 + 17424v^2 \kappa^6 - 23232v^3 \kappa^5 - 120v \kappa^9 \\ & - 6160v \kappa^7 + 2232v^2 \kappa^8 + 4224v^3 \kappa^7 \end{aligned} \right)}{\kappa_1^7 (-r_2 + r_1)^9 (-r_2)^4 (r_1)^4}$$

$$d_{19} + d_{29} = 0$$

$$d_{110} + d_{210} = \frac{1}{8192} \frac{\left(\begin{aligned} &7 + 10731\kappa^{13}r_1r_2 - 5313\kappa^{15}r_1r_2 - 17280v^3\kappa^3 + 11456v^3\kappa + 2800v\kappa^3 + 4200v^2\kappa^4 \\ &+ 9660v\kappa^5 + 8560v^2\kappa^2 + 3120v^4 + 693\kappa^{14} - 9471\kappa^{12} + 15393\kappa^{10} - 777\kappa^9r_1r_2 \\ &- 8253\kappa^{11}r_1r_2 - 7r_1r_2\kappa + 609\kappa^3r_1r_2 - 3087\kappa^5r_1r_2 - 360v^2 - 1232v^3r_1r_2 + 70vr_1r_2 \\ &- 700v\kappa - 189\kappa^2 + 5229\kappa^7r_1r_2 + 38570vr_1r_2\kappa^6 - 237952v^3\kappa^6r_1r_2 + 3087\kappa^6 \\ &+ 112200v^2\kappa^5r_1r_2 - 28512v^3\kappa^2r_1r_2 - 29040v^2\kappa^3r_1r_2 + 1610v\kappa^2r_1r_2 - 99000v^2\kappa^9r_1r_2 \\ &+ 440v^2\kappa r_1r_2 - 112640v^2\kappa^7r_1r_2 - 102960v^3\kappa^8r_1r_2 - 15330v\kappa^4r_1r_2 + 171600v^3\kappa^4r_1r_2 \\ &- 23030v\kappa^8r_1r_2 - 46130v\kappa^{10}r_1r_2 + 1848\kappa^{16} - 616\kappa^{18} + 756\kappa^{17}r_1r_2 + 7392v^5r_1r_2 + \\ &756\kappa^{17}r_1r_2 + 7392v^5r_1r_2 + 112\kappa^{19}r_1r_2 - 10899\kappa^8 - 346320r_1r_2v^4\kappa^{11} + 272720v^2\kappa^{11} \\ &- 7920v^4\kappa r_1r_2 - 183240v^2\kappa^{13}r_1r_2 + 471328v^3r_1r_2\kappa^{10} - 351312v^3\kappa^{12}r_1r_2 - 251680v^4\kappa^5r_1r_2 \\ &+ 148720r_1r_2v^4\kappa^3 + 446160v^4\kappa^9r_1r_2 - 68640v^4\kappa^7r_1r_2 + 83930v\kappa^{12}r_1r_2 + 8120v\kappa^{16}r_1r_2 - \\ &48930v\kappa^{14}r_1r_2 + 147\kappa^4 + 3584v^5\kappa^{14}r_1r_2 + 1120r_1r_2v\kappa^{18} + 70080v^3\kappa^{14}r_1r_2 + 8960v^3\kappa^{16}r_1r_2 \\ &+ 70720v^4\kappa^{13}r_1r_2 + 8960v^4v^{15}r_1r_2 + 34080v^2\kappa^{15}r_1r_2 + 4480\kappa^{17}v^2r_1r_2 + 28032v^5\kappa^{12}r_1r_2 \\ &- 62656v^5\kappa^4r_1r_2 + 13860\kappa^{13} + 134112v^5\kappa^2r_1r_2 + 72600v^5\kappa^{12} - 140448v^5\kappa^{10}r_1r_2 \\ &- 86240v\kappa^{11} + 189024v^5\kappa^8r_1r_2 - 44352v^5\kappa^6r_1r_2 + 171600v^4\kappa^{10} + 164736v^3\kappa^{11} \\ &- 583440v^4\kappa^8 - 315920v^2\kappa^{10} + 526240v^4\kappa^6 - 126880v^4\kappa^4 - 32880v^4\kappa^2 - 594880v^3\kappa^9 \\ &+ 91520v^4\kappa^{12} + 52800v^2\kappa^{14} + 38016v^5\kappa^{11} + 65471v^5\kappa^9 - 51264v^5\kappa^5 - 221056v^5\kappa^5 \\ &- 236544v^5\kappa^7 - 131712v^5\kappa^3 - 24640v^2\kappa^{16} - 6160\kappa^{17}v + 95040v^3\kappa^{13} - 15400v\kappa^{15} \\ &- 19712v^5\kappa^{13} - 49280\kappa^{14}v^4 - 49280\kappa^{15}v^3 - 143520v^2\kappa^6 - 177216v^3\kappa^5 + 113260v\kappa^9 \\ &- 61880v\kappa^7 + 346280v^2\kappa^8 + 567424v^3\kappa^7 + 13860\kappa^{13} + 134112v^5\kappa^2r_1r_2 + 72600v^5\kappa^{12} \\ &- 140448v^5\kappa^{10}r_1r_2 - 86240v\kappa^{11} + 189024v^5\kappa^8r_1r_2 - 44352v^5\kappa^6r_1r_2 + 171600v^4\kappa^{10} \\ &+ 164736v^3\kappa^{11} - 583440v^4\kappa^8 - 315920v^2\kappa^{10} + 526240v^4\kappa^6 - 126880v^4\kappa^4 \\ &- 32880v^4\kappa^2 - 594880v^3\kappa^9 + 91520v^4\kappa^{12} + 52800v^2\kappa^{14} + 38016v^5\kappa^{11} + 65471v^5\kappa^9 \\ &- 51264v^5\kappa^5 - 221056v^5\kappa^5 - 236544v^5\kappa^7 - 131712v^5\kappa^3 - 24640v^2\kappa^{16} - 6160\kappa^{17}v \\ &+ 95040v^3\kappa^{13} - 15400v\kappa^{15} - 19712v^5\kappa^{13} - 49280\kappa^{14}v^4 - 49280\kappa^{15}v^3 - 143520v^2\kappa^6 \\ &- 177216v^3\kappa^5 + 113260v\kappa^9 - 61880v\kappa^7 + 346280v^2\kappa^8 + 567424v^3\kappa^7 \end{aligned} \right)}{\kappa_1^9 (-r_2 + r_1)^{11} r_1^5 r_2^5}$$

$$h_{111} = a_{10} + O\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$h_{112} = a_{20} + O\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

A.27

$$h_{211} = b_{10} + O\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$h_{212} = b_{20} + O\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

A.28

$$h_{121} = c_{10} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \qquad h_{122} = c_{20} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \qquad \text{A.29}$$

$$h_{221} = d_{10} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \qquad h_{222} = d_{20} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \qquad \text{A.30}$$

$$H_{11}(\alpha, y) = \frac{i\alpha}{|\alpha|} (1 - \nu_0) \left[\left(a_{10} + a_{11} \frac{\gamma}{|\alpha|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \right) e^{-r_1|\alpha|y} + \left(a_{20} + a_{21} \frac{\gamma}{|\alpha|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \right) e^{-r_2|\alpha|y} \right] \qquad \text{A.31}$$

$$H_{21}(\alpha, y) = (1 - \nu_0) \left[\left(b_{10} + b_{11} \frac{\gamma}{|\alpha|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \right) e^{-r_1|\alpha|y} + \left(b_{20} + b_{21} \frac{\gamma}{|\alpha|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \right) e^{-r_2|\alpha|y} \right] \qquad \text{A.32}$$

$$H_{12}(\alpha, y) = (1 - \nu_0) \left[\left(c_{10} + c_{11} \frac{\gamma}{|\alpha|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \right) e^{-r_1|\alpha|y} + \left(c_{20} + c_{21} \frac{\gamma}{|\alpha|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \right) e^{-r_2|\alpha|y} \right] \qquad \text{A.33}$$

$$H_{22}(\alpha, y) = \frac{i\alpha}{|\alpha|} (1 - \nu_0) \left[\left(d_{10} + d_{11} \frac{\gamma}{|\alpha|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \right) e^{-r_1|\alpha|y} + \left(d_{20} + d_{21} \frac{\gamma}{|\alpha|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \right) e^{-r_2|\alpha|y} \right] \qquad \text{A.34}$$

EK-B Fredholm Kernellerin Sayısal Olarak Hesaplanması

5.77. denklemdaki gibi bağıntıların çözümündeki hassasiyet denklemler 5.110. ve 5.111. denklemlerde verilen Fredholm kernellerin $h_n^1(r)$ ve $h_n^2(r)$ doğru hesaplanmasına bağlıdır. İntegrandların asimptotik değerleri eklenip çıkarılarak aşağıdaki bağıntılar yazılabilir:

$$h_n^1(r) = \int_{-1}^1 w(s) P_n^{(\alpha, \beta)}(s) ds \int_0^\infty \left[\Phi_{11}^*(\zeta) - (\mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{21}) \frac{\pi |s-r| \gamma^*}{2 s-r \zeta} \right] \sin[\zeta |s-r|] d\zeta \\ + (\mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{21}) \int_{-1}^1 w(s) P_n^{(\alpha, \beta)}(s) \frac{\pi |s-r|}{2 s-r} \gamma^* ds \int_0^\infty \frac{\sin[\zeta |s-r|]}{\zeta} d\zeta$$

$$h_n^1(r) = \int_{-1}^1 \int_0^\infty \left[\Phi_{11}^*(\zeta) - (\mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{21}) \frac{\pi |s-r| \gamma^*}{2 s-r \zeta} \right] \sin[\zeta |s-r|] d\zeta \\ + \frac{\pi}{2} \gamma^* (\mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{21}) \int_{-1}^1 \frac{|s-r|}{s-r} \frac{\pi}{2} w(s) P_n^{(\alpha, \beta)}(s) ds$$

B.1

$$h_n^2(r) = \int_{-1}^1 w(s) P_n^{(\alpha, \beta)}(s) ds \int_0^\infty \left[\Phi_{12}^*(\zeta) \cos[\zeta |s-r|] + (C_{11} + C_{21}) \gamma^* \ln |s-r| \right] d\zeta \\ - (C_{11} + C_{21}) \int_{-1}^1 \gamma^* \ln |s-r| w(s) P_n^{(\alpha, \beta)}(s) ds$$

B.2

Fredholm ve kerneller aşağıdaki Gaussian Quadrature formülleri kullanılarak hesaplanabilir:

$$\int_{-1}^1 G(t, x) (1-t)^\alpha (t+1)^\beta dt \cong \sum_1^n W_k G(x, t_k), \quad -1 < \Re(\alpha, \beta) < 1, \quad \text{B.3}$$

t_k ve x_k aşağıdaki gibi belirlenir (Erdoğan ve ark., 1973):

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(t_k) = 0$$

$$P_{n-\kappa_i}^{(\alpha+\kappa_i, \beta+\kappa_i)}(x_k) = 0 \quad \text{için} \quad \kappa_i = \pm 1$$

$$P_{n-\kappa_i}^{(\alpha+1, \beta-1)}(x_k) = 0 \quad \text{için} \quad \kappa_i = 0 \quad -1 < \alpha < 0, \quad 0 < \beta < 1,$$

$$P_{n-\kappa_i}^{(\alpha-1, \beta+1)}(x_k) = 0 \quad \text{için} \quad \kappa_i = 0 \quad 0 < \alpha < 1, \quad -1 < \beta < 0, \quad \text{B.4}$$

Ağırlık sabitleri aşağıdaki gibi verilir:

$$W_k = \frac{(2n+\alpha+\beta+2)\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{(\alpha+\beta)}}{(n+1)!(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)P_{n+1}^{(\alpha+\beta)}(t_k)\frac{d}{dt}P_n^{(\alpha+\beta)}(t_k)} \quad \text{B.5}$$

Gauss Quadrature formüllerinin listesi Abramowitz ve Stegun'un (1965) çalışmasında görülebilir. Bu prosedür, problemi lineer cebirsel denklemlere dönüştürür. Bu problemde $G(x, t_k)$ Jacobi polinomlarıdır.

B1.Sonsuz İntegraller

Fredholm kerneller sonsuz üst limiti olan kerneller içermektedir. Sonsuz integrallerin hesaplanmasında yüksek dereceli hassasiyette olması esastır.

İntegrandlardaki sinüs ve kosinüslü terimler ayrı ayrı değerlendirilecektir.

$J_{11}(s, r)$ ve $J_{12}(s, r)$ integralin sınırları değiştirilerek hesaplanır:

$$J_{11}(s, r) = \left(\int_0^A + \int_A^\infty \right) \Phi_{11}(\alpha) \sin[\alpha(s-r)] d\alpha \quad \text{B.6}$$

$$J_{12}(s, r) = \left(\int_0^A + \int_A^\infty \right) \Phi_{12}(\alpha) \cos[\alpha(s-r)] d\alpha \quad \text{B.7}$$

İlk integraller $J_{11}(s, r)$ ve $J_{12}(s, r)$ sınırlıdır ve sayısal olarak hesaplanmıştır. Yukarıdaki denklemlerdeki $A_i, i = 1, \dots, 4$ integral kesme noktalarıdır. Hesaplamalarda, integral kesme noktaları $A_i (i = 1, \dots, 4)$ fonksiyonlarını $(0 \dots A)$ aralığında hesaplamak için kullanılır (Dağ ve Erdoğan, 2002). İkinci integraller asimptotik yaklaşımda 10 terimli yaklaşımla hesaplanacaktır.

$(0 \dots A)$ sınır aralığında, integral Gauss Quadrature metodu kullanılarak hesaplanacaktır $\left(\frac{\gamma}{A}\right)^9$ istenilen derecede küçük olacak şekilde A seçilebilir. Belirli bir heterojenlik sabit için, belli bir noktadan sonra A 'daki daha fazla artış sadece sayısal hesaplamayı zorlaştırır. $(0 \dots A)$ integralinde A daha fazla artarsa bu integralin hesaplanması için daha fazla çaba harcamak gerekir. Eğer istenilen hata 10^{-9} derecesinde ise, integral limiti, $A, 5\gamma$ seçilebilir.

İkinci integraller:

$$L_{11}^*(s, r) = \int_A^\infty (\Phi_{11}^*(\zeta) - (\mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{21})) \sin[\zeta(s-r)] d\zeta \quad \text{B.8}$$

$$L_{12}^*(s, r) = \int_A^{\infty} (\Phi_{12}^*(\zeta) - (C_{11} + C_{21})) \cos[\zeta(s-r)] d\zeta \quad \text{B.9}$$

oluşmaktadır. Burada $\mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{21}$ ve $C_{11} + C_{21}$ A.27 ve A.29.' denklemlerde tanımlanmıştır.

A ' dan sonsuza olan kısımda integrandlar $\Phi_{11}^*(\zeta)$ ve $\Phi_{12}^*(\zeta)$ asimptotik olarak $\zeta \rightarrow \infty$ için aşağıdaki şekilde açılabilir:

$$\Phi_{11}^*(\zeta) = \sum_1^{\infty} \frac{\mathcal{A}_{1n} + \mathcal{A}_{2n}}{\zeta^n} \sin[\zeta(s-r)] \quad \text{B.10}$$

$$\Phi_{12}^*(\zeta) = \sum_1^{\infty} \frac{C_{1n} + C_{2n}}{\zeta^n} \cos[\zeta(s-r)] \quad \text{B.11}$$

$\mathcal{A}_{1n} + \mathcal{A}_{2n}$ ve $C_{1n} + C_{2n}$ A.27 ve A.29. denklemlerde tanımlanmıştır. Dolayısı ile:

$$L_{11}^*(s, r) = \sum_2^{\infty} (\mathcal{A}_{1n} + \mathcal{A}_{2n}) \int_A^{\infty} \sin \frac{[\zeta(s-r)]}{\zeta^n} d\zeta \quad \text{B.12}$$

$$L_{12}^*(s, r) = \sum_2^{\infty} (C_{1n} + C_{2n}) \int_A^{\infty} \cos \frac{[\zeta(s-r)]}{\zeta^n} d\zeta$$

B2. $Ci()$ ve $Si()$ Tekrarlayan Formülleri

İntegrallerin hesaplanmasında kısmî integral metodu gerekli tekrarlayan (*recursive*) formül elde edilinceye kadar kullanılır. Burada $Ci()$ ve $Si()$ sırası ile kosinüs ve sinüs integralleridir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \left(\int_0^{\infty} - \int_x^{\infty} \right) \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} \frac{|t|}{t} - \int_x^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \quad \text{B.13}$$

$$Ci(x) = \int_0^x \frac{\cos(t)}{t} dt = \gamma_0 + \log|x| - \int_0^{|x|} \frac{1 - \cos(t)}{t} dt \quad \text{B.14}$$

Burada $\gamma_0 = 0.57721566490$ Euler sabitidir

$$\int_C^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} \frac{|t|}{t} - Si(x) \quad \text{B.15}$$

$$\int_x^{\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt = \left(\int_0^{\infty} - \int_0^x \right) \frac{\cos(t)}{t} dt = -\gamma_0 - \log|x| + \int_0^{|x|} \frac{1 - \cos(t)}{t} dt \quad \text{B.16}$$

($A \dots \infty$) integrallerin parçası aşağıdaki kapalı formda verilmiş bağıntıları olan integrallerin hesaplanmasına dönüşmüştür:

$$\begin{aligned} \int_A^\infty \cos \frac{[\zeta(s-r)]}{\zeta^{2n-1}} d\zeta &= \cos(A|s-r) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^{j+1} (|s-r|)^{2j-2} (2n-2j-1)!}{A^{2n-2j} (2n-2)!} \\ &+ \sin(A|s-r) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^j (|s-r|)^{2j-1} (2n-2j-2)!}{A^{2n-2j} (2n-2)!} \\ &+ \frac{(-1)^n (|s-r|)^{2n-2} Ci(A|s-r)}{(2n-2)!} \end{aligned} \quad \text{B.17}$$

$$\begin{aligned} \int_A^\infty \sin \frac{[\zeta(s-r)]}{\zeta^{2n}} d\zeta &= \cos(A|s-r) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^{j+1} (|s-r|)^{2j-1} (2n-2j-1)!}{A^{2n-2j} (2n-1)!} \\ &+ \sin(A|s-r) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^{j+1} (|s-r|)^{2j-2} (2n-2j)!}{A^{2n-2j+1} (2n-1)!} \\ &+ \frac{(-1)^n (|s-r|)^{2n-1} Ci(A|s-r)}{(2n-1)!} \end{aligned} \quad \text{B.18}$$

$$\begin{aligned} \int_A^\infty \cos \frac{[\zeta(s-r)]}{\zeta^{2n}} d\zeta &= \cos(A|s-r) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^{j+1} (|s-r|)^{2j-2} (2n-2j)!}{A^{2n-2j+1} (2n-1)!} \\ &+ \sin(A|s-r) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^j (|s-r|)^{2j-1} (2n-2j-1)!}{A^{2n-2j} (2n-1)!} \\ &+ \frac{(-1)^{n+1} (|s-r|)^{2n-1} \left(Si(A|s-r) - \frac{\pi}{2} \right)}{(2n-1)!} \end{aligned} \quad \text{B.19}$$

$$\begin{aligned} \int_A^\infty \sin \frac{[\zeta(s-r)]}{\zeta^{2n-1}} d\zeta &= \cos(A|s-r) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^{j+1} (|s-r|)^{2j-1} (2n-2j-2)!}{A^{2n-2j-1} (2n-2)!} \\ &+ \sin(A|s-r) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^{j+1} (|s-r|)^{2j-2} (2n-2j-1)!}{A^{2n-2j} (2n-2)!} \\ &+ \frac{(-1)^n (|s-r|)^{2n-2} \left(Si(A|s-r) - \frac{\pi}{2} \right)}{(2n-2)!} \end{aligned} \quad \text{B.20}$$

EK-C Logaritmik Kernellerin Hesaplanması

Sayısal hesaplamanın tamamlanması için, aşağıdaki integralin hesaplanması gerekmektedir:

$$I_n(x) = \int_{-1}^1 \ln(|t-x|)(1-t)^\alpha (1+t)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(t) dt \quad \text{C.1}$$

$P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ Rodrigues formülü tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-t)^{-\alpha} (1+t)^{-\beta} \frac{d^n}{dt^n} [(1-t)^{\alpha+n} + (1+t)^{\beta+n}] \quad \text{C.2}$$

C1. $n = 0$ Logaritmik Kernelin Hesaplanması

$$\int_{-1}^1 \ln(|t-x|)(1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt \quad \text{C.3}$$

Integralinin kapalı form çözümü yoktur. Bu integralin hesabının sayısal olarak yapılmalıdır. Bu integralin hesaplanmasında Gaussian Quadrature formülleri kullanılır.

$t \rightarrow x$ integralin düzensiz bir davranış gösterdiğine dikkat edilmelidir. Bu ise yakınsak (*convergence*) bir probleme sebep olur. Dolayısı ile sıralama noktalarının yakınlarında daha fazla Gaussian noktası alınması gerekmektedir. Bu ise etkili şekilde integralin aralığı $(-1,1)$ daha küçük aralıklara $(-1, x-\varepsilon)$, $(x-\varepsilon, x)$, $(x, x+\varepsilon)$, $(x+\varepsilon, x)$ bölünerek yapılabilir. Burada ε küçük bir değerdir (0.01 olarak kabul edilebilir). Bu ise sıralama noktalarına daha yakın noktalar oluşturur ve integralin hesaplanması daha doğru olur.

C2. $n > 0$ Logaritmik Kernelin Hesaplanması

Aşağıdaki hesaplanması gerekmektedir:

$$I_n(x) = \int_{-1}^1 \ln(|t-x|)(1-t)^\alpha (1+t)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(t) dt \quad \text{C.4}$$

Öncelikle:

$$\begin{aligned}
& (1-t)^\alpha (1+t)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(t) \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} \left[(1-t)^{\alpha+n} (1+t)^{\beta+n} \right] \\
&= -\frac{(-1)^{n-1}}{2n 2^{n-1} (n-1)!} \frac{d}{dt} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left[(1-t)^{\alpha+1+(n-1)} (1+t)^{\beta+1+(n-1)} \right] \\
&= -\frac{1}{2n} \frac{d}{dt} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1} (n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left[(1-t)^{\alpha+1+(n-1)} (1+t)^{\beta+1+(n-1)} \right] \right] \\
&= -\frac{1}{2n} \frac{d}{dt} \left[(1-t)^{\alpha+1} (1+t)^{\beta+1} P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(t) \right]
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Ayrıca aşağıdaki bağıntı vardır:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(t) (1-t)^\alpha (1+t)^\beta}{t-x} dt = \cot(\pi\alpha) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\
& \frac{n! \Gamma(-\alpha - \beta + 2n - 2\kappa_i + 1) \Gamma(\alpha + \beta + n + 1) P_{n-\kappa_i}^{(-\alpha, -\beta)}(x)}{\sin(\pi\alpha) \Gamma(n - \kappa_i + 1) \Gamma(-\alpha - \beta + n - \kappa_i + 1)}
\end{aligned} \tag{C.6}$$

$\kappa_i = -(\alpha + \beta)$ Kısmî integral ile aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \ln(|t-x|) (1-t)^\alpha (1+t)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(t) dt \\
&= -\frac{1}{2n} \int_{-1}^1 \ln(|t-x|) \frac{d}{dt} \left[(1-t)^{\alpha+1} (1+t)^{\beta+1} P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(t) \right] dt \\
&= -\frac{1}{2n} \ln(|x-t|) (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(t) \\
&+ \frac{1}{2n} \int_{-1}^1 \frac{(1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(t)}{x-t} dt \\
&= \frac{\pi}{2n} \int_{-1}^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1} (1+t)^{\beta+1} P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(t)}{t-x} dt
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Dolayısı ile,

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \ln(|t-x|) (1-t)^\alpha (1+t)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(t) dt = \\
& \frac{\pi}{2n} \left[\cot[\pi(\alpha+1)] P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \right] \\
& - \frac{\pi}{2n} \left[\frac{2^{-\kappa_i}}{\sin[\pi(\alpha+1)]} P_{n-\kappa_i-1}^{(-\alpha-1, -\beta-1)}(x) \right]
\end{aligned} \tag{C.8}$$

Dikkat edilirse:

$$\cot[\pi(\alpha+1)] = \cot(\pi\alpha) \quad \text{C.9}$$

$$\sin[\pi(\alpha+1)] = -\sin(\pi\alpha) \quad \text{C.10}$$

Ve yerine konulursa:

$$\kappa_i = -(\alpha+1+\beta+1) = -(\alpha+\beta+2) \quad \text{C.11}$$

Böylece C.4:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{\pi}{2n} \cot(\pi\alpha) P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} \\ &+ \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{n \sin[\pi(\alpha+1)]} P_{n+\alpha+\beta+1}^{(-\alpha-1, -\beta-1)}(x) \end{aligned} \quad \text{C.12}$$

Popov (1969) makalesinde karmaşık integral alma yöntemini kullanarak yaptığı çözümün sonucunu aşağıdaki gibi verir:

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 \ln(|t-x|) (1-t)^\alpha (1+t)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(t) dt = \\ &\frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(1+\alpha) \Gamma(1+\beta+n)}{n \Gamma(\alpha+\beta+n+2)} F\left(n, -1-\alpha-\beta-n, \frac{1-x}{2}\right) - \\ &+ \frac{\Gamma(1+\alpha+n) \pi \cot(\pi\alpha)}{2^{-\beta} \Gamma(\alpha+2) n! (1-x)^{-\alpha-1}} F\left(-\beta-n, 1+\alpha+\beta+n, 2+\alpha, \frac{1-x}{2}\right) \end{aligned} \quad \text{C.13}$$

Bu formüller kullanılarak:

$$F\left(1+\alpha+\beta+n, -n, 1+\alpha, \frac{1-x}{2}\right) = \frac{n!}{(1+\alpha)_n} P_n^{(\alpha, \beta)}(t) \quad \text{C.14}$$

$$F(A, B, C, z) = (1-z)^{C-A-B} F(C-A, C-B, C, z) \quad \text{C.15}$$

Burada:

$$(1+\alpha)_n = \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)} \quad \text{C.16}$$

Ve aşağıdaki bağıntıları yeniden tanımlayarak:

$$\begin{aligned} n &\rightarrow m + \alpha' + \beta' + 1, \\ \alpha &\rightarrow -\alpha' - 1, \\ \beta &\rightarrow -\beta' + 1, \end{aligned}$$

C.14. denklem aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} &F\left(m, -1 - \alpha' + \beta' - m, -\alpha', \frac{1-x}{2}\right) \\ &= \frac{\Gamma(-\alpha')\Gamma(n + \alpha' + \beta' + 2)}{\Gamma(n + \beta' + 1)} P_{n+\alpha'+\beta'+1}^{(-\alpha'-1, -\beta'-1)}(t) \end{aligned} \quad \text{C.17}$$

C.14. Denklemden n, α, β , aşağıda tanınmalan bağıntılarla yer değiştirilirse:

$$\begin{aligned} n &\rightarrow m - 1, \\ \alpha &\rightarrow \alpha' + 1, \\ \beta &\rightarrow \beta' + 1, \end{aligned}$$

C.14. denklemden aşağıdaki şekli alır:

$$\begin{aligned} &F\left(\alpha' + \beta' + n + 2 - n + 1, \alpha' + 2, \frac{1-x}{2}\right) \\ &= \frac{\Gamma(n)\Gamma(\alpha' + 2)}{\Gamma(n + \alpha' + 1)} P_{n-1}^{(\alpha'+1, \beta'+1)}(t) \end{aligned} \quad \text{C.18}$$

C.15. Denklemden γ, α, β aşağıda tanınmalan bağıntılarla yer değiştirilirse:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha' + \beta' + n + 2 \\ \beta' &= 1 - n, \\ \gamma &= \alpha' + 2 \end{aligned}$$

Ve aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\begin{aligned} &F\left(\alpha' + \beta' + n + 2 - n + 1, \alpha' + 2, \frac{1-x}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1+x}{2}\right)^{-\beta'-1} F\left(-\beta' - n, \alpha' + n + 1, \alpha' + 2, \frac{1-x}{2}\right) \\ &= \frac{\Gamma(n)\Gamma(\alpha' + 2)}{\Gamma(n + \alpha' + 1)} P_{n-1}^{(\alpha'+1, \beta'+1)}(t) \end{aligned} \quad \text{C.19}$$

$$\begin{aligned}
& F\left(-\beta' - n, \alpha' + n + 1, \alpha' + 2, \frac{1-x}{2}\right) \\
&= \frac{2^{-\beta'} \Gamma(n) \Gamma(\alpha' + 2)}{2 (1+x)^{\beta'+1} \Gamma(n + \alpha' + 1)} P_{n-1}^{(\alpha'+1, \beta'+1)}(t)
\end{aligned}$$

C.20

C.18 ve **C.20.** denklemler yerine konulur ve sadeleştirilirse **C.13.** denklemde verilen sonuca ulaşılabilir.

EK-D Bilinmeyen Fonksiyonun Tekil Davranışının İncelenmesi

D1. Bilinmeyen fonksiyonun tekil davranışı $b < 0$ için

$b < 0$ için bilinmeyen fonksiyonlardaki gerilme tekilliğinin kuvvetleri incelenecektir. Başlangıçta bilinmeyen fonksiyonlar için aşağıdaki form kabul edilmiştir Dağ (2001):

$$f(t) = F(t)(t-a)^\alpha (b-t)^\beta, \quad a < t < b, \quad \text{D.1}$$

Burada $F(t)$ ' nin kendi aralığında Hölder sürekliliği vardır ve $-1 < \Re(\alpha, \beta) < 0$ olduğu kabul edilmiştir. Temas probleminde üsler α ve β baskının profillerine bağlı olarak sıfırdan az veya daha fazla olabilir. Bu bölümde; kendi aralıklarında gerilmeler ve yer değiştirmelerin türevleri için sınırlı davrandığından emin olmak için α , β , ve diğer üsler karakteristik denklemleri fonksiyon-teorik metot kullanılarak üretilecektir. Şimdi aşağıdaki parçalı holomorfik fonksiyonları ele alalım:

$$\psi(z) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{f(t)}{t-z} dt, \quad \text{D.2}$$

Kenar noktalar etrafındaki $\psi(z)$ 'nin tekil davranışı aşağıdaki şekildedir (Muskhelishvili, 1953), (Erdoğan, 1978):

$$\psi(z) = -F(a)(b-a)^\beta \frac{\exp(-\pi i \alpha)}{\sin(\pi \alpha)} (z-a)^\alpha + F(b)(b-a)^\alpha \frac{(z-b)^\beta}{\sin(\pi \beta)} + F^*(z), \quad \text{D.3}$$

Fonksiyon $F^*(z)$ muhtemelen daha zayıf tekilliğin olduğu kenar noktaları dışında her yerde sınırlıdır. Plemej formülleri ve D.3. denklemi kullanılarak Cauchy integrallerin kenar noktadaki tekilliği verilen bilinmeyen fonksiyonlar şeklinde aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{f(t)}{t-x_1} dt = -F(a)(b-a)^\beta \cot(\pi \alpha) (x_1-a)^\alpha + F(b)(b-a)^\alpha \cot(\pi \beta) (x_1-a)^\beta + H(x), \quad a < x_1 < b, \quad \text{D.4}$$

$H(x)$ kendi aralıklarında sınırlıdır ve kenar noktadaki davranışı D.3. denklemdeki $F^*(z)$ 'in davranışı ile benzerdir. Şimdi D.2. Denklem ele alalım ve karmaşık değişkenler z ' nin aşağıdaki şartları sağladığını kabul edilsin:

$$z \notin (a < x_1 < b), \quad \text{D.5}$$

Bu şartlar altında $\psi(z)$ holomorptir. Dolayısı ile aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\psi(z) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{f(t)}{t-z} dt, \quad \text{D.6}$$

$$\frac{1}{(\mathcal{A}_{10} + \mathcal{A}_{20})} \frac{E_0}{2(1 + \nu_0)} \frac{d}{dx_1} u_2(x_1, 0) \cong -F(a)(b-a)^\beta \cot(\pi\alpha)(x_1 - a)^\alpha + F(b)(b-a)^\alpha \cot(\pi\beta)(b - x_1)^\beta \\ + \eta \left(\frac{C_{10} + C_{20}}{\mathcal{A}_{10} + \mathcal{A}_{20}} \right) F(x_1)(b - x_1)^\beta (x_1 - a)^\alpha, \quad \text{D.7}$$

Şimdi bilinmeyen üsleri **D.7.** denklem kullanılarak belirlemek için karakteristik denklemler üretilebilir. **D.7.** denklem $(x_1 - a)^{-\alpha}$ ile çarpıp $x_1 \rightarrow a$ ya giderken aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\cot(\pi\alpha) = \eta \left(\frac{C_{10} + C_{20}}{\mathcal{A}_{10} + \mathcal{A}_{20}} \right) \quad \text{D.8}$$

D2.Bilinmeyen fonksiyonun tekil davranışı $b = 0$ için

$b = 0$ için bilinmeyen fonksiyonlardaki gerilme tekilliğinin olasılığı fonksiyon teorik metotla incelenecektir. Eğer $b = 0$ ise kerneller x_1 ve t sıfıra yaklaşırken tekil olur. Dolayısı ile $x_1 = 0$ noktasında gerilme tekilliğinin kuvvetlerini belirlemek için bütün kerneller incelenmelidir. Bilinmeyen fonksiyonlar aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$f(t) = \psi(t)(-t)^\beta (t-a)^\alpha, \quad a < t < 0, \quad \text{D.9}$$

Burada $G(t)$ ilgili kendi aralığında Hölder sürekliliği vardır ve $-1 < \Re(\alpha, \beta) < 0$ olduğu kabul edilmiştir. Parçalı holomorptik fonksiyonların tanımı **D.2.** denklem ile verilmiştir ve kenar noktalar yakınında bu fonksiyonları tekil davranışı aşağıda verilmiştir:

$$\psi(z) = -\psi(a)(-a)^\beta \frac{\exp(-\pi i\alpha)}{\sin(\pi\alpha)} (z-a)^\alpha + G(0)(-a)^\alpha \frac{z^\beta}{\sin(\pi\beta)} + \psi^*(z), \quad \text{D.10}$$

$\psi^*(z)$ Muhtemelen daha zayıf tekilliğin olduğu kenar noktaları dışında her yerde sınırlıdır. Plemej formülleri ve **D.10.** denklem kullanılarak Cauchy integrallerin kenar noktadaki tekilliği aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$\frac{1}{\pi} \int_a^0 \frac{f(t)}{t-x_1} dt = -\psi(a)(-a)^\beta \cot(\pi\alpha)(x_1 - a)^\alpha + \psi(0)(-a)^\beta \cot(\pi\beta)(b - x_1)^\beta \\ + H(x_1), \quad a < x_1 < 0, \quad \text{D.11}$$

Eğer karmaşık sayılar z 'nin aşağıdaki şartları sağladığı kabul edilirse:

$$z \notin (a < x_1 < 0),$$

D.12

$\psi(z)$ holomorptir ve **D.6.** denkleminde geçerlidir. İntegral denklemlerin asimptotik davranışını belirlemek için aşağıdaki işlemlerin yapılması gerekmektedir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\mathcal{A}_{10} + \mathcal{A}_{20})} \frac{E_0}{2(1 + \nu_0)} \frac{\partial u_2(x_1, 0)}{\partial x_1} &\cong -\cot(\pi\alpha)(-a)^\beta \psi(a)(x_1 - a)^\alpha - \cot(\pi\beta)(-a)^\alpha \psi(0)(-x_1)^\beta a \\ &+ \eta \left(\frac{C_{10} + C_{20}}{\mathcal{A}_{10} + \mathcal{A}_{20}} \right) \psi(x_1)(-x_1)^\beta (x_1 - a)^\alpha \end{aligned}$$

D.13

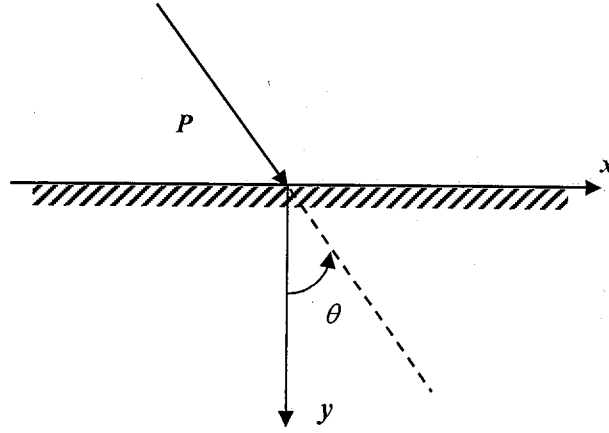
D.13. Denklem ile verilen bağıntılar $a < x_1 < 0$ aralığındaki noktalarla sınırlıdır. Bu şart kullanılarak karakteristik denklem bilinmeyen üssü belirlemek için kullanılır. **D.13.** denklem $(x_1 - a)^{-\alpha}$ ile çarpıp $x_1 \rightarrow a$ 'ya giderken $(-x_1)^\beta$ ile çarpılır ve $x_1 \rightarrow 0$ 'ya olursa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\cot(\pi\alpha) = \eta \left(\frac{C_{10} + C_{20}}{\mathcal{A}_{10} + \mathcal{A}_{20}} \right)$$

D.14

D3. θ Açısının Fiziksel Anlamı

Lekhnitskii (1963) tarafından ifade edildiği gibi eğik (*oblique*) kuvvet uygulandığında yarı düzlemin içerisinde bulunan tüm gerilmelerin sıfır olduğu doğal çizgi (*neutral line*) oluşur (Şekil D.1). Eğer $\beta_{11} = \beta_{22}$ ise, bu çizgi kuvvetin uygulanma çizgisine diktir değilse kuvvetin uygulanma çizgisini dar (*acute*) ya da geniş (*obtuse*) bir açıyla keser.



Şekil D.1. p kuvvetinin uygulanmasının gösterimi.

Burada:

$$\beta_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{3j}}{C_{33}} \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad \text{D.15}$$

$A = (a_{ij})$, $(i, j = 1, \dots, n)$ sürtünmeden dolayı meydana gelen kare matristir. Bu matrisin elemanları ise malzemenin elastik özelliklerinden oluşmaktadır. Başka bir deyişle, 5.98. denklemde tanımlandığı gibi:

$$\theta = \arctan \frac{B}{A} > 0 \quad \text{D.16}$$

Gerilme tekilliğinin kuvvetleri olan α ve β sadece sürtünme kuvvetine ve FDM tabakasındaki Poisson oranına, ν , bağlıdır. Bu çalışmada Poisson oranı başlangıçta da söylendiği gibi sabit kabul edilmiştir ve dolayısı ile α ve β heterojenlik parametresi γ' dan bağımsızdır.

Erdoğan ve ark. (1973) tarafından verilen sabit sürtünme katsayılı yarı düzlemle belli bir açı yapan baskı yapan elastik problemde de anlatıldığı gibi fiziksel olarak silindire sabitlenmiş bir mil etrafında y yönünde dönmektedir (*spins*). Bu mil üzerinde aynı zamanda M torku altındadır. Silindiri dengede tutabilmek için $Q = \eta P$ kuvveti mile x yönünde uygulanmalıdır. Bu kuvvet ise yatak reaksiyonunun x bileşenidir. Xu ve ark., (2008) tarafından yapılan çalışma ve bu konunun belirgin olarak görüldüğü örnek uygulamalar olarak gösterilebilir.

EK-E Gauss Sayısal İntegral Alma Yöntemi

Gauss Sayısal İntegral Alma (*Sayısal İntegral Alma Yöntemi*) Yöntemi, $f(x_i)$ fonksiyonunun hesaplanacağı en uygun apsilerin x_i seçilmesi ile sayısal olarak integralin en iyi şekilde tahmin edilebilmesidir. Gauss Sayısal İntegral Alma Yönteminin temel teoremi, N noktalı Gauss Sayısal İntegral formülleri için en uygun apsiler x_i (abscissas) (a,b) aynı aralık (*interval*) ve ağırlık fonksiyonu $W(x)$ (*weighting function*) için ortogonal polinomunun $P_N(x)$ kökleridir. Gauss Quadrature (*Sayısal İntegral Alma Yöntemi*) en uygun yöntemdir çünkü $2m-1$ dereceye (*order*) kadar tüm polinomlara tam olarak uymaktadır (*fit*). Gauss Legendre Sayısal İntegral Alma Yöntemi (*Legendre-Gauss Sayısal İntegral Alma Yöntemi*, "the" *Gaussian Sayısal İntegral Alma Yöntemi* veya *Legendre Sayısal İntegral Alma Yöntemi*) ise $[-1,1]$ aralığında $W(x)=1$ ağırlık fonksiyonu ile n dereceli sayısal integralin kökleri Legendre Polinomları $P_n(x)$ ' dir. Ağırlık fonksiyonları için Abramowitz ve Stegun' a (1965) bakılabilir. Gauss Sayısal İntegral Alma yöntemi hem ağırlık katsayılarının seçiminde hem de fonksiyonların hesaplanacağı apsilerin yerinin seçiminde serbestlik sağladığı için önemlidir. "Polinom x bilinen fonksiyon $W(x)$ " integrandın sınıfı için integrali gerçek yapmak ağırlık ve köklerin seçimiyle ayarlanabilir. İstenilen integralden integrali alınabilen tekillikleri gidermek için $W(x)$ fonksiyonu için seçilebilir. $W(x)$ fonksiyonu ve N tamsayısı verilsin. Ağırlık w_i ve kökler x_i için aşağıdaki yaklaşım bulunur:

$$\int_a^b W(x) f(x) dx \approx \sum_{j=1}^N w_j f(x_j)$$

E.1.

Buradaki $f(x)$ integrali hesaplanacak gerçek polinomdur. Burada ortogonal polinomun tanımının verilmesi gerekmektedir. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu üzerinden f ve g fonksiyonlarının skalar çarpımı aşağıdaki gibi verilir:

$$\langle f | g \rangle \equiv \int_a^b W(x) f(x) g(x) dx$$

E.2.

Skalar çarpımın sonucu bir sayıdır, x' in bir fonksiyonu değildir. İki fonksiyonun çarpımı sıfır ise ortogonal (*orthogonal*) denir. Eğer bir fonksiyonun kendisi ile skalar çarpımı bir (*unity*) ise bu fonksiyon normalize edilmiş (*normalized*) denir. Eğer bir fonksiyon setinin tamamı birbirleri için ortogonal (*mutually orthogonal*) ise ve her birisi ayrı ayrı normalize edilmiş ise bu ortonormal set (*orthonormal set*) olarak tanımlanır.

Gauss integral Alma Yöntemleri temelde iki önemli aşamadan oluşur:

1. Ortogonal polinomların belirlenmesi. Eğer klasik ortogonal polinomlar kullanılacaksa bu aşama geçilir.
2. $p_N(x)$ in sıfırlarının belirlenmesi ve ilgili ağırlıklarının hesaplanması.

Daha detaylı bilgi ve program kodları için Press ve ark. (1996) sayfa 140-155 bakılabilir.

Aşağıdaki Fredholm integral denklemi göz önüne alınsın (Erdoğan ve ark., 1973) :

$$\int_a^b w(t)k(x,t)h(t) = f(x), \quad (a < x < b),$$

E.3.

Eğer denklem E.3.' ün kapalı form çözümü yoksa uygun seçilmiş x_i , ($i = 1, \dots, n$) için denklemin sol tarafındaki integralin hesaplanabilmesi için etkili sayısal çözüm Gauss Sayısal İntegral Alma Yönteminin kullanılması ile elde edilir. Gauss Sayısal İntegral Alma tekniğinin kullanılabilmesi için kernelin negatif aralıktaki değeri için bilinmeyen fonksiyon $h(t) = h(-t)$ olduğu kabul edilir (Arın ve Erdoğan, 1971). Sonuçta problem $h(t_j)$, ($j = 1, \dots, n$) bilinmeyenleri ile lineer denklem sistemine dönüşür. Dolayısı ile denklem aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\sum_{j=1}^n W_j k(x_i, t_j) h(t_j) + R_n(x_i) = f(x_i), \quad (a < x_i < b, i = 1, \dots, n),$$

E.4.

W_j , ($j = 1, \dots, n$) Ağırlıklardır ve R_n ise kalıntı terimidir. Pratikte n yeterince büyük seçilirse, R_n istenildiği kadar küçük yapılabilir ve dolayısı ile ihmal edilebilir.

t_j ($j = 1, \dots, n$) konumları özel Gauss Sayısal İntegral Alma Yöntemine (Gauss Sayısal İntegral Alma Yöntemi formüllerinin listeleri için (Abramowitz ve ark., 1965) bakınız.) ait ortogonal polinomlarının köklerine karşılık gelmektedir.

$$A(x) \phi(x) + \frac{1}{\pi} \int_a^b B(t) \phi(t) \frac{dt}{t-x} + \int_a^b K(x,t) \phi(t) dt = f(x), \quad a < x < b$$

E.5.

$f = (f_i)$, $(i = 1, \dots, N)$ bilinmeyen fonksiyonlardan oluşan vektör olan tanımlanır. $[-1, 1]$ aralığında H-sürekli fonksiyonlardır. f ve K bilinen fonksiyonlardır. ψ_i ve f_i fonksiyonlarının tanımlandığı (a, b) aralığı $(-1, 1)$ olarak normalize edilir. Dolayısı ile integral denkleminin genel çözümü aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\phi(t) = w(t)g(t), \quad -1 < t < 1 \quad \mathbf{E.6.}$$

Burada $g(t)$ fonksiyonu, $-1 < t < 1$ kapalı aralığında sınırlı, sürekli bir fonksiyondur ve her zaman sonsuz bir seri ile gösterilir. Buradan anlaşılmaktadır ki eğer tekil integral denkleminin denk Gauss Sayısal İntegral Alma Yöntemi varsa denklem **E.6.** denklem **E.5.**' de yerine konulur:

$$A(x)g(x)w(x) + \frac{1}{\pi} \int_a^b B(t)g(t) \frac{w(t)dt}{t-x} + \int_a^b K(x,t)g(t)w(t)dt = f(x)$$

E.7.

Bu denklem $g(t_i)$, $i = 1, \dots, n$ ile lineer denklem sistemine dönüşür. Burada ortogonal polinomlar o şekilde seçilmelidir ki temel fonksiyon $w(t)$ polinomun ağırlık fonksiyonu olsun:

$$w(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta, \quad (-1 < (\alpha, \beta) < 1, |t| < 1), \quad \mathbf{E.8.}$$

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ayşegül KÜÇÜKSUCU
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Konya/1973
Faks : -
e-mail : abkucuksucu@gmail.com.tr

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise :	Erbil Koru Lisesi	1991
Üniversite :	ODTÜ	1997
Yüksek Lisans :	Selçuk Üniversitesi	2002
Doktora :	Selçuk Üniversitesi	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
Haziran 2003-Haziran 2004	Altyapı Ltd	Kontrol ve Proje Mühendisi
Ekim 1997-Ekim 1999	MOLİNO A.Ş.	Kalite Sistemi Yöneticiliği

UZMANLIK ALANI

Temas mekaniği, Kompozit Malzemeler, Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler, Bilim tarihi.

YABANCI DİLLER

İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

Patent Vekilliği, 2005.

YAYINLAR

Ahmet AVCI, Ayşegül BULU and Ahmet YAPICI, 2006, Axisymmetric smooth contact for an elastic isotropic infinite hollow cylinder compressed by an outer rigid ring with circular profile, *Acta Mechanica Sinica*, 22, pp 46-53 (Yüksek Lisans tezinden hazırlanmıştır).