

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuğba SÖKÜT

**DEĞİŞEN VARYANSLI VE OTOKORELASYONLU HATAYA SAHİP
LİNEER REGRESYON MODELLERİNDE HATA YAPILARININ VE YANLI
TAHMİN EDİCİLERİN İNCELENMESİ**

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2011

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DEĞİŞEN VARYANSLI VE OTOKORELASYONLU HATAYA SAHİP
LİNEER REGRESYON MODELLERİNDE HATA YAPILARININ VE
YANLI TAHMİN EDİCİLERİN İNCELENMESİ**

Tuğba SÖKÜT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 06/01/2011 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından
Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

.....
Doç. Dr. Mahmude Revan ÖZKALE
DANIŞMAN

.....
Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
ÜYE

.....
Yrd. Doç. Dr. Ebru ÖZGÜR GÜLER
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. İlhami YEĞİNGİL
Enstitü Müdürü

- **Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**DEĞİŞEN VARYANSLI VE OTOKORELASYONLU HATAYA SAHİP
LİNEER REGRESYON MODELLERİNDE HATA YAPILARININ VE
YANLI TAHMİN EDİCİLERİN İNCELENMESİ**

Tuğba SÖKÜT

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**

Danışman :Doç. Dr. Mahmude Revan ÖZKALE
Yıl: 2011, Pages:118

Jüri : Doç. Dr. Mahmude Revan ÖZKALE
: Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
: Yrd. Doç. Dr. Ebru ÖZGÜR GÜLER

Çoklu lineer regresyon modelinde hatalara ve açıklayıcı değişkenlere ilişkin varsayımlar sağlanmadığı zaman en küçük kareler uygun bir tahmin edici olmamaktadır. Bu çalışmada, hatalara ilişkin varsayımların sağlanmamasına neden olan değişen varyans ve otokorelasyon tanıtılmış, bunların belirlenmesine ilişkin testler verilmiş ve hata yapıları incelenmiştir. Açıklayıcı değişkenlerin bağımsızlığının ihlali olarak adlandırılan çoklu iç ilişki problemi değişen varyans / otokorelasyon altında incelenmiştir. Hem değişen varyans / otokorelasyon hemde çoklu ilişki problemleri aynı anda meydana geldiğinde kullanabilecek genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin ediciye alternatif tahmin ediciler tanıtılmıştır ve bu tahmin edicilerin performansları hata kareler ortalaması ve yanlılıkları göz önünde bulundurularak değerlendirilmiştir. Bu amaç için nümerik bir örnek ve Monte Carlo yöntemi ile simülasyon çalışmaları Matlab programı yardımıyla yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Değişen Varyans, Otokorelasyon, Çoklu İç İlişki, Yanlı Tahmin Ediciler

ABSTRACT

MSc THESIS

INVESTIGATING THE STRUCTURE OF THE ERROR TERMS AND BIASED ESTIMATORS IN THE LINEAR REGRESSION MODELS WITH HETEROSCEDASTIC AND AUTOCORRELATED ERRORS
--

Tuğba SÖKÜT

**ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF STATISTICS**

Supervisor : Assoc. Dr. Mahmude Revan ÖZKALE
Year: 2011, Pages: 118
Jury : Assoc. Dr. Mahmude Revan ÖZKALE
: Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
: Asst. Prof. Dr. Ebru ÖZGÜR GÜLER

When the assumptions on the errors and explanatory variables in the linear regression model are not satisfied ordinary least squares estimator is not a suitable estimator. In this study heteroskedasticity and autocorrelation which violate these assumptions about the errors are introduced, test are given for determining them and the error structure are examined. Multicollinearity problem see when the explanatory variables are not independent is considered under the heteroskedasticity and autocorrelation. When both heteroscedasticity /autocorrelation and multicollinearity come true together, alternative estimators to generalized least squares estimator are introduced and the performance of these estimators are considered under the mean squared error and the bias criteria. These theoretical results are illustrated in a numerical example and a Monte Carlo simulations study by using Matlab program.

Key Words: Heteroscedasticity, Autocorrelation, Multicollinearity,
Biased Estimators

TEŞEKKÜR

Çalışmamın başından itibaren değerli destek ve yardımlarını esirgemeyen, ihtiyaç duyduğum her anda bilgi birikimini paylaşmaktan sakınmayan danışman hocam Doç. Dr. Mahmude Revan ÖZKALE' ye teşekkürü bir borç bilirim.

İstatistik alt yapımın oluşmasında emeği geçen Çukurova Üniversitesi ve Sinop Üniversitesi İstatistik Bölümü öğretim üyelerine teşekkürlerimi sunarım.

Olumlu eleştirileri ile çalışmamı yönlendiren Çukurova Üniversitesi Ekonometri Bölümü Öğretim Görevlisi Hüseyin GÜLER'e teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi destek sağlayarak, aldığım her kararın arkasında olan ve kendileri ile gurur duyduğum sevgili aileme ve sevgili arkadaşım Erhan Açar'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER	IV
TABLolar DİZİNİ	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VIII
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	IX
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖZDEŞ KOVARYANS MATRİSLİ LİNEER İSTATİSTİKSEL MODEL	3
2.1. Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi.....	3
2.2. EKK Yönteminin Varsayımları.....	4
3. ÖZDEŞ KOVARYANS MATRİSLİ LİNEER İSTATİSTİKSEL MODELDE ÇOKLU İÇ İLİŞKİ	7
3.1. Çoklu İç İlişkinin Tanımlanması.....	7
3.2. Çoklu İç İlişkinin Belirlenmesi	9
3.3. Sıradan En Küçük Kareler Tahmin Edicisine Alternatif Tahmin Ediciler.....	11
3.3.1. Ridge Tahmin Edici	11
3.3.2. Temel Bileşenler Tahmin Edici.....	14
3.3.3. Jackknifed Ridge Tahmin Edici	16
3.3.4. Shrunken Tahmin Edici.....	17
3.3.5. İterasyon Tahmin Edici	18
4. SKALER ÖZDEŞ OLMAYAN KOVARYANS MATRİSLİ GENEL LİNEER İSTATİSTİKSEL MODEL	21

4.1. İstatistiksel Model	21
4.2. En Küçük Kareler Tahmin Edicisinin Problemleri	22
4.3. Dönüştürülmüş Model.....	23
4.4. Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Tahmin Edici	24
4.5. σ^2 'nin Yansız Tahmin Edicisi.....	26
4.6. Normal Lineer İstatistiksel Model.....	28
4.7. $\tilde{\beta}$ ve $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_G}^2$ 'nin Örnekleme Dağılımları.....	29
4.8. β ve σ^2 'nin Aralık Tahminleri	30
4.9. Hipotez Testi	31
5. DEĞİŞEN VARYANS.....	33
5.1. Değişen Varyansın Tanımı.....	33
5.2. Değişen Varyansın Nedenleri.....	35
5.3. Değişen Varyansın Yol Açtığı Sorunlar.....	36
5.4. Değişen Varyansın Belirlenmesi	37
5.4.1. Sistemati Olmayan Yöntem	37
5.4.2. Sistemati Testler.....	38
5.4.2.1. Goldfeld-Quant Testi	38
5.4.2.2. Breusch-Pagan Testi	40
5.4.2.3. Glejser Testi.....	41
5.4.2.4. Park Testi	42
5.4.2.5. White Genel Değişen Varyans Testi.....	43
5.5. Değişen Varyans Altında Kovaryans Yapısı ve GEKK Tahmin edicisi.....	43
6. OTOKORELASYON.....	47
6.1. Otokorelasyonun Tanımı.....	47

6.2. Birinci Dereceden Otoregresif Hatalar	48
6.3. Birinci Dereceden Hareketli Ortalamalı Hatalar	52
6.4. Otokorelasyon Katsayısının Tahmini	53
6.5. Birinci Dereceden Otoregresif Hataların Belirlenmesi	54
6.5.1. Asimtotik Bir Test	54
6.5.2. Durbin-Watson Testi	55
6.5.3. Durbin h Testi	60
6.6. Otokorelasyon Altında Hata Kovaryans Yapısı	60
7. GEKK'YE ALTERNATİF OLARAK ÖNERİLEN YANLI TAHMİN EDİCİLER	63
7.1. Ridge Tahmin Edici	64
7.2. Temel Bileşenler Tahmin Edici	65
7.3. Jackknifed Ridge Tahmin Edici	67
7.4. Shrunken Tahmin Edici	68
7.5. İterasyon Tahmin Edici	68
7.6. Alternatif Tahmin Edicilerin Performanslarının Karşılaştırılması	69
8. EKONOMETRİK BİR UYGULAMA	77
9. MONTE CARLO SİMÜLASYON UYGULAMASI	95
10. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	99
KAYNAKLAR	101
ÖZGEÇMİŞ	105
EKLER	107

TABLolar DİZİNİ**SAYFA**

Tablo 8.1. Geçmiş veri için 60 haftalık fiyat ve şampuan satışlarının verisi	78
Tablo 8.2. Mevcut veri için 15 haftalık fiyatlar ve şampuan satışlarının verisi.....	79
Tablo 8.3. Geçmiş veri rezidüleri için tahmin edilen otokorelasyonlar	79
Tablo 8.4. Mevcut veri için alternatif tahmin edicilerin Toeplitz formunda V matrisi altında $k_{HKB} = 0.1038$, $k_{LW} = 0.1335$, $c_1 = 0.25$, $c_2 = 0.50$, $c_3 = 0.75$ ve $c_4 = 0.90$ ile tahmin edilen parametre katsayıları ve skaler hata kareler ortalamalarının karşılaştırılması	89
Tablo 8.5. Mevcut veri için alternatif tahmin edicilerin AR(1) yapısında V matrisi altında $k_{HKB} = 0.0535$, $k_{LW} = 0.1273$, $c_1 = 0.25$, $c_2 = 0.50$, $c_3 = 0.75$ ve $c_4 = 0.90$ ile tahmin edilen parametre katsayıları ve skaler hata kareler ortalamalarının karşılaştırılması	92

ŞEKİLLER DİZİNİ

SAYFA

Şekil 5.1. Tasarruf ve gelir örneği için hataların sabit varyanslı olması durumu	34
Şekil 5.2. Tasarruf ve gelir örneği için hataların değişen varyanslı olması durumu..	34
Şekil 5.3. Değişen varyansı belirlemek için rezidülerin karesi ile açıklayıcı değişken değerlerinin saçılımı.....	37
Şekil 5.4. Değişen varyansı belirlemek için rezidülerin karesi ile yanıt değişken değerlerinin saçılımı.....	38
Şekil 6.1. DW testi için karar şeması	58
Şekil 8.1. Mevcut veri için otokorelasyon grafiği.....	80
Şekil 8.2. Mevcut veri için kısmi otokorelasyon grafiği.....	80
Şekil 8.3. Toeplitz formunda V matrisi için k 'ya karşı tahmin edicilerin SMSE değerleri	90
Şekil 8.4. Toeplitz formunda V matrisi için c 'ye karşı Shrunken tahmin edicinin ve GEKK tahmin edicinin SMSE değerleri.....	91
Şekil 8.5. AR(1) yapısında V matrisi için k 'ya karşı tahmin edicilerin	93
Şekil 8.6. AR(1) yapısında V matrisi için c 'ye karşı Shrunken tahmin edicinin ve GEKK tahmin edicinin SMSE değerleri.....	93

SİMGELER VE KISALTMALAR

EKK	: En Küçük Kareler
GEKK	: Genelleştirilmiş En Küçük Kareler
MSE	: Hata Kareler Ortalaması (Mean Squared Error)
SMSE	: Skaler Hata Kareler Ortalaması (Scaler Mean Squared Error)
VIF	: Varyans Şişirme Faktörü (Variance Inflation Factor)
BLUE	: En İyi Yansız Tahmin Edici (Best Linear Unbiased Estimator)
DW	: Durbin- Watson Testi

1. GİRİŞ

Regresyon, değişkenler arasındaki ilişki ve bağıntıların incelenmesini kapsayan bir kavram olarak bilinmektedir. İlk kez, 1897 yılında Galton'un kalıtım kuramı ile ilgili çalışmalarında adı geçen bu kavram günümüzde birbirinden farklı birçok alanda kullanılabilmektedir. Regresyon analizi, değişkenler arasındaki bağıntının en iyi şekilde açıklandığı bir modele dayalıdır. Çok sayıda faktöre bağlı olarak değişim gösteren sosyal, psikolojik ve ekonomik olayların gerisindeki sebep-sonuç ilişkisini ortaya çıkarabilmek için kullanılan istatistiksel yaklaşımlardan biri, çoklu regresyon analizidir. Bu yaklaşımda, bir veya daha çok açıklayıcı değişken bir yanıt değişken ile birlikte seçilerek, yanıt değişkenin gerçek ölçümleri ile açıklayıcı değişkenler yardımıyla elde edilen tahmini ölçümleri arasındaki mesafeyi minimum kılan en küçük kareler yöntemi (EKK) ile regresyon katsayıları tahmin edilir. Örneklemden elde edilen bu regresyon denklemi ile değişkenler arasında var olan sebep-sonuç ilişkisini belirlemenin yanında geleceğin tahmini de daha güvenli bir şekilde yapılabilir. EKK tekniği, regresyon analizinde sabit varyans (homoscedasticity) varsayımının sağlanması durumunda kullanılması uygun olan ve değişkenler arasındaki fonksiyonel ilişkiyi modellemede en çok kullanılan yöntemlerden biridir, ancak uygulamalarda hataların değişen varyanslı (heteroscedasticity) olması durumu ile karşılaşılabilir.

Çoklu doğrusal regresyon modelinde değişen varyans problemi olduğunda genelleştirilmiş en küçük kareler tekniği (GEKK), EKK tekniğine alternatif olarak geliştirilmiştir. Değişen varyans durumunda EKK tahminleri yansız olmakta, ancak varyans ve kovaryans tahminleri etkinliğini (minimum varyanslı) yitirdiğinden istatistiksel hipotez testleri geçerliliğini kaybetmektedir. Ayrıca belirli bir anlamlılık düzeyindeki tahmin ve öngörü aralıkları genişlemektedir. Benzer sorunlar hataların ilişkisiz varsayımının ihlaline dayanan ve otokorelasyon olarak adlandırılan problemde de ortaya çıkmaktadır.

Çoklu regresyon analizinde karşılaşılan bir diğer sorun ise açıklayıcı değişkenlere ilişkin bağımsızlık varsayımının ihlalidir. Çoklu iç ilişki olarak

adlandırılan bu sorunun varlığında, açıklayıcı değişkenlerin yanıt değişken üzerindeki kısmi ilişkilerini yorumlamakta güçlük çekilir.

Bu çalışmada değişen varyans/otokorelasyon ve çoklu iç ilişki problemlerinin aynı anda meydana gelmesi durumları ile ilgilenilecektir. Çalışmada, bu doğrultuda önerilen tahmin edicilerin matris hata kareler ortalaması kriterine göre performansları dikkate alınarak karşılaştırmalara yer verilecektir. Değişen varyans ve otokorelasyonlu hata modeli için alternatif tahmin edicilerin performansını simülasyon üzerinde inceleyen bazı yazarlara paralel olarak çalışmada bir ekonometrik uygulamaya ve bir Monte Carlo simülasyon çalışmasına yer verilecektir.

2. ÖZDEŞ KOVARYANS MATRİSLİ LİNEER İSTATİSTİKSEL MODEL

$$y = X\beta + \varepsilon \quad (2.1)$$

çoklu lineer regresyon modelinin olduğunu varsayalım. Burada y , $n \times 1$ tipinde yanıt değişkenlerin vektörü, X , $n \times p$ tipinde stokastik olmayan açıklayıcı değişkenlerin gözlenen matrisi, β , $p \times 1$ tipinde bilinmeyen regresyon parametrelerinin vektörü, ε , $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ olan $n \times 1$ tipinde rasgele hataların vektörüdür.

2.1. Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi

(2.1) olarak verilen çoklu lineer regresyon modelinde regresyon parametrelerinin tahminleri EKK yöntemi ile bulunur. Bilinmeyen parametre vektörü β 'nın EKK tahmin edicisi hata kareler toplamı minimum yapılarak bulunur. $\varepsilon = y - X\beta$ olmak üzere hata kareler toplamı;

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 &= \varepsilon' \varepsilon \\ &= (y - X\beta)'(y - X\beta) = (y' - \beta' X')(y - X\beta) \\ &= y'y - y'X\beta - \beta'X'y + \beta'X'X\beta \end{aligned}$$

olarak elde edilir. $\beta'X'y$ için $(\beta'X'y)' = y'X\beta$ 'dir. Buna göre hata kareler toplamı;

$$\varepsilon' \varepsilon = y'y - 2\beta'X'y + \beta'X'X\beta$$

olur. β 'nın tahmin edicisi $\varepsilon' \varepsilon$ 'nu minimum yapar. O halde

$$\frac{\partial(\varepsilon' \varepsilon)}{\partial \beta} = -2X'y + 2X'X\beta = 0$$

$$X'X\beta = X'y$$

normal denklemi elde edilir. Buradan β 'nın EKK tahmini edicisi

$$\hat{b} = (X'X)^{-1}X'y$$

olarak elde edilir. $\hat{b}$ 'nın ortalaması ve kovaryansı aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} E(\hat{b}) &= (X'X)^{-1}X'E(X\beta + \varepsilon) \\ &= \underbrace{(X'X)^{-1}X'X}_{I_p}\beta + 0 \\ &= \beta \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} Cov(\hat{b}) &= (X'X)^{-1}X'Cov(y)X(X'X)^{-1} \\ &= \sigma^2 \underbrace{(X'X)^{-1}X'X}_{I_p}(X'X)^{-1} \\ &= \sigma^2(X'X)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

EKK tahmin edicisi Gaus Markov teoremi gereğince $\hat{b} \sim N(0, \sigma^2(X'X)^{-1})$ ile en iyi lineer yansız tahmin edicidir (BLUE). Yani herhangi bir lineer yansız $\tilde{b}$ tahmin edicisi için

$$Var(\hat{b}_j) \leq Var(\tilde{b}_j), \quad j = 0, 1, \dots, p$$

eşitsizliği sağlanır.

2.2. EKK Yönteminin Varsayımları

EKK tekniğinin gerek değişkenler gerekse hata terimine ait bir takım varsayımları bulunmaktadır. Bunlar temel varsayımlar ve ek varsayımlar olarak iki grupta incelenebilir.

Temel varsayımlar,

- (i) X , $n \times p$ tipinde $p < n$ ile stokastik olmayan bir matristir.
- (ii) X matrisinin rankı p 'dir yani, tam kolon ranklıdır.

(iii) $n \times 1$ tipindeki y vektörünün elemanları gözlemlenebilen rasgele vektörlerdir.

(iv) $n \times 1$ tipindeki ε vektörünün elemanları gözlenemeyen rasgele değişkenlerdir öyle ki, $\sigma^2 > 0$ ile $E(\varepsilon) = 0$ ve $Cov(\varepsilon) = \sigma^2 I_n$ dir.

Ek varsayım,

(v) ε vektörü n değişkenli normal dağılır.

Temel varsayımlara ilaveten ek varsayım da sağlanıyorsa bu model “Klasik Lineer Regresyon Modeli” olarak adlandırılır (Groß, 2003).

3. ÖZDEŞ KOVARYANS MATRİSLİ LİNEER İSTATİSTİKSEL MODELDE ÇOKLU İÇ İLİŞKİ

3.1. Çoklu İç İlişkinin Tanımlanması

Çoklu iç ilişki, son yıllarda çoklu regresyon analizinde üzerinde durulan bir konudur. Bir ya da daha fazla açıklayıcı değişkenin diğer açıklayıcı değişkenlerin doğrusal veya doğrusala yakın bir kombinasyonu olması durumunu ifade eder. Çoklu lineer regresyon modelinde, genellikle açıklayıcı değişkenlerin bağımsız olduğu varsayılır, ancak uygulamada bu varsayımın ihlali söz konusu olabilir. Tam çoklu iç ilişki, yakın çoklu iç ilişki ve ortogonalite, çoklu iç ilişki konusunda oldukça sık karşılaşılan temel kavramlardır.

Tam çoklu iç ilişki, bir veya daha çok açıklayıcı değişkenin diğerlerinin doğrusal bir kombinasyonu olması durumunda ortaya çıkar. X , $n \times p$ tipinde stokastik olmayan açıklayıcı değişkenlerin gözlenen matrisi, X_i , bu matrisin i -nci sütununu göstermek üzere tam çoklu iç ilişki durumunda

$$\sum_{i=1}^p t_i X_i = 0 \quad (3.1)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde hepsi sıfır olmayan t_i , ($i=1,2,...,p$) sabitleri vardır. Bu durumda $X'X$ matrisinin rankı p 'den küçük ve $X'X$ 'in özdeğerlerinden en az biri sıfırdır.

Yakın çoklu iç ilişki X , $n \times p$ tipinde stokastik olmayan açıklayıcı değişkenlerin gözlenen matrisi, X_i , bu matrisin i -nci sütununu göstermek üzere

$$\sum_{i=1}^p t_i X_i \approx 0$$

yakınsamasını sağlayacak şekilde sıfırdan farklı en az bir t_i sabitinin var olması durumunu ifade eder.

Tam çoklu iç ilişki durumunda $X'X$ matrisi singüler olduğu için EKK tahmin edici kullanılamaz. Yakın çoklu iç ilişki durumunda ise $X'X$ matrisi singülere yakın olmakla birlikte tersi bulunabileceği için EKK yöntemi kullanılabilir, ancak $X'X$ matrisinin özdeğerlerinden en az biri sıfıra yakın olacağı için EKK tahminlerinin varyansı büyük olacaktır.

Ortogonallik, açıklayıcı değişkenler arasında hiçbir bağlantının olmadığını ifade eder. $X'X = I_p$ iken X matrisi ortogonal açıklayıcı değişkenleri içerir. Bu durumda $X'X$ matrisinin tüm özdeğerleri 1'e eşittir. En az bir özdeğer 1'den farklı bulunuyorsa, ortogonallik bozulur. En küçük özdeğerin 1'den küçük olması onun sıfıra yakın olduğunu göstermez. Yani ortogonal olmama çoklu iç ilişkinin varlığını göstermeyebilir, ancak çoklu iç ilişki durumu ortoganallığın bozulduğunu ifade eder (Vinod ve Ullah, 1981).

Çoklu iç ilişkinin pek çok nedeni olabilir (Judge ve ark., 1985; Montgomery ve ark., 2001). Bunlardan bazıları:

- 1) Uygulanan veri toplama metodu: Analizci (3.1) ile tanımlı bir bölgenin alt uzayından örneklem almış ise çoklu iç ilişki problemi ile karşılaşacaktır.
- 2) Modeldeki veya kitledeki zorunluluklar: Kitledeki zorunluluklar daha çok, açıklayıcı değişkenlerin kimyasal veya üretim proseslerinde ortaya çıkar. Bir kimyasal reaksiyonun gerçekleşmesi için belli içeriklerin sabit oranlarda olması durumu örnek olarak verilebilir.
- 3) Modelin belirlenmesi: X değişkenlerinin değişim aralığı küçük iken bir regresyon modeline polinom terimin eklenmesi çoklu iç ilişkiye neden olabilir.
- 4) Modelin aşırı tanımlanması (overdefined): Değişken sayısının gözlem sayısından büyük olduğu durumu tanımlar. Bu durum çoğu kez çoklu iç ilişkiye neden olur (Mason, Gunst ve Webster, 1975).

3.2. Çoklu İç İlişkinin Belirlenmesi

Var olan çoklu iç ilişkinin ortaya çıkarılmasına yönelik birkaç yöntem geliştirilmiştir. Bunlardan en sık kullanılan 4 yöntem aşağıda verilmektedir (Özkale, 2007).

1. Basit Korelasyon Katsayısı

Çoklu iç ilişkinin belirlenmesinde kullanılan en kolay yoldur. Standartlaştırılmış formda $X'X$ matrisinin köşegen dışı elemanları (r_{ij}) çoklu iç ilişkinin belirlenmesinde kullanılır. İki açıklayıcı değişken arasında çoklu iç ilişki varsa aralarındaki korelasyon katsayısı (r_{ij}) mutlak değerce 1'e yakın olacaktır. Ancak bu yöntemde iki açıklayıcı değişken arasındaki lineer ilişki incelenebilmektedir. Eğer ikiden fazla açıklayıcı değişken arasında bir ilişki varsa, bu ilişkinin basit korelasyon katsayılarına yansıtacağı konusunda kesin bir bilgi yoktur (Montgomery ve ark., 2001).

2. Varyans Şişirme Faktörü

$C = (X'X)^{-1}$ matrisinin köşegen elemanları çoklu iç ilişki hakkında bilgi verir. İlk olarak Farrar ve Glauber (1967) tarafından çoklu iç ilişkiyi belirlemek için kullanılmıştır. R_j^2 , X_j açıklayıcı değişkeninin diğer $p-1$ açıklayıcı değişkenler ile regresyonundan elde edilen çoklu belirleyicilik katsayısı olmak üzere, C matrisinin j -inci köşegen elemanı $C_{jj} = (1 - R_j^2)^{-1}$ şeklinde ifade edilir. Eğer X_j açıklayıcı değişkeni ile diğer açıklayıcı değişkenler arasında doğrusal bir ilişki yoksa R_j^2 çok küçük olacağından C_{jj} 1'e yaklaşacaktır. Aksi durumda R_j^2 1'e yakın değerler alacağından C_{jj} değeri çok büyük olacaktır. j -inci katsayısının varyansı $\sigma^2 C_{jj}$ olduğundan C_{jj} , açıklayıcı değişkenler arasındaki ilişkiden dolayı $\hat{\beta}_j$ 'nin varyansını artıran bir faktör olarak görüldüğünden Marquardt (1970) tarafından "Varyans Şişirme Faktörü (Variance Inflation Factor=VIF)" olarak adlandırılmıştır. Genelde 5 ve 10'dan büyük VIF değerleri, ilgili regresyon katsayısı tahmininin çoklu iç ilişkiden dolayı güvenli bir tahmin olmadığına bir göstergesi olarak kabul edilir.

Montgomery ve ark., (2001), 5 ve 10 değerinin araştırmacılar tarafından denemeler sonucu bulunan kesin değerler olmadıklarını belirtmiştir.

3. $X'X$ Matrisinin Özdeğerleri ve Koşul Sayısı

Çoklu iç ilişkinin belirlenmesinde $X'X$ matrisinin karakteristik yapısından faydalanılması çalışmalarda sıklıkla kullanılmaktadır. Çoklu iç ilişki problemini ciddi anlamda çalışan ilk araştırmacı Ragnar Frisch'dır. Frisch (1934) çoklu iç ilişkiyi özdeğerlerle ilişkilendirmiştir. $X'X$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ve özvektörleri $t_1, t_2, \dots, t_p$ olmak üzere, çoklu iç ilişki durumunda en az bir özdeğer

sıfıra çok yakındır ve en az bir özvektör $\sum_{i=1}^p t_{ij} X_i = 0$ eşitliğini sağlar. Burada t_{ij} , j-

inci özvektörün i-inci elemanını ve X_i , X matrisinin i-nci sütununu göstermektedir.

Özdeğerlerin tek tek incelenmesi pek fazla anlam taşımamaktadır. Birçok istatistikçi özdeğerlerin birbirleri ile kıyaslanması yoluna giderek çoklu iç ilişkinin varlığını ve derecesini belirlemeye çalışmaktadır. Montgomery ve ark., (2001) koşul sayısını en

büyük özdeğerin en küçük özdeğere oranı olarak tanımlamışlardır: $K = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$. K ,

100'den küçükse çok ciddi boyutta çoklu iç ilişki problemi olmadığı, 100-1000 arasında ise kuvvetli çoklu iç ilişki olduğu, 1000'den büyükse veri içerisinde birden fazla çoklu iç ilişki problemi olduğu kabul edilmektedir. Özdeğerlerin toplamı da çoklu iç ilişki hakkında bilgi verebilmektedir. Özdeğerlerin toplamı ne kadar büyükse çoklu iç ilişkinin düzeyi o derece yüksek kabul edilir (Pagel ve Lunneborg, 1985).

4. Diğer tanılama (Diagnostics) metotları

Belirtilen tekniklerin yanı sıra çoklu iç ilişki pek çok yöntemle belirlenebilir. $X'X$ matrisinin determinantı çoklu iç ilişkinin göstergesi olarak kullanılabilir. Standartlaştırılmış formda $0 \leq |X'X| \leq 1$ 'dir. $|X'X| = 1$ ise açıklayıcı değişkenler ortogonaldır aksine $|X'X| = 0$ iken tam çoklu iç ilişki vardır. $|X'X|$ sıfıra yaklaştıkça çoklu iç ilişkinin şiddeti artacaktır (Farrar ve Glauber, 1967). Bu gösterge kolayca kullanılabilir olmasına rağmen çoklu iç ilişkinin kaynağı konusunda herhangi bir bilgi vermez.

3.3. Sıradan En Küçük Kareler Tahmin Edicisine Alternatif Tahmin Ediciler

Çoklu iç ilişkinin var olması durumunda uygulanan EKK yöntemi ile parametre tahminlerinin standart hataları büyümekte ve hipotez testlerinde çelişkili sonuçlar vermektedir. Bu problemi ortadan kaldırmak için önerilen tahmin prosedürleri yanlış tahmin edicilerin ortaya çıkmasına ve bunların incelenmesine neden olmuştur. Yanlış tahmin yöntemlerinin varsayımları EKK varsayımlarıyla aynıdır. Ancak yanlış tahmin yöntemlerinde güven aralıkları hesaplanmadığından normallik varsayımı yapılmamaktadır (Rawlings, 1998).

Bu bölümde yanlış regresyon yöntemlerinden sırasıyla ridge tahmin edici, temel bileşenler tahmin edici, jackknifed ridge tahmin edici, shrunken tahmin edici ve iterasyon tahmin edici incelenecektir.

3.3.1. Ridge Tahmin Edici

Ridge regresyon $X'X$ matrisinin kötü koşullarından dolayı köşegen elemanlarına sabit bir k ($k \geq 0$) ekleyerek iyileştirmeyi amaçlayan bir yöntemdir. $X'X$ matrisinin köşegen elemanlarına k sabitinin eklenmesindeki amaç koşul sayısını önemli ölçüde küçültmektir. Buna göre Hoerl ve Kennard'ın (1970) önerdiği ridge tahmin edici,

$$\hat{b}_r = (X'X + kI)^{-1} X'y, \quad k \geq 0$$

dir. $X'y = X'X\hat{b}$ olmasından dolayı;

$$\hat{b}_r = Z_k \hat{b}, \quad Z_k = (X'X + kI)^{-1} X'X$$

ridge tahmin edicisi EKK tahmin edicisi cinsinden yazılabilir. EKK tahmin edicisi $\hat{b}$ yansız olduğundan dolayı açıkça görülüyor ki ridge tahmin edicisi $\hat{b}_r$ yanlış bir tahmin edicidir. Ridge tahmin edicinin yanlışlığı,

$$\begin{aligned}
 Bias(\hat{b}_r) &= E(\hat{b}_r) - \beta \\
 &= (X'X + kI)^{-1} X'X\beta - \beta \\
 &= [(X'X + kI)^{-1} X'X - I_p]\beta \\
 &= (X'X + kI)^{-1} [X'X - (X'X + kI)]\beta \\
 &= -k(X'X + kI)^{-1}\beta
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Ridge tahmin edicinin kovaryans matrisi;

$$Cov(\hat{b}_r) = (X'X + kI)^{-1} X' Cov(y) X (X'X + kI)^{-1} \quad (3.2)$$

$Cov(y) = \sigma^2 I_n$ olduğundan dolayı (3.2) eşitliği,

$$Cov(\hat{b}_r) = \sigma^2 (X'X + kI)^{-1} X' X (X'X + kI)^{-1}$$

olarak yazılabilir. O halde ridge tahmin edicinin hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned}
 MSE(\hat{b}_r, \beta) &= Cov(\hat{b}_r) + Bias(\hat{b}_r) Bias(\hat{b}_r)' \\
 &= \sigma^2 (X'X + kI)^{-1} X' X (X'X + kI)^{-1} \\
 &\quad + k^2 (X'X + kI)^{-1} \beta \beta' (X'X + kI)^{-1}
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, $X'X$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere skaler hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned}
 sMSE(\hat{b}_r, \beta) &= trace[MSE(\hat{b}_r, \beta)] \\
 &= \sum_{i=1}^p \frac{\sigma^2 \lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} + k^2 \beta' (X'X + kI)^{-2} \beta
 \end{aligned}$$

olur. Buradaki birinci terim $\hat{b}_r$ vektöründeki parametrelerin varyansları toplamı, ikinci terim ise yanlılığın karesidir. k 'ya bağlı olarak, varyans-kovaryans terimi k 'nın azalan bir fonksiyonu, yanlılık terimi ise k 'nın artan bir fonksiyonudur. Böylece k artarken gerçek parametreden sapmalar artacak ancak, tahmin edicinin varyansı azalacaktır. Buna göre ridge regresyonun kullanılmasındaki amaç, varyanstaki azalışın yanlılıktaki artıştan daha büyük olmasını sağlayan k yanlılık parametresinin seçimidir. k 'nın stokastik olmayan seçimine ilişkin 4 yöntem aşağıda verilmiştir.

1. Ridge Trace

Ridge trace metodu k 'nın seçimi için Hoerl ve Kennard (1970) tarafından önerilmiştir. Ridge trace k ya karşı $\hat{b}_r$ 'nin elemanlarının grafiksel gösterimidir. Bu grafiksel gösterimde dikkat edilmesi gereken bir konu, karışıklık oluşturmamak için 10'dan fazla regresyon katsayısının grafiksel gösterime dâhil edilmemesidir (Marquardt ve Snee, 1975). k arttıkça tahminler küçülür ve belli bir k değerinden sonra durağan (stable) hale gelirler. $\hat{b}_r$ 'nin durağan olduğu en küçük k değeri uygun bir değer olarak alınır. Hoerl ve Kennard (1970) $0 \leq k \leq 1$ aralığını önermişlerdir. Ridge trace'in en olumlu yanı, uygulamaya yönelik ve gözlenen veriye dayalı oluşudur (Myers, 1986). Tahminlerin durağanlaştığı aralıklarda k 'nın seçimi araştırmacıya bırakıldığından dolayı bu durum bir dezavantaj olarak düşünülebilir. Bu yüzden keyfi bir seçim yapmak yerine bir formülasyon oluşturma yoluna gidilmektedir.

2. Hoerl ve Kennard 'ın (1970) önerdiği yanlılık parametresi

Hoerl ve Kennard (1970), ridge tahmin edicinin EKK'nın hata kareler ortalamasından daha küçük hata kareler ortalamasını sağlayacak ridge tahmin edici için yanlılık parametresini $\hat{k}_{HK} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\alpha_{\max}^2}$ olarak önermişlerdir. Burada $\alpha_{\max}$ kanonik formda regresyon katsayısının tahmininin maksimum değeridir. Eğer σ^2 ve α biliniyorsa $\hat{k}_{HK}$ EKK'dan daha küçük MSE verecektir (Kibria, 2003).

3. Hoerl, Kennard ve Baldwin'in (1975) önerdiği yanlılık parametresi

Hoerl, Kennard ve Baldwin (1975), $\hat{k}_i = \frac{\sigma^2}{\alpha_i^2}$ 'nin (α_i : kanonik formda olan α regresyon parametresinin i-nci elemanını ifade etmektedir) harmonik ortalamasını olarak farklı bir tahmin edici önermişlerdir: $\hat{k}_{HKB} = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\hat{b}'\hat{b}}$. Burada $\hat{b}, \beta$ 'nin EKK tahmin edicisidir.

4. Lawless ve Wang'ın (1976) önerdiği yanlılık parametresi

Lawless ve Wang (1976), Bayesian yaklaşımla yanlılık parametresinin tahminini $\hat{k}_{LW} = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\hat{b}'X'X\hat{b}}$ olarak önermişlerdir. Burada $\hat{b}$, β 'nin EKK tahmin edicisidir.

3.3.2. Temel Bileşenler Tahmin Edici

Regresyon katsayılarının yanlı tahmin edicileri temel bileşenler regresyon olarak bilinen bir prosedürü kullanarak elde edilebilir. Temel bileşenler tahmin edici kısıtlı en küçük kareler tahmin edicisinin çoklu iç ilişkinin var olduğu durumlarda kullanılan özel bir halidir. Parametre vektörüne uygun kısıtlar koyarak EKK tahmin edicisinin varyansının büyük olduğu durumlarda yeni bir tahmin ediciyi elde etmeyi amaçlar. Bunun için $X'X$ matrisinin spektral ayrışımı göz önüne alınır.

$$\begin{aligned} X'X &= U\Lambda U' \\ &= (U_1, U_2) \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1' \\ U_2' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Burada Λ_1 , ana köşegen elemanları $X'X$ matrisinin $r \leq p$ büyük özdeğerlerine karşılık gelen $r \times r$ tipinde köşegen matris ve Λ_2 , ana köşegen elemanları $X'X$ matrisinde geri kalan $p-r$ özdeğerlerine karşılık gelen $(p-r) \times (p-r)$ tipinde matristir. $p \times p$ tipindeki $U = (U_1, U_2)$ matrisi U matrisinin ilk r sütununu içeren $U_1 = (u_1, \dots, u_r)$ ve U matrisinin geri kalan $p-r$ sütununu içeren $U_2 = (u_{r+1}, \dots, u_p)$ ile ortogonal bir matristir. Öyle ki, $U_1'U_1 = I_r$, $U_2'U_2 = I_{p-r}$, $U_1'U_2 = 0$, $U_1U_1' + U_2U_2' = I_p$ ve $(X'X)^{-1} = U_1\Lambda_1^{-1}U_1' + U_2\Lambda_2^{-1}U_2'$ eşitlikleri sağlanır.

(2.1) modeli altında Marquardt'ın (1970) önerdiği β 'nin temel bileşenler tahmin edicisi,

$$\hat{b}^{(r)} = U_1(U_1'X'XU_1)^{-1}U_1'X'y \quad (3.3)$$

olarak yazılır. (3.3) eşitliğini $(U_1'X'XU_1) = \Lambda_1$ 'i kullanarak düzenlersek,

$$\hat{b}^{(r)} = U_1 \Lambda_1^{-1} U_1' X' y$$

olur. (2.1) modeli altında temel bileşenler tahmin edicinin yanlılığı,

$$\begin{aligned} Bias(\hat{b}^{(r)}) &= E(\hat{b}^{(r)}) - \beta \\ &= (U_1 U_1' - I_r) \beta \\ &= -U_2 U_2' \beta \end{aligned}$$

ve kovaryans matrisi,

$$\begin{aligned} Cov(\hat{b}^{(r)}) &= Cov[U_1 \Lambda_1^{-1} U_1' X' y] \\ &= U_1 \Lambda_1^{-1} U_1' X' Cov(y) X U_1 \Lambda_1^{-1} U_1' \\ &= \sigma^2 U_1 \Lambda_1^{-1} \underbrace{U_1' X' X U_1}_{\Lambda_1} \Lambda_1^{-1} U_1' \\ &= \sigma^2 U_1 \Lambda_1^{-1} U_1' \end{aligned}$$

olarak elde edilir. O halde temel bileşenler tahmin edicinin hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned} MSE(\hat{b}^{(r)}, \beta) &= Cov(\hat{b}^{(r)}) + Bias(\hat{b}^{(r)}) Bias(\hat{b}^{(r)})' \\ &= \sigma^2 U_1 \Lambda_1^{-1} U_1' + (U_1 U_1' - I) \beta \beta' (U_1 U_1' - I) \end{aligned}$$

$U_1 U_1' - I = -U_2 U_2'$ olduğundan dolayı

$$MSE(\hat{b}^{(r)}, \beta) = \sigma^2 U_1 \Lambda_1^{-1} U_1' + U_2 U_2' \beta \beta' U_2 U_2'$$

olarak elde edilir.

Gunst ve Mason (1977) tarafından yapılan simülasyon çalışmasında, çoklu iç ilişki olduğu zaman temel bileşenler tahmin edicinin EKK'dan daha iyi sonuç verdiği gözlenmiştir. Gunst ve Mason (1977), aynı zamanda temel bileşenlerin diğer bir avantajı olarak kesin dağılım teorisi ve değişken seçim prosedürlerinin mevcut olduğunun altını çizmişlerdir.

3.3.3. Jackknifed Ridge Tahmin Edici

$X'X$ matrisinin özdeğerlerinin köşegen matrisi $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ ve özvektör matrisi T olmak üzere $(T'X'XT = \Lambda, T'T = TT' = I)$ (2.1) modelinin kanonik formu tekil değer ayrışımı kullanılarak

$$y = Z\gamma + \varepsilon$$

şeklinde yazılabilir (Vinod ve Ullah, 1981). Burada $Z = XT$, $\gamma = T'\beta$ dir.

γ 'nın EKK tahmin edicisi

$$\hat{\gamma} = (Z'Z)^{-1}Z'y = \Lambda^{-1}Z'y \quad (3.4)$$

olur. (3.4) eşitliği $\gamma = T'\beta$ ve $T'T = I$ olduğundan dolayı

$$\hat{\beta} = T\hat{\gamma}$$

olarak yazılabilir. Singh ve ark., (1986) jackknifed ridge tahmin ediciyi, ridge tahmin edicinin lineer dönüşümü olarak

$$\hat{\gamma}^{(J)} = [I + k(Z'Z + kI)^{-1}] \hat{\gamma}_r \quad (3.5)$$

şeklinde önermişlerdir. $\hat{\gamma}_r$ kanonik formda γ 'nın ridge tahmin edicisi olmak üzere,

$\hat{\gamma}_r$ 'yi $\hat{\gamma}_r = [I - k(Z'Z + kI)^{-1}] \hat{\gamma}$ şeklinde EKK tahmin edicisinin lineer dönüşümü halinde yazılırsa (3.5) eşitliği,

$$\hat{\gamma}^{(J)} = [I - k^2(Z'Z + kI)^{-2}] \hat{\gamma} \quad (3.6)$$

olarak yazılabilir. (3.6) eşitliği jackknifed ridge tahmin edicinin kapalı formu olarak görülebilir. $\gamma = T'\beta$ ve $Z'Z = T'X'XT$ olduğundan (2.1) modeli için β 'nın jackknifed ridge tahmin edici,

$$\hat{b}^{(J)} = T\hat{\gamma}^{(J)} = [I - k^2(X'X + kI)^{-2}] \hat{b}$$

olur. Burada $\hat{b}$, EKK tahmin edicisidir.

(2.1) modeli altında jackknifed ridge tahmin edicinin yanlılığı,

$$\begin{aligned} Bias(\hat{b}^{(J)}) &= E(\hat{b}^{(J)}) - \beta \\ &= [I - k^2(X'X + kI)^{-2}]E(\hat{b}) - \beta \\ &= -k^2(X'X + kI)^{-2}\beta \end{aligned}$$

ve $Cov(\hat{b}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$ olduğundan dolayı kovaryans matrisi,

$$\begin{aligned} Cov(\hat{b}^{(J)}) &= [I - k^2(X'X + kI)^{-2}]Cov(\hat{b})[I - k^2(X'X + kI)^{-2}] \\ &= \sigma^2[I - k^2(X'X + kI)^{-2}](X'X)^{-1}[I - k^2(X'X + kI)^{-2}] \end{aligned}$$

olarak elde edilebilir. O halde jackknifed ridge tahmin edicinin hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned} MSE(\hat{b}^{(J)}, \beta) &= Cov(\hat{b}^{(J)}) + Bias(\hat{b}^{(J)})Bias(\hat{b}^{(J)})' \\ &= \sigma^2[I - k^2(X'X + kI)^{-2}](X'X)^{-1}[I - k^2(X'X + kI)^{-2}] \\ &\quad + k^4(X'X + kI)^{-2}\beta\beta'(X'X + kI)^{-2} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Jackknifed ridge tahmin edicinin yanlılığının normunun ridge tahmin edicinin yanlılığının normundan daha küçük olduğu gözlenmiştir (Singh ve ark., 1986).

3.3.4. Shrunken Tahmin Edici

Mayer ve Willke'nin (1973) çalışmalarında, kötü koşullu lineer modelde Hoerl ve Kennard (1970) tarafından belirtilen ridge tahmin ediciye alternatif olarak EKK tahmin edicilerinin lineer dönüşümlerinin bir alt sınıfı olarak önerdikleri shrunken tahmin edici, $0 < c < 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \hat{b}_c &= c(X'X)^{-1}X'y \\ &= c\hat{b} \end{aligned} \tag{3.7}$$

dir. Burada $\hat{b}$, EKK tahmin edicisidir. Shrunken tahmin edicisi (3.7) eşitliğinden de görüldüğü gibi yanlı bir tahmin edicidir. Shrunken tahmin edicinin yanlılığı,

$$\begin{aligned} Bias(\hat{b}_c) &= E(\hat{b}_c) - \beta \\ &= (c-1)\beta \end{aligned}$$

ve kovaryans matrisi,

$$\begin{aligned} Cov(\hat{b}_c) &= c^2 Cov(\hat{b}) \\ &= c^2 \sigma^2 (X'X)^{-1} \end{aligned}$$

olarak elde edilebilir. O halde shrunken tahmin edicinin hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned} MSE(\hat{b}_c, \beta) &= Cov(\hat{b}_c) + Bias(\hat{b}_c)Bias(\hat{b}_c)' \\ &= c^2 \sigma^2 (X'X)^{-1} + (c-1)^2 \beta\beta' \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

3.3.5. İterasyon Tahmin Edici

Trenkler (1978), (2.1) modeli için iterasyon tahmin ediciyi aşağıdaki gibi önermiştir.

$$\hat{b}_{\delta,m} = \delta \sum_{j=0}^m (I_p - \delta X'X)^j X'y, \quad 0 < \delta < \frac{1}{\lambda_{\max}}, \quad m = 0, 1, \dots$$

$\hat{b}_{\delta,0} = \delta X'y$ ve $\hat{b}_{\delta,\infty} = \hat{b}$ olacağından dolayı iterasyon tahmin edicisi basitleştirilmiş ridge tahmin edicisi $\delta X'y$ ve EKK tahmin edicisi $\hat{b}$ arasında ağırlıklandırılmış ortalama olarak görülebilir. Bölüm 2’de verilen temel varsayımlar altında $X'X$ matrisinin spektral ayrışımı $U\Lambda U'$ olsun. İterasyon tahmin edici,

$$\Gamma = \delta \Lambda \sum_{j=0}^m (I_p - \delta \Lambda)^j = I_p - (I_p - \delta \Lambda)^{m+1} \text{ olmak üzere,}$$

$$\hat{b}_{\delta,m} = U\Gamma U' \hat{b}$$

formunda yazılabilir. İterasyon tahmin edicinin uygulamaları için δ ve m parametrelerinin nasıl seçileceğinin bilinmesi gerekir. δ ’nın farklı seçimleri m ’nin

farklı seçimlerine yol açar. Parametreleri belirlemek için bir seçenek, δ 'yı önceden sabitlemek ve sonra tahmin edicinin elemanlarını m 'nin bir fonksiyonu olarak çizmektir. Bu Bölüm 3.3.1'de verilen ridge trace methodu ile aynıdır. Ancak ridge trace'de yanlılık parametresi olan k 'nın artması ile trace sıfıra yaklaşırken, iteratif tahmin edicinin elemanları $\delta X'y$ 'den başlar ve m tamsayısının artan değerleri ile EKK tahmin edicisi $\hat{b}$ 'ya yakınsar.

3. ÖZDEŞ KOVARYANS MATRİSLİ LİNEER İSTATİSTİKSEL MODELDE
ÇOKLU İÇ İLİŞKİ Tuğba SÖKÜT

4. SKALER ÖZDEŞ OLMAYAN KOVARYANS MATRİSLİ GENEL LİNEER İSTATİSTİKSEL MODEL

(2.1) modeli için ε hata vektörünün özdeş varyanslı ve elemanlarının ilişkisiz olduğunu temel varsayımlardan biliyoruz. Bu varsayım bazı ekonomik verilerde tutarlı olmasına rağmen bazı durumlarda varsayım sağlanamayabilir. Ekonometrik veriler zaman serisi verileri ve yatay kesit verileri olmak üzere iki ana başlık altında incelenebilir. Zaman serisi verileri değişkenlerin bir zaman aralığı üzerindeki değerlerinin elde edilmesine, yatay kesit verileri ise tek bir zaman noktasında farklı değişkenlerin incelenmesi istenen değerlerinin elde edilmesine dayanır. Yatay kesit verisi üzerinden $E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I_n$ varsayımının ihlaline örnek verecek olursak, bir firma ya da ev kesit verisi tahmin edilmek istendiğinde ev ya da firmanın yüksek gelirli olması durumu hataları büyütecek, az gelirli olması durumu ise hataları küçületecektir. Yani hata terimlerinin varyansı gelir düzeyine bağlı olarak değişecektir. Bu durum değişen varyans olarak tanımlanan farklı varyansa sahip hata terimlerinin var olduğunu ifade etmektedir. Diğer benzer bir örnek hataların yanıt değişken üzerindeki etkisi tamamen anlık olmayan zaman serisi verilerinden verilebilir. Bu durumda ε_t hata terimleri ilişkili olabilir. Son olarak $y = X\beta + \varepsilon$ modeli için eş zamanlı farklı bireyler ya da firmalar için eşitlikler yazılabilir (Judge ve ark., 1988).

Bu bölümde hata vektörü $E[\varepsilon\varepsilon'] = \Phi = \sigma^2 V$ olan kovaryans matrisinin genel durumları üzerinde duracağız. Burada V , bilinen pozitif tanımlı simetrik bir matristir. İlerleyen bölümlerde ε 'nin sıfır ortalamalı ve $E[\varepsilon\varepsilon'] = \sigma^2 V$ kovaryans matrisli rasgele vektör olarak kabul edeceğiz.

4.1. İstatistiksel Model

$$y = X\beta + e \tag{4.1}$$

4. SKALER ÖZDEŞ OLMAYAN KOVARYANS MATRİSLİ GENEL LİNEER İSTATİSTİKSEL MODEL

Tuğba SÖKÜT

çoklu lineer regresyon modelinin olduğunu varsayalım. Burada, y , $n \times 1$ tipinde yanıt değişkenlerin vektörü, X , $n \times p$ tipinde stokastik olmayan açıklayıcı değişkenlerin gözlenen matrisi, β , $p \times 1$ tipinde bilinmeyen regresyon parametrelerinin vektörü, e , $n \times 1$ tipinde $E[e] = 0$ ortalamalı ve $E[ee'] = \Phi = \sigma^2 V$ kovaryans matrisli rasgele hata vektörüdür ($e \sim N(0, \sigma^2 V)$). Ayrıca V , $n \times n$ tipinde pozitif tanımlı simetrik bir matris ve σ^2 , bilinmeyen skalerdir. (4.1) modelindeki hata terimleri (2.1)'de verilen modelin hata terimlerinden farklı yapıdadır, yani $\sigma^2 I_n$ varsayımı $\sigma^2 V$ varsayımı olarak değişmektedir. e_i rastgele değişkenlerinin varyansı özdeş değildir ve $i \neq j$ için e_i ve e_j arasındaki kovaryans sıfır olmayabilir. Bundan sonraki bölümlerde yapacağımız tahminler ve çıkarımlar (4.1) modeli altında yapılacaktır.

4.2. En Küçük Kareler Tahmin Edicisinin Problemleri

Bu bölümde bilinmeyen β parametresi ve σ^2 'nin tahminleri için (2.1) modeli altında BLUE olan EKK tahmin edicisinin (4.1) modeli altında en iyi olup olmadığı incelenecektir. y , beklenen değeri $E(y) = E(X\beta + e) = X\beta$ ve kovaryansı $E[(y - X\beta)(y - X\beta)'] = \Phi = \sigma^2 V$ olan rasgele bir değişkendir.

(4.1) modeli altında EKK tahmin edicisinin Bölüm 2'de verilen EKK tahminine benzer olarak,

$$\begin{aligned}\hat{b} &= (X'X)^{-1} X'y \\ &= (X'X)^{-1} X'(X\beta + e) \\ &= \underbrace{(X'X)^{-1} X'X}_{I_p} \beta + (X'X)^{-1} X'e \\ &= \beta + (X'X)^{-1} X'e\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1) modeli altında EKK tahmin edicisinin beklenen değeri,

$$E(\hat{b}) = E[\beta + (X'X)^{-1} X'e]$$

$E(e) = 0$ olduğundan dolayı,

$$E(\hat{b}) = \beta$$

olur ve kovaryans matrisi,

$$\begin{aligned} E[(\hat{b} - \beta)(\hat{b} - \beta)'] &= E[(\beta + (X'X)^{-1}X'e - \beta)(\beta + (X'X)^{-1}X'e - \beta)'] \\ &= E[(X'X)^{-1}X'ee'X(X'X)^{-1}] \\ &= (X'X)^{-1}X'E[ee']X(X'X)^{-1} \\ &= \sigma^2(X'X)^{-1}X'VX(X'X)^{-1} \end{aligned} \quad (4.2)$$

olarak bulunur. Görüldüğü üzere, (4.1) modeli altında da EKK tahmin edicisi β 'nin yansız bir tahmin edicisidir ve $V \neq I$ olduğundan dolayı (4.2)'de verilen kovaryans matrisi (2.2) eşitliğinde verilen kovaryans matrisi yapısından farklıdır. Bu yüzden (4.1) modeline uygulanan EKK yöntemi yansız olmasına rağmen, varyansında şişme olmasından dolayı en iyi yansız tahmin edici özelliğini yitirmektedir. Bundan dolayı EKK yönteminin uygulanması uygun değildir ve uygulanması durumunda kullanılan standart regresyon hesapları yanlış olacaktır.

4.3. Dönüştürülmüş Model

$E[\varepsilon\varepsilon'] = \sigma^2 I_n$ varsayımının geçersiz yani $E[ee'] = \sigma^2 V$ olduğu zaman β 'nin en iyi yansız tahmini incelenecektir. Bunun için yapılan ilk adım (4.1) modeli üzerinde dönüşümler yapmaktır. Başlangıç olarak $n \times n$ tipindeki V matrisinin bilindiğini varsayıyoruz. V pozitif tanımlı olduğundan dolayı $P'P = V^{-1}$ yani $PVP' = I_n$ eşitliklerinin sağlayan bir P matrisi her zaman vardır.

(4.1) modeli P matrisi ile çarpılarak dönüştürülmüş model

$$Py = PX\beta + Pe$$

ya da

$$y_* = X_*\beta + e_* \quad (4.3)$$

olarak yazılabilir. Burada $y_* = Py$, $X_* = PX$ ve $e_* = Pe$ 'dir. Dönüştürülmüş model için hata yapısının ortalaması,

$$E[e_*] = E[Pe] = P E[e] = 0$$

ve kovaryans matrisi,

$$\begin{aligned} Cov(e_*) &= E[e_* e_*'] = E[Pe e' P'] \\ &= P E[ee'] P' \\ &= P \sigma^2 V P' \\ &= \sigma^2 P V P' = \sigma^2 I_n \end{aligned}$$

olarak bulunmuş olup dönüştürülmüş model Bölüm 2'de varsayılan özellikleri sağlamaktadır.

4.4. Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Tahmin Edici

(4.1)'de verilen model (4.3)'deki modele dönüştürüldüğü zaman hatalara ilişkin varsayımlar sağlandığından dolayı dönüştürülmüş modele uygulanan EKK yöntemi genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi olarak adlandırılır (GEKK). GEKK tahmin edicisi hata kareler toplamını minimum yapacak şekilde önerilmiştir.

$$\begin{aligned} e_* &= y_* - X_* \beta \\ \sum_{i=1}^n e_{*i}^2 &= e_*' e_* \\ &= (Py - PX \beta)' (Py - PX \beta) = (y' - \beta' X') V^{-1} (y - X \beta) \\ &= y' V^{-1} y - y' V^{-1} X \beta - \beta' X' V^{-1} y + \beta' X' V^{-1} X \beta \end{aligned}$$

olarak elde edilir. $\beta' X' V^{-1} y$ için $(\beta' X' V^{-1} y)' = y' V^{-1} X \beta$ 'dir. Buna göre hata kareler toplamı;

$$e_*' e_* = y' V^{-1} y - 2 \beta' X' V^{-1} y + \beta' X' V^{-1} X \beta$$

olur. β 'nın tahmin edicisi $e_*' e_*$ 'ı minimum yapar. O halde normal denklemleri,

$$\frac{\partial(e_*'e_*)}{\partial\beta} = -2X'V^{-1}y + 2X'V^{-1}X\beta = 0$$

$$X'V^{-1}X\beta = X'V^{-1}y$$

olup buradan β 'nin GEKK tahmini

$$\hat{\beta}_G = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$$

olarak elde edilir. GEKK tahmin edicisinin beklenen değeri

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}_G) &= E[(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y] \\ &= (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}E(y) \\ &= \underbrace{(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}X}_{I_p} \beta \\ E(\hat{\beta}_G) &= \beta \end{aligned}$$

olarak bulunmuş olup GEKK tahmin edicisi $\hat{\beta}_G$, β 'nin yansız bir tahmin edicisidir. Kovaryans matrisi,

$$\begin{aligned} Cov(\hat{\beta}_G) &= Cov[(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y] \\ &= (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Cov(y)V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1} \\ &= \sigma^2 \underbrace{(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}V V^{-1}X}_{I_p} (X'V^{-1}X)^{-1} \\ &= \sigma^2 (X'V^{-1}X)^{-1} \end{aligned} \tag{4.4}$$

olarak elde edilmiş olup (4.3) modeli altında GEKK tahmin edicisinin BLUE olduğu görülmüştür (Judge, ve ark., 1988). (4.2) eşitliğinde σ^2V yerine σ^2I alınarak EKK yöntemi uygulanması durumunda tahmin edicinin varyansı gösterilmişti. (4.4)'deki eşitlikte ise σ^2V altında elde edilen tahmin edicinin varyansının (4.2)'dekinden daha küçük olduğunu göstermektedir.

4.5. σ^2 'nin Yansız Tahmin Edicisi

(4.1) modeli altında EKK yöntemini kullanarak σ_b^2 'nin σ^2 için yansız olup olmadığını inceleyelim.

EKK yönteminde σ^2 'nin bilinen karasal formu;

$$\hat{\sigma}_b^2 = \frac{(y - X\hat{b})'(y - X\hat{b})}{n - p}$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}_b^2) &= E \left[\frac{(y - X\hat{b})'(y - X\hat{b})}{n - p} \right] \\ &= E \left[\frac{y'(I - X(X'X)^{-1}X')y}{n - p} \right] \\ &= E \left[\frac{e'(I - X(X'X)^{-1}X')e}{n - p} \right] \\ &= \text{tr} E \left[\frac{ee'(I - X(X'X)^{-1}X')}{n - p} \right] \\ &= \sigma^2 \frac{\text{tr} V(I - X(X'X)^{-1}X')}{n - p} \neq \sigma^2 \end{aligned}$$

$E(\hat{\sigma}_b^2) \neq \sigma^2$ olur. $\sigma^2 V$ altında EKK yöntemi kullanıldığında σ^2 'nin yansız tahmini elde edilememektedir.

GEKK yönteminde σ^2 'nin tahmin edicisi

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_G}^2 = \frac{(y - X\hat{\beta}_G)'V^{-1}(y - X\hat{\beta}_G)}{n - p} \quad (4.5)$$

şeklindedir.

$E(\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_G}^2) = \sigma^2$ eşitliğinin geçerli olup olmadığını inceleyelim.

$$E(\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_G}^2) = E \left[\frac{(y - X\hat{\beta}_G)'V^{-1}(y - X\hat{\beta}_G)}{n-p} \right]$$

$$= E \left[\frac{y'(I_n - V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X')V^{-1}(I_n - X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1})y}{n-p} \right]$$

$y = X\beta + e$ ve $P'P = V^{-1}$ eşitliklerini kullanırsak, $e_* = Pe$ olduğundan dolayı

$$E(\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_G}^2) = E \left[\frac{e'(I_n - V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X')V^{-1}(I_n - X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1})e}{n-p} \right]$$

$$= E \left[\frac{e'V^{-1}e - e'V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}e}{n-p} \right]$$

$$= E \left[\frac{e'P'Pe - e'P'PX(X'P'PX)^{-1}X'P'Pe}{n-p} \right]$$

$$= E \left[\frac{e'P'(I_n - PX(X'P'PX)^{-1}X'P')Pe}{n-p} \right]$$

$$= E \left[\frac{e_*'(I_n - X_*(X_*'X_*)^{-1}X_*')e_*}{n-p} \right]$$

elde edilir. $(I_n - X_*(X_*'X_*)^{-1}X_*')$ matrisi $n-p$ ranklı idempotent bir matris ve $e_* \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ olduğundan dolayı

$$E(\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_G}^2) = trE \left[\frac{e_*'e_*(I_n - X_*(X_*'X_*)^{-1}X_*')}{n-p} \right]$$

$$= \sigma^2 \left[\frac{tr(I_n - X_*(X_*'X_*)^{-1}X_*')}{n-p} \right]$$

$$= \sigma^2$$

olduğundan dolayı GEKK yöntemini kullanarak σ^2 'nin yansız tahmin edicisi elde edilmiş olur.

4.6. Normal Lineer İstatistiksel Model

Bölüm 2’de verilen ek varsayımdan e hata vektörünün n değişkenli normal dağılımdan geldiği varsayımını değerlendireceğiz. Bu varsayımı $E(e)=0$ ve $E[ee']=\sigma^2V$ varsayımı altında inceleyeceğiz (V , $n \times n$ tipinde simetrik pozitif tanımlı bir matris). σ^2I_n varsayımı altında gözlemlerin ortak yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} f(y|X, \beta, \sigma^2) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left[-\frac{(y-X\beta)'(y-X\beta)}{2\sigma^2}\right] \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} |I_n|^{-1/2} \exp\left[-\frac{(y-X\beta)'I_n(y-X\beta)}{2\sigma^2}\right] \end{aligned}$$

ve σ^2V varsayımı altında gözlemlerin ortak yoğunluk fonksiyonu

$$f(y|X, \beta, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} |V|^{-1/2} \exp\left[-\frac{(y-X\beta)'V^{-1}(y-X\beta)}{2\sigma^2}\right] \quad (4.6)$$

şeklindedir. Likelihood (olabilirlik) fonksiyonu kullanıldığında

$$\ell(\beta, \sigma^2|X, y) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} |V|^{-1/2} \exp\left[-\frac{(y-X\beta)'V^{-1}(y-X\beta)}{2\sigma^2}\right]$$

yazılabilir ve buradan log olabilirlik fonksiyonu,

$$\ln \ell(\beta, \sigma^2|y, X) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2} \ln |V| - \frac{(y-X\beta)'V^{-1}(y-X\beta)}{2\sigma^2} \quad (4.7)$$

olarak elde edilir. $\tilde{\beta}$ ve $\tilde{\sigma}_{ML}^2$ maksimum olabilirlik tahmin edicilerini bulmak için (4.7) eşitliğini maksimum yapan β ve σ^2 ’yi bulmak gerekmektedir.

$$\left. \frac{\partial \ln \ell(\beta, \sigma^2|y, X)}{\partial \beta} \right|_{\beta} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_{ML}^2} [X'V^{-1}y - (X'V^{-1}X)\tilde{\beta}] = 0,$$

ve

$$\left. \frac{\partial \ln \ell(\beta, \sigma^2 | y, X)}{\partial \sigma^2} \right|_{\beta, \sigma_{ML}^2} = -\frac{n}{2\tilde{\sigma}_G^2} + \frac{1}{2\tilde{\sigma}_G^4} (y - X\tilde{\beta})' V^{-1} (y - X\tilde{\beta}) = 0$$

olur ve dolayısıyla bilinmeyen parametreler için maksimum olabilirlik tahmin edicileri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\tilde{\beta} = (X' V^{-1} X)^{-1} X' V^{-1} y$$

ve

$$\tilde{\sigma}_{ML}^2 = \frac{(y - X\tilde{\beta})' V^{-1} (y - X\tilde{\beta})}{n}$$

Maksimum olabilirlik tahmin edicisi $\tilde{\beta}$, GEKK tahmin edicisi $\hat{\beta}_G$ ile aynıdır. Ancak σ^2 'nin maksimum olabilirlik tahmin edicisi $\tilde{\sigma}_{ML}^2$ yanlıdır ve (4.5) eşitliğinde verilen σ^2 'nin GEKK tahmin edicisi $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_G}^2$ 'den farklıdır.

4.7. $\tilde{\beta}$ ve $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_G}^2$ 'nin Örnekleme Dağılımları

Maksimum olabilirlik tahmin edicisi $\tilde{\beta}$ normal dağılıma sahip rasgele y vektörünün lineer bir fonksiyonudur. $\tilde{\beta}$, ortalaması β ve kovaryansı $\sigma^2 (X' V^{-1} X)^{-1}$ olan normal rasgele bir vektördür. Bu nedenle $\tilde{\beta} - \beta$ ortalama vektörü sıfır ve kovaryansı $\sigma^2 (X' V^{-1} X)^{-1}$ olan normal rasgele bir vektör olur. Özel bir $\tilde{\beta}_k$ için ($k = 1, 2, \dots, p$),

$$\frac{\tilde{\beta}_k - \beta_k}{\sigma \sqrt{c^{kk}}}$$

ortalaması sıfır ve varyansı 1 olan normal dağılan bir rasgele değişkendir. Burada c^{kk} , $(X' V^{-1} X)^{-1}$ matrisinin k -nci köşegen elemanıdır.

$\frac{(n-p)\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_G}^2}{\sigma^2}$ karesel formunun dağılımını (4.3)'de verilen dönüştürülmüş model üzerinden incelenebilir:

$$\begin{aligned}\frac{(n-p)\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_G}^2}{\sigma^2} &= \frac{(y - X\hat{\beta}_G)'V^{-1}(y - X\hat{\beta}_G)}{\sigma^2} \\ &= \frac{(y_* - X_*\hat{\beta}_G)'(y_* - X_*\hat{\beta}_G)}{\sigma^2} \\ &= \frac{y_*'[I_n - X_*(X_*'X_*)^{-1}X_*']y_*}{\sigma^2}.\end{aligned}$$

Burada, $[I_n - X_*(X_*'X_*)^{-1}X_*']$ rankı $n-p$ olan idempotent bir matristir. Bu durumda $\frac{(n-p)\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_G}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-p}^2$ olur. Ayrıca $\hat{\beta}_G - \beta = (X_*'X_*)^{-1}X_*'e_*$ olduğundan ve $[I_n - X_*(X_*'X_*)^{-1}X_*']$ ve $(X_*'X_*)^{-1}X_*'$ matrislerinin çarpımı sıfır matrisine eşit olduklarından dolayı $\hat{\beta}_G$ ve $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_G}^2$ ilişkisizdir.

4.8. β ve σ^2 'nin Aralık Tahminleri

Bölüm 4.6'da verilen dağılım sonuçları gereğince β ve σ^2 'nin aralık tahminleri incelenecektir. R_1 , $1 \times p$ tipinde bilinen bir vektör olmak üzere $R_1\tilde{\beta}$, ortalaması $R_1\beta$ ve kovaryansı $\sigma^2 R_1(X'V^{-1}X)^{-1}R_1'$ olan normal dağılıma sahip olsun. Böylece,

$$\frac{R_1\tilde{\beta} - R_1\beta}{\sigma\sqrt{R_1(X'V^{-1}X)^{-1}R_1'}} \sim N(0,1)$$

olan standart normal dağılıma sahip olur. O halde σ^2 biliniyorken güven aralığı,

$$\Pr[-z_{(\alpha/2)} \leq \frac{R_1\tilde{\beta} - R_1\beta}{\sigma\sqrt{R_1(X'V^{-1}X)^{-1}R_1'}} \leq z_{(\alpha/2)}] = 1 - \alpha \quad (4.8)$$

Alternatif olarak (4.8) eşitsizliği σ^2 bilinmiyorken,

$$\Pr[-t_{(n-p, \alpha/2)} \leq \frac{R_1 \tilde{\beta} - R_1 \beta}{\hat{\sigma} \sqrt{R_1 (X' V^{-1} X)^{-1} R_1}} \leq t_{(n-p, \alpha/2)}] = 1 - \alpha$$

olur. σ^2 'nin aralık tahmini için $\frac{(n-p)\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_G}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-p}^2$ olduğundan,

$$\Pr[\chi_{n-p, (1-\alpha/2)}^2 \leq \frac{(n-p)\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_G}^2}{\sigma^2} \leq \chi_{n-p, (\alpha/2)}^2] = 1 - \alpha$$

olur.

4.9. Hipotez Testi

β ile ilgili genel lineer hipotez testlerini incelediğimizi varsayalım. R , $J \times p$ tipinde bilinen bir matris ve r , $J \times 1$ tipinde bilinen bir vektör olduğunda $H_0 : R\beta = r$ hipotezinin doğru olduğunu farz ederek genel hipotez testi

$$\lambda_1 = \frac{(R\tilde{\beta} - r)' [R(X' V^{-1} X)^{-1} R']^{-1} (R\tilde{\beta} - r)}{J \hat{\sigma}_G^2} \quad (4.9)$$

olarak yazılabilir. Sıfır hipotezi doğru ise (4.9) eşitliği J ve $n - p$ serbestlik dereceli F dağılımına uyar.

5. DEĞİŞEN VARYANS

5.1. Değişen Varyansın Tanımı

Doğrusal regresyon modelinin önemli varsayımlarından biri Bölüm 2.2’de sabit varyanslılık olarak verilmişti. (4.1) genel lineer istatistiksel model için,

$$E(e) = 0 \text{ ve } E[ee'] = \Phi = \sigma^2 V$$

olduğunda V ’nin köşegen elemanlarının özdeş olmadığı durum “Değişen Varyans” olarak adlandırılır.

Ekonomik birimlerin zaman içerisinde verilen bir noktadan gözlemlendiğini, diğer bir ifade ile yatay kesit verilerini kullandığımızı varsayalım, örneğin, ekonomik birimimizin bir firma ve endüstri maliyet fonksiyonunu tahmin etmek istediğimizi varsayalım. Bunun tek yolu maliyet üzerinden veri toplamak ve firma örneklem çıktıları almaktır (Judge ve ark., 1988). Firmanın örneklem çıktılarından faydalanarak endüstri maliyet fonksiyonunu tahmin etmek için

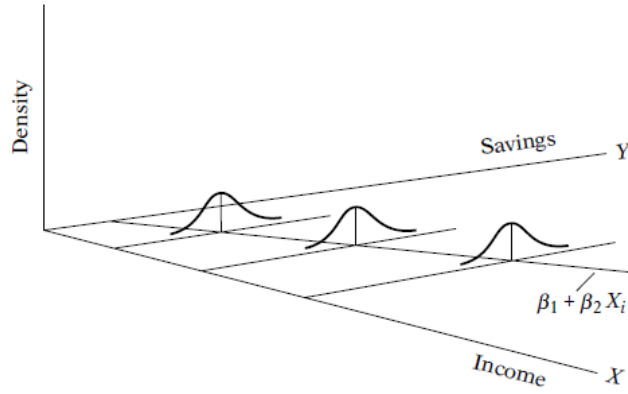
$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \beta_3 x_t^2 + e_t \quad (5.1)$$

model varsayımı yapılsın. y_t , t-inci firmanın ortalama maliyeti ve x_t , t-inci firmanın çıktılarıdır. Eğer ortalama maliyet fonksiyonunun 2. dereceden polinom tipi şeklinde olmasını beklersek, (5.1)’deki gibi bir model uygun olabilir. Alternatif olarak (5.1) modeli gıda harcamaları ve gelir arasındaki ilişki miktarı için uygun bir model olabilir. Bu durumda hanelerin harcama ve gelirleri yatay kesit verilerinden oluşur. y_t ve x_t sırası ile t-inci hanenin gıda harcamaları ve geliri olacaktır. x ’ler küçük gözlemlerden oluştuğu zaman $E(y_t) = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 x_t^2$ ortalamadan sapmalar küçük, x ’ler büyük gözlem değerleri aldığı zaman ortalama fonksiyonundan sapmalarda büyük olacaktır. Örneğin, az gelirli hanelerde gıda harcamalarının gelir tarafından açıklanması daha yüksektir. Bununla birlikte yüksek gelirli hanelerde gıda harcamaları gelir dışında başka faktörlere de bağlı olabilmektedir. Bu nedenle gıda

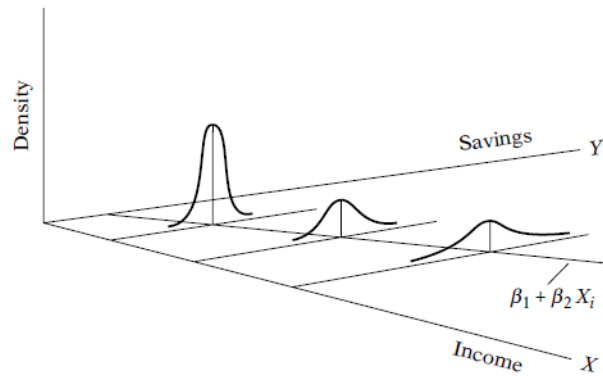
harcamaları haneden haneye değişmektedir. Diğer bir deyişle (e_t) hataların değeri, küçük x_t değerleri için küçük, büyük x_t değerleri için büyük olacaktır. Gelire ait etki, e_t hatalarının farklı varyanslı olasılık dağılımlarından geldiği varsayımı altında hesaplanabilir. Bu nedenle,

$$E(e_t) = 0 \text{ ve } E(e_t^2) = \sigma_t^2$$

olduğu varsayılır ve hata teriminin bu özelliği değişen varyans olarak tanımlanır. Aksine her gözlem için σ_t^2 sabit ise hata terimi sabit varyanslıdır.



Şekil 5.1. Tasarruf ve gelir örneği için hataların sabit varyanslı olması durumu (Gujarati, 2004).



Şekil 5.2. Tasarruf ve gelir örneği için hataların değişen varyanslı olması durumu (Gujarati, 2004).

Basit doğrusal regresyon modelinde y , tasarrufları; x , geliri ifade etmek üzere Şekil 5.1 ve 5.2 incelenebilir. Şekil 5.1'den x_t 'in değerleri büyüdükçe y_t 'nin koşullu varyansının değişmediği, Şekil 5.2'den ise x_t 'in değerleri büyüdükçe y_t 'nin koşullu varyansının da büyüdüğü, yani y_t 'nin varyanslarının aynı kalmadığı yani değişen varyanslılık durumu görülebilmektedir. Sabit varyanslılık varsayımına göre tasarrufların varyansının, gelirin bütün düzeylerinde aynı kalması beklenir. Şekil 5.2 de ise tasarrufların varyansı gelirle birlikte artmıştır yani yüksek gelirli ailelerin düşük gelirlilerden daha çok masraf ettikleri ama tasarruflarının değişkenliğinin de fazla olduğu anlaşılmaktadır.

5.2. Değişen Varyansın Nedenleri

Değişen varyans sorunu daha önce bahsedildiği gibi zaman serileri ve/veya yatay kesit verilerinde görülebilmektedir. Fakat değişen varyans sorunu daha çok yatay kesit verilerinde karşılaşılan bir sorun olarak görülebilir. Değişen varyansın ortaya çıkmasının çeşitli nedenleri şöyle sıralanabilir:

- ✓ Önemli açıklayıcı değişkenlerin model dışında tutulması,
- ✓ Yatay kesit verilerinin kullanılması
- ✓ Mevsimsellik gösteren zaman serisinin modelde yanıt değişken olarak kullanılması,
- ✓ Yanıt değişkenin ölçümünün veya tanımının yanlış yapılması ve bu hatanın yanıt değişken(ler)e göre değişmesi,
- ✓ Türdeş olmayan kitleler üzerinde çalışılması.

Regresyon analizinde modele alınması gereken önemli açıklayıcı değişkenler, çoğunlukla modeldeki değişkenlerle aynı yönde ve büyüklükte değişmektedir. Bu durum, modelde değişen varyans problemine yol açabilmektedir. Örneğin, bireysel gelirin açıklayıcı değişken, seyahat harcamalarının yanıt değişken olduğu bir regresyon modelinde değişen varyans sorununun ortaya çıkmasının nedenlerinden biri, bireysel seyahat harcamalarındaki grup içi değişkenliğinin düşük gelir düzeylerinde az, yüksek gelir düzeylerinde ise fazla olmasıdır (Albayrak, 2008).

Diğer taraftan, araştırmalarda yatay kesit verilerinin kullanılması değişen varyans sorununa neden olabilmektedir. Örneğin, gelir, tüketim, tasarruf veya ücret gibi genellikle grup ortalamalarından oluşan kesit verilerinden oluşan fonksiyonlarla çalışılması durumunda değişen varyans sorunuyla karşılaşilmektedir. Öyleki yüksek gelirli birimlerin tüketim alışkanlıklarının değişkenliği, düşük gelirli birimlerin tüketim alışkanlıklarının varyansından oldukça farklı olabilmektedir. Böylece düşük gelirli ailelerde tahmin hatalarının varyansı ve büyüklükleri daha düşük iken, yüksek gelirli birimlerde daha yüksek çıkmaktadır. Değişen varyans problemi yatay kesit, zaman serisi ve panel verilerde gözlenebilmektedir. Fakat yanıt ve açıklayıcı değişkenlerin aynı oranda değiştiği zaman serilerinde görülmemektedir. Örneğin, gelir ve tüketim gibi iki değişken zaman içerisinde aynı oranlarda artmaktadır. Fakat mevsimsellik gösteren zaman serilerinde genellikle değişen varyans sorunuyla karşılaşilmektedir.

5.3. Değişen Varyansın Yol Açtığı Sorunlar

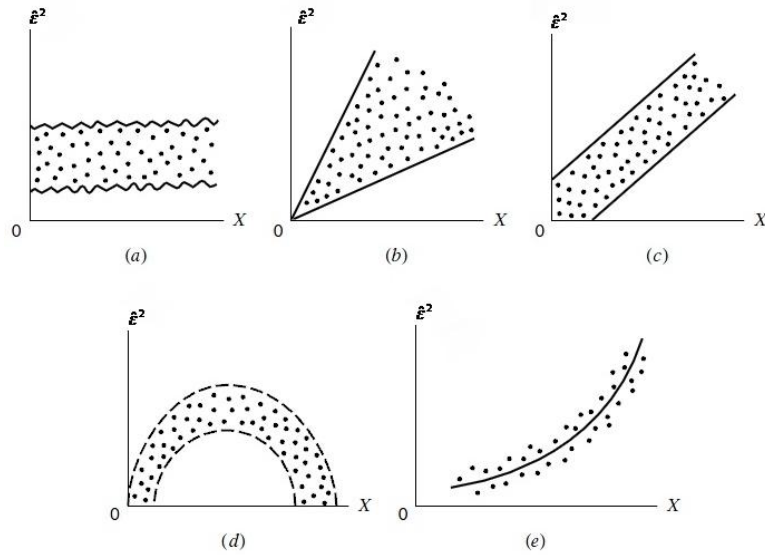
Sabit varyans varsayımının modelin anlamlılığı veya her bir regresyon katsayısının anlamlılığı testlerini yapabilmek ve güven aralıklarını oluşturmak için gerekli olduğunu biliyoruz. Değişen varyans durumunda EKK tahminleri yansızlık (unbiased) ve tutarlılık (consistent) özelliğini korumakta, fakat minimum varyanslı veya etkinlik (efficient) olarak bilinen özelliklerini kaybetmektedir. Bu durumda $Var(\hat{\beta}_j)$ güvenilir olmayan istatistiksel testlere neden olmaktadır. Regresyon katsayılarının tahminlerinin standart hataları $Se(\hat{\beta}_j)$ doğrudan bu varyanslardan elde edildiği için, değişen varyans durumu varsa t istatistikleri ve genel F testleri güvenilirliklerini kaybetmektedir. Ayrıca geliştirilen modelle gerçekleştirilen öngörüler güvenilir olmamaktadır.

5.4. Değişen Varyansın Belirlenmesi

Değişen varyansın bir modelde var olup olmadığı 2 farklı şekilde test edilebilir. Bunlar sistematik olmayan (grafiksel) ve sistematik test yöntemlerinin kullanılması ile mümkündür.

5.4.1. Sistematik Olmayan Yöntem

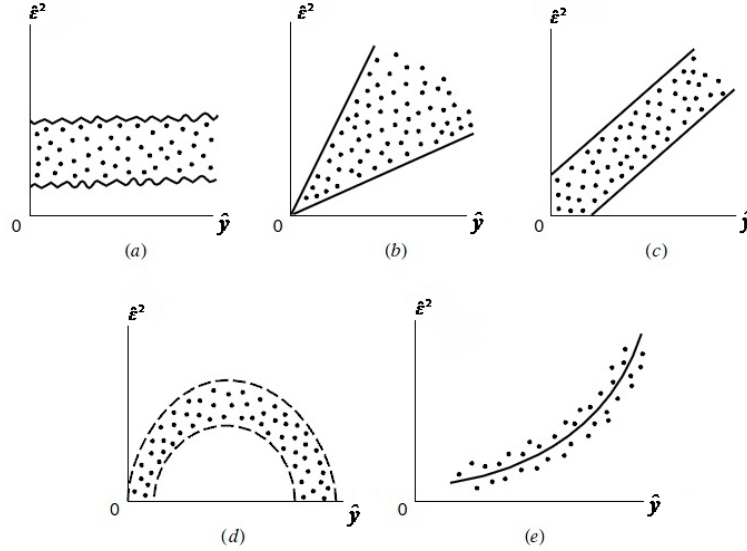
Değişen varyansın lineer bir modelde olup olmadığı rezidülerin karesi ile açıklayıcı veya yanıt değişken değerlerinin saçılım grafiği üzerinden incelenebilir. Değişen varyansın niteliğine ilişkin önsel ya da deneysel bilgi yoksa, uygulamada regresyon analizi sabit varyans varsayımı altında yapılır, daha sonra EKK yöntemi ile rezidüler elde edilip rezidü karelerinin ε_i^2 düzenli bir yapı sergileyip sergilemediklerine bakılır.



Şekil 5.3. Değişen varyansı belirlemek için rezidülerin karesi ile açıklayıcı değişken değerlerinin saçılımı (Gujarati, 2004).

Şekil 5.3’de hesaplanan rezidü karelerinin açıklayıcı değişken ile olan saçılım grafikleri örnek olarak verilmiştir. Şekil 5.3 (a)’da sabit varyans, (b)’de artan

varyans, (c)'de lineer ilişki, (d) ve (e)'de eğrisel ilişki görülmektedir (Gujarati, 2004).



Şekil 5.4. Değişen varyansı belirlemek için rezidülerin karesi ile yanıt değişken değerlerinin saçılımı (Gujarati, 2004).

Şekil 5.4'de hesaplanan rezidü karelerinin yanıt değişkeninin regresyon modelinden elde edilen tahmini değerleri ile olan saçılım grafikleri örnek olarak verilmiştir. Şekil 4.(a)'da sabit varyans, (b)'de artan varyans, (c)'de lineer ilişki, (d) ve (e)'de eğrisel ilişki görülmektedir (Gujarati, 2004).

5.4.2. Sistematik Testler

5.4.2.1. Goldfeld-Quant Testi

Bu test 1965'de Goldfeld ve Quant tarafından önerilmiştir. σ_t^2 'nin regresyon modelindeki açıklayıcı değişkenlerden birine paralel olarak (artan ve azalan) bağlı olduğunu varsayar.

Değişen varyans için Goldfeld –Quant (G-Q) testinde izlenecek adımlar aşağıdaki şekildedir.

- ✓ Yanıt değişken ve açıklayıcı değişkenlere ait gözlenen veri, açıklayıcı değişkenlerden her hangi birine göre en küçük değerinden en büyük değerine doğru sıralanır.
- ✓ Veriyi iki eşit gözleme sahip iki alt gruba ayırabilmek için küçük ve büyük değerler arasında kalan gözlemlerden bir kısmı (c) çıkarılır. Goldfeld-Quant'ın bazı denemelerinden elde edilen sonuçlara göre, 30'dan büyük örneklerde, testten çıkarılacak orta bölgedeki en uygun gözlem sayısı, toplam gözlemlerin yaklaşık dörtte biri kadardır. Geriye kalan ($n - c$) sayıda gözlem, biri sıralama yapılan açıklayıcı değişkenlerin büyük değerlerinin, diğeri ise küçük değerlerinin yer aldığı iki eşit alt gruba ayrılır.
- ✓ İlk $\frac{n-c}{2}$ gözlem ile son $\frac{n-c}{2}$ gözlem EKK yöntemi kullanılarak iki ayrı regresyon tahmin edilir ve her iki regresyona ait rezidü kareler toplamaları ayrı ayrı alınır ve küçük değerleri içeren alt gruptan elde edilen rezidü kareler toplamı SS_{r_1} ve büyük değerleri ile yapılan regresyondan elde edilen rezidü kareler toplamı SS_{r_2} hesaplanır.
- ✓ Bir önceki aşamada elde edilen SS_r 'ler yardımıyla her bir hata terimine ait varyansın aynı ya da eşit olduğunu ifade eden ve

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_n^2$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \leq \dots \leq \sigma_n^2$$

şeklinde verilen hipotezi sınavabilmek için iki model için bulunan rezidü kareler ortalamaları oranlanarak test istatistiği elde edilir:

$$F_h = \frac{MSE_{r_2}}{MSE_{r_1}} \quad (5.2)$$

- ✓ n gözlem sayısını, c iki gözlem arasında kalan ve atılan gözlemleri ve p 'de sabit terim içermeyen parametre sayısını göstermek üzere (5.2) ile verilen F_h istatistiği, hem payı hem de paydası $(n - c - 2p)$ serbestlik dereceli F dağılımına sahiptir.

- ✓ Hesaplanan F_h ile belirtilen serbestlik derecelerinde ve belli bir anlam düzeyinde tabloda bulunan F_t değeri karşılaştırılır.

Eğer $F_h > F_t$ ise sabit varyanslılığı ifade eden H_0 hipotezi reddedilir ve hata terimlerinin değişen varyansa sahip olduğu söylenir aksi durumda ise hata terimlerinin sabit varyanslı olduğu kararına varılır. Eğer iki alt grup için hesaplanan varyans tahminleri birbirine eşitse F_h değeri 1'e yaklaşır.

5.4.2.2. Breusch-Pagan Testi

G-Q testinin aksine Breusch-Pagan (B-P) testinde gözlemleri küçükten büyüğe doğru sıralamak gerekmez. Ayrıca bu testte değişen varyanslılığa birden fazla açıklayıcı değişkenin sebep olup olmadığı belirlenebilir.

G-Q sınavasının başarısı yalnızca atılacak ortadaki gözlem sayısı c 'nin değerine değil, aynı zamanda gözlemleri sıralamada kullanılacak doğru x değişkeninin seçimine de bağlıdır.

H_1 hipotezi altında verilen σ_t^2 'nin aşağıdaki gibi tanımlandığını düşünelim:

$$\sigma_t^2 = h(z_t' \alpha) = h(\alpha_1 + z_t^{*'} \alpha^*).$$

Burada h , t 'nin herhangi bir bağımsız fonksiyonu, $z_t' = (1, z_t^{*'}) = (1, z_{t2}, z_{t3}, \dots, z_{tp})$ açıklayıcı değişkenlerin vektörü ve $\alpha' = (\alpha_1, \alpha_t^{*'}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ bilinmeyen katsayıların vektörüdür. $\sigma_t^2 = \exp(z_t' \alpha)$ bu koşulun özel bir durumudur. $\alpha^* = 0$ sıfır hipotezi ve ε_t 'nin normal dağıldığı varsayımı altında izlenecek adımlar aşağıdaki gibidir.

- ✓ Verilere önce regresyon analizi uygulanır ve EKK rezidüleri ($\hat{\varepsilon}_t$) elde edilir.
- ✓ $\tilde{\sigma}^2 = \sum_{t=1}^n \frac{\hat{\varepsilon}_t^2}{n}$ değeri bulunur.
- ✓ Her bir rezidünün karesi alınıp $\tilde{\sigma}^2$ 'ye bölünür.

$$P_t = \frac{\hat{\varepsilon}_t^2}{\hat{\sigma}^2} = z_t' \alpha + v_t$$

Asimtotik olarak ($p-1$) serbeslik dereceli χ^2 dağılır.

- ✓ P_t yanıt ve z_t açıklayıcı değişken olarak alınarak regresyon analizi uygulanır.
- ✓ Uygulanan regresyon analizi sonucu elde edilen regresyon kareler toplamı (SS_{reg}) hesaplanır.
- ✓ $Q_h = \frac{SS_{reg}}{2}$ değeri hesaplanır. Bu değer ($p-1$) serbestlik dereceli χ^2 kritik değeri ile karşılaştırılır.

Eğer $Q_h > \chi_{p-1}^2$ ise sabit varyans olduğunu ifade eden sıfır hipotezi reddedilir ve değişen varyansın olduğu sonucuna varılır. Aksi durumda ise hata terimlerinin sabit varyanslı olduğu kararına varılır.

5.4.2.3. Glejser Testi

Bu testin en önemli özelliği, değişen varyansın biçimi yani $\sigma_t^2 = h(z_t' \alpha)$ ilişkisinin şekli hakkında bilgi vermesidir. Bu bilgi değişen varyansın düzeltilmesinde kullanılır. Glejser testi değişen varyansı, hata terimlerinin varyansı ile açıklayıcı değişkenler arasındaki farklı kalıptaki ilişkilerle açıklamaktadır. x_t açıklayıcı değişkenleri arasındaki ilişki Glejser testine göre çeşitli fonksiyonel şekillerle ele alınabilir. Bu testte hata teriminin varyansının tahmini σ_t^2 yerine EKK yöntemi ile elde edilen rezidülerin mutlak değeri ($|\hat{\varepsilon}_t|$) alınır. Bazı olası fonksiyonel modeller aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} |\hat{\varepsilon}_t| &= \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t \\ |\hat{\varepsilon}_t| &= \beta_0 + \beta_1 \sqrt{x_t} + u_t \\ |\hat{\varepsilon}_t| &= \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{x_t} + u_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\hat{\varepsilon}_t| &= \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{\sqrt{x_t}} + u_t \\ |\hat{\varepsilon}_t| &= \sqrt{\beta_0 + \beta_1 x_t} + u_t \\ |\hat{\varepsilon}_t| &= \sqrt{\beta_0 + \beta_1 x_t^2} + u_t \end{aligned}$$

$|\hat{\varepsilon}_t|$ 'nin yanıt, diğer değişkenlerden birinin açıklayıcı değişken olduğu model EKK ile tahmin edilip eğim parametresinin anlamlılığı incelenir. Eğer eğim parametresi istatistiksel olarak anlamsızsa açıklayıcı değişkenlere göre değişen varyans yoktur. Tersini durumda değişen varyans söz konusudur. Çoklu regresyonlarda değişen varyans açıklayıcı değişkenlere göre ayrı ayrı incelenir.

Uygulamalarda ya da deneysel çalışmalarda kolaylık olsun diye Glejser yaklaşımı kullanılabilir. Glejser (1969), değişen varyansı belirlemede yukarıdaki ilk dört modelin büyük örneklemeler için genellikle iyi sonuçlar verdiğini bulmuştur. Uygulamada bu yöntem büyük örneklemeler için kullanılabilir.

5.4.2.4. Park Testi

Park (1966), σ_t^2 'nin açıklayıcı değişken x_t 'nin bir fonksiyonu olduğunu ileri sürerek grafiksel yöntemi formülize etmiştir. Bu fonksiyonel şekli,

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 x_t^\beta \varepsilon^{v_t}$$

yada

$$\ln \sigma_t^2 = \ln \sigma^2 + \beta x_t + v_t$$

olarak vermiştir. Burada v_t stokastik hata terimidir. σ_t^2 genelde bilinmediğinden Park (1966), onun yerine rezidü karelerini önermiştir.

$$\ln \hat{\varepsilon}_t^2 = \ln \sigma^2 + \beta x_t + v_t$$

Eğer eğim katsayısı β istatistiksel açıdan anlamlı çıkarsa, kullanılan veride değişen varyans olduğu söylenebilir. Anlamsız çıkarsa, sabit varyans varsayımı kabul edilir. Öyleyse park testi iki aşamalıdır. Birinci aşamada değişen varyansa aldırmaksızın regresyon analizi yapılır, ikinci aşamada hesaplanan rezidülerle yukarıda verilen modele dayanan ilgili hesaplama yapılır.

5.4.2.5. White Genel Değişen Varyans Testi

White'ın (1980) önerdiği genel değişen varyans testi normallik varsayımına dayanmadığı gibi uygulanması da kolaydır. Bu testte σ^2 'nin, modelde yer alan açıklayıcı değişkenler, açıklayıcı değişkenlerin kareleri ve açıklayıcı değişkenlerin birbirleriyle çarpımlarından etkilenip etkilenmediği araştırılır.

Bu testi yapabilmek için önce tüm açıklayıcı değişkenlerin yer aldığı regresyon modeli EKK yöntemiyle tahmin edilir ve tahmin edilen modelde rezidü kareleri ($\hat{\varepsilon}_i^2$) hesaplanır. Daha sonra rezidü karelerinin yanıt ve her açıklayıcı değişkenin, her açıklayıcı değişkenin karesinin ve açıklayıcı değişkenlerin birbirleriyle çarpımlarının yer aldığı model EKK yöntemiyle tahmin edilir ve modelin çoklu belirleyicilik katsayısı (R^2) bulunur.

$$W_h = nR^2$$

formülü ile test istatistiği hesaplanır. Bu istatistik, açıklayıcı değişken sayısını ifade eden p serbestlik derecesinde χ^2 dağılımına sahiptir.

Eğer $W_h > \chi_p^2$ ise sabit varyanslılık reddedilir yani değişen varyans sorunu vardır. Aksi halde, sabit varyanslılık kabul edilir.

5.5. Değişen Varyans Altında Kovaryans Yapısı ve GEKK Tahmin edicisi

(4.1) modelinde genel kovaryans yapısının sadece değişen varyanstan kaynaklandığını düşünelim. Yani,

$$E[ee'] = \Phi = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2)$$

σ_t^2 , $t = (1, 2, \dots, n)$ ve dolayısıyla Φ biliniyorsa β 'nin en iyi yansız tahmin edicisi olan GEKK tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_A = (X' \Phi^{-1} X)^{-1} X' \Phi^{-1} y$$

olarak elde edilir. Bu tahmin edici $\Phi = \sigma^2 V$ olduğundan dolayı Bölüm 4.4'de verilen $\hat{\beta}_G = (X' V^{-1} X)^{-1} X' V^{-1} y$ tahmin edici ile aynıdır:

$$(X' \Phi^{-1} X)^{-1} X' \Phi^{-1} y = \left(\frac{X' V^{-1} X}{\sigma^2} \right)^{-1} \frac{X' V^{-1} y}{\sigma^2} = (X' V^{-1} X)^{-1} X' V^{-1} y.$$

Sonuç olarak hata kovaryans matrisini bir sabitle çarpmak GEKK tahmin edicisini değiştirmeyecektir. Bölüm 4'den $P'P = \Phi^{-1}$ olacak şekilde bir P matrisinin olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_A &= (X' P' P X)^{-1} X' P' P y \\ &= (X_*' X_*)^{-1} X_*' y_* \end{aligned}$$

olarak yazılır. Burada uygun P matrisi,

$$P = \text{diag}(\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_n^{-1})$$

olur ve bu durumda dönüştürülmüş gözlemler,

$$y_* = \begin{pmatrix} y_{1*} \\ y_{2*} \\ \vdots \\ y_{n*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 / \sigma_1 \\ y_2 / \sigma_2 \\ \vdots \\ y_n / \sigma_n \end{pmatrix}$$

$$X^* = \begin{pmatrix} X_{1*}' \\ X_{2*}' \\ \vdots \\ X_{n*}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \\ \vdots \\ X_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1' / \sigma_1 \\ X_2' / \sigma_2 \\ \vdots \\ X_n' / \sigma_n \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada X_{t*}' ve X_t' sırası ile dönüştürülmüş ve orijinal açıklayıcı değişkenlerin $(1 \times p)$ tipinde olan t -nci satır vektörleridir. Dönüştürülmüş model için t -nci gözlem,

$$\frac{y_t}{\sigma_t} = \frac{X_t'}{\sigma_t} \beta + \frac{e_t}{\sigma_t}$$

$$y_{t*} = X_{t*}' \beta + e_{t*}$$

olarak yazılır. Yani hata kovaryans matrisi köşegen formda değişen varyanslı olduğu zaman yanıt ve açıklayıcı değişken hatanın standart sapmasına bölünerek sabit varyanslı forma dönüştürülür. Dönüştürülmüş gözlemlere bilinen EKK uygulanır. Bu prosedür hatanın standart sapmanın tersi ile ağırlıklandırıldığından dolayı “Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler (AEKK)” olarak adlandırılır.

$e_{t*} = \frac{e_t}{\sigma_t}$ dönüştürülmüş hatanın varyansı,

$$E[e_{t*}^2] = E\left[\left(\frac{e_t}{\sigma_t}\right)^2\right] = \frac{1}{\sigma_t^2} E[e_t^2] = 1$$

olur ve görüldüğü üzere, dönüştürülmüş hatanın varyansı bir ile sabittir. AEKK

tahmin edicisi, $\sum_{t=1}^n \left(\frac{e_t}{\sigma_t}\right)^2 = (y - X\beta)' \Phi^{-1} (y - X\beta)$ ’yi minimum yapar. Buradan

AEKK tahmin edicisinin bir diğer formu,

$$\hat{\beta}_A = \left(\sum_{t=1}^n \sigma_t^{-2} X_t X_t' \right)^{-1} \sum_{t=1}^n \sigma_t^{-2} X_t y_t$$

olarak yazılabilir. $\hat{\beta}_A$ 'nın kovaryansı,

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_A) = (X^*{}' X^*)^{-1} = (X' \Phi^{-1} X)^{-1} = \left(\sum_{t=1}^n \sigma_t^{-2} X_t X_t' \right)^{-1}$$

olarak elde edilir.

6. OTOKORELASYON

6.1. Otokorelasyonun Tanımı

Bölüm 4’de

$$y = X\beta + e \quad (6.1)$$

genel lineer istatistiksel modeli ele alınmıştı. Bu modelin Bölüm 2’de verilen (2.1) modelden farklı olarak $E[ee'] = \Phi = \sigma^2 V$ olduğu belirtilmişti. Φ ’nin tüm köşegen elemanları eşit olmayan köşegen bir matris olarak varsayılmış ve bu kavram değişen varyans olarak tanıtılmıştı. Bu bölümde $E[\varepsilon\varepsilon'] = \sigma^2 I_n$ varsayımının başka hangi durumlarda sağlanmayacağı ile ilgilenmekteyiz. Özellikle de zaman serisi verileri olarak bilinen y gözlemleri ve X açıklayıcı değişkenlerinin zamanın farklı noktalarında meydana gelmesi durumu ile ilgileneceğiz. Bu tür gözlemler firma ya da hane gibi tek bir ekonomik birimler için toplanmış olabilir ya da bir bölge için bütün nicelikler birleştirilmiş olabilir. Örneğin tüketim, yatırım ve gelir üzerindeki zaman serileri verileri tüketim ve yatırım gibi makro ekonomik ilişkileri tahmin etmekte sıklıkla kullanılır. Zaman içinde verinin durumunu anlamak için (6.1) modeli kullanıldığı zaman, ilişkinin yapısı ortaya çıkar. Ekonomik değişkenlerde değişikliğin etkisi anlık olmadığı zaman, bir model yardımıyla elde edilebilir. Bu model aşağıdaki gibi olmalıdır.

1. y_t , kendi geçmiş değerlerine bağlıdır.
2. X , bazı açıklayıcı değişkenlerin gecikmeli ve mevcut değerlerini içerir.
3. e_t , hata denklemleri önceki hata değerlerine dayanır.

İma edilen ilk koşul stokastiktir ve literatürde “Gecikmesi Dağıtılmış Model” adı altında incelenmektedir. İkinci koşul EKK tahminleri için daha fazla varsayım yapmayı gerektirmez. Bununla birlikte çok fazla gecikmeli değişken varsa, katsayılar üzerinden kısıtlama yapmak avantajlı olabilir. Üçüncü koşul ise bu bölümde ilgilenmek istediğimiz durumu ifade etmektedir ve bu durum “Otokorelasyon” olarak tanımlanır. Rasgele hatanın toplam etkisinin sadece anlık olmadığını aynı zamanda

gelecekte de etkisinin olabileceğini ima etmektedir. Bazı ekonomik ilişkiler için uygun bir varsayım olarak görülebilmektedir (Judge ve ark., 1988).

Otokorelasyona neden olan bazı durumlar aşağıda özetlenmiştir.

- ✓ Zaman serileriyle, özellikle trend içeren zaman serileriyle tahmin yapılması
- ✓ Denklemden bulunması gerektiği halde bulunmayan açıklayıcı değişkenlerin varlığı (özellikle bu değişkenlerden en az birinin otokorelasyona sahip olması)
- ✓ Modelin yanlış belirlenmesi
- ✓ Yanıt değişkeninde sistematik, yani rassal olmayan ölçme hatalarının bulunması
- ✓ Yapısal değişikliğin varlığı

6.2. Birinci Dereceden Otoregresif Hatalar

Otokorelasyonun bazı olası formları vardır ve her biri hata kovaryans matrisi için farklı yapılar açar. Otokorelasyonun en bilindik formu olarak 1. dereceden otoregresif prosesin (AR(1)) bazı uygulamalarda yararlı olduğu kanıtlanmıştır. Genel lineer model, $t = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere,

$$y_t = x_t' \beta + e_t \quad (6.2)$$

$$e_t = \rho e_{t-1} + u_t \quad u_t \sim N(0, \sigma_u^2 I_n) \quad (6.3)$$

olarak verilir. Burada y_t , t zamanındaki yanıt değişkeninin gözlemi, x_t' , $x_t' = (x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tp})$, $1 \times p$ tipinde p tane stokastik olmayan açıklayıcı değişkendeki t -inci gözlemi ve β , $p \times 1$ tipinde tahmin edilecek parametre vektörüdür. ρ ve β bilinmemektedir. (6.3)'den görüldüğü üzere, e_t hata denklemi önceki hata değerlerine dayanır. (6.3) modelindeki diğer hata terimi u_t : akagürültü serisidir:

$$E(u_t) = 0, E[u_t^2] = \sigma_u^2 \text{ ve } E[u_s, u_t] = 0, s \neq t.$$

$u' = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ise u akgürültü hataların özellikleri matris formunda aşağıdaki gibidir:

$$E(u) = 0 \text{ ve } E[uu'] = \sigma_u^2 I_n.$$

(6.3) modeli için diğer önemli iki varsayımdan birincisi, $|\rho| < 1$ ve $e_1 \sim N(0, \sigma^2 / (1 - \rho^2))$ koşulunun sağlanmasıdır. Bu varsayım durağan proses için gereklidir (Koopmans, 1942). Yani bu koşul sağlandığında e_t hataların ortalaması, varyans ve kovaryansı zaman içinde değişmemektedir.

Diğer önemli koşul ise $|\rho| \leq 1$ ve e_1 sabittir (ya da keyfi dağılımlı $u_2, \dots, u_n$ den bağımsızdır). Yani keyfi bir dağılım izleyen e_1 'e izin vererek durağan olmayan prosesi göz önüne almaktır (Dufour, 1990).

Birçok yazar bu model için çıkarım yöntemlerini çalışmışlardır. Özellikle, alternatif tahmin edicilerin etkilerinin karşılaştırılması için oldukça önemli konulara yer vermişlerdir. Bu önemli çalışmalara rağmen hipotez testleri ve güven aralıkları asimtotik teorilere dayanmaktadır (Dufour, 1990).

(6.3) eşitliğinin ardışık olarak yerine yazılması ile,

$$\begin{aligned} e_t &= u_t + \rho u_{t-1} + \rho^2 u_{t-2} + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i u_{t-i} \end{aligned} \quad (6.4)$$

elde edilir. Bu eşitlik e_t hatanın ilişkisiz zaman serilerinin ağırlıklandırılmış toplamı olarak ifade edilebilir yani özdeş dağılan $u_t, u_{t-1}, u_{t-2}, \dots$ rasgele hatalarının $1, \rho, \rho^2, \dots$ ile ağırlıklandırıldığını gösterir. Bu aralıklar $0 < \rho < 1$ ise zamanla geometrik olarak azalır. Bu durum y 'yi etkileyen faktörlerin etkisini ima eder. e_t hata terimi ilgili olan u_t 'nin etkisinden meydana gelir ve bu olayın etkisi bir periyod önce (ρu_{t-1}), iki periyod önce ($\rho^2 u_{t-2}$) şeklinde oluşur. (6.4) eşitliği sonsuza kadar giderse alternatif olarak şu şekilde de yazılabilir:

$$\begin{aligned}
e_t &= u_t + \rho u_{t-1} + \rho^2 u_{t-2} + \dots \\
e_{t+1} &= u_{t+1} + \rho u_t + \rho^2 u_{t-1} + \dots \\
e_{t+2} &= u_{t+2} + \rho u_{t+1} + \rho^2 u_t + \dots \\
&\vdots \quad \vdots
\end{aligned}$$

Eğer $|\rho| \geq 1$, $\rho^s \sigma_e^2 = \frac{\rho^s \sigma_u^2}{1-\rho^2}$ ise daha öncede belirtildiği gibi durağanlık bozulur ve

e_t 'nin varyansı zaman içinde artar. $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)'$ için ortalama ve kovaryans (6.4)'ü göz önünde bulundurarak inceleyelim.

$$E(e_t) = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i E(u_{t-i}) = 0$$

$E[ee'] = \Phi$ 'nın köşegen elemanları için $Var(e_t)$ 'nin bulunması gerekmektedir. Proses durağan olduğundan ve varyansı zaman içinde değişmeyeceğinden dolayı (6.3) eşitliğinin her iki tarafının varyansını alarak yazalım.

$$Var(e_t) = \rho^2 Var(e_{t-1}) + Var(u_t)$$

ya da

$$\sigma_e^2 = \rho^2 \sigma_e^2 + \sigma_u^2$$

buradan σ_e^2 'yi çekersek,

$$\sigma_e^2 = \frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2} \quad (6.5)$$

olarak elde edilir. Bir dönem aralığında iki hata arasındaki kovaryans,

$$\begin{aligned}
E[e_t e_{t-1}] &= \rho E[e_{t-1}^2] + E[e_{t-1} u_t] \\
&= \rho \sigma_e^2 = \frac{\rho \sigma_u^2}{1-\rho^2}
\end{aligned}$$

iki dönem aralığında iki hata arasındaki kovaryans,

$$\begin{aligned} E[e_t e_{t-2}] &= \rho E[e_{t-1} e_{t-2}] + E[e_{t-2} u_t] \\ &= \rho^2 \sigma_e^2 = \frac{\rho^2 \sigma_u^2}{1 - \rho^2} \end{aligned}$$

ve S dönem aralığında iki hata arasındaki kovaryans

$$E[e_t e_{t-S}] = \rho^S \sigma_e^2 = \frac{\rho^S \sigma_u^2}{1 - \rho^2} \quad (6.6)$$

olarak elde edilir. S dönem aralığında iki hata denklemini arasındaki ilişkiyi (korelasyonu) bulmak için (6.6) eşitliğini (6.5) eşitliğine böleriz:

$$\frac{E[e_t e_{t-S}]}{\{E(e_t^2)E(e_{t-S}^2)\}^{1/2}} = \frac{\rho^S \sigma_u^2 / (1 - \rho^2)}{\sigma_u^2 / (1 - \rho^2)} = \rho^S \quad (6.7)$$

(6.7) eşitliğinden görüldüğü üzere, dönem aralığı büyük olan iki hata arasındaki ilişki küçük olacaktır.

(6.5) ve (6.7) arasında verilen eşitlikleri kullanarak, hata kovaryans matrisini şu şekilde yazabiliriz:

$$\begin{aligned} E[ee'] = \Phi &= \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1 e_2 & \dots & e_1 e_n \\ e_1 e_2 & e_2^2 & \dots & e_2 e_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n e_1 & e_n e_2 & \dots & e_n^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\sigma_u^2}{1 - \rho^2} \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Bölüm 4'de $\Phi = \sigma^2 V$ olarak tanımlamıştık. Bu bölümde σ_u^2 'yi σ^2 skaler gibi iyileştirmek için aşağıdaki yapı uygun olacaktır.

$$\Phi = \sigma_u^2 V$$

olarak yazabiliriz. Burada,

$$V = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

6.3. Birinci Dereceden Hareketli Ortalamalı Hatalar

Otokorelasyona alternatif yollardan biri 1. dereceden hareketli ortalama (MA(1)) modelidir. (6.2) eşiliğinde verilen modeli göz önüne alalım. Hatalar MA(1) yapısında olduğundan dolayı hatalar

$$e_t = u_t + \tau u_{t-1}, \quad |\tau| < 1 \quad (6.8)$$

olarak formüle edilebilir. Burada $u_t \sim (0, \sigma_u^2)$ dir ve τ bilinmemektedir. (6.8) eşitliğinden faydalanarak e_t 'nin varyansı

$$\begin{aligned} Var(e_t) &= Var(u_t) + \tau^2 Var(u_{t-1}) \\ \sigma_e^2 &= \sigma_u^2 + \tau^2 \sigma_u^2 \\ \sigma_e^2 &= \sigma_u^2 (1 + \tau^2) \end{aligned} \quad (6.9)$$

olarak elde edilir. Bir dönem aralığında iki hata arasındaki kovaryans,

$$\begin{aligned} E[e_t e_{t-1}] &= \tau E[u_{t-1}^2] \\ &= \tau \sigma_u^2 \end{aligned} \quad (6.10)$$

iki ve S dönem aralığında iki hata arasındaki kovaryans,

$$E[e_t e_{t-2}] = 0, \quad E[e_t e_{t-S}] = 0$$

olur. (6.9) ve (6.10) eşitliklerini kullanarak MA(1) hatalarına ilişkin kovaryans matrisi

$$E[ee'] = \Phi = \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1e_2 & \dots & e_1e_n \\ e_1e_2 & e_2^2 & \dots & e_2e_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_ne_1 & e_ne_2 & \dots & e_n^2 \end{bmatrix}$$

$$= \sigma_u^2 \begin{pmatrix} 1+\tau^2 & \tau & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tau & 1+\tau^2 & \tau & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+\tau^2 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tau & 1+\tau^2 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. (6.9) eşitliğinden dolayı

$$E[ee'] = \frac{\sigma_e^2}{1+\tau^2} \begin{pmatrix} 1+\tau^2 & \tau & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tau & 1+\tau^2 & \tau & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+\tau^2 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tau & 1+\tau^2 \end{pmatrix}$$

olur. Bu durumda V matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$V = \frac{1}{1+\tau^2} \begin{pmatrix} 1+\tau^2 & \tau & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tau & 1+\tau^2 & \tau & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+\tau^2 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tau & 1+\tau^2 \end{pmatrix}$$

6.4. Otokorelasyon Katsayısının Tahmini

Otokorelasyon katsayısı ρ ve τ genelde bilinmez. Tahmin edilmiş (Feasible, Estimated) GEKK yöntemi, (4.3)'de verilen dönüştürülmüş modele V bilinmediğinden dolayı $\hat{\rho}$ tahminin kullanılması ile elde edilen $\hat{V}$ tahminini kullanarak uygulanan yöntemi ifade etmektedir:

$$\hat{\beta}_G = (X' \hat{V}^{-1} X)^{-1} X' \hat{V}^{-1} y$$

Buradaki problem ρ 'yu tahmin etmektir. Bunun için ε_t hataları biliniyorsa (6.3) modelinden ρ model katsayısı gibi düşünülür. ε_t hataları bilinmiyorsa, (6.2) modelinden EKK rezidüsü olan $\hat{\varepsilon}_t = y_t - x_t' \hat{b}$ ile güncellenerek $\hat{\varepsilon}_t = \rho \hat{\varepsilon}_{t-1} + \hat{u}_t$ olarak ρ yazılabilir ve ρ 'nun tahmini için uygun bir model elde edilir. Bu modelden ρ için EKK tahmin edicisi şu şekilde elde edilir.

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t+1}}{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2} \quad (6.11)$$

6.5. Birinci Dereceden Otoregresif Hataların Belirlenmesi

Ekonometrik bir ilişkiyi tahmin etmek için zaman serisi verileri kullanıldığında birinci dereceden otoregresif hata varsayımlarının uygun olup olmadığını önceden bilmek zordur. Otokorelasyonun var olup olmadığını anlamak için $H_0 : \rho = 0$ sıfır hipotezi $H_1 : \rho \neq 0$ alternatif hipotezine karşı çift yönlü olarak test edilir. Aşağıda bunun için üç test önerilmiştir.

6.5.1. Asimtotik Bir Test

Uygun varsayım altında $\hat{\rho}$ tahmini, ortalaması ρ ve varyansı $\frac{1-\rho^2}{n}$ ile normale yakınsar. Böylece

$$z = \frac{\hat{\rho} - \rho}{\sqrt{(1-\rho^2)/n}}$$

standart normal dağılıma sahiptir. Eğer H_0 hipotezi doğru ise bu istatistik, $z = \sqrt{n}\hat{\rho}$ olur ve sonuç olarak 0.05 önem düzeyinde iki yönlü test için $|\sqrt{n}\hat{\rho}| \geq 1.96$ ise H_0 hipotezi red edilir ve otokorelasyon sorunun var olduğu tespit edilir.

6.5.2. Durbin-Watson Testi

Asimtotik test, otokorelasyonun olabilirliğini değerlendirmek için hızlı bir prosedür olabilir ancak, sadece asimtotik test olmasından dolayı sonlu örneklemelerde uygun bir yol olmayabilir. Sonlu örneklemelerde alternatif olarak en yaygın kullanılan “Durbin-Watson (DW)” testidir. Bu test Durbin ve Watson tarafından geliştirilmiştir (Durbin ve Watson, 1950, 1951, 1971). DW istatistik değeri

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2} = \frac{\hat{\varepsilon}' A \hat{\varepsilon}}{\hat{\varepsilon}' \hat{\varepsilon}} \quad (6.12)$$

formülü ile hesaplanmaktadır. Burada $\hat{\varepsilon}_t$, $\hat{\varepsilon} = y - X\hat{b}$ vektöründen elde edilen t -nci EKK rezidüyü ifade etmektedir. A matrisi ise (6.12) deki eşitliğin toplam formunu açtığımız zaman elde edeceğimiz katsayıları ifade eden bir matristir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

d 'nin otokorelasyonun tespiti için neden uygun bir test olduğunu gösterelim. (6.12) eşitliğini açarsak,

$$\begin{aligned}
d &= \frac{\sum_{t=2}^n \hat{\varepsilon}_t^2 + \sum_{t=2}^n \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 - 2 \sum_{t=2}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1}}{\hat{\varepsilon}' \hat{\varepsilon}} \\
&= \frac{\hat{\varepsilon}' \hat{\varepsilon} + \hat{\varepsilon}' \hat{\varepsilon} - 2 \sum_{t=2}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1} - \hat{\varepsilon}_1^2 - \hat{\varepsilon}_n^2}{\hat{\varepsilon}' \hat{\varepsilon}} \\
&= 2 - 2\gamma_1 \hat{\rho} - \gamma_2
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $\gamma_1 = \frac{\sum_{t=2}^n \hat{\varepsilon}_{t-1}^2}{\hat{\varepsilon}' \hat{\varepsilon}}$ ve $\gamma_2 = \frac{\hat{\varepsilon}_1^2 + \hat{\varepsilon}_n^2}{\hat{\varepsilon}' \hat{\varepsilon}}$ dir ve n büyük olduğunda $\gamma_1 \approx 1$ ve

$\gamma_2 \approx 0$ olur. Bu durum $d \approx 2 - 2\hat{\rho}$ ya da $\hat{\rho} \approx 1 - \frac{1}{2}d$ olur. d değerinin sıfıra

yaklaşması pozitif otokorelasyonu gösterir. d değerinin 4'e yaklaşması negatif otokorelasyonu gösterir. d değerinin yaklaşık olarak 2 olması ise otokorelasyonun

olmadığını gösterir. Bazen $1 - \frac{1}{2}d$ değeri ρ 'nun alternatif bir tahmini olarak

kullanılmaktadır. $\rho = 0$ hipotezine karşı $\rho > 0$ alternatif hipotezini test edersek, c

kritik değer olmak üzere $d < c$ olduğunda sıfır hipotezi red edilir. Eğer alternatif

hipotez $\rho < 0$ iken $d > c$ ise sıfır hipotezi red edilir. Uygun kritik değeri bulmak için

$\rho = 0$ varsayımı altında d 'nin olasılık dağılımı bilgisine ihtiyaç duyulmaktadır.

Bunun için ε hataların normal dağılım rasgele vektör olduğu varsayılır.

$\hat{\varepsilon} = [I - X(X'X)^{-1}X']\varepsilon = M\varepsilon$ olmak üzere d istatistiğinin diğer bir formülü,

$$d = \frac{\varepsilon' M A M \varepsilon}{\varepsilon' M \varepsilon}$$

olur ve böylece d iki karesel formun oranı olarak ifade edilir. Her iki karesel formda

ε hata vektörünü içerir. Pay ve payda bağımsız olmadıklarından bu iki karesel

formun oranı χ^2 dağılımına sahip olmaz. $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-K}$, MAM 'nin sıfır olmayan

karakteristik kökleri, z_i , bağımsız standart normal rasgele değişkenler olmak üzere

d 'nin alternatif formu,

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n-K} \theta_i z_i^2}{\sum_{i=1}^{n-K} z_i^2} \quad (6.13)$$

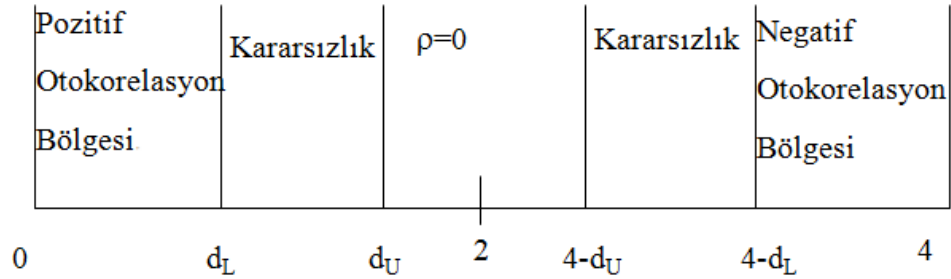
olarak verilmiştir (Judge ve ark., 1998). (6.13) eşitliği θ_i ile ağırlıklandırılmış standart normal rasgele değişkenin karelerinin toplamının ağırlıklandırılmamış standart normal rasgele değişkenin karelerinin toplamına oranını ifade eder. θ_i , açıklayıcı değişkenlere dayandığından dolayı her olası X için θ_i 'nin farklı kümesi, d için farklı olasılık dağılımı ve test için farklı bir kritik değer ortaya çıkacaktır. Bu durumda normal, t , χ^2 ya da F dağılımlarına dayalı bilinen testlerin aksine kritik değerleri tabloya dökmek imkânsızdır. Bu sorunun çözümü olan uygun bir program SHAZAM'dır. Ancak, Durbin ve Watson testlerini ilk önerdiklerinde uygun kuyruk olasılıklarının otomatik hesaplanması için yeterli gelişmeler yoktu. Durbin ve Watson (1971), kısmi çözüm olarak açıklayıcı değişkenlere dayalı olmayan d_L ve d_U gibi iki istatistik göz önüne almış ve bu iki istatistiğin dağılımlarını elde etmişlerdir. Bu iki istatistik için d_L^* ve d_U^* kritik değerlerini tabloştırmışlardır. Örneğin alternatif hipotez $H_1: \rho > 0$ ise ve 0.05 önem düzeyinde test edilmek istenirse d_L^* ve d_U^* şu şekilde olacaktır.

$$P[d_U < d_U^*] = 0.05 \text{ ve } P[d_L < d_L^*] = 0.05$$

d_L ve d_U değerlerinin nasıl yardımcı olacağını göstermek için $H_0: \rho = 0$ hipotezini $H_1: \rho > 0$ alternatif hipotezine karşı 0.05 önem düzeyinde test ettiğimizi varsayalım. $P[d < d^*] = 0.05$ olan d^* değerini bulmayı amaçlıyoruz. Eğer hesaplanan $d < d^*$ ise sıfır hipotezi red edilir aksi halde red edilemez. Bununla birlikte d_L^* ve d_U^* için tablolanmış değerleri “sınır testi” olarak bilinen d, d_L, d_U arasındaki ilişkiden faydalanarak yapılır. Sınır testini tanımlamak için $d_L \leq d \leq d_U$ olduğundan dolayı,

$$P[d < d_L^*] \leq P[d < d^*] = 0.05 \leq P[d < d_U^*]$$

olduğunu göstermek mümkündür.



Şekil 6.1. DW testi için karar şeması (Gujarati, 2004).

Eğer hesaplanan test istatistiğinin değeri kararsızlık bölgelerine denk geliyorsa SHAZAM programını kullanma olanağı olmadığında Durbin ve Watson'un (1971) önerdikleri yaklaşım kullanılabilir. Bu yaklaşımda d^* ,

$$d^* = a + bd_U^*$$

formülünden hesaplanır. Burada a ve b ,

$$E(d) = a + bE(d_U)$$

ve

$$Var(d) = b^2Var(d_U)$$

olacak şekilde seçilir. a ve b 'yi hesaplamak için $E(d)$, $E(d_U)$, $Var(d)$ ve $Var(d_U)$ değerlerine ihtiyaç vardır. Durbin ve Watson örneklem genişliği n ve açıklayıcı değişken sayısı k 'nın farklı değerleri için $E(d_U)$ ve $Var(d_U)$ değerlerini de tabulaştırmışlardır. $E(d)$ ve $Var(d)$ nicelikleri X matrisine dayanır ve aşağıdaki şekilde hesaplanırlar.

$$E(d) = \frac{P}{n-K}$$

$$Var(d) = \frac{2}{(n-K)(n-K+2)} [\phi - PE(d)]$$

burada $P = 2(n-1) - \text{tr}[X'AX(X'X)^{-1}]$ ve

$$\phi = 2(3n-4) - 2\text{tr}[X'A^2X(X'X)^{-1}] + \text{tr}\{X'AX(X'X)^{-1}\}^2 \text{ dir.}$$

DW testinin alternatif hipotezi $H_1 : \rho > 0$ şeklinde ise test adımları,

- (1) $\hat{b} = (X'X)^{-1}X'y$ EKK tahmin edicisi ve ilgili rezidüler $\hat{\varepsilon} = y - X\hat{b}$ elde edilir.
- (2) İlgili DW istatistik değeri (6.12) eşitliğinden hesaplanır.
- (3) Seçilen önem düzeyi için tablo değerleri olan d_L^* ve d_U^* değerleri elde edilir.
- (4) Eğer $d < d_L^*$ ise H_0 red edilir aksi durumda red edilemez ve hipotez testi sonuçlanır.
- (5) Eğer $d_L^* < d < d_U^*$ ise kararsızlık bölgesine düştüğünden $E(d_U)$ ve $\text{Var}(d_U)$ değerleri hesaplanır (a ve b 'yi hesaplamak için).
- (6) $d^* = a + bd_U^*$ değeri hesaplanır.
- (7) $d < d^*$ ise H_0 red edilir aksi durumda red edilemez ve hipotez testi sonuçlanmış olur.

DW testinin alternatif hipotezi $H_1 : \rho < 0$ şeklinde ise test adımları,

- (1) $\hat{b} = (X'X)^{-1}X'y$ EKK tahmin edicisi ve ilgili rezidüler $\hat{\varepsilon} = y - X\hat{b}$ elde edilir.
- (2) İlgili DW istatistik değeri (6.12) eşitliğinden hesaplanır.
- (3) Seçilen önem düzeyi için tablo değerleri olan d_L^* ve d_U^* değerleri elde edilir.
- (4) Eğer $d > 4 - d_L$ ise H_0 red edilir aksi durumda red edilemez ve hipotez testi sonuçlanır.
- (5) Eğer $4 - d_U^* < d < 4 - d_L^*$ ise kararsızlık bölgesine düştüğünden $E(d_U)$ ve $\text{Var}(d_U)$ değerleri hesaplanır (a ve b 'yi hesaplamak için).
- (6) $d^* = a + b(4 - d_L^*)$ değeri hesaplanır.

(7) $d > d^*$ ise H_0 red edilir aksi durumda red edilemez ve hipotez testi sonuçlanmış olur.

DW istatistiğinin bazı durumlarda dezavantajı vardır. X matrisi sabit terim içermiyorsa ve stokastik olmama varsayımını sağlamıyorsa, modelde açıklayıcı değişken olarak açıklayıcı değişkenin gecikmeli değerleri yer alıyorsa ve otokorelasyonun derecesi 1'den büyükse DW istatistiğinin gücü azalmaktadır.

6.5.3. Durbin h Testi

Durbin h testi, yanıt değişkenin gecikmeli değerlerinin açıklayıcı değişken olarak kullanıldığı durumlarda Durbin (1970) tarafından önerilmiştir. Durbin, h istatistiğine dayalı

$$h = \hat{\rho} \left(\frac{n}{1 - n\text{Var}(\hat{\beta}_1)} \right)^{1/2}$$

asimtotik testi geliştirmiştir. Burada $\hat{\rho}$, (6.11) eşitliğinden elde edilmektedir. $\text{Var}(\hat{\beta}_1)$, y_{t-1} 'in katsayısının varyansıdır. Otokorelasyonun olmadığını savunan sıfır hipotezi altında h sıfır ortalamalı ve varyansı sıfıra giden asimptotik olarak normal dağılır. Eğer $n\text{Var}(\hat{\beta}_1) \geq 1$ ise bu istatistiğin değeri hesaplanamaz. Bu durumda Durbin eşdeğer bir asimtotik test önermiştir. $\hat{\varepsilon}_t$ yanıt değişken, $\hat{\varepsilon}_{t-1}$ açıklayıcı değişken olarak alınarak yapılan regresyon analizi sonrasında $\hat{\varepsilon}_{t-1}$ 'in katsayısının önemliliği test edilir. Eğer katsayı anlamlı çıkarsa otokorelasyonun olmadığını ifade eden sıfır hipotezi red edilir.

6.6. Otokorelasyon Altında Hata Kovaryans Yapısı

Uygulamalarda genelde V bilinmez bu durumlarda V tahmin edilir. V matrisinin tahminlerinin bazıları Trenkler (1984), Firinguetti (1989) ve Bayhan ve Bayhan (1998) tarafından verilmiştir.

Trenkler'in (1984) önerdiği V matrisi;

$$V = \frac{1}{1+\tau^2} \begin{pmatrix} 1+\tau^2 & \tau & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tau & 1+\tau^2 & \tau & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+\tau^2 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tau & 1+\tau^2 \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

olup burada hata vektörünün elamanları $\varepsilon_i = u_i + \tau u_{i-1}$, $|\tau| < 1$ yapısına yani MA(1) yapısına sahiptir.

Firinguetti'nin (1989) önerdiği V matrisi;

$$V = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \dots & \rho^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

burada hata vektörünün elemanları $\varepsilon_i = \rho \varepsilon_{i-1} + u_i$, $|\rho| < 1$ yapısına yani AR(1) yapısına sahiptir. u_i hata terimleri $u_i \sim N(0, \sigma^2)$ olan normal dağılımdan gelmektedir. Ayrıca $E(u_i u_j) = 0$, $\forall i \neq j$ varsayımını sağlamaktadır.

Bayhan ve Bayhan'ın (1998) önerdiği Toeplitz formdaki V matrisi;

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \rho_{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

olup burada ρ_i ,

$$\hat{C}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-i} (\hat{\varepsilon}_j - \bar{\varepsilon})(\hat{\varepsilon}_{j+i} - \bar{\varepsilon}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \text{ olmak üzere } \hat{\rho}_i = \frac{\hat{C}_i}{\hat{C}_0} \text{ eşitliği kullanılarak}$$

tahmin edilen i-nci gecikme otokorelasyon katsayısını ifade etmektedir.

Hata kovaryans matrisinin en bilinen formu AR(1) modeline uygunluk sağlayan Firinguetti'nin önerdiği V matrisini kullanarak oluşturulan matristir.

7. GEKK'YE ALTERNATİF OLARAK ÖNERİLEN YANLI TAHMİN EDİCİLER

Bölüm 3, 5 ve 6'da ele alınan çoklu iç ilişki, değişen varyans ve otokorelasyonun bu bölümde aynı anda gerçekleşmesi ile ilgileneceğiz. $E[\varepsilon\varepsilon'] = \sigma^2 I_n$ varsayımının geçersiz $E[ee'] = \sigma^2 V$ varsayımının geçerli olduğu durumlarda V 'nin yapısını hem değişen varyans hemde otokorelasyon olması durumunda inceledik. Ancak, alternatif tahmin edicilere geçmeden önce çoklu iç ilişki probleminin $E[ee'] = \sigma^2 V$ varsayımı altında nasıl belirleneceğini araştıralım. $E[\varepsilon\varepsilon'] = \sigma^2 I_n$ varsayımının geçersiz olduğunu belirledikten sonra Bölüm 4'de anlatılan dönüştürülmüş model yardımıyla çoklu iç ilişkinin modelde var olup olmadığını belirleyebiliriz. Trenkler (1984) ve Özkale (2008) dönüştürülmüş açıklayıcı değişken $PX = X^*$ 'in rankının X 'in rankına eşit olduğundan dolayı çoklu iç ilişki probleminin şiddetini azaltmak için modeli dönüştürmenin yeterli olmadıklarını belirtmişlerdir. Artık çoklu iç ilişkinin dönüştürülmüş modelde var olup olmadığı ile ilgilendiğimizden dolayı, $(X'V^{-1}X)$ matrisinin karakteristik yapısından faydalanılmaktadır. $X'V^{-1}X$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ve özvektörleri $t_1, t_2, \dots, t_p$ olmak üzere, çoklu iç ilişkiyi belirlemek için en büyük özdeğerin en küçük özdeğere oranı olarak tanımlanan koşul sayısı $K = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$ kullanılmaktadır. K , 100'den küçükse çok ciddi boyutta çoklu iç ilişki problemi olmadığı, 100-1000 arasında ise kuvvetli çoklu iç ilişki olduğu, 1000'den büyükse veri içerisinde birden fazla çoklu iç ilişki problemi olduğu kabul edilmektedir.

Hem $E[ee'] = \sigma^2 V$ varsayımının geçerli olduğu hem de çoklu iç ilişki problemlerinin olduğu durumlarda yanlı tahmin ediciler Firinguetti (1989), Trenkler (1984), Özkale (2008) gibi bazı yazarlar tarafından çalışılmıştır.

7.1. Ridge Tahmin Edici

Hoerl ve Kennard'ın (1970) çalışmalarından yola çıkarak Trenkler (1984) $E[ee'] = \sigma^2 V$ altında ridge tahmin ediciyi tanımlamıştır. Bölüm 4'de tanımlanan dönüştürülmüş model yardımıyla β 'nın ridge tahmin edicisi,

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_r &= (X_*' X_* + kI)^{-1} X_*' y_* \\ &= (X' V^{-1} X + kI)^{-1} X' V^{-1} y\end{aligned}$$

olarak elde edilir. $\hat{\beta}_r$ ridge tahmin edici GEKK tahmin edici cinsinden yazılmak istenirse,

$$\hat{\beta}_r = (X' V^{-1} X + kI)^{-1} X' V^{-1} X \hat{\beta}_G = Z_r \hat{\beta}_G$$

olur. $E[ee'] = \sigma^2 V$ altında ridge tahmin edici yanlı bir tahmin edicidir. Yanlılığı,

$$\begin{aligned}\text{Bias}(\hat{\beta}_r) &= E(\hat{\beta}_r) - \beta \\ &= [(X' V^{-1} X + kI)^{-1} X' V^{-1} X - I_p] \beta \\ &= (X' V^{-1} X + kI)^{-1} [X' V^{-1} X - X' V^{-1} X - kI] \beta \\ &= -k(X' V^{-1} X + kI)^{-1} \beta\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Ridge tahmin edicinin kovaryans matrisi; $\text{Cov}(y) = \sigma^2 V$ olduğundan dolayı,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\hat{\beta}_r) &= (X' V^{-1} X + kI)^{-1} X' V^{-1} \text{Cov}(y) (V^{-1})' X (X' V^{-1} X + kI)^{-1} \\ &= \sigma^2 (X' V^{-1} X + kI)^{-1} X' V^{-1} X (X' V^{-1} X + kI)^{-1}\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. O halde ridge tahmin edicinin hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned}\text{MSE}(\hat{\beta}_r, \beta) &= \text{Cov}(\hat{\beta}_r) + \text{Bias}(\hat{\beta}_r) \text{Bias}(\hat{\beta}_r)' \\ &= \sigma^2 (X' V^{-1} X + kI)^{-1} X' V^{-1} X (X' V^{-1} X + kI)^{-1} \\ &\quad + k^2 (X' V^{-1} X + kI)^{-1} \beta \beta' (X' V^{-1} X + kI)^{-1}\end{aligned}$$

şeklindedir. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, $X'V^{-1}X$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere skaler hata kareler ortalaması

$$sMSE(\hat{\beta}_r, \beta) = \text{trace}[MSE(\hat{\beta}_r, \beta)] \\ = \sum_{i=1}^p \frac{\sigma^2 \lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} + k^2 \beta' (X'X + kI)^{-2} \beta$$

şeklindedir.

7.2. Temel Bileşenler Tahmin Edici

Marquardt'ın (1970) önerdiği $E[\varepsilon\varepsilon'] = \sigma^2 I_n$ altındaki temel bileşenler tahmin ediciyi Trenkler (1984), $E[ee'] = \sigma^2 V$ altında tanımlamıştır. Bölüm 2.1.2'den farklı olarak $X'V^{-1}X$ matrisinin spektral ayrışımını kullanarak Trenkler (1984) temel bileşenler tahmin ediciyi $\hat{\beta}^{(r)} = (X'V^{-1}X)_r^+ X'V^{-1}y$ olarak tanımlamıştır. Burada r rankı göstermek üzere $(X'V^{-1}X)_r^+$, $X'V^{-1}X$ 'in genelleştirilmiş tersidir. $\sigma^2 I_n$ durumuna benzer şekilde $\sigma^2 V$ durumu için temel bileşenler tahmin ediciyi,

$$\hat{\beta}^{(r)} = U_1 (U_1' X' V^{-1} X U_1)^{-1} U_1' X' V^{-1} y$$

olarak yazabiliriz. Burada,

$$X'V^{-1}X = U \Lambda U' \\ = (U_1 \ U_2) \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1' \\ U_2' \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Yani Λ , $X'V^{-1}X$ 'in özdeğerlerine karşılık gelen köşegen matris ve U , bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerden oluşan ortogonal matristir. Bölüm 2.1.2'dekine benzer olarak $(U_1' X' V^{-1} X U_1) = \Lambda_1$ 'i kullanırsak, temel bileşenler tahmin edici,

$$\hat{\beta}^{(r)} = U_1 \Lambda_1^{-1} U_1' X' V^{-1} y$$

olarak elde edilmiş olur. $E[ee'] = \sigma^2 V$ altında temel bileşenler tahmin edicinin yanlılığı,

$$\begin{aligned} \text{Bias}(\hat{\beta}^{(r)}) &= E(\hat{\beta}^{(r)}) - \beta \\ &= [U_1(U_1' X' V^{-1} X U_1)^{-1} U_1' X' V^{-1} X - I] \beta \end{aligned}$$

$X' V^{-1} X = U_1 \Lambda_1 U_1' + U_2 \Lambda_2 U_2'$ eşitliğini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \text{Bias}(\hat{\beta}^{(r)}) &= [U_1 \Lambda_1^{-1} U_1' (U_1 \Lambda_1 U_1' + U_2 \Lambda_2 U_2') - I] \beta \\ &= [U_1 \Lambda_1^{-1} U_1' U_1 \Lambda_1 U_1' + U_1 \Lambda_1^{-1} U_1' U_2 \Lambda_2 U_2' - I] \beta \\ &= [U_1 \Lambda_1^{-1} \Lambda_1 U_1' - I] \beta \\ &= [U_1 U_1' - I] \beta \end{aligned}$$

ve kovaryans matrisi,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{\beta}^{(r)}) &= \text{Cov}[U_1 \Lambda_1^{-1} U_1' X' V^{-1} y] \\ &= U_1 \Lambda_1^{-1} U_1' X' V^{-1} \text{Cov}(y) (V^{-1})' X U_1 \Lambda_1^{-1} U_1' \\ &= \sigma^2 U_1 \Lambda_1^{-1} U_1' X' V^{-1} V (V^{-1})' X U_1 \Lambda_1^{-1} U_1' \\ &= \sigma^2 U_1 \Lambda_1^{-1} U_1' X' \underbrace{V^{-1} X U_1 \Lambda_1^{-1} U_1'}_{\Lambda_1} \\ &= \sigma^2 U_1 \Lambda_1^{-1} U_1' \end{aligned}$$

olarak elde edilir. O halde temel bileşenler tahmin edicinin hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\hat{\beta}^{(r)}, \beta) &= \text{Cov}(\hat{\beta}^{(r)}) + \text{Bias}(\hat{\beta}^{(r)}) \text{Bias}(\hat{\beta}^{(r)})' \\ &= \sigma^2 U_1 \Lambda_1^{-1} U_1' + [U_1 U_1' - I] \beta \beta' [U_1 U_1' - I] \end{aligned}$$

ve $U_1 U_1' - I = -U_2 U_2'$ olduğundan dolayı

$$\text{MSE}(\hat{\beta}^{(r)}, \beta) = \sigma^2 U_1 \Lambda_1^{-1} U_1' + U_2 U_2' \beta \beta' U_2 U_2'$$

olarak elde edilir.

7.3. Jackknifed Ridge Tahmin Edici

Singh ve ark.'nın (1986), $E[\varepsilon\varepsilon'] = \sigma^2 I_n$ altında önerdiği jackknifed ridge tahmin ediciyi Özkale (2008), $E[ee'] = \sigma^2 V$ altında vermiştir. Buna göre jackknifed ridge tahmin edici dönüştürülmüş model üzerinden aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\hat{\beta}^{(J)} = [I - k^2(X'V^{-1}X + kI)^{-2}] \hat{\beta}_G$$

burada $\hat{\beta}_G$, GEKK tahmin edicisidir. Jackknifed ridge tahmin edici yanlı bir tahmin edici olup yanlılığı,

$$\begin{aligned} Bias(\hat{\beta}^{(J)}) &= E(\hat{\beta}^{(J)}) - \beta \\ &= [I - k^2(X'V^{-1}X + kI)^{-2}] E(\hat{\beta}) - \beta \\ &= -k^2(X'V^{-1}X + kI)^{-2} \beta \end{aligned}$$

ve kovaryans matrisi, $Cov(\hat{\beta}_G) = \sigma^2(X'V^{-1}X)^{-1}$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} Cov(\hat{\beta}^{(J)}) &= [I - k^2(X'V^{-1}X + kI)^{-2}] Cov(\hat{\beta}_G) [I - k^2(X'V^{-1}X + kI)^{-2}]' \\ &= \sigma^2 [I - k^2(X'V^{-1}X + kI)^{-2}] (X'V^{-1}X)^{-1} [I - k^2(X'V^{-1}X + kI)^{-2}] \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} Cov(\hat{\beta}^{(J)}) &= \sigma^2 \left[I + k(X'V^{-1}X + kI)^{-1} \right] (X'V^{-1}X + kI)^{-1} X'V^{-1}X (X'V^{-1}X + kI)^{-1} \\ &\quad \times \left[I + k(X'V^{-1}X + kI)^{-1} \right] \end{aligned}$$

olarak elde edilebilir. $E[ee'] = \sigma^2 V$ altında jackknifed ridge tahmin edicinin hata kareler ortalaması

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\beta}^{(J)}, \beta) &= Cov(\hat{\beta}^{(J)}) + Bias(\hat{\beta}^{(J)}) Bias(\hat{\beta}^{(J)})' \\ &= \sigma^2 [I - k^2(X'V^{-1}X + kI)^{-2}] (X'V^{-1}X)^{-1} [I - k^2(X'V^{-1}X + kI)^{-2}] \\ &\quad + k^4 (X'V^{-1}X + kI)^{-2} \beta \beta' (X'V^{-1}X + kI)^{-2} \end{aligned}$$

olur.

7.4. Shrunken Tahmin Edici

Mayer ve Willke'nin (1973) $E[\varepsilon\varepsilon'] = \sigma^2 I_n$ altında önerdiği shrunken tahmin ediciyi Trenkler (1984), $E[ee'] = \sigma^2 V$ altında incelemiştir. Dönüştürülmüş model üzerinde elde edilen shrunken tahmin ediciyi $0 < c < 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_c &= c(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y \\ &= c\hat{\beta}_G\end{aligned}$$

olarak önermiştir. Burada $\hat{\beta}_G$, GEKK tahmin edicisidir. Shrunken yanlı bir tahmin edici olup yanlılığı,

$$\begin{aligned}\text{Bias}(\hat{\beta}_c) &= E(\hat{\beta}_c) - \beta \\ &= (c-1)\beta\end{aligned}$$

ve kovaryans matrisi,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\hat{\beta}_c) &= c^2 \text{Cov}(\hat{\beta}_G) \\ &= c^2 \sigma^2 (X'V^{-1}X)^{-1}\end{aligned}$$

olarak bulunur. $E[ee'] = \sigma^2 V$ altında shrunken tahmin edicinin hata kareler ortalaması

$$\begin{aligned}\text{MSE}(\hat{\beta}_c, \beta) &= \text{Cov}(\hat{\beta}_c) + \text{Bias}(\hat{\beta}_c)\text{Bias}(\hat{\beta}_c)' \\ &= c^2 \sigma^2 (X'V^{-1}X)^{-1} + (c-1)^2 \beta\beta'\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

7.5. İterasyon Tahmin Edici

Trenkler (1978) hata kovaryans yapısının sabit olduğu durumda önerdiği iterasyon tahmin ediciyi genel hata kovaryans yapısına uyarlamıştır (Trenkler, 1984).

(4.3) eşitliğinde verilen dönüştürülmüş model yardımıyla iterasyon tahmin edici, $\lambda_{\max}$, $X'V^{-1}X$ matrisinin en büyük özdeğeri olmak üzere

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{m,\alpha} &= \alpha \sum_{i=0}^m (I - \alpha X_*' X_*)^i X_*' y_* \\ &= \alpha \sum_{i=0}^m (I - \alpha X' V^{-1} X)^i X' V^{-1} y, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{\lambda_{\max}}, \quad m = 0, 1, \dots\end{aligned}$$

şeklindedir. $W = W_{m,\alpha} = \alpha \sum_{i=0}^m (I - \alpha X' V^{-1} X)^i X' V^{-1} X$ olmak üzere Trenkler (1984)

iterasyon tahmin ediciyi GEKK tahmin edicisinin lineer dönüşümü olarak $\hat{\beta}_{m,\alpha} = W \hat{\beta}_G$ formunda vermiştir.

7.6. Alternatif Tahmin Edicilerin Performanslarının Karşılaştırılması

Hem değişen varyans/otokorelasyon hemde çoklu iç ilişki problemlerinin aynı anda meydana gelmesi durumunda önerilen alternatif tahmin edicilerin performanslarının teorik olarak karşılaştırılması hata kareler ortalaması (MSE) kriterine göre yapılmıştır.

Teorem 1: Farebrother (1976). $A: m \times m$ tipinde simetrik pozitif tanımlı bir matris, $a: m \times 1$ tipinde bir vektör ve α : pozitif bir sayı olmak üzere, $\alpha A - aa'$ 'nin pozitif tanımlı (pozitif yarı tanımlı) olması için gerek ve yeter koşul, $a' A^{-1} a < (\leq) \alpha$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 2: Trenkler ve Toutenburg (1990). $\hat{\beta}_j$ $j=1, 2$ β 'nin herhangi iki lineer tahmin edicisi olsun. $D = \text{Cov}(\hat{\beta}_1) - \text{Cov}(\hat{\beta}_2)$ kovaryans farklarının pozitif tanımlı olduğunu varsayalım. O halde, $\Delta = \text{MSE}(\hat{\beta}_1) - \text{MSE}(\hat{\beta}_2)$ farkının negatif olmayan tanımlı olması için gerek ve yeter koşul $b_j, \hat{\beta}_j$ 'nin yanlılık vektörünü göstermek üzere $b_2'(D + b_1 b_1')^{-1} b_2 \leq 1$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 3: Trenkler (1984). (4.1) lineer regresyon modeli altında ridge tahmin edicinin MSE kriterine göre GEKK'den üstün olması için gerek ve yeter koşul,

$$\beta' \left[\frac{2}{k} I_p + (X'V^{-1}X)^{-1} \right]^{-1} \beta \leq \sigma^2$$

olmasıdır.

İspat 3: $\Delta_1 = MSE(\hat{\beta}_G, \beta) - MSE(\hat{\beta}_r, \beta)$ hata kareler ortalaması farkının pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter koşullar incelensin.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \sigma^2 (X'V^{-1}X)^{-1} - \sigma^2 (X'V^{-1}X + kI)^{-1} X'V^{-1} X (X'V^{-1}X + kI)^{-1} \\ &\quad - k^2 (X'V^{-1}X + kI)^{-1} \beta \beta' (X'V^{-1}X + kI)^{-1} \\ &= (X'V^{-1}X + kI)^{-1} \begin{bmatrix} \sigma^2 (X'V^{-1}X + kI)(X'V^{-1}X)^{-1}(X'V^{-1}X + kI) \\ -\sigma^2 (X'V^{-1}X) - k^2 \beta \beta' \end{bmatrix} (X'V^{-1}X + kI)^{-1} \\ &= (X'V^{-1}X + kI)^{-1} \begin{bmatrix} \sigma^2 (X'V^{-1}X + 2kI + k^2 (X'V^{-1}X)^{-1}) \\ \underbrace{-\sigma^2 (X'V^{-1}X) - k^2 \beta \beta'}_{\Delta_1 \text{ 'in pozitif yarı tanımlı olması için bu parçanın pozitif yarı tanımlı olması gerek}} \end{bmatrix} (X'V^{-1}X + kI)^{-1} \end{aligned}$$

olmak üzere, $A = \sigma^2 (2kI_p + k^2 (X'V^{-1}X)^{-1})$ pozitif tanımlı matris ve $a = k\beta$ dersek, Teorem 1 yardımıyla,

$$\beta' k [\sigma^2 (2kI_p + k^2 (X'V^{-1}X)^{-1})]^{-1} k \beta \leq 1$$

$$\beta' k [2kI_p + k^2 (X'V^{-1}X)^{-1}]^{-1} k \beta \leq \sigma^2$$

$$\beta' \left[\frac{2}{k} I_p + (X'V^{-1}X)^{-1} \right]^{-1} \beta \leq \sigma^2$$

eşitsizliğin sağlanması gerekir.

Teorem 4: (4.1) lineer regresyon modeli altında temel bileşenler tahmin edicinin MSE kriterine göre GEKK'den üstün olması için gerek ve yeter koşul,

$$\beta'U_2\Lambda_2U_2'\beta \leq \sigma^2$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat 4: $\Delta_2 = MSE(\hat{\beta}_G, \beta) - MSE(\hat{\beta}^{(r)}, \beta)$ hata kareler ortalaması farkının pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter koşul incelensin.

$$\Delta_2 = \sigma^2(X'V^{-1}X)^{-1} - \sigma^2U_1\Lambda_1^{-1}U_1' - U_2U_2'\beta\beta'U_2U_2'$$

$(X'V^{-1}X) = U_1(\Lambda_1)^{-1}U_1' + U_2(\Lambda_2)^{-1}U_2'$ eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \sigma^2U_2\Lambda_2^{-1}U_2' - U_2U_2'\beta\beta'U_2U_2' \\ &= U_2[\sigma^2\Lambda_2^{-1} - U_2'\beta\beta'U_2]U_2'\end{aligned}$$

$\sigma^2\Lambda_2^{-1} - U_2'\beta\beta'U_2$ pozitif yarı tanımlı ise Δ_2 'de pozitif yarı tanımlıdır. $A = \sigma^2\Lambda_2^{-1}$ ve $a = U_2'\beta$ alınarak Teorem 1 uygulanırsa

$$\beta'U_2'[\Lambda_2^{-1}]^{-1}U_2'\beta \leq \sigma^2$$

$$\beta'U_2\Lambda_2U_2'\beta \leq \sigma^2$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 5: Özkale, (2008). (4.1) lineer regresyon modeli altında jackknifed ridge tahmin edicinin MSE kriterine göre GEKK'den üstün olması için gerek ve yeter koşul,

$$k^2\beta'[2(X'V^{-1}X) + 4kI + k^2(X'V^{-1}X)^{-1}]^{-1}\beta \leq \sigma^2$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat 5: $\Delta_3 = MSE(\hat{\beta}_G, \beta) - MSE(\hat{\beta}^{(j)}, \beta)$ hata kareler ortalaması farkının pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter koşul incelensin.

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= \sigma^2(X'V^{-1}X)^{-1} - \sigma^2[I - k^2(X'V^{-1}X + kI)^{-2}] \\ &\quad \times (X'V^{-1}X)^{-1}[I - k^2(X'V^{-1}X + kI)^{-2}] \\ &\quad - k^4(X'V^{-1}X + kI)^{-2}\beta\beta'(X'V^{-1}X + kI)^{-2}\end{aligned}$$

sağdan ve soldan $(X'V^{-1}X + kI)^{-2}$ parantezine alınsın.

$$\Delta_3 = (X'V^{-1}X + kI)^{-2} \begin{bmatrix} \sigma^2(X'V^{-1}X + kI)^2(X'V^{-1}X)^{-1}(X'V^{-1}X + kI)^2 \\ -\sigma^2(X'V^{-1}X + kI)^2(I - k^2(X'V^{-1}X + kI)^{-2}) \\ \times (X'V^{-1}X)^{-1}(I - k^2(X'V^{-1}X + kI)^{-2})(X'V^{-1}X + kI)^2 \\ -k^4\beta\beta' \end{bmatrix} (X'V^{-1}X + kI)^{-2}$$

Δ_3 'ün pozitif yarı tanımlı olması için köşeli parantez içindeki parçanın pozitif yarı tanımlı olması gerekmektedir. Gerekli düzeltmeler yapıldıktan sonra bahsi geçen ifade,

$$2k^2\sigma^2(X'V^{-1}X)^{-1}(X'V^{-1}X + kI)^2 - k^4\sigma^2(X'V^{-1}X)^{-1} - k^4\beta\beta'$$

durumuna dönüşür.

$$A = 2k^2\sigma^2(X'V^{-1}X)^{-1}(X'V^{-1}X + kI)^2 - k^4\sigma^2(X'V^{-1}X)^{-1} \text{ dersek,}$$

$$\begin{aligned}A &= k^2\sigma^2(X'V^{-1}X)^{-1} \left[2(X'VX)^2 + 4k(X'V^{-1}X) + 2k^2I - k^2I \right] \\ &= k^2\sigma^2 \left[2(X'V^{-1}X) + 4kI + k^2(X'V^{-1}X)^{-1} \right]\end{aligned}$$

olup A pozitif tanımlı bir matris olduğundan Teorem 1'in kullanılması ile

$$k^2\beta' \left[2(X'V^{-1}X) + 4kI + k^2(X'V^{-1}X)^{-1} \right]^{-1} \beta \leq \sigma^2$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 6: (4.1) lineer regresyon modeli altında shrunken tahmin edicinin MSE kriterine göre GEKK'den üstünlüğü için için gerek ve yeter koşul,

$$\beta'(X'V^{-1}X)\beta \leq \frac{\sigma^2(c+1)}{1-c}$$

eşitsizliğinin geçerli olmasıdır.

İspat 6: $\Delta_4 = MSE(\hat{\beta}_G, \beta) - MSE(\hat{\beta}_c, \beta)$ hata kareler ortalaması farkının pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter koşul incelensin.

$$\begin{aligned}\Delta_4 &= \sigma^2(X'V^{-1}X)^{-1} - c^2\sigma^2(X'V^{-1}X)^{-1} - (c-1)^2\beta\beta' \\ &= \sigma^2(1-c^2)(X'V^{-1}X)^{-1} - (c-1)^2\beta\beta'\end{aligned}$$

olur ve $0 < c < 1$ olduğundan dolayı $\sigma^2(1-c^2)(X'V^{-1}X)^{-1}$ pozitif tanımlı bir matristir. Dolayısıyla Teorem 1'in sonucunun Δ_4 'e direkt uygulanması ile,

$$\begin{aligned}\beta'(c-1)[(1-c^2)\sigma^2(X'V^{-1}X)^{-1}]^{-1}(c-1)\beta &\leq 1 \\ \beta'(X'V^{-1}X)\beta &\leq \frac{\sigma^2(c+1)}{1-c}, \quad 0 < 1-c < 1\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilmiş olur.

Teorem 7: Özkale (2008). (4.1) lineer regresyon modeli altında jackknifed ridge tahmin edicinin yanlılığı ridge tahmin edicinin yanlılığından daha küçüktür:

$$\|Bias(\hat{\beta}^{(J)})\|^2 < \|Bias(\hat{\beta}_r)\|^2, \quad k > 0.$$

İspat 7: $Bias(\hat{\beta}_r) = -k(X'V^{-1}X + kI)^{-1}\beta$ ve $Bias(\hat{\beta}^{(J)}) = -k^2(X'V^{-1}X + kI)^{-2}\beta$ olmak üzere,

$$\|Bias(\hat{\beta}_r)\|^2 - \|Bias(\hat{\beta}^{(J)})\|^2 = \beta'G\beta$$

olur. Burada $G = k^2(X'V^{-1}X + kI)^{-2} - k^4(X'V^{-1}X + kI)^{-4}$, dir ve $G, \frac{k^2\lambda_i(\lambda_i + 2k)}{(\lambda_i + k)^4}$

köşegen elemanları ile köşegen bir matristir ($\lambda_i, X'V^{-1}X$ 'in özdeğerleridir). $\beta'G\beta$ $k > 0$ için pozitif bir matristir.

Teorem 8: Özkale (2008). (4.1) lineer regresyon modeli altında

$$\sigma^2 + k^3 \beta' [2(X'V^{-1}X) + 3kI]^{-1} (X'V^{-1}X)^{-1} \beta \geq 0$$

eşitsizli geçerli ise jackknifed ridge tahmin edici MSE kriterine göre ridge tahmin ediciden daha üstündür.

İspat 8: $\Delta_5 = MSE(\hat{\beta}_r, \beta) - MSE(\hat{\beta}^{(j)}, \beta)$ hata kareler ortalaması farkının pozitif yarı tanımlı olması için koşul incelensin.

$$D = (X'V^{-1}X + kI)^{-1} X'V^{-1} X (X'V^{-1}X + kI)^{-1} \\ - [I - k^2(X'V^{-1}X + kI)^{-2}] (X'V^{-1}X)^{-1} [I - k^2(X'V^{-1}X + kI)^{-2}],$$

$b_1 = -k(X'V^{-1}X + kI)^{-1} \beta$ ve $b_2 = -k^2(X'V^{-1}X + kI)^{-2} \beta$ olmak üzere Teorem 2 yardımıyla Δ_5 farkı $\Delta_5 = \sigma^2 D + b_1 b_1' - b_2 b_2'$ olarak yazılabilir. $X'V^{-1}X = Z$ dersek, Δ_5

$$\beta' k^2 (Z + kI)^{-2} \begin{bmatrix} (Z + kI)^{-1} Z (Z + kI)^{-1} \\ -(I - k^2(Z + kI)^{-2}) Z^{-1} \\ \times (I - k^2(Z + kI)^{-2}) \\ + k^2 (Z + kI)^{-1} \beta \beta' (Z + kI)^{-1} \end{bmatrix}^{-1} k^2 (Z + kI)^{-2} \beta \leq \sigma^2$$

şeklinde yazılabilir. $k^2 (Z + kI)^{-1} \beta \beta' (Z + kI)^{-1}$ pozitif tanımlı olduğundan eşitsizlikten çıkartılabilir.

$$\beta' k^2 (Z + kI)^{-2} [(Z + kI)^{-1} Z (Z + kI)^{-1} \\ - (I - k^2(Z + kI)^{-2}) Z^{-1} (I - k^2(Z + kI)^{-2})]^{-1} k^2 (Z + kI)^{-2} \beta \leq \sigma^2$$

$$\beta' k^2 [(Z + kI) Z (Z + kI) - [(Z + kI)^2 - k^2 I] Z^{-1} [(Z + kI)^2 - k^2 I]]^{-1} k^2 \beta \leq \sigma^2$$

$$-k^3 \beta' [2(X'V^{-1}X) + 3kI]^{-1} (X'V^{-1}X)^{-1} \beta \leq \sigma^2$$

$$\sigma^2 + k^3 \beta' [2(X'V^{-1}X) + 3kI]^{-1} (X'V^{-1}X)^{-1} \beta \geq 0$$

olur.

Teorem 9: (4.1) lineer regresyon modeli altında $\forall i=1,2,\dots,p$ için λ_i , $X'V^{-1}X$ 'in özdeğerleri olmak üzere, $\lambda_i < \frac{ck}{1-c}$ iken,

$$k^2\beta'[(c^2-1)(X'V^{-1}X)+2kc^2I+c^2k^2(X'V^{-1}X)^{-1}]\beta \leq \sigma^2$$

eşitsizliği geçerli ise ridge tahmin edici MSE kriterine göre shrunken tahmin ediciden daha üstündür.

İspat 9: $\Delta_6 = MSE(\hat{\beta}_c, \beta) - MSE(\hat{\beta}_r, \beta)$ hata kareler ortalaması farkının pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter koşul incelensin.

$$D = c^2(X'V^{-1}X)^{-1} - (X'V^{-1}X + kI)^{-1}X'V^{-1}X(X'V^{-1}X + kI)^{-1}, \quad b_1 = (c-1)\beta \quad \text{ve}$$

$$b_2 = -k(X'V^{-1}X + kI)^{-1}\beta \quad \text{olmak üzere} \quad \Delta_6 = \sigma^2 D + b_1 b_1' - b_2 b_2' \quad \text{olur.}$$

$(c-1)^2\beta\beta'$ pozitif tanımlı olduğundan dolayı $\sigma^2 D - b_2 b_2'$ pozitif yarı tanımlı ise Δ_6 'da pozitif yarı tanımlıdır.

$$\begin{aligned} D &= (X'V^{-1}X + kI)^{-1} \left[c^2(X'V^{-1}X + kI)(X'V^{-1}X)^{-1} \right] (X'V^{-1}X + kI)^{-1} \\ &= \underbrace{(X'V^{-1}X + kI)^{-1}}_U \left[\begin{array}{c} (c^2-1)X'V^{-1}X + 2kc^2I \\ + c^2k^2(X'V^{-1}X)^{-1} \end{array} \right] \underbrace{(X'V^{-1}X + kI)^{-1}}_{U'} \\ &= U \left[(c^2-1)X'V^{-1}X + 2kc^2I + c^2k^2(X'V^{-1}X)^{-1} \right] U' \end{aligned}$$

olmak üzere Teorem 1'in uygulanabilmesi için D 'nin pozitif tanımlı olması gerekir.

O halde D 'nin pozitif tanımlılığı incelensin. D 'nin köşegen elemanları, λ_i ,

$X'V^{-1}X$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere,

$$(c^2 - 1)\lambda_i + 2kc^2 + \frac{c^2 k^2}{\lambda_i} = \frac{(c^2 - 1)\lambda_i^2 + 2kc^2\lambda_i + c^2 k^2}{\lambda_i}$$

$$= \frac{c^2(\lambda_i + k)^2 - \lambda_i^2}{\lambda_i}$$

dir. D 'nin pozitif tanımlı olması için $\frac{c^2(\lambda_i + k)^2 - \lambda_i^2}{\lambda_i} > 0$ olması gerekir.

$c^2(\lambda_i + k)^2 - \lambda_i^2 > 0$ olması için ancak ve ancak $c(\lambda_i + k) > \lambda_i$ veya $c(\lambda_i + k) < -\lambda_i$ olması gerekir. $\lambda_i > 0$ olduğundan dolayı $c(\lambda_i + k) < -\lambda_i$ 'nin sağlanması olanaksızdır. O halde D 'nin pozitif tanımlı olması için $c(\lambda_i + k) > \lambda_i$ 'nin sağlanması gerekir. Diğer bir ifadeyle $\lambda_i < \frac{ck}{1-c}$ iken D pozitif tanımlı olur. D 'nin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter koşul bulunduğundan sonra Teorem 1'in uygulanması ile $\sigma^2 D - b_2 b_2'$ 'nin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter koşul

$$k^2 \beta' \left[(c^2 - 1)(X' V^{-1} X) + 2kc^2 I + c^2 k^2 (X' V^{-1} X)^{-1} \right]^{-1} \beta \leq \sigma^2$$

olarak elde edilir.

8. EKONOMETRİK BİR UYGULAMA

Bu bölümde yapılan teorik karşılaştırmalar gerçek bir örnek üzerinde incelenecektir. Kullanılan veriler şampuan ve sabun üreten bir firmanın şampuan satışlarının haftalık değişimlerini ve bir sonraki hafta için oluşacak talebi tahmin etmeyi amaçlayan Bayhan ve Bayhan'ın (1998) çalışmalarından alınmıştır. Tablo 8.1 ve Tablo 8.2'de satışların standartlaştırılmış 75 haftalık gözlemleri yüksek ve düzensiz enflasyon periyodunda verilmiştir. Tablo 8.1 ve Tablo 8.2'de verilen y_i , y_j satılan şampuanların haftalık miktarlarını, x_{i1} , x_{j1} haftalık fiyat listesini (ürünün satışı yapılan marketlerdeki fiyat ortalaması) ve x_{i2} , x_{j2} şampuanın ikamesi olan belli markada sabunun fiyat listesini ifade etmektedir.

Standartlaştırılan değişkenler için model

$$y_j = \beta_1 x_{j1} + \beta_2 x_{j2} + e_j, \quad E(e_j) = 0, \quad E(e_j e_{j+k}) = \sigma^2 \rho_k \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, 15 \\ k = 0, 1, 2, \dots, 14 \end{cases}$$

olarak tanımlanmıştır. Bu denklem matris formunda

$$y = X\beta + e \quad E(e) = 0 \quad E(ee') = \sigma^2 V$$

şeklinde gösterilebilir. Genel kovaryans matrisi bilinmediğinden Tablo 8. 1'de verilen geçmiş veri yardımıyla V matrisi tahmin edilmiş ve tahmin edilen V matrisi Tablo 8. 2'de verilen mevcut veri için kullanılmıştır. Dolayısıyla geçmiş veriden tahmin edilen V matrisi, mevcut veri için biliniyor kabul edilmiştir. Geçmiş veriden tahmin edilecek V matrisi (6.15) eşitliğinde verilen Bayhan ve Bayhan (1998)'in tanımlamış olduğu gecikmeli otokorelasyonlara bağlı olan V matrisi formundadır. Tablo 8.3'de 14 gecikme için tahmin edilen rezidülerin otokorelasyonları verilmiştir.

Tablo 8.1. Geçmiş veri (Historical data) için 60 haftalık fiyat ve şampuan satışlarının verisi

Gözlem no	y_i	x_{i1}	x_{i2}	Gözlem no	y_i	x_{i1}	x_{i2}
1	-0.2164	-0.2128	-0.2455	31	0.0050	0.0764	0.0448
2	-0.2089	-0.2128	-0.2455	32	0.0126	0.0813	0.0448
3	-0.2017	-0.1948	-0.2288	33	0.0194	0.0813	0.0448
4	-0.1942	-0.1948	-0.2288	34	0.0269	0.0241	0.0081
5	-0.1866	-0.2838	-0.2288	35	0.0347	0.0241	0.0081
6	-0.1799	-0.1883	-0.2288	36	0.0414	0.0510	0.0081
7	-0.1721	-0.1858	-0.2021	37	0.0490	0.0657	0.0382
8	-0.1650	-0.1393	-0.1821	38	0.0566	0.0649	0.0382
9	-0.1572	-0.1393	-0.1821	39	0.0643	0.1098	0.0815
10	-0.1570	-0.1393	-0.1821	40	0.0712	0.1098	0.0815
11	-0.1428	-0.1066	-0.1287	41	0.0784	0.1098	0.0815
12	-0.1352	-0.1066	-0.1287	42	0.0861	-0.0519	0.1016
13	-0.1279	-0.1066	-0.1287	43	0.0933	-0.0519	0.1016
14	-0.1203	-0.1883	-0.0920	44	0.1011	0.1327	0.1016
15	-0.1134	-0.0641	-0.0920	45	0.1080	0.1327	0.1016
16	-0.1721	-0.0641	-0.0920	46	0.1160	0.1327	0.1049
17	-0.0983	-0.0641	-0.0620	47	0.1225	0.1450	0.1049
18	-0.0912	-0.0641	-0.0620	48	0.1303	0.1450	0.1049
19	-0.0836	-0.0217	-0.0620	49	0.1380	0.0077	0.1850
20	-0.0760	-0.0217	-0.0620	50	0.1452	0.0077	0.2050
21	-0.0691	-0.0217	-0.0620	51	0.1523	0.1499	0.1416
22	-0.0612	-0.0217	0.0382	52	0.1597	0.1499	0.1416
23	-0.0544	0.0404	0.0382	53	0.1674	0.1499	0.1416
24	-0.0472	-0.0249	-0.0519	54	0.1747	0.1736	0.1416
25	-0.0393	-0.0249	-0.0519	55	0.1823	0.1736	0.1483
26	-0.0317	-0.1638	-0.0286	56	0.1890	0.1809	0.1483
27	-0.0241	-0.2210	-0.0286	57	0.1964	0.1809	0.1483
28	-0.0170	0.0412	-0.0152	58	0.2040	0.0012	0.1750
29	-0.0098	0.0412	0.0448	59	0.2117	0.2038	0.1750
30	-0.0027	0.0764	0.0448	60	0.2189	0.2160	0.1850

Tablo 8.2. Mevcut veri (Fresh data) için 15 haftalık fiyatlar ve şampuan satışlarının verisi

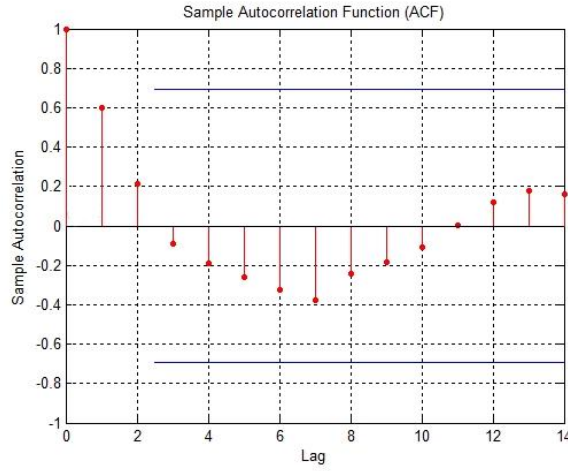
Gözlem no	y_j	x_{j1}	x_{j2}
1	-0.0875	-0.4219	-0.4299
2	-0.1810	-0.3634	-0.3634
3	-0.2652	-0.3049	-0.2970
4	-0.3553	-0.2380	-0.2305
5	-0.3094	-0.1795	-0.1640
6	-0.2318	-0.1210	-0.1308
7	-0.1534	-0.0624	-0.0643
8	-0.0892	0.0463	0.0022
9	-0.0049	0.0546	0.0687
10	0.0801	0.1131	0.1352
11	0.1619	0.1800	0.1684
12	0.2411	0.2302	0.2349
13	0.3145	0.2971	0.3014
14	0.3905	0.3556	0.3679
15	0.4897	0.4141	0.4011

Tablo 8.3. Geçmiş veri rezidüleri için tahmin edilen otokorelasyonlar

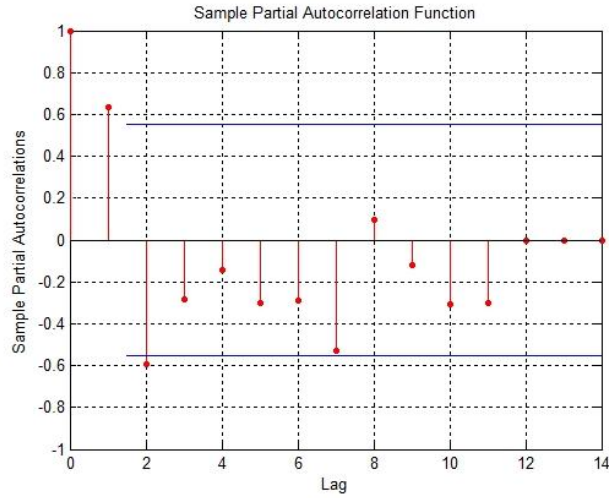
Gecikme	$\hat{\rho}_k$
1	0.7072
2	0.4165
3	0.2825
4	0.1676
5	0.1194
6	0.2127
7	0.2492
8	0.1624
9	0.1080
10	0.0824
11	0.0247
12	-0.0564
13	-0.1043
14	-0.1029

Mevcut veri için ACF ve PACF grafikleri Şekil 8.1 ve 8.2’de verilmiştir. ACF ve PACF grafikleri incelendiğinde hataların 1. dereceden veya 2. dereceden

otoregresif olabilecekleri görülmüştür. Bu sonuç Bayhan ve Bayhan'ın (1998) sonuçları ve Özkale'nin (2009) sonuçları ile benzerlik göstermektedir.



Şekil 8.1. Mevcut veri için otokorelasyon grafiği



Şekil 8.2. Mevcut veri için kısmi otokorelasyon grafiği

Hataların değişen varyanslı olup olmadığı belirlenmek istenmiştir. Değişen varyansın var olup olmadığını belirlemek için sistematik bir test olan Goldfeld-Quant testi kullanılmıştır. Goldfeld-Quant testinde $H_1: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \leq \dots \leq \sigma_{15}^2$ alternatif hipotezini test edebilmek için izlenen adımlar aşağıdaki gibidir. Yanıt ve açıklayıcı değişkenlere ait veri kümesi, herhangi bir açıklayıcı değişkene göre (x_{j1} olsun) en küçük değerden en büyük değere doğru sıralanmıştır.

- i. Veri kümesini eşit gözleme sahip iki alt gruba ayırabilmek için küçük ve büyük gözlemler arasında kalan $r=3$ tane gözlem veri kümesinden çıkartılmıştır.
- ii. Geriye kalan $n-r=15-3$ gözlem biri açıklayıcı değişkenlerin büyük değerlerinin biri de küçük değerlerinin yer aldığı iki eşit sayıda alt kümeye ayrılmıştır.
- iii. İlk $\frac{(n-r)}{2}$ gözlem ile son $\frac{(n-r)}{2}$ gözleme ayrı ayrı EKK uygulanarak iki ayrı regresyon tahmin edilmiş ve her iki regresyona ait rezidü kareler toplamaları hesaplanmıştır.
- iv. Açıklayıcı değişkenlerin büyük değerlerini içeren rezidü kareler toplamı ($S_2 = 0.2653$), açıklayıcı değişkenlerin küçük değerlerini içeren rezidü kareler toplamına ($S_1 = 1.2204$) oranlanmış ve F istatistik değeri $F_{ist} = \frac{0.2653}{1.2204} = 0.2174$ olarak bulunmuştur.
- v. Hesaplanan istatistik değeri, 0.05 önem düzeyinde $\left(\frac{n-r-2p}{2}, \frac{n-r-2p}{2} \right)$ serbestlik dereceli F tablo değeri $F_{(4,4)} = 6.39$ 'nden küçük olduğu için sıfır hipotezinin red edilemediği gözlenmiştir. Yani kullanılan veri kümesi için hataların sabit varyanslı olduğu sonucuna varılmıştır.

Bölüm 6'da $E(ee') = \Phi = \sigma^2 V$ genel kovaryans yapısının otokorelasyonlu olabileceğinden bahsedilmişti. Kullanılan mevcut veri kümesi için otokorelasyonun var olup olmadığını test etmek için DW test istatistiği kullanılmış ve

$$d = \frac{\sum_{i=2}^{15} (\hat{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{15} \hat{\varepsilon}_i^2} = 0.3533$$

olarak hesaplanmıştır. 0.05 önem düzeyinde kritik değerler $n=15$ için $d_L = 0.95$ ve $d_U = 1.54$ olarak belirlenmiştir. Böylece Tablo 8.2'deki veri için hata terimleri arasında otokorelasyonun olduğu sonucuna varılmıştır. Bu sonuç Güler ve Kaçıranlar'ın (2009) çalışması ile benzerlik göstermiştir. PACF grafiği incelendiğinde AR yapısının ikinci dereceden olduğundan şüphelenilmiştir. AR yapısının daha yüksek dereceden olmadığını Özkale (2009) göstermiştir. Dolayısıyla hataların AR(1) yapısında olduğu sonucuna varılmıştır.

Mevcut veride açıklayıcı değişkenler arasında bir ilişkinin var olup olmadığını belirlemek için ilk adım olarak Tablo 8.2'de verilen mevcut veri için $X'V^{-1}X$ matrisinin özdeğeri hesaplanmıştır. (6.15) eşitliğinde verilen Toeplitz formunda V matrisini kullanarak, $X'V^{-1}X$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 0.7941$ $\lambda_2 = 0.0086$ olarak bulunmuştur. Bu durumda koşul sayısı $K_1 = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = 92.3372$

olarak hesaplanmıştır. (6.16) eşitliğinde verilen AR(1) yapısında V matrisini kullanarak $X'V^{-1}X$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 0.7706$, $\lambda_2 = 0.0065$ olarak bulunmuştur. Bu durumda koşul sayısı $K_2 = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = 119.2944$ olarak hesaplanmıştır.

Toeplitz formunu kullanarak K_1 koşul sayısı 100'e yakın olduğu için açıklayıcı değişkenler arasında orta şiddetli çoklu iç ilişkinin olduğu görülmüştür. AR(1) yapısında ise K_2 koşul sayısı 100'den büyük olduğu için açıklayıcı değişkenler arasında şiddetli çoklu iç ilişkinin olduğu görülmüştür. Mevcut veride hem açıklayıcı değişkenler arasında çoklu ilişki hem de hatalar arasında ilişki tespit edilmiştir. Bölüm 7'de belirtilen alternatif tahmin ediciler incelenerek bu sorunlar aşılmaya çalışılmıştır.

GEKK tahmin edicisi ve GEKK'ye alternatif tahmin ediciler incelenmiştir. Otokorelasyonlu hataya ve çoklu iç ilişkili açıklayıcı değişkenlere sahip olan

$$y = X\beta + e, E(e) = 0, E(ee') = \sigma^2 V$$

modelde V_1 , Toeplitz formda V matrisi ve V_2 , AR(1) yapısında V matrisi olmak üzere

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1.0000 & & & & & \\ 0.7072 & 1.0000 & & & & \\ 0.4165 & 0.7072 & 1.0000 & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ -0.1043 & -0.0564 & \dots & \dots & 1.0000 & \\ -0.1029 & -0.1043 & \dots & \dots & 0.7072 & 1.0000 \end{pmatrix}_{15 \times 15}$$

ve

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1.0000 & & & & & \\ 0.7195 & 1.0000 & & & & \\ 0.5176 & 0.7195 & 1.0000 & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ 0.0138 & 0.0192 & \dots & \dots & 1.0000 & \\ 0.0100 & 0.0138 & \dots & \dots & 0.7195 & 1.0000 \end{pmatrix}_{15 \times 15}$$

modelin GEKK tahmin edicisi

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{G_1} &= (X'V_1^{-1}X)^{-1}X'V_1^{-1}y \\ &= \begin{pmatrix} 0.4060 & 0.3927 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.3223 \\ 0.3196 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3473 \\ 0.4617 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{G_2} &= (X'V_2^{-1}X)^{-1}X'V_2^{-1}y \\ &= \begin{pmatrix} 0.3918 & 0.3821 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.2935 \\ 0.2866 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7227 \\ 0.0272 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir.

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{G_1}}^2 = \frac{(y - X\hat{\beta}_{G_1})'V_1^{-1}(y - X\hat{\beta}_{G_1})}{n - p} = 0.0173,$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{G_2}}^2 = \frac{(y - X \hat{\beta}_{G_2})' V_2^{-1} (y - X \hat{\beta}_{G_2})}{n - p} = 0.0140$$

olmak üzere, GEKK tahmin edicisinin kovaryans matrisi Toeplitz formunda olan V_1 ve AR(1) yapısında olan V_2 için,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{\beta}_{G_1}) &= \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{G_1}}^2 (X' V_1^{-1} X)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1.0098 & -0.9997 \\ -0.9997 & 1.0334 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{\beta}_{G_2}) &= \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{G_2}}^2 (X' V_2^{-1} X)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1.0834 & -1.0743 \\ -1.0743 & 1.1017 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak hesaplanmış olup geliştirilmiş en küçük kareler tahmin edici yansız olduğundan V_1 için skaler hata kareler ortalaması $sMSE_{\hat{\beta}_{G_1}} = 2.0432$ ve V_2 için skaler hata kareler ortalaması $sMSE_{\hat{\beta}_{G_2}} = 2.1851$ olarak tahmin edilmiştir.

$\sigma^2 V$ durumunda GEKK'ye alternatif olarak Trenkler (1984) tarafından önerilen shrunken tahmin edici özel olarak $c = 0.5$ için

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{c_1} &= c \hat{\beta}_{G_1} = c (X' V_1^{-1} X)^{-1} X' V_1^{-1} y \\ &= 0.5 \begin{pmatrix} 0.4060 & 0.3927 \\ 0.3927 & 0.3967 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.3223 \\ 0.3196 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1737 \\ 0.2309 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{c_2} &= c \hat{\beta}_{G_2} = c (X' V_2^{-1} X)^{-1} X' V_2^{-1} y \\ &= 0.5 \begin{pmatrix} 0.3918 & 0.3821 \\ 0.3821 & 0.3853 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.2935 \\ 0.2866 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3614 \\ 0.0136 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir. Shrunken tahmin edicinin kovaryans matrisi Toeplitz formunda olan V_1 ve AR(1) yapısında olan V_2 için,

$$\begin{aligned} Cov(\hat{\beta}_{c_1}) &= c^2 \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{G_1}}^2 (X'V_1^{-1}X)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0.2524 & -0.2499 \\ -0.2499 & 0.2583 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} Cov(\hat{\beta}_{c_2}) &= c^2 \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{G_2}}^2 (X'V_2^{-1}X)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0.2709 & -0.2686 \\ -0.2686 & 0.2754 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak hesaplanmıştır. $\hat{\beta}_{G_i}$, Toeplitz veya AR(1) yapısında V matrisini kullanarak tahmin edilen GEKK tahmin edicileri olmak üzere Shrunken tahmin edici $bias(\hat{\beta}_{\lambda_i}) = (c-1)\hat{\beta}_{G_i}$ ($i=1,2$) ile yanlı bir tahmin edici olduğu için skaler hata kareler ortalaması,

$$sMSE_{\hat{\beta}_{c_1}} = trace \left[Cov(\hat{\beta}_{c_1}) + Bias(\hat{\beta}_{c_1})Bias(\hat{\beta}_{c_1})' \right] = 0.5942$$

$$sMSE_{\hat{\beta}_{c_2}} = trace \left[Cov(\hat{\beta}_{c_2}) + Bias(\hat{\beta}_{c_2})Bias(\hat{\beta}_{c_2})' \right] = 0.6770$$

olarak bulunur. Shrunken parametresi c 'nin 0-1 arasındaki farklı değerleri ile shrunken tahmin edicinin katsayıları ve skaler hata kareler ortalamaları V_1 ve V_2 için sırasıyla Tablo 8.4 ve Tablo 8.5'de verilmiştir.

Trenkler'in (1984) önerdiği ridge tahmin ediciyi inceleyelim. Mevcut veri için ridge parametresi k 'nin seçimi Firinguetti'nin (1989) çalışmasına benzer olarak Hoerl, Kennard ve Baldwin'in (1975) önerdiği yanlılık parametresine göre

$$k_1 = \frac{p\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{G_1}}^2}{\hat{\beta}_{G_1}'\hat{\beta}_{G_1}} = 0.1038, \quad k_2 = \frac{p\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{G_2}}^2}{\hat{\beta}_{G_2}'\hat{\beta}_{G_2}} = 0.0535$$

olarak elde edilmiştir. Burada $\hat{\beta}_{G_1}$, ve $\hat{\beta}_{G_2}$ sırası ile V_1 ve V_2 kullanarak elde edilen GEKK tahmin edicisidir.

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{r_1} &= (X'V_1^{-1}X + k_1I)^{-1}X'V_1^{-1}y \\ &= \begin{pmatrix} 0.5098 & 0.3927 \\ 0.3927 & 0.5005 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.3223 \\ 0.3196 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.3550 \\ 0.3599 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{r_2} &= (X'V_2^{-1}X + k_2I)^{-1}X'V_2^{-1}y \\ &= \begin{pmatrix} 0.4453 & 0.3821 \\ 0.3821 & 0.4388 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.2935 \\ 0.2866 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.3906 \\ 0.3131 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Ridge tahmin edicinin kovaryans matrisi Toeplitz formunda olan V_1 ve AR(1) yapısında olan V_2 için,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\hat{\beta}_{r_1}) &= \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{G_1}}^2 (X'V_1^{-1}X + k_1I_p)^{-1}X'V_1^{-1}X(X'V_1^{-1}X + k_1I_p)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0.0144 & 0.0027 \\ 0.0027 & 0.0144 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\hat{\beta}_{r_2}) &= \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{G_2}}^2 (X'V_2^{-1}X + k_2I_p)^{-1}X'V_2^{-1}X(X'V_2^{-1}X + k_2I_p)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0.0205 & -0.0046 \\ -0.0046 & 0.0205 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir. Ridge yanlı bir tahmin edici olduğundan dolayı skaler hata kareler ortalaması

$$sMSE_{\hat{\beta}_a} = \text{trace} \left[\text{Cov}(\hat{\beta}_{r_1}) + \text{Bias}(\hat{\beta}_{r_1})\text{Bias}(\hat{\beta}_{r_1})' \right] = 0.0393$$

$$sMSE_{\hat{\beta}_{r_2}} = trace \left[Cov(\hat{\beta}_{r_2}) + Bias(\hat{\beta}_{r_2})Bias(\hat{\beta}_{r_2})' \right] = 0.2330$$

olarak bulunmuştur. Ayrıca yanlılık parametresinin seçimi Lawless ve Wang'ın

(1976) önerdiği $k_{LW} = \frac{p\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_G}^2}{\hat{\beta}_G' X' V^{-1} X \hat{\beta}_G}$ 'ya göre de yapılmış olup sonuçları Tablo 8.4 ve Tablo 8.5'de verilmiştir.

$k_1 = 0.1038$ ve $k_2 = 0.0535$ için jackknifed ridge tahmin edici,

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1^{(J)} &= [I - k_1^2 (X' V_1^{-1} X + k_1 I)^{-2}] \hat{\beta}_{G_1} \\ &= \begin{pmatrix} 0.5716 & 0.4199 \\ 0.4199 & 0.5617 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.3473 \\ 0.4617 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.3924 \\ 0.4052 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_2^{(J)} &= [I - k_2^2 (X' V_2^{-1} X + k_2 I)^{-2}] \hat{\beta}_{G_2} \\ &= \begin{pmatrix} 0.6031 & 0.3960 \\ 0.3960 & 0.5964 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7227 \\ 0.0272 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.4467 \\ 0.3024 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunmuştur. Jackknifed ridge tahmin edicinin kovaryans matrisi Toeplitz formunda olan V_1 ve AR(1) yapısında olan V_2 için,

$$\begin{aligned} Cov(\hat{\beta}_1^{(J)}) &= \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{G_1}}^2 [I - k_1^2 (X' V_1^{-1} X + k_1 I)^{-2}] \\ &\quad \times (X' V_1^{-1} X)^{-1} [I - k_1^2 (X' V_1^{-1} X + k_1 I)^{-2}] \\ &= \begin{pmatrix} 0.0323 & -0.0111 \\ -0.0111 & 0.0325 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \\ Cov(\hat{\beta}_2^{(J)}) &= \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{G_2}}^2 [I - k_2^2 (X' V_2^{-1} X + k_2 I)^{-2}] \\ &\quad \times (X' V_2^{-1} X)^{-1} [I - k_2^2 (X' V_2^{-1} X + k_2 I)^{-2}] \\ &= \begin{pmatrix} 0.0537 & -0.0360 \\ -0.0360 & 0.0543 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak hesaplanmıştır. Burada $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{G_1}}^2$ ve $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{G_2}}^2$, GEKK yöntemine göre σ^2 'nin yansız tahminleridir.

Jackknifed ridge yanlı bir tahmin edici olduğundan dolayı skaler hata kareler ortalaması

$$sMSE_{\hat{\beta}_1^{(J)}} = \text{trace} \left[\text{Cov}(\hat{\beta}_1^{(J)}) + \text{Bias}(\hat{\beta}_1^{(J)}) \text{Bias}(\hat{\beta}_1^{(J)})' \right] = 0.0700$$

$$sMSE_{\hat{\beta}_2^{(J)}} = \text{trace} \left[\text{Cov}(\hat{\beta}_2^{(J)}) + \text{Bias}(\hat{\beta}_2^{(J)}) \text{Bias}(\hat{\beta}_2^{(J)})' \right] = 0.2599$$

olarak elde edilmiştir. Jackknifed ridge tahmin edicinin k_{LW} yanlılık parametresine göre tahmini sonuçları V_1 ve V_2 için sırası ile Tablo 8.4 ve Tablo 8.5'de verilmiştir.

Trenkler'in (1984) önerdiği temel bileşenler tahmin edici için toplam varyansın %80'ini açıklayan bileşenler alınmıştır. Elde edilen iki özdeğerden küçük olan özdeğere karşılık gelen değişken modelden atılmıştır (Rencher, 2002).

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1^{(r)} &= \text{Tr}(\text{Tr}' X' V_1^{-1} X \text{Tr})^{-1} \text{Tr}' X' V_1^{-1} y \\ &= \begin{pmatrix} 0.4066 \\ 0.4018 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_2^{(r)} &= \text{Tr}(\text{Tr}' X' V_2^{-1} X \text{Tr})^{-1} \text{Tr}' X' V_2^{-1} y \\ &= \begin{pmatrix} 0.3780 \\ 0.3748 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak hesaplanmış ve kovaryans matrisi Toeplitz formunda olan V_1 ve AR(1) yapısında olan V_2 için;

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{\beta}_1^{(r)}) &= \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{G_1}}^2 \text{Tr}(\text{Tr}' X' V_1^{-1} X \text{Tr})^{-1} \text{Tr}' \\ &= \begin{pmatrix} 0.0110 & 0.0109 \\ 0.0109 & 0.0108 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{\beta}_2^{(r)}) &= \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}^2 \text{Tr}(\text{Tr}' X' V_2^{-1} X \text{Tr})^{-1} \text{Tr}' \\ &= \begin{pmatrix} 0.0092 & 0.0091 \\ 0.0091 & 0.0090 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir. Temel bileşenler tahmin edici yanlı olduğundan dolayı skaler hata kareler ortalaması

$$\begin{aligned} \text{SMSE}_{\hat{\beta}_1^{(r)}} &= \text{trace} \left[\text{Cov}(\hat{\beta}_1^{(r)}) + \text{Bias}(\hat{\beta}_1^{(r)}) \text{Bias}(\hat{\beta}_1^{(r)})' \right] = 0.0289 \\ \text{SMSE}_{\hat{\beta}_2^{(r)}} &= \text{trace} \left[\text{Cov}(\hat{\beta}_2^{(r)}) + \text{Bias}(\hat{\beta}_2^{(r)}) \text{Bias}(\hat{\beta}_2^{(r)})' \right] = 0.2578 \end{aligned}$$

olarak bulunmuştur.

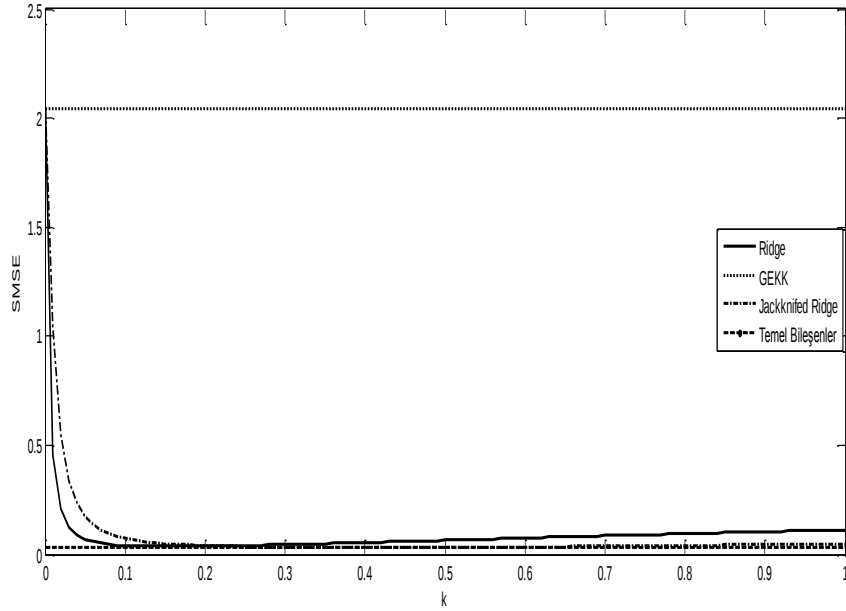
Tablo 8.4. Mevcut veri için alternatif tahmin edicilerin Toeplitz formunda V matrisi altında $k_{HKB} = 0.1038$, $k_{LW} = 0.1335$, $c_1 = 0.25$, $c_2 = 0.50$, $c_3 = 0.75$ ve $c_4 = 0.90$ ile tahmin edilen parametre katsayıları ve skaler hata kareler ortalamalarının karşılaştırılması

		$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	Bias	SMSE
GEKK		0.3473	0.4617	-	2.0432
Shrunken	c_1	0.0868	0.1154	0.1878	0.3155
	c_2	0.1737	0.2309	0.0835	0.5492
	c_3	0.2605	0.3463	0.0209	1.1701
	c_4	0.3126	0.4155	0.0033	1.6583
Ridge	k_{HKB}	0.3550	0.3599	0.0104	0.0393
	k_{LW}	0.3445	0.3476	0.0130	0.0364
Jackknifed Ridge	k_{HKB}	0.3924	0.4052	0.0052	0.0700
	k_{LW}	0.3912	0.4005	0.0057	0.0543
Temel Bileşenler		0.4066	0.4018	0.0071	0.0289

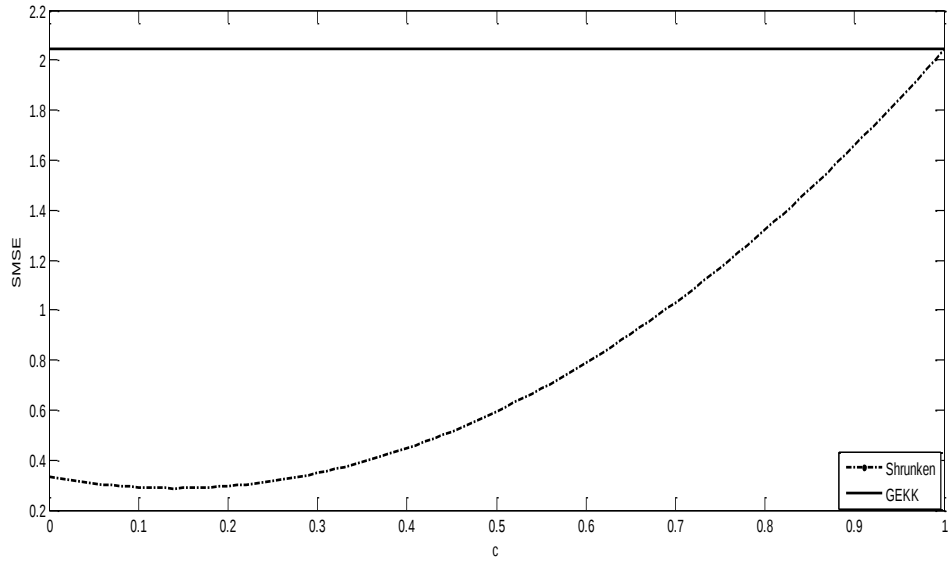
Tablo 8.4'den elde edilen sonuçlara göre, shrunken tahmin edicinin farklı parametre değerleri için SMSE değerleri GEKK tahmin edicisinin SMSE'sinden oldukça küçüktür. Ancak shrunken parametresi c 'nin artan değerleri için SMSE'si GEKK'nın SMSE değerine yakınsamaktadır. c 'nin artan değerleri için shrunken tahmin edicinin yanlılığı azalmaktadır. Ridge ve jackknifed ridge tahmin edicilerin SMSE değerleri k parametresinin farklı değerleri için verilmiştir. k_{LW} parametresini kullanarak yapılan tahminlerin k_{HKB} parametresini kullanarak yapılan tahminlere göre

daha küçük skaler hata kareler ortalaması verdiği gözlenmiştir. Jackknifed ridge tahmin edicinin yanlılığı ridge tahmin edicinin yanlılığından daha küçüktür. En küçük SMSE değerini temel bileşenler tahmin edici vermektedir ve dolayısıyla temel bileşenler tahmin edici en iyi performansı göstermektedir.

k 'nın 0-1 arasında artan değerlerine karşılık ridge ve jackknifed ridge tahmin edicinin SMSE değerleri GEKK ve temel bileşenler tahmin edicinin SMSE değeri ile birlikte Şekil 8.3'de verilmiştir. c 'nin 0-1 arasındaki artan değerlerine karşılık hesaplanan shrunken tahmin edicinin SMSE değerleri ile GEKK tahmin edicisinin SMSE değeri Şekil 8.4'de verilmiştir.



Şekil 8.3. Toeplitz formunda V matrisi için k 'ya karşı tahmin edicilerin SMSE değerleri



Şekil 8.4. Toeplitz formunda V matrisi için c 'ye karşı Shrunken tahmin edicinin ve GEKK tahmin edicinin SMSE değerleri

Şekil 8.3'den görüldüğü üzere yanlılık parametresi k arttıkça ridge ve jackknifed ridge tahmin edicilerinin skaler hata kareler ortalaması azalmaktadır. $0 < k < 0.15$ iken ridge tahmin edicinin SMSE değerleri jackknifed ridge tahmin edicinin SMSE değerlerinden daha küçüktür. Ancak $0.15 \leq k < 1$ aralığındaki yanlılık parametresi için ridge ve jackknifed ridge tahmin edicilerin SMSE değerleri birbirine çok yakındır. Teorem 8'de verilen $\sigma^2 + k^3 \beta' [2(X'V^{-1}X) + 3kI]^{-1} (X'V^{-1}X)^{-1} \beta \geq 0$ koşulu σ^2 yerine $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_G}^2$ ve β yerine $\hat{\beta}_G$ alınarak $k = 0.15$ için $0.0202 > 0$ olarak bulunmuş olup koşulun sağlandığı gözlenmiştir.

GEKK yanlılık parametresine bağlı olmadığından sabit kalmakta ve temel bileşenler tahmin edici her durumda en iyi performansı göstermektedir.

Şekil 8.4'den görüldüğü üzere, c 'nin artan değerleri için shrunken tahmin edicinin SMSE'si, GEKK'nın SMSE değerine yaklaşmaktadır. $c=1$ için shrunken tahmin edicinin SMSE'si GEKK tahmin edicinin SMSE'sine eşit olmaktadır.

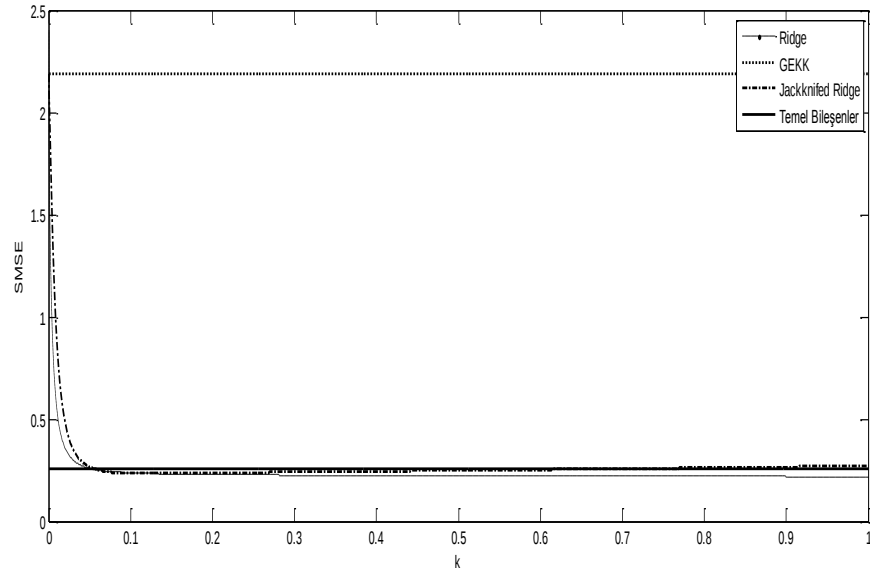
Tablo 8. 5. Mevcut veri için alternatif tahmin edicilerin AR(1) yapısında V matrisi altında $k_{HKB} = 0.0535$, $k_{LW} = 0.1273$, $c_1 = 0.25$, $c_2 = 0.50$, $c_3 = 0.75$ ve $c_4 = 0.90$ ile tahmin edilen parametre katsayıları ve skaler hata kareler ortalamalarının karşılaştırılması

		$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	Bias	SMSE
GEKK		0.7227	0.0272	-	2,1851
Shrunken	c_1	0.1807	0.0068	0.2942	0.4308
	c_2	0.3614	0.0136	0.1308	0.6770
	c_3	0.5420	0.0204	0.0327	1.2618
	c_4	0.6505	0.0245	0.0052	1.7752
Ridge	k_{HKB}	0.3906	0.3131	0.1920	0.2330
	k_{LW}	0.3411	0.3049	0.2228	0.2412
Jackknifed Ridge	k_{HKB}	0.4467	0.3024	0.1519	0.2599
	k_{LW}	0.4029	0.3345	0.1967	0.2334
Temel Bileşenler		0.3780	0.3748	0.2397	0.2578

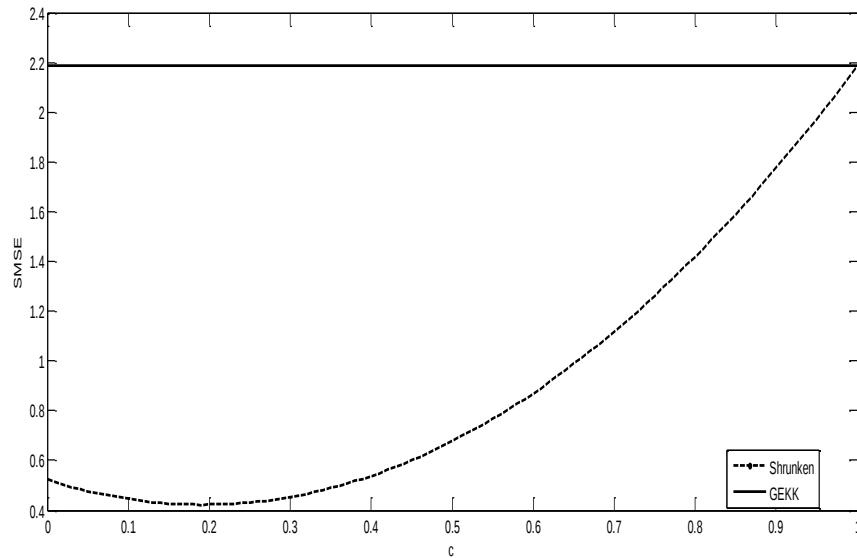
Tablo 8.5’den elde edilen sonuçlara göre, AR(1) yapısında V matrisi için shrunken tahmin edicinin farklı parametre değerleri için SMSE değerleri GEKK tahmin edicisinin SMSE’sinden oldukça küçüktür. Ancak shrunken parametresi c ’nin artan değerleri için SMSE’si GEKK’nın SMSE değerine yakınsamaktadır. c ’nin artan değerleri için shrunken tahmin edicinin yanlılığı azalmaktadır. Ridge tahmin edicinin k_{HKB} yanlılık parametresini kullanarak bulunan skaler hata kareler ortalamasının k_{LW} yanlılık parametresini kullanarak bulunan skaler hata kareler ortalamasına göre daha küçük olduğu gözlenmiştir. Jackknifed ridge tahmin edicinin k_{LW} parametresini kullanarak bulunan skaler hata kareler ortalamasının k_{HKB} parametresini kullanarak bulunan skaler hata kareler ortalamasına göre daha küçük olduğu gözlenmiştir. Jackknifed ridge tahmin edicinin yanlılığı ridge tahmin edicinin yanlılığından daha küçüktür. En küçük SMSE değerini k_{HKB} yanlılık parametresini kullanan ridge tahmin edici vermiştir.

k ’nın 0-1 arasında artan değerlerine karşılık AR(1) yapısında olan V matrisi ile ridge ve jackknifed ridge tahmin edicinin SMSE değerleri GEKK ve temel bileşenler tahmin edicinin SMSE değeri ile birlikte Şekil 8.5’de verilmiştir. c ’nin 0-

1 arasındaki artan değerlerine karşılık hesaplanan AR(1) yapısında olan V matrisi ile shrunken tahmin edicinin SMSE değerleri ve GEKK tahmin edicisinin SMSE değeri Şekil 8.6’da verilmiştir.



Şekil 8.5. AR(1) yapısında V matrisi için k 'ya karşı tahmin edicilerin SMSE değerleri



Şekil 8.6. AR(1) yapısında V matrisi için c 'ye karşı Shrunken tahmin edicinin ve GEKK tahmin edicinin SMSE değerleri

Şekil 8.5’den görüldüğü üzere, $0 < k < 0.05$ iken ridge tahmin edicinin SMSE değerleri jackknifed ridge tahmin edicinin SMSE değerlerinden daha küçüktür. Ancak $0.05 \leq k < 1$ aralığındaki yanlılık parametresi için ridge ve jackknifed ridge tahmin edicilerin SMSE değerleri birbirine çok yakındır. Teorem 8’de verilen $\sigma^2 + k^3 \beta' [2(X'V^{-1}X) + 3kI]^{-1} (X'V^{-1}X)^{-1} \beta \geq 0$ koşulu σ^2 yerine $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_G}^2$ ve β yerine $\hat{\beta}_G$ alınarak $k = 0.05$ için $0.0425 > 0$ olarak bulunmuş olup koşulun sağlandığı gözlenmiştir.

Şekil 8.6’dan görüldüğü üzere, c ’nin artan değerleri için shrunk tahmin edicinin SMSE’si, GEKK’nın SMSE değerine yaklaşmaktadır.

9. MONTE CARLO SİMÜLASYON UYGULAMASI

Bu bölümde, değişen varyans/otokorelasyon ve çoklu iç ilişkinin aynı anda meydana gelmesi durumunda alternatif tahmin edicilerin hata kareler ortalamasına göre performansları Monte Carlo simülasyon çalışması ile karşılaştırılmıştır. Sabit varyans ve hataların ilişkisiz olması varsayımı altında bazı simülasyonlar McDonald ve Galarneau'dan (1975) sonra sıklıkla çalışılmıştır. Hatalar değişen varyanslı ve / veya otokorelasyonlu olduğu zaman bazı tahmin edicilerin performanslarının simülasyon üzerinden karşılaştırılmaları Firinguetti (1989), Gosling ve Puterman (1985) ve Özkale (2008) tarafından çalışılmıştır. McDonald ve Galarneau (1975), Gibbons (1981), Kibria (2003), Firinguetti (1989), Özkale (2008), Güler ve Kaçıranlar (2009), Alheety ve Kibria (2009) ve diğer yazarlar simülasyon çalışmalarında açıklayıcı değişkenleri üretmek için aşağıdaki eşitliği kullanmışlardır.

$$x_{ij} = (1 - \gamma^2)^{1/2} z_{ij} + \gamma z_{ip+1} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, p$$

Burada, z_{ij} standart normal dağılıma sahip yapay rasgele (pseude random) sayılardır. γ belirtilen herhangi iki açıklayıcı değişken arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir. Ayrıca açıklayıcı değişkenler standartlaştırılmıştır. Yani $X'X$ korelasyon matrisi formundadır.

Bu çalışmada da açıklayıcı değişkenler arasında şiddetli ilişki olması istendiğinden dolayı $\gamma = 0.90, 0.95$ ve 0.99 alınmıştır. Çalışma, yeni hata terimlerini üreterek 5000 deneme üzerinden gerçekleştirilmiştir. Açıklayıcı değişkenler denemenin başında üretilmiş ve deneme boyunca sabitlenmiştir. Deneme boyunca değişken sayısı $p = 4$ ve örneklem genişliği $n = 100$ olarak alınmıştır. Newhouse ve Oman (1971) ve McDonald ve Galarneau (1975) β' yi $X'X$ matrisinin en büyük özdeğerine karşılık gelen normalleştirilmiş özvektör olarak alındığında MSE'nin minimum olduğunu belirtmiştir. Özkale (2008) ve Firinguetti (1989) benzer olarak katsayı vektörünü $X'V^{-1}X$ matrisinin en büyük özdeğerine karşılık gelecek şekilde üretmişlerdir. Yanıt değişkene dayalı gözlemler

$$y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

eşitliğinden elde edildikten sonra standartlaştırılmış forma dönüştürülmüştür. Burada e_i , birinci dereceden AR ve MA yapıları göz önünde bulundurularak üretilmiştir.

$$e_i = \rho e_{i-1} + u_i, \quad |\rho| < 1 \quad \text{AR}(1)$$

$$e_i = u_i + \tau u_{i-1}, \quad |\tau| < 1 \quad \text{MA}(1)$$

AR(1) ve MA(1) yapısı için önerilen V matrisleri Bölüm 6'da verilen (6.13) ve (6.14) eşitliklerindeki gibi alınmıştır. ρ ve τ değerleri $\mp 0.99, 0.90, 0.70, 0.50, 0.30, 0.10$ olarak belirlenmiştir. σ 'nın değerleri 0.1, 1 ve 10 olarak seçilmiştir.

Ridge ve jackknifed ridge tahmin edicilerinin yanlılık parametresi olarak Hoerl, Kennard ve Baldwin'in (1975) önerdiği $k = \frac{p\hat{\sigma}_G^2}{\hat{\beta}_G' \hat{\beta}_G}$ alınmıştır.

Daha sonra regresyon katsayıları orijinal modele dönüştürülmüştür.

Shrunken tahmin edici için tahminler c 'nin uç değerleri olan 0.10 ve 0.90 değerleri alınarak yapılmıştır.

Firinguetti'nin (1989) ve Özkale'nin (2008) çalışmalarına benzer olarak tahmin edicilerin performanslarının karşılaştırması MSE ve mutlak yanlılık hesaplanarak gerçekleştirilmiştir. Herhangi bir $\tilde{\beta}$ tahmin edicisi için bu ölçümler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$MSE(\tilde{\beta}) = \frac{1}{5000} \sum_{r=1}^{5000} (\tilde{\beta}_{(r)} - \beta)' (\tilde{\beta}_{(r)} - \beta)$$

$$ABIAS(\tilde{\beta}) = \sum_{j=1}^4 \left| \tilde{\beta}_j - \beta_j \right|, \quad \bar{\tilde{\beta}}_j = \frac{1}{5000} \sum_{r=1}^{5000} \tilde{\beta}_{j(r)}$$

Burada $\tilde{\beta}_{j(r)}$ denemenin r -inci çıktısında β_j 'nin tahminidir.

Simülasyon sonuçları AR(1) ve MA(1) yapısında incelenmiş olup sonuçlar sırası ile Ek Tablo A1-A12 ve Ek Tablo B1-B12'de verilmiştir. Simülasyon çalışması sonucu elde edilen bulgular aşağıda özetlenmiştir.

- (i) AR(1) ve MA(1) yapısında üretilen hatalar ile yapılan tahminlerde σ ve çoklu iç ilişkinin şiddeti (γ) arttıkça genel olarak tahmin edicilerin skaler hata kareler ortalamasının (SMSE) artış gösterdiği gözlenmiştir.
- (ii) AR(1) yapısında $\rho = \mp 0.99$ için $\gamma = 0.90, 0.95$ ve 0.99 'da $\sigma = 0.1$ için jackknifed ridge, $\sigma = 1$ için ridge ve $\sigma = 10$ için 0,1 ile shrunken tahmin edici SMSE kriterine göre daha iyi performans göstermiştir.
- (iii) AR(1) yapısında $\rho = \mp 0.90$ için $\gamma = 0.90$ ve 0.95 'de $\sigma = 0.1$ için jackknifed ridge, $\sigma = 1$ için ridge ve $\sigma = 10$ için 0,1 ile shrunken tahmin edici SMSE kriterine göre daha iyi performans gösterirken, $\gamma = 0.99$ 'da temel bileşenler tahmin edici daha iyi performans göstermiştir.
- (iv) AR(1) yapısında $\rho = \mp 0.70, 0.50, 0.30, 0.10$ için $\gamma = 0.90$ 'da $\sigma = 0.1$ için jackknifed ridge tahmin edici SMSE kriterine göre daha iyi performans gösterirken σ ve γ arttıkça temel bileşenler tahmin edicinin daha iyi olduğu gözlenmiştir.
- (v) MA(1) yapısında $\tau = 0.99$ için $\gamma = 0.90$ iken $\sigma = 0.1$ ve 1 için ridge tahmin edici SMSE kriterine göre daha iyi performans gösterirken, $\sigma = 0.10$ 'da 0.1 ile shrunken tahmin edicinin daha iyi performans gösterdiği gözlenmiştir. $\gamma = 0.95$ 0.99 'da ise $\sigma = 0.1$ için ridge tahmin edici daha iyi performans gösterirken σ arttıkça 0.1 ile shrunken tahmin edicinin daha iyi performans gösterdiği gözlenmiştir.
- (vi) MA(1) yapısında $\tau = 0.90$ için $\gamma = 0.90$ 'da $\sigma = 0.1$ ve 1 iken temel bileşenler tahmin edici SMSE kriterine göre daha iyi performans gösterirken, $\sigma = 10$ için 0.1 ile shrunken tahmin edicinin daha iyi performans gösterdiği gözlenmiştir. Çoklu iç ilişkinin şiddeti arttıkça temel bileşenler tahmin edicinin daha iyi olduğu gözlenmiştir.
- (vii) MA(1) yapısında $\tau = \mp 0.70, \mp 0.50, 0.30$ için $\gamma = 0.90$ 'da $\sigma = 0.1$ için jackknifed ridge tahmin edici SMSE kriterine göre daha iyi performans gösterirken, σ ve γ arttıkça temel bileşenler tahmin edicinin daha iyi olduğu gözlenmiştir.

- (viii) MA(1) yapısında $\tau = \mp 0.10, -0.30$ için temel bileşenler tahmin edicinin daha iyi performans gösterdiği gözlenmiştir.
- (ix) MA(1) yapısında $\tau = -0.90$ için $\gamma = 0.90$ 'da $\sigma = 10$ için 0.1 ile shrunken tahmin edici SMSE kriterine göre daha iyi performans gösterirken, diğer durumlar için temel bileşenler tahmin edicinin daha iyi olduğu gözlenmiştir.
- (x) MA(1) yapısında $\tau = -0.99$ için $\gamma = 0.90$ 'da $\sigma = 0.1$ ve $\sigma = 1$ için ridge tahmin edici SMSE kriterine göre daha iyi performans gösterirken, $\sigma = 10$ 'da 0.1 ile shrunken tahmin edici iyi performans göstermiştir. $\gamma = 0.95$ 'de $\sigma = 0.1$ için ridge, $\sigma = 1$ için temel bileşenler ve $\sigma = 10$ için 0.1 ile shrunken tahmin edicinin iyi performans gösterdiği gözlenmiştir. $\gamma = 0.99$ için temel bileşenler tahmin edicinin daha iyi olduğu gözlenmiştir.

10. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ilk olarak lineer regresyon modeline EKK uygulamak için gerekli olan varsayımlar verilmiştir. Açıklayıcı değişkenlerin bağımsızlığı varsayımının ihlali olan çoklu iç ilişki sorunu hataların sabit varyanslı ve ilişkisiz olduğu durumda incelenmiştir.

Hatalara ilişkin varsayımların ihlaline neden olan değişen varyans ve otokorelasyon sorunu tanımlanmış ve lineer bir regresyon modelinde bu problemin belirlenmesine yönelik önerilen testlere yer verilmiştir. Lineer bir regresyon modelinde değişen varyans ve otokorelasyon sorunu olduğunda hata yapıları kovaryans matrisi üzerinden incelenmiştir.

Çoklu iç ilişki sorunu hataların değişen varyanslı ve otokorelasyonlu olması durumunda incelenmiştir. Değişen varyans/otokorelasyon ve çoklu ilişki problemlerinin aynı anda meydana gelmesi durumunda önerilen alternatif tahmin ediciler incelenmiştir. Bu çalışmada, alternatif tahmin edicilerden yansız olan genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edicisi ve yanlı tahmin edicilerden ridge, jackknifed ridge, temel bileşenler, shrunken ve iterasyon tahmin edicisi ele alınmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Bu tahmin edicilerden bazılarının performansları hata kareler ortalaması kriterine göre teorik olarak karşılaştırılmıştır. Ayrıca alternatif tahmin edicilerin hata kareler ortalamasına göre performanslarının karşılaştırılması hem ekonometrik bir örnek hemde simülasyon çalışması üzerinden gözlenmeye çalışılmıştır.

Ekonometrik uygulama sonucunda Bayhan ve Bayhan'ın (1988) önerdikleri Toeplitz formunda V matrisi için genel olarak temel bileşenler tahmin edicinin en küçük hata kareler ortalamasını verdiği gözlenmiştir. Firinguetti'nin (1989) önerdiği AR(1) yapısında V matrisi için yanlılık parametresi Hoerl, Kennard ve Baldwin'e (1975) göre seçildiğinde ridge tahmin edicinin, yanlılık parametresi Lawless ve Wang'a (1976) göre seçildiğinde ise jackknifed ridge tahmin edicinin en küçük hata kareler ortalamasını verdiği gözlenmiştir. Simülasyon uygulaması sonucunda ise σ , otokorelasyon katsayısı (ρ, τ) ve çoklu iç ilişkinin şiddetine (γ) bağlı olarak tahmin edicilerin performanslarının değiştiği ancak, otokorelasyon katsayısı düştükçe temel

bileşenler tahmin edicinin diğer tahmin edicilere göre performansının daha iyi olduğu gözlenmiştir.

Lineer regresyon modelinde bu çalışmada değinilmeyen tahmin edicilerin özellikleri hataların değişen varyanslı ve otokorelasyonlu olması durumunda incelenebilir. Bu sorunların aşılmasını sağlayacak yeni tahmin yöntemleri geliştirilebilir. Bu problemler tam, eşitsizlik ve stokastik önsel bilginin olması durumuna genişletilebilir.

KAYNAKLAR

- ALBAYRAK, A. S., 2008. Değişen Varyans Durumunda En Küçük Kareler Tekniğinin Alternatifi Ağırlıklı Regresyon Analizi ve Bir Uygulama, Afyon Kocatepe Üniversitesi, İ.İ.B.F. Dergisi (C.X ,S II).
- BATAH, F., and GORE, S., 2008. Improving Precision for Jackknifed Ridge Type Estimation, Far East Journal of Theoretical Statistics 24, 157 – 174.
- BATAH, F. S. M., RAMANATHAN, T. V., and GORE, S. D., 2008. The Efficiency of Modified Jackknife and Ridge type Regression Estimators: A Comparison, Surveys in Mathematics and its Applications, 3, 111-122.
- BAYHAN, G. M., and BAYHAN, M., 1998. Forecasting Using Autocorrelated Errors and Multicollinear Predictor Variables, Computers and Industrial Engineering, 34 , 413-421.
- BREUSCH, T. S., and PAGAN, A. R., 1979. A Simple Test for Heteroskedasticity and Random Coefficient Variation, Econometrica 47, 1287-1294.
- DUFOUR, J. M., 1990. Exact Tests and Confidence Sets in Linear Regressions With Autocorrelated Errors, Econometrica 58, 475- 494.
- DURBIN, J., 1970. Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression When Some of the Regressor are Lagged Dependent Variables, Econometrica, 37, 410-421.
- DURBIN, J., and WATSON, G. S., 1950. Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression I. Biometrika, 37, 409-420.
- DURBIN, J., and WATSON, G. S., 1951. Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression II. Biometrika, 38, 159-178.
- DURBIN, J., and WATSON, G. S., 1971. Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression III. Biometrika, 58, 1-19.
- FAREBROTHER, R. W., 1976. Further Results on the Mean Square Error of Ridge Regression, Journal of Royal Statistical Society, B.38 , 284-250.
- FARRAR, D. E., and GLAUBER, R. R., 1967. Multicollinearity in Regression Analysis: The Problem Revisited. The Review of Economics and Statistics, 49, 1, 92-107.

- FIRINGUETTI, L., 1989. A Simulation Study of Ridge Regression Estimators with Autocorrelated Errors, *Communications in Statistics - simulation and computation*, 18 (2), 673-702.
- FRISCH, R., 1934. *Statistical Confluence Analysis by Means of Complete Regression Systems*. Universitets Okonomiske Institut, Oslo.
- GLEJSER, H., 1969. A New Test for Heteroscedasticity, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 64, 316–323.
- GOLDFELD, S. M., and QUANDT, R. E., 1965. Some Test For Homoskedasticity, *Journal of the American Statistical Association* 60, 539- 547.
- GRIFFITHS, W. E., HILL, R. C. and JUDGE, G. G., 1993. *Learning and Practicing Econometrics*. John Wiley and Sons.
- GROß, J., 2003. *Linear Regression, Lecture Notes in Statistics*, Springer Verlag, Germany.
- GUJARATI, D. N., 2004. *Basic Econometrics (Fourth Edition)*, McGraw-Hill, New Jersey.
- GÜLER, H., and KAÇIRANLAR, S., 2009. A Comparasion of Mixed and Ridge Estimators of Linear Models, *Communications in Statistics*, 38, 368-401.
- HARVEY, A. C., 1976. Estimating Regression Models With Multiplicative Heteroskedasticity, *Econometrica* 44, 461-466.
- HOERL, A. E., and KENNARD, R. W., 1970. Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems. *Technometrics*, 12, 1, 55-67.
- HOERL, A.E., KENNARD, R.W., and BALDWIN, K. F., 1975. Ridge Regression: Some Simulation. *Communication in Statistics*, 4, 105-123.
- JUDGE, G. G., GRIFFITHS, W. E., HILL, R. C., LÜTKEPOHL, H., and LEE, T-C., 1988. *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*. 2nd ed. New York, John Wiley & Sons.
- KIBRIA, B. M. G., 2003. Performance of Some New Ridge Regression Estimators, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 32.
- KOOPMANS, T. C., 1942. Serial Correlation and Quadratic Forms in Normal Variables, *Annals of Mathematical Statistics*, 13, 14-33.
- LAWLESS, J. F., and WANG, P., 1976. A Simulations Study of Ridge and Other Regression Estimators, *Commun. Statis.-Theor. Meth.*, A5(4), 307-323.

- MARQUARDT, D. W., 1970. Generalized Inverses, Ridge Regression, Biased Linear Estimation, and Nonlinear Estimation. *Technometrics*, 12, 591-612.
- MARQUARDT, D. W., and SNEE, R. D., 1975. Ridge Regression In Practice, *The American statistician*, 29, 3-20.
- MASON, R. L., GUNST, R.F., and WEBSTER, J. T., 1975. Regression Analysis and Problems of Multicollinearity, *Communications in Statistics*, 4, 277-292.
- MAYER, L. S., and WILLKE, T. A., 1973. On Biased Estimations in Linear Models, *Technometrics* 15, 497-508.
- MCDONALD, G. C., and GALARNEAU, D. I., 1975. A Monte Carlo Evaluation of Some Ridge-type Estimators, *Journal of the American Statistical Association* 70 , 407-416.
- MONTGOMERY, D., PECK, E. A. And VINING, G. G., 2001. *Introduction to Linear REgression Analysis*, John Wiley ans Sons Inc., New York.
- MUNIZ, G., and. KIBRIA, B. M. G., 2009. On Some Ridge Regression Estimators: An Empirical Comparisons, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 38.
- MYERS, R. H., 1986. *Classical and Modern Regression with Applications*, Duxbury Press, Boston.
- NEWHOUSE, J. P. and OMAN, S. D., 1971. An Evaluation of Ridge Estimators, *Rand Report*, R-716-PR, 1-28.
- ÖZKALE, M. R., 2007. Çoklu İç İlişki İle İlgili Problemler, Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, (yayınlanmamış).
- , 2008. A Jackknifed Ridge Estimator in the Linear Regression Model with Heteroscedastic or Correlated errors, *Statistics and Probability Letters*, 78 (18), 3159-3169.
- , 2009. A Stochastic Restricted Ridge Regression Estimator, *Journal of Multivariate Analysis*, 100, 1706-1716.
- PAGEL, M. U., and LUNNEBORG, C. E., 1985. Emprical Evaluation of Ridge Regression, *Psychological Bulletin*, 97, 342-355.
- PARK, R. E., 1966. Estimation with Heteroscedastic Error Terms, *Econometrica*, vol. 34, no. 4, p. 888.

- PARKER, D. F., and BAYE, M. R., 1984. Combining Ridge and Principal component Regression: A Money Demand Illustration, *Commun. Statist.-Theor. Meth.* 13(2), 197-205.
- RAWLINGS, J. O., 1998. *Applied Regression Analysis, A Research Tool*, California.
- RENCHE, A.C., 2002. *Methods of Multivariate Analysis*, Wiley Interscience. Second Edition.
- RISCH, R., 1934. *Statistical Confluence Analysis by Means of Complete Regression Systems*. Universitets Okonomiske Institut, Oslo.
- SARKAR, N., 1996. Mean Squared Error Matrix Comparison of Some Estimators in Linear Regression With Multicollinearity, *Statistics and Probability Letters* 21, 1987-2000.
- SINGH, B., CHAUBE Y. P., and DWIVEDI, T. D., 1986. An Almost Unbiased Ridge Estimator, *Sankhya Ser.B* 48, 342-346.
- THEOBALD, C. M., 1974. Generalizations of Mean Square Error Applied Ridge Regression, *Journal of the Royal Statistical Society, B.* 36, 103-106.
- TRENKLER, G., 1978. An Iteration Estimators for The Linear Model. In: *Compstat*, Physica-Verlag, 125- 131.
- , 1980. Generalized Mean Squared Error Comparisons of Biased Regression Estimators., *Commun. Statist.-Theor. Meth.* A9(12), 1247-1259.
- , 1984. On the Performance of Biased Estimators in the Linear Regression Model with Correlated or Heteroscedastic Errors, *Journal of Econometrics*, 25, 179-190.
- TRENKLER, G., and TOUTENBURG, H., 1990. Mean squared error matrix comparisons between biased estimators An overview of recent results, *Statistical Papers*, 31 (1), 165-179.
- VINOD, H. D., and ULLAH, A., 1981. *Recent Advances in Regression Methods*, New York: Marcel Dekker Inc.
- WHITE, H., 1980. A Heteroscedasticity Consistent Covariance Matrix Estimator ve a Direct Test of Heteroscedasticity, *Econometrica*, vol. 48, 817–818.

ÖZGEÇMİŞ

31.07.1984’de Amasya’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Amasya’da tamamladı. 2004 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Sinop Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik bölümünü kazandı. 2007 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik bölümüne yatay geçiş yaptı ve 2008 yılında bu bölümden ikincilikle mezun oldu. Aynı yıl İstatistik bölümünde yüksek lisansa başladı.

EKLER

EK A

Tablo A.1. $n=100$, $p=4$, $\rho = 0.99$, AR(1) yapısında olan V matrisi ile tahminler

		$\gamma = 0.90$			$\gamma = 0.95$			$\gamma = 0.99$		
σ		0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10
GEKK	AMSE	0.0771	7.7055	770.5486	0.1483	14.8307	1.4831e+003	0.7183	71.8314	7.1831e+003
	ABIAS	2.0005	4.2941	39.7684	1.9992	5.7419	55.1342	2.1310	12.2390	121.3115
SHRUNKEN	0.9	AMSE	1.0636	7.2597	625.3337	1.1188	13.0277	1.2025e+003	1.5733	59.1596
	0.1	ABIAS	2.0005	4.2941	39.7684	1.9992	5.7419	55.1342	2.1310	12.2390
		AMSE	80.9459	81.0393	88.8388	80.7497	80.9127	95.7568	80.4510	152.1070
	ABIAS	17.9867	17.9887	18.0111	17.9684	17.9703	18.0366	17.9374	17.9356	20.4810
Ridge	AMSE	0.1813	3.1883	626.6371	0.1844	3.4312	1.1767e+003	0.1540	4.1121	5.5426e+003
	ABIAS	0.7427	2.8267	39.1210	0.7483	2.8995	53.2312	0.7196	2.9229	114.5110
Jackknifed Ridge	AMSE	0.0588	5.6620	751.2105	0.0754	7.5650	1.4344e+003	0.0520	12.0608	6.8773e+003
	ABIAS	0.3862	3.7715	43.3940	0.4384	4.3141	59.7668	0.3638	5.0219	130.1769
Temel Bileşenler	AMSE	0.0771	7.7055	770.5486	0.1483	14.8307	1.4831e+003	0.7183	71.8314	7.1831e+003
	ABIAS	0.4415	4.4150	44.1501	0.6124	6.1236	61.2359	1.3477	13.4773	134.7731

Tablo A.2. $n=100$, $p=4$, $\rho = 0.90$, AR(1) yapısında olan V matrisi ile tahminler

		$\gamma = 0.90$			$\gamma = 0.95$			$\gamma = 0.99$		
σ		0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10
GEKK	AMSE	0.0840	8.4040	840.4026	0.1618	16.1751	1.6175e+003	0.7834	78.3434	7.8343e+003
	ABIAS	2.0006	4.4567	41.5304	1.9997	5.9780	57.5893	2.1548	12.7725	126.7192
SHRUNKEN	0.9	AMSE	1.0694	7.8264	681.9240	1.1298	14.1175	1.3114e+003	1.6260	64.4336
	0.1	ABIAS	2.0006	4.4567	41.5304	1.9997	5.9780	57.5893	2.1548	12.7725
		AMSE	80.9475	81.0485	89.5472	80.7507	80.9277	97.1098	80.4517	158.6121
	ABIAS	17.9867	17.9888	18.0133	17.9684	17.9704	18.0572	17.9374	17.9355	20.8293
Ridge	AMSE	0.1838	3.5192	689.2363	0.1869	3.8423	1.2967e+003	0.1549	4.8883	6.1211e+003
	ABIAS	0.7453	2.9679	41.0632	0.7510	3.0631	55.9656	0.7194	3.1693	120.6011
Jackknifed Ridge	AMSE	0.0638	6.2375	820.8326	0.0816	8.4383	1.5686e+003	0.0561	14.2053	7.5280e+003
	ABIAS	0.4026	3.9570	45.3749	0.4561	4.5526	62.5468	0.3773	5.4372	136.3716
Temel	AMSE	0.0840	8.4040	840.4026	0.0859	4.7849	474.6886	0.0191	0.1580	14.0549

Tablo A.3. $n=100$, $p=4$, $\rho=0.70$, AR(1) yapısında olan V matrisi ile tahminler

		$\gamma = 0.90$			$\gamma = 0.95$			$\gamma = 0.99$			
σ		0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10	
GEKK		AMSE	0.1015	10.1523	1.0152e+003	0.1954	19.5396	1.9540e+003	0.9464	94.6397	9.4640e+003
SHRUNKEN	0.9	AMSE	1.0838	9.2445	823.5554	1.1572	16.8443	1.5839e+003	1.7578	77.6322	7.6666e+003
		ABIAS	2.0009	4.8426	45.6366	2.0017	6.5322	63.2907	2.2163	14.0239	139.2885
	0.1	AMSE	80.9565	81.0765	91.3223	80.7554	80.9672	100.4948	80.4540	81.3737	174.8947
		ABIAS	17.9870	17.9893	18.0213	17.9686	17.9707	18.1268	17.9374	17.9354	21.6948
Ridge		AMSE	0.1904	4.3419	846.3542	0.1932	4.8798	1.5981e+003	0.1575	7.0284	7.5731e+003
		ABIAS	0.7527	3.2918	45.5861	0.7586	3.4398	62.2976	0.7200	3.7602	134.6780
Jackknifed Ridge		AMSE	0.0766	7.6629	995.0466	0.0973	10.6148	1.9042e+003	0.0662	19.9515	9.1547e+003
		ABIAS	0.4412	4.3831	49.9856	0.4977	5.0971	68.9853	0.4092	6.4133	150.6988
Temel Bileşenler		AMSE	0.1595	0.3501	19.4033	0.0858	0.2631	17.9988	0.0194	0.1883	17.0768
		ABIAS	0.7134	0.9580	7.0197	0.5228	0.8246	6.7591	0.2439	0.6923	6.5820

Tablo A.4. $n=100$, $p=4$, $\rho=0.50$, AR(1) yapısında olan V matrisi ile tahminler

			$\gamma = 0.90$			$\gamma = 0.95$			$\gamma = 0.99$		
σ			0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10
GEKK		AMSE	0.1208	12.0794	1.2079e+003	0.2325	23.2473	2.3247e+003	1.1259	112.5934	1.1259e+004
SHRUNKEN	0.9	AMSE	1.0998	10.8069	979.6641	1.1875	19.8488	1.8842e+003	1.9032	92.1739	9.1209e+003
		ABİAS	2.0012	5.2373	49.8154	2.0052	7.0930	69.0942	2.2846	15.2846	152.0598
	0.1	AMSE	80.9765	81.1167	93.2816	80.7652	81.0146	104.2224	80.4574	81.5541	192.8416
		ABİAS	17.9877	17.9901	18.0360	17.9689	17.9711	18.2291	17.9374	17.9354	22.6305
Ridge		AMSE	0.1976	5.2628	1.0200e+003	0.2002	6.0708	1.9310e+003	0.1604	9.7487	9.1765e+003
		ABİAS	0.7610	3.6199	50.1590	0.7670	3.8247	68.7002	0.7213	4.3949	148.8540
Jackknifed Ridge		AMSE	0.0907	9.2404	1.1870e+003	0.1145	13.0624	2.2738e+003	0.0774	26.9866	1.0945e+004
		ABİAS	0.4800	4.8133	54.6657	0.5398	5.6482	75.5171	0.4418	7.4393	165.1638
Temel Bileşenler		AMSE	0.1593	0.3874	23.1965	0.0859	0.2980	21.5023	0.0197	0.2212	20.3747
		ABİAS	0.7132	1.0051	7.6751	0.5229	0.8758	7.3889	0.2449	0.7508	7.1921

Tablo A.5. $n=100$, $p=4$, $\rho = 0.30$, AR(1) yapısında olan V matrisi ile tahminler

			$\gamma = 0.90$			$\gamma = 0.95$			$\gamma = 0.99$		
σ			0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10
GEKK		AMSE	0.1391	13.9080	1.3908e+003	0.2676	26.7628	2.6763e+003	1.2960	129.5992	1.2960e+004
SHRUNKEN	0.9	AMSE	1.1150	12.2886	1.1278e+003	1.2162	22.6965	2.1690e+003	2.0410	105.9489	1.0498e+004
		ABIAS	2.0016	5.5874	53.4521	2.0100	7.5909	74.1319	2.3494	16.3891	163.1654
	0.1	AMSE	81.0106	81.1690	95.1450	80.7813	81.0655	107.7528	80.4620	81.7273	209.8533
		ABIAS	17.9884	17.9907	18.0562	17.9693	17.9715	18.3427	17.9375	17.9355	23.4779
Ridge		AMSE	0.2042	6.1583	1.1849e+003	0.2065	7.2520	2.2466e+003	0.1631	12.6546	1.0696e+004
		ABIAS	0.7690	3.9132	54.1281	0.7750	4.1698	74.2196	0.7229	4.9803	161.0891
Jackknifed Ridge		AMSE	0.1040	10.7532	1.3691e+003	0.1307	15.4415	2.6238e+003	0.0877	34.2574	1.2638e+004
		ABIAS	0.5140	5.1900	58.7251	0.5763	6.1327	81.1611	0.4700	8.3695	177.6819
Temel Bileşenler		AMSE	0.1586	0.4221	26.7730	0.0858	0.3302	24.7642	0.0199	0.2513	23.3895
		ABIAS	0.7125	1.0471	8.2533	0.5226	0.9215	7.9388	0.2457	0.8010	7.7155

Tablo A.6. $n=100$, $p=4$, $\rho = 0.10$, AR(1) yapısında olan V matrisi ile tahminler

			$\gamma = 0.90$			$\gamma = 0.95$			$\gamma = 0.99$		
σ			0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10
GEKK		AMSE	0.1519	15.1907	1.5191e+003	0.2922	29.2221	2.9222e+003	1.4145	141.4547	1.4145e+004
SHRUNKEN	0.9	AMSE	1.1258	13.3264	1.2317e+003	1.2362	24.6870	2.3682e+003	2.1373	115.5538	1.1459e+004
		ABIAS	2.0017	5.8232	55.8434	2.0139	7.9184	77.4580	2.3920	17.1169	170.5014
	0.1	AMSE	81.0581	81.2276	96.4582	80.8032	81.1101	110.2159	80.4672	81.8516	221.7318
		ABIAS	17.9880	17.9901	18.0726	17.9694	17.9714	18.4333	17.9376	17.9358	24.0559
Ridge		AMSE	0.2084	6.7885	1.3002e+003	0.2104	8.0816	2.4660e+003	0.1647	14.7611	1.1750e+004
		ABIAS	0.7740	4.1034	56.6900	0.7800	4.3911	77.7961	0.7240	5.3578	169.0651
Jackknifed Ridge		AMSE	0.1132	11.8126	1.4966e+003	0.1414	17.0978	2.8680e+003	0.0938	39.4216	1.3815e+004
		ABIAS	0.5357	5.4341	61.3820	0.5991	6.4442	84.8678	0.4867	8.9655	185.9058
Temel Bileşenler		AMSE	0.1570	0.4441	29.1532	0.0855	0.3506	26.8693	0.0201	0.2698	25.2463
		ABIAS	0.7108	1.0744	8.6257	0.5219	0.9506	8.2863	0.2461	0.8315	8.0364

Tablo A.7. $n=100$, $p=4$, $\rho = -0.10$, AR(1) yapısında olan V matrisi ile tahminler

			$\gamma = 0.90$			$\gamma = 0.95$			$\gamma = 0.99$		
σ			0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10
SHRUNKEN	0.9	AMSE	0.1550	15.4964	1.5496e+003	0.2980	29.7953	2.9795e+003	1.4414	144.1402	1.4414e+004
		ABIAS	1.1286	13.5711	1.2564e+003	1.2408	25.1480	2.4146e+003	2.1594	117.7326	1.1676e+004
	0.1	AMSE	81.1113	81.2807	96.7816	80.8271	81.1365	110.7781	80.4720	81.8862	224.4564
		ABIAS	17.9855	17.9873	18.0712	17.9688	17.9703	18.4522	17.9376	17.9362	24.1938
	Ridge	AMSE	0.2084	6.9084	1.3265e+003	0.2101	8.2046	2.5141e+003	0.1645	14.9914	1.1976e+004
		ABIAS	0.7733	4.1391	57.2365	0.7793	4.4219	78.5055	0.7239	5.3931	170.6025
Jackknifed Ridge		AMSE	0.1149	12.0330	1.5266e+003	0.1425	17.3742	2.9240e+003	0.0933	40.0276	1.4079e+004
		ABIAS	0.5395	5.4814	61.9650	0.6010	6.4902	85.6451	0.4856	9.0215	187.5365
Temel Bileşenler		AMSE	0.1548	0.4446	29.4236	0.0847	0.3512	27.0000	0.0200	0.2694	25.2116
		ABIAS	0.7083	1.0771	8.6750	0.5206	0.9527	8.3191	0.2458	0.8326	8.0523

Tablo A.8. $n=100$, $p=4$, $\rho = -0.30$, AR(1) yapısında olan V matrisi ile tahminler

			$\gamma = 0.90$			$\gamma = 0.95$			$\gamma = 0.99$		
σ			0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10
SHRUNKEN	0.9	AMSE	0.1471	14.7065	1.4707e+003	0.2826	28.2602	2.8260e+003	1.3662	136.6171	1.3662e+004
		ABIAS	1.1197	12.9012	1.1921e+003	1.2281	23.9003	2.2902e+003	2.0990	111.6432	1.1067e+004
	0.1	AMSE	81.1560	81.2899	95.7326	80.8479	81.1381	109.2193	80.4753	81.8189	216.9799
		ABIAS	17.9810	17.9798	18.0168	17.9675	17.9686	18.3847	17.9375	17.9366	23.8142
	Ridge	AMSE	0.2027	6.4406	1.2515e+003	0.2057	7.5506	2.3714e+003	0.1626	13.1824	1.1281e+004
		ABIAS	0.7631	3.9939	55.5880	0.7730	4.2479	76.1625	0.7228	5.0624	165.3164
Jackknifed Ridge		AMSE	0.1081	11.3087	1.4473e+003	0.1334	16.1294	2.7699e+003	0.0862	35.6773	1.3324e+004
		ABIAS	0.5237	5.3177	60.3303	0.5818	6.2560	83.2970	0.4672	8.5124	182.2305
Temel Bileşenler		AMSE	0.1524	0.4228	27.4649	0.0838	0.3315	25.0979	0.0198	0.2503	23.2985
		ABIAS	0.7055	1.0510	8.3897	0.5192	0.9267	8.0341	0.2450	0.8029	7.7529

Tablo A.9. $n=100$, $p=4$, $\rho = -0.50$, AR(1) yapısında olan V matrisi ile tahminler

			$\gamma = 0.90$			$\gamma = 0.95$			$\gamma = 0.99$		
σ			0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10
GEKK		AMSE	0.1311	13.1136	1.3114e+003	0.2519	25.1871	2.5187e+003	1.2169	121.6909	1.2169e+004
SHRUNKEN	0.9	AMSE	1.1077	11.6161	1.0631e+003	1.2030	21.4069	2.0412e+003	1.9785	99.5571	9.8579e+003
		ABİAS	1.9972	5.4228	51.8822	2.0056	7.3786	71.8849	2.3171	15.8643	157.9131
	0.1	AMSE	81.1899	81.3124	94.2211	80.8620	81.1177	106.1165	80.4767	81.6762	202.0974
		ABİAS	17.9768	17.9761	17.9996	17.9662	17.9668	18.2696	17.9375	17.9369	23.0745
Ridge		AMSE	0.1958	5.6133	1.1068e+003	0.1986	6.4106	2.0906e+003	0.1598	10.2865	9.9243e+003
		ABİAS	0.7545	3.7374	52.2708	0.7635	3.9282	71.4561	0.7211	4.4951	154.7937
Jackknifed Ridge		AMSE	0.0957	9.9370	1.2884e+003	0.1177	13.8804	2.4627e+003	0.0753	28.4914	1.1831e+004
		ABİAS	0.4932	4.9924	56.9506	0.5471	5.8155	78.5453	0.4371	7.6199	171.5996
Temel Bileşenler		AMSE	0.1504	0.3872	24.0656	0.0830	0.2992	21.9199	0.0194	0.2198	20.2568
		ABİAS	0.7033	1.0086	7.8664	0.5180	0.8816	7.5154	0.2438	0.7526	7.2275

Tablo A.10. $n=100$, $p=4$, $\rho = -0.70$, AR(1) yapısında olan V matrisi ile tahminler

			$\gamma = 0.90$			$\gamma = 0.95$			$\gamma = 0.99$		
σ			0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10
GEKK		AMSE	0.1120	11.1955	1.1195e+003	0.2150	21.4972	2.1497e+003	1.0383	103.8275	1.0383e+004
SHRUNKEN	0.9	AMSE	1.0928	10.0667	907.7958	1.1728	18.4144	1.7423e+003	1.8342	85.0911	8.4110e+003
		ABIAS	1.9970	5.0556	47.9885	2.0010	6.8436	66.4828	2.2492	14.6832	146.0297
	0.1	AMSE	81.2083	81.3154	92.3614	80.8692	81.0850	102.3976	80.4765	81.5022	184.2688
		ABIAS	17.9740	17.9737	17.9852	17.9652	17.9655	18.1552	17.9374	17.9372	22.1603
Ridge		AMSE	0.1881	4.6706	933.1127	0.1911	5.1703	1.7559e+003	0.1569	7.4191	8.3111e+003
		ABIAS	0.7454	3.4186	47.9669	0.7538	3.5439	65.4307	0.7198	3.8507	141.4340
Jackknifed Ridge		AMSE	0.0814	8.3351	1.0971e+003	0.1000	11.3541	2.0940e+003	0.0639	21.1045	1.0045e+004
		ABIAS	0.4549	4.5791	52.5719	0.5053	5.2771	72.4496	0.4029	6.5837	158.1108
Temel Bileşenler		AMSE	0.1490	0.3480	20.2538	0.0823	0.2637	18.4065	0.0191	0.1868	16.9591
		ABIAS	0.7018	0.9603	7.2156	0.5172	0.8282	6.8815	0.2427	0.6928	6.6027

Tablo A.11. $n=100$, $p=4$, $\rho = -0.90$, AR(1) yapısında olan V matrisi ile tahminler

			$\gamma = 0.90$			$\gamma = 0.95$			$\gamma = 0.99$		
σ			0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10
GEKK		AMSE	0.0933	9.3340	933.4021	0.1792	17.9212	1.7921e+003	0.8654	86.5441	8.6544e+003
		ABIAS	1.0781	8.5620	757.0465	1.1436	15.5152	1.4526e+003	1.6944	71.0941	7.0111e+003
SHRUNKEN	0.9	AMSE	1.0781	8.5620	757.0465	1.1436	15.5152	1.4526e+003	1.6944	71.0941	7.0111e+003
		ABIAS	1.9970	4.6707	43.8649	1.9980	6.2763	60.7587	2.1844	13.4432	133.4810
	0.1	AMSE	81.2147	81.3060	90.5361	80.8711	81.0491	98.7970	80.4754	81.3321	167.0101
		ABIAS	17.9728	17.9728	17.9779	17.9648	17.9648	18.0660	17.9374	17.9375	21.2520
Ridge		AMSE	0.1811	3.7825	765.2898	0.1843	4.0485	1.4338e+003	0.1544	5.1064	6.7597e+003
		ABIAS	0.7375	3.0847	43.4051	0.7454	3.1481	59.0239	0.7191	3.2330	127.2224
Jackknifed Ridge		AMSE	0.0678	6.8008	911.5105	0.0672	9.0052	1.7366e+003	0.0539	14.8997	8.3154e+003
		ABIAS	0.4154	4.1424	47.9353	0.4625	4.7139	65.9773	0.3700	5.5616	143.7766
Temel Bileşenler		AMSE	0.0933	9.3340	933.4021	0.0837	4.8159	479.6932	0.0188	0.1567	13.9533
		ABIAS	0.4871	4.8706	48.7055	0.4076	3.0395	30.2674	0.2418	0.6340	5.9819

Tablo A.12. $n=100$, $p=4$, $\rho = -0.99$, AR(1) yapısında olan V matrisi ile tahminler

			$\gamma = 0.90$			$\gamma = 0.95$			$\gamma = 0.99$		
σ			0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10
GEKK		AMSE	0.0857	8.5717	857.1731	0.1646	16.4576	1.6458e+003	0.7947	79.4750	7.9475e+003
		ABIAS	1.0721	7.9456	695.3111	1.1317	14.3288	1.3341e+003	1.6372	65.3689	6.4385e+003
SHRUNKEN	0.9	AMSE	1.0721	7.9456	695.3111	1.1317	14.3288	1.3341e+003	1.6372	65.3689	6.4385e+003
		ABIAS	1.9971	4.5021	42.0460	1.9971	6.0295	58.2291	2.1582	12.8951	127.9390
	0.1	AMSE	81.2148	81.2995	89.7839	80.8708	81.0335	97.3244	80.4748	81.2622	159.9488
		ABIAS	17.9727	17.9728	17.9765	17.9648	17.9646	18.0386	17.9374	17.9375	20.8791
Ridge		AMSE	0.1791	3.3925	696.6429	0.1824	3.5596	1.3022e+003	0.1541	4.1961	6.1268e+003
		ABIAS	0.7364	2.9248	41.3789	0.7439	2.9569	56.1775	0.7207	2.9490	120.8937
Jackknifed Ridge		AMSE	0.0623	6.1358	835.4387	0.0770	7.9771	1.5902e+003	0.0498	12.3851	7.6069e+003
		ABIAS	0.3980	3.9357	45.8813	0.4440	4.4401	63.1050	0.3559	5.0809	137.3982
Temel Bileşenler		AMSE	0.0857	8.5717	857.1731	0.1646	16.4576	1.6458e+003	0.7947	79.4750	7.9475e+003
		ABIAS	0.4668	4.6679	46.6786	0.6468	6.4683	64.6832	1.4214	14.2138	142.1383

EK B

Tablo B.1. $n=100$, $p=4$, $\tau=0.99$, MA(1) yapısında olan V matrisi ile tahminler

			$\gamma = 0.90$			$\gamma = 0.95$			$\gamma = 0.99$		
σ			0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10
SHRUNKEN	0.9	AMSE	1.0541	105.4121	1.0541e+004	2.0538	205.3756	2.0538e+004	9.9801	998.0144	9.9801e+004
		ABIAS	2.1561	14.7037	146.3088	2.5855	20.4854	204.3411	4.7688	45.0953	450.6875
	0.1	AMSE	81.9070	82.9560	187.3678	81.3367	83.3810	286.8133	80.6624	90.5666	1.0788e+003
		ABIAS	15.1135	15.1162	21.5384	16.2896	16.2924	26.7215	17.6260	17.6452	51.9750
Ridge		AMSE	0.7210	72.3641	8.6492e+003	1.1399	143.9410	1.7132e+004	2.9570	709.2156	8.4807e+004
		ABIAS	1.2884	12.9383	146.7309	1.6305	18.2590	207.0287	2.5843	40.4090	461.7321
Jackknifed Ridge		AMSE	0.8509	94.7577	1.0224e+004	1.5533	185.8477	2.0024e+004	5.3642	903.0249	9.7685e+004
		ABIAS	1.4402	15.1796	159.9738	1.9396	21.2526	224.1336	3.5219	46.6557	495.5336
Temel Bileşenler		AMSE	1.0541	105.4121	1.0541e+004	1.7223	168.3472	1.6831e+004	5.9144	589.7145	5.8970e+004
		ABIAS	1.6256	16.2560	162.5599	2.0422	20.0865	200.8300	3.6895	36.8085	368.0719

Tablo B.2. $n=100$, $p=4$, $\tau=0.90$, MA(1) yapısında olan V matrisi ile tahminler

			$\gamma = 0.90$			$\gamma = 0.95$			$\gamma = 0.99$		
σ			0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10
SHRUNKEN	0.9	AMSE	0.4323	43.2309	4.3231e+003	0.8368	83.6845	8.3684e+003	4.0697	406.9671	4.0697e+004
		ABIAS	2.0150	9.5365	94.0178	2.1657	13.1855	130.8539	3.3145	28.9180	288.7535
	0.1	AMSE	81.2578	81.6665	124.2728	80.8923	81.7000	164.3399	80.5137	84.5653	487.6883
		ABIAS	17.6849	17.6822	18.8032	17.8549	17.8522	21.0347	17.9218	17.9245	35.2218
Ridge		AMSE	0.3753	28.2223	3.8822e+003	0.4422	46.6202	7.5049e+003	0.3980	176.0878	3.6507e+004
		ABIAS	0.9765	8.3096	98.6155	1.0581	10.4947	137.0563	1.0024	19.2551	302.2550
Jackknifed Ridge		AMSE	0.3747	39.8264	4.2958e+003	0.5857	72.2341	8.3138e+003	0.7958	303.4172	4.0429e+004
		ABIAS	0.9718	9.9741	104.0665	1.2137	13.3191	144.7971	1.3965	26.3040	319.4421
Temel Bileşenler		AMSE	0.2236	12.9900	1.2896e+003	0.0881	0.9153	83.6329	0.0241	0.7107	69.3720
		ABIAS	0.7830	5.5977	55.7374	0.5219	1.5288	14.5906	0.2612	1.3550	13.3981

Tablo B.3. $n=100$, $p=4$, $\tau=0.70$, MA(1) yapısında olan V matrisi ile tahminler

			$\gamma = 0.90$			$\gamma = 0.95$			$\gamma = 0.99$		
σ			0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10
GEKK		AMSE	0.1776	17.7564	1.7756e+003	0.3418	34.1835	3.4184e+003	1.6544	165.4400	1.6544e+004
SHRUNKEN	0.9	AMSE	1.1455	15.4051	1.4395e+003	1.2760	28.7080	2.7701e+003	2.3354	135.0215	1.3402e+004
		ABIAS	2.0023	6.2359	60.2045	2.0234	8.5096	83.5434	2.4941	18.4576	183.8973
	0.1	AMSE	80.9496	81.1461	98.9327	80.7537	81.1123	115.1559	80.4648	82.1224	246.1049
		ABIAS	17.9760	17.9787	18.1150	17.9650	17.9675	18.6433	17.9374	17.9398	25.2993
Ridge		AMSE	0.2288	9.4152	1.5558e+003	0.2398	12.5259	2.9677e+003	0.1905	28.7759	1.4246e+004
		ABIAS	0.7946	4.8223	62.0836	0.8096	5.4607	85.5489	0.7469	7.5319	186.9873
Jackknifed Ridge		AMSE	0.1445	15.0335	1.7576e+003	0.2001	23.8646	3.3766e+003	0.1733	68.2542	1.6305e+004
		ABIAS	0.6041	6.1226	66.4188	0.7117	7.6231	92.0148	0.6608	11.9738	202.0551
Temel Bileşenler		AMSE	0.1625	0.4651	30.7211	0.0870	0.3680	28.4729	0.0203	0.2882	27.0793
		ABIAS	0.7203	1.0999	8.8802	0.5255	0.9745	8.5570	0.2476	0.8610	8.3491

Tablo B.4. $n=100$, $p=4$, $\tau=0.50$, MA(1) yapısında olan V matrisi ile tahminler

			$\gamma = 0.90$			$\gamma = 0.95$			$\gamma = 0.99$		
σ			0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10
GEKK		AMSE	0.1555	15.5502	1.5550e+003	0.2994	29.9370	2.9937e+003	1.4488	144.8782	1.4488e+004
SHRUNKEN	0.9	AMSE	1.1278	13.6185	1.2608e+003	1.2417	25.2681	2.4261e+003	2.1646	118.3236	1.1736e+004
		ABIAS	2.0020	5.8660	56.2822	2.0154	7.9835	78.1059	2.4094	17.2634	171.9293
	0.1	AMSE	80.9610	81.1360	96.7410	80.7606	81.0768	110.9136	80.4602	81.8757	225.1168
		ABIAS	17.9867	17.9891	18.0785	17.9687	17.9710	18.4770	17.9374	17.9352	24.2521
Ridge		AMSE	0.2178	7.8349	1.3503e+003	0.2250	9.9647	2.5699e+003	0.1767	20.4588	1.2269e+004
		ABIAS	0.7802	4.3911	57.6728	0.7901	4.8598	79.3372	0.7292	6.2991	172.7578
Jackknifed Ridge		AMSE	0.1243	12.8433	1.5368e+003	0.1675	19.7114	2.9505e+003	0.1329	51.0481	1.4224e+004
		ABIAS	0.5594	5.6487	62.0049	0.6500	6.9099	85.8486	0.5749	10.2530	188.2861
Temel Bileşenler		AMSE	0.1617	0.4157	25.8220	0.0867	0.3244	24.0924	0.0200	0.2480	23.0556
		ABIAS	0.7188	1.0404	8.1277	0.5250	0.9146	7.8490	0.2459	0.7966	7.6769

Tablo B.5. n=100, p=4, $\tau = 0.30$, MA(1) yapısında olan V matrisi ile tahminler

		$\gamma = 0.90$			$\gamma = 0.95$			$\gamma = 0.99$			
σ		0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10	
GEKK		AMSE	0.1760	17.5994	1.7599e+003	0.3388	33.8804	3.3880e+003	1.6386	163.8603	1.6386e+004
SHRUNKEN	0.9	AMSE	1.1450	15.2789	1.4268e+003	1.2739	28.4622	2.7455e+003	2.3185	133.6998	1.3273e+004
		ABIAS	2.0032	6.2038	59.7619	2.0237	8.4596	82.9313	2.4825	18.3092	182.4848
	0.1	AMSE	81.0115	81.2067	98.8397	80.7855	81.1405	114.8778	80.4669	82.0709	244.1107
		ABIAS	17.9881	17.9904	18.1226	17.9690	17.9712	18.6342	17.9374	17.9354	25.1602
Ridge		AMSE	0.2283	9.0586	1.5361e+003	0.2363	11.7875	2.9261e+003	0.1825	26.1804	1.3979e+004
		ABIAS	0.7910	4.6960	61.4289	0.8014	5.2404	84.5471	0.7328	7.0324	184.2074
Jackknifed Ridge		AMSE	0.1410	14.6639	1.7407e+003	0.1906	22.8292	3.3427e+003	0.1529	62.8652	1.6112e+004
		ABIAS	0.5940	6.0165	65.8751	0.6899	7.3989	91.2213	0.6126	11.2947	200.0814
Temel Bileşenler		AMSE	0.1603	0.4284	27.2452	0.0865	0.3374	25.4321	0.0201	0.2612	24.3747
		ABIAS	0.7174	1.0550	8.3401	0.5246	0.9323	8.0541	0.2463	0.8169	7.8804

Tablo B.6. n=100, p=4, $\tau = 0.10$, MA(1) yapısında olan V matrisi ile tahminler

			$\gamma = 0.90$			$\gamma = 0.95$			$\gamma = 0.99$		
σ			0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10
GEKK		AMSE	0.2591	25.9145	2.5915e+003	0.4988	49.8794	4.9879e+003	2.4055	240.5502	2.4055e+004
SHRUNKEN	0.9	AMSE	1.2087	21.9699	2.0999e+003	1.3998	41.3797	4.0410e+003	2.9437	195.8579	1.9486e+004
		ABIAS	2.0087	7.3157	71.3896	2.0611	10.0316	99.0740	2.7584	21.8537	217.8634
	0.1	AMSE	81.0832	81.3200	106.7782	80.8246	81.3001	130.4970	80.4876	82.8860	321.2001
		ABIAS	17.9843	17.9822	18.3089	17.9654	17.9634	19.3172	17.9366	17.9384	28.5322
Ridge		AMSE	0.2859	15.9641	2.2999e+003	0.3153	23.7219	4.3947e+003	0.2555	71.6450	2.1063e+004
		ABIAS	0.8538	6.0632	74.1479	0.8867	7.1754	102.2949	0.8137	11.2426	223.6967
Jackknifed Ridge		AMSE	0.2219	23.0851	2.5690e+003	0.3294	39.1267	4.9372e+003	0.3673	137.8730	2.3773e+004
		ABIAS	0.7304	7.4098	78.8600	0.8841	9.4802	109.2789	0.9037	16.4874	239.8380
Temel Bileşenler		AMSE	0.1608	0.4572	30.0936	0.0870	0.3763	29.3004	0.0207	0.3186	30.1115
		ABIAS	0.7229	1.0885	8.7612	0.5267	0.9835	8.6421	0.2485	0.9032	8.7694

Tablo B.7. $n=100$, $p=4$, $\tau = -0.10$, MA(1) yapısında olan V matrisi ile tahminler

			$\gamma = 0.90$			$\gamma = 0.95$			$\gamma = 0.99$		
σ			0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10
GEKK		AMSE	4.0901	409.0116	4.0901e+004	7.7380	773.7998	7.7380e+004	35.4908	3.5491e+003	3.5491e+005
SHRUNKEN	0.9	AMSE	4.3156	332.3173	3.3131e+004	7.2667	627.7901	6.2679e+004	29.7420	2.8758e+003	2.8748e+005
		ABIAS	3.1653	24.9316	248.3906	3.9644	34.2859	342.1560	7.6408	73.6142	735.7646
	0.1	AMSE	81.1193	85.1837	490.2572	80.8740	88.5479	854.7423	80.8067	115.9539	3.6297e+003
		ABIAS	17.9836	17.9866	32.8766	17.9653	18.0004	42.1486	17.9362	19.0329	83.8499
Ridge		AMSE	23.6235	2.1883e+005	3.8576e+004	2.7288	1.3352e+007	1.4722e+005	0.9693	4.3398e+007	3.6158e+005
		ABIAS	5.1061	100.7006	270.8337	2.0420	219.6235	382.2779	1.1881	550.4492	811.7992
Jackknifed Ridge		AMSE	1.1746e+003	3.2230e+012	6.2599e+005	18.1277	3.7626e+015	7.7258e+010	4.2363	3.6308e+015	9.5919e+008
		ABIAS	20.8585	5.0030e+004	307.1003	4.7480	1.4682e+006	7.1946e+003	2.0487	1.8112e+006	1.8498e+003
Temel Bileşenler		AMSE	0.1518	0.4502	30.2920	0.0837	0.3779	29.8011	0.0205	0.3360	31.8805
		ABIAS	0.6972	1.0831	8.8113	0.5160	0.9856	8.7386	0.2477	0.9266	9.0259

Tablo B.8. $n=100$, $p=4$, $\tau = -0.30$, MA(1) yapısında olan V matrisi ile tahminler

			$\gamma = 0.90$			$\gamma = 0.95$			$\gamma = 0.99$		
σ			0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10
GEKK		AMSE	0.3759	37.5931	3.7593e+003	0.7292	72.9157	7.2916e+003	3.5711	357.1102	3.5711e+004
SHRUNKEN	0.9	AMSE	1.3074	31.4644	3.0462e+003	1.5875	60.0489	5.9071e+003	3.8868	290.2617	2.8927e+004
		ABIAS	2.0423	8.5311	83.6559	2.1507	11.7659	116.4189	3.0976	25.8338	257.7464
	0.1	AMSE	81.1426	81.5258	118.8530	80.8365	81.5487	153.6389	80.4954	84.0390	437.6601
		ABIAS	17.9806	17.9818	18.8951	17.9664	17.9653	20.5780	17.9374	17.9383	32.4997
Ridge		AMSE	0.2430	14.2889	3.2728e+003	0.2307	19.2161	6.2966e+003	0.1676	57.0672	3.0681e+004
		ABIAS	0.8048	5.6180	85.7155	0.7940	6.2602	118.4242	0.7194	9.5172	260.8875
Jackknifed Ridge		AMSE	0.2080	26.6050	3.7146e+003	0.2178	40.6878	7.1898e+003	0.1200	134.9944	3.5163e+004
		ABIAS	0.7053	7.7204	92.1226	0.7314	9.2788	127.9193	0.5452	15.2599	282.6688
Temel Bileşenler		AMSE	0.1510	0.4270	28.0252	0.0833	0.3397	25.9800	0.0199	0.2645	24.7342
		ABIAS	0.7011	1.0575	8.4745	0.5171	0.9363	8.1646	0.2453	0.8240	7.9656

Tablo B.9. $n=100$, $p=4$, $\tau = -0.50$, MA(1) yapısında olan V matrisi ile tahminler

			$\gamma = 0.90$			$\gamma = 0.95$			$\gamma = 0.99$		
σ			0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10
SHRUNKEN	0.9	AMSE	0.1881	18.8081	1.8808e+003	0.3624	36.2378	3.6238e+003	1.7571	175.7125	1.7571e+004
		ABIAS	2.0002	6.3900	61.8241	2.0247	8.7255	85.7661	2.5298	18.9485	188.8209
	0.1	AMSE	81.1940	81.3861	100.0644	80.8603	81.2239	117.1475	80.4817	82.2250	256.2175
		ABIAS	17.9741	17.9746	18.0992	17.9648	17.9652	18.6900	17.9372	17.9375	25.7704
	Ridge	AMSE	0.2093	7.4203	1.5991e+003	0.2079	8.7518	3.0399e+003	0.1627	17.2526	1.4562e+004
		ABIAS	0.7693	4.2814	62.5767	0.7737	4.5492	85.9201	0.7223	5.7462	187.2174
Jackknifed Ridge		AMSE	0.1248	13.5695	1.8499e+003	0.1447	19.1526	3.5512e+003	0.0881	46.1354	1.7152e+004
		ABIAS	0.5623	5.8046	67.9113	0.6070	6.7820	93.9053	0.4729	9.6048	205.9038
Temel Bileşenler		AMSE	0.1486	0.4196	27.5183	0.0826	0.3319	25.2561	0.0197	0.2534	23.6210
		ABIAS	0.6989	1.0480	8.3889	0.5164	0.9259	8.0388	0.2448	0.8058	7.7743

Tablo B.10. $n=100$, $p=4$, $\tau = -0.70$, MA(1) yapısında olan V matrisi ile tahminler

			$\gamma = 0.90$			$\gamma = 0.95$			$\gamma = 0.99$		
σ			0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10
SHRUNKEN	0.9	AMSE	0.1869	18.6925	1.8692e+003	0.3595	35.9474	3.5947e+003	1.7401	174.0100	1.7401e+004
		ABIAS	1.9976	6.4132	62.1376	2.0206	8.7572	86.1245	2.5239	19.0022	189.3709
	0.1	AMSE	81.2715	81.4575	99.9725	80.8970	81.2531	116.8429	80.4878	82.2098	254.4728
		ABIAS	17.9638	17.9634	18.0688	17.9619	17.9615	18.6419	17.9370	17.9365	25.7225
	Ridge	AMSE	0.2083	7.0905	1.5717e+003	0.2070	8.2565	2.9786e+003	0.1622	15.8891	1.4231e+004
		ABIAS	0.7725	4.2050	62.4724	0.7772	4.4408	85.6265	0.7238	5.5637	186.2250
Jackknifed Ridge		AMSE	0.1212	13.0636	1.8325e+003	0.1398	18.1430	3.5086e+003	0.0853	42.6945	1.6907e+004
		ABIAS	0.5570	5.7303	68.1083	0.5978	6.6360	94.0367	0.4637	9.3044	205.8219
Temel Bileşenler		AMSE	0.1451	0.4860	34.5709	0.0822	0.3928	31.4557	0.0202	0.3077	29.0579
		ABIAS	0.6917	1.1230	9.3656	0.5145	1.0029	8.9386	0.2463	0.8841	8.5913

Tablo B.11. $n=100$, $p=4$, $\tau = -0.90$, MA(1) yapısında olan V matrisi ile tahminler

			$\gamma = 0.90$			$\gamma = 0.95$			$\gamma = 0.99$		
σ			0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10
GEKK	AMSE		0.3651	36.5078	3.6508e+003	0.7013	70.1252	7.0125e+003	3.3866	338.6614	3.3866e+004
SHRUNKEN	0.9	AMSE	1.3002	30.5689	2.9581e+003	1.5669	57.7929	5.6811e+003	3.7359	275.3005	2.7432e+004
		ABIAS	2.0188	8.8090	86.5604	2.1216	12.1065	119.9047	3.1052	26.3965	263.3462
	0.1	AMSE	81.4283	81.7829	117.8570	80.9811	81.6680	151.0186	80.5199	83.8646	419.0594
		ABIAS	17.9184	17.9168	18.6451	17.9453	17.9437	20.3488	17.9346	17.9331	32.7688
Ridge	AMSE		0.2466	12.9422	3.0748e+003	0.2401	17.1307	5.8565e+003	0.1756	48.0477	2.8105e+004
		ABIAS	0.8314	5.5697	87.2090	0.8290	6.2170	120.0123	0.7382	9.4767	262.0997
Jackknifed Ridge	AMSE		0.2012	23.9015	3.5728e+003	0.2249	35.8223	6.8443e+003	0.1414	114.0149	3.2981e+004
		ABIAS	0.7128	7.6463	94.7804	0.7502	9.1420	130.9642	0.5876	15.0786	286.9458
Temel Bileşenler	AMSE		0.1399	9.5224	947.7813	0.0813	0.5880	51.2557	0.0218	0.4874	47.0467
		ABIAS	0.5993	4.2607	42.3933	0.5093	1.2243	11.3864	0.2513	1.1115	10.9129

Tablo B.12. $n=100$, $p=4$, $\tau = -0.99$, MA(1) yapısında olan V matrisi ile tahminler

			$\gamma = 0.90$			$\gamma = 0.95$			$\gamma = 0.99$		
σ			0.1	1	10	0.1	1	10	0.1	1	10
GEKK	AMSE		1.1936	119.3608	1.1936e+004	2.2957	229.5668	2.2957e+004	11.0395	1.1039e+003	1.1039e+005
SHRUNKEN	0.9	AMSE	1.9742	97.6797	9.6691e+003	2.8599	186.9393	1.8596e+004	9.9349	895.1786	8.9420e+004
		ABIAS	2.2680	15.2215	151.3385	2.6776	21.0020	209.3283	4.8754	45.8529	458.1524
	0.1	AMSE	81.7026	82.8742	200.9409	81.1458	83.4084	310.5776	80.6293	91.5480	1.1844e+003
		ABIAS	17.7378	17.7354	22.4724	17.8687	17.8665	27.6085	17.9214	17.9516	53.0809
Ridge	AMSE		0.4704	57.5589	1.0412e+004	0.4662	100.0463	1.9965e+004	0.3309	410.9804	9.5756e+004
		ABIAS	1.0762	11.9540	156.4888	1.0766	14.3721	215.9892	0.9185	27.6270	471.8618
Jackknifed Ridge	AMSE		0.6614	95.3744	1.1794e+004	0.7756	167.9391	2.2669e+004	0.6806	721.6541	1.0895e+005
		ABIAS	1.2684	14.7385	166.9688	1.3722	19.1569	230.8103	1.2382	38.1300	504.8888
Temel Bileşenler	AMSE		0.5780	60.0377	5.7556e+003	0.5528	53.6161	5.3599e+003	0.0257	0.9207	90.4211
		ABIAS	1.1981	11.4764	119.5392	1.0147	9.4836	94.7688	0.2669	1.5330	15.1828