

**İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE
GREEN FONKSİYONUNUN KULLANILMASI**

Faruk DÜŞÜNCELİ

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Yrd. Doç. Dr. Arzu AYKUT**

2011

Her hakkı saklıdır

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE GREEN
FONKSİYONUNUN KULLANILMASI**

Faruk DÜŞÜNCELİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ERZURUM
2011**

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE GREEN FONKSİYONUNUN KULLANILMASI

Yrd. Doç. Dr. Arzu AYKUT danışmanlığında, Faruk DÜŞÜNCELİ tarafından hazırlanan bu çalışma 16/01/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından, Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak **oybirliği/oy çokluğu (3 / 3)** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Abdullah KAPLAN

İmza :

Üye : Doç. Dr. Ercan ÇELİK

İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Arzu AYKUT

İmza :

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum
Enstitü Müdürü

Prof.Dr. Ömer AKBULUT

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE GREEN FONKSİYONUNUN KULLANILMASI

Faruk DÜŞÜNCELİ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd.Doç. Dr. Arzu AYKUT

Bu tezde, sınır değer problemlerinin farklı çözüm yöntemlerinden biri olan Green fonksiyonu araştırıldı. Green fonksiyonu aracılığıyla sınır değer problemi integral denkleme dönüştürüldü ve buradan çözüm elde edildi.

İlk olarak, İntegral denklemler ve Green fonksiyonu araştırıldı. Daha sonra Green fonksiyonu aracılığıyla sınır değer problemleri integral denklemlere dönüştürüldü. Son olarak, integral denklemlerin çözümü yapıldı. Yöntem iki farklı probleme uygulandı.

2011, 42 sayfa

Anahtar Kelimeler: Sınır-değer problemleri, Sturm-Liouville problemi, Green fonksiyonu, İntegral denklem

ABSTRACT

Master Thesis

USİNG GREEN FUNCTION FOR SOLVİNG INTEGRAL EQUATIONS

Faruk DÜŞÜNCELİ

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Arzu AYKUT

In this thesis, Green function method has been studied, which is one of the different method of solving of boundary value problems. Through Green function method, boundary value problem has been turned into the integral equations and thanks to it, the problem solving has been obtained.

At first, integral equations and Green function have been studied and researched. Then, through Green function, boundary value problems have been turned into integral equation. At last, integral equations have been solved.

This method has been used to solve two different problems.

2011, 42 pages

Keywords: Boundary Value Problems, Green Functions, Sturm-Liouville Problems, Integral Equations.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan ve desteklerini esirgemeyen Sayın hocam Yrd.Doç. Dr. Arzu AYKUT'a en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Matematik bölümünde gerekli ilgiyi esirgemeyen başta Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Hüseyin AYDIN olmak üzere anabilim dalımızın değerli öğretim üyeleri Sayın Doç. Dr. Ercan ÇELİK'e, Sayın Doç. Dr. Murat SUBAŞI'na, Sayın Doç. Dr. Abdullah KAPLAN'a ve matematik bölümünün diğer tüm öğretim elemanlarına, çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı anne, baba ve eşime, sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Faruk DÜŞÜNCELİ

Ocak 2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	13
3.1. İntegral Denklemler	13
3.1.1. İntegral denklemlerin sınıflandırılması.....	13
3.1.2. İntegral denklemlerle diferansiyel denklemler arasındaki ilişki	15
3.1.3. Diferansiyel denklemlerin integral denklemlere dönüştürülmesi.....	15
3.1.4. İntegral denklemlerin diferansiyel denklemlere dönüştürülmesi	19
3.2. Green Fonksiyonunun Oluşturulma Yöntemleri	22
3.2.1. Adi diferansiyel denklemler için Green fonksiyonunun oluşturulması	22
3.2.2. İkinci mertebeden bir diferansiyel denklem için Green fonksiyonunun oluşturulması	27
3.3. Sınır değer problemlerinin çözümünde Green fonksiyonunun kullanımı.....	32
3.3.1. Bir parametre içeren sınır değer problemlerinin integral denklemlere dönüştürülmesi	34
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA.....	37
4.1. Test Problemi	37
4.2. Test Problemi	38
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	41
KAYNAKLAR.....	42
ÖZGEÇMİŞ.....	43

SİMGELER DİZİNİ

$C[a, b]$	$[a, b] \subset R$ aralığında sürekli fonksiyonlar
$G(x, \xi)$	Green fonksiyonu
$K(x, t)$	Çekirdek fonksiyon
L	Lineer operatör
$L\{ \}$	Laplace dönüşümü
y'	y fonksiyonunun birinci mertebeden türev işlemi
y''	y fonksiyonunun ikinci mertebeden türev işlemi
y^n	y fonksiyonunun n 'inci mertebeden türev işlemi
$\frac{\partial y}{\partial x}$	y fonksiyonunun x değişkenine göre kısmi türev işlemi
λ	Özdeğer
$\phi(x)$	Özfonksiyon
$ A $	A 'nın determinantı
W	Wronskian determinantı

1.GİRİŞ

İntegral denklemlerle ilk uğraşlar 19. yüzyılın ilk yarısında başlamıştır. Abel'in bir mekanik problemi incelerken 1823 yılında ilk defa integral denkleme rastladığı bilinmektedir. Ancak integral denklem kavramını ilk defa 1888' de DuBois Reymond kullanmıştır.

Green (1828) “an Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism” adlı çalışmasını yaptı. Bu çalışmasında elektrik potansiyellerini incelerken bu fonksiyonları oluşturdu. Ancak, bu çalışma 1850 ve 1854 arasında yayınlanıncaya kadar bir bilinmeyen olarak kaldı. Bu çalışmayla Alman okullarının matematiksel fiziğe bakış açıları değişti.

Bu fonksiyona Green kendi adını vermemiştir. Ancak, daha sonra Riemann (1826–1866) bu fonksiyonları “Green Fonksiyonları” diye adlandıracaktır.

Neumann (1877) Laplace denklemler ile ilgili çalışmasında Green fonksiyonlar kavramını sık sık kullandı. Laplace denklemlerin çözümündeki başarısı ile birlikte Green fonksiyonları, diğer denklemlerin çözümünde de kullanılmaya başlandı.

Hobson (1856–1933), bir, iki ve üç boyutlu ısı denklemleri için Green fonksiyonları türetti. Aynı zamanda Fransız Matematikçi Appell (1855–1930) bir boyutlu ısı denklemleri için benzer bir formül tanımladı. Ancak, Sommerfeld (1868–1951) ısı denklemlerinin çözümü için Green Fonksiyonun modern teorisini oluşturdu. Yani, Sommerfeld 20. yüzyıl dönemecinde Green Fonksiyonunun büyük şampiyonu kabul edildi.

Dalga denklemleri için Green fonksiyonlarının geliştirilmesinde öncülük eden şahsiyet, üç boyutlu dalga denklemleri adlı çalışması boyunca Green Fonksiyonları kullanan

Kirchhoff (1824–1887) tur. O, Green fonksiyonları kullanarak Huygen Prensiplerinin matematiksel açıklaması olan Kirchhoff teoremlerini türetti.

Sınır değer problemleri içeren adi diferansiyel denklemler için Green fonksiyon uygulamaları, Burkhardt (1861–1914)'ın çalışması ile başladı. Daha sonra, Bocher (1867–1918) n inci mertebeden denklemlere genişletti.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, sonraki bölümler için temel teşkil eden notlara, tanımlara, önermelere ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.1: n ' inci mertebeden homogen olmayan bir lineer diferansiyel denklem genel olarak

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = F(x)$$

şeklinde yazılır. Burada $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ değişken katsayılarıdır. Bu katsayılar ve $F(x)$ fonksiyonu, x ' in bir $[a, b]$ aralığında tarif edilmiş sürekli fonksiyonlarıdır. Ayrıca, $a_0(x)$ bu aralıkta daima sıfırdan farklıdır.

Eğer, $F(x) = 0$ ise, (2.1) denklemi

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = 0$$

şeklini alır. O zaman bu denkleme, n ' inci mertebeden değişken katsayılı homogen lineer diferansiyel denklem denir.

Tanım 2.2: İkinci mertebeden lineer diferansiyel denklem, $x \in (a, b)$ için

$$a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = f(x)$$

olup ve

$$\begin{aligned} B_1(y) &= \alpha_{11}y(a) + \alpha_{12}y'(a) + \beta_{11}y(b) + \beta_{12}y'(b) = \gamma_1 \\ B_2(y) &= \alpha_{21}y(a) + \alpha_{22}y'(a) + \beta_{21}y(b) + \beta_{22}y'(b) = \gamma_2 \end{aligned}$$

sınır koşulları ile bir sınır-değer problemi oluşturulmaktadır. Burada $a_0, a_1, a_2 \in C[a, b]$, $a_0(x) \neq 0$ ve $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_i$ sabitlerdir. (2.4) ile verilen sınır koşulları en genel halde olup $\beta_{11} = \beta_{12} = 0$ ve $\alpha_{21} = \alpha_{22} = 0$ ise sınır koşulları ayırık sınır koşulları adını alır. Eğer $\alpha_{12} = \beta_{12} = 0$, $\alpha_{21} = \beta_{21} = 0$ ve $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ise sınır koşulları periyodik olarak adlandırılır. Ayrıca $\alpha_{12} = \beta_{11} = \beta_{12} = \alpha_{21} = \beta_{21} = \beta_{22} = 0$ olması halinde ise sözü edilen sınır koşulları $y(a) = \frac{\gamma_1}{\alpha_{11}}, y'(a) = \frac{\gamma_2}{\alpha_{21}}$ şeklinde ifade başlangıç koşullarına dönüşür.

Tanım 2.3: (2.3) denkleminin çözümleri olan $y_1 : [a, b] \rightarrow R$ ve $y_2 : [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında türevlenebilir fonksiyonlar ise her $x \in [a, b]$ için y_1 ve y_2 fonksiyonlarının Wronskianı $W(y_1, y_2) : [a, b] \rightarrow R$,

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer Wronskian determinantının değeri $[a, b]$ aralığının herhangi bir noktasında sıfırdan farklı ise bu durumda y_1 ve y_2 fonksiyonları aynı aralıkta lineer bağımsızdır.

Tanım 2.4: Bir $a \leq x \leq b$ aralığında sürekli iki $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları için eğer

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

ise, bu fonksiyonlar adı geçen aralıkta birbirine diktir veya “ortogonal” dır denir. Ayrıca

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} = 1$$

eşitliği sağlanıyorsa $f(x)$ fonksiyonu “normalize” olmuş bir fonksiyondur.

Tanım 2.5: $\forall a \in N$ için $f_n : E \rightarrow R$ olmak üzere $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi için,

$S_n = \sum_{k=1}^n f_k$ olarak alındığında $S_n : E \rightarrow R$ biçiminde E üzerinde tanımlanan bir $\{S_n\}$

fonksiyonlar dizisi elde edilir ki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x)$$

olur. Bu durumda $\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin x noktasında oluşturduğu reel sayı serisi yakınsak olur.

Bir E kümesinde tanımlanan $\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin $\{S_n\}$ kısmi toplamlar dizisi düzgün yakınsak ise $\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin oluşturduğu fonksiyon serisi düzgün yakınsak olur.

Tanım 2.6: $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad (n=1, 2, \dots)$$

şeklinde ortonormal fonksiyonların serisine açılabilirdiği düşünülürse, bu durumda sözü edilen serilere ortonormal seriler denir.

Tanım 2.7: Belirli bir küme üzerinde tanımlı f ve g fonksiyonları ve α, β skalerleri için,

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha Lf + \beta Lg$$

Koşulunu sağlayan L operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 2.8: V bir kompleks vektör uzayı, $\varphi: V \times V \rightarrow C$ $\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle$ fonksiyoneli $\forall x, y \in V$ ve $\forall \alpha \in C$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$ fonksiyonuna bir iç çarpım, $\langle x, y \rangle$ sayısına x ve y 'nin iç çarpımı ve $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisine de iç çarpım uzayı denir.

$$a) \langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$b) \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$c) \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$d) \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

Tanım 2.9: n . mertebeden homogen olmayan lineer diferansiyel denklem

$$a_n(x)y''(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$$

olmak üzere

$$L = a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$$

türev operatörü için $L(y) = f$ denklemindeki L^* adjoint operatörü,

$$L^*y = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} (\overline{a_n} y) + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (\overline{a_{n-1}} y) + \dots + \overline{a_0} y$$

şeklindedir. Burada $\overline{a_n}$ fonksiyonu, a_n fonksiyonun karmaşık eşleniğidir. Her bir a_k fonksiyonu k . mertebeden sürekli türevlenebilir, u ve v fonksiyonları da herhangi bir aralıkta n . mertebeden sürekli türevlenebilir ise bu durumda Lagrange özdeşliğinden,

$$\bar{v}Lu - u\overline{L^*v} = \frac{d}{dx} B[u, v]$$

yazılabilir. Buradaki $B[u, v]$ bilineer formu,

$$B[u, v] = \sum_{m=1}^n \sum_{\substack{j+k=m-1 \\ j \geq 0, k \geq 0}} (-1)^j u^{(k)} (a_m \bar{v})^{(j)}$$

olarak tanımlıdır. Eğer L ikinci mertebeden bir diferansiyel operatörü ise,

$$\begin{aligned} \bar{v}Lu - u\overline{L^*v} &= \frac{d}{dx} \left[ua_1 \bar{v} + u'a_2 \bar{v} - u(a_2 \bar{v})' \right] \\ &= u''a_2 \bar{v} + u'a_1 \bar{v} + u \left[-a_2 \bar{v}'' + (-2a_2' + a_1) \bar{v}' + (-a_2'' + a_1') \bar{v} \right] \end{aligned}$$

Lagrange özdeşliği geçerli olduğu aralıkta integre edilirse,

$$\int_a^b (\bar{v}Lu - u\overline{L^*v}) dx = \langle v, Lu \rangle - \langle L^*v, u \rangle = B[u, v] \Big|_{x=b} - B[u, v] \Big|_{x=a}$$

bulunur. Bu da Green özdeşliğidir (Mauch 2004).

Tanım 2.10:

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y + \lambda r(x)y = 0$$

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, \quad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0$$

şeklinde sınır değer problemine Sturm-Liouville problemi denir. Burada, $p > 0$, $r \geq 0$ ve p, q, r fonksiyonları $[a, b]$ aralığında süreklidir. Sturm-Liouville probleminin her zaman $y(x) = 0$ aşıkâr çözümüne sahip olduğu aşıkardır (Bayram 2009).

Tanım 2.11: L operatörü Sturm-Liouville operatörü olmak üzere,

$$uLv - vLu = [p(uv' - vu')]'$$

şeklindeki özdeşliğe Lagrange özdeşliği denir.

Tanım 2.12: Sturm-Liouville operatörü için Green özdeşliği,

$$\int_a^b (uLv - vLu) dx = [p(uv' - vu')] \Big|_a^b$$

şeklindedir.

Tanım 2.13: Eğer tümü sıfır olmayan $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitleri ve $[a, b] \subseteq R$ kapalı aralığında tüm x değerleri için,

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

oluyorsa, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ fonksiyonlarına lineer bağımlıdır denir. Eğer $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ fonksiyonları lineer bağımlı değilse, bunlara lineer bağımsızdır denir (Bayram 2009).

Tanım 2.14: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun.

f fonksiyonu a noktasında süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Tanım 2.15: f , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $|x - y| < \delta$ koşulunu sağlayan $\forall x, y \in [a, b]$ için $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ bulunabilirse f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında düzgün süreklidir denir.

Tanım 2.16: Boş olmayan bir fonksiyonlar kümesi X olmak üzere $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ şeklinde fonksiyonlar olsun.

i) Eğer $\forall x \in X$ için $f_n(x) \rightarrow f(x)$ oluyorsa yani $\forall x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $\exists N = N(x, \varepsilon)$ varsa ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ oluyorsa (f_n) fonksiyonlar dizisi f 'ye noktasal yakınsar denir.

ii) $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N = N(\varepsilon)$ varsa $\forall x \in X$ ve $\forall n \geq N$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ oluyorsa (f_n) fonksiyonlar dizisi f 'ye düzgün yakınsar denir.

Tanım 2.17: Bir fonksiyon uzayında tanımlı L lineer operatörü için,

$$Lf = \lambda f$$

olacak biçimde bir λ sabiti mevcut ise bu değere L operatörünün özdeğeri, f fonksiyonuna da özfonksiyonu denir.

Tanım 2.18:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde ifade edilen fonksiyona Dirac-Delta fonksiyonu denir.

Tanım 2.19:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

ile ifade edilen Heaviside birim fonksiyonu, Dirac delta fonksiyonunun integralidir.

Tanım 2.20: $(-p, p)$ aralığında tanımlı f fonksiyonunun Fourier serisi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{p} x + b_n \sin \frac{n\pi}{p} x \right)$$

şeklinde yazılır. Burada,

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x dx$$

dir (Bayram 2009).

Tanım 2.21: Leibnitz formülü,

$$\frac{d}{dx} \int_{A(x)}^{B(x)} F(x, t) dt = \int_{A(x)}^{B(x)} \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} dt + F\{x, B(x)\} \frac{dB}{dx} - F\{x, A(x)\} \frac{dA}{dx}$$

şeklindedir. (Aksoy 1997)

Tanım 2.22: $t \geq 0$ için $f(t)$ verilmiş bir fonksiyon olsun. Bu durumda f nin Laplace dönüşümü

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

denklemiyle tanımlanır. Bu dönüşümün çekirdeği $K(s, t) = e^{-st}$ dir. Laplace dönüşümünde göz önüne alınan integralin aralığı sıfırdan sonsuza kadar değiştiğinden, bu integral has olmayan bir integraldir. Has olmayan integrali, sonlu bir aralıktaki integralin limiti olarak

$$\int_a^\infty f(t) dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(t) dt$$

şeklinde tanımlanır. Burada A pozitif bir reel sayıdır. Eğer her bir $A > a$ değeri için a ' dan A ' ya integral var ve $A \rightarrow \infty$ için (2.33) de verilen limit var ise has olmayan integral, bu limit değerine yakınsaktır denir. Aksi halde bu integrale ıraksaktır denir (Bayram 2009).

Tanım 2.23: Ters Laplace dönüşümü,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s) e^{st} dt$$

formülü ile tanımlanır. Burada a öyle bir pozitif sayıdır ki, $u = a$ düşey doğrusunun üzerinde $F(s)$ fonksiyonunun kutbu yoktur ve $F(s)$ nin $s_1, s_2, \dots, s_n$ ile gösterilen kutupları bu doğrunun solunda bulunur ($s = u + iv$). Ters Laplace Dönüşümü $f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\{F(s)\}$ ya da $f(t) = L^{-1}[(s)] = L^{-1}\{(s)\}$ şeklinde gösterilebilir. Ters Laplace dönüşümü lineer bir dönüşümdür (Bayram 2009).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. İntegral Denklemler

Uygulamalarda bazen karşımıza bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında olduğu denklemler çıkar. Bu tür denklemlere integral denklemler denir.

3.1.1. İntegral denklemlerin sınıflandırılması

Doğrusal integral denklemler Fredholm ve Volterra olmak üzere genelde iki sınıfa ayrılır. Fredholm tipi denklemler

$$\alpha(x)y(x) = F(x) + \lambda \int_a^b \kappa(x, \xi) y(\xi) d\xi$$

şeklindedir. Burada $\alpha(x)$, $F(x)$ ve $\kappa(x, \xi)$ bilinen fonksiyonlardır. λ , a ve b ise bilinen sabitlerdir. $\kappa(x, \xi)$ fonksiyonuna çekirdek fonksiyonu denir ve Green fonksiyon ile yakından ilgilidir. $y(x)$ ise, bulunması arzu edilen fonksiyondur. Fredholm tipi denklemlerde üst limiti sabit olmazsa Volterra tipi denklemleri elde ederiz ki, bunlar da

$$\alpha(x)y(x) = F(x) + \lambda \int_a^x \kappa(x, \xi) y(\xi) d\xi$$

şeklinde verilirler. Volterra tipi denklemler aralarında

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= 0 && \text{ise I. Cins} \\ \alpha(x) &= 1 && \text{ise II. Cins} \\ \alpha(x) &\neq 0 \text{ ve } \alpha(x) \neq 1 && \text{ise III. Cins} \end{aligned}$$

olarak sınıflandırılır. $F(x)$ fonksiyonunun sıfır olduğu durumlarda integral denklem homojendir. Yani $y(x) = 0$ gibi aşikâr bir çözümü vardır.

İntegral denklemlerin bir sınıflandırılması da $\kappa(x, \xi)$ fonksiyonunun sürekliliği ile ilgilidir. $\kappa(x, \xi)$ fonksiyonu $a \leq x \leq b$; $a \leq \xi \leq b$ aralıklarında sürekli ise integral denklem tekil (singüler) olmayan bir integral denklemdir. Eğer $\kappa(x, \xi)$ bu aralıkta sürekli değilse, integral denklem tekil (singüler) integral denklem sınıfına girecektir. Ayrıca, integral sınırlarının en az birinin sonsuz olması halinde de denklem, tekil integral denklem sınıfında olacaktır.

$$f(x) = \int_0^{\infty} \sin(x\xi) u(\xi) d\xi$$

ve

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-x\xi} u(\xi) d\xi$$

denklemleri bu türün birer örneğini oluşturmaktadırlar. Bunlardan ilkinde, denklemin ikinci yanı olarak tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu, $u(x)$ fonksiyonunun Fourier Sinüs Transformasyonu, ikincisinde ise $u(x)$ fonksiyonunun Laplace Transformasyonu olarak kullanılır.

Son olarak $y(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere,

$$\alpha(x)y(x) = F(x) + \lambda \int_a^b \kappa(x, \xi) y(\xi) d\xi$$

yapısında ki bir integral denklemde, $y(x)$ fonksiyonunun lineer olması halinde, integral denklemde lineer integral denklem adını almaktadır.

$$\alpha(x)y(x) = F(x) + \lambda \int_a^b \kappa(x, \xi) y^n(\xi) d\xi \quad (3.1)$$

(3.1) integral denkleminde ise $y(x)$ fonksiyonunun n. kuvveti bulunduğundan, lineer olmayan bir integral denklem olmaktadır.

3.1.2 İntegral denklemlerle diferansiyel denklemler arasındaki ilişki

Başlangıç koşullarıyla verilmiş, değişken veya sabit katsayılı bir diferansiyel denklem, Volterra tipinde bir integral denkleme dönüştürülebildiği gibi, bir integral denklem de bir diferansiyel denkleme dönüştürülebilmektedir. Dolayısıyla, bir integral denklem, başlangıç koşulları için sağlanan diferansiyel denklemin bir sınır değer problemi olarak da göz önüne alınabilir.

3.1.3. Diferansiyel denklemlerin integral denklemlere dönüştürülmesi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x) \quad (3.2)$$

$$y(0) = C_0 \quad y'(0) = C_1 \quad (3.3)$$

olsun.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x) \quad (3.4)$$

eşitliği kabul edilsin. (3.3) başlangıç koşulları dikkate alınarak (3.2) diferansiyel denklemi iki kez ardı ardına integre edililirse,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \int_0^x \varphi(t) dt + C_1 \\ y &= \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt + C_1 x + C_0\end{aligned}\tag{3.5}$$

şeklinde yazılır. Bu sonuca ulaşabilmek için aşağıdaki (3.6) bağıntısından yararlanıldı:

$$\int_0^x \dots \int_0^x f(t) . dt \dots dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt \tag{3.6}$$

(3.4) ve (3.5) kullanılarak (3.2) diferansiyel denklemi,

$$\begin{aligned}\varphi(x) + \int_0^x a_1(x) \varphi(t) dt + C_1 a_1(x) + \int_0^x a_2(x) (x-t) \varphi(t) dt \\ + C_1 x a_2(x) + C_0 a_2(x) = F(x)\end{aligned}$$

formunda veya

$$\begin{aligned}\varphi(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x-t)] \varphi(t) dt \\ = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x)\end{aligned}$$

yazılabilir. Sonuç olarak,

$$\varphi(x) = \int_a^x \kappa(x,t) \varphi(t) dt + f(x)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\begin{aligned}\kappa(x, t) &= -[a_1(x) + a_2(x)(x - t)] \\ f(x) &= F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x)\end{aligned}$$

şeklindedir.

Örnek.3.1:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} - 4y = 0 \quad (3.7)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (3.8)$$

(3.7) diferansiyel denklemi, (3.8) başlangıç koşulları dikkate alınarak, integral denkleme aşağıdaki şekilde dönüştürülebilir.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = u(x)$$

eşitliği alınır.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx}$$

olup

$$\int_0^x dy' = \int_0^x u(t) dt$$

$$\left| y'(x) \right|_0^x = \int_0^x u(t) dt$$

$$y'(x) - y'(0) = \int_0^x u(t) dt$$

$$y'(x) - 0 = \int_0^x u(t) dt$$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \int_0^x u(t) dt$$

bulunur. Tekrar integral alınırsa,

$$\int_0^x dy = \int_0^x \int_0^x u(t) dt$$

$$y(x) - y(0) = \int_0^x (x-t) u(t) dt$$

$$y(x) = \int_0^x (x-t) u(t) dt$$

olur. Bunlar denklemde yerlerine yazılıarak,

$$u(x) - 5 \int_0^x u(t) dt - 4 \int_0^x (x-t) u(t) dt = 0$$

ve bu da düzenlenerek

$$u(x) = \int_0^x \{5 + 4(x-t)\} u(t) dt$$

II. Cins bir Volterra integral denklemine dönüşmüş olur.

3.1.4. İntegral denklemlerin diferansiyel denklemlere dönüştürülmesi

Bir integral denklemde bir diferansiyel denkleme dönüştürülebilir. Bu dönüşüm için Leibnitz Formülü' nün uygulanması gerekir. Bu formül, integral işareti altında türev alma işlemini gerçekleştirir. Leibnitz formülü,

$$\frac{d}{dx} \int_{A(x)}^{B(x)} F(x, t) dt = \int_{A(x)}^{B(x)} \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} dt + F\{x, B(x)\} \frac{dB}{dx} - F\{x, A(x)\} \frac{dA}{dx} \quad (3.9)$$

olup, burada $A(x)$ ve $B(x)$ in sabitler olması halinde, $\frac{dA}{dx} = 0$, $\frac{dB}{dx} = 0$ olacağından formül,

$$\frac{d}{dx} \int_{A(x)}^{B(x)} F(x, t) dt = \int_{A(x)}^{B(x)} \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} dt$$

olarak kullanılır.

Örnek 3.2:

$$u(x) = \int_0^x t u(t) dt$$

İntegral denkleminin diferansiyel denkleme dönüştürülebilmesi için, eşitliğin her iki tarafının x ' e göre türevi alınır.

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^x t u(t) dt$$

olup, Leibnitz formülüne göre,

$$\frac{d}{dx} \int_0^x t u(t) dt = \int_0^x 0 dt + xu(x).1$$

bulunur. Denklemden yerine yazılırsa

$$u'(x) - xu(x) = 0$$

şeklindeki, birinci mertebeden bir lineer diferansiyel denklem elde edilir.

Örnek 3.3:

$$x^4 = \int_0^x (x^2 + t^2) u(t) dt$$

integral denkleminin diferansiyel denkleme dönüştürülebilmesi için, aynı şekilde eşitliğin her iki tarafının x ' e göre türevi alınır.

$$4x^3 = \frac{d}{dx} \int_0^x (x^2 + t^2) u(t) dt$$

olup, Leibnitz formülüne göre

$$\frac{d}{dx} \int_0^x (x^2 + t^2) u(t) dt = \int_0^x 2x u(t) dt + 2x^2 u(x)$$

ifadesi yukarıdaki denklemde yerine yazılır ve bir defa daha türev alınırsa,

$$12x^2 = \frac{d}{dx} \int_0^x 2x u(t) dt + 2x^2 u'(x) + 4xu(x)$$

Leibnitz formülü kullanılarak,

$$\frac{d}{dx} \int_0^x 2x u(t) dt = \int_0^x 2 u(t) dt + 2x u(x)$$

ifadesi yukarıdaki denklemde yerine yazılır ve bir defa daha türev alınırsa,

$$12x^2 = 2 \int_0^x u(t) dt + 2x^2 u'(x) + 6xu(x)$$

Son olarak bir defa daha türev alınıp Leibnitz formülü uygulanır

$$24x = 2 \frac{d}{dx} \int_0^x u(t) dt + 2x^2 u''(x) + 10xu'(x) + 6u(x)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x u(t) dt = u(x)$$

olduğundan,

$$x^2 u''(x) + 5xu'(x) + 4u(x) - 12x = 0$$

elde edilir.

3.2. Green Fonksiyonlarının Kurulma Yöntemleri

3.2.1 Adi Diferansiyel Denklemler İçin Green Fonksiyonlarının Oluşturulması

n-inci mertebeden bir diferansiyel denklem,

$$L(y) = p_0(x) y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = 0 \quad (3.10)$$

burada $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında süreklidirler ve $p_0(x) \neq 0$ dır. Sınır koşullarımız ise $(k = 1, 2, \dots, n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} V_k(y) = & \alpha_k y(a) + \alpha_k^1 y'(a) + \dots + \alpha_k^{n-1} y^{(n-1)}(a) \\ & + \beta_k y(b) + \beta_k^1 y'(b) + \dots + \beta_k^{n-1} y^{(n-1)}(b) \end{aligned} \quad (3.11)$$

ile verilmektedir. Burada $y(a), y'(a), \dots, y^{(n-1)}(a), y(b), y'(b), \dots, y^{(n-1)}(b)$ nin fonksiyonu olan $V_1, \dots, V_n$ ler lineer bağımsız formlardır.

(3.10) –(3.11) ile verilen homojen sınır değer probleminin $y(x) \equiv 0$ trivial çözümünden başka bir çözümünün var olmadığı zaman, aşağıdaki tanım geçerlidir.

Tanım.3.4: (3.10)-(3.11) sınır değer probleminin Green fonksiyonu olan $G(x, \xi)$, $a \leq \xi \leq b$ olmak üzere herhangi bir ξ için inşa edilmiş bulunan ve aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir fonksiyondur:

1. $G(x, \xi)$ fonksiyonu $a \leq x \leq b$ aralığında sürekli ve x e göre ilk $(n-2)$. mertebeden sürekli türevleri vardır.
2. x e göre $(n-1)$. mertebeden türevinin $x = \xi$ noktasında birinci çeşit bir süreksizliği vardır ve sıçrama miktarı $\frac{1}{p_0(\xi)}$ kadardır; bir başka deyişle:

$$\left(\frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} \Big|_{x=\xi+0} \right) - \left(\frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} \Big|_{x=\xi-0} \right) = \frac{1}{p_0(\xi)}$$

3. $[a, \xi)$ ve $(\xi, b]$ aralıklarının ikisinde de $G(x, \xi)$ fonksiyonu x in bir fonksiyonu olarak düşünülecektir ve (3.10) denkleminin bir çözümü olacaktır. Yani,

$$L[G] = 0$$

4. $G(x, \xi)$ fonksiyonu (3.11) sınır koşullarını gerçekler:

$$V_k(G) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.12)$$

Örnek 3.5:

$$y^{(IV)} = 0 \quad (3.13)$$

denklemini için sınır koşulları

$$y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0 \quad (3.14)$$

şeklinde verilen problemin Green fonksiyonunun elde edilişi aşağıda verilmektedir.

Öncelikle (3.13) – (3.14) sınır değer probleminin yalnızca aşikâr çözümünün var olduğu gösterilmelidir. (3.13) denklemini için çözümlerin temel sistemi

$$y_1(x) = 1, y_2(x) = x, y_3(x) = x^2, y_4(x) = x^3$$

dir. Genel çözüm A, B, C ve D sabit büyüklükler olmak üzere,

$$y(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \quad (3.15)$$

dir. (3.14) sınır koşulları A, B, C ve D sabitlerini bulunmasını sağlayacak aşağıdaki bağıntıların oluşmasını mümkün kılmaktadır.

$$\begin{aligned} y(0) &= A = 0 \\ y'(0) &= B = 0 \\ y''(1) &= 2C + 6D = 0 \\ y'''(1) &= 6D = 0 \end{aligned}$$

Buradan $A = B = C = D = 0$ bulunur. Bundan dolayı (3.13) - (3.14) nin yalnızca $y(x) = 0$ gibi bir aşikâr çözümü vardır. Onun için bir tek $G(x, \xi)$ Green fonksiyonu oluşturulabilir.

(3.15) çözümlerin temel sistemini kullanarak bilinmeyen $G(x, \xi)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde oluşturulabilir.

$$G(x, \xi) = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^3, \quad 0 \leq x \leq \xi \quad (3.16)$$

$$G(x, \xi) = b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot x + b_3 \cdot x^2 + b_4 \cdot x^3, \quad \xi \leq x \leq 1 \quad (3.17)$$

Burada $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ büyüklükleri ξ nin henüz bilinmeyen fonksiyonlarıdır. $c_k(\xi) = b_k(\xi) - a_k(\xi)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) alınır ve lineer denklem sistemini $c_k(\xi)$ bulma amacıyla aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 \xi + c_3 \xi^2 + c_4 \xi^3 &= 0 \\ c_2 + c_3 \cdot 2 \cdot \xi + c_4 \cdot 3 \cdot \xi^2 &= 0 \\ c_3 \cdot 2 + c_4 \cdot 6 \cdot \xi &= 0 \\ c_4 \cdot 6 &= 1 \end{aligned}$$

Bu sistem çözülerek

$$\begin{aligned} c_1(\xi) &= -\frac{1}{6} \xi^3 & c_2(\xi) &= \frac{1}{2} \xi^2 \\ c_3(\xi) &= -\frac{1}{2} \xi & c_4(\xi) &= \frac{1}{6} \end{aligned} \quad (3.18)$$

bulunur. Green fonksiyonların gerçeklediği özellik (3.12) kullanıldığında, $G(x, \xi)$ fonksiyonunun aşağıdaki bağıntıları gerçeklediği görülür.

$$\begin{aligned} G(0, \xi) &= 0, \quad G'(0, \xi) = 0 \\ G''(1, \xi) &= 0, \quad G'''(1, \xi) = 0 \end{aligned}$$

Bu bağıntılar aşağıdaki formda ortaya çıkar.

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0 \\
a_2 &= 0 \\
2.b_3 + 6.b_4 &= 0 \\
6.b_4 &= 0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$c_k(\xi) = b_k(\xi) - a_k(\xi) \quad (k=1,2,3,4)$ bağıntısı kullanılarak (3.18) ve (3.19) dan

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0, \quad b_1 = -\frac{1}{6}\xi^3 \\
a_2 &= 0, \quad b_2 = \frac{1}{2}\xi^2 \\
a_3 &= \frac{1}{2}\xi, \quad b_3 = 0 \\
a_4 &= -\frac{1}{6}, \quad b_4 = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Bulduğumuz değerler (3.16) ve (3.17) da yerine yazılarak Green fonksiyonu oluşturulmuş olur.

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\xi x^2 - \frac{1}{6}x^3, & 0 \leq x \leq \xi \\ -\frac{1}{6}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^2 x, & \xi \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Örnek 3. 6:

$$y''' = 0 \tag{3.20}$$

denklemini için sınır koşulları

$$\begin{aligned}
y(0) &= y(1) \\
y'(0) + y'(1) &= 0
\end{aligned} \tag{3.21}$$

şeklinde verilen problem için öncelikle Green fonksiyonu oluşturulup oluşturulamayacağı incelenir.

Bunun için (3.20)–(3.21) sınır değer probleminin yalnızca aşikâr çözümünün var olduğu gösterilmelidir. (3.20) denklemi için çözümlerin temel sistemi

$$y_1(x) = 1 \quad y_2(x) = x \quad y_3(x) = x^2$$

dir. Genel çözüm A , B ve C sabit büyüklükler olmak üzere

$$y(x) = A + Bx + Cx^2$$

dir. (3.64) koşulları A , B ve C sabitlerinin bulunmasına yardımcı olacaktır.

$$\begin{aligned} A &= A + B + C \Rightarrow B = -C \\ B + B + 2.C &= 0 \Rightarrow B = -C \end{aligned}$$

bulunur. Bundan dolayı (3.20)-(3.21) sınır değer probleminin $y(x) = 0$ gibi bir aşikâr çözümü ile birlikte farklı çözümlerinin var olduğu görülür. Sonuç olarak bu problem için Green fonksiyonu oluşturulamaz.

3.2.2. İkinci mertebeden bir diferansiyel denklem için Green fonksiyonun oluşturulması

$p(x) \geq 0$ olmak üzere

$$L(y) = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y \quad (3.22)$$

ikinci dereceden bir adi lineer diferansiyel operatörü verilmiş olsun. Bu fonksiyonların verilen (a, b) aralığında

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0 \quad (3.23)$$

sınır şartlarını sağlamalı, bu aralıkta kendisi ve birinci türevi sürekli olmalıdır. Aşağıdaki şartları sağlayan ve sürekli olan $L(y) \equiv 0$ denkleminin tek çözümü $y(x) \equiv 0$ olmalıdır. Sınır şartları altında $L(y)$ operatörünün Green fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlayan iki değişkenli $G(x, \xi)$ Green fonksiyonuna verilen addır.

1. $G(x, \xi)$, $a \leq x \leq b$ ve $a \leq \xi \leq b$ aralığında sürekli olmalıdır.
2. $\partial G(x, \xi)/\partial x$ ve $\partial G(x, \xi)/\partial \xi$ türevleri $a \leq x \leq \xi$ ve $\xi \leq x \leq b$ aralıklarının her birinde sürekli olmalıdır.
3. $x = \xi$ noktasında $\partial G(x, \xi)/\partial \xi$ türevinin

$$\left(\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{x=\xi+0} \right) - \left(\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{x=\xi-0} \right) = \frac{1}{p(\xi)}$$

formülüyle bulunan bir süreksizliği vardır.

4. ξ sayısını sabitleyebilmek için, $G(x, \xi)$ fonksiyonu $L(y) = 0$ denklemini $a \leq x \leq \xi$ ve $\xi \leq x \leq b$ aralıklarının her birinde sağlar. Yani,

$$L[G] = 0$$

dır.

5. x in bir fonksiyonu olan $G(x, \xi)$ (3.23) sınır şartlarını sağlar.

Bu şartları sağlayan Green fonksiyonu aşağıdaki şekilde oluşturulabilir. Öncelikle $L(y)=0$ denkleminin çözümü olan $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarını oluşturmak gerekir.

$$\begin{aligned} u(a) &= \beta & u'(a) &= -\alpha \\ v(b) &= \delta & v'(b) &= -\gamma \end{aligned}$$

$u(x)$ fonksiyonun (3.23) sınır şartlarının ilkinin, $v(x)$ fonksiyonunun da ikincisini sağlaması gerekir. $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları lineer bağımsız olmalıdır.

Lineer diferansiyel denklemler teorisinde iyi bilinen özdeşlik:

$$p(\xi)[u(\xi) v'(\xi) - u'(\xi) v(\xi)] = c \quad (3.24)$$

c sıfırdan farklı bir sabittir, aksi takdirde $u(x)$ ve $v(x)$ lineer bağımlı olabilir.

$u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları oluşturulduktan sonra Green fonksiyonunu aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{u(x) \cdot v(\xi)}{c} & a \leq x \leq \xi \\ \frac{u(\xi) \cdot v(x)}{c} & \xi \leq x \leq b \end{cases} \quad (3.25)$$

(3.25) fonksiyonunun Green fonksiyonunun tanımında verilen 1-5 özelliklerini sağladığı kolayca görülebilir.

Örnek 3.7:

$$y'' + y = 0 \quad (3.26)$$

denklemini için sınır koşulları

$$\begin{aligned} y(0) &= y(1) \\ y'(0) &= y'(1) \end{aligned} \quad (3.27)$$

şeklinde verilen problemin Green fonksiyonunu oluşturabilmek için aşikar çözümünün dışında çözüm olmadığı gösterilmelidir.

$y_1(x) = \sin x$ ve $y_2(x) = \sin(x-1)$ lineer bağımsız özel çözümler kullanılarak

$$y(x) = A \cdot \sin(x) + B \cdot \sin(x-1) \quad (3.28)$$

genel çözümü yazılabilir. (3.28) ile belirlenen $y(x)$ fonksiyonunun (3.27) koşullarını ancak $A = B = 0$ olması halinde gerçekleştirilebileceği, dolayısıyla (3.26)-(3.27) problemi için Green fonksiyonunun oluşturulabileceği görülecektir.

Öncelikle (3.24) özdeşliği kullanılarak c sabiti bulunmalıdır. Burada $p(x) = 1$ olduğuna dikkat edilmelidir.

$$\sin \xi \cdot (\cos(\xi - 1)) - \sin(\xi - 1) \cdot (\cos \xi) = \sin 1 = c$$

bulunur.

Bulunan veriler (3.25) de yerlerine yazılarak $G(x, \xi)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde oluşturulmuş olur.

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\sin(\xi-1) \cdot \sin x}{\sin 1} & , 0 \leq x \leq \xi \\ \frac{\sin \xi \cdot \sin(x-1)}{\sin 1} & , \xi \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Örnek 3.8:

$$y'' = 0$$

denklemini için sınır koşulları

$$\begin{aligned} y(0) &= y(1) \\ y'(0) &= y'(1) \end{aligned}$$

olarak verilen problemin yalnızca aşikar çözümü vardır. Dolayısıyla Green fonksiyonu oluşturulabilir.

$y_1(x) = x$ ve $y_2(x) = x - 1$ lineer bağımsız özel çözümleri ve $c = 1$ kullanılarak Green fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılır.

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x \cdot (\xi - 1) & , 0 \leq x \leq \xi \\ \xi \cdot (x - 1) & , \xi \leq x \leq 1 \end{cases}$$

3.3. Sınır Değer Problemlerinin Çözümünde Green Fonksiyonlarının Kullanılması

$$L(y) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x) \quad (3.29)$$

formunda homojen olmayan bir diferansiyel denklem ve

$$V_1(y) = 0, V_2(y) = 0, \dots, V_n(y) = 0 \quad (3.30)$$

sınır koşulları verilmektedir. Burada $y(a), y'(a), \dots, y^{(n-1)}(a), y(b), y'(b), \dots, y^{(n-1)}(b)$ nin fonksiyonu olan $V_1, \dots, V_n$ ler lineer bağımsız formlardır.

Teorem 3.9: Eğer $G(x, \xi)$,

$$L(y) = 0, \quad V_k(y) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

homojen sınır değer probleminin bir çözümü ise (3.29) - (3.30) sınır değer probleminin çözümü

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (3.31)$$

formülü ile verilir.

İspat 3.9: (3.31) ile verilen denklemin (3.29) ve (3.30) ile verilen diferansiyel denklem problemine eşdeğer olduğunu göstermek gerekir. (3.25) fonksiyonu kullanılarak (3.31) denklemi açık şekilde yazılabilir.

$$y(x) = \frac{1}{c} \left[\int_a^x v(x) u(\xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b v(\xi) u(x) f(\xi) d\xi \right] \quad (3.32)$$

(3.32) ifadesinin birinci ve ikinci dereceden türevleri ise,

$$y'(x) = \frac{1}{c} \left[\int_a^x v'(x) u(\xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b u'(x) v(\xi) f(\xi) d\xi \right]$$

$$y''(x) = \frac{1}{c} \left[\int_a^x v''(x) u(\xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b u''(x) v(\xi) f(\xi) d\xi \right] \\ + \frac{1}{c} [v'(x) u(x) - u'(x) v(x)] f(x)$$

olacaktır. Bu türevleri de

$$Ly(x) = p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x)$$

ifadesinde yerlerine koyarsak,

$$Ly(x) = \frac{1}{c} \left\{ \int_a^x [Lv(x)] u(\xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b v(\xi) [Lu(x)] f(\xi) d\xi \right\} \\ + \frac{1}{c} [p(x)(u'(x)v(x) - v'(x)u(x)) f(x)]$$

elde edilir. Buradan da $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları,

$$Lu(x) = 0$$

$$Lv(x) = 0$$

denklemlerini sağladıklarından, gösterilmek istenen

$$Ly(x) = f(x)$$

ifadesi bulunur. (3.31) denklemindeki $y(x)$ fonksiyonunun gerekli sınır şartlarını sağladığını göstermek için,

$$y'(a) = u'(a) \int_a^b \frac{v(\xi)f(\xi)}{c} d\xi$$

$$y(a) = u(a) \int_a^b \frac{v(\xi)f(\xi)}{c} d\xi$$

ve

$$y(b) = v(b) \int_a^b \frac{u(\xi)f(\xi)}{c} d\xi$$

$$y'(b) = v'(b) \int_a^b \frac{u(\xi)f(\xi)}{c} d\xi$$

ifadeleri yazılarak, $y(x)$ ' in a noktasında $u(x)$ ve b noktasında da $v(x)$ ile aynı sınır şartlarını sağladığı görülür.

3.3.1 Bir parametre içeren sınır değer problemlerinin integral denklemlere dönüştürülmesi

$$L[y] = \lambda y + h(x) \tag{3.33}$$

$$V_k(y) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.34)$$

Şeklindeki sınır değer probleminde

$$L(y) = p_0(x) y^{(n)}(x) + p_1(x) y^{(n-1)}(x) + \dots + p_n(x) y(x)$$

$$\begin{aligned} V_k(y) &= \alpha_k y(a) + \alpha_k^1 y'(a) + \dots + \alpha_k^{n-1} y^{(n-1)}(a) \\ &+ \beta_k y(b) + \beta_k^1 y'(b) + \dots + \beta_k^{n-1} y^{(n-1)}(b) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

dır. $V_1, V_2, \dots, V_n$ ler lineer bağımsız lineer formlar ve $h(x)$ bilinen bir fonksiyondur. λ ise sayısal bir parametredir. Eğer $h(x) \equiv 0$ ise

$$L[y] = \lambda y \quad V_k(y) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.35)$$

homojen sınır değer problemi oluşur.

λ nın (3.33) nin trivial olmayan $y(x)$ çözümlerinin var olmasına olanak tanıyan değerlerine (3.33) sınır değer probleminin özdeğerleri denir.

Teorem 3.10:

$$L[y] = 0 \quad V_k(y) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

sınır değer problemi $G(x, \xi)$ Green fonksiyonuna sahip ise (3.33)-(3.34) sınır değer problemi

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) d\xi + f(x)$$

Fredholm integral denklemine denktir. Burada

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi) h(\xi) d\xi$$

dir.

Özellikle (3.35) sınır değer problemi aşağıdaki homojen integral denkleme denktir.

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) d\xi$$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, sunulan metot iki problem üzerinde test edildi.

4.1. Test Problemi

$$y^{iv} = 1 \quad (4.1)$$

$$y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0 \quad (4.2)$$

(4.2) başlangıç değerleri ile birlikte verilen (4.1) diferansiyel denklemi Green fonksiyonu yardımıyla şöyle çözülür.

Öncelikle $y^{iv} = 0$ ve $y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0$ homojen sınır değer problemi için Green fonksiyonu oluşturulmalıdır. Verilen denklemin “Örnek (3.5)” Green fonksiyonu aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\xi x^2 - \frac{1}{6}x^3, & 0 \leq x \leq \xi \\ -\frac{1}{6}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^2 x, & \xi \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

$G(x, \xi)$, (4.3) ile tanımlanmış olmak üzere, $f(\xi) = 1$ olduğundan (4.1)-(4.2) sınır değer probleminin çözümünü

$$y(x) = \int_0^1 G(x, \xi) d\xi \quad (4.4)$$

formunda yazılabilir.

İntegral aralığını iki kısma ayırır ve Green fonksiyonun (4.3) ile verilen değerini (4.4) yerine yazarsak

$$y(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2} x \xi^2 - \frac{1}{6} \xi^3 \right) d\xi + \int_x^1 \left(\frac{1}{2} x^2 \xi - \frac{1}{6} x^3 \right) d\xi \quad (4.5)$$

İntegral işlemleri yapıp gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra,

$$y(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} \quad (4.6)$$

fonksiyonu elde edilir.

(4.6) fonksiyonun (4.1) denklemini gerçeklediğini ve (4.2) sınır değer koşulunu yerine getirdiği kolayca gösterilebilir.

4.2. Test Problemi

$$y'' + y = x \quad (4.7)$$

$$y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (4.8)$$

(4.8) başlangıç değerleri ile birlikte verilen (4.7) diferansiyel denklemi Green fonksiyonu yardımıyla şöyle çözülür.

Öncelikle (4.8) başlangıç değerleri ile verilmiş $y'' + y = 0$ homojen diferansiyel denklem için Green fonksiyonunu oluşturmak gerekir.

$y_1(x) = \sin x$ çözümünün $y_1(0) = 0$ başlangıç koşulunu, $y_2(x) = \cos x$ çözümünün $y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ başlangıç koşulunu gerçeklediği kolayca görülebilir. Bu iki çözüm lineer bağımsızdır.

$\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarının $x = \xi$ noktasındaki Wronskian'ını bulmak gerekir.

$$W(\xi) = \begin{vmatrix} \sin \xi & \cos \xi \\ \cos \xi & -\sin \xi \end{vmatrix} = -\sin^2 \xi - \cos^2 \xi = -1 \neq 0$$

$p(\xi) = 1$ olduğu dikkate alınarak Green fonksiyonu aşağıdaki şekilde oluşturulabilir.

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\sin x \cos \xi & 0 \leq x \leq \xi \\ -\cos x \sin \xi & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(4.7)-(4.8) sınır değer probleminin çözümü,

$$y(x) = -\cos x \int_0^x \sin(\xi) \xi d\xi - \sin x \int_x^{\frac{\pi}{2}} \cos(\xi) \xi d\xi \quad (4.9)$$

formunda yazılabilir. Kısmi integrasyon yöntemiyle,

$$\int_0^x \sin(\xi) \xi d\xi = \sin x - x \cos x$$

$$\int_x^{\frac{\pi}{2}} \cos(\xi) \xi d\xi = \frac{\pi}{2} - x \sin x - \cos x$$

bulunur.

Bulunan ifadeler (4.9) de yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$y(x) = x - \sin(x) \frac{\pi}{2} \quad (4.10)$$

bulunur.

(4.10) çözümünün (4.7) denklemini sağladığı ve (4.8) sınır şartlarını sağladığı kolayca gösterilebilir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada Green fonksiyonlar aracılığı ile sınır değer problemlerinin integral denklemlere dönüştürülmesi ve oluşturulan integral denklemin çözümü üzerinde duruldu. Green fonksiyonunun çok farklı etkili kullanım alanlarından biri de bu dönüşümdür.

Bu metot iki test problemine uygulandı ve bulunan çözümlerin sınır değer problemlerini sağladığı görüldü.

KAYNAKLAR

- Aksoy, Yavuz., 1998. İntegral Denklemler. Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayın Merkezi. 158 s, İstanbul.
- Aydın, Mehmet., Gündüz, Gönül., Kuryel, Beno ve Oturañ, Galip,. 1999. Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları. Barış Yayınları, 554 s, İzmir.
- Bayram, Mustafa., 2009. Diferansiyel Denklemler. Birsen Yayınevi. 436 s, İstanbul.
- Dağ, İhsan., 1983. Adi Diferansiyel Denklemler. 367 s, Erzurum.
- Duffy, Dean G., 2001. Green Function With Application. Chapman-Hall/CRC. 404 p, Washington.
- Hildebrand, Francis B., 1965. Methods of Applied Mathematics. Prentice-Hall. 362 p, New Jersey
- Krasnov, M., Kiselev, A. and Makeronko, G. 1976. İntegral Denklemler. 156 s, İstanbul.
- Mauch, Sean. 2001. Introduction to Methods of Applied Mathematics or Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. Mauch publishing company. 905 p.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Diyarbakır Hazro’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Diyarbakır’da tamamladı. 1997 yılında Dicle Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girerek 2001 yılında mezun oldu. Aynı yıl Milli Eğitim Bakanlığı’na bağlı okullarda öğretmen olarak göreve başladı. Halen Erzurum İbrahim Hakkı Fen Lisesi’nde Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Evli ve iki çocuk babasıdır.