ANKARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YILDIZIL VE KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI KRİTERLER

Müfit ŞAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2010

TEZ ONAYI

Müfit ŞAN tarafından hazırlanan "**Yıldızıl ve konveks fonksiyonlar için bazı kriterler**" adlı tez çalışması 23/12/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Jüri Üyeleri :

Başkan : Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Üye : Doç. Dr. Erdal GÜNER

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hüseyin IRMAK

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Orhan ATAKOL

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YILDIZIL VE KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI KRİTERLER

Müfit ŞAN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Ayhan Şerbetçi

Bu çalışmada, birim dairede analitik ve univalent ya da analitik ve p-değerli olan fonksiyonlar ile delinmiş birim dairede analitik ve univalent ya da analitik ve p-değerli olan fonksiyonların yıldızıllık ve konvekslik özellikleri ile bu fonksiyonların yıldızıl ve konveks olması için gerek ve yeter koşullar incelenmiştir.

Tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmıdır. İkinci bölümde temel tanım, teoremler ve lemmalar yer almıştır. Üçüncü bölümde, sırasıyla birim dairede univalent, p-değerli, meromorf univalent ve p-değerli meromorf fonksiyonların yıldızıllığı ve konveksliğini karekterize eden çeşitli eşitsizlikler ile yıldızıllık ve konvekslik kavramları arasında bağıntılar yer almıştır. Son bölüm olan dördüncü bölüm ise tezin orjinal kısmıdır. Burada, p-değerli meromorf ve meromorf yıldızıl ve konveks fonksiyonlarla ilgili özellikleri de içeren çok sayıda teorem verilmiş ve ispatlanmıştır. Ayrıca, ilgili teoremlerin bazı önemli sonuçları da vurgulanmıştır.

Aralık 2010, 60 sayfa

Anahtar Kelimeler : Birim daire, delinmiş birim daire, analitik fonksiyon, univalent fonksiyon, yıldızıl fonksiyon, konveks fonksiyon, p-değerli analitik fonksiyon, meromorf fonksiyon, esas değer, kompleks rasyonel fonksiyon.

ABSTRACT

Master Thesis

CERTAIN CRITERIA ON STARLIKE AND CONVEX FUNCTIONS

Müfit ŞAN

Ankara University
Graduate Scholl of Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ayhan Şerbetçi

In this study, the starlikeness and convexity of analytic and univalent or analytic and p-valent functions in unit disk and analytic and univalent or analytic and p-valent functions in punctured unit disk, and the necessary and sufficient conditions to be starlike or convex of this functions are investigated.

This Thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to introduction. In the second chapter, basic definitions, theorems and lemmas take place. In the three chapter, some inequalities characterize the starlikeness and convexity of, respectively, univalent, p-valent, meromorphic univalent and p-valent meromorphic functions in unit disk and the relations between the concepts of starlikeness and convexity are given. The fourth chapter is the last chapter that is the original part of the thesis. In this chapter, a great number of theorems are given and proved that they include the properties concerning meromorphic univalent and p-valent meromorphic functions in unit disk. Also some important results of related theorems are emphasized.

December 2010, 60 pages

Key Words : Unit disc, punctured unit disc, analytic function, univalent function, starlike function, convex function, p-valent analytic function, meromorphic function, principal value, complex rational function.

TEŞEKKÜR

Bana bu konuda çalışma olanağı veren ve yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım sayın Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ 'ye (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü), bu konuda ilerleme imkanı veren ve verdiği önemli bilgiler ile bana destek olan sayın Yrd. Doç. Dr. Hüseyin IRMAK'a (Çankırı Karatekin Üniversitesi Matematik Bölümü), tezin yazım aşamasında bana yardım eden Nuray YELKEN'e ve her türlü desteği ve yardımı esirgemeyen aileme saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Müfit ŞAN

Ankara, Aralık 2010

İÇİNDEKİLER

ÖZET i

ABSTRACT ii

TEŞEKKÜR iii

SİMGELER DİZİNİ iv

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 2

3. YILDIZIL VE KONVEKS FONKSİYONLARLA İLGİLİ TEMEL BİLGİLER 9

3.1 Bir Eğri Üzerinde Yıldızıllık ve Konvekslik 9

3.2 Univalent Fonksiyonların Yıldızıllığı ve Konveksliği 11

3.3 p-Değerli Fonksiyonların Yıldızıllığı ve Konveksliği 25

3.4 Meromorf Fonksiyonların Yıldızıllığı ve Konveksliği 32

3.5 p-eğerli Meromorf Fonksiyonların Yıldızıllığı ve Konveksliği 37

4. p-DEĞERLİ MEROMORF YILDIZIL VE KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI KRİTERLER 38

KAYNAKLAR 54

ÖZGEÇMİŞ

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathcal{U}$	$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert < 1\}$
$\partial\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$ kümesinin sınırı
$\mathcal{S}$	Normalize edilmiş univalent fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*$	Normalize edilmiş univalent yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}$	Normalize edilmiş univalent konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{M}$	$\mathcal{U}$ da meromorf univalent fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{MS}$	$\mathcal{U}$ da meromorf univalent yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{MC}$	$\mathcal{U}$ da meromorf univalent konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{A}(p)$	$\mathcal{U}$ da p-değerli analitik fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}(p)$	$\mathcal{U}$ da p-değerli analitik yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}(p)$	$\mathcal{U}$ da p-değerli analitik yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{M}(p)$	$\mathcal{U}$ da meromorf p-değerli fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{MS}(p)$	$\mathcal{U}$ da meromorf p-değerli yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{MC}(p)$	$\mathcal{U}$ da meromorf p-değerli konveks fonksiyonların sınıfı
$f^{(q)}(z)$	Bir $f(z)$ fonksiyonunun q. mertebeden adi türevi

1. GİRİŞ

Univalent yıldızıl fonksiyon kavramı ilk olarak Alexander (1915) tarafından tanıtılmıştır. Nevanlinna (1921) da bu konu üzerinde detaylı araştırmalar yapmıştır. Daha sonra ise univalent yıldızıl ve konveks fonksiyonlar Marx (1932), Strohhacker (1933) , Jack (1971), McGregor (1975), Wilken (1980) ve daha bir çok araştırmacı tarafından çalışılmıştır.

Yıldızıl ve konveks fonksiyon kavramının birim dairede p-değerli analitik fonksiyonlara genelleştirmesini Robertson $(1937, 1941, 1945, 1953)$ ve Goodman (1950) tarafından yapılmıştır. Daha sonra Blakley (1962) , Sakaguchi (1962) , Hummel (1966), Ozaki (1941) , Nunokawa (1987) ve birçok araştırmacı p-değerli analitik fonksiyonların yıldızıllığı ve konveksliği üzerine araştırmalar yapmıştır.

Birim dairede meromorf yıldızıl ve konveks fonksiyonlar hakkında Pommerenke (1963), Miller (1970), Clunie (1959), Nunokawa ve Ahuja (2001) ve birçok araştırmacı çalışmıştır. Birim dairede p-değerli meromorf yıldızıl ve konveks fonksiyonlar ilgili bağıntılar ilk olarak Royster (1963) tarafından verilmiştir. Daha sonra ise Aouf ve Hossen (1993), Liu ve Owa (1998) ve çok sayıda araştırmacı bu konu üzerinde çalışmıştır.

Tezin amacı yıldızılık ve konvekslik kavramlarını, aralarındaki bağıntıları ve adi türev operatörü yardımıyla birim dairede meromorf bir fonksiyonun türevlerinin yıldızlılığı ve konveksliği ile ilgili genel bağıntıların vermek ve yine bu fonksiyonun yıldızıllığı ve konveksliği üzerine bazı bağıntıları bulmaya çalışmaktır. Bunun için ilk önce birim dairede univalent fonksiyonların yıldızıllığı ve konveksliği ile ilgili kavramlar tanıtılıp daha sonra bir univalent fonksiyonun hangi şartlar altında yıldızıl ve konveks olduğu ve yıldızıllık ile konvekslik arasında ne çeşit bağıntılar olduğu üzerine çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmaların aynıları sırasıyla birim dairede p-değerli analitik fonksiyonlar, meromorf univalent fonksiyonlar ile meromorf p-değerli fonksiyonlar için yapılmıştır.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İkinci bölüm diğer bölümler için gerekli olan temel tanım ve teoremleri içermektedir. Üçüncü bölüm birim dairede univalent, p-değerli, meromorf ve p-değerli meromorf olan fonksiyonların yıldızıllığı ve konveksliği üzerine yapılan çalışmalar yer almaktadır. Son bölüm olan dördüncü bölüm tezin orjinal kısmı olup bu bölümde adi türev operatörü tanıtılmış ve adi türev operatörünün p-değerli meromorf fonksiyonlara uygulanmasıyla yıldızıllık ve konvekslik ile ilgili bağıntılar ve sonuçlar elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 Bir $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu ve bir $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. Eğer z_0 ın en az bir komşuluğundaki her noktada $f(z)$ fonksiyonu diferensiyellenebilir ise bu durumda $f(z)$ ye z_0 da analitiktir denir.

Tanım 2.2 Bir $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{C}$ bölgesinde sonlu sayıdaki kutup noktası dışında analitik olan fonksiyonlara meromorf fonksiyon adı verilir.

Tanım 2.3 Bir $f(z)$ fonksiyonu bir $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{C}$ bölgesinde bire-bir ise yani; her bir $u, v \in \mathcal{B}$ için

$$f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$$

oluyor ise $f(z)$ fonksiyonuna, $\mathcal{B}$ de univalent (yalınkat, birebir) fonksiyon denir.

Tanım 2.4 Kompleks düzlemde bir $\mathcal{B}$ bölgesinde alınan w_1 ve w_2 gibi her iki nokta çiftini birbirine bağlayan doğru parçasının tamamı bu bölgenin içinde kalıyorsa $\mathcal{B}$ bölgesine konvekstir denir. Yani, $z_1 \in \mathcal{B}$ ve $z_2 \in \mathcal{B}$ olmak üzere her λ $(0 \leq \lambda \leq 1)$ için

$$(1-\lambda)z_1 + \lambda z_2 \in \mathcal{B}$$

oluyorsa, $\mathcal{B}$ bölgesine konveks bölge denir.

Tanım 2.5 Kompleks düzlemde $w_0 \in \mathcal{B}$ başlangıç noktalı her ışının $\mathcal{B}$ bölgesi ile kesişimi olan noktalar kümesi bir doğru parçası veya ışın ise $\mathcal{B}$ ye w_0 a göre yıldızıldır denir.

Tanım 2.6 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde bir eğridir denir

Tanım 2.7 Bir γ eğrisi verildiğinde $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise, γ ya kapalı eğridir denir.

Tanım 2.8 Bir γ eğrisi sadece $t_1 = t_2$ için $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ oluyorsa γ ya basit eğridir denir. Bazen basit eğrilere Jordan eğrisi de denir. γ basit bir eğri ve $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ ya basit kapalı eğridir (kapalı Jordan eğrisi) denir.

Tanım 2.9 Bir γ eğrisi verildiğinde γ' türevi var ve sürekli ise γ ya diferensiyellenebilir eğri denir.

Tanım 2.10 γ diferensiyellenebilir eğri olsun. Eğer her $t \in [a, b]$ için $\gamma'(t) \neq 0$ ise γ ya düzgün eğri denir.

Tanım 2.11 Sonlu sayıda $\gamma_j, j = 1, 2, ..., n$ düzgün eğrileri verilmiş olsun. Eğer bütün $j = 1, 2, ..., n-1$ değerleri için γ_j nin bitim noktası γ_{j+1} in başlangıç noktası ile çakışıyorsa, bu γ_j eğrilerinin birleşimi olan γ eğrisine çevre(parçalı düzgün eğri) denir. Özel olarak γ_1 nin başlangıç noktası γ_n nin bitim noktası ile çakışıyor ise γ eğrisine kapalı çevre denir. Eğer bu eğri kendini kesmiyorsa bu γ eğrisine basit çevre, eğer buna ilaveten bu kapalı ise bu eğriye basit kapalı çevre denir.

Önerme 2.1 Denklemi $z(t)$, $a \leq t \leq b$ olan bir γ eğrisi bir B bölgesinde bulunsun ve $f : B \to \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

(i) $w(t) = f(z(t))$ de bir eğri olur ve buna γ nın resmi denir. $w(t) = f(\gamma(t))$ olarak da gösterilir.

(ii) $z(t)$ diferensiyellenebilir bir eğri ve f analitik ise $w(t) = f(z(t))$ diferensiyellenebilirdir ve

$$w'(t) = f'(z(t))\, z'(t)$$

dir.

(iii) $z(t)$ düzgün bir eğri, f analitik ve $f'(z(t)) \neq 0$ ise $w(t) = f(z(t))$ de düzgün eğridir.

Tanım 2.12 B, $\mathbb{C}$ düzleminde bir bölge ve,

$$\gamma_1 : [0, 1] \to B, \qquad \gamma_2 : [0, 1] \to B$$

kapalı iki eğri olsunlar. Eğer aşağıdaki iki koşulu gerçekleyen sürekli bir

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \to B$$

fonksiyonu var ise γ_1 ve γ_2 eğrileri birbirine homotop eğrilerdir denir.

(1) Her $s \in [0, 1]$ için $t \to H(t, s)$ kapalı bir eğridir.

(2) $H(t, 0) = \gamma_1(t), H(t, 1) = \gamma_2(t) \qquad 0 \leq t \leq 1$

Tanım 2.13 (**Koebe Fonksiyonu**)

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + ... + nz^2 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$$

olarak tanımlı fonksiyona Koebe Fonksiyonu adı verilir.

$k(z)$ Koebe fonksiyonunu

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right]$$

şeklinde yazalım. Burada

$$T(z) = \frac{1+z}{1-z} \quad (z \in \mathcal{U})$$

dönüşümü $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim dairesini sağ yarı düzleme dönüştürdüğü için bir konveks fonksiyon olup

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \quad (z \in \mathcal{U})$$

ise $\mathcal{U}$ birim dairesini

$$D = \mathbb{C} - \left\{ w = u + iv : v = 0, u < -\frac{1}{4} \right\}$$

bölgesine dönüştürür. Bu bölge $w_0 = 0$ a göre yıldızıl olduğundan $k(z)$ yıldızıl bir fonksiyon olur. Ayrıca D bölgesi her $w_0 > -\frac{1}{4}$ değeri için yıldızıldır.

Tanım 2.14 γ, $\mathbb{C}$ de kapalı bir eğri ve $z_0, \mathbb{C}$ de bir nokta olsun. z_0 a göre γ nın indeksi

$$\mathcal{I}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

olarak tanımlanır ve γ nın z_0 a göre dolanım sayısı olarak da adlandırılır. Bilindiği üzere γ eğrisi, z_0 ın çevresini $\mathcal{I}(\gamma, z_0)$ defa sarar.

Önerme 2.2

(i) $r > 0$ ve $t \in [0, 2\pi n]$ olmak üzere $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ çemberi z_0 a göre n dolanım sayısına sahip ise -$\gamma(t) = z_0 + re^{-it}$ çemberi $-n$ dolanım sayısına sahiptir.

(ii) z_0, γ ve $\widetilde{\gamma}$ eğrilerinin üzerinde olmasın. γ ve $\widetilde{\gamma}$ eğrileri $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ da homotopik ise, bu durumda

$$\mathcal{I}(\gamma, z_0) = \mathcal{I}\left(\widetilde{\gamma}, z_0\right)$$

olur.

Teorem 2.1 (**Cauchy Türev Formülü**) $f(z)$ fonksiyonu bir B bölgesinde analitik olsun. Bu durumda B de $f(z)$ nin her mertebeden türevi mevcuttur. Ayrıca B de bir z_0 noktası ve z_0 dan geçmeyen ve B bölgesinde bir noktaya homotopik bir γ kapalı çevresi için

$$f^{(n)}(z_0)\,\mathcal{I}(\gamma, z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \qquad n = 1, 2, ...$$

dir. (Marsden vd. 1999)

Teorem 2.2 $f(z)$ foksiyonu $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ dairesinde analitik olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu D de z_0 merkezli bir kuvvet seri açılımına sahiptir ve γ, z_0 ı içine alacak şekilde D de pozitif yönlü, kapalı bir çevre olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{ve} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

şeklindedir.

Teorem 2.3 $f(z)$ fonksiyonu $b_1, ..., b_m$ kutup noktaları dışında $\mathcal{B}$ bölgesinde analitik ve $a_1, ..., a_n$ katlılıklarıyla birlikte f in sıfırları olsun. Bir γ kapalı çevresi, $\mathcal{B}$ bölgesinde bir noktaya homotopik ve a_j ile b_l noktalarından geçmesin. Bu durumda

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i \left[\sum_{j=1}^{n} \mathcal{I}(\gamma; a_j) - \sum_{l=1}^{m} \mathcal{I}(\gamma; b_l)\right]$$

dır. Bu formül meromorf fonksiyonlar için de geçerlidir. (Marsden vd. 1999)

Sonuç 2.2 γ, $\mathbb{C}$ de basit kapalı bir çevre olsun.

(i) $f(z)$ fonksiyonu γ yı içeren açık bir kümede sonlu sayıdaki kutup noktalarının dışında analitik ve $f(z)$ nin sonlu sayıdaki kutup noktalarının ve sıfırlarının hiçbiri γ üzerinde bulunmasın. Bu durumda katlılıkları da hesaba katılarak Z_f, $f(z)$ fonksiyonun γ içindeki sıfırlarının ve P_f ise kutup noktalarının sayısı olmak üzere

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i\,[Z_f - P_f]$$

olur.

(ii) $f(z)$ fonksiyonu γ yı içeren açık bir kümede ve içinde analitik olsun. Eğer $f(z)$, γ üzerinde w ye eşit değil ise

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)-w} dz = 2\pi i N_w$$

dir. N_w, katlılıkları ile birlikte $f(z)-w=0$ denkleminin sıfırlarının sayısıdır. (Marsden vd. 1999)

Teorem 2.4 $\big($**Argüment İlkesi**$\big)$ γ kapalı çevresi ve bu çevre üzerinde bulunmayan bir z_0 noktası γ üzerinde ilerlerken $z-z_0$ ın argümentindeki değişim $2\pi\mathcal{I}(\gamma; z_0)$ kadardır. Bu ise

$$\Delta_{\gamma} \arg(z-z_0) = 2\pi\mathcal{I}(\gamma; z_0)$$

olarak ifade edilir.

Şimdi $\Delta_{\gamma} \arg f$ ile z, γ çevresi üzerinde ilerlerken $\arg f$ deki değişimi tanımlayalım. Bunun anlamı açık olup eğer $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ise t, a dan b ye değişirken $\arg f\ (\gamma(t))$ yi hesaplayarak $\arg f\ (\gamma(b)) - \arg f\ (\gamma(a))$ farkını bulmaktır. $\arg f\ (\gamma(t))$ nin t ye göre sürekli değişebilmesi için argüment için bir dal seçilmelidir. Eşdeğer olarak değişkenleri değiştirerek, yani $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$ yazıp $\Delta_{\widetilde{\gamma}} \arg(z)$ yi hesaplayarak da bulanabilir.

Tanım 2.15 $f(z)$, $\mathcal{B}$ bölgesinde analitik ve γ, $\mathcal{B}$ bölgesinde bir noktaya homotopik ve $f(z)$ nin herhangi bir sıfırından geçmeyen kapalı bir çevre olsun. Bu durumda

$$\Delta_{\gamma} \arg f = 2\pi\mathcal{I}(f \circ \gamma; 0)$$

olarak tanımlanır. Burada $w=0$ alınmasının nedeni $(f \circ \gamma)(z) \neq 0$ olmasıdır.

Teorem 2.5 $f(z)$ fonksiyonu $b_1, ..., b_m$ kutup noktaları dışında $\mathcal{B}$ bölgesinde analitik ve $a_1, ..., a_n$ katlılıklarıyla birlikte $f(z)$ nin sıfırları olsun. Ayrıca, γ, $\mathcal{B}$ bölgesinde bir noktaya homotopik bir eğri olup a_j veya b_l noktalarından geçmesin. Bu durumda

$$\Delta_{\gamma} \arg f = 2\pi \left[\sum_{j=1}^{n} \mathcal{I}(\gamma; a_j) - \sum_{l}^{m} \mathcal{I}(\gamma; b_l) \right]$$

şeklindedir.

Önerme 2.3 $f(z)$ fonksiyonu z_0 da analitik, $f'(z_0) \neq 0$ olsun. z_0 dan geçen bir γ düzgün eğrisinin z_0 daki teğeti x-ekseni ile θ açısı yapıyorsa, γ nın $f(z)$ fonksiyonu altındaki görüntüsü olan $\widetilde{\gamma}$ düzgün eğrisinin de $w_0 = f(z_0)$ da teğeti vardır ve teğetinin u-ekseni ile yaptığı açı

$$\phi = \theta + \arg f'(z_0)$$

dır

Teorem 2.6 $f(z)$, z_0 da analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ ise, z_0 ın bir komşuğunda $f(z)$ fonksiyonu univalenttir.

Teorem 2.7 $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}$ bir bölge olsun. $f : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu analitik ve univalent ise her $z \in \mathcal{B}$ için $f'(z) \neq 0$ dır.

Teorem 2.8 $\mathcal{B}$ bir bölge, f fonksiyonu $\mathcal{B}$ de analitik ve γ, $\mathcal{B}$ içinde bir noktaya homotopik olan kapalı bir eğri olsun. Varsayalım ki $\mathcal{I}(\gamma, z)$ nin değeri 0 ya da 1 ve $A = \{z \in \mathcal{B} : \mathcal{I}(\gamma; z) \neq 0\}$ olsun. Eğer $f(A)$ nın her bir noktasının, $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$ eğrisine göre indeksi 1 ise, $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{B}$ bölgesinde univalenttir (Başkan 1999).

Teorem 2.9 C basit kapalı bir çevre ve $D = i\text{ç}(C)$ olsun. Farzedelim ki $f(z)$ fonksiyonu D de analitik ve C de sürekli olsun. z, C nin üzerinde pozitif yönde bir kez dönerken $w = f(z)$ noktası da $C' = f(C)$ yi pozitif yönde bir kez tanımlar. Bu durumda C' pozitif yönlüdür ve $f(z)$ fonksiyonu univalent olup D yi bire-bir olarak $D' = i\text{ç}(C')$ ye konform olarak dönüştürür (Marsden 1999).

Teorem 2.10 $f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasından analitik ve bu noktada $f(z)-f(z_0)$ ın k.mertebeden ($k \geq 2$) sıfırı varsa, z_0 dan geçen ve aralarında α açısı yapan iki düzgün eğrinin resimleri w_0 da $k\alpha$ açısı yaparlar. Dolayısıyla da z_0 ın bir komşuluğu w_0 ın bir komşuşuğunu k defa örter (Başkan 1999).

Bu teoreme ilişkin aşağıdaki örnekleri verebiliriz (Başkan 1999).

Örnek 2.1 $f(z) = z^p$ fonksiyonu γ birim çemberini yine birim çembere dönüştürür. Fakat, $\mathcal{I}(\gamma; 0) = 1$ iken $\mathcal{I}(f \circ \gamma; 0) = p$ dir. Gerçekten

$$2\pi i \mathcal{I}(f \circ \gamma; 0) = \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

olduğundan,

$$
\begin{aligned}
2\pi i\mathcal{I}\left(f\circ\gamma;0\right) &= \int\limits_{\gamma}\frac{pz^{p-1}}{z^{p}}dz \\
&= p\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z} \\
&= 2p\pi i
\end{aligned}
$$

bulunur. Ve buradan $\mathcal{I}\left(f\circ\gamma;0\right)=p$ olur. Bu ise $f(z)$ nin 0 ın bir komşuluğunu p defa örttüğünü gösterir. Ayrıca

$$
\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{d}{d\theta}\left[\arg f\left(re^{i\theta}\right)\right]d\theta=\int\limits_{0}^{2\pi}\mathfrak{Re}\left(z\frac{f'\left(z\right)}{f\left(z\right)}\right)d\theta=\mathfrak{Re}\left(\frac{1}{i}\int\limits_{|z|=r}\frac{f'\left(z\right)}{f\left(z\right)}dz\right)=2\pi p
$$

olduğundan $\arg f$ nin toplam artışı $2\pi p$ kadardır.

Örnek 2.2 $f\left(z\right)=z+a_2z^2+a_3z^3+....$ şeklinde seri açılımına sahip γ birim çember üzerinde ve içinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z\in\{z\in\mathbb{C}:0<|z|\leq r<1\}$ için $f\left(z\right)\neq 0$ olsun. O zaman

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{d}{d\theta}\left[\arg f\left(re^{i\theta}\right)\right]d\theta &= \int\limits_{0}^{2\pi}\mathfrak{Re}\left(\frac{zf'\left(z\right)}{f\left(z\right)}\right)d\theta=\mathfrak{Re}\left(\frac{1}{i}\int\limits_{|z|=r}\frac{f'\left(z\right)}{f\left(z\right)}dz\right) \\
&= 2\pi=\Delta_{\gamma}\arg f=2\pi\mathcal{I}\left(f\circ\gamma;0\right)
\end{aligned}
$$

olup buradan $\mathcal{I}\left(f\circ\gamma;0\right)=1$ olduğu açıktır. Bu $\arg f$ nin toplam artışını verecektir. Şu söylenebilir ki $f\circ\gamma$ eğrisi 0 ın bir komşuluğunu tam 1 defa döner.

Sonuç 2.3 Bir $\mathcal{B}$ bölgesinin bütün noktalarında $f'(z_0)\neq 0$ ise, $\mathcal{B}$ nin $f(\mathcal{B})$ yi bir defa örtmesi gerekmez.

Teorem 2.11 $f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasından analitik ve bu noktada $f'(z_0)\neq 0$ ise, z_0 ın bir komşuluğu w_0 ın bir komşuluğunu tam bir defa örter.

Teorem 2.12 $f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasından analitik ve bu noktada $f'(z_0)\neq 0$ ise, $w_0=f\left(z_0\right)$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı, analitik bir f^{-1} ters fonksiyonu vardır ve

$$\frac{d}{dw}f^{-1}(w) = \frac{1}{df(z)/dz}$$

dir. Ayrıca $f^{-1}(w_0) \neq 0$ dır.

Teorem 2.13 (**Maksimum Modül Teoremi**) Varsayalım ki $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}$ sınırlı bir bölge olsun. $u : \overline{\mathcal{B}} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathcal{B}$ de sürekli ve harmonik, ayrıca M sayısı u nun $\partial(\mathcal{B})$ üzerindeki maksimumu olsun. Bu durumda,

(i) Her $(x, y) \in \mathcal{B}$ için $u(x, y) \leq M$ dir.

(ii) Bazı $(x, y) \in \mathcal{B}$ noktaları için $u(x, y) = M$ ise u fonksiyonu sabittir.

Teorem 2.14 (**Minimum Modül Teoremi**) Varsayalım ki $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}$ sınırlı bir bölge olsun. $u : \overline{\mathcal{B}} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathcal{B}$ de sürekli ve harmonik, ayrıca m sayısı u nun $\partial(\mathcal{B})$ üzerindeki minumumu olsun. Bu durumda,

(i) Her $(x, y) \in \mathcal{B}$ için $u(x, y) \geq m$ dir.

(ii) Bazı $(x, y) \in \mathcal{B}$ noktaları için $u(x, y) = m$ ise u fonksiyonu sabittir.

Tanım 2.16 $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları $\mathcal{U}$ birim dairesinde analitik olsun. Eğer bir $l(z)$ fonksiyonu varsa öyle ki

(i) $l(z)$ $\mathcal{U}$ da analitik

(ii) $l(0) = 0$

(iii) $z \in \mathcal{U}$ için $|l(z)| < 1$

ve $f(z) = g(l(z))$ bağıntısı gerçeklenirse, o zaman $f(z)$ fonksiyonu, $g(z)$ fonksiyonuna "subordine" dir denir ve $f(z) \prec g(z)$ ile gösterilir.

Lemma 2.1 $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ analitik, $z \in \mathcal{U}$ noktaları için $|f(z)| \leq 1$ ve $f(0) = 0$ olsun. Bu durumda $z \in \mathcal{U}$ noktaları için $|f(z)| \leq |z|$ ve $|f'(0)| \leq 1$ dir. Üstelik $z_0 \in D$ $(z_0 \neq 0)$ için $|f(z_0)| \leq |z_0|$ ise c, $|c| = 1$ özelliğinde bir sabit olmak üzere, $f(z) = cz$ biçimindedir. Bu lemma Schwarz lemması olarak bilinir. (Szegö ve Polya 1954)

Teorem 2.15 $f(z) \prec g(z)$ olsun. Bu durumda $f(\mathcal{U}) \subset g(\mathcal{U})$ ve $f(0) = g(0)$ dır.

Teorem 2.16 $f(z) \prec g(z)$ olsun. Bu durumda

$$\{f(z) : |z| < r\} \subset \{g(z) : |z| < r\} \quad (0 < r < 1)$$

dir.

Lemma 2.2 $w(z)$, $w(0)=0$ koşulunu gerçekleyen $\mathcal{U}$ da analitik bir fonksiyon ve $r\in\mathbb{R}$, $0<r<1$ olsun. Eğer $|w(z)|$, maksimum değerine $|z|=r$ üzerindeki bir z_0 noktasında ulaşıyorsa

$$z_0 w'(z_0) = cw(z_0) \quad (c \geq 1)$$

eşitliğini sağlayacak bir c vardır. Bu lemma, Jack's Lemma olarak bilinir (Jack 1971).

Bu lemmanın genellemesi aşağıda verilmiştir.

Lemma 2.3 $w(z)$ fonksiyonu

$$w(z) = c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + c_{c+2} z^{c+2} \; + \; \cdots \; (n \in \mathbb{N}) \tag{1.3}$$

ile verilmiş olup $w(z) \not\equiv 0$ $(z \in \mathcal{U})$ olacak şekilde $\mathcal{U}$ da analitik olsun.

Eğer bir $z_0 = re^{i\theta}$ $(r \in \mathbb{R}, 0<r<1)$ için

$$|w(z_0)| = max_{|z|\leq|z_0|}|w(z)|,$$

eşitliği sağlanıyorsa $c \in \mathbb{R}$ ve $c \geq n \geq 1$ olmak üzere

$$z_0 w'(z_0) = cw(z_0)$$

dır. (Mocanu 2000)

Lemma 2.4 $N(z)$ ve $D(z)$, $\mathcal{U}$ da analitik, $N(0)=D(0)=0$, $D(z)$, $\mathcal{U}$ birim dairesini orjine göre yıldızıl olan çok katlı bir bölgeye dönüştürsün ve ayrıca $\mathcal{U}$ da $\mathfrak{Re}\,(N'(z)/D'(z))>0$ olsun. Bu durumda $\mathcal{U}$ da $\mathfrak{Re}\,(N(z)/D(z))>0$ eşitsizliği sağlanır.(Libera 1965)

3. YILDIZIL VE KONVEKS FONKSİYONLARLA İLGİLİ TEMEL BİLGİLER

3.1 Bir Eğri Üzerinde Yıldızıllık ve Konvekslik

Bu kesimde bir Γ_z eğrisinin, bu eğri üzerinde analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonu altındaki görüntüsünün yıldızıl ya da konveks olup olmadığı üzerinde çalışacağız. Γ_z bir çember, bir doğru parçası ya da diğer bazı temel eğriler olabilir.

Varsayalım ki Γ_z eğrisi düzgün bir eğri ve

$$\Gamma_z : z(t) = x(t) + iy(t)$$

parametrik denklemiyle verilmiş olsun. Burada $x(t)$ ile $y(t)$, t ye bağımlı reel değerli fonksiyonlar ve $t \in [a,b]$ dir. Γ_z eğrisi düzgün olduğundan her $t \in [a,b]$ için

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$$

dır. Şimdi bir düzgün eğrinin bir analitik fonksiyon altındaki görüntüsünün yıldızıl olması tanımını verelim.

Tanım 3.1.1 $f(z)$, $\Gamma_z : z(t) = x(t) + iy(t)$ düzgün eğrisi üzerinde analitik, Γ_w, Γ_z eğrisinin $f(z)$ fonksiyonu altındaki görüntüsü ve w_0, Γ_w üzerinde bulunmayan bir nokta olsun. Eğer $arg(w - w_0)$ azalmayan bir fonksiyon, yani her $t \in [a,b]$ için

$$\frac{d}{dt}\left[arg(w - w_0)\right] \geq 0$$

ise Γ_w eğrisi w_0 a göre yıldızıldır denir.

Şimdi tanımdan hareketle ispatı kolay olan bir lemma verelim.

Lemma 3.1.1 Bir Γ_z düzgün eğrisinin bir analitik $f(z)$ fonksiyonu altındaki görüntüsünün yıldızıl olması için gerek ve yeter koşul her $t \in [a,b]$ için

$$\mathfrak{Im}\left[\frac{f'(z)}{f(z) - w_0} z'(t)\right] \geq 0$$

olmasıdır.

İspat.

ln fonksiyonunun tanımından, her $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ için $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ olduğundan $\arg z = \mathfrak{Im}\{\ln z\}$ olarak yazılabilir. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[arg\left(w - w_0\right)\right] &= \frac{d}{dt}\left[\mathfrak{Im}\left[\ln\left(w - w_0\right)\right]\right] \\
&= \mathfrak{Im}\left[\frac{d}{dt}\left[\ln\left(w - w_0\right)\right]\right] \\
&= \mathfrak{Im}\left[\frac{d}{dz}\left[\ln\left(f(z) - w_0\right)\right]\frac{dz}{dt}\right] \\
&= \mathfrak{Im}\left[\frac{d}{dz}\left[\ln\left(f(z) - w_0\right)\right]\frac{dz}{dt}\right] \\
&= \mathfrak{Im}\left[\frac{f'(z)}{f(z) - w_0}\frac{dz}{dt}\right] \\
&= \mathfrak{Im}\left[\frac{f'(z)}{f(z) - w_0}z'(t)\right] \geq 0
\end{aligned}$$

olur. Böylece istenen ispat tamamlanır.

Tanım 3.1.2 Γ_w eğrisinin teğetinin argümenti t ye göre azalmayan bir fonksiyon ise Γ_w eğrisine konvekstir denir.

Bu durumda, Γ_w eğrisinin konveks olması için gerek ve yeter koşul her $t \in [a, b]$ için

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{dt}\left[arg\left(z'(t) f'(t)\right)\right] \geq 0$$

olmasıdır.

Lemma 3.1.2 $\Gamma_z : z = z(t)$ düzgün eğrisi üzerinde $f'(z) \neq 0$ olduğunu varsayalım. Γ_z nin $f(z)$ analitik fonksiyonu altındaki görüntüsü konvekstir ancak ve ancak

$$\mathfrak{Im}\left[\frac{z''(t)}{z'(t)} + \frac{f''(z)}{f'(z)}z'(t)\right] \geq 0$$

dır.

İspat. Lemma 3.1.1 in ispatına benzer şekilde, Γ_z nin $f(z)$ altındaki görüntüsünün konveks olduğunu kabul edelim. Her $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ olmak üzere

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z \Rightarrow \mathfrak{Im}\left[\ln z\right] = \arg z$$

olup buradan

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\arg\left(z'(t).f'(z)\right)\right] &= \frac{d}{dt}\left[\mathfrak{Im}\left[\ln\left(z'(t)\,f'(z)\right)\right]\right] \\
&= \mathfrak{Im}\left[\frac{d}{dt}\ln z'(t) + \frac{d}{dz}\left[\ln f'(z)\right]\frac{dz}{dt}\right] \\
&= \mathfrak{Im}\left[\frac{z''(t)}{z'(t)} + \frac{f''(z)}{f'(z)}z'(t)\right] \geq 0
\end{aligned}
$$

bulunur.

3.2 Univalent Fonksiyonların Yıldızıllığı ve Konveksliği

Verilen herhangi bir fonksiyonun analitik olması durumunda bu fonksiyonun Mac Laurin seri açılımı

$$
g(z) = a_0 + a_1\, z + a_2\, z^2 \; + \cdots \; = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k
$$

şeklindedir. Eğer $g(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ da univalent ise $g(z) + C$ dönüşümü $\mathcal{U}$ da univalenttir. Her $z \in \mathcal{U}$ için $g(z) \neq 0$ olması durumunda $a_1 \neq 0$ olup $f(z) = \frac{1}{a_1}\left(g(z) - a_0\right)$ dönüşümü de $\mathcal{U}$ da univalenttir ve

$$
f(z) = z + b_1 z + b_2 z^2 \; + \cdots \; = z + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \;, \qquad b_n = \frac{a_n}{a_1} \tag{3.2.1}
$$

şeklindedir.

Tanım 3.2.1 (3.2.1) şeklindeki fonksiyonlara normalize edilmiş fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf S ile gösterilir. Dikkat edilirse birim dairede analitik ve univalent bir fonksiyonun normalize edilmiş olması için $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ olması gerekir.

Uyarı 3.2.1 $\mathcal{U}$ birim dairesinin $f(z)$ fonksiyonunun altındaki görüntüsü $g(z)$ fonksiyonu altındaki görüntüsüden sadece dönme, öteleme, uzama ya da kısalma kadar farklı olacağından yukarıda seri açılımı verilen $g(z)$ fonksiyonu yerine normalize edilmiş $f(z)$ fonksiyonu ile işlemler yapılarak bulunan sonuçlar $g(z)$ fonksiyonuna genişletilir.

Tanım 3.2.2 Eğer $f(z) \in S$ fonksiyonu, $\mathcal{U}$ birim dairesini konveks bir bölgeye dönüştürüyorsa $f(z)$ ye konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{C}$ ile gösterilir.

Tanım 3.3.3 Eğer $f(z) \in S$ fonksiyonu, $\mathcal{U}$ birim dairesini w_0 a göre yıldızıl bir bölgeye dönüştürüyorsa $f(z)$ ye w_0 a göre yıldızıl fonksiyon denir. Özel olarak $w_0 = 0$ alınırsa $f(z)$ fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf S^* ile gösterilir.

Uyarı 3.2.2 $f(z)$, $\mathcal{U}$ da univalent ve analitik olsun. Eğer $f(z)$, $C_R : |z| = R$ çemberini basit kapalı bir konveks eğriye dönüştürüyorsa bu eğri konveks bir bölgeyi sınırlar veya konveks bir bölgenin sınırıdır. Aksine, Eğer $f(z)$, C_R, $R < 1$, dairesini konveks bir bölgeye dönüştürüyorsa bu bölgenin sınırı basit kapalı konveks bir eğridir. Benzer ifadeler yıldızıl eğriler için de kullanabilir.

Teorem 3.2.1

(i) $f(z)$, $\overline{\mathcal{U}}_R = \{z : |z| \leq R\}$ kapalı dairesinde analitik ve univalent olsun. Bu durumda $f(z)$ nin, $\overline{\mathcal{U}}_R$ nı konveks bir bölge üzerine dönüştürmesi için gerek ve yeter koşul her $z \in C_R : |z| = R$ için

$$\mathfrak{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \geq 0 \tag{3.2.2}$$

olmasıdır.

(ii) $f(0) = 0$ olsun. Bu durumda $f(z)$ nin, $\mathcal{U}_R$ yi $w_0 = 0$ a göre yıldızıl olan bir bölge üzerine dönüştürmesi için gerek ve yeter koşul her $z \in C_R$ için

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) \geq 0 \tag{3.2.3}$$

olmasıdır.

İspat.

(i) Lemma 3.1.2 deki Γ_z eğrisi C_R çemberi olsun. $f(z)$, $\overline{\mathcal{U}}_R$ kapalı dairesinde univalent olduğundan bu daire üzerinde 1-1 dir ve bu durumda her $z \in \overline{\mathcal{U}}_R$ için $f'(z) \neq 0$ dır. O halde Lemma 3.1.2 den her $z \in C_R$ için

$$\mathfrak{Im}\left(\frac{z''(t)}{z'(t)} + \frac{f''(z)}{f'(z)}z'(t)\right) \geq 0 \tag{3.2.4}$$

yazabilir. Ayrıca $\Gamma_z : z = z(t)$ eğrisi $C_R : |z| = R$ olduğundan $z = Re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ olur. Buradan $z'(t) = iRe^{it} = iz$ ve $z''(t) = -iRe^{it} = -z$ olarak bulunur. Bu (3.2.4) te yerine koyulursa

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Im}\left(\frac{z''(t)}{z'(t)} + \frac{f''(z)}{f'(z)}z'(t)\right) &= \mathfrak{Im}\left(\frac{-z}{iz} + \frac{f''(z)}{f'(z)}iz\right) \\
&= \mathfrak{Im}\left(i + \frac{f''(z)}{f'(z)}iz\right) \\
&= \mathfrak{Im}\left(i(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)})\right) \\
&= \mathfrak{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \geq 0
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

(ii) Benzer olarak Γ_z eğrisini $C_R : |z| = R$ olarak alalım. $f(z), \mathcal{U}_R$ yi $w_0 = 0$ a göre yıldızıl olan bir bir bölge üzerine dönüştürsün. Bu durumda Lemma 3.1.1 den her $z \in C_R$ için

$$\mathfrak{Im}\left(\frac{f'(z)}{f(z) - w_0}z'(t)\right) \geq 0 \tag{3.2.5}$$

yazılabilir. $C_R : |z| = R$ olduğundan $z = Re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ dir. Buradan $z'(t) = iRe^{it} = iz$ ve $f(0) = 0 = w_0$ alındığından bunlar (3.2.5) te yerine koyulursa

$$\mathfrak{Im}\left(i\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) = \mathfrak{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) \geq 0 \tag{3.2.6}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.2.1 $f(z) \in S$, $\Delta = f(\mathcal{U})$, $\overline{\mathcal{U}}_R = \{z : |z| \leq R < 1\}$ olmak üzere $\overline{\Delta}_R = f(\overline{\mathcal{U}}_R)$ olsun. Eğer Δ orjine göre yıldızıl ise bu durumda $\overline{\Delta}_R$ da orjine göre yıldızıldır. Tersine $\overline{\Delta}_R$ orjine göre yıldızıl ise Δ da orjine göre yıldızıldır.

İspat. Δ orjine göre yıldızıl olsun. Eğer $z \in \mathcal{U}$ ise $f(z) \in \Delta$ ve Δ orjine göre yıldızıl olduğundan $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $tf(z) \in \Delta$ olur.

$$g(z) = f^{-1}(tf(z))$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon $\mathcal{U}$ da analitiktir ve $g(0) = 0$, $|z| < 1$ için $|g(z)| < 1$ dır. Schwarz lemmasından $|z| < 1$ için $|g(z)| < |z|$ elde edilir.

Varsayalım ki $z_1 \in \overline{\mathcal{U}}_R$ olsun. Bu durumda $\overline{\Delta}_R = f(\overline{\mathcal{U}}_R)$ olduğundan $f(z_1) \in \overline{\Delta}_R$ ve

$$|g(z_1)| = \left|f^{-1}(tf(z_1))\right| \leq |z_1| < R$$

olur. Eğer $z_2 = f^{-1}(tf(z_1))$ denilirse, $|z_2| \leq R$ ve

$$f(z_2) = tf(z_1) \in \overline{\Delta}_R$$

dır. Böylelikle $f(z_1) \in \overline{\Delta}_R$ iken $tf(z_1) \in \overline{\Delta}_R$ dır, yani $\overline{\Delta}_R$ orjine göre yıldızıldır.

Aksine $\overline{\Delta}_R$ orjine göre yıldızıl olsun. Δ nın herhangi bir w^* noktası bazı $R < 1$ değerleri için $\overline{\Delta}_R$ dadır. w^* ın ters görüntüsü olan $z^* = f^{-1}(w^*)$ noktası $R = |z^*|$ olacak şekilde $\overline{\mathcal{U}}_R$ dadır.

Lemma 3.2.2 $0 < |z| < 1$ halka bölgesindeki her z noktasında

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

olması için gerek ve yeter koşul $f(z) \in S$ fonksiyonunun $\mathcal{U}$ birim dairesinde yıldızıl olmasıdır.

İspat. Teorem 3.2.1 in (ii) şıkkından her $z \in \overline{\mathcal{U}}_R$, $R < 1$, için

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) \geq 0$$

olduğu biliniyor. Lemma 3.2.1, $f(z)$ nin $\overline{\mathcal{U}}_R$ da yıldızıl olması durumunda $\mathcal{U}$ da da yıldızıl olduğunu gösterir. Maksimum modül teoremden dolayı ve bu teoremin $\mathcal{R}e\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]$ harmonik fonksiyonuna uygulanmasıyla $|z| = R < 1$ için

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

elde edilir.

Aksine yukarıdaki eşitsizlik sağlanıyorsa $arg\ f(z)$, $\theta = \arg z$ ye göre kesin monoton artan olup $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ da yıldızıldır.

Lemma 3.2.3 Bir $\psi : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. Eğer

(i) $\psi(z)$, $\mathcal{U}$ da analitik

(ii) $\psi(0) = 1$

(iii) $\mathcal{U}$ da $\mathcal{R}e\,(\psi(z)) > 0$ ve

(iv) $\psi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$

oluyorsa, bu durumda

$$n \geq 1 \quad \text{için} \quad |b_n| \leq 2 \quad \text{ve} \quad |z| \leq r < 1 \quad \text{için} \quad |\psi(z)| \leq \frac{1+r}{1-r}$$

olur.

İspat. $C : z = re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ olsun. Bu durumda Teorem 2.2 den

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\psi(z)}{z^{n+1}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\psi\left(re^{i\theta}\right)}{\left(re^{i\theta}\right)^{n+1}} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} \psi\left(re^{i\theta}\right) e^{-ni\theta} d\theta \end{aligned}$$

veya

$$b_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta} d\theta, \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{3.2.7}$$

elde edilir. Diğer yandan $z^n\psi(z)$ analitik olduğundan

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi\left(re^{i\theta}\right) e^{in\theta} d\theta, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

dır. $\psi\left(re^{i\theta}\right) = U\left(re^{i\theta}\right) + iV\left(re^{i\theta}\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi\left(re^{i\theta}\right) e^{in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(U\left(re^{i\theta}\right) + iV\left(re^{i\theta}\right)\right)(\cos n\theta + i\sin n\theta)\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (U\cos n\theta - V\sin n\theta) + i\,(V\cos n\theta + U\sin n\theta)\, d\theta \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&\overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi\left(re^{i\theta}\right)e^{in\theta}d\theta} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(U\cos n\theta - V\sin n\theta\right)d\theta - i\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(V\cos n\theta + U\sin n\theta\right)d\theta
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
b_n r^n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(U\cos n\theta + V\sin n\theta\right)d\theta + i\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(V\cos n\theta - U\sin n\theta\right)d\theta
\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu iki eşitlik toplanırsa

$$\begin{aligned}
b_n r^n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi\left(re^{i\theta}\right)e^{in\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}U\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}d\theta
\end{aligned}$$

ve buradan

$$|b_n|\,r^n = \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}U\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}d\theta\right| \le \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}U\left(re^{i\theta}\right)d\theta = b_0 + \overline{b_0} = 2$$

bulunur. $r \to 1^-$ iken $n \ge 2$ için $|b_n| \le 2$ elde edilir. Diğer yandan,

$$|\psi(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right| \le \sum_{n=0}^{\infty}|b_n|\,r^n = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{1+r}{1-r}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.2 $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S^*$ olsun. Bu durumda her n için $|a_n| \le n$ dir.

İspat.

$$\psi(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \tag{3.2.8}$$

şeklinde olsun. Lemma 3.2.3 ün hipotezleri sağlandığından her $n \geq 1$ için $|b_n| \leq 2$ dir. Eğer (3.2.8) nin her iki yanı ilk önce $f(z)$ ile çarpılırsa

$$zf'(z) = f(z)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z\right)$$

olduğunu görülür. Bu ifadeden $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ çıkarılırsa,

$$z + 2a_2z^2 + ... + na_nz^n + ... = z + (a_2 + b_1)z^2 + ... + (a_n + a_{n-1}b_1 + ... + b_{n-1})z^n + ...$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten,

$a_2 = b_1$

$2a_3 = a_2b_1 + b_2$

.

.

$(n-1)a_n = a_{n-1}b_1 + ... + b_{n-1}$

sistemi elde edilir. $|a_2| = |b_1| \leq 2$ olup $k = 2, 3, ..., n-1$ için $|a_k| \leq k$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} (n-1)|a_n| &= |a_{n-1}b_1 + ... + b_{n-1}| \leq 2((n-1) + (n-2) + ... + 1) = 2\frac{(n-1)n}{2} \\ &\Rightarrow |a_n| \leq n \end{aligned}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.3 $f(z) = a_1z + a_2z^2 + ...$ $\mathcal{U}$ da analitik ve $a_1 \neq 0$ olsun. Eğer $\mathcal{U}$ da

$$\mathcal{R}e\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

ise bu durumda $f(z)$, $\mathcal{U}$ da univalenttir.

İspat. Teoremin hipotezleri göz önüne alındığında $f(z)$ fonksiyonun $z = 0$ da basit sıfırının var olduğu açıktır. Eğer $0 < |z_0| < 1$ olacak şekildeki z_0 noktası için $f(z_0) =$

0 olması durumunda $zf'(z)/f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasında basit bir kutbu olup z_0 ın civarında keyfi küçüklükte negatif değerler alır, fakat bu $\mathcal{R}e\left(zf'(z)/f(z)\right) > 0$ oluşu ile çelişir. Lemma 3.2.1 e göre her $R < 1$ için $\overline{\mathcal{U}}_R = \{z : |z| \leq R < 1\}$ da $f(z)$ fonksiyonunun univalent olduğu göstermek yeterli olacaktır. $C_{R'} : z = R'e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $R < R' < 1$ olsun. $f(z)$, $\mathcal{U}_{R'}$ de bir sıfırı olup hiç kutup noktası olmadığından argüment prensibine göre $\Delta_{C_{R'}} \arg f(z) = 2\pi$ olup Teorem 2.9 dan $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}_{R'} \supset \mathcal{U}_R$ olmak üzere $\mathcal{U}_{R'}$ de univalenttir. Bu da bulunmak istenen şey olup ispat tamamlanır.

Lemma 3.2.4 $f(z) \in S$ olsun. $f(\mathcal{U})$ nun konveks olması için gerek ve yeter koşul her $R \in (0,1)$ için $f(\mathcal{U}_R)$ nin konveks olmasıdır.

İspat. Lemma 3.2.1 in ispatında olduğu gibi $\Delta = f(\mathcal{U}), \mathcal{U}_R = \{z : |z| < R < 1\}$ olacak şekilde $\Delta_R = f(\mathcal{U}_R)$ olsun. Δ nın konveks olduğunu kabul edelim. Gösterilmesi gereken şey; w_1 ve w_2, Δ_R de herhangi farklı iki nokta ise $t \in (0,1)$ olmak üzere $tw_1 + (1-t)w_2$ doğru parçasının Δ_R de olduğudur.

$z_1 = f^{-1}(w_1)$ ve $z_2 = f^{-1}(w_2)$ olsun. Açıktır ki $z_{1,}z_2 \in \Delta_R$ dir ve varsayalım ki $|z_1| < |z_2|$ olsun. Δ konveks olduğundan dolayı, $\mathcal{U}$ nun

$$\Psi(z) = tf\left(\left(\frac{z_1}{z_2}\right)z\right) + (1-t)f(z) \qquad 0 \leq t \leq 1$$

altındaki görüntüsü Δ nın alt kümesidir. Bu durumda

$$g(z) = f^{-1}(\Psi(z))$$

fonksiyonu $\mathcal{U}$ da analitiktir ve Schwarz lemmasındaki $|g(z)| < 1$ ve $g(0) = 0$ şartlarını sağlar. Dolayısıyla, $|z| < 1$ için $|g(z)| \leq |z|$ ve böylece

$$|g(z_2)| = \left|f^{-1}(tw_1 + (1-t)w_2)\right| \leq |z_2| < R \tag{3.2.9}$$

elde edilir.

$\Delta_R \subset \Delta$ olduğundan her $t \in (0,1)$ için öyle bir $z_t \in \mathcal{U}_R$ vardır ki

$$f(z_t) = tw_1 + (1-t)w_2$$

dir. Fakat (3.2.9) dan $\left| f^{-1}\left(f\left(z_t\right)\right)\right| = |z_t| < R$ veya $z_t \in \mathcal{U}_R$ dır. Böylelikle her $tw_1 + (1-t)\, w_2$ noktası Δ_R dedir.

Tersine her $R \in (0,1)$ için Δ_R konveks olsun. Bu durumda Δ da konveks olur. Gerçekten, w_1 ve w_2, Δ da herhangi farklı iki nokta olsun. R yi Δ_R nin $z_1 = f^{-1}(w_1)$ ve $z_2 = f^{-1}(w_2)$ yi içerecek şekilde alalım. Bu durumda $\Delta_R = f(\mathcal{U}_R)$, w_1 ve w_2 noktalarının her ikisini birden içerir. Böylece $tw_1 + (1-t)\, w_2$ doğru parçası üzerindeki her nokta Δ_R de kalır. $\Delta_R \subset \Delta$ olduğundan bu doğru parçası Δ dadır. Bu da Δ nın konveks olduğunu gösterir.

Lemma 3.2.5 Bir $f(z) \in S$ fonksiyonunun konveks olabilmesi için gerek ve yeter koşul $zf'(z)$ fonksiyonunun yıldızıl olmasıdır. (Alexander 1915)

İspat. Bir $f(z) \in S$ fonksiyonu için,

$$\frac{z(zf'(z))'}{zf'(z)} = \frac{z[f'(z) + zf''(z)]}{zf'(z)} = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

olup $g(z) = zf'(z)$ denilirse

$$\Re\mathfrak{e}\left(\frac{z(zf'(z))'}{zf'(z)}\right) = \Re\mathfrak{e}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right) = \Re\mathfrak{e}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0$$

elde edilir.

Teorem 3.2.4 Varsayalım ki $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S$ fonksiyonu konveks olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $|a_n| \leq 1$ dir.

İspat. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ olduğundan

$$zf'(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^n$$

elde edilir. Lemma 3.2.5 göz önüne alınırsa, $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ da konveks olduğundan $zf'(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ da yıldızıl olup Teorem 3.2.2 den

$$n\,|a_n| \leq n \quad \text{veya} \quad |a_n| \leq 1$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 3.2.4 $f(z) \in S$ olsun. Eğer $\mathcal{U}$ da

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, $f(z)$ fonksiyonuna $\alpha\,(0 \leq \alpha < 1)$ mertebeden yıldızıl fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.5 $f(z) \in S$ olsun. Eğer $\mathcal{U}$ da

$$\mathfrak{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, $f(z)$ fonksiyonuna $\alpha\,(0 \leq \alpha < 1)$ mertebeden konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf ise $\mathcal{C}(\alpha)$ ile gösterilir.

Uyarı 3.2.3 $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}^*(\alpha)$ ve $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}(\alpha)$ dır.

Lemma 3.2.6 $f(z) \in \mathcal{C}(\alpha)$ olması için gerek ve yeter koşul $zf'(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ olmasıdır.

Lemma 3.2.7 Bütün $f(z) \in C$ fonksiyonları için $\mathcal{U}$ da

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) \geq a \quad \left(0 \leq a \leq \frac{1}{2}\right)$$

sağlansın. Bu durumda $\mathcal{U}$ da

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) \geq \frac{1}{4(1-a)} \quad \left(0 \leq a \leq \frac{1}{2}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.2.5 $f(z) \in \mathcal{C}(0)$ ise $f(z) \in S^*\left(\frac{1}{2}\right)$ dir. (Marx 1932)

İspat.

$$a_1 = 0; \quad a_2 = \frac{1}{4(1-a_1)} = \frac{1}{4}\ ; \quad a_3 = \frac{1}{4(1-a_2)} = \frac{1}{3};....$$

dizisini oluşturalım. Dizinin n.terimi, $n-1$.terimi ve

$$a_n = \frac{1}{4(1-a_{n-1})}$$

rekürans formülünün yardımıyla bulunabilir. Lemma 3.2.7 ye göre eğer $\mathcal{U}$ da

$$(I)\ 0 \leq a_{n-1} \leq \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad (II)\ \mathfrak{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) \geq\ a_{n-1}$$

koşulları sağlanıyor ise bu durumda

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) \geq\ a_n$$

eşitsizliği sağlanır. $n = 2$ için $a_{n-1} = a_1 = 0$ ve Lemma 3.2.5 tenn $f(z) \in \mathcal{C}(0)$ ise $zf'(z) \in S^*(0)$ olduğundan yukarıdaki I ve II eşitsizlikleri sağlanır.

Şimdi $n = 2, 3, ...$ için

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = \frac{1}{2}$$

olduğunu göstereceğiz. Diğer yandan

$$a_k = \frac{k-1}{2k} \tag{3.2.10}$$

olduğu gösterilirse bu iki varsayım ispatlanmış olur.

$k = 1$ için $a_1 = 0$ olup doğrudur.

$k = n$ için $a_n = \frac{n-1}{2n}$ doğru olsun.

$a_n = \frac{1}{4(1-a_{n-1})}$ rekürans formülünden

$$a_{n+1} = \frac{1}{4\left(1 - \frac{n-1}{2n}\right)} = \frac{(n+1)-1}{2(n+1)}$$

olur ki bu da (3.2.10) nun doğru olduğunu gösterir. O halde ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.5 deki sonucun daha geneli aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 3.2.6 $f(z) \in \mathcal{C}(\alpha)$ $(0 \leq \alpha < 1)$ ise

$$\beta(\alpha) = \frac{2\alpha - 1 + \sqrt{9 - 4\alpha + 4\alpha^2}}{4}$$

olmak üzere $f(z) \in \mathcal{S}^*(\beta(\alpha))$ dır. (Jack 1971)

İspat. Bu teoremin ispatı için teoremi şu şekilde ifade edilmesi daha uygun olacaktır:

Eğer $f(z)$ fonksiyonu $(\alpha^2+3\alpha)/2(\alpha+1)$ mertebeden konveks ise bu durumda $f(z)$ fonksiyonu $(\alpha+1)/2$ mertebeden yıldızıldır.

$$h(z)=\frac{zf'(z)}{f(z)}=\frac{1-\alpha w(z)}{1-w(z)} \tag{3.2.11}$$

olarak alınsın. Eğer $\mathcal{U}$ da $|w(z)|<1$ olduğunu gösterilirse, bu durumda $h(z)$, birim daireyi $\mathfrak{Re}w=\frac{1}{2}(\alpha+1)$ doğrusunun sağındaki yarı düzleme dönüştüren

$$\frac{1-\alpha z}{1-z}$$

fonksiyonuna subordinedir. (3.2.11) den

$$h(z)f(z)=zf'(z) \tag{3.2.12}$$

elde edilir. (3.2.12) nin her iki yanının logaritmik türevi alınırsa,

$$h'(z)f(z)+h(z)f'(z)=f'(z)+zf''(z)$$

eşitliği, buradan ise

$$h'(z)\frac{f(z)}{f'(z)}+h(z)=1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

olduğu bulunur.

$|z|=r$ çemberinin üzerindeki bir noktada $|w(z)|$ maksimum değerini alıyorsa Lemma 2.2 kullanılabilir, öyle ki bu noktada $k\geq 1$ olmak üzere

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}=\frac{1-\alpha w(z)}{1-w(z)}-\frac{k\alpha w(z)}{1-\alpha w(z)}+\frac{kw(z)}{1-w(z)} \tag{3.2.13}$$

olur. Şimdi varsayalım ki $M(r,w)$, $w(z)$ nin $|z|=r$ çemberi üzerindeki maksimum değeri olmak üzere, bazı $r<1$ değerleri için $M(r,w)=1$ olsun. Bunun gerçekleştiği $w(z)$ noktasında $|w|=1$ dir. (Açıktır ki $w\neq 1$ dir.) Bu durumda

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{1-\alpha w(z)}{1-w(z)}\right)=\frac{1}{2}(\alpha+1),$$

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{kw(z)}{1-w(z)}\right)=-\frac{1}{2}k,$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{Re}\left(\frac{k\alpha w(z)}{1-\alpha w(z)}\right) &= -\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}k\mathfrak{Re}\left(\frac{1+\alpha w(z)}{1-\alpha w(z)}\right)\\ &\geq -\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}k\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece (3.2.13) den

$$\begin{aligned}\mathfrak{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) &= \mathfrak{Re}\left(\frac{1-\alpha w(z)}{1-w(z)}-\frac{k\alpha w(z)}{1-\alpha w(z)}+\frac{kw(z)}{1-w(z)}\right)\\ &\leq \frac{1}{2}(\alpha+1)+\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}k\frac{1-\alpha}{1+\alpha}-\frac{1}{2}k\\ &= \frac{1}{2}(\alpha+1)-\frac{1}{2}k\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\\ &\leq \frac{\alpha^2+3\alpha}{2(\alpha+1)}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Fakat bu $f(z)$ fonksiyonunun $(\alpha^2+3\alpha)/2(\alpha+1)$ mertebeden konveks olması ile çelişir. O halde $M(r,w)=1$ olamaz. Bu her $r<1$ için doğru ve $M(0,w)=0$ olduğundan $M(r,w)=1$ olmalıdır. O halde $\mathcal{U}$ da $|w(z)|<1$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.6 daki sonuç için Jack, $\mathcal{C}(\alpha)\subset\mathcal{S}^*(\beta(\alpha))$ olacak şekilde en büyük $\beta(\alpha)$ $=\beta$ reel sayısının ne olacağı problemini ortaya atmış ve bu problemin çözümünü McGregor aşağıdaki teorem ile vermiştir.

Teorem 3.2.7 $f(z)\in\mathcal{C}(\alpha)$ $(0\leq\alpha<1)$ ise

$$\beta(\alpha)=\left\{\begin{array}{cc}\frac{1-2\alpha}{2^{2-2\alpha}[1-2^{2\alpha-1}]}, \alpha\neq\frac{1}{2}\\ \\ \frac{1}{2\log 2} & ,\alpha=\frac{1}{2}\end{array}\right\}$$

olmak üzere $f(z)\in\mathcal{S}^*(\beta(\alpha))$ dir.

3.3 p-Değerli Fonksiyonların Yıldızıllığı ve Konveksliği

Tanım 3.3.1 $f(z)$ fonksiyonu birim dairede analitik olsun. $w=f(z)$ eşitliğinin en fazla p tane kökü varsa $f(z)$ fonksiyonuna p-değerlidir denir.

Daha önce normalize edilmiş univalent analitik fonksiyonlar için verdiğimiz yıldızıllık ve konvekslik tanımlarını p-değerli analitik fonksiyonlar için genelleştireceğiz

$p-$katlı bölgelelerde konveks küme kavramını aşağıdaki yolla genelleştirilir. w_b, bir p-katlı R bölgesinin bir sınır noktası ve $w_b(r)$, w_b ile aynı katta bulunan R nin w noktalarının kümesi olsun ve $|w - w_b| < r$ eşitsizliği sağlansın. Eğer R bölgesinin her w_b sınır noktası için $w_b(r)$ konveks olacak şekilde bir $r > 0$ varsa, R ye lokal konveks bölge denir.

$f(z)$, $\mathcal{U}$ da analitik ve $f'(re^{i\theta}) \neq 0$ ise, bu durumda $f(z)$ fonksiyonu $|z| < r < 1$ dairesini, sınırı sürekli dönen teğete sahip analitik bir $f(re^{i\theta})$ eğrisi olan bir $R(r)$ bölgesine dönüştürür. ψ bu teğetle reel eksenin kesişimi ile oluşan açı olsun. ψ, θ nın bir fonksiyonu olarak tek olarak belirlenemez, fakat $\theta = 0$ iken ψ nin muhtemel değerlerinden birini seçerek bu durum sağlanabilir ve ψ nin sürekliliğinden yararlanılırsa $0 \leq \theta \leq 2\pi$ için $\psi(\theta)$ belirlenebilir. Bu durumda $\psi'(\theta) \geq 0$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $R(r)$ nin lokal konveks bölge olmasıdır. Bu ise bilinen

$$\psi'(\theta) = \mathfrak{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)$$

eşitliğidir.

Tanım 3.3.3 p pozitif bir tamsayı olmak üzere, eğer $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ da analitik, $f(0) = 0$ ve her r için $\rho < r < 1$ aralığında

$$G(r,\theta) = 1 + \mathfrak{Re}\left(re^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right) > 0, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \tag{3.3.1}$$

olacak şekilde bir $\rho < 1$ var ve

$$\int_0^{2\pi} G(r,\theta)d\theta = 2\pi p \tag{3.3.2}$$

eşitliği sağlanıyor ise $f(z)$ fonksiyonu $C(p)$ nin elemanıdır. Eğer $f(z) \in C(p)$ ise $f(z)$ fonksiyonu $|z| < r < 1$ kümesini lokal olarak konveks bir bölgeye dönüştürür. Bundan başka $f'(z)$, $|z| < r$ çemberinde tam olarak $p - 1$ tane kökü vardır, çok katlı köklerin sayısına tek noktadaki katlılık da sayılır. Eğer v bu köklerin sayısı ise

$$\begin{aligned} 2\pi p &= \int_0^{2\pi} G(r,\theta)d\theta = \int_0^{2\pi}\left(1 + \mathfrak{Re}\left(re^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right)\right)d\theta \\ &= 2\pi + \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{i}\int_0^{2\pi}\frac{f''(z)}{f'(z)}dz\right) \\ &= 2\pi + 2\pi v \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

dir. Sonuç olarak $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ da en fazla p-değerlidir. $f(z)-c$ nin köklerinin sayısını veren çevre integrali, çevre boyunca $\arg(f(z)-c)$ nin değişimin 2π ile bölümünü verir. Fakat $C(p)$ sınıfının bir fonksiyonu için $R(r)$ yi sınırlayan eğri θ, 0 dan 2π ye giderken sürekli bir dönüşe sahip bir eğridir ve tüm dönüşlerin toplam sayısı tam olarak p keredir. Bu yüzden $\arg(f(z)-c)$ nin değişim $2\pi p$ yi geçmez.

Düzlemdeki bir bölgenin bir noktaya göre yıldızıllığını uygun p-katlı bölgelere genelleştirmek için bir w_b sınır noktasını verilen noktaya birleştiren doğru göz önüne alınsın. w_b, p-katlı R bölgesinin sınırı olarak tanımlanırsa doğru, saat yönünün tersine sürekli bir dönüşe sahiptir. Bu durumda R verilen noktaya göre yıldızıldır denir. Şimdi $F(z)$, $\mathcal{U}$ da analitik ve $\rho<r<1$ için $F(re^{i\theta})\neq 0$ olsun. Eğer $\phi=\arg F(re^{i\theta})$ ise, ϕ, θ nın bir fonksiyonu olup tek olarak belirlenemez. Fakat $\theta=0$ iken ϕ nin muhtemel değerlerinden biri seçilerek bu durum sağlanabilir ve ϕ nin sürekliliğinden yararlanılırsa $0\leq\theta\leq 2\pi$ için $\phi(\theta)$ belirlenebilir. Bu durumda $\phi'(\theta)\geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $R\,(r)$ nin orjine göre yıldızıl olmasıdır. Bu ise bilinen

$$\phi'(\theta)=\mathfrak{Re}\left(\frac{zf'\,(z)}{f\,(z)}\right)$$

eşitliğini gerektirir.

Tanım 3.3.4 p pozitif bir tamsayı olmak üzere, eğer $F(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ da analitik, $F(0)=0$ ve her r için $\rho<r<1$ aralığında

$$H(r,\theta)=\mathfrak{Re}\left(re^{i\theta}\frac{F'(re^{i\theta})}{F(re^{i\theta})}\right)>0 \qquad (0\leq\theta\leq 2\pi) \tag{3.3.4}$$

olacak şekilde bir $\rho<1$ var ve

$$\int_0^{2\pi} H(r,\theta)d\theta=2\pi p \tag{3.3.5}$$

eşitliği sağlanıyor ise $F(z)$ fonksiyonu $S(p)$ nin elemanıdır. (3.3.2), $f'(z)$ nin $\mathcal{U}$ da $p-1$ tane kökü olduğunu gösterirken (3.3.5) ise $F(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{U}$ da p tane kökü olduğunu gösterir. $F(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{U}$ da p tane kökü olduğunu görmek için θ, 0 dan 2π ye değişirken, Δ değişimi ifade etmek üzere $\delta\,(\lambda)=\Delta\arg\left(F(re^{i\theta})-\lambda c\right)$ ifadesini göz önüne alalım. c sabit olmak üzere, λ, 0 dan 1 e değişir. $\delta\,(0)=2\pi p$ olduğu açıktır. Ayrıca $\delta\,(\lambda)$, her zaman 2π nin tam katı olup λc nin $|z|<r$ nin

görüntüsünün sınır noktası olan w_b ye olan eşitliğini(yani, $\lambda c = w_b$) sağlayan c değeri dışında süreklidir. Bu noktalarda $\delta(\lambda)$ değeri $\pm 2\pi$ sıçrar. (3.3.4) ve (3.3.5) ten her c için p tane bunun gibi sınır noktası olduğu çıkarılabilir. Sonuç olarak $|c|$ nin yeterince büyük değerleri için $\delta(1) = 0$ olur ki $\delta(\lambda)$ değerindeki sıçramalar -2π olmalıdır ve her λ ve c için $0 \leq \delta(\lambda) \leq 2\pi p$ dir.

$p = 1$ için $S(p)$ ve $C(p)$ bilinen, sırasıyla birebir konveks ve yıldızıl fonksiyonlardır ve $\mathcal{S}(1) \supset \mathcal{C}(1)$ dir. $p \geq 2$ için $\mathcal{S}(p) \supsetneq \mathcal{C}(p)$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Lemma 3.3.1 $c \neq 0$ bir keyfi sabit olsun. Eğer $f(z) \in \mathcal{C}(p)$ ise bu durumda $F(z) = czf'(z) \in S(p)$, tersine $F(z) \in \mathcal{S}(p)$ ise $f(z) \in \mathcal{C}(p)$ olup

$$f(z) = c\int_0^z \frac{F(t)}{t}dt$$

şeklindedir.

İspat. Belirtilen $f(z)$ ve $F(z)$ fonksiyonları için

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = z\frac{cf'(z) + czf''(z)}{czf'(z)} = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

olur ve (3.3.5), (3.3.2) yi (3.3.4), (3.3.1) i gerektirir. Tersi de sağlandığından istenen gerçekleşir.

Şimdi birim dairede analitik olan $\mathcal{A}(p)$ sınıfının tanımını verelim.

Tanım 3.3.5 $\mathcal{A}(p)$, $\mathcal{U}$ birim dairesinde analitik ve

$$f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n z^n,\ a_p \neq 0,\ p \in \mathbb{N} \tag{3.3.6}$$

şeklindeki seri açılımına sahip fonksiyonların sınıfıdır.

Tanım 3.3.5 $f \in \mathcal{A}(p)$ fonksiyonunun p-değerli yıldızıl olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

olmasıdır. $\mathcal{U}$ da p-değerli yıldızıl $f(z) \in \mathcal{A}(p)$ fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{AS}(p)$ ile gösterilir.

Tanım 3.3.6 $f \in \mathcal{A}(p)$ fonksiyonunun p-değerli konveks olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathfrak{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>0$$

olmasıdır. $\mathcal{U}$ da p-değerli konveks $f(z) \in \mathcal{A}(p)$ fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{AC}(p)$ ile gösterilir.

Lemma 3.3.2 $f(z) \in \mathcal{A}(p)$ ve K reel sınırlı sabit olmak üzere

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>K \qquad (3.3.7)$$

olsun. Bu durumda $0<|z|<1$ halkasında

$$f(z) \neq 0$$

dır.

İspat. $0<|\alpha|<1$ olacak şekilde bir α noktasında $f(z)$, $n.(n \geq 1)$mertebeden sıfıra sahip olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu $g(\alpha) \neq 0$ olmak üzere

$$f(z)=(z-\alpha)^n g(z)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}\frac{zf'(z)}{f(z)} &= \frac{z\left[n(z-\alpha)^{n-1}g(z)+(z-\alpha)^n g'(z)\right]}{(z-\alpha)^n g(z)} \\ &= \frac{nz}{(z-\alpha)}+\frac{zg'(z)}{g(z)}\end{aligned}$$

elde edilir. Kısa bir hesaplamayla

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} &= \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)\left[\frac{nz}{(z-\alpha)}+\frac{zg'(z)}{g(z)}\right] \\ &= \lim_{z\to\alpha}\left[nz+(z-\alpha)\frac{zg'(z)}{g(z)}\right] \neq 0\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ fonksiyonun $z=\alpha$ da basit kutbu olduğunu gösterir ki bu (3.3.7) ile çelişir. Çünkü (3.3.7) , $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ fonksiyonun $0<|z|<1$ halkasında kutup noktası olmadığını gösterir. O halde $0<|z|<1$ halkasında $f(z) \neq 0$ dır.

Lemma 3.3.3 $f(z) \in \mathcal{A}(p)$ ve K reel sınırlı sabit olmak üzere

$$\mathfrak{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > K \tag{3.3.8}$$

olsun. Bu durumda $0 < |z| < 1$ halkasında

$$f'(z) \neq 0$$

dır

İspat. Lemma 3.3.2 nin ispatına benzer olarak yapılır.

Lemma 3.3.4 $f(z) \in \mathcal{AS}(p)$ olsun. Bu durumda

$$F(z) = c\int_0^z f(t)\,dt \in \mathcal{AS}(p+1)$$

veya eşdeğer olarak

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{zF'(z)}{F(z)}\right) > 0 \quad (z \in \mathcal{U})$$

dır.

İspat. $D(z) = zF'(z) = zf(z)$ ve $N(z) = F(z)$ olsun. $z = 0$ için $f(z) = 0$ olduğundan $N(0) = D(0) = 0$ ve $D(z)$, orjine göre $p+1-$ değerli yıldızıl bir fonksiyondur, çünkü $f(z) \in \mathcal{AS}(p)$ olmak üzere

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{zD'(z)}{D(z)}\right) = \mathfrak{Re}\left(\frac{z\left[zf(z)\right]'}{zf(z)}\right) = 1+\mathfrak{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

dır.

Diğer yandan basit bir işlem ile

$$\begin{aligned}\mathfrak{Re}\left(\frac{D'(z)}{N'(z)}\right) &= \mathfrak{Re}\left(\frac{[zf(z)]'}{F'(z)}\right) = \mathfrak{Re}\left(\frac{f(z)+zf'(z)}{f(z)}\right)\\ &= 1+\mathfrak{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{N'(z)}{D'(z)}\right) > 0$$

elde edilir. Lemma 2.4 ün koşulları sağlandığına göre

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{N(z)}{D(z)}\right) > 0$$

olur ki bu da

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{zF'(z)}{F(z)}\right) > 0 \quad (z \in \mathcal{U})$$

oluğunu, yani $F(z) \in \mathcal{AS}(p+1)$ olmasını gerektirir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.3.5 $f(z) \in \mathcal{AS}(p)$ ise bu durumda $f(z), \mathcal{U}$ da p-değerlidir.

İspat. $f(z) \in \mathcal{AS}(p)$ olduğundan $\mathfrak{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$ olup Lemma 3.3.2 göz önüne alınırsa $0 < |z| < 1$ halkasında $f(z) \neq 0$ dır. Bu ise $f(z)$ nin sadece $z = 0$ da p.mertebeden sıfırı olduğunu gösterir. O halde keyfi bir $r, 0 < r < 1$ sayısı için

$$\int_0^{2\pi} \mathfrak{Re}\left(re^{i\theta}\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right) d\theta = 2\pi p$$

olur. Tanım 3.3.4 ten $f(z)$ nin, $\mathcal{U}$ da p-değerli olduğunu gösterir.

Lemma 3.3.6 $f(z) \in \mathcal{AC}(p)$ ise bu durumda $f(z)$, $|z| < 1$ de p-değerlidir.

İspat. $f(z) \in \mathcal{AC}(p)$ olduğundan $\mathfrak{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0$ olup Lemma 3.3.3 e göre $0 < |z| < 1$ halkasında $f'(z) \neq 0$ dır. Bu ise $f'(z)$ nin sadece $z = 0$ da $p-1$.mertebeden sıfırı olduğunu gösterir. O halde keyfi bir $r, 0 < r < 1$ sayısı için

$$\int_0^{2\pi} \mathfrak{Re}\left(1 + re^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right) d\theta = 2\pi p$$

olur. Tanım 3.3.3 ten $f(z)$ nin, $\mathcal{U}$ da p-değerli olduğunu çıkarılabilir.

Tanım 3.3.7 $f \in \mathcal{A}(p)$ fonksiyonunun p-değerli α-mertebeden yıldızıl olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha$$

olmasıdır. $\mathcal{U}$ da p-değerli yıldızıl $f(z) \in \mathcal{A}(p)$ fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{AS}(p, \alpha)$ ile gösterilir.

Tanım 3.3.8 $f \in \mathcal{A}(p)$ fonksiyonunun p-değerli α-mertebeden konveks olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathfrak{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\alpha$$

olmasıdır. $\mathcal{U}$ da p-değerli konveks $f(z) \in \mathcal{A}(p)$ fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{AC}(p,\alpha)$ ile gösterilir.

Uyarı 3.5.1 Açıktır ki $\alpha = 0$ için $\mathcal{MS}^*(p;\alpha) = \mathcal{MS}^*(p)$ ve $\mathcal{MC}(p;\alpha) = \mathcal{MC}(p)$ dır. Ve $\mathcal{MS}^*(p;\alpha) \subset \mathcal{MS}^*(p)$ ve $\mathcal{MC}(p;\alpha) \subset \mathcal{MC}(p)$ dir.Ayrıca $p = 1$ için $\mathcal{MS}^*(1;\alpha) = \mathcal{MS}^*(\alpha)$ ve $\mathcal{MC}(1;\alpha) = \mathcal{MC}(\alpha)$ dır.

Tanım 3.3.9 (3.3.5) de $a_p = 1$ olması durumunda elde edilen $\mathcal{A}(p)$ sınıfının p-değerli altsınıfını $\widetilde{\mathcal{A}}(p)$ ile gösterelim.

Açıktır ki yukarıdaki tüm tanımlamalar ve lemmalar bu sınıf için de geçerlidir.

Teorem 3.3.1 $f(z) \in \widetilde{\mathcal{A}}(p)\,, 0 \leq \alpha < p$, $p \in \mathbb{N}$ ve $z \in \mathcal{U}$ olsun. O zaman

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-p\right| \leq p-\alpha \;\Rightarrow\; \mathfrak{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\alpha$$

dır.

Teorem 3.3.2 $f(z) \in \widetilde{\mathcal{A}}(p)\,, 0 \leq \alpha < p$, $p \in \mathbb{N}$ ve $z \in \mathcal{U}$ olsun. O zaman

$$\left|1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}-p\right| \leq p-\alpha \quad\Rightarrow\quad \mathfrak{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\alpha$$

dır.

Teorem 3.3.3 $f(z) \in \widetilde{\mathcal{A}}(p)\,, 0 \leq \alpha < p$, $p \in \mathbb{N}$ ve $z \in \mathcal{U}$ olsun. O zaman

$$\left|\frac{f'(z)}{z^{p-1}}-p\right| \leq p-\alpha \quad\Rightarrow\quad \mathfrak{Re}\left(\frac{f'(z)}{z^{p-1}}\right)>\alpha$$

dır.

3.4 Meromorf Fonksiyonların Yıldızıllığı ve Konveksliği

$z = 0$ noktasında kutup noktası bulunan ve $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ delinmiş birim dairesinde analitik ve univalent olan fonksiyonların yıldızıllık ve konvekslik tanımları aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 3.4.1 Eğer $\mathcal{U}$ birim dairedesinde meromorf bir $f(z)$ fonksiyonu

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) < 0$$

ve

$$\int_0^{2\pi} \mathfrak{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) d\theta = -2\pi \quad \left(z = re^{i\theta}; \rho < r < 1\right)$$

özelliklerini sağlıyor ise $f(z)$ fonksiyonuna $\mathcal{U}$ da univalent meromorf yıldızıl fonksiyon denir.

Tanım 3.4.2 Eğer $\mathcal{U}$ birim dairedesinde meromorf bir f fonksiyonu

$$\mathfrak{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < 0$$

ve

$$\int_0^{2\pi} \mathfrak{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) d\theta = -2\pi \quad \left(z = re^{i\theta}; \rho < r < 1\right)$$

özelliklerini sağlıyor ise $f(z)$ fonksiyonuna $\mathcal{U}$ da univalent meromorf konveks fonksiyon denir.

Şimdi literatürde sıkça araştırılan univalent meromorf fonksiyonların $\mathcal{M}$ sınıfının tanımını, bu sınıfın yıldızıl ve konveks olan altsınıflarının tanımını ve birbirleriyle olan ilişkilerini ifade eden lemma ve teoremleri verelim.

Tanım 3.4.3 $\mathcal{D}$ bölgesinde analitik ve univalent olan

$$f(z) = \frac{1}{z} + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \cdots = \frac{1}{z} + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \quad (n \in \mathbb{N})$$

şeklindeki seri açılımlı fonksiyonların sınıfı $\mathcal{M}(n)$ ile gösterilir ve bu tür fonksiyonlar meromorf fonksiyondur. Bu tür foksiyonlar $z = 0$ noktasında singüler noktaya sahip olup ve eğer, ilgili seri açılımındaki bütün a_k katsayıları negatif ise ilgili seri açılımına sahip olan fonksiyonlara negatif katsayılı meromorf fonksiyonlar, pozitif ise pozitif katsayılı meromorf fonksiyonlar ve kompleks ise ilgili fonksiyonlara kompleks katsayılı meromorf fonksiyonlar adı verilir.

$n = 0$ alınırsa $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0$ sınıfını elde edilir. Bu sınıf ile ilgili tanım ve teoremler aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.4.4 Eğer bir $f(z) \in \mathcal{M}$ fonksiyonu birebir ve $f(\mathcal{D})$ nin tümleyeni orjine göre yıldızıl ise $f\ (z)$ fonksiyonuna yıldızıldır denir.(Miller vd. 2000)

Tanım 3.4.5 Eğer $\mathcal{D}$ de $f(z) \neq 0$ ve

$$\mathfrak{Re}\left(-\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \quad (z \in \mathcal{D})$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, bu durumda $f(z) \in \mathcal{M}$ fonksiyonuna $\mathcal{D}$ de orjine göre yıldızıldır denir. Meromorf yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{MS}^*$ ile gösterilir.

Tanım 3.4.6 Eğer bir $f(z) \in \mathcal{M}$ fonksiyonu birebir ve $f(\mathcal{D})$ nin tümleyeni orjine göre konveks ise $f\ (z)$ fonksiyonuna konvekstir denir.

Tanım 3.4.7 Eğer $\mathcal{D}$ de $f'(z) \neq 0$ ve

$$\mathfrak{Re}\left(-\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right) > 0 \quad (z \in \mathcal{D})$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, $f(z)$ fonksiyonuna $\mathcal{D}$ de konvekstir denir. Meromorf konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{MC}$ ile gösterilir.

Tanım 3.4.8 Eğer $\mathcal{D}$ de $f(z) \neq 0$ ve

$$\mathfrak{Re}\left(-\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \quad (z \in \mathcal{D})$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, $f(z)$ fonksiyonuna $\alpha\,(0 \leq \alpha < 1)$ mertebeden meromorf yıldızıl fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{MS}^*(\alpha)$ ile gösterilir.

Tanım 3.4.9 Eğer $\mathcal{D}$ de $f'(z) \neq 0$ ve

$$\mathfrak{Re}\left(-\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right) > \alpha \quad (z \in \mathcal{D})$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, $f(z)$ fonksiyonuna $\alpha\,(0 \leq \alpha < 1)$ mertebeden meromorf konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf ise $\mathcal{MC}(\alpha)$ ile gösterilir.

Açıktır ki $\alpha = 0$ için $\mathcal{MS}^*(\alpha) = \mathcal{MS}$ ve $\mathcal{MC}(\alpha) = \mathcal{MC}$ dır. Diğer yandan $\mathcal{MS}^*(\alpha) \subset \mathcal{MS}$ ve $\mathcal{MC}(\alpha) \subset \mathcal{MC}$ dir.

Lemma 3.4.1 $f(z) \in \mathcal{MC}(\alpha)$ ancak ve ancak $-zf'(z) \in \mathcal{MS}^*(\alpha)$ dır.

Lemma 3.4.2 $p(z), \mathcal{U}$ da analitik, $p(0) = 1$ ve $\alpha < 0$ olmak üzere

$$\mathfrak{Re}\left(p(z) - \frac{zp'(z)}{p(z)}\right) > \frac{\alpha(3-2\alpha)}{2(1-\alpha)}, \quad z \in \mathcal{U}$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda $\mathcal{U}$ da $\mathcal{R}e\{p(z)\} > 0$ olur.

İspat. $w(z), \mathcal{U}$ da analitik ve $w(0) = 0$ olmak üzere

$$p(z) = (1-\alpha)\frac{1+w(z)}{1-w(z)} + \alpha \tag{3.4.1}$$

olsun. Her $z \in \mathcal{U}$ için $|w(z)| < 1$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Eğer $|z| < |z_0|$ eşitsizliğini sağlayan z ler için $|w(z)| < 1$ ve $|w(z_0)| = 1$ olacak şekilde bir $z_0 \in \mathcal{U}$ varsa bu durumda Lemma 2.2 den $z_0 w'(z_0) = kw(z_0)$, $k \geq 1$ elde edilir. $w(z_0) = e^{i\theta}$ yazılırsa, (3.4.1) den

$$\begin{aligned}
\frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} &= \frac{\frac{2(1-\alpha)z_0 w'(z_0)}{(1-w(z_0))^2}}{(1-\alpha)\frac{1+w(z)}{1-w(z)} + \alpha} \\
&= \frac{\frac{2(1-\alpha)ke^{i\theta}}{\left(1-e^{ii\theta}\right)^2}}{(1-\alpha)\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} + \alpha} \\
&= \frac{\frac{2(1-\alpha)k}{2(1-\cos\theta)}}{(1-\alpha)\frac{2i\sin\theta}{2(1-\cos\theta)} + \alpha} \\
&= \frac{-(1-\alpha)k}{\alpha(1-\cos\theta) + i(1-\alpha)\sin\theta} \\
&= \frac{-(1-\alpha)k\left(\alpha(1-\cos\theta) - i(1-\alpha)\sin\theta\right)}{\alpha^2(1-\cos\theta)^2 + (1-\alpha)^2\sin^2\theta}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\mathcal{R}e\left(\frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)}\right) = \frac{-(1-\alpha)k\alpha(1-\cos\theta)}{\alpha^2(1-\cos\theta)^2 + (1-\alpha)^2\sin^2\theta} \tag{3.4.2}$$

olduğu elde edilir.

$1 - \cos\theta = t$ denirse $0 \leq t \leq 2$ olur ve

$$g(t) = \frac{t}{\alpha^2 t^2 + (1-\alpha)^2(2t - t^2)}$$

şeklinde yazılırsa, (3.4.2) şu şekilde ifade edilebilir;

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)}\right) = -(1-\alpha)\alpha k g\left(t\right)$$

dir. Basit bir işlem ile $g\left(t\right)$ fonksiyonunun minimum değerini $t = 0$ noktasında aldığı gösterilebilir ve

$$\lim_{t\to 0} g\left(t\right) = \frac{1}{2\left(1-\alpha\right)^2}$$

olur. Böylelikle

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)}\right) \geq \frac{-\alpha}{2\left(1-\alpha\right)}$$

ve

$$\mathfrak{Re}\left(p(z_0) - \frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)}\right) \leq \alpha + \frac{\alpha}{2\left(1-\alpha\right)} = \frac{\alpha\left(3-2\alpha\right)}{2\left(1-\alpha\right)}$$

elde edilir. Bu ise varsayımla çelişeceğinden her $z \in \mathcal{U}$ için $|w(z)| < 1$ elde edilir. $p(z)$ nin tanımından

$$\begin{aligned} p(z) &= (1-\alpha)\frac{1+w(z)}{1-w(z)} + \alpha \\ &\Rightarrow \mathfrak{Re}\left(\frac{1+w(z)}{1-w(z)}\right) = \mathfrak{Re}\left(\frac{p(z)-\alpha}{1-\alpha}\right) > 0 \\ &\Rightarrow \mathfrak{Re}\left(p(z)\right) > \alpha \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.4.2 nin uygulanması ile aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Teorem 3.4.1 $\alpha < 0$ olmak üzere $f\left(z\right) \in \mathcal{MC}\left(\frac{\alpha(3-2\alpha)}{2(1-\alpha)}\right)$ ise $f\left(z\right) \in \mathcal{MS}^*\left(\alpha\right)$ dır.

İspat. $p(z) = -\frac{zf'(z)}{f(z)}$ olsun. $p(0) = 1$ olduğu açıktır. Buradan

$$p(z) - \frac{zp'(z)}{p(z)} = -\left(1 + \frac{zf''\left(z\right)}{f'\left(z\right)}\right)$$

bulunur. Lemma 3.4.2 göz önüne alınırsa $\mathfrak{Re}\left(-\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha$, yani $f\left(z\right) \in MS^*\left(\alpha\right)$ elde edilir.

Teorem 3.4.1de $\beta = \frac{\alpha(3-2\alpha)}{2(1-\alpha)}$ alınırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır:

Sonuç 3.4.1 $f(z) \in \mathcal{M}$, $\mathcal{D}$ de $f(z) \neq 0$ ve $\beta < 0$ olmak üzere her $z \in \mathcal{U}$ için

$$\mathfrak{Re}\left(-\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right) > \beta$$

olsun. Bu durumda her $z \in \mathcal{U}$ için

$$-\mathfrak{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \frac{1}{4}\left(2\beta+3-\sqrt{4\beta^2-4\beta+9}\right)$$

elde edilir.

Sonuç 3.4.1 de eğer $\beta \to 0$ alınır ise şu sonuç elde edilir:

Sonuç 3.4.2 $f(z) \in \mathcal{MC}(0)$ ise bu durumda $f(z) \in \mathcal{MS}^*(0)$ olur.

Uyarı 3.4.1 $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ olsun. $\mathcal{D}$ de $f(z) \neq 0$ olduğu görülür. Diğer yandan

$$-\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1+z}{1-z}$$

ve

$$-\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) = \frac{1+z^2}{1-z^2}$$

bulunur.

Uyarı 3.4.2 Sonuç 2 den, eğer f fonksiyonu 0 mertebeden meromorf konveks fonksiyon ise bu durumda en az 0 mertebeden meromorf yıldızıl bir fonksiyondur.

3.5 p-Değerli Meromorf Fonksiyonların Yıldızıllığı ve Konveksliği

Tanım 3.5.1 Eğer $\mathcal{U}$ birim dairesinde meromorf bir $f(z)$ fonksiyonu olsun. Eğer $f(z)$, $|z| = r$, $\rho < r < 1$ çemberlerini orjine göre yıldızıl bir eğriye dönüştürüyorsa ve bu eğri üzerindeki bir noktayı orjine birleştiren vektör $2\pi p$ açılık bir sürekli dönüş yapacak şekilde bir $0 < \rho < 1$ sayısı var ise bu $f(z)$ fonksiyonuna p-değerli yıldızıl bir fonksiyondur denir. Analitik olarak ise f fonksiyonunun şu özellikleri sağlaması gerekmektedir:

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) < 0$$

ve

$$\int_0^{2\pi} \mathfrak{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) d\theta = -2\pi p \quad \left(z = re^{i\theta}; \rho < r < 1\right)$$

dir .

Tanım 3.5.2 Eğer $\mathcal{U}$ birim dairesinde meromorf bir $f\ (z)$ fonksiyonu

$$\mathfrak{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < 0$$

ve

$$\int_0^{2\pi} \mathfrak{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) d\theta = -2\pi p \quad \left(z = re^{i\theta}; \rho < r < 1\right)$$

özelliklerini sağlıyor ise $f\ (z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ da p-değerli meromorf konveks fonksiyondur denir.

Şimdi literatürde sıkça kullanılan p-değerli meromorf fonksiyonların bir sınıfını ve bu sınıftaki fonksiyonların yıldızıllık ve konveksliklik tanımlarını verelim.

Tanım 3.5.3 $\mathcal{D}$ bölgesinde analitik ve p-değerli,

$$f(z) = \frac{1}{z^p} + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \quad (p \in \mathbb{N}) \tag{3.4.3}$$

şeklindeki seri açılıma sahip fonksiyonların sınıfı da $\mathcal{M}(p)$ ile gösterilir. Bu tür foksiyonlar da $z = 0$ noktasında p.mertebeden singüler noktaya sahiptir. Eğer ilgili seri açılımındaki bütün a_k katsayıları negatif ise ilgili seri açılımına sahip olan fonksiyonlara negatif katsayılı p-değerli meromorf fonksiyonlar, pozitif ise pozitif katsayılı p-değerli meromorf fonksiyonlar ve kompleks ise ilgili fonksiyonlara kompleks katsayılı p-değerli meromorf fonksiyonlar adı verilir

Tanım 3.5.4 Eğer $\mathcal{D}$ de $f\ (z) \neq 0$ ve

$$\mathfrak{Re}\left(-\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \quad (z \in \mathcal{D})$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, bu durumda $f\ (z) \in \mathcal{M}\ (p)$ fonksiyonuna $\mathcal{D}$ de orjine göre yıldızıldır denir. $\mathcal{U}$ birim dairesinde p-değerli meromorf yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{MS}^*(p)$ ile gösterilir.

Tanım 3.5.5 Eğer $\mathcal{D}$ de $f'(z) \neq 0$ ve

$$\mathfrak{Re}\left(-\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right) > 0 \quad (z \in \mathcal{D})$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, $f(z)$ fonksiyonuna $\mathcal{U}$ da p-değerli meromorf konveks fonksiyon denir. $\mathcal{U}$ birim dairesinde p-değerli meromorf konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{MC}(p)$ ile gösterilir.

Tanım 3.5.6 Eğer $\mathcal{D}$ de $f(z) \neq 0$ ve

$$\mathfrak{Re}\left(-\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \quad (z \in \mathcal{D})$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, $f(z)$ fonksiyonuna $\mathcal{U}$ da $\alpha\,(0 \leq \alpha < p)$ mertebeden p-değerli meromorf yıldızıl fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{MS}^*(p,\alpha)$ ile gösterilir.

Tanım 3.5.7 Eğer $\mathcal{D}$ de $f'(z) \neq 0$ ve

$$\mathfrak{Re}\left(-\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right) > \alpha \quad (z \in \mathcal{D})$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, $f(z)$ fonksiyonuna $\mathcal{U}$ da $\alpha\,(0 \leq \alpha < p)$ mertebeden p-değerli meromorf konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf ise $\mathcal{MC}(p;\alpha)$ ile gösterilir.

Uyarı 3.5.1 Açıktır ki $\alpha = 0$ için $\mathcal{MS}^*(p;\alpha) = \mathcal{MS}^*(p)$ ve $\mathcal{MC}(p;\alpha) = \mathcal{MC}(p)$ dır. Ve $\mathcal{MS}^*(p;\alpha) \subset \mathcal{MS}^*(p)$ ve $\mathcal{MC}(p;\alpha) \subset \mathcal{MC}(p)$ dir.Ayrıca $p = 1$ için $\mathcal{MS}^*(1;\alpha) = \mathcal{MS}^*(\alpha)$ ve $\mathcal{MC}(1;\alpha) = \mathcal{MC}(\alpha)$ dır.

Dikkat edilirse Tanım 3.4.4 - Tanım 3.4.9 da kullanılan fonksiyonlar $\mathcal{D}$ de analitik olmasına rağmen, ilgili tanımlardaki bütün rasyonel formdaki kompleks fonksiyonlar $z = 0$ kaldırılabilir singüler noktaya sahip olduğundan literatürde bu tanımlarda $z \in \mathcal{D}$ yerine $z \in \mathcal{U}$ da alınmaktadır.

Lemma 3.5.1 $f(z) \in \mathcal{MC}(\alpha)$ ancak ve ancak $-zf'(z)/p \in \mathcal{MS}^*(\alpha)$ dır.

Geometrik fonksiyonların özellikleri açısından üç gerektirme sırasıyla $\mathcal{M}(p)$ sınıfından olan fonksiyonların α mertebeden yıldızıllığı, α mertebeden konveksliği ve α mertebeden konvekse yakınlığı ile ilgili olan ve literatürde sıkça kullanılan sonuçlardır.

Teorem 3.5.1 $f(z) \in \mathcal{M}(p), 0 \leq \alpha < p$, $p \in \mathbb{N}$ ve $z \in \mathcal{U}$ olsun. O zaman

$$\left| -\frac{zf'(z)}{f(z)} - p \right| \leq p - \alpha \;\Rightarrow\; -\mathfrak{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha$$

dır.

Teorem 3.5.2 $f(z) \in \mathcal{M}(p), 0 \leq \alpha < p$, $p \in \mathbb{N}$ ve $z \in \mathcal{U}$ olsun. O zaman

$$\left| -\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) - p \right| \leq p - \alpha \quad \Rightarrow \quad -\mathfrak{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha$$

dır.

Teorem 3.5.3 $f(z) \in \mathcal{M}(p), 0 \leq \alpha < p$, $p \in \mathbb{N}$ ve $z \in \mathcal{U}$ olsun. O zaman

$$\left| -\frac{f'(z)}{z^{p-1}} - p \right| \leq p - \alpha \quad \Rightarrow \quad -\mathfrak{Re}\left(\frac{f'(z)}{z^{p-1}}\right) > \alpha$$

dır.

4. p-DEĞERLİ MEROMORF YILDIZIL VE KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI KRİTERLER

Tezin orjinal kısmını oluşturan bu bölümde $\mathcal{M}(p)$ sınıfındaki fonksiyonların hem geometrik hem de analitik fonksiyonlar teorisine yönelik bazı kriterleri oluşturulmuştur. Bunlar gerçekleştirilirken çalışmanın kapsamını geniş tutmak için ilgili fonksiyonarın q.mertebeden türevleri göz önüne alınmaktadır. Li- teratürde, $\mathcal{A}(p)$ sınıfındaki bir fonksiyonun q.mertebeden (adi) türevini ifade eden $f^{(q)}(z)$ şeklindeki adi türev operatörü, her $p \geq q$, $p \in \mathbb{N}$ ve $q \in \mathbb{N}_0$ koşulunu sağlayan paremetreleri için

$$f^{(q)}(z) = \frac{p!}{(p-q)!} z^{p-q} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} a_k z^{k-q} \tag{4.1.1}$$

şeklinde tanımlanır. Hem bu operatörün kullanıldığı hem de diğer bazı lineer operatörlerin kullanıldığı Cho ve Owa (2003) , Irmak ve Cho (2007) , Noor, K ve Noor, M (2003) , Saitoh (1991) çalışmaları bu konuya örnek olarak verilebilir. Bu araştırmada $\mathcal{M}(p)$ sınıfınlarındaki fonksiyonların q.mertebeden türevi, $p \geq q$, $p \in \mathbb{N}$ ve $q \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$f^{(q)}(z) = \frac{(p+q-1)!}{(p-1)!} (-1)^q z^{-p-q} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} a_k z^{k-q} \tag{4.1.2}$$

türev operatörü ile ifade edilir.

Aşağıda ispatı verilen teorem ve sonuçları Irmak vd. (2009) tarafından verilmiş olup hem yıldızıl hem de konveks fonksiyonlar için önemli kriterler içermektedir.

Teorem 4.1.1 $f(z) \in \mathcal{M}(p)$ ve $0 \leq \lambda \leq 1, p > q, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $\mathcal{F}(z)$ fonksiyonu

$$\mathcal{F}(z) = (1-\lambda) f^{(q)}(z) + \lambda z f^{(1+q)}(z) \quad (z \in \mathcal{D}) \tag{4.1.3}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $0 \leq \alpha < p+q$ olmak üzere

$$\mathfrak{Re} \left\{ \frac{1 + q + \dfrac{z\mathcal{F}''(z)}{\mathcal{F}'(z)} + p}{q + \dfrac{z\mathcal{F}'(z)}{\mathcal{F}(z)} + p} \right\} > 1 - \frac{1}{2(p+q) - \alpha} \quad (z \in \mathcal{U}) \tag{4.1.4}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, bu durumda

$$-\mathfrak{Re} \left(\frac{z\mathcal{F}'(z)}{\mathcal{F}(z)} \right) > \alpha \tag{4.1.5}$$

ve

$$\mathfrak{Re}\left\{\frac{q+\dfrac{z\mathcal{F}'(z)}{\mathcal{F}(z)}+p}{1+q+\dfrac{z\mathcal{F}''(z)}{\mathcal{F}'(z)}+p}\right\}<\frac{1}{1-\frac{1}{2(p+q)-\alpha}}\quad(z\in\mathcal{U})\tag{4.1.6}$$

olur. (Irmak, Tınaztepe, Tuneski, Şan 2009)

İspat. $f(z)\in\mathcal{M}(p)$ olsun. (4.1.1) deki türev operatörü ve (4.1.3) deki $\mathcal{F}(z)$ nin tanımından,

$$\begin{aligned}\frac{z\mathcal{F}'(z)}{\mathcal{F}(z)} &= \frac{zf^{(1+q)}(z)+\lambda z^2 f^{(2+q)}(z)}{(1-\lambda)\,f^{(q)}(z)+\lambda z f^{(1+q)}(z)}\\ &= \frac{(p+q)\,\phi(q;\lambda;p)\,(-1)^{1+q}+\sum_{k=p+1}^{\infty}(k-q)\,\psi(q;\lambda;k)\,a_k z^{k+p}}{\phi(q;\lambda;p)\,(-1)^{q}+\sum_{k=p+1}^{\infty}\psi(q;\lambda;k)\,a_k z^{k+p}}\end{aligned}$$

elde edillir. Burada

$$\phi(q;\lambda;p):=\frac{(p+q-1)!\,[1-\lambda(p+q+1)]}{(p-1)!}$$

ve

$$\psi(q;\lambda;k):=\frac{k!\,[1+\lambda(k-q-1)]}{(k-q)!}$$

$$(k\geq p+1;p>q;p\in\mathbb{N};q\in\mathbb{N}_0)$$

dir. Şimdi bir $w(z)$ fonksiyonu şu şekilde tanımlansın:

$$-q-\frac{z\mathcal{F}'(z)}{\mathcal{F}(z)}-p=(p+q-\alpha)\,w(z)\qquad(z\in\mathcal{U}).\tag{4.1.7}$$

İlgili $w(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ da analitik olduğu ve $w(0)=0$ koşulunu sağladığı görülür. (4.1.7) deki ifadeden

$$\frac{-\dfrac{\mathcal{F}'(z)}{\mathcal{F}(z)}+z\left[\dfrac{\mathcal{F}''(z)\mathcal{F}(z)-[\mathcal{F}'(z)]^2}{[\mathcal{F}(z)]^2}\right]}{-\dfrac{z\mathcal{F}'(z)}{\mathcal{F}(z)}}=\frac{(p+q-\alpha)\,zw'(z)}{p+q+(p+q-\alpha)\,w(z)}$$

eşitliğini ve bazı düzenlemeler sonucunda

$$-1-q-\frac{z\mathcal{F}''(z)}{\mathcal{F}'(z)}-p=(p+q-\alpha)\,w(z)\left[1-\frac{zw'(z)}{w(z)}\frac{1}{p+q+(p+q-\alpha)\,w(z)}\right]$$

ve

$$\begin{aligned}
1-\frac{1+q+\dfrac{z\mathcal{F}''(z)}{\mathcal{F}'(z)}+p}{(p+q-\alpha)\,w(z)} &= 1-\frac{1+q+\dfrac{z\mathcal{F}''(z)}{\mathcal{F}'(z)}+p}{q+\dfrac{z\mathcal{F}'(z)}{\mathcal{F}(z)}+p} \\
&= \frac{zw'(z)}{w(z)}\cdot\frac{1}{p+q+(p+q-\alpha)\,w(z)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada bu karmaşık yapıdan kurtulmak için bir $\mathcal{G}(z)$ fonksiyonu da

$$\mathcal{G}(z):=1-\frac{1+q+\dfrac{z\mathcal{F}''(z)}{\mathcal{F}'(z)}+p}{q+\dfrac{z\mathcal{F}'(z)}{\mathcal{F}(z)}+p}=\frac{zw'(z)}{w(z)}\frac{1}{p+q+(p+q-\alpha)\,w(z)} \qquad (4.1.8)$$

şekilde tanımlansın.

Şimdi

$$\max\{|w(z)|:|z|\leq|z_0|\}=|w(z_0)|=1$$

koşulunu sağlayacak şekilde bir $z_0\in\mathcal{U}$ var olduğunu kabul edelim. Lemma 2.2 ve $w(z_0)=e^{i\theta}$ eşitliği göz önüne alınır ise (4.1.8) den

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Re}\{\mathcal{G}(z_0)\} &= \mathfrak{Re}\left\{\frac{zw'(z_0)}{w(z_0)}\cdot\frac{1}{p+q+(p+q-\alpha)\,w(z_0)}\right\} \\
&= c\,\mathfrak{Re}\left\{\frac{1}{p+q+(p+q-\alpha)\,e^{i\theta}}\right\} \\
&\geq \frac{1}{2(p+q)-\alpha}
\end{aligned}$$

eşitsizliği veya eşdeğer olarak

$$\mathfrak{Re}\left\{1-\frac{1+q+\dfrac{z\mathcal{F}''(z)}{\mathcal{F}'(z)}+p}{q+\dfrac{z\mathcal{F}'(z)}{\mathcal{F}(z)}+p}\right\}\leq 1-\frac{1}{2(p+q)-\alpha}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise (4.1.5) ile çelişki oluşturur. Bu da her $z\in\mathcal{U}$ için

$|w(z)| < 1$ olmasını gerektirir. (4.1.7) deki kapalı formdaki $w(z)$ nin tanımından

$$\left| q + \frac{z\mathcal{F}'(z)}{\mathcal{F}(z)} + p \right| = |(p+q-\alpha)\, w(z)| = (p+q-\alpha)\, |w(z)| < p+q-\alpha$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem 3.5.1 gereğince

$$\alpha < -\mathfrak{Re}\left(\frac{z\mathcal{F}'(z)}{\mathcal{F}(z)}\right)\left(= -\mathfrak{Re}\left(\frac{z\left[(1-\lambda)\, f^{(q)}(z) + \lambda z f^{(1+q)}(z)\ \right]'}{(1-\lambda)\, f^{(q)}(z) + \lambda z f^{(1+q)}(z)}\right)\right)$$

$$(z \in \mathcal{U}, 0 \le \alpha < p+q; q \in \mathbb{N}_0)$$

bulunur. Diğer yandan herhangi bir $\mathfrak{Re}\{g(z)\} > 0$ koşulunu sağlayan $g(z)$ fonksiyonu için

$$\mathfrak{Re}\,(g(z)) \cdot \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{g(z)}\right) < 1$$

genel sonucu gereği

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1+q+\dfrac{z\mathcal{F}''(z)}{\mathcal{F}'(z)}+p}{q+\dfrac{z\mathcal{F}'(z)}{\mathcal{F}(z)}+p}\right\} > 1 - \frac{1}{2(p+q)-\alpha} > 0$$

eşitsizliğinden

$$\mathfrak{Re}\left\{\frac{q+\dfrac{z\mathcal{F}'(z)}{\mathcal{F}(z)}+p}{1+q+\dfrac{z\mathcal{F}''(z)}{\mathcal{F}'(z)}+p}\right\} < \frac{1}{1-\frac{1}{2(p+q)-\alpha}}$$

eşitzilliği elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Önceden de belirtmiş olduğumuz gibi Teorem 4.1.1 deki parametrelerin uygun seçilmesi durumunda çok sayıda sonuçlar elde edilir. Bu sonuçların bazıları geometrik fonksiyonlar teorisi için önem arzederken diğer sonuçlarda analitik fonksiyonlar teorisi için önem taşır. Bu çalışmanın konusu gereğince sadece bazı sonuçların belirtilmesi ile yetineceğiz. Öncelikle Teorem 4.1.1 de $q = 0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.1 Herhangi bir $f(z) \in \mathcal{M}(p)$ fonksiyonu

$$\mathfrak{Re}\left\{\frac{1+\dfrac{z\left[(1-\lambda)\, f(z)+\lambda z f'(z)\right]''}{\left[(1-\lambda)\, f(z)+\lambda z f'(z)\right]'}+p}{\dfrac{z\left[(1-\lambda)\, f(z)+\lambda z f'(z)\right]'}{(1-\lambda)\, f(z)+\lambda z f'(z)}+p}\right\} > 1 - \frac{1}{2p-\alpha} \qquad (z \in \mathcal{U};\ 0 \le \alpha < p)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise, bu durumda

$$-\mathfrak{Re}\left\{\frac{z\left[(1-\lambda)f(z)+\lambda zf'(z)\right]'}{(1-\lambda)f(z)+\lambda zf'(z)}\right\}>\alpha \quad (z\in\mathcal{U};0\leq\alpha<p)$$

ve

$$\mathfrak{Re}\left\{\frac{\dfrac{z\left[(1-\lambda)f(z)+\lambda zf'(z)\right]'}{(1-\lambda)f(z)+\lambda zf'(z)}+p}{1+\dfrac{z\left[(1-\lambda)f(z)+\lambda zf'(z)\right]''}{\left[(1-\lambda)f(z)+\lambda zf'(z)\right]'}+p}\right\}<\frac{1}{1-\frac{1}{2p-\alpha}} \quad (z\in\mathcal{U};\ 0\leq\alpha<p)$$

olur.

Teorem 4.1.1 de $q=0$ ve $\lambda=0$ alarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.2 Herhangi bir $f(z)\in\mathcal{M}(p)$ fonksiyonu

$$\mathfrak{Re}\left\{\frac{1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}+p}{\dfrac{zf'(z)}{f(z)}+p}\right\}>1-\frac{1}{2p-\alpha} \quad (z\in\mathcal{U};\ 0\leq\alpha<p)$$

koşulunu sağlasın. O zaman

$$f(z)\in\mathcal{MS}^*(p;\alpha) \quad \text{ve}\ \mathfrak{Re}\left\{\frac{\dfrac{zf'(z)}{f(z)}+p}{1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}+p}\right\}<\frac{1}{1-\frac{1}{2p-\alpha}} \quad (z\in\mathcal{U};\ 0\leq\alpha<p)$$

dir.

Teorem 4.1.1 de $q=0$ ve $\lambda=1$ alarak aşağıdaki sonuç elde edelir.

Sonuç 4.1.3 Herhangi bir $f(z)\in\mathcal{M}(p)$ fonksiyonu

$$\mathfrak{Re}\left\{\frac{1+\dfrac{z\left(zf'(z)\right)''}{\left(zf'(z)\right)'}+p}{\dfrac{\left(zf'(z)\right)'}{f'(z)}+p}\right\}>1-\frac{1}{2p-\alpha} \quad (z\in\mathcal{U};\ 0\leq\alpha<p)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda

$$f(z) \in \mathcal{C}(p;\alpha) \quad \text{ve} \quad \mathfrak{Re}\left\{ \frac{\dfrac{(zf'(z))'}{f'(z)} + p}{1 + \dfrac{z\,(zf'(z))''}{(zf'(z))'} + p} \right\} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2p-\alpha}} \quad (z \in \mathcal{U};\ 0 \leq \alpha < p)$$

dir.

Aşağıdaki teoremler ve sonuçları Irmak vd. (2010) tarafından çalışılmış olup p-değerli meromorf fonksiyonlarun yıldızıllığı ve konveksliği ile ilgili önemli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Teorem 4.1.2 Herhangi bir $f(z) \in \mathcal{M}(p)$ fonksiyonu için

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{zf^{(1+q)}(z)}{f^{(q)}(z)} \right) < \frac{1}{2} - q \quad (z \in \mathcal{U}) \tag{4.1.9}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda

$$\mathfrak{Re}\left\{ z^{p+q} f^{(q)}(z) \right\} \begin{cases} > 0 & , \quad q \ \text{çift ise} \\ < 0 & , \quad q \ \text{tek ise} \end{cases} \tag{4.1.10}$$

olur.

İspat. $f(z) \in \mathcal{M}(p)$ olsun. $f(z)$ ye (4.1.1) de tanımlanan diferensiyel operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \frac{z^{p+q} f^{(q)}(z)}{\gamma(p,q)} &= 1 + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\Gamma(k,q)}{\gamma(p,q)} a_k z^{k+p} \\ &= 1 + \sum_{k=p+1}^{\infty} d_k z^{k+p} \\ &= 1 + d_{p+1} z^{2p+1} + d_{p+2} z^{2p+2} + \cdots \\ &= 1 + d_{p+1} z^{2p+1} + d_{p+2} z^{2p+2} + \cdots \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

elde edilir ve burada $\gamma(p,q)$ ve $\Gamma(k,q)$ sırasıyla

$$\gamma(p,q) := \frac{(p+q-1)!}{(p-1)!}(-1)^q \quad (p \geq q; p \in \mathbb{N}; q \in \mathbb{N}_0) \tag{4.1.12}$$

ve

$$\Gamma(k,q) := \frac{k!}{(k-q)!} \quad (k = p+1,\ p+2,\ \cdots\ ; p \geq q; p \in \mathbb{N}; q \in \mathbb{N}_0) \tag{4.1.13}$$

şekilde tanımlanır.

Yukarıda tanımlanan $w(z)$ fonksiyonu Lemma 2.3 deki formda olup $w(z) \not\equiv 0$ olacak şekilde $\mathcal{U}$ da analitiktir. (4.1.11) deki eşitliğin logaritmik türevini alınırsa

$$\frac{\left(\frac{z^{p+q}f^{(q)}(z)}{\gamma(p,q)}\right)'}{\frac{z^{p+q}f^{(q)}(z)}{\gamma(p,q)}} = \frac{w'(z)}{1+w(z)}$$

ve sonra küçük bir işlem yardımıyla

$$\begin{aligned}\frac{\frac{(p+q)z^{p+q-1}f^{(q)}(z)+z^{p+q}f^{(1+q)}(z)}{\gamma(p,q)}}{\frac{z^{p+q}f^{(q)}(z)}{\gamma(p,q)}} &= \frac{p+q}{z} + \frac{f^{(1+q)}(z)}{f^{(q)}(z)} \\ &= \frac{w'(z)}{1+w(z)}\end{aligned}$$

ve eşitliklerin her tarafını z ile çarpılırsa

$$p + \frac{zf^{(1+q)}(z)}{f^{(q)}(z)} + q \quad = \frac{zw'(z)}{1+w(z)} \tag{4.1.14}$$

$$(z \in \mathcal{U}; w(z) \neq -1)$$

elde edilir. Şimdi

$$\max\left\{|w(z)| : |z| \leq |z_0|\right\} = |w(z_0)| = 1$$

koşulunu sağlayacak şekilde bir $z_0 \in \mathcal{U}$ olduğunu varsayıp Lemma 2.2 yi göz önüne alalım. $w(z_0) = e^{i\theta}$ denilirse (4.1.14) den

$$\mathfrak{Re}\left(p + \frac{zf^{(1+q)}(z)}{f^{(q)}(z)} + q\bigg|_{z=z_0}\right) = \mathfrak{Re}\left(\frac{zw'(z)}{1+w(z)}\bigg|_{z=z_0}\right) = \frac{c}{2} \geq \frac{2p+1}{2}$$

bulunur. Fakat bu eşitsizlik teoremin (4.1.9) daki varsayımla çelişki oluşturur. O halde her $z \in \mathcal{U}$ için $|w(z)| < 1$ olmasını gerektirir. (4.1.11) deki $w(z)$ nin tanımından

$$\left|\frac{z^{p+q}f^{(q)}(z)}{\gamma(p,q)} - 1\right| = |w(z)| < 1$$

elde edilir. Bu ifade Teorem 3.5.1 dikkate alınırsa (4.1.10) gerektirmesi elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.3 $f(z) \in \mathcal{M}(n)$, $g(z) \in \mathcal{M}(m)$ ve $g(z)$ fonksiyonu

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{g^{(q)}(z)}{zg^{(1+q)}(z)}\right) > \alpha \quad (\alpha > 0; z \in \mathcal{U}; q \in \mathbb{N}_0) \tag{4.1.15}$$

koşunu sağlasın. Eğer

$$\left|\frac{f^{(1+q)}(z)}{g^{(1+q)}(z)}\right| < [1 + \alpha(m-n)] \cdot \frac{\gamma(n,q)}{\gamma(m,q)} \tag{4.1.16}$$

eşitsizliği sağlanıyor ise

$$\left|\frac{f^{(1+q)}(z)}{g^{(1+q)}(z)}\right| < \frac{\gamma(n,q)}{\gamma(m,q)} \quad (m > n; n, m \in \mathbb{N}) \tag{4.1.17}$$

olur.

İspat. $f(z) \in \mathcal{M}(n)$ ve $g(z) \in \mathcal{M}(m)$ olsun. Bu durumda ilgili fonksiyonların seri açılımları

$$f(z) = z^{-n} + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \quad \text{and} \quad g(z) = z^{-m} + \sum_{k=p+1}^{\infty} b_k z^k \tag{4.1.18}$$

şeklinde olacağı açıktır. $f(z)$ ve $g(z)$ ile (4.1.1) deki diferensiyel operatörün tanımından,

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma(m,q)}{\gamma(n,q)} \cdot \frac{f^{(q)}(z)}{g^{(q)}(z)} &= \frac{z^{-n-q} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\Gamma(k,q)}{\gamma(p,q)} a_k z^{k-q}}{z^{-m-q} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\Gamma(k,q)}{\gamma(p,q)} b_k z^{k-q}} \\
&= \frac{z^{-n-q}\left(1 + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\Gamma(k,q)}{\gamma(p,q)} a_k z^{k+n}\right)}{z^{-m-q}\left(1 + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\Gamma(k,q)}{\gamma(p,q)} b_k z^{k+m}\right)} \\
&= z^{m-n} \cdot \frac{1 + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\Gamma(k,q)}{\gamma(p,q)} a_k z^{k+n}}{1 + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\Gamma(k,q)}{\gamma(p,q)} b_k z^{k+m}} \\
&= z^{m-n} + c_{m-n+1} z^{m-n+1} + \cdots \in \mathcal{A}(m-n)
\end{aligned} \tag{4.1.19}$$

bulunur ve burada $\gamma(k,q)$ ve $\Gamma(p,q)$ sırasıyla (4.1.12) ve (4.1.13) ile tanımlanmış fonksiyonlardır. Şimdi $v(z)$ yi şu şekilde tanımlayalım:

$$\frac{\gamma(m,q)}{\gamma(n,q)}.\frac{f^{(q)}(z)}{g^{(q)}(z)} = v(z) \tag{4.1.20}$$

Açık olarak görülüyor ki $v(z)$, Lemma 2.3 deki fonksiyon tipinde olup $\mathcal{U}$ da analitiktir. (4.1.20) deki ifadenin önce logaritmik türevini alınırsa

$$\frac{\frac{\gamma(m,q)}{\gamma(n,q)}.\left[\frac{f^{(1+q)}(z)g^{(q)}(z)-f^{(q)}(z)g^{(1+q)}(z)}{\left[g^{(q)}(z)\right]^2}\right]}{\frac{\gamma(m,q)}{\gamma(n,q)}.\frac{f^{(q)}(z)}{g^{(q)}(z)}} = \frac{v'(z)}{v(z)}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitliğin her iki yanı

$$\frac{g^{(q)}(z)}{g^{(1+q)}(z)} \qquad (g(z) \in \mathcal{M}(m))$$

çarpılırsa

$$\begin{aligned}\left[\frac{f^{(1+q)}(z)}{f^{(q)}(z)} - \frac{g^{(1+q)}(z)}{g^{(q)}(z)}\right] \cdot \frac{g^{(q)}(z)}{g^{(1+q)}(z)} &= \frac{f^{(1+q)}(z)}{f^{(q)}(z)} \cdot \frac{g^{(q)}(z)}{g^{(1+q)}(z)} - 1 \\ &= \frac{v'(z)}{v(z)} \cdot \frac{g^{(q)}(z)}{g^{(1+q)}(z)}\end{aligned}$$

olduğu ve bir düzenleme ile

$$\frac{\gamma(m,q)}{\gamma(n,q)} \cdot \frac{f^{(1+q)}(z)}{g^{(1+q)}(z)} = v(z)\left(1 + \frac{zv'(z)}{v(z)} \cdot \frac{g^{(q)}(z)}{zg^{(1+q)}(z)}\right) \tag{4.1.21}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi

$$max\{|w(z)| \ : |z| \leq |z_0|\} = |w(z_0)| = 1$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bir $z_0 \in \mathcal{U}$ var olsun. O zaman, (4.1.21) eşitliği için Lemma 2.3 ve (4.1.15) göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\gamma(m,q)}{\gamma(n,q)} \cdot \frac{f^{(1+q)}(z)}{g^{(1+q)}(z)}\bigg|_{z=z_0}\right| &= \left|v(z)\left(1 + \frac{zv'(z)}{v(z)} \cdot \frac{g^{(q)}(z)}{zg^{(1+q)}(z)}\right)\bigg|_{z=z_0}\right| \\ &\geq 1 + \mathfrak{Re}\left(\frac{zv'(z)}{v(z)} \cdot \frac{g^{(q)}(z)}{zg^{(1+q)}(z)}\bigg|_{z=z_0}\right)\end{aligned}$$

$$= 1 + c \cdot \mathfrak{Re}\left(\frac{g^{(q)}(z)}{zg^{(1+q)}(z)}\bigg|_{z=z_0} \right)$$

$$\geq 1 + (m-n)\alpha \quad (\ c \geq m-n)$$

olur ki bu da (4.1.16) ile çelişki oluşturur. O halde, her $z \in \mathcal{U}$ için $|v(z)| < 1$ dir. Bu durumda ,

$$\left| \frac{\gamma(m,q)}{\gamma(n,q)} \cdot \frac{f^{(q)}(z)}{g^{(q)}(z)} \right| = |v(z)|$$

eşitliği

$$\left| \frac{f^{(1+q)}(z)}{g^{(1+q)}(z)} \right| < \frac{\gamma(n,q)}{\gamma(m,q)}$$

eşitisizliğini gerektirir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 4.1.4 $f(z) \in \mathcal{M}(n)$, $g(z) \in \mathcal{M}(m)$, $q < min\{n,m\}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}_0$ olsun ve

$$\mathfrak{Re}\left\{ z\left(\frac{f^{(1+q)}(z)}{f^{(q)}(z)} - \frac{g^{(1+q)}(z)}{g^{(q)}(z)} \right) \right\} < m - n + \frac{1}{2} \quad (z \in \mathcal{U}) \tag{4.1.22}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda

$$\mathfrak{Re}\left(z^{n-m} \frac{f^{(q)}(z)}{g^{(q)}(z)} \right) > 0 \quad (z \in \mathcal{U}) \tag{4.1.23}$$

dır.

İspat. $f(z) \in \mathcal{M}(n)$ ve $g(z) \in \mathcal{M}(m)$ fonksiyonları sırasıyla (4.1.18) de verilen fonksiyonlar gibi olsun. Bu durumda (4.1.19) daki eşitlikten

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(m,q)}{\gamma(n,q)} \cdot \frac{f^{(q)}(z)}{g^{(q)}(z)} &= z^{m-n}\left[1 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ \cdots\right] \\ &= z^{m-n}[1 + w(z)] \end{aligned} \tag{4.1.24}$$

şeklindeki bir $w(z)$ fonksiyonu tanımlansın.

O zaman bu $w(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{U}$ da analitik olduğu açıktır. (4.1.24) deki eşitliğin her iki tarafının logaritmik türevi alınırsa

$$\frac{\frac{\gamma(m,q)}{\gamma(n,q)} \left(\frac{f^{(q)}(z)}{g^{(q)}(z)} \right)'}{\frac{\gamma(m,q)}{\gamma(n,q)} \cdot \frac{f^{(q)}(z)}{g^{(q)}(z)}} = \frac{(m-n)\, z^{m-n-1}[1 + w(z)] + z^{m-n}w'(z)]}{z^{m-n}[1 + w(z)]}$$

olduğunu, küçük bir düzenleme ile ise

$$\begin{aligned}\frac{\frac{\gamma(m,q)}{\gamma(n,q)}\left(\frac{f^{(1+q)}(z)g^{(q)}(z)-f^{(q)}(z)g^{(1+q)}(z)}{\left[g^{(q)}(z)\right]^2}\right)}{\frac{\gamma(m,q)}{\gamma(n,q)}\cdot\frac{f^{(q)}(z)}{g^{(q)}(z)}} &= \frac{f^{(1+q)}(z)}{f^{(q)}(z)}-\frac{g^{(1+q)}(z)}{g^{(q)}(z)} \\ &= \frac{m-n}{z}+\frac{w'(z)}{1+w(z)}\end{aligned}$$

eşitliğini elde edilir. Eşitliklerin her tarafı z ile çarpılırsa

$$z\left(\frac{f^{(1+q)}(z)}{f^{(q)}(z)}-\frac{g^{(1+q)}(z)}{g^{(q)}(z)}\right)=m-n+\frac{zw'(z)}{1+w(z)} \tag{4.1.25}$$

bulunur.Yine

$$max\{|w(z)|\ :|z|\leq|z_0|\}=|w(z_0)|=1$$

eşitliğini sağlayacak şekilde $\mathcal{U}$ birim dairesinde bir z_0 elemanının var olduğunu kabul edelim.

O zaman Lemma 2.3 ve (4.1.25) den

$$\begin{aligned}\mathfrak{Re}\left[z\left(\frac{f^{(1+q)}(z)}{f^{(q)}(z)}-\frac{g^{(1+q)}(z)}{g^{(q)}(z)}\right)\Bigg|_{z=z_0}\right] &= m-n+c\cdot\Re e\left(\frac{zw'(z)}{1+w(z)}\right) \\ &= m-n+c\cdot\Re e\left(\frac{e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}\right) \\ &\geq m-n+\frac{c}{2}\end{aligned}$$

elde edilir. Fakat bu eşitsizlik ilgili lemmadaki $c=1$ için elde edilen sonuç teoremin (4.1.22) varsayımıyla çelişki oluşturur. O halde, bu durum her $z\in\mathcal{U}$ için $|v(z)|<1$ olmasını gerektirir. (4.1.22) deki

$$\frac{\gamma(m,q)}{\gamma(n,q)}\cdot\frac{f^{(q)}(z)}{g^{(q)}(z)}=z^{m-n}[1+w(z)]$$

eşitliğinden

$$\left|\frac{\gamma(m,q)}{\gamma(n,q)}z^{n-m}\frac{f^{(q)}(z)}{g^{(q)}(z)}-1\right|=|w(z)|<1$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem in sonucu gereği

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{\gamma(m,q)}{\gamma(n,q)}z^{n-m}\frac{f^{(q)}(z)}{g^{(q)}(z)}\right)>0$$

elde edilir. Burada

$$\frac{\gamma(m,q)}{\gamma(n,q)} > 0 \qquad (q < min\{n,m\}; n \in \mathbb{N}; m \in \mathbb{N}; q \in \mathbb{N}_0)$$

olduğundan

$$\mathfrak{Re}\left(z^{n-m}\frac{f^{(q)}(z)}{g^{(q)}(z)}\right) > 0 \quad (z \in \mathcal{U})$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.5 $f(z) \in \mathcal{M}(p)$, $p \geq q$ olsun ve

$$\mathfrak{Re}\left(p + \frac{zf^{(1+q)}(z)}{f^{(q)}(z)} + q\right)\begin{cases} \leq \frac{1}{2\delta}\ , \delta < 0 \text{ ise} \\ \geq \frac{1}{2\delta}\ , \delta > 0 \text{ ise} \end{cases} \qquad (z \in \mathcal{U}) \tag{4.1.26}$$

sağlansın. O zaman

$$\mathfrak{Re}\left\{\left(\frac{z^{p+q}f^{(q)}(z)}{\gamma(p,q)}\right)^{\delta}\right\} > 0 \quad (\delta \neq 0) \tag{4.1.27}$$

dır. $\gamma(p,q)$, (4.1.12) deki şekilde tanımlanmış fonksiyon olup yukarıdaki (4.1.27) deki kompleks kuvvetin değeri ise esas değeri olarak alınmıştır.

İspat. $f(z) \in \mathcal{M}(p)$ olsun. (4.1.11) eşitliğin göz önüne alınarak,

$$G(z) = \left(\frac{z^{p+q}f^{(q)}(z)}{\gamma(p,q)}\right)^{\delta} = 1 + w(z) \tag{4.1.28}$$

olacak şekildeki $\mathcal{U}$ da analitik bir $w(z)$ fonksiyonu kapalı formda tanımlansın. Dikkat edilirse, (4.1.1) den

$$\frac{z^{p+q}f^{(q)}(z)}{\gamma(p,q)} = 1 + \sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{\Gamma(k,q)}{\gamma(p,q)}a_k z^{k+p} \quad (\ f\,(z) \in \mathcal{M}\,(p))$$

şeklinde bir fonksiyon olup (4.1.28) deki $G(z)$ analitik fonksiyonun $z = 0$ komşuğundaki seri açılımı şu şekilde bulunur:

$$
\begin{aligned}
G'(z) &= \delta\left(\frac{z^{p+q}f^{(q)}(z)}{\gamma(p,q)}\right)^{\delta-1}\cdot\left(\frac{z^{p+q}f^{(q)}(z)}{\gamma(p,q)}\right)' \\
&= \delta\left(\frac{z^{p+q}f^{(q)}(z)}{\gamma(p,q)}\right)^{\delta-1}\left(1+\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{\Gamma(k,q)}{\gamma(p,q)}a_k z^{k+p}\right)' \\
&= \delta\left(\frac{z^{p+q}f^{(q)}(z)}{\gamma(p,q)}\right)^{\delta-1}\left(\sum_{k=p+1}^{\infty}(k+p)\frac{\Gamma(k,q)}{\gamma(p,q)}a_k z^{k+p-1}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G''(z) &= \delta(\delta-1)\left(\frac{z^{p+q}f^{(q)}(z)}{\gamma(p,q)}\right)^{\delta-2}\left(\sum_{k=p+1}^{\infty}(k+p)\frac{\Gamma(k,q)}{\gamma(p,q)}a_k z^{k+p-1}\right)+ \\
&\quad [\left(\frac{z^{p+q}f^{(q)}(z)}{\gamma(p,q)}\right)^{\delta-1}\left(\sum_{k=p+1}^{\infty}(k+p)(k+p-1)\frac{\Gamma(k,q)}{\gamma(p,q)}a_k z^{k+p-2}\right)
\end{aligned}
$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Yukarıda G ve G nin türevlerinden

$G(0)=1$

$G'(0)=0$

$G''(0)=0$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$G^{(2p+1)}(0)=K\neq 0$

sonuçlarını elde edilir. O halde,

$$
\begin{aligned}
G(z) &= G(0)+\frac{G'(0)z}{1!}+\frac{G''(0)z^2}{2!}+... \\
&= 1+0z+0z^2+...+Kz^{p+1}+...
\end{aligned}
$$

şeklinde olacaktır. Şimdi (4.1.28) ifadesinin logaritmik türevini alınırsa,

$$\frac{\delta\left(\frac{z^{p+q}f^{(q)}(z)}{\gamma(p,q)}\right)^{\delta-1}\left(\frac{z^{p+q}f^{(q)}(z)}{\gamma(p,q)}\right)'}{\left(\frac{z^{p+q}f^{(q)}(z)}{\gamma(p,q)}\right)^{\delta}}=\frac{w'(z)}{1+w(z)}$$

elde edilir ve bir düzenleme ile

$$\frac{(p+q)\,z^{p+q-1}f^{(q)}(z)+z^{p+q}f^{(1+q)}(z)}{z^{p+q}f^{(q)}(z)}=\frac{1}{\delta}\cdot\frac{w'(z)}{1+w(z)}$$

eşitliği ve her eşitliğin her iki yanı z ile çarpılırsa

$$\left(p+\frac{zf^{(1+q)}(z)}{f^{(q)}(z)}+q\right)=\frac{1}{\delta}\cdot\frac{zw'(z)}{1+w(z)} \tag{4.1.29}$$

elde edilir. Şimdi

$$max\{|w(z)|\ :|z|\leq|z_0|\}=|w(z_0)|=1$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bir $z_0\in\mathcal{U}$ var olsun. O zaman $w(z_0)=e^{i\theta}\neq-1$ olmak üzere (4.1.29) eşitliği için Lemma 2.3 göz önüne alınırsa,

$$\Re e\left\{\left(p+\frac{zf^{(1+q)}(z)}{f^{(q)}(z)}+q\right)\Bigg|_{z=z_0}\right\}$$

$$=\frac{1}{\delta}\cdot\ \Re e\left(\frac{zw'(z)}{1+w(z)}\Bigg|_{z=z_0}\right)\left\{\begin{array}{l}\leq\frac{1}{2\delta}\ ,\delta<0\text{ ise}\\ \geq\frac{1}{2\delta}\ ,\delta>0\text{ ise}\end{array}\right\}$$

elde edilir. Üstteki eşitsizlikler sırasıyla bu teoremin (4.1.26) daki varsayımında verilen eşitsizliklerle çelişir. O halde, her $z\in\mathcal{U}$ için $|w(z)|<1$ olmalıdır ve

$$\left(\frac{z^{p+q}f^{(q)}(z)}{\gamma(p,q)}\right)^{\delta}=1+w(z)$$

eşitliğinden

$$\left|\left(\frac{z^{p+q}f^{(q)}(z)}{\gamma(p,q)}\right)^{\delta}-1\right|<1$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte Teorem 3.5.1 in sonucu gereği

$$\Re\mathfrak{e}\left\{\left(\frac{z^{p+q}f^{(q)}(z)}{\gamma(p,q)}\right)^{\delta}\right\}>0\quad(\delta\neq0)$$

olduğu bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

İspatladığımız son dört teoremin hem analitik hem de geometrik fonksiyonlar için önemli olabilecek bazı sonuçlarını verelim.

Uyarı 4.2.1 Eğer Teorem 4.1.5 de $\delta=1$ alınırsa Teorem 4.1.5 , Teorem 4.1.2 yi gerektirir.

Eğer Teorem 4.1.5 de $q=0$ alınırsa, bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.4 $f(z) \in \mathcal{M}(p)$ ve $\delta \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$p + \mathfrak{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\left\{\begin{array}{l} \leq \frac{1}{2\delta}\ , \delta < 0 \text{ ise} \\ \geq \frac{1}{2\delta}\ , \delta > 0 \text{ ise} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Re e\left\{\left[z^p f(z)\right]^\delta\right\} > 0 \tag{4.1.30}$$

dır. Aynı zamanda (4.1.30) daki önermenin karşıt tersi olan

$$\mathfrak{Re}\left(\left[z^p f(z)\right]^\delta\right) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad p + \mathfrak{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\left\{\begin{array}{l} > \frac{1}{2\delta}\ , \delta < 0 \text{ ise} \\ < \frac{1}{2\delta}\ , \delta > 0 \text{ ise} \end{array}\right\} \tag{4.1.31}$$

önermesi elde edilir. (4.1.30) ve (4.1.31) deki iki önermede üstel formdaki kompleks ifadenin değeri olarak esas değeri alınmıştır.

Eğer Teorem 4.1.2 de $q = 0$ alınırsa, bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.5 Herhangi bir $f(z) \in \mathcal{M}(p)$ fonksiyonu

$$\mathfrak{Re}\left(-\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > -\frac{1}{2} \quad (z \in \mathcal{U})$$

eşitsizliğini sağlıyor veya $f(z) \in \mathcal{MS}^*(p; \alpha)$ $(0 \leq \alpha < p)$ ise

$$\mathfrak{Re}\left\{z^p f(z)\right\} > 0$$

olur. ($f(z) \in \mathcal{MS}^*(p; \alpha)$ olması $f(z) \in \mathcal{MS}^*(p; -1/2)$ olmasını gerektirir.)

Eğer Teorem 4.1.2 de $q = 1$ alınırsa, bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.6 Herhangi bir $f(z) \in \mathcal{M}(p)$ fonksiyonu

$$\mathfrak{Re}\left(-\left(1 + \frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right) > -\frac{3}{2} \quad (z \in \mathcal{U})$$

eşitsizliğini sağlıyor, yani $f(z) \in \mathcal{MC}(p; -3/2)$ ise

$$\mathfrak{Re}\left\{z^{p+1} f'(z)\right\} < 0$$

olur.($f(z) \in \mathcal{MC}(p; \alpha)$ olması $f(z) \in \mathcal{MC}(p; -3/2)$ olmasını gerektirir.)

Eğer Teorem 4.1.2 de $p = 1$ ve $q = 0$ alınırsa, bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.7 Herhangi bir $f(z) \in \mathcal{M}$ fonksiyonu

$$\mathfrak{Re}\left(-\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > -\frac{1}{2} \quad (z \in \mathcal{U})$$

eşitsizliğini sağlıyor, yani $f(z) \in \mathcal{MS}^*(-1/2)$ ise

$$\mathfrak{Re}\{zf(z)\} > 0$$

olur.($f(z) \in \mathcal{MS}^*(\alpha)$ olması $f(z) \in \mathcal{MS}^*(-1/2)$ olmasını gerektirir.)

Eğer Teorem 4.1.2 de $p = 1$ ve $q = 0$ alınırsa, bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.8 Herhangi bir $f(z) \in \mathcal{M}$ fonksiyonu

$$\mathfrak{Re}\left(-\left(1+\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right) > -\frac{3}{2} \quad (z \in \mathcal{U})$$

eşitsizliğini sağlıyor, yani $f(z) \in \mathcal{MC}(-1/2)$ ise

$$\mathfrak{Re}\left\{z^2 f(z)\right\} < 0$$

olur.($f(z) \in \mathcal{MC}(\alpha)$ olması $f(z) \in \mathcal{MC}(-1/2)$ olmasını gerektirir.)

KAYNAKLAR

Alexander, J. W. 1915. Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions, Annals of Math. 17, 15-22.

Aouf, M. K. and Hossen, H. M. 1993. New Criteria for meromorphic p-valent starlike functions, Tsukuba J. Math. 17 , 481-486.

Başkan, T. 2000. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Vipaş A.Ş. Bursa

Bernardi, S. D. 1969. Convex and starlike univalent functions, Transactions of the American Mathematical Society, 135 429-446.

Blakley G. R. I962. Classes of p-valent starlike functions, Proc. Amer. Math. Soe., 13, 152-157,

Chen M. P., Irmak H., Srivastava H. M. 1997. Some families of multivalently analytic functions with negative coefficients, J. Math. Anal. Appl. 214 (2), 674-690.

Cho N. E. 2009. Inclusion properties for certain classes of meromorphic functions associated with a family of linear operators, J. Inequal. Appl., Art. ID 147069, 12 pp.

Cho N. E. and Owa S. 2003. Integral operators preserving certain analytic functions, , J. Math. Anal. Appl. , 168-176

Clunie, J. 1959. On meromorphic schlicht functions, J. London Math. Soc., 34 , 215-216.

Duren P. L. 1983. Univalent Functions, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 259, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, and Tokyo.

Goodman A. W. 1983. Univalent Functions, Vols. I and II, Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey.

Goodman A. W. 1950. On the Schwarz-Christoffel transformation and p-valent functions, Trans. Amer. Math. Soc. 68, 204-233

Gonzalez M.O. 1991. Complex Analysis: Selected Topics, Series on Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong.

Hummel, J. A.1967 Multivalent starlike functions. J. Analyse Math. 18 133–160.

Irmak, H., Tınaztepe, G., Tuneski, N. and Şan, M. 2009. An ordinary differential operator and its applications to certain classes of multivalently meromorphic functions, Bull. Math. Anal. Appl. 1 (2), 17-22.

Irmak, H. 2007. Some applications of Hadamard convolution to multivalently analytic and multivalently meromorphic functions, Appl. Math. Comput.187 (1), 207-214.

Irmak, H. and Raina, R. K. 2007. New classes of non-normalized meromorphically multivalent functions, Sarajevo J. Math. 3(16) , no. 2, 157–162.

Irmak, H. and Raina, R. K. 2007. Certain properties arising from some inequalities concerning subclasses of multivalently analytic functions, Math. Inequal. Appl. 10 (2) , 327-334.

Irmak, H. and Cho, N. E. 2007. A differential operator and its application to certain multivalently analytic functions, Hacet. J. Math. Stat. 36 (1), 1-6.

Irmak, H., Şan, M. and Şerbetçi, A. 2010. Some applications of ordinary differential operator to certain multivalent functions (submitted to Gen. Math.).

Karunakaran, V. 1976. On a class of meromorphic starlike functions in the unit disc, Math. Chronicle, 4(2-3) , 112-121.

Jack, I. S. 1971. Functions starlike and convex of order α, J. London Math. Soc. 3, 469-474.

Libera, R. J., 1965. Some classes of regular univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc.16, 755-758.

Liu, J. and Owa, S. 1998. On certain meromorphic p-valent functions, Taiwanese J. Math. 2(1) , pp. 107–110.

MacGregor and T. H., Thomas, H. A. 1974/75. Subordination for convex functions of order α. J. London Math. Soc. (2) 9, 530–536.

Marsden E. J and Hoffman J. M. 1932. Basic Complex Analysis, W.M. Freeman and Company, 1999

Marx, A. 1936. Untersuchungen über schlichte Funktionen, Math. Ann. 107, 40-67.

Miller, J. 1970. Convex meromorphic mappings and related functions, Proc. Amer. Math. Soc., 25 , 220-228.

Miller, S.S. and Mocanu, P.T. 2000. Differential Subordinations: Theory and Applications, Series on Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics (225), Marcel Dekker, New York and Basel.

Nevanlinna, R. 1921. Über die konforme Abbildung von Sterngebieten, Ofvers. Finska

Vet. Soc. Förh., 53 (A), Nr. 6.

Noor, K. I. and Noor, M. A. 2003. On certain classes of analytic functions defined by Noor integral opeartor, J. Math. Anal. Appl. 244-252.

Nunokawa, M. 1987 On The Theory of Multivalent Functions,Tsukaba J. Math. Vol. 11 No. 2 ,273-286.

Nunokawa, M.and Ahuja O. P. 2001. On meromorphic starlike and convex functions, Indian Pure Appl. Math., 32(7), 1027–1032.

Ozaki, S. 1944. On the theory of multivalent functions in a multiply connected domain, Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A. 4 , 115-135.

Ozaki, S., 1947. On the theory of multivalent functions II, Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A. 4 , 45-87.

Pommerenke, Ch. 1963. On meromorphic starlike functions. Pacific J. Math. 13 221–235.

Robertson, M. S. 1937 A representation of all analytic functions in terms of functions with positive real parts, Ann. of Math., 38 , 770-783.

Robertson, M. S. 1941. The partial sums of multivalently star-like functions, Ann. of Math., 42, 829-838.

Robertson, M. S. 1945. Star center poi nts of multivalent functions, Duke Math. J., 12, 669-684.

Robertson, M. S. 1953. Multivalently star-like functions, Duke Math. J., 20, 539-549.

Royster, W.C. 1963. Meromorphic Starlike, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 107, No. 2 , pp. 300-308.

Saitoh, H. 1991. Some Properties of Certain Multivalent Functions, Tsukaba J. Math. Vol. 15 , No. 1, 105-111.

Sakaguchi, K. 1962. A note on p-valent functions. J. Math. Soc. Japan 14 312–321.

Shanmugam, T. N., Sivasubramanian S., Owa S. 2010. On sandwich results for some subclasses of analytic functions involving certain linear operator, Integral Transforms Spec. Funct. 21 (1-2), 1-11.

Strohhacker, E., 1933. Beitrage zur Theorie der schlichten Funktionen, Math. Z. 37, 356-380.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Müfit ŞAN
Doğum Yeri: Mersin
Doğum Tarihi: 02.08.1983
Medeni Hali: Bekar
Yabancı Dili: İngilizce\Almanca

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Mersin 75. yıl Anadolu Öğretmen Lisesi (2001)
Lisans : Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği (2007)
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalı (Eylül 2008-Aralık 2010)

Katıldığı Uluslararası Kongreler

1. " International Congress in Honour of Prefessor H. M. Srivastava on his 70th Birth Anniversary ", Title of Talk : "Ordinary differential operator and its some applications to certain meromorphically p-valent functions", 18-21 August, 2010, Uludağ University, Turkey (with H. Irmak).