T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POZİTİF TANIMLI MATRİSLERİN ARİTMETİK, GEOMETRİK VE HEİNZ ORTALAMALARI ÜZERİNE SINIRLAR

Öğrencinin Adı SOYADI
İbrahim Halil GÜMÜŞ
DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2011
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

İ. Halil GÜMÜŞ tarafından hazırlanan "Pozitif tanımlı matrislerin aritmetik, geometrik ve Heinz ortalamaları üzerine sınırlar" adlı tez çalışması 15/07/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK	....
Danışman Yard. Doç. Dr. Necati TAŞKARA	....
Üye Doç Dr. Ahmet TEKCAN	....
Üye Prof. Dr. Aşır GENÇ	....
Üye Doç. Dr. Galip OTURANÇ	....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Bayram SADE
FBE Müdürü

.

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Öğrencinin Adı SOYADI
İBRAHİM HALİL GÜMÜŞ
Tarih: 15.07.2011

ÖZET

DOKTORA TEZİ

POZİTİF TANIMLI MATRİSLERİN ARİTMETİK, GEOMETRİK VE HEİNZ ORTALAMALARI ÜZERİNE SINIRLAR

Öğrencinin Adı SOYADI
İBRAHİM HALİL GÜMÜŞ
Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
MATEMATİK Anabilim Dalı

Danışman: YRD. DOÇ. DR. NECATİ TAŞKARA

2011, 72 Sayfa

Jüri
Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Doç. Dr. Ahmet TEKCAN
Prof. Dr. Aşır GENÇ
Doç. Dr. Galip OTURANÇ

Bu tezde bir skaler eşitsizliğin matris formu incelenip singüler değer ve bazı unitarily invaryant normları hesaplandı. Bu değerler için yeni sınırlar elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Aritmetik ortalama, geometrik ortalama, Heinz ortalama, pozitif tanımlı matris, singüler değer, unitarily invaryant norm

ABSTRACT

Ph.D THESIS

BOUNDS ON ARITHMETIC, GEOMETRIC AND HEINZ MEANS OF POSITIVE DEFINITE MATRICES

Öğrencinin Adı SOYADI
IBRAHIM HALIL GUMUS

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELCUK UNIVERSITY
MATHEMATICS

Advisor: Asst. Prof.Dr. NECATİ TASKARA

2011, 72 Pages

Jury
Asst. Prof. Dr. Necati TAŞKARA
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Assoc. Dr. Ahmet TEKCAN
Prof. Dr. Aşır GENÇ
Assoc. Dr. Galip OTURANÇ

In this thesis, the matrix form of a scalar inequality is investigated and its singular value and some unitarily invariant norms are calculated. For these values, new boundaries are obtained.

Keywords: Arithmetic mean, geometric mean, Heinz mean, positive semidefinite matrix, singular value, unitarily invariant norm

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA tarafından yönetilerek Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne Doktora tezi olarak sunulmuştur. Çalışmam boyunca desteklerini esirgemeyen değerli aileme ve değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA'ya en içten teşekkür ve saygılarımı sunarım.

İbrahim Halil GÜMÜŞ
KONYA-2011

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
A^{-1}	: A matrisinin tersi
A^{T}	: A matrisinin transpozesi
A^{*}	: A matrisinin eşlenik transpozesi
$s(A)$	: A matrisinin singüler değeri
$A^{\frac{1}{2}}$	: A matrisinin karekökü
$A \oplus B$	: A ile B martinin direkt toplamı
$M_n(\mathbb{C})$	: Elemanları kompleks sayılar kümesine ait olan bütün matrislerin kümesi
izA	: A matrisinin izi
$\det A$	: A matrisinin determinantı
$\lvert A \rvert$	: A matrisinin mutlak değeri
$\lvert\lvert\lvert A \rvert\rvert\rvert$	: A matrisinin unitarily invaryant normu
$\lVert A \rVert_2$	: A matrisinin Hilbert-Schmidt normu
$\lVert A \rVert$	: A matrisinin spektral normu
$\lVert A \rVert_1$	: A matrisinin iz normu
$\lVert A \rVert_{(k)}$	: A matrisinin Ky Fan normu
$\lVert A \rVert_p$	: A matrisinin ℓ_p normu veya Schatten p-normu
$\lambda(A)$	: A matrisinin özdeğerleri
$\Delta_A(\lambda)$	: A matrisinin karakteristik polinomu
$A o B$	: A ile B matrisinin Hadamard çarpımı
$rank(A)$	: A matrisinin rankı
$A(a,b)$	: a ile b sayılarının aritmetik ortalaması
$H(a,b)$	: a ile b sayılarının harmonik ortalaması
$G(a,b)$	: a ile b sayılarının geometrik ortalaması
$L(a,b)$	: a ile b sayılarının logaritmik ortalaması
$H_v(a,b)$	: a ile b sayılarının Heinz ortalaması
$A \# B$	: A ile B matrislerinin geometrik ortalaması
$\operatorname{Re} BA$	: BA matrisinin reel kısmı

1. GİRİŞ

Skaler eşitsizliklerin matris formları matematik biliminde ve diğer disiplinlerde son zamanlarda önemli bir çalışma alanı haline geldi. Matematikçiler çok iyi bilinen skaler eşitsizliklerin matris formlarını, bu matris formların singüler değerlerini ve normlarını incelemekte ve özellikle aritmetik, geometrik eşitsizliklerin matris incelemeleri bir çok bilim insanı tarafından değişik yönleriyle çalışılmaktadır.

Bu çalışmada çok iyi bilinen $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ aritmetik-geometrik eşitsizliğinin daha geniş bir versiyonu olan $\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b}$ eşitsizliği üzerinde duruldu. Bu eşitsizliğin skaler olarak ispatı yapılarak, bu eşitsizlikten değişik skaler eşitsizlikler elde edildi. Ayrıca matris formlarını yazıp singüler değerlerini ve unitarily invaryant normları incelendi ve bu çalışmalar sonucunda aritmetik, geometrik ve Heinz ortalamaları üzerine yeni sınırlar elde edildi.

Çalışmalarımız bu eksende halen devam etmektedir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Skaler eşitsizliklerin matris formları üzerine çalışmalar 20-25 yıllık bir geçmişe dayanmaktadır. Bu alandaki çalışmalar aritmetik-geometrik eşitsizlikler gibi çok iyi bilinen eşitsizliklerin matris formlarının singüler değerleri ve normları üzerine olmuştur.

Bhatia ve Kittaneh (1990) çalışmalarında, A ve B matrisleri için, $2s_j(A^*B) \leq s_j(AA^* + BB^*)$ eşitsizliğini ispatlamışlardır.

Zhan (2000) çalışmasında, A ve B pozitif yarı tanımlı matrisleri ve $j = 1,2,...,n$ için $s_j(A - B) \leq s_j(A \oplus B)$ eşitsizliğini göstermiştir.

Tao (2006) da, $M \in M_m$, $N \in M_n$ matrisleri ve $r \equiv \min\{m,n\}$ için pozitif yarı tanımlı $\begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix}$ blok matrisini alıp $2s_j(K) \leq s_j \begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix}$ eşitsizliğini göstermiş ve ayrıca $j = 1,2,...,n$ için $s_j(A^{\frac{1}{4}}B^{\frac{3}{4}} + A^{\frac{3}{4}}B^{\frac{1}{4}}) \leq s_j(A + B)$ açık problemini ispatlamıştır.

Zhan (2004) de, herhangi A ve B matisleri için, $2s_j(A^*B) \leq s_j(AA^* + BB^*)$ eşitsizliğinin farklı bir ispatını verip, A_0 pozitif tanımlı matrisi ve $A_1,...,A_k$ pozitif yarı tanımlı matrisleri için $iz \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=0}^{j} A_i \right)^{-2} A_j < izA_0^{-1}$ eşitsizliğini elde etmiştir.

Bhatia ve Davis (1993) de, herhangi *A, B, X;* $n \times n$ keyfi matrisleri ve bütün unitarily invaryant normlar için $2\left\| A^* XB \right\| \leq \left\| AA^* X + XBB^* \right\|$ eşitsizliğini göstermişlerdir.

Kittaneh (1993) de, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve *A, B* pozitif yarı tanımlı matrisleri ve *X*, $n \times n$ kompleks matrisi için $\left\| AXB \right\| \leq \left\| A^p X \right\|^{\frac{1}{p}} \left\| XB^q \right\|^{\frac{1}{q}}$ eşitsizliğini ispatlamıştır.

Kosaki (1998) deki çalışmasında, *A, B* pozitif yarı tanımlı matrisleri, X $n \times n$ kompleks matrisi ve bütün unitarily invaryant normlar için $\left\| A^{\frac{1}{2}} XB^{\frac{1}{2}} \right\| \leq \frac{1}{2} \left\| AX + XB \right\|$ eşitsizliğini pozitif tanımlı fonksiyonlar yardımıyla göstermiştir. $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

şartı ile $\left\|\left|A^{\frac{1}{p}}XB^{\frac{1}{q}}\right\|\right| \leq \left\|\left|AX\right\|\right|^{\frac{1}{p}}\left\|\left|XB\right\|\right|^{\frac{1}{q}}$ eşitsizliğini ispatlamış ve değişik uygulamalarını elde etmiştir.

Ando (1995) de, $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$ eşitsizliğinden hareketle *A*, *B* pozitif matrisleri ve $j=1,2,...,n$ için $s_j(AB) \leq s_j(\frac{A^p}{p}+\frac{B^q}{q})$ eşitsizliğini ispatlamıştır.

Hirzallah ve Kittaneh (2000) deki çalışmalarında, $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve *A*, *B* pozitif yarı tanımlı matrisler ve $r=\max\{p,q\}$ için $\|\bullet\|_2$ Hilbert-Schmidt normu olmak üzere $\left\|\frac{1}{p}A^pX+\frac{1}{q}XB^q\right\|_2^2 \geq \frac{1}{r^2}\left\|A^pX-XB^q\right\|_2^2+\left\|AXB\right\|_2^2$ eşitsizliğini ispatlamışlardır.

Audenaert (2007) de, *A*, *B* pozitif yarı tanımlı matrisleri, $0 \leq v \leq 1$ ve $j=1,2,...,n$ için $s_j(A^vB^{1-v}+A^{1-v}B^v) \leq s_j(A+B)$ eşitsizliğini ispatlamıştır.

Bhatia ve Kittaneh (2000) de, *A*, *B* $n \times n$ pozitif yarı tanımlı matrisleri ve bütün unitarily invaryant normlar için $4\left\|\left|AB\right\|\right| \leq \left\|\left|(A+B)^2\right\|\right|$ eşitsizliğini ispatlamışlardır.

Kittaneh (2007) de, *A*, *B* pozitif tanımlı matrisleri ve bütün unitarily invaryant normlar için, $\|\bullet\|$ spektral normunu göstermek üzere $\left\|\left|AX-XB\right\|\right| \leq \|X\|\left\|\left|A \oplus B\right\|\right|$ eşitsizliğini ispatlamıştır.

Kittaneh (2008) deki çalışmasında, *X*, *Y* pozitif tanımlı matrisleri ve $\|\bullet\|$ spektral normu için $\|XY-YX\| \leq \|X\|\|Y\|$ eşitsizliğini ispatlamıştır.

Kittaneh ve Manasrah (2010) da, $a,b \geq 0$, $0 \leq v \leq 1$ ve $r_0=\min\{v,1-v\}$ için $a^vb^{1-v}+r_0(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \leq va+(1-v)b$ eşitsizliği üzerinde çalışmışlar ve bu eşitsizlik yardımıyla $iz\left|A^vB^{1-v}\right|+r_0(\sqrt{izA}-\sqrt{izB})^2 \leq iz(vA+(1-v)B)$ ifadesini ispatlamışlardır. $\|\bullet\|_1$ iz normunu göstermek üzerine, bu aynı zamanda $\left\|A^vB^{1-v}\right\|_1+r_0(\sqrt{\|A\|_1}-\sqrt{\|B\|_1})^2 \leq \|vA+(1-v)B\|_1$ şeklinde de yazılabilir.

3. ÖNBİLGİLER

Bu bölümde öncelikle özdeğerleri tanıtıp bunların bazı özelliklerinden bahsedeceğiz. Üniter matrisler, benzerlik dönüşümleri ve köşegenleştirme konularına değineceğiz. Son olarak da tezimizin temel öğelerinden biri olan singüler değerlerden bahsedeceğiz.

3.1. Özdeğerler

$A \in M_n$, $x \in \mathbb{C}^n$ ve λ bir skaler olsun. Eğer

$$Ax = \lambda x \tag{3.1}$$

denklemi, bir λ skaleri ve x sıfır olmayan vektörü için sağlanırsa, λ' ya A matrisinin *özdeğeri*, x' de λ özdeğerine karşılık gelen *özvektörü* denir.

$A \in M_n$ matrisinin bütün özdeğerlerinin kümesi A*'nın spektrumu* olarak adlandırılır ve $\sigma(A)$ ile gösterilir. Bir matrisin mutlak değerce en büyük özdeğerine o matrisin *spektral yarıçapı* denir. Spektral yarıçap negatif olmayan bir reel sayıdır. Spektral yarıçap kompleks uzayda A' nın özdeğerlerini kapsayan orijin merkezli en küçük diskin yarıçapıdır.

$A \in M_n$ matrisinin özdeğerleri hakkındaki önemli sorulardan biri, kaç tane oldukları, diğeri ise nasıl karakterize edilecekleridir.

(3.1) ile gösterilen özdeğer- özvektör denklemi $x \neq 0$ için

$$(\lambda I - A)x = 0 \tag{3.2}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin $x = 0$ çözümünden başka çözümünün olması için

$$\det(\lambda I - A) = 0 \tag{3.3}$$

olması gerekir. Bu determinant açıldığı zaman *n.* dereceden λ' ya bağlı bir polinom elde edilir. Bu polinoma *A* matrisinin *karakteristik polinomu* denir ve

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n \tag{3.4}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\Delta_A(\lambda) = 0 \tag{3.5}$$

denklemine de A matrisinin *karakteristik denklemi* denir. Bu denklemin kökleri A matrisinin özdeğerleridir. Ayrıca bir matrisin özdeğerleri toplamı o matrisin *izi*, özdeğerleri çarpımı ise matrisin *determinantıdır* (Horn ve Johnson, 1985).

Teorem 3.1.1. $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ herhangi bir A kare matrisinin özdeğerleri ve k bir tamsayı ise (A tekil matris ise k pozitif olmalı) A^k matrisinin özdeğerleri $\lambda_1^k, \lambda_2^k, ..., \lambda_n^k$ şeklindedir (Horn ve Johnson, 1985).

İspat: $Ax = \lambda x$ denkleminin her iki yanını A matrisi ile çarparsak $A^2 x = \lambda Ax = \lambda(Ax) = \lambda^2 x$ elde ederiz. Aynı işleme devam edersek $A^k x = \lambda^{k-1} Ax = \lambda^{k-1}(Ax) = \lambda^k x$ bulunur ki ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.2. A herhangi bir kare matris olsun. Bu takdirde A ve A^T matrislerinin özdeğerleri aynıdır (Horn ve Johnson, 1985).

İspat: A^T matrisinin özdeğerleri $\det(\lambda I - A^T) = 0$ denkleminin kökleridir. Herhangi bir kare matris için $\det(A) = \det(A^T)$ olduğundan $\det(\lambda I - A^T) = \det(\lambda I - A) = 0$ olacaktır. Denklemler eşit olduğundan kökleri de eşit olacaktır. Yani, iki matrisin özdeğerleri aynıdır.

3.1.1. Benzerlik dönüşümü

$A, B \in M_n(\mathbb{C})$ ve $S \in M_n$ tekil olmayan matrisi için

$$B = S^{-1} AS \tag{3.6}$$

eşitliği varsa A, B matrislerine benzer matrisler denir. Benzerlik M_n üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağlayan bir bağıntıdır.

Teorem 3.1.1.1. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ olsun. Eğer A ve B matrisleri benzer matrisler ise karakteristik polinomları aynıdır (Horn ve Johnson, 1985).

İspat:

$$\Delta_B(\lambda) = \det(\lambda I - B) = \det(\lambda S^{-1} S - S^{-1} AS) = \det S^{-1}(\lambda I - A)S$$
$$= \det S^{-1}.\det(\lambda I - A)\det S \quad = \det S^{-1} \det S \quad \det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A) = \Delta_A(\lambda)$$

dır.

Sonuç olarak A ve B benzer matrisler ise aynı özdeğerlere sahiptir. Ama tersi doğru değildir. Yani, özdeğerleri aynı olan matrisler benzer olmayabilirler. Ayrıca iz ve determinant benzerlik dönüşümleri altında invaryanttır. Yani, $\det S^{-1} AS = \det A$ ve $izS^{-1} AS = izA$ eşitlikleri mevcuttur.

Teorem 3.1.1.2 Benzer matrislerin kuvvetleri de benzerdir.

İspat: İspatı tümevarımla yapalım.

k=2 için;

$$B^2 = BB = \left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}A^2P \tag{3.7}$$

k= n-1 için;

$$B^{n-1} = P^{-1}A^{n-1}P \tag{3.8}$$

eşitliğinin doğru olduğunu kabul edelim.

k=n için eşitliğin doğruluğunu gösterelim. (3.8) eşitliğinin her iki tarafını B ile çarparsak,

$$\begin{aligned} B^{n-1}B &= (P^{-1}A^{n-1}P)(P^{-1}A\ P) \\ B^n &= P^{-1}A^nP \end{aligned} \tag{3.9}$$

olur.

3.1.2. Köşegenleştirme

Benzerlik dönüşümlerini özdeğer problemlerini çözmek için kullanabiliriz. Verilen bir A, $n\times n$ matrisine benzer olan ve özdeğer problemi basit olan bir B matrisini bulmak bize kolaylık sağlar. Özdeğer problemi en kolay olan matris, köşegen matristir.

$A\in M_n$ matrisi bir köşegen matrise benzer ise A matrisine *köşegenleştirilebilir matris* denir. Diğer bir deyişle

$$P^{-1}AP = D \tag{3.10}$$

olacak şekilde tekil olmayan bir P matrisi varsa A matrisine köşegenleştirilebilir matris denir. A, $n\times n$ kare matrisinin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter şart A matrisinin n tane lineer bağımsız özvektöre sahip olmasıdır. Bu durumda D köşegen matrisinin köşegen elemanları, A matrisinin özdeğerleridir.

Tanım 3.1.2.1. U matrisi tekil olmayan bir matrisi olmak üzere

$$U^*U = UU^* = I \tag{3.11}$$

olacak şekilde bir U^* matrisi var ise U matrisine *üniter matris* denir. Ayrıca $U^* = U^{-1}$ dir. Özel olarak U reel matris ve $U^TU = UU^T = I$ ise U matrisine *ortogonal matris* denir.

Tanım 3.1.2.2. Eğer

$$B = U^*AU \tag{3.12}$$

olacak şekilde bir U üniter matrisi varsa o takdirde A ve B matrislerine üniter olarak benzerdir denir. Örneğin, $A\in M_n$ hermityen bir matris ise tüm özdeğerleri reeldir ve üniter olarak köşegenleştirilebilir (Horn ve Johnson, 1985**)**

.

Teorem 3.1.2.1. $A=\left[a_{ij}\right]$ ve $B=\left[b_{ij}\right]\in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri üniter benzer iseler

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left|b_{ij}\right|^2 = \sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2 \tag{3.13}$$

dır. (Horn ve Johnson, 1985**)**

İspat: $\sum_{i,j}\left|a_{ij}\right|^2 = izA^*A$ olduğundan, $izB^*B = izA^*A$ eşitliğini ispatlarsak istenilen elde edilir. $B=U^*AU$ eşitliği ve benzerliğin iz altında invaryant olmasından dolayı $izB^*B = izU^*A^*UU^*AU = izU^*A^*AU = izA^*A$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Tanım 3.1.2.3. $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ alalım. O zaman

$$C=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

matrisine *A* ile *B* matrislerinin *direkt toplamı* denir ve $A\oplus B$ ile gösterilir.

Ayrıca C matrisinin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter şart *A* ve *B* matrislerinin köşegenleştirilebilir olmasıdır.

3.2. Singüler Değerler

Bu kısımda öncelikle singüler değerleri tanıtıp, sonra bazı önemli özelliklerinden bahsedeceğiz.

$A\in M_n$ matrisini alalım. A^*A nın özdeğerleri $\lambda_j(A^*A)$ olmak üzere j=1,2,…,n için $\sqrt{\lambda_j(A^*A)}$ sayılarına *A* matrisinin *singüler değerleri* denir ve $s_j(A)$ ile gösterilir. Yani

$$s_j(A)=\sqrt{\lambda_j(A^*A)} \tag{3.15}$$

dir.

Şimdi de singüler değerlerin bazı önemli özelliklerini verelim. $A\in M_{nxn}$ matrisini alalım. *A* matrisinin singüler değerlerinin $s_1(A)\geq s_2(A)\geq ...\geq s_n(A)$ şeklinde sıralandığını kabul edelim. Bu durumda şu özellikler mevcuttur.

- A^{-1} mevcutsa yani *A* tekil olmayan bir matris ise

$$s_1(A)=\frac{1}{s_n(A^{-1})}$$

- $\forall\alpha\in\mathbb{C}$ için $s_1(\alpha A)=|\alpha|s_1(A)$
- $s_1(AB)\leq s_1(A)s_1(B)$
- $s_1(A+B)\leq s_1(A)+s_1(B)$

- $s_n(AB) \geq s_n(A)s_n(B)$
- $s_n(A) \leq |\lambda_i(A)| \leq s_1(A)$
- $s_n(A) - 1 \leq s_n(I + A) \leq s_n(A) + 1$
- $s_1(A) \leq \sqrt{iz(A^* A)} \leq \sqrt{n}s_1(A)$
- $iz(A^* A) = \sum_{i=1}^{k} s_i^2(A)$, $k = \min(n, m)$
- $\det(A^* A) = \prod_{i=1}^{k} s_i^2(A)$
- Genellikle $s_i(AB) \neq s_i(BA)$

3.3 Matris Normları

Matematikte bazı kavramları bir tek sayı ile ifade etmek son derece önemlidir. Determinant ve norm kavramları, matrisleri tek bir sayı ile ifade etme yollarından bazılarıdır. Biz bu bölümde öncelikle matris normlarını tanıtıp daha sonra tezimizde önemli bir yere sahip olan unitarily invaryant normlara geçeceğiz.

$A, B \in M_n$ için $\|\bullet\| : M_n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun matris normu olarak adlandırılması için aşağıdaki beş aksiyomu sağlaması gerekir.

- $\|A\| \geq 0$,
- $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$,
- $c \in \mathbb{C}$ için $\|cA\| = |c|\|A\|$,
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,
- $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

İlk dört aksiyom sağlanıyorsa bu norma *genelleştirilmiş matris normu* denir. Eğer beş aksiyomun hepsi sağlanıyorsa bu norma da *matris normu* denir (Horn ve Johnson, 1985**)**.

Şimdi de bazı matris norm türlerini verelim.

Tanım 3.3.1 A, $m \times n$ matris olmak üzere

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

normuna A matrisinin *Frobenius* (Euclide, Schur veya Hilbert-Schmidt norm olarak da bilinir) *normu*

$\|A\|$=*max*{ $\sqrt{\lambda}$: λ , $A^* A$ nın özdeğerleri}

şeklinde tanımlanan norma, A matrisinin spektral normu ve $1 < p < \infty$ için

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanan norma da, A matrisinin ℓ_p *normu* denir. ℓ_p normunda p=1 olması durumunda norm *sütun normu*, p=2 olması durumunda norm *Frobenius normu* ve $p = \infty$ olması durumunda da, norm *satır normu* olarak kabul edilir (Horn ve Johnson, 1985**)**.

Şimdi de tezimizde önemli bir yere sahip olan unitarily invaryant normlar hakkında bilgi verelim.

3.3.1. Unitarily invaryant normlar

Bu bölümde analizde önemli bir yere sahip olan unitarily invaryant normları tanıtacağız.

$|||\bullet|||$, M_n üzerinde bir norm olsun. Eğer her A matrisi ve U, V üniter matrisleri için

$$|||UAV||| = |||A||| \tag{3.16}$$

şartı sağlanıyorsa bu norma unitarily invaryant norm denir.

Bu tarz normların özellikle iki sınıfı çok önemlidir. Bunlardan biri Ky Fan normlarıdır. Bu norm $1 \le k \le n$ için

$$\|A\|_{(k)} = \sum_{j=1}^{k} s_j(A) \tag{3.17}$$

biçiminde gösterilir. Diğer bir önemli örneği ise Schatten-p normlarıdır ve

$$\|A\|_p = \left[\sum_{j=1}^{n} \left(s_j(A)\right)^p \right]^{\frac{1}{p}} \tag{3.18}$$

ile gösterilir.

Yukarıda bahsettiğimiz norm türlerinden çok iyi bildiğimiz bazı normları elde edebiliriz. Örneğin spektral norm (operator norm) Schatten-p normunda $p = \infty$ veya Ky Fan normunda k=1 alınarak aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$\|A\| = \|A\|_{\infty} = \|A\|_{(1)} = s_1(A). \tag{3.19}$$

Buradan spektral normun bir unitarily invaryant norm olduğu ortaya çıkar.
Aynı şekilde iz normu $p = 1$ veya k=n alınarak

$$\|A\|_{iz} = \|A\|_1 = \|A\|_{(n)} = iz|A| = \sum_{j=1}^{n} s_j(A) \tag{3.20}$$

olarak bulunabilir. Bu norm türü de bir unitarily invaryant normdur.

Tezimizde önemli bir yere sahip olan Hilbert-Schmidt norm (Frobenius norm) da bir unitarily invaryant normdur. Bu norm

$$\|A\|_F = \|A\|_2 = \|A\|_p = \left[\sum_{j=1}^{n} \left(s_j(A)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(iz\left(A^* A\right)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.21}$$

şekillerinde gösterilebilir.

Unitarily invaryant normlar alt çarpımsal özelliğine sahiptirler. Yani herhangi A, B matrisleri için

$$|||AB||| \leq |||A|||.|||B||| \tag{3.22}$$

dır (Bhatia, 1996; Bhatia, 2007).

Şimdi de unitarily invaryant normlar için önemli olan üç tane teorem verelim.

Teorem 3.3.1.1. A ve B $n \times n$ matrisler olsun. $1 \leq k \leq n$ için $\|A\|_{(k)} \leq \|B\|_{(k)}$ ise bütün unitarily invaryant normlar için $|||A||| \leq |||B|||$ eşitsizliği de vardır. Bu teorem Fan Dominance teoremi olarak da bilinir (Bhatia, 1996).

Teorem 3.3.1.2. $|||\bullet|||$, M_n üzerinde herhangi bir unitarily invaryant norm olsun. "o " Hadamard çarpımı göstermek üzere $A \geq 0$ ve bütün X matrisleri için

$$|||AoX||| \leq \max a_{ii} |||X||| \tag{3.23}$$

eşitsizliği geçerlidir (Bhatia, 2007).

Teorem 3.3.1.3. $A, B \in M_n$ matrislerini alalım. M_{2n} üzerindeki her unitarily invaryant norm için

$$\frac{1}{2}\left|\left|\left|\begin{bmatrix} A+B & 0 \\ 0 & A+B \end{bmatrix}\right|\right|\right| \leq \left|\left|\left|\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\right|\right|\right| \leq \left|\left|\left|\begin{bmatrix} |A|+|B| & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right|\right|\right| \tag{3.24}$$

eşitsizliği vardır (Bhatia, 1996).

3.4. Pozitif (Yarı) Tanımlı Matrisler

Bu bölümde matris teoride önemli bir yere sahip olan pozitif tanımlı matrisler ve pozitif yarı tanımlı matrisler üzerinde duracağız. Bu matrislerin özdeğerleri pozitif olduğundan uygulamalı matematikte birçok kolaylıklar sağlamaktadır.

A, $n \times n$ tipinde bir hermityen matris olsun. *A* matrisi sıfırdan farklı $x \in \mathbb{C}^n$ için

$$x^* Ax > 0 \tag{3.25}$$

şartını sağlıyorsa bu matrise *pozitif tanımlı matris* denir ve $A > 0$ ile gösterilir Eğer her $x \in \mathbb{C}^n$ için

$$x^* Ax \geq 0 \tag{3.26}$$

şartını sağlıyorsa *A* matrisine *pozitif yarı tanımlı matris* denir ve $A \geq 0$ ile gösterilir.

Her pozitif tanımlı matris aynı zamanda pozitif yarı tanımlı matristir. Fakat bir pozitif yarı tanımlı matrisin pozitif tanımlı matris olması için gerek ve yeter şart matrisin ters çevrilebilir olmasıdır. Örneğin $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi pozitif yarı tanımlıdır ama pozitif tanımlı değildir. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi ise hem pozitif tanımlı, hem de pozitif yarı tanımlı bir matristir. Pozitif tanımlı matrislerin eşleniği, transpozesi, eşlenik transpozesi ve tersi de pozitif tanımlıdır (Horn ve Johnson, 1985).

Pozitif tanımlı matrislerin kullanışlı ve basit birçok karakterizasyonu vardır. Şimdi bunların bazılarını verelim.

Teorem 3.4.1. $A \in M_n$ hermityen matrisinin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart özdeğerlerinin pozitif olmasıdır. Pozitif yarı tanımlılıkta ise gerek ve yeter şart özdeğerlerin negatif olmamasıdır (Horn ve Johnson, 1985).

İspat: *A* matrisi pozitif tanımlı matris, λ, *A* matrisinin özdeğerlerinden birisi ve x de λ ya karşılık gelen özvektör olsun. Bu takdirde

$$x^* Ax = x^* \lambda x = \lambda x^* x \tag{3.27}$$

eşitliği yazılabilir. Buradan $\lambda = \dfrac{x^* Ax}{x^* x}$ elde edilir. $x^* Ax$ ve $x^* x$ pozitif olduğundan oranları da pozitiftir. Böylece istenen elde edilmiş olur.

$D = k\ddot{o}ş(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ matrisi *A*' nın özdeğerlerinden oluşan köşegen matris olsun. *A* matrisinin özdeğerleri pozitif ise sıfır olmayan $x \in C^n$ için

$$x^* Ax = x^* U^* DUx \overset{y=Ux}{=} y^* Dy = \sum_{i=1}^{n} d_i \bar{y}_i y_i = \sum_{i=1}^{n} d_i |y_i|^2 > 0 \tag{3.28}$$

elde edilir ki istenendir (Horn ve Johnson, 1985).

Sonuç 3.4.1. Pozitif tanımlı matrislerin izi ve determinantı pozitiftir (Horn ve Johnson, 1985).

İspat: Bir matrisin izi özdeğerlerinin toplamı, determinantı ise özdeğerlerinin çarpımı olduğundan hem iz ve hem de determinant pozitif değerlerdir. Yani, A pozitif tanımlı matrisi için

$$izA = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$$

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$$

dır. Pozitif yarı tanımlı matrislerin izi ve determinantı ise negatif olmayan sayılardır.

Sonuç 3.4.2. $A \in M_n$ pozitif yarı tanımlı matris ise A^k matrisi de k=1,2… için pozitif yarı tanımlıdır (Horn ve Johnson, 1985).

İspat: A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ise A^k matrisinin özdeğerleri $\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k$ dır. Dolayısıyla bu özdeğerler de pozitiftir.

Teorem 3.4.2. A hermityen matrisinin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart esas minörlerinin pozitif olmasıdır. Pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart esas minörlerinin negatif olmamasıdır (Zhang, 1999).

Teorem 3.4.3. A, $n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere bütün $n \times m$ X kompleks matrisleri için, A matrisinin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart $X^* AX \geq 0$ olmasıdır (Zhang, 1999).

Teorem 3.4.4. A, $n \times n$ kompleks matrisinin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart U üniter matrisi ve negatif olmayan λ_i özdeğerleri için $A = U^* köş(\lambda_1, ..., \lambda_n) U$ olmasıdır (Zhang, 1999).

Teorem 3.4.5. A matrisinin pozitif yarı tanımlı matris olması için gerek ve yeter şart bazı B matrisleri için $A = B^* B$ olmasıdır. Pozitif tanımlılık için ise B nin tekil olmayan matris olması gerekir (Zhang, 1999).

Teorem 3.4.6. A matrisinin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart bazı üst üçgen matrisleri için $A = T^* T$ olmasıdır. Ayrıca T negatif olmayan köşegen elemanlarına sahip bir matris olarak seçilebilir. A pozitif tanımlı matris ise T tektir.

Her negatif olmayan sayının bir tane negatif olmayan karekökü vardır. Bu durum matrisler için şöyle genelleştirilebilir (Zhang, 1999).

Teorem 3.4.7. Her $A \geq 0$ için

$$B^2 = A \tag{3.29}$$

olacak şekilde bir tane $B \geq 0$ matrisi vardır (Zhang, 1999).

İspat: $A \geq 0$ için $A = U^* k\ddot{o}ş(\lambda_1, ..., \lambda_n)U$ olduğunu biliyoruz. Öyleyse

$$B = U^* k\ddot{o}ş(\lambda_1^{\frac{1}{2}}, ..., \lambda_n^{\frac{1}{2}})U$$

matrisi vardır. Bu matrisin özdeğerleri de pozitif olduğundan *B* matrisi pozitif yarı tanımlıdır. *B* matrisine *A* matrisinin karekökü denir ve $A^{\frac{1}{2}}$ ile gösterilir.

3.4.1. Pozitif yarı tanımlı matris çifti

Eşitsizlikler modern matris teorinin ana konularından biridir. Bu bölümde tezimizde de önemli bir yere sahip olan iki pozitif yarı tanımlı matris içeren eşitsizlikler üzerinde duracağız.

A ve *B* aynı mertebeli iki matris olsun. *A-B* pozitif yarı tanımlı ise $A \geq B$ veya $B \leq A$ yazabiliriz. Buradaki $\geq$ eşitsizliği bir kısmi sıralamadır. Hermityen matrisler üzerindeki bu sıralamaya *Löwner kısmi sıralaması* da denir. Bu sıralamayı şu şekilde gösterebiliriz:

- Her *A* hermityen matrisi için $A \geq A$,
- $A \geq B$ ve $B \geq A$ ise *A*=*B*,
- $A \geq B$ ve $B \geq C$ ise $A \geq C$.

Ayrıca Teorem 3.4.3 de yer alan $A \geq 0$ olması için gerek ve yeter şart $X^* AX \geq 0$ eşitsizliği, $A \geq B$ olması için gerek ve yeter şart $X^* AX \geq X^* BX$ olarak genelleştirilebilir (Zhang, 1999).

Şimdi de pozitif yarı tanımlı matrisler için önemli eşitsizlikler içeren bir teorem verelim.

Teorem 3.4.1.1. $A \geq 0$ ve $B \geq 0$ aynı mertebeli iki matris olsun. O halde aşağıdaki eşitsizlikler vardır:

i. $A + B \geq B$
ii. $A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}} \geq 0$
iii. $iz(AB) \leq izA.izB$

iv. *AB'* nin özdeğerleri negatif olmayan sayılardır. *AB'* nin pozitif yarı tanımlı matris olması için gerek ve yeter şart *AB*=*BA* olmasıdır. (Zhang, 1999)

İspat: i) İspat açıktır.

ii) $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}=\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^{*}BA^{\frac{1}{2}}\geq 0$ olduğundan ispat kolaylıkla elde edilir.

iii) $A=U^{*}DU$ üniter benzerliğinden $iz(AB)=iz(U^{*}DUB)=iz(DUBU^{*})$ yazılabilir. $b_{11},...,b_{nn}$ elemanlarını, B matrisinin köşegen elemanları olarak alalım. Ayrıca $A=köş(\lambda_1,...,\lambda_n)$ olarak farz edelim. Öyleyse

$$iz(AB)=\lambda_1 b_{11}+...+\lambda_n b_{nn}\leq(\lambda_1+...+\lambda_n)(b_{11}+...b_{nn})=izA.izB \tag{3.30}$$

elde edilir

iv) X ve Y aynı mertebeli kare matrisler olsun. XY ve YX matrislerinin özdeğerlerinin aynı olduğu bilgisinden $AB=A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}B)$ matrisi ile $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}$ matrislerinin özdeğerlerinin aynı olduğu bulunur. (ii) den $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}$ matrisinin özdeğerlerinin negatif olmayan sayılar olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla *AB* matrisinin özdeğerleri de pozitiftir.

Şimdi de (iv) eşitsizliğinin ikinci kısmının ispatını yapalım. AB çarpımı genelde pozitif yarı tanımlı değildir. Bu matris hermityen matris olarak bulunursa pozitif yarı tanımlılığı elde edilmiş olur.

A ve B değişme özelliğine sahipse

$$(AB)^{*}=B^{*}A^{*}=BA=AB \tag{3.31}$$

bulunur ki, *AB* hermityen matris olur. Böylece $AB\geq 0$ dır.

$AB\geq 0$ ise AB hermityen matris olur. Öyleyse

$$AB=(AB)^{*}=B^{*}A^{*}=BA \tag{3.32}$$

elde edilir ki, (iv)'ün ikinci ifadesinin ispatı da tamamlanmış olur (Zhang, 1999).

AB matrisinin pozitif yarı tanımlılığı A ve B matrislerinin değişme özelliğine sahip olması sayesinde olur ki, bu çok kısıtlayıcı bir durumdur. Fakat bu durum Hadamard çarpım için o kadar kısıtlayıcı değildir. Bu konuyla ilgili olarak Schur çarpım teoremi adıyla bilinen bir teorem verelim.

Teorem 3.4.1.2. $A,B\in M_n$ pozitif yarı tanımlı matrisler ise $A\circ B$ hadamard çarpımı da pozitif yarı tanımlıdır. Ayrıca A ve B matrisleri pozitif tanımlı ise $A\circ B$ de pozitif tanımlı matristir (Horn ve Johnson, 1985).

Şimdi de rank, determinant ve matrislerin terslerini içeren bir teorem verelim.

Teorem 3.4.1.3. (Zhang, 1999) $A \geq B \geq 0$ ise

i. $rank(A) \geq rank(B)$

ii. $\det(A) \geq \det(B)$

iii. B ve A tekil olmayan matrisleri için $B^{-1} \geq A^{-1}$

Pozitif tanımlı matrisler için temel determinant eşitsizliği Hadamard eşitsizliği olarak bilinir. Bu alandaki birçok eşitsizlik, bu eşitsizliğin genelleştirmesinden ibarettir. Şimdi bu eşitsizliği verelim.

Teorem 3.4.1.4. $A = \lfloor a_{ij} \rfloor \in M_n$ pozitif yarı tanımlı matris ise

$$\det A \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{3.33}$$

dır. Ayrıca A pozitif tanımlı matris olduğunda eşitlik durumu A matrisinin köşegen matris olması ile elde edilir (Horn ve Johnson, 1985).

Her pozitif yarı tanımlı matrisin pozitif yarı tanımlı bir karekökü olduğunu biliyoruz. Pozitif yarı tanımlı matrisler için karekök alma işlemi matris monoton fonksiyondur. Yani, karekök alma işlemi Löwner'in kısmi sıralamasını korur. Ama bunu ispatlamadan önce ispatımız için gerekli olan bir Lemma verelim.

Lemma 3.4.1.1. A, B hermityen matrisler ve A pozitif tanımlı olsun. $S = AB + BA$ symmetrized (simetrik) çarpımı pozitif yarı tanımlı ise B matrisi de pozitif yarı tanımlıdır (Bhatia, 2007).

Şimdi ana teoremimize geçelim.

Teorem 3.4.1.5. A ve B pozitif yarı tanımlı matrisler olsun. Öyleyse

$$A \geq B \Rightarrow A^{\frac{1}{2}} \geq B^{\frac{1}{2}} \tag{3.34}$$

dir (Bhatia, 2007).

İspat:

$$X^2 - Y^2 = \frac{(X+Y)(X-Y) + (X-Y)(X+Y)}{2} \tag{3.35}$$

eşitsizliği doğrudur. X ve Y pozitif tanımlı matrisler ise $X+Y$ matrisinin de pozitif tanımlı olduğunu biliyoruz. Böylece $X^2 - Y^2$ pozitif yarı tanımlı ise Lemma 3.4.1.1. den X-Y matrisi de pozitif yarı tanımlıdır. Yani, $X^2 \geq Y^2 \Rightarrow X \geq Y$ dir.

Fakat bunun tersi doğru değildir. Yani $X \geq Y \Rightarrow X^2 \geq Y^2$ yazılamaz. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri için $A \geq B$ doğrudur. Fakat $A^2 \geq B^2$ eşitsizliği doğru değildir (Bhatia, 2007).

Teorem 3.4.1.6. $A \geq B \geq 0 \Rightarrow A^p \geq B^p \qquad 0 \leq p \leq 1$ (3.36)

(Bhatia, 2007).

Teorem 3.4.1.7. (Oppenheim eşitsizliği**)** A ve B pozitif yarı tanımlı matrisler ise

$$(\det A)\prod_{i=1}^{n} b_{ii} \leq \det A \circ B \tag{3.37}$$

dir (Horn ve Johnson, 1985).

Teorem 3.4.1.8. A ve B, $n \times n$ pozitif yarı tanımlı matrisler ise

$$\left[\det(A+B)\right]^{\frac{1}{n}} \geq (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}} \tag{3.38}$$

dir (Horn ve Johnson, 1985).

3.5. Matris Ortalamaları

Bu kısımda çalışmamızda önemli bir yere sahip olan matris ortalamalarından bahsedeceğiz. Sayılar için iyi bilinen bu ortalamaların matrisler için de geçerli olup olmadığını irdeleyeceğiz. Aritmetik ortalama, geometrik ortalama, harmonik ortalama, logaritmik ortalama ve Heinz ortalama bu ortalama türlerinin önde gelenlerindendir.

Biz tezimizde özellikle aritmetik, geometrik ve Heinz ortalamalarının üzerinde duracağız. Matrisler için farklı bir geometrik ortalama vereceğiz. Bahsettiğimiz diğer ortalama türlerinden ise kısaca bahsedeceğiz.

a ve b pozitif sayılar olsun. Bu sayıların aritmetik, geometrik, harmonik, logaritmik ve Heinz ortalamaları sırasıyla

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{(Aritmetik ortalama)}$$

$$G(a,b) = \sqrt{ab} \qquad \text{(Geometrik ortalama)}$$

$$H(a,b) = \left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1} \qquad \text{(Harmonik ortalama)}$$

$$L(a,b) = \frac{a-b}{\log a - \log b} = \int_0^1 a^t b^{1-t}\,dt \qquad \text{(Logaritmik ortalama)}$$

$$H_v(a,b)=\frac{a^v b^{1-v}+a^{1-v}b^v}{2},\quad 0\le v\le 1 \qquad \text{(Heinz ortalaması)}$$

şeklinde gösterilebilir.

Bu ortalamaların hepsini $M(a,b)$ ile gösterip özelliklerini şu şekilde verebiliriz.

1. $M(a,b)>0$,
2. $a\le b$ ise $a\le M(a,b)\le b$,
3. $M(a,b)=M(b,a)$,
4. *a* ve *b*’ ler için $M(a,b)$ monoton artandır,
5. a,b ve α pozitif sayıları için $M(\alpha a,\alpha b)=\alpha M(a,b)$,
6. *a* ve *b*’ ler için $M(a,b)$ süreklidir.

Bu ortalama türleri arasında çok iyi bilinen sıralamalardan bazıları

$$H(a,b)\le G(a,b)\le L(a,b)\le A(a,b)$$

$$G(a,b)\le H_v(a,b)\le A(a,b)$$

olarak verilebilir. Günümüzde bu sıralamaların matris versiyonları üzerine çalışmalar yapılmaktadır. Ama iki temel sorun vardır. Bunlardan biri matrisin nasıl seçileceği diğeri ise $\le$ eşitsizliğinin matrisler arasında ne olacağıdır.

Yapılan çalışmalarda matrisler pozitif tanımlı olarak seçilmiş, $\le$ eşitsizliği ise Löwner kısmi sıralaması olarak alınmıştır. Acaba yukarıda bahsedilen (1)-(6) şartları matrisler için nasıl düşünülmelidir? Bu şartlardan (5)’ in yeni bir yorumunu yapmamız gerekir. (5) şartı, *a*, *b* pozitif sayıları ve sıfır olmayan *x* kompleks sayısı için

$$M(\bar{x}ax,\bar{x}bx)=\bar{x}M(a,b)x$$

olarak yazılabilir. Bu ifadenin matris versiyonu ise $A,B>0$ ve *X* tekil olmayan matrisi için

$$(5')\quad M(X^*AX,X^*BX)=X^*M(A,B)X$$

olarak alınabilir. Bu şart kongrüans invaryans olarak adlandırılır. Bu ifade doğru ise *M*’ ye kongrüans altında invaryanttır denir.

Şimdi de yukarıda bahsettiğimiz ortalama türlerinin matrisler için bu şartları sağlayıp sağlamadığına genel olarak bakalım.

A, *B* pozitif tanımlı matrisler için aritmetik ortalama

$$M(A,B)=\frac{1}{2}(A+B)$$

ifadesidir. Dikkatlice incelenirse bu ortalama türünün matrisler için (1)-(6) şartlarının hepsini sağladığı görülür.

O halde geometrik ortalama için ne söylenebilir? *A*, *B* pozitif tanımlı matrisler olarak alınsa bile *AB* çarpımı pozitif tanımlı değildir. Çarpımın pozitif tanımlı olması için *A* ve *B* matrislerinin değişme özelliğine sahip olması gerekir. Bu durumda geometrik orta $A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}$ matrisidir. Ama bu durum, matrisler için çok sınırlayıcı bir durumdur. Dolayısıyla farklı bir geometrik ortalama tanıtmamız gerekir. Tezimizde de önemli bir yere sahip olan bu ortalama

$$A\# B = A^{\frac{1}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} \tag{3.39}$$

olarak alınabilir. Bu geometrik ortalama (1)-(6) şartlarını sağlar. Ayrıca *A* ve *B* değişme özelliğine sahip olan matrisler ise

$$A\# B = A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} \tag{3.40}$$

olduğu rahatlıkla görülür (Bhatia, 2007).

Şimdi de bu geometrik ortalama için bir teorem verelim.

Teorem 3.5.1. *A* ve *B* pozitif tanımlı matrisler olsun.

$$A\# B = A^{\frac{1}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$$

olarak alınırsa

i. $A\# B = B\# A$

ii. $A\# B$, $XA^{-1}X = B$ denkleminin tek pozitif çözümüdür.

iii. Ayrıca $A\# B = \max\left\{X : X = X^{*}, \begin{bmatrix} A & X \\ X & B \end{bmatrix} \geq 0\right\}$

ifadeleri doğrudur (Bhatia, 2007).

Hatta $(A\# B)^{-1} = A^{-1}\# B^{-1}$ olduğu da elde edilebilir.

Bu geometrik ortalamanın farklı gösterimleri vardır. Şimdi bunları verelim.

Teorem 3.5.2. *A* ve *B* pozitif tanımlı matrisler, *U*, $A^{\frac{1}{2}}UB^{\frac{1}{2}}$ pozitif tanımlı olacak şekilde bir üniter matris ise

$$A\# B = A^{\frac{1}{2}}UB^{\frac{1}{2}} \tag{3.41}$$

dir (Bhatia, 2007).

Teorem 3.5.3. A ve B pozitif tanımlı matrisler ve $(A^{-1}B)^{\frac{1}{2}}$, $A^{-1}B$ matrisinin pozitif özdeğerlere sahip olan karekökü olsun. Bu takdirde

$$A\#B = A(A^{-1}B)^{\frac{1}{2}} \tag{3.42}$$

dir (Bhatia, 2007).

Teorem 3.5.4. A, B pozitif tanımlı matrisler ise

$$A\#B = (A+B)[(A+B)^{-1}A(A+B)^{-1}B]^{\frac{1}{2}} \tag{3.43}$$

dır. (Köşeli parantezin içindeki matrisin pozitif özdeğerlere sahip olduğunu ve karekökünün pozitif olduğunu kabul ediyoruz.) (Bhatia, 2007).

Teorem 3.5.5. A ve B 2×2 pozitif tanımlı matrisler, ayrıca her iki matrisin determinantı 1 ise

$$A\#B = \frac{A+B}{\sqrt{\det(A+B)}} \tag{3.44}$$

dir (Bhatia, 2007).

Farklı aritmetik ve geometrik ortalama türleri de vardır. v ağırlıklı aritmetik ortalama ve v ağırlıklı geometrik ortalama diye bilinen bu ortalama türlerini şu şekilde açıklayabiliriz. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrislerini alalım. A pozitif tanımlı, B de pozitif yarı tanımlı matris olsun. $v \geq 0$ için $A\#_v B$ matrisi

$$A\#_v B = A^{\frac{1}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^v A^{\frac{1}{2}} \tag{3.45}$$

şeklinde alınabilir. $0 \leq v \leq 1$ için

$$(1-v)A + vB \tag{3.46}$$

matrisine A ve B matrislerinin v- ağırlıklı aritmetik ortalaması,

$$A\#_v B \tag{3.47}$$

matrisine A ve B matrislerinin v-ağırlıklı geometrik ortalaması denir. Özellikle $v = \frac{1}{2}$ için $A\#_{\frac{1}{2}} B$, A ve B matrislerinin geometrik ortalamasıdır (Kubo ve Ando, 1980).

$A, B \in M_n(\mathbb{C})$ pozitif tanımlı matrisler ise $0 \leq v \leq 1$ için

$$A\#_v B = B\#_{1-v} A \tag{3.48}$$

olduğu görülebilir. Ayrıca A ve B değişme özelliğine sahip matrisler ise $v \geq 0$ için

$$A\#_v B = A^{1-v} B^v \tag{3.49}$$

yazılabilir. Ters çevrilebilir $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisi ile pozitif yarı tanımlı $B \in M_n(\mathbb{C})$ matrisi ve $0 \le v \le 1$ için

$$A^*(A^{*^{-1}} BA^{-1})^v A \le (1-v)A^*A + vB \tag{3.50}$$

eşitsizliği vardır. Eşitlik durumu $A^*A = B$ durumunda geçerlidir. Özellikle (3.50) eşitsizliğinde A pozitif tanımlı olarak alınıp, A yerine $A^{\frac{1}{2}}$ yazarsak

$$A\#_v B \le (1-v)A + vB \tag{3.51}$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitlik durumu $A = B$ olması durumunda geçerlidir (Merris ve Pierce, 1972).

Şimdi de Heinz ortalamasından bahsedelim. $0 \le v \le 1$ için

$$H_v(a,b) = \frac{a^v b^{1-v} + a^{1-v} b^v}{2} \tag{3.52}$$

ortalaması Heinz ortalaması olarak bilinir. Heinz ortalaması ile ilgili bazı özellikler verelim.

1. $H_v(a,b) = H_{1-v}(a,b)$
2. $v = \frac{1}{2}$ için $H_{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$
3. $H_0(a,b) = H_1(a,b) = \frac{a+b}{2}$
4. a,b pozitif sayılar olmak şartıyla $[0,1]$ aralığında $H_v(a,b)$, v nin konveks fonksiyonudur ve minimum değerini $v = \frac{1}{2}$ de alır. Böylece

$$\sqrt{ab} \le H_v(a,b) \le \frac{a+b}{2} \tag{3.53}$$

olduğu görülür.

5. $\int_0^1 H_v(a,b)d_v = L(a,b)$ eşitliği de doğrudur.

$0 \le v \le 1$ için A ve B matrislerinin v-ağırlıklı Heinz ortalaması ise

$$H_v(A,B) = \frac{A\#_v B + A\#_{1-v} B}{2} \tag{3.54}$$

olarak alınabilir. Buradan

$$H_v(A,B) = H_{1-v}(A,B) = H_v(B,A) \tag{3.55}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Ayrıca (3.51) den

$$H_v(A,B) \leq \frac{A+B}{2} \tag{3.56}$$

yazılabilir (Bhatia, 2007).

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Çalışmamızın bu bölümünde aritmetik-geometrik eşitsizliklerin farklı matris versiyonları, Heinz ortalaması ile olan ilişkileri incelenecek ayrıca bu ortalama türlerinin singüler değerleri ve unitarily invaryant normları üzerinde durulacaktır.

a ve b pozitif sayılarının aritmetik-geometrik eşitsizlikleri birçok yolla ifade edilebilir. Bunlardan bazıları

1. $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$ (4.1)

2. $ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$ (4.2)

3. $ab \leq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ (4.3)

eşitsizlikleridir. Bu eşitsizliklerin her biri diğerinden elde edilebilir. Bu çalışmadaki amacımız a ve b pozitif sayılarının yerine A ve B pozitif yarı tanımlı matrislerini yerleştirdiğimizde bu eşitsizliklerin doğru olup olmadığını araştırmaktır. Fakat karşımıza temel olarak iki problem çıkar. Bunlardan biri A ve B matrislerinin genelde çarpmaya göre değişme özelliğine sahip olmamasıdır. Bu matrisler değişme özelliğine sahip olmadığında AB çarpımı pozitif yarı tanımlı olmamaktadır. Bu sorundan kurtulmamızın yollarından biri matrisleri karşılaştırmak yerine singüler değerlerini ve normlarını karşılaştırmaktır. İkinci problem ise matrislerin karekök ve kare alma fonksiyonlarının ayrı ayrı monotonluk özelliklerine sahip olmasıdır. Dolayısıyla (4.1), (4.2) ve (4.3) eşitsizliklerin hepsinin farklı matris versiyonları vardır. Örneğin (4.1) in singüler değer versiyonu

$$s_j^{\frac{1}{2}}(AB) \leq \frac{1}{2} s_j(A+B)\,, \tag{4.4}$$

(4.2) nin singüler değer versiyonu

$$s_j(AB) \leq s_j\left(\frac{A^2+B^2}{2}\right) \tag{4.5}$$

ve (4.3) ün singüler değer versiyonu ise

$$s_j(AB) \leq \frac{1}{4} s_j^2(A+B) \tag{4.6}$$

dir.

Dikkatlice incelenirse (4.4) ve (4.6) eşitsizliklerinin aynı olduğu görülür. Ayrıca

$$\left(\frac{A+B}{2}\right)^2 \leq \frac{A^2+B^2}{2} \tag{4.7}$$

olduğundan (4.4) eşitsizliğinin (4.5) eşitsizliğinden daha kuvvetli olduğu söylenebilir.

Bu aritmetik-geometrik eşitsizliklerin norm versiyonları ise sırasıyla

$$\left|\left|\left| \, |AB|^{\frac{1}{2}} \right|\right|\right| \leq \frac{1}{2} |||A+B|||, \tag{4.8}$$

$$|||AB||| \leq \frac{1}{2} |||A^2+B^2|||, \tag{4.9}$$

ve

$$|||AB||| \leq \frac{1}{4} |||(A+B)^2||| \tag{4.10}$$

olarak verilir.

Biz çalışmamızda bu eşitsizliklerin bazılarının ispatlarını verip genelleştirmelerini yapacağız. Daha kuvvetli versiyonlarının olup olmadığını inceleyeceğiz. Bazı eşitsizlikler ise hala açık problem olarak durmaktadır.

Bu ispatlara geçmeden önce üzerinde durmamız gereken bir konu var. Matris eşitsizlikleri, singüler değer eşitsizlikleri ve norm eşitsizliklerinden hangisi daha kuvvetlidir? Bu sorunun cevabını bir örnekle anlatalım.

a ve b pozitif sayıları için

$$|a-b| \leq a+b \tag{4.11}$$

eşitsizliği doğru bir eşitsizliktir. Pozitif tanımlı matrisler için bu eşitsizliğin matris versiyonu

$$|A-B| \leq A+B \tag{4.12}$$

olarak düşünülebilir. Ama bu eşitsizlik her zaman doğru değildir. Örneğin

$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ matrislerini alalım. Bu iki matristen $|A-B| = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ve $A+B = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ matrisleri elde edilir. $A+B-|A-B|$ matrisinin determinantının sıfırdan küçük olması sebebiyle $|A-B| \leq A+B$ olmadığı kolaylıkla görülür. Acaba (4.11) eşitsizliğinin singüler değer versiyonu doğru mudur?

$1 \leq j \leq n$ singüler değer versiyonu olacak

$$s_j(A-B) \le s_j(A+B) \tag{4.13}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Lakin *A*-*B* matrisinin singüler değerleri $\{3,3\}$, *A*+*B* matrisinin ki ise $\{9,1\}$ olarak bulunur ki, iddiamız boşa çıkmış olur.

(4.11) eşitsizliğinin norm versiyonu da

$$\left\|A-B\right\| \le \left\|A+B\right\| \tag{4.14}$$

olarak yazılır ki, bu doğrudur.

Buradan çıkaracağımız sonuç; bir skaler eşitsizliğin matris versiyonunun güçlü bir iddia olduğudur. Bu durum ispatlanmazsa singüler değerlere geçilir. Eğer bu da yanlış olursa en zayıf durum olarak norm eşitsizliklerine geçilir. Ama bir eşitsizlik normlar için ispatlanmıyorsa diğer durumlara bakılmaz.

Fakat singüler değerler için doğru olan bir eşitsizlik varsa, örneğin (4.13) doğru ise U üniter matrisi için $U^*(A-B)U \le A+B$ yazılabilir.

Çalışmamızın devamında çoğunlukla (4.2) eşitsizliğini alıp matris versiyonunu, singüler değerlerini ve normlarını inceleyecek ve bazı genelleştirmelerini yapacağız. Daha kuvvetli eşitsizliklerin varlığını inceleyeceğiz. Ayrıca Heinz ortalaması ile karşılaştırmalar yapacağız. (4.2) dışındaki diğer skaler eşitsizliklerin matris versiyonlarından ise kısaca bahsedeceğiz.

a ve b pozitif sayıları için aritmetik-geometrik eşitsizliği $ab \le \frac{(a^2+b^2)}{2}$ olarak alalım. Bu eşitsizliğin matris versiyonu A, B pozitif yarı tanımlı matrisler için

$$AB \le \frac{A^2+B^2}{2} \tag{4.15}$$

eşitsizliğidir. Eğer A ve B matrisleri değişme özelliğine sahipse AB çarpımı pozitif yarı tanımlı olup eşitsizlik doğru olur. Fakat genel durumda AB pozitif yarı tanımlı değildir. İfadeyi korumak için eşitsizliği

$$|AB| \le \frac{A^2+B^2}{2} \tag{4.16}$$

şeklinde yazabiliriz. Ama bu eşitsizlikte doğru değildir. Örneğin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri için

$$|AB| = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \frac{1}{2}(A^2 + B^2) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrislerini elde ederiz. Bu matrislerin eşitsizliği sağlamadığı kolaylıkla görülür. Şimdi matrisler arasında sağlanmayan bu eşitsizliğin singüler değerler arasında sağlanıp sağlanmadığına bakalım.

Teorem 4.1. A ve B $n \times n$ matrisler ve $1 \leq j \leq n$ için

$$2s_j(A^*B) \leq s_j(AA^* + BB^*) \tag{4.17}$$

dir (Bhatia ve Kittaneh, 2008).

İspat: $X = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $U = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$ matrislerini alalım. Buradan

$XX^* = \begin{bmatrix} AA^* + BB^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $X^*X = \begin{bmatrix} A^*A & A^*B \\ B^*A & B^*B \end{bmatrix}$ matrislerini elde edebiliriz. X^*X matrisinin köşegen olmayan kısmı

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & A^*B \\ B^*A & 0 \end{bmatrix} = \frac{X^*X - U(X^*X)U^*}{2} \tag{4.18}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $U(X^*X)U^*$ matrisi pozitif yarı tanımlıdır. Böylece $Y \leq \frac{1}{2}X^*X$ olur. Weyl'in monotonluk prensibinden $j = 1,2,...,2n$ için

$$\lambda_j(Y) \leq \frac{1}{2}\lambda_j\left(X^*X\right) \tag{4.19}$$

elde edilir. X^*X matrisi ile XX^* matrisinin özdeğerleri aynıdır. (4.19) eşitsizliğini $j = 1,2,...,2n$ için

$$\lambda_j(Y) \leq \frac{1}{2}\lambda_j\left(XX^*\right) \tag{4.20}$$

şeklinde yazılabilir. XX^* matrisinin özdeğerleri n tane 0 ile beraber $AA^* + BB^*$ matrisinin özdeğerleridir. Y matrisinin özdeğerleri de negatifleriyle beraber A^*B nin singüler değerleridir. Öyleyse yukarıdaki eşitsizlik $1 \leq j \leq n$ için

$$2s_j(A^*B) \leq s_j(AA^* + BB^*)$$

olarak yazılır ki, ispat tamamlanmış olur (Bhatia ve Kittaneh, 2008).

Bu teoremde A ve B yi pozitif yarı tanımlı matrisler olarak alırsak $1 \leq j \leq n$ için

$$2s_j(AB) \leq s_j(A^2 + B^2) \tag{4.21}$$

eşitsizliğini elde ederiz ki (4.2) eşitsizliğinin matris versiyonunun singüler değerler için sağlandığı görülür. Singüler değerler için sağlanan bu eşitsizliğin unitarily invaryant normlar için sağlandığı aşikardır.

Sonuç 4.1. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ ve $|||\bullet|||$ unitarily invaryant normları göstersin. Bu takdirde

$$2|||A^* B||| \leq |||AA^* + BB^*||| \tag{4.22}$$

eşitsizliği doğrudur.

Bu eşitsizliğin bir genelleştirmesini $2|||A^* XB||| \leq |||AA^* X + XBB^*|||$ şeklinde ifade edebiliriz. Bu eşitsizliği ispata geçmeden önce bir teorem verelim.

Teorem 4.2. AB çarpımı hermityen matris olacak şekilde $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrislerini alalım. Bütün unitarily invaryant normlar için

$$|||\operatorname{Re} BA||| \geq |||AB||| \tag{4.23}$$

eşitsizliği doğrudur. Burada *ReBA*, *BA* matrisinin reel kısmıdır. (Kittaneh, 1992)

Teorem 4.3. *A, B, X* $n \times n$ matrisler olsun. Bu takdirde $|||\bullet|||$ unitarily invaryant normlar için

$$|||AA^* X + XBB^*||| \geq 2|||A^* XB||| \tag{4.24}$$

dir (Kittaneh, 1992).

İspat: $A, B, X \in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri için *T* ve *Y*, $4n \times 4n$ matrislerini

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \\ A^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B^* & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } Y = \begin{bmatrix} 0 & X & 0 & 0 \\ X^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde seçelim. *T* ve *Y* hermityen matrisler olduğundan *TYT* matrisi de hermityen matristir. (4.23) *TY* ve *T* matrisleri için uygulanırsa

$$|||\operatorname{Re}(T^2 Y)||| \geq |||TYT||| \tag{4.25}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$|||T^2 Y + YT^2||| \geq 2|||TYT||| \tag{4.26}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikten yararlanarak

$$T^2Y + YT^2 = \begin{bmatrix} 0 & AA^*X + XBB^* & 0 & 0 \\ BB^*X^* + X^*AA^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$TYT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^*XB \\ 0 & 0 & B^*X^*A & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan

$$|||A \oplus A^*||| = |||A \oplus A||| \tag{4.27}$$

bilinen eşitliğini de kullanarak

$$|||AA^*X + XBB^*||| \geq 2|||A^*XB|||$$

eşitsizliği elde edilir (Kittaneh, 1992).

(4.24) eşitsizliğinin singüler değer formu ise yoktur.

Ayrıca (4.24) eşitsizliğinde *A*, *B* matrislerini pozitif yarı tanımlı olarak seçersek

$$|||A^2X + XB^2||| \geq 2|||AXB||| \tag{4.28}$$

eşitsizliği yazılabilir. *A*, *B* pozitif yarı tanımlı matrisleri yerine $A^{\frac{1}{2}}, B^{\frac{1}{2}}$ pozitif yarı tanımlı matrisleri yazılırsa,

$$2\left|\left|\left|A^{\frac{1}{2}}XB^{\frac{1}{2}}\right|\right|\right| \leq |||AX + XB||| \tag{4.29}$$

eşitsizliği elde edilir.

Daha önce tanıttığımız ortalama türlerinden biri de Heinz ortalaması idi. Bu ortalama türü geometrik ortalama ile aritmetik ortalama arasında yer alır. Yani,

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a^v b^{1-v} + a^{1-v} b^v}{2} \leq \frac{a+b}{2} \tag{4.30}$$

eşitsizliğidir. Bunun matris versiyonu (4.29) un yeni bir formu olduğu kolaylıkla görülür. Bu eşitsizliği bir teorem olarak verelim.

Teorem 4.4. A, B pozitif yarı tanımlı matrisler, $X \in M_n(\mathbb{C})$ ve $|||\bullet|||$ unitarily invaryant normları olsun. O zaman

$$2\left|\left|\left|A^{\frac{1}{2}}XB^{\frac{1}{2}}\right|\right|\right| \le \left|\left|\left|A^{v}XB^{1-v} + A^{1-v}XB^{v}\right|\right|\right| \le \left|\left|\left|AX + XB\right|\right|\right| \tag{4.31}$$

şeklinde alınabilir (Bhatia ve Davis, 1993).

Ayrıca (4.31) eşitsizliğinin farklı bir versiyonunu şu şekilde ifade edilebilir:

Teorem 4.5. $A, B \ge 0$ ve $X \in M_n(\mathbb{C})$ için

$$(2+t)\left|\left|\left|A^{r}XB^{2-r} + A^{2-r}XB^{r}\right|\right|\right| \le 2\left|\left|\left|A^{2}X + tAXB + XB^{2}\right|\right|\right| \tag{4.32}$$

eşitsizliği $1 \le 2r \le 3$, $-2 < t \le 2$ şartlarını sağlayan r,t reel sayıları için doğrudur (Zhan, 2002).

(4.31) eşitsizliğinin sağ tarafının singüler değer formu (Zhan, 2002)' de açık problem olarak sunuldu. Bu eşitsizlik $0 \le v \le 1$ için

$$s_j\left(A^{v}B^{1-v} + A^{1-v}B^{v}\right) \le s_j(A+B), \qquad 1 \le j \le n \tag{4.33}$$

dir. Bu eşitsizliğin $v = \dfrac{1}{4}$ için ispatı (Tao, 2006)' de verildi. Ama genel ispatı (Audenaert, 2007)' de yapıldı. Bu ispatı yapmak için önce bir teorem verelim.

Teorem 4.6. f, $[0,\infty)$ aralığında matris monoton bir fonksiyon olsun. Bütün pozitif yarı tanımlı A ve B matrisleri için

$$Af(A) + Bf(B) \ge \frac{1}{2}(A+B)^{\frac{1}{2}}(f(A) + f(B))(A+B)^{\frac{1}{2}} \tag{4.34}$$

dir (Bhatia ve Kittaneh, 2008).

İspat: Tanımdan dolayı f fonksiyonu ayrıca matris konkavdır ve $g(t) = tf(t)$ matris konvekstir. g fonksiyonunun matris konveksliği sayesinde

$$\frac{Af(A) + Bf(B)}{2} \ge \frac{A+B}{2}\, f\left(\frac{A+B}{2}\right) \tag{4.35}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafı $\frac{1}{2}(A+B)^{\frac{1}{2}} f(\frac{A+B}{2})(A+B)^{\frac{1}{2}}$ ifadesine eşittir. Buradan (4.35) eşitsizliği

$$\frac{Af(A) + Bf(B)}{2} \ge \frac{1}{2}(A+B)^{\frac{1}{2}} f(\frac{A+B}{2})(A+B)^{\frac{1}{2}} \tag{4.36}$$

olur. Ayrıca f fonksiyonunun konkavlığı

$$f\left(\frac{A+B}{2}\right) \ge \frac{f(A) + f(B)}{2} \tag{4.37}$$

eşitsizliğini belirtir. (4.34), (4.36) ve (4.37) den kolaylıkla elde edilir (Bhatia ve Kittaneh, 2008).

Şimdi (4.33) ün ispatına geçebiliriz

Teorem 4.7. A, B pozitif yarı tanımlı matrisleri ve $0 \le v \le 1$ için

$$s_j\left(A^v B^{1-v} + A^{1-v} B^v\right) \le s_j(A+B) \quad 1 \le j \le n$$

dir (Audenaert, 2007).

İspat: $f(t) = t^r$ fonksiyonu $0 \le r \le 1$ için matris monotondur. (4.35) den

$$2\lambda_j(A^{1+r} + B^{1+r}) \ge \lambda_j((A+B)(A^r + B^r)) \tag{4.38}$$

olur. 0 dışında, $(A+B)(A^r + B^r)$ matrisinin özdeğerleri, XY ile YX matrisinin özdeğerlerinin aynı olduğundan

$$\begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}} & 0 \\ B^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^r + B^r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}} & B^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri ile aynıdır. (4.38) den ve

$$2s_j(C) \le s_j \begin{bmatrix} K & C \\ C^* & K \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

eşitsizliklerinden

$$\lambda_j(A^{1+r} + B^{1+r}) \ge s_j(A^{\frac{1}{2}}(A^r + B^r)B^{\frac{1}{2}}) = s_j(A^{\frac{1}{2}+r} B^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}+r}) \tag{4.40}$$

elde edilir. A ve B yerine sırasıyla $A^{\frac{1}{1+r}}$ ve $B^{\frac{1}{1+r}}$ yazarsak $0 \le r \le 1$ için

$$s_j(A+B) \ge s_j(A^{\frac{2r+1}{2r+2}} B^{\frac{1}{2r+2}} + A^{\frac{1}{2r+2}} B^{\frac{2r+1}{2r+2}}) \tag{4.41}$$

olur. Diğer bir deyişle $\frac{1}{2} \le v \le \frac{3}{4}$ için

$$s_j(A+B) \ge s_j\left(A^v B^{1-v} + A^{1-v} B^v\right)$$

bulunmuş olur.

Yine 0 dışında, $(A+B)(A^r + B^r)$ matrisinin özdeğerleri ile

$$\begin{bmatrix} A^{\frac{r}{2}} & 0 \\ B^{\frac{r}{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A+B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{\frac{r}{2}} & B^{\frac{r}{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri aynıdır. Yukarıda uygulanan argümanların aynısı uygulandığında $\frac{3}{4} \le v \le 1$ için eşitlik ispatlanmış olur (Audenaert, 2007).

Acaba (4.31) eşitsizliğinin sol tarafının singüler değer formu var mıdır? Bu sorunun cevabını, Audeanart, 2007' de, 3×3 tipinde *A* ve *B* matrisleri için

$$s_2(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}) > s_2(H_v(A,B)) \qquad 0<v<0.13$$

örneğiyle vermiştir.

Şimdi de (4.17)' ye denk olan iki farklı eşitsizlik verelim. Bu eşitsizlikleri önce ispatlayıp sonra denkliklerini gösterelim.

Teorem 4.8. $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ pozitif yarı tanımlı matrisler ise

$$s_j(A-B) \le s_j(A\oplus B) \tag{4.42}$$

dır (Zhan, 2002).

İspat 1: $X = \begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}} & 0 \\ -B^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$ ve $Y = \begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}} & 0 \\ B^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$ matrislerini alalım. Buradan

$X^*Y = \begin{bmatrix} A-B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $XX^* + YY^* = \begin{bmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 2B \end{bmatrix}$ elde edilir. $1\le j\le 2n$ için, bu matrisler (4.17)' de yerine yazılırsa,

$$s_j((A-B)\oplus 0) \le s_j(A\oplus B) \tag{4.43}$$

eşitsizliğini elde edilir ki, bu ifade $s_j(A-B)\le s_j(A\oplus B)$ eşitsizliğini verir (Zhan, 2002).

İspat 2: $H\in M_n$ hermityen matris için

$$s_j(H) = \lambda_j(H\oplus -H), \qquad j=1,2,...,n \tag{4.44}$$

bilinen eşitliğinden hareketle

$$s_j(A-B) = \lambda_j\left[(A-B)\oplus(B-A)\right], \qquad j=1,2,...,n \tag{4.45}$$

ifadesi yazılabilir.

$$(A-B)\oplus(B-A) \le A\oplus B \tag{4.46}$$

olduğundan Weyl'in monotonluk prensibinden

$$\lambda_j\left[(A-B)\oplus(B-A)\right] \le \lambda_j\left(A\oplus B\right), \qquad j=1,2,...,2n \tag{4.47}$$

olur. Ayrıca $j=1,2,...,2n$ için $\lambda_j(A\oplus B) = s_j(A\oplus B)$ olduğundan $j=1,2,...,n$ için $s_j(A-B)\le s_j(A\oplus B)$ dır (Zhan, 2004).

Teorem 4.9. $M \in M_m$, $N \in M_n$ ve $r = \min\{m,n\}$ için $\begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix}$ pozitif yarı tanımlı blok matrisini alalım. O halde $j = 1,2,...,r$ için

$$2s_j(K) \le s_j \begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix} \tag{4.48}$$

eşitsizliği doğrudur (Tao, 2006).

İspat: $\begin{bmatrix} 0 & K \\ K^* & 0 \end{bmatrix}$ matrisini alalım.

$$0 \le \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & -K \\ -K^* & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix} - 2Q \tag{4.49}$$

eşitsizliği doğrudur. Böylece $2Q \le \begin{bmatrix} M & K \\ K^* & Q \end{bmatrix}$ olur. Weyl' in monotonluk prensibinden

$$2\lambda_j(Q) \le \lambda_j \begin{bmatrix} M & K \\ K^* & Q \end{bmatrix} \tag{4.50}$$

olur. Bu eşitsizlik dikkatlice incelendiğinde

$$\lambda_j(Q) = (s_1(K),...,s_r(K),\underbrace{0,...,0}_{m+n-2r},-s_r(K),...,-s_1(K))^T$$

dır ki,

$$2s_j(K) \le s_j \begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix} \qquad j = 1,2,...,r$$

olduğu görülür.

Şimdi (4.17), (4.48) ve (4.42) ifadelerinin denk olduğunu bir teoremle verelim

Teorem 4.10. Aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

i. *A*, *B* pozitif yarı tanımlı matrisler için

$$s_j(A - B) \le s_j(A \oplus B) \ , \quad j = 1,2,...,n$$

ii. $X, Y \in M_n$ için

$$2s_j(XY^*) \le s_j(X^*X + Y^*Y), \ j = 1,2,...,n$$

iii. $M, N \in M_n$ ve $\begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix}$ pozitif yarı tanımlı blok matrisi için

$$2s_j(K) \le s_j \begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix}, \ j = 1,2,...,n \text{ (Tao, 2006)}$$

İspat: $i \Rightarrow ii$

$X,Y \in M_n$ için $C = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ ve $D = \begin{bmatrix} X \\ -Y \end{bmatrix}$ matrislerini alalım. (i)' den

$$\begin{aligned} 2s_j \begin{bmatrix} YX^* & 0 \\ 0 & XY^* \end{bmatrix} &= 2s_j \begin{bmatrix} 0 & XY^* \\ YX^* & 0 \end{bmatrix} = s_j(CC^* - DD^*) \le s_j \begin{bmatrix} CC^* & 0 \\ 0 & DD^* \end{bmatrix} \\ &= s_j \begin{bmatrix} C^*C & 0 \\ 0 & D^*D \end{bmatrix} = s_j \begin{bmatrix} X^*X + Y^*Y & 0 \\ 0 & X^*X + Y^*Y \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.51}$$

dır. Böylece $j = 1,2,...,n$ için $2s_j(XY^*) \le s_j(X^*X + Y^*Y)$ eşitsizliği elde edilir.

$ii \Rightarrow iii$

$\begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix} \ge 0$ olduğundan $S,T \in M_{2n,n}$ matrisleri var olmalıdır ki,

$$(S,T)^*(S,T) = \begin{bmatrix} S^*S & S^*T \\ T^*S & T^*T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix} \ge 0 \tag{4.52}$$

eşitsizliği vardır. (ii)' den $j = 1,2,...,n$ için

$$2s_j(K) = 2s_j(S^*T) \le s_j(SS^* + TT^*) = s_j \begin{bmatrix} S^*S & S^*T \\ T^*S & T^*T \end{bmatrix} = s_j \begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix} \tag{4.53}$$

dir.

$iii \Rightarrow i$

$A,B \in M_n$ pozitif yarı tanımlı matrisleri için

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I & I \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{A+B}{2} & \frac{A-B}{2} \\ \frac{A-B}{2} & \frac{A+B}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I & I \\ -I & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \ge 0$$

üniter benzerlik dönüşümü vardır. (iii)' den $j = 1,2,...,n$ için

$$s_j(A-B) \le s_j \begin{bmatrix} \frac{A+B}{2} & \frac{A-B}{2} \\ \frac{A-B}{2} & \frac{A+B}{2} \end{bmatrix} = s_j \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

eşitsizliği ispatlanmış olur.

Ayrıca $s_j(A-B) \le s_j(A \oplus B)$ eşitsizliğinin doğru olması, eşitsizliğin unitarily invaryant normlar için de doğru olduğu sonucunu ortaya çıkarır. Bunu bir sonuç olarak verelim.

Sonuç 4.2. A ve B pozitif yarı tanımlı matrisler olmak üzere

$$|||A-B||| \le |||A \oplus B||| \tag{4.54}$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu bölümün başında $|||A-B||| \le |||A+B|||$ olduğunu söylemiştik. Şimdi (4.54) eşitsizliği ile bu eşitsizliğin sağ taraflarını karşılaştıralım.

Teorem 4. 11. A ve B pozitif yarı tanımlı matrisler olmak üzere

$$|||A \oplus B||| \le |||A+B||| \tag{4.55}$$

dir (Bhatia ve Kittaneh, 2008).

İspat: $X = \begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}} & B^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsun**.** Bu matristen $XX^* = \begin{bmatrix} A+B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve

$X^*X = \begin{bmatrix} A & A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} \\ B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} & B \end{bmatrix}$ matrisleri yazılabilir. $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = A \oplus B$ direkt toplamı X^*X matrisinin parçasıdır. Dolayısıyla her unitarily invaryant norm için $|||A \oplus B||| \le |||X^*X|||$ eşitsizliği doğrudur. Diğer taraftan $|||X^*X||| = |||XX^*|||$ olduğundan

$$|||A \oplus B||| \le |||(A+B) \oplus 0||| \tag{4.56}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik $|||A \oplus B||| \le |||A+B|||$ şeklinde de yazılabilir ki, ispat tamamlanmış olur.

(4.54) eşitsizliğinin genelleştirmeleri olan farklı eşitsizlikler literatürde mevcuttur. Bunlardan birkaçını ispatsız olarak verelim.

Teorem 4.12. $|||\bullet|||$ unitarily invaryant normları ve $\|\bullet\|$ spektral normunu göstermek üzere $A, B \in M_n$ matrisleri için

$$|||AX - XB||| \le \|X\| \, |||A \oplus B||| \tag{4.57}$$

eşitsizliği doğrudur (Kittaneh, 2007).

Teorem 4.13. $|||\bullet|||$ unitarily invaryant normları, ve $\|\bullet\|$ spektral normu göstermek üzere A, B, X pozitif yarı tanımlı matrisleri için

$$|||AX - XA||| \le \frac{1}{2}\|A\| \, |||X \oplus X||| \tag{4.58}$$

eşitsizliği geçerlidir (Kittaneh, 2007).

Teorem 4.14. $A, B, X \in M_n$ ve A, B pozitif yarı tanımlı matrisler olsun. $\|\bullet\|$ spektral normu göstermek üzere, bütün unitarily invaryant normlar için

$$\|\|AX - XB\|\| \leq \max(\|A\|, \|B\|)\|\|X\|\| \tag{4.59}$$

dır. (Kittaneh, 2007)

Teorem 4.15. $A, B, X \in M_n$ ve A, B pozitif yarı tanımlı matrisler olsun. $\|\bullet\|$ spektral normu göstermek üzere $j = 1,2,...,n$ için

$$s_j(AX - XB) \leq \|X\| s_j(A \oplus B) \tag{4.60}$$

dır (Kittaneh, 2007).

Teorem 4.16. $\|\bullet\|$ spektral normu olmak üzere A, B pozitif yarı tanımlı matrisleri için

$$\begin{aligned} \max(\|A\|, \|B\|) - \left\| A^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} \right\| &\leq \|A - B\| \leq \max(\|A\|, \|B\|) \leq \|A + B\| \\ &\leq \max(\|A\|, \|B\|) + \left\| A^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} \right\| \end{aligned} \tag{4.61}$$

eşitsizliği doğrudur (Kittaneh, 2004).

Teorem 4.17. A ve B pozitif tanımlı matrisleri ters çevrilebilir olsunlar. $n \geq 1$ tamsayısı ve bütün unitarily invaryant normları için

$$\|\|A^n XB^{-n+1} - A^{-n+1} XB^n\|\| \leq \frac{2n-1}{2n+1} \|\|A^{n+1} XB^{-n} - A^{-n} XB^{n+1}\|\|$$

dir (Hirzallah ve Kittaneh, 2010).

Teorem 4.18. A ve B pozitif tanımlı matrisleri ters çevrilebilir olsunlar. $X \in M_n(\mathbb{C})$, $n \geq 1$ tamsayıları ve bütün unitarily invaryant normlar için

$$\|\|A^n X - XB^n\|\| \leq \frac{n}{n+2} \|\|A^{n+1} XB^{-1} - A^{-1} XB^{n+1}\|\| \tag{4.62}$$

dır (Hirzallah ve Kittaneh, 2010).

Teorem 4.19. A ve B pozitif tanımlı matrisleri ters çevrilebilir olsunlar. $X \in M_n(\mathbb{C})$, $n \geq m \geq 1$ tamsayıları ve bütün unitarily invaryant normlar için

$$\|\|A^m X - XB^m\|\| \leq \frac{m}{2n-m+2} \|\|A^{n+1} XB^{-n+m-1} - A^{-n+m-1} XB^{n+1}\|\| \tag{4.63}$$

dir (Hirzallah ve Kittaneh, 2010).

Teorem 4.20. A ve B pozitif tanımlı ters çevrilebilir matrisler olsunlar. r>0 reel sayısı ve bütün unitarily invaryant normlar için

$$\left\| A^r X - XB^r \right\| \le \frac{r}{r+2} \left\| A^{r+1} XB^{-1} - A^{-1} XB^{r+1} \right\|$$

dır (Hirzallah ve Kittaneh, 2010).

4.1. Matris Young Eşitsizlikleri

$ab \le \frac{\left(a^2 + b^2\right)}{2}$ eşitsizliğinin analizde sıklıkla kullanılan bir genelleştirmesi vardır. Young eşitsizliği olarak bilinen bu eşitsizlik $a, b \ge 0$ ve $0 \le v \le 1$ için

$$a^v b^{1-v} \le va + (1-v)b \tag{4.64}$$

eşitsizliğidir. Eşitlik hali $a=b$ olması durumunda sağlanır. Burada $v=1/2$ alırsak $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ aritmetik-geometrik eşitsizliğini elde ederiz.

$p,q>1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için (4.64) eşitsizliği

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{4.65}$$

haline gelir. Ando, 1995' de bu eşitsizliğin matris versiyonunun singüler değer formunu *A*, *B* pozitif yarı tanımlı matrisler ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için

$$s_j(AB) \le s_j\left(\frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}\right) \tag{4.66}$$

şeklinde ispatladı. Bu eşitsizliğin doğruluğu

$$\left\|AB\right\| \le \left\|\frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}\right\| \tag{4.67}$$

eşitsizliğinin de doğru olduğunu gösterir. Ayrıca Ando, 1994' de bu norm eşitsizliğinin kuvvetli versiyonu olan

$$\left\|AXB\right\| \le \left\|\frac{A^p X}{p} + \frac{XB^q}{q}\right\| \tag{4.68}$$

eşitsizliğinin her zaman doğru olmadığını gösterdi. Kosaki, 1998' de (4.68) eşitsizliğinden daha zayıf olan

$$\left\|AXB\right\| \le \frac{\left\|A^p X\right\|}{p} + \frac{\left\|XB^q\right\|}{q} \tag{4.69}$$

eşitsizliğini ispatladı. Ayrıca bu eşitsizlikten yararlanarak

$$|||AXB||| \le |||A^p X|||^{1/p} + |||XB^q|||^{1/q} \tag{4.70}$$

eşitsizliği de gösterildi. Bu eşitsizlik daha önce (Kittaneh, 1993) ve (Bhatia ve Davis, 1995) de ispatladı.

Ayrıca (4.66) dan Young eşitsizliğinin iz versiyonu, $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ pozitif yarı tanımlı matrisleri ve $0 \le v \le 1$ için

$$tr(A^v B^{1-v}) \le tr(vA + (1-v)B) \tag{4.71}$$

şeklinde yazılabilir.

Young eşitsizliğinin determinant versiyonu olan

$$\det(A^v B^{1-v}) \le \det(vA + (1-v)B) \tag{4.72}$$

eşitsizliğini Ando, 1994' de ispatladı.

Bhatia ve Parthasarathy, 2000 yılında ve Kosaki, 1998' de, $\|\bullet\|_2$ Hilbert-Schmidt normunu göstermek üzere $X \in M_n(\mathbb{C})$ ve A, B pozitif yarı tanımlı matrisleri için

$$\|A^v X B^{1-v}\|_2 \le \|vAX + (1-v)XB\|_2 \tag{4.73}$$

eşitsizliğini ispatlamışlardır. Burada dikkat edilmelidir ki, diğer norm türleri sadece $v = \frac{1}{2}$ değeri için sağlanmaktadır.

Daha önce bahsettiğimiz (4.31) eşitsizliğinin sağ tarafı Heinz eşitsizliği olarak bilinir. Kittaneh ve Manasrah, 2010 yılında ve Hirzallah ve Kittaneh, 2000' de Young ve Heinz eşitsizliklerini geliştirmişlerdir. Bu kısımda biraz bunun üzerinde duracağız.

Teorem 4.1.1. $a, b \ge 0$ ve $0 \le v \le 1$ için

$$a^v b^{1-v} + r_0(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \le va + (1-v)b \tag{4.74}$$

dır. Burada $r_0 = \min\{v, 1\text{-}v\}$ dir (Kittaneh ve Manasrah, 2010).

İspat: $v = \frac{1}{2}$ ise (4.74) eşitsizliği eşitlik haline gelir.

$v < \frac{1}{2}$ olsun. Young eşitsizliğinin de yardımıyla

$$va + (1-v)b - v(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 2v\sqrt{ab} + (1-2v)b \ge (ab)^v b^{1-2v} = a^v b^{1-v} \tag{4.75}$$

dir. Böylece

$$va + (1-v)b \ge v(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + a^v b^{1-v} \tag{4.76}$$

eşitsizliği elde edilir.

$1\text{-}v<1/2$ için

$$va+(1-v)b-(1-v)(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = (2v-1)a+2(1-v)\sqrt{ab} \\ \geq a^{2v-1}(ab)^{1-v} = a^v b^{1-v} \tag{4.77}$$

eşitsizliğinden

$$va+(1-v)b \geq (1-v)(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 + a^v b^{1-v} \tag{4.78}$$

elde edilir. Böylece *v* nin bütün durumları için

$$a^v b^{1-v} + r_0(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \leq va+(1-v)b$$

bulunur ki, ispat tamamlanır.

Şimdi (4.74) den yararlanarak Young eşitsizliğinin iz ve determinant versiyonlarının yeni düzenlemelerini verebiliriz. Ama bunun için önce bir lemma verelim.

Lemma 4.1.1. $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ olsun. O zaman

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(AB) \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(A)s_j(B) \tag{4.79}$$

dır (Kittaneh ve Manasrah, 2010).

Teorem 4.1.2. $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ pozitif yarı tanımlı matrisler ve $0\leq v\leq 1$ için

$$tr\left|A^v B^{1-v}\right| + r_0(\sqrt{trA}-\sqrt{trB})^2 \leq tr(vA+(1-v)B) \tag{4.80}$$

dır. Ayrıca *A* ve *B* pozitif tanımlı matrisler ise

$$\det\left(A^v B^{1-v}\right) + r_0^n \det(A+B-2A\#B) \leq \det(vA+(1-v)B) \tag{4.81}$$

dır. Burada $r_0 = \min\{v,1-v\}$ dir (Kittaneh ve Manasrah, 2010).

İspat: (4.74) eşitsizliğinden $j=1,2,...,n$ için

$$vs_j(A)+(1-v)s_j(B) \geq s_j^v(A)s_j^{1-v}(B)+r_0(s_j^{\frac{1}{2}}(A)-s_j^{\frac{1}{2}}(B))^2 \tag{4.82}$$

dır. O zaman Lemma 4.1.1'den ve Cauchy-Schwarz eşitliğinden

$$\begin{aligned} tr(vA+(1-v)B) &= vtrA+(1-v)trB = \sum_{j=1}^{n}(vs_j(A)+(1-v)s_j(B)) \\ &\geq \sum_{j=1}^{n} s_j(A^v)s_j(B^{1-v})+r_0(\sum_{j=1}^{n}s_j(A)+\sum_{j=1}^{n}s_j(B)-2\sum_{j=1}^{n}s_j^{\frac{1}{2}}(A)s_j^{\frac{1}{2}}(B)) \\ &\geq \sum_{j=1}^{n} s_j\left(A^v B^{1-v}\right)+r_0(trA+trB-2(\sum_{j=1}^{n}s_j(A))^{\frac{1}{2}}(\sum_{j=1}^{n}s_j(B))^{\frac{1}{2}}) \\ &= tr\left|A^v B^{1-v}\right| + r_0(\sqrt{trA}-\sqrt{trB})^2 \end{aligned} \tag{4.83}$$

olur ki ispat tamamlanır.

$j=1,2,...,n$ için,

$$vs_j(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}})+(1-v)\geq s_j^v(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}})+r_0(s_j^{\frac{1}{2}}(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}})-1)^2 \tag{4.84}$$

eşitsizliğini biliyoruz.

$$\begin{aligned}
&\det(vB^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}})+(1-v)I=\prod_{j=1}^{n}(vs_j(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}})+1-v)\\
&\geq\prod_{j=1}^{n}[s_j^v(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}})+r_0(s_j^{\frac{1}{2}}(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}})-1)^2]\\
&\geq\prod_{j=1}^{n}s_j^v(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}})+r_0^n\prod_{j=1}^{n}(s_j^{\frac{1}{2}}(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}})-1)^2\\
&=\det(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}})^v+r_0^n\det((B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}})-I)^2
\end{aligned} \tag{4.85}$$

dir. Sonuç olalarak $\det\left(A^vB^{1-v}\right)+r_0^n\det(A+B-2A\#B)\leq\det(vA+(1-v)B)$ bulunmuş olur ki, ispat tamamlanır.

Dikkat edilmelidir ki, $s_j(AB)\leq s_j(\frac{A^p}{p}+\frac{B^q}{q})$ eşitsizliğinin norm versiyonu

$$|||A^vB^{1-v}|||\leq|||vA+(1-v)B||| \tag{4.86}$$

dir. Ancak üstteki teoremin iz normu sayesinde

$$\|A^vB^{1-v}\|_1+r_0(\sqrt{\|A\|_1}-\sqrt{\|B\|_1})^2\leq\|vA+(1-v)B\|_1 \tag{4.87}$$

eşitsizliği elde edilir ki, bu (4.86)' dan daha kuvvetlidir.

Şimdi (4.74) ün matris versiyonunun unitarily invaryant normlar için sağlanıp sağlanmadığına bakalım. Ama bunun için önce bir lemma verelim.

Lemma 4.1.2. *A* ve *B* pozitif yarı tanımlı olacak şekilde $A,B,X\in M_n(\mathbb{C})$ matrislerini seçelim. $0\leq v\leq 1$ için

$$|||A^vXB^{1-v}|||\leq|||AX|||^v\,|||XB|||^{1-v} \tag{4.88}$$

dir (Kittaneh ve Manasrah, 2010).

Teorem 4.1.3. *A* ve *B* pozitif yarı tanımlı olacak şekilde $A,B,X\in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri verilsin. $0\leq v\leq 1$ ve $r_0=\min\{v,1-v\}$ için

$$|||A^vXB^{1-v}|||+r_0(\sqrt{|||AX|||}-\sqrt{|||XB|||})^2\leq v|||AX|||+(1-v)|||XB|||$$

dir (Kittaneh ve Manasrah, 2010).

İspat: Lemma 4.1.2' den ve (4.74) eşitsizliğinden

$$\left\| A^{v} X B^{1-v} \right\| + r_0 (\sqrt{\|AX\|} - \sqrt{\|XB\|})^2 \\ \leq \|AX\|^{v} \|XB\|^{1-v} + r_0 (\sqrt{\|AX\|} - \sqrt{\|XB\|})^2 \leq v\|AX\| + (1-v)\|XB\| \tag{4.89}$$

eşitsizliği elde edilir ki ispat tamamlanmış olur. (Kittaneh ve Manasrah, 2010)

(4.74) eşitsizliği

$$a^{1-v} b^{v} + r_0 (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \leq (1-v)a + vb \tag{4.90}$$

şeklinde de yazılabilir. Bu eşitsizlik (4.74) eşitsizliği ile taraf tarafa toplanırsa

$$a^{1-v} b^{v} + a^{v} b^{1-v} + 2r_0 (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \leq a + b \tag{4.91}$$

eşitsizliği elde edilebilir. Bu eşitsizliğin matris versiyonunun norm hali sonuç olarak aşağıdaki gibi verilebilir.

Sonuç 4.1.1. A ve B pozitif yarı tanımlı matrisler olmak üzere $A, B, X \in M_n(\mathbb{C})$ matrislerini alalım. $0 \leq v \leq 1$ ve $r_0 = \min\{v, 1-v\}$ için

$$\left\| A^{v} X B^{1-v} + A^{1-v} X B^{v} \right\| + 2r_0 (\sqrt{\|AX\|} - \sqrt{\|XB\|})^2 \leq \|AX\| + \|XB\| \tag{4.92}$$

dır.

Ayrıca (4.74) te a yerine a^2 ve b yerine b^2 yazarsak

$$\left(a^{v} b^{1-v}\right)^2 + r_0 (a-b)^2 \leq va^2 + (1-v)b^2 \tag{4.93}$$

eşitsizliği elde edilir.

Hirzallah ve Kittaneh, 2000' de

$$\left(a^{v} b^{1-v}\right)^2 + r_0^2 (a-b)^2 \leq \left(va + (1-v)b\right)^2 \tag{4.94}$$

eşitsizliğini ispatlanmışlardır. (4.93) ve (4.94) ifadelerini karşılaştırdığımızda (4.93) eşitsizliğinin sağ ve sol tarafının (4.94)' de aynı taraftaki değerlerden daha büyük olduğu görülür. Yani bu iki eşitsizlik için birinin diğerinden daha kuvvetli olduğu söylenemez. Şimdi (4.94) eşitsizliğinin ispatını ve matris versiyonunun Hilbert-Schmidt normu için ispatını verelim.

Teorem 4.1.4. $a, b \geq 0$, $p, q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $r = \max\{p, q\}$ olmak üzere

$$\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)^2 \geq \frac{1}{r^2}(a^p - b^q)^2 + a^2 b^2 \tag{4.95}$$

eşitsizliği doğrudur (Hirzallah ve Kittaneh, 2000).

İspat: $p=q=2$ için (4.95) eşitlik haline döner.

$q>p$ ise $q>2$ dir. Böylece

$$(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q})^2-\frac{1}{q^2}(a^p-b^q)^2=a^p\left((1-\frac{2}{q})a^p+\frac{2}{q}b^q\right) \tag{4.96}$$

eşitliği yazılabilir. (4.64) ifadesini kullanarak kolaylıkla görülür ki

$$(1-\frac{2}{q})a^p+\frac{2}{q}b^q \geq a^{p(1-\frac{2}{q})}b^{q(\frac{2}{q})}=a^{\frac{(q-p)}{q}}b^2 \tag{4.97}$$

dır. Sonuç olarak

$$(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q})^2-\frac{1}{q^2}(a^p-b^q)^2 \geq a^p a^{\frac{(q-p)}{q}}b^2=a^2b^2 \tag{4.98}$$

elde edilir. Böylece

$$(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q})^2 \geq \frac{1}{q^2}(a^p-b^q)^2+a^2b^2 \tag{4.99}$$

dır. $p>q$ için benzer işlemlerle

$$(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q})^2 \geq \frac{1}{p^2}(a^p-b^q)^2+a^2b^2 \tag{4.100}$$

elde edilir ki ispat tamamlanır.

Şimdi de bu eşitsizliğin matris versiyonunun Hilbert-Schmidt normu için ispatına bakalım.

Teorem 4.1.5. $A,B,X\in M_n(\mathbb{C})$ olacak şekilde A ve B pozitif yarı tanımlı matrisler olsun. Ayrıca $p,q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için r=max{p, q} olmak üzere

$$\left\|\frac{1}{p}A^pX+\frac{1}{q}XB^q\right\|_2^2 \geq \frac{1}{r^2}\left\|A^pX-XB^q\right\|_2^2+\left\|AXB\right\|_2^2 \tag{4.101}$$

dır (Hirzallah ve Kittaneh, 2000).

İspat: Bütün pozitif yarı tanımlı matrisler üniter olarak köşegenleştirilebildiğinden öyle $U,V\in M_n(\mathbb{C})$ üniter matrisler vardır ki $\lambda_i,\mu_i\geq 0$ için

$$A=U\lambda U^* \qquad \lambda=k\ddot{o}ş(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$$

$$B=VMV^* \qquad M=k\ddot{o}ş(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)$$

yazılabilir. Ayrıca $Y=U^*XV=[y_{ij}]$ den de yaralanarak

$$\frac{1}{p}A^pX+\frac{1}{q}XB^q=U\left(\frac{1}{p}\lambda^pY+\frac{1}{q}YM^q\right)V^*=U\left[(\frac{\lambda_i^p}{p}+\frac{\mu_j^q}{q})y_{ij}\right]V^*, \tag{4.102}$$

$$A^p X - XB^q = U(\lambda^p Y - YM^q)V^* = U\left[(\lambda_i^p - \mu_j^q) y_{ij}\right]V^* \qquad (4.103)$$

ve

$$AXB = U(\lambda YM)V^* = U\left[\lambda_i \mu_j y_{ij}\right]V^* \qquad (4.104)$$

ifadeleri elde edilir.

(4.95) , $\|A\|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ve $\|UAV\|_2 = \|A\|_2$ bilgilerinden yararlanarak

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{p} A^p X + \frac{1}{q} XB^q\right\|_2^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\lambda_i^p}{p} + \frac{\mu_j^q}{q}\right)^2 |y_{ij}|^2 \\
&\geq \frac{1}{r^2} \sum_{i,j=1}^{n} (\lambda_i^p - \mu_j^q)^2 |y_{ij}|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i^2 \mu_j^2 |y_{ij}|^2 \qquad (4.105) \\
&= \frac{1}{r^2} \left\|A^p X - XB^q\right\|_2^2 + \|AXB\|_2^2
\end{aligned}$$

bulunur ki ispat tamamlanır.

4.2. Aritmetik-Geometrik Eşitsizliklerin Diğer Türleri

Bu bölümün başında çalışmamıza $ab \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2}$ eşitsizliği ile başlamış matris versiyonlarını bu eşitsizlik üzerine kurmuştuk. Bu kısımda ise çalışmamıza $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$ ve $ab \leq \dfrac{(a+b)^2}{2}$ eşitsizlikleri ile başlayacak bu eşitsizliklerin matris versiyonlarını inceleyeceğiz.

$ab \leq \dfrac{(a+b)^2}{2}$ eşitsizliğinin singüler değer formu A ve B pozitif yarı tanımlı matrisler için

$$s_j(AB) \leq \frac{1}{4} s_j^2 (A+B), \qquad (4.106)$$

unitarily invaryant formu ise

$$|||AB||| \leq \frac{1}{4} |||(A+B)^2||| \qquad (4.107)$$

şeklinde yazılır. $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$ eşitsizliğinin, A,B pozitif yarı tanımlı matrisler için singüler değer formu

$$s_j^{\frac{1}{2}}(AB) \leq \frac{1}{2} s_j (A+B) \qquad (4.108)$$

ve aynı matrisler için unitarily invaryant norm formu da

$$\left|\left|\left|\,|AB|^{\frac{1}{2}}\right|\right|\right| \leq \frac{1}{2}|||A+B||| \tag{4.109}$$

eşitsizliğidir.

Dikkatlice incelendiği zaman (4.106) ve (4.108) ifadelerinin aynı olduğu görülür. Ayrıca (4.107) ifadesini doğru bulabilirsek (4.109) ifadesinin Schatten *p*-normlarının $p \geq 2$ normları için doğru olduğunu söyleyebiliriz. (4.107) ile (4.109) ün temelde farklı olmalarının sebebi ise kare fonksiyonun zayıf majorizasyonu korurken, karekök fonksiyonun korumamasıdır.

Ayrıca $\left(\frac{A+B}{2}\right)^2 \leq \frac{A^2+B^2}{2}$ olduğundan dolayı $s_j^{\frac{1}{2}}(AB) \leq \frac{1}{2}s_j(A+B)$ eşitsizliğinin $s_j(AB) \leq s_j(\frac{A^2+B^2}{2})$ eşitsizliğinden daha kuvvetli olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 4.2.1. $A, B \in M_n$ matrisleri pozitif yarı tanımlı olsun. Bütün unitarily invaryant normlar için

$$4|||AB||| \leq \left|\left|\left|(A+B)^2\right|\right|\right| \tag{4.110}$$

dır (Bhatia ve Kittaneh, 2000).

İspat: $|||AXB||| \leq \left|\left|\left|A^2X + XB^2\right|\right|\right|$ eşitsizliğinden yararlanarak

$$|||AB||| = \left|\left|\left|A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}})B^{\frac{1}{2}}\right|\right|\right| \leq \frac{1}{2}\left|\left|\left|A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}}\right|\right|\right| \tag{4.111}$$

ifadesi yazılabilir. O halde (4.107) nin ispatı için

$$2\left|\left|\left|A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}}\right|\right|\right| \leq \left|\left|\left|(A+B)^2\right|\right|\right| \tag{4.112}$$

eşitsizliğini ispatlamak yeterlidir. Daha iyisini yapıp bu eşitsizliğin singüler değer formunu ispatlayalım. Yani $1 \leq j \leq n$ için

$$2s_j(A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}}) \leq s_j(A+B)^2 \tag{4.113}$$

eşitsizliğini gösterelim. $X = \begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}} & 0 \\ B^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$ olsun. Bu matristen

$T = XX^* = \begin{bmatrix} A & A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} \\ B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} & B \end{bmatrix}$ ve $G = X^*X = \begin{bmatrix} A+B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrislerini yazalım. T ve G matrisleri üniter olarak denktir. Dolayısıyla $T^2 = \begin{bmatrix} * & A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}} \\ B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{3}{2}} + B^{\frac{3}{2}}A^{\frac{1}{2}} & * \end{bmatrix}$ ve $G^2 = \begin{bmatrix} (A+B)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri birbirine denktir. Özellikle T^2 ve G^2 matrisleri aynı özdeğerlere sahiptir.

$I = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$ olacak şekildeki U matrisini alalım. $s_j(A-B) \leq s_j(A \oplus B)$ eşitsizliğinden de yaralanarak

$$2s_j \begin{bmatrix} A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}} \end{bmatrix} = 2s_j \begin{bmatrix} 0 & A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}} \\ B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{3}{2}} + B^{\frac{3}{2}}A^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= s_j(T^2 - UT^2U^*) \leq s_j \begin{bmatrix} T^2 & 0 \\ 0 & UT^2U^* \end{bmatrix} = s_j \begin{bmatrix} G^2 & 0 \\ 0 & G^2 \end{bmatrix} \tag{4.114}$$

$$= s_j \begin{bmatrix} (A+B)^2 \oplus 0 & 0 \\ 0 & (A+B)^2 \oplus 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir ki ispat tamamlanmış olur.

(4.107) nin doğru olması (4.109) un Schatten p-normları ($p \geq 2$) için doğru olması anlamına gelir. Fakat

$$s_j^{\frac{1}{2}}(AB) \prec_w s_j^{\frac{1}{2}}(A) s_j^{\frac{1}{2}}(B) \tag{4.115}$$

zayıf majorizasyonun var olduğunu biliyoruz. Bu eşitsizliğin sağ tarafı $\frac{1}{2}\left(s_j(A) + s_j(B)\right)$ ile üstten sınırlıdır. Buradan

$$iz\left|AB\right|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} iz(A+B) \tag{4.116}$$

yazılır. Dolayısıyla (4.109) un iz normu (Schatten p-normunun p=1 olması) için doğru olduğu ortaya çıkar. Buradan (4.109) un bütün unitarily invaryant normları için doğru olup olmadığı akla gelir. Bu halen açık bir problemdir. Şimdi de (4.108) üzerinde duralım. (4.107) ve (4.109)

$$s_1^{\frac{1}{2}}(AB) \leq \frac{1}{2} s_1(A+B) \tag{4.117}$$

eşitsizliğini belirtir. O zaman

$$s_n^{\frac{1}{2}}(AB) \leq \frac{1}{2} s_n(A+B) \tag{4.118}$$

eşitsizliğinin doğruluğunu inceleyelim. A veya B matrisi ters çevrilebilir olmadığında eşitsizlik doğrudur. Farz edelim ki, A ve B ters çevrilebilir olsun. Öyleyse

$$s_n(AB) = \lambda_n^{\frac{1}{2}}(BA^2B) = \lambda_1^{-\frac{1}{2}}(B^{-1}A^{-2}B^{-1}) \tag{4.119}$$

dır. Ayrıca

$$\lambda_1^{\frac{1}{2}}(B^{-1}A^{-2}B^{-1}) = s_1(A^{-1}B^{-1}) \geq \lambda_1(A^{-1}B^{-1}) \tag{4.120}$$

olduğundan

$$s_n(AB) \leq \lambda_1^{-1}(A^{-1}B^{-1}) = \lambda_1^{-1}(B^{-\frac{1}{2}}A^{-1}B^{-\frac{1}{2}}) = \lambda_n(B^{\frac{1}{2}}A\ B^{\frac{1}{2}}) = s_n^2(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}) \tag{4.121}$$

dır.

$$s_n(AB) \leq s_n\left(\frac{A^2+B^2}{2}\right) \tag{4.122}$$

eşitsizliğinden

$$s_n(AB) \leq s_n^2(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}) \leq s_n^2(\frac{A+B}{2}) \tag{4.123}$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$s_n^{\frac{1}{2}}(AB) \leq s_n(\frac{A+B}{2}) \tag{4.124}$$

olur. n=2 için eşitlik ispatlanmıştır. Diğer mertebeler için eşitliğin doğru olup olmadığı halen açık bir problemdir (Bhatia ve Kittaneh, 2000).

5. POZİTİF TANIMLI MATRİSLERİN ARİTMETİK, GEOMETRİK VE HEİNZ ORTALAMALARI İÇİN SINIRLAR

Tezimizin bu bölümünde D.S. Mitronovic'in Analitik eşitsizlikler adlı kitabında verilen

$$\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b} \tag{5.1}$$

eşitsizliğini alıp bu eşitsizliğin değişik matris formları üzerinde duracağız. Bu matris formlarının singüler değerlerine ve unitarily invaryant normlarını inceleyelim.

5.1. Pozitif Tanımlı Matrislerin Aritmetik, Geometrik ve Heinz Ortamaları için Singüler Değer Sınırları

İşleme singüler değerlerin incelenmesiyle başlayalım. Analizimize başlamadan daha önce verdiğimiz iki lemmayı tekrar verelim

Lemma 5.1.1. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ pozitif yarı tanımlı matrisler olsun. $A \geq B$ ise $0 < v \leq 1$ için $A^v \geq B^v$ dir (Bhatia, 2007).

Lemma 5.1.2. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri değişme özelliğine sahip pozitif yarı tanımlı matrisler olsun. $A \geq B$ ise *v>0* için $A^v \geq B^v$ dir (Bhatia, 2007).

Şimdi ilk teoremimize geçelim.

Teorem 5.1.1. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri verilsin**.** *A* pozitif tanımlı ve *B* pozitif yarı tanımlı olsun. $A \geq B$, *v* pozitif reel sayısı ve *j*=1,2,…*n* için

$$\frac{1}{8} s_j(A^{-\frac{1}{2}}(A - A\#_{2v} B)^2 A^{-\frac{1}{2}}) \leq s_j(\frac{A + A\#_{2v} B}{2} - A\#_v B) \tag{5.2}$$

dir.

İspat: *A* matrisi ters çevrilebilir olduğundan ve

$$B \leq A \tag{5.3}$$

eşitsizliğinden

$$A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \leq I \tag{5.4}$$

yazılır. $A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}$ ve *I* matrisleri değişme özelliğine sahip pozitif yarı tanımlı matrisler olduğundan Lemma 5.1.2.' den *v*>0 için

$$\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{v} \leq I \tag{5.5}$$

$$\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v} \leq I \tag{5.6}$$

yazılabilir. Ayrıca (5.5)' den

$$\left(I-\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{v}\right)^{2} \geq 0 \tag{5.7}$$

yazılabilir. Son eşitsizliği açarsak

$$I-2\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{v}+\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v} \geq 0 \tag{5.8}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafına *I* ekleyerek gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{I-\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}}{2} \leq I-\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{v} \tag{5.9}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$I-\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{v}$ ve $\dfrac{I-\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}}{2}$ matrisleri pozitif yarı tanımlı ve değişme özelliğine sahip olduklarından ve Lemma 5.1.1.' den

$$\left(\frac{I-\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}}{2}\right)^{2} \leq \left(I-\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{v}\right)^{2} \tag{5.10}$$

eşitsizliği, buradan da

$$A^{\frac{1}{2}}\left(\frac{I-\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}}{2}\right)^{2}A^{\frac{1}{2}} \leq A^{\frac{1}{2}}\left(I-\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{v}\right)^{2}A^{\frac{1}{2}} \tag{5.11}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten ve Weyl'in monotonluk prensibinden $j=1,2,\ldots n$ için

$$s_j\left(A^{\frac{1}{2}}\left(\frac{I-\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}}{2}\right)^{2}A^{\frac{1}{2}}\right)\le s_j\left(A^{\frac{1}{2}}\left(I-\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{v}\right)^{2}A^{\frac{1}{2}}\right) \tag{5.12}$$

yazılabilir. Şimdi (5.12) eşitsizliğinin sol tarafını düzenleyelim.

$X = A^{\frac{1}{2}}\left(I-\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}\right)$ olacak şekilde alalım. j=1,2,… için $s_j(X^*X)=s_j(XX^*)$

eşitliği bilinen bir eşitliktir. Bu eşitlikten yaralanarak

$$s_j\left(A^{\frac{1}{2}}\left(\frac{I-\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}}{2}\right)^{2}A^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}s_j\left(A^{\frac{1}{2}}\left(I-\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}\right)\left(I-\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}\right)A^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}s_j(XX^*)$$

$$=\frac{1}{4}s_j(X^*X)$$

$$=\frac{1}{4}s_j\left(\left(I-\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}\right)A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}\left(I-\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{4}s_j\left(\left(A^{\frac{1}{2}}-\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}A^{\frac{1}{2}}\right)\left(A^{\frac{1}{2}}-A^{\frac{1}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{4}s_j\left(A^{-\frac{1}{2}}\left(A-A^{\frac{1}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}A^{\frac{1}{2}}\right)^{2}A^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{5.13}$$

$$=\frac{1}{4}s_j\left(A^{-\frac{1}{2}}\left(A-A\#_{2v}B\right)^{2}A^{-\frac{1}{2}}\right)$$

bulunur. Şimdi de (5.12) eşitsizliğinin sağ tarafını düzenleyelim.

$$A^{\frac{1}{2}}\left(I-\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{v}\right)^{2}A^{\frac{1}{2}}$$

$$=2\left(\frac{A+A^{\frac{1}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}A^{\frac{1}{2}}}{2}-A^{\frac{1}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{v}A^{\frac{1}{2}}\right) \tag{5.14}$$

$$=2\left(\frac{A+A\#_{2v}B}{2}-A\#_{v}B\right)$$

dır. Böylece j=1,2,…n için

$$s_j\left(A^{\frac{1}{2}}\left(I-\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{v}\right)^{2}A^{\frac{1}{2}}\right)=2s_j\left(\frac{A+A\#_{2v}B}{2}-A\#_{v}B\right) \tag{5.15}$$

bulunur. (5.2) eşitsizliği, (5.12), (5.13) ve (5.15)’ den kolaylıkla elde edilir.

Ayrıca (5.14)’ den Teorem 5.1.1 deki şartlar altında

$$A\#_{v}B\leq\frac{A+A\#_{2v}B}{2} \tag{5.16}$$

yazabiliriz. Eşitlik durumu A=B olması durumunda elde edilir. $0\leq v\leq\frac{1}{2}$ için (3.51) eşitsizliği

$$A\#_{2v}B\leq(1-2v)A+2vB \tag{5.17}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitsizlikte her iki tarafı A ile toplayıp ikiye bölersek

$$\frac{A+A\#_{2v}B}{2}\leq(1-v)A+vB \tag{5.18}$$

elde edilir ki (5.16) ve (5.18) eşitsizliklerinden

$$A\#_{v}B\leq\frac{A+A\#_{2v}B}{2}\leq(1-v)A+vB \tag{5.19}$$

bulunur. Bu da bizim eşitsizliğimizin daha iyi olduğunu gösterir.

Sonuç 5.1.1. $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ matrislerini alalım. A matrisi pozitif tanımlı, B matrisi pozitif yarı tanımlı, $A\geq B$ ve $0\leq v\leq\frac{1}{2}$ olsun. Bu takdirde

$$A\#_{v}B+\frac{U^{*}A^{-\frac{1}{2}}(A-A\#_{2v}B)^{2}A^{-\frac{1}{2}}U}{8}\leq(1-v)A+vB \tag{5.20}$$

olacak şekilde bir $U\in M_n(\mathbb{C})$ üniter matrisi vardır.

İspat: (5.19)' dan

$$0 \le \frac{A + A\#_{2v} B}{2} - A\#_v B \le (1-v)A + vB - A\#_v B \tag{5.21}$$

yazabiliriz. j=1,2,…n için

$$s_j\left(\frac{A + A\#_{2v} B}{2} - A\#_v B\right) \le s_j\left((1-v)A + vB - A\#_v B\right) \tag{5.22}$$

dır. Teorem 5.1.1 ve (5.22) den

$$\frac{1}{8} s_j\left(A^{-\frac{1}{2}}(A - A\#_{2v} B)^2 A^{-\frac{1}{2}}\right) \le s_j\left((1-v)A + vB - A\#_v B\right) \tag{5.23}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. (5.23) eşitsizliği de

$$\frac{U^* A^{-\frac{1}{2}}(A - A\#_{2v} B)^2 A^{-\frac{1}{2}} U}{8} \le (1-v)A + vB - A\#_v B \tag{5.24}$$

şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak

$$A\#_v B + \frac{U^* A^{-\frac{1}{2}}(A - A\#_{2v} B)^2 A^{-\frac{1}{2}} U}{8} \le (1-v)A + vB \tag{5.25}$$

elde edilir.

Teorem 5.1.2. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri pozitif tanımlı, $A \ge B$ ve v pozitif bir reel sayı olsun. j=1,2,…n için

$$s_j\left(\frac{B + B\#_{2v} A}{2} - B\#_v A\right) \le \frac{1}{8} s_j\left(B^{-\frac{1}{2}}(B\#_{2v} A - B)^2 B^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{5.26}$$

dir.

İspat: B matrisi ters çevrilebilir olduğundan ve

$$A \ge B \tag{5.27}$$

eşitsizliğinden

$$B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}} \ge I \tag{5.28}$$

yazılır. $B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}}$ ve I matrisleri değişme özelliğine sahip pozitif yarı tanımlı matrisler olduğundan v>0 için

$$\left(B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}}\right)^v \ge I \tag{5.29}$$

$$\left(B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v} \ge I \tag{5.30}$$

yazılabilir. Ayrıca (5.29) dan

$$\left(\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{v}-I\right)^{2}\geq 0 \tag{5.31}$$

yazılabilir. Bazı hesaplamalar sonucunda

$$\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{v}-I\leq\frac{\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}-I}{2} \tag{5.32}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafındaki matrisler pozitif yarı tanımlı ve değişme özelliğine sahip olduklarından ve Lemma 5.1.1' den

$$\left(\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{v}-I\right)^{2}\leq\left(\frac{\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}-I}{2}\right)^{2} \tag{5.33}$$

eşitsizliği, buradan da

$$B^{\frac{1}{2}}\left(\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{v}-I\right)^{2}B^{\frac{1}{2}}\leq B^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}-I}{2}\right)^{2}B^{\frac{1}{2}} \tag{5.34}$$

elde edilir. Weyl'in monotonluk prensibinden $j=1,2,\ldots n$ için

$$s_{j}\left(B^{\frac{1}{2}}\left(\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{v}-I\right)^{2}B^{\frac{1}{2}}\right)\leq s_{j}\left(B^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}-I}{2}\right)^{2}B^{\frac{1}{2}}\right) \tag{5.35}$$

yazılabilir. $Y=B^{\frac{1}{2}}\left(\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}-I\right)$ olacak şekilde alalım. $j=1,2,\ldots n$ için $s_{j}(Y^{*}Y)=s_{j}(YY^{*})$ eşitliğinden yaralanarak

$$s_j\left(B^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}-I}{2}\right)^2 B^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}s_j\left(B^{\frac{1}{2}}\left(\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}-I\right)\left(\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}-I\right)B^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}s_j(YY^*)$$

$$=\frac{1}{4}s_j(Y^*Y)$$

$$=\frac{1}{4}s_j\left(\left(\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}-I\right)B^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\left(\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}-I\right)\right)$$

$$=\frac{1}{4}s_j\left(\left(\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}B^{\frac{1}{2}}-B^{\frac{1}{2}}\right)\left(B^{\frac{1}{2}}\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}-B^{\frac{1}{2}}\right)\right) \tag{5.36}$$

$$=\frac{1}{4}s_j\left(B^{-\frac{1}{2}}\left(B^{\frac{1}{2}}\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}B^{\frac{1}{2}}-B\right)\left(B^{\frac{1}{2}}\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}B^{\frac{1}{2}}-B\right)B^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}s_j\left(B^{-\frac{1}{2}}\left(B\#_{2v}A-B\right)^2B^{-\frac{1}{2}}\right)$$

elde edilir. Şimdi de (5.35) eşitsizliğinin sol tarafını düzenleyelim.

$$B^{\frac{1}{2}}\left(\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{v}-I\right)^2B^{\frac{1}{2}}$$

$$=2\left(\frac{B^{\frac{1}{2}}\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{2v}B^{\frac{1}{2}}+B}{2}-B^{\frac{1}{2}}\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{v}B^{\frac{1}{2}}\right) \tag{5.37}$$

$$=2\left(\frac{B\#_{2v}A+B}{2}-B\#_{v}A\right)$$

dır. Böylece (5.26) eşitsizliği, (5.35), (5.36) ve (5.37) eşitsizliklerinden elde edilir.

Şimdi (5.1) eşitsizliğinin matris uygulamasına geçelim. Bu aynı zamanda Teorem 5.1.1 ve Teorem 5.1.2' nin bir uygulamasıdır.

Teorem 5.1.3. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri pozitif tanımlı ve $A \geq B$ olsun. $j = 1,2,...n$ için

$$s_j\left(\frac{A+B}{2}-A\#_{\frac{1}{2}}B\right)\geq\frac{1}{8}s_j\left(A^{-\frac{1}{2}}(A-B)^2A^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{5.38}$$

ve

$$s_j\left(\frac{A+B}{2}-A\#_{\frac{1}{2}}B\right)\leq\frac{1}{8}s_j\left(B^{-\frac{1}{2}}(A-B)^2B^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{5.39}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat: (5.2) eşitsizliğinde $v=\frac{1}{2}$ alırsak

$$\frac{1}{8}s_j\left(A^{-\frac{1}{2}}(A-A\#_1B)^2A^{-\frac{1}{2}}\right)\leq s_j\left(\frac{A+A\#_1B}{2}-A\#_{\frac{1}{2}}B\right) \tag{5.40}$$

elde edilir. $A\#_1B=B$ olduğundan

$$\frac{1}{8}s_j\left(A^{-\frac{1}{2}}(A-B)^2A^{-\frac{1}{2}}\right)\leq s_j\left(\frac{A+B}{2}-A\#_{\frac{1}{2}}B\right) \tag{5.41}$$

elde edilir ki, (5.38) ispatlanmış olur.

(5.26) eşitsizliğinde de $v=\frac{1}{2}$ alınırsa,

$$s_j\left(\frac{B+B\#_1A}{2}-B\#_{\frac{1}{2}}A\right)\leq\frac{1}{8}s_j\left(B^{-\frac{1}{2}}(B\#_1A-B)^2B^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{5.42}$$

elde edilir. $B\#_{\frac{1}{2}}A=A\#_{\frac{1}{2}}B$ ve $B\#_1A=A$ olduğundan

$$s_j\left(\frac{A+B}{2}-A\#_{\frac{1}{2}}B\right)\leq\frac{1}{8}s_j\left(B^{-\frac{1}{2}}(A-B)^2B^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{5.43}$$

bulunur ki, (5.39) ispatlanmış olur.

Sonuç 5.1.1. $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri pozitif tanımlı, $A\geq B$ ve (5.38) eşitsizliği doğru olsun.

$$A\#_{\frac{1}{2}}B\leq\frac{A+B}{2}-\frac{U^*A^{-\frac{1}{2}}(A-B)^2A^{-\frac{1}{2}}U}{8} \tag{5.44}$$

olacak şekilde bir $U\in M_n(\mathbb{C})$ üniter matrisi vardır. Ayrıca (5.39) eşitsizliği doğru olduğundan

$$A\#_{\frac{1}{2}}B\geq\frac{A+B}{2}-\frac{V^*B^{-\frac{1}{2}}(A-B)^2B^{-\frac{1}{2}}V}{8} \tag{5.45}$$

olacak şekilde bir $V\in M_n(\mathbb{C})$ üniter matrisi vardır.

(5.45) eşitsizliği $v=\frac{1}{2}$ ve $A \geq B$ için

$$A\#_v B \leq (1-v)A + vB \tag{5.46}$$

eşitsizliğinin ters yönlü bir örneğidir.

Sonuç 5.1.2. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri pozitif tanımlı ve $A \geq B$ ve $0 \leq v \leq \frac{1}{2}$ olsun. Öyleyse $j = 1,2,...,n$ için

$$s_j\left(\frac{B + A\#_{1-2v} B}{2} - A\#_{1-v} B\right) \leq \frac{1}{8} s_j\left(B^{-\frac{1}{2}} (A\#_{1-2v} B - B)^2 B^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{5.47}$$

dır.

İspat: $0 \leq v \leq 1$ için $A\#_v B = B\#_{1-v} A$ eşitliğini biliyoruz. Öyleyse $0 \leq v \leq \frac{1}{2}$ için $B\#_{2v} A = A\#_{1-2v} B$ ve $B\#_v A = A\#_{1-v} B$ yazabiliriz. O zaman (5.26) eşitsizliğinde bu eşitlikler yerine yazılırsa (5.47) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.1.3. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ değişme özelliğine sahip matrisler olsun. *A* pozitif tanımlı, *B* pozitif yarı tanımlı, $A \geq B$ ve *v* pozitif reel sayı olmak üzere $j = 1,2,...,n$ için

$$\frac{1}{8} s_j\left(A^{-\frac{1}{2}} (A - A^{1-2v} B^{2v})^2 A^{-\frac{1}{2}}\right) \leq s_j\left(\frac{A + A^{1-2v} B^{2v}}{2} - A^{1-v} B^v\right) \tag{5.48}$$

dır. Ayrıca *B* pozitif tanımlı ise

$$\frac{1}{8} s_j\left(B^{-\frac{1}{2}} (A^{2v} B^{1-2v} - B)^2 B^{-\frac{1}{2}}\right) \geq s_j\left(\frac{B + A^{2v} B^{1-2v}}{2} - A^v B^{1-v}\right) \tag{5.49}$$

dır. Özellikle $v = \frac{1}{2}$ ise

$$\frac{1}{8} s_j\left(A^{-\frac{1}{2}} (A - B)^2 A^{-\frac{1}{2}}\right) \leq s_j\left(\frac{A + B}{2} - A^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}}\right) \leq \frac{1}{8} s_j\left(B^{-\frac{1}{2}} (A - B)^2 B^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{5.50}$$

bulunur ki, Mitronovic tarafından öne sürülen skaler eşitsizliğin matris formunun singüler değerler için olan ifadesi elde edilir.

İspat: *A* ve *B* değişme özelliğine sahip matrisler ise $A\#_v B = A^{1-v} B^v$ ve $A\#_{2v} B = A^{1-2v} B^{2v}$ olduğunu biliyoruz. Teorem 5.1.1 ve Teorem 5.1.2' deki eşitsizliklerde bu ifadeleri yazarsak istenen elde edilir.

Teorem 5.1.4 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri verilsin**.** *A* pozitif tanımlı, *B* pozitif yarı tanımlı, $A \geq B$ ve $0 \leq v \leq 1$ olmak üzere, j=1,2,…n için

$$\frac{1}{8} s_j (A^{-\frac{1}{2}} (A - H_v (A, BA^{-1}B))^2 A^{-\frac{1}{2}}) \le s_j (\frac{A + H_v (A, B) A^{-1} H_v (A, B)}{2} - H_v (A, B)) \quad (5.51)$$

dir.

İspat: $(A^{-\frac{1}{2}} BA^{-\frac{1}{2}})^2$ matrisini alalım. Bu matris

$$(A^{-\frac{1}{2}} BA^{-\frac{1}{2}})^2 = \left(A^{-\frac{1}{2}} BA^{-\frac{1}{2}} \right)\left(A^{-\frac{1}{2}} BA^{-\frac{1}{2}} \right) = A^{-\frac{1}{2}} \left(BA^{-1}B \right) A^{-\frac{1}{2}} \quad (5.52)$$

şeklinde yazılabilir. $X = A^{-\frac{1}{2}} \left(BA^{-1}B \right) A^{-\frac{1}{2}}$ olarak alalım. (5.6) ve (5.9) eşitsizliklerinden $0 \le v \le 1$ için

$$0 \le \frac{I - X^v}{2} \le I - \left(A^{-\frac{1}{2}} BA^{-\frac{1}{2}} \right)^v \quad (5.53)$$

yazabiliriz. (5.53) de *v* yerine 1-*v* yazarsak

$$0 \le \frac{I - X^{1-v}}{2} \le I - \left(A^{-\frac{1}{2}} BA^{-\frac{1}{2}} \right)^{1-v} \quad (5.54)$$

yazabiliriz. (5.53) ve (5.54) eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak

$$I - \frac{X^v + X^{1-v}}{2} \le 2I - \left(A^{-\frac{1}{2}} BA^{-\frac{1}{2}} \right)^v - \left(A^{-\frac{1}{2}} BA^{-\frac{1}{2}} \right)^{1-v} \quad (5.55)$$

elde edilir. $X = A^{-\frac{1}{2}} \left(BA^{-1}B \right) A^{-\frac{1}{2}}$ olduğundan (5.55) eşitsizliği

$$I - A^{-\frac{1}{2}} (H_v (A, BA^{-1}B)) A^{-\frac{1}{2}} \le 2I - 2A^{-\frac{1}{2}} (H_v (A, B)) A^{-\frac{1}{2}} \quad (5.56)$$

olarak yazılabilir. (5.56) eşitsizliğinin her iki tarafındaki matrisler değişme özelliğine sahip olduğundan Lemma 5.1.1 ve (5.56) dan $0 \le v \le 1$ için

$$\left(I - A^{-\frac{1}{2}} (H_v (A, BA^{-1}B)) A^{-\frac{1}{2}} \right)^2 \le 4 \left(I - A^{-\frac{1}{2}} (H_v (A, B)) A^{-\frac{1}{2}} \right)^2 \quad (5.57)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $A^{\frac{1}{2}}$ ile çarparsak,

$$A^{\frac{1}{2}} \left(I - A^{-\frac{1}{2}} (H_v (A, BA^{-1}B)) A^{-\frac{1}{2}} \right)^2 A^{\frac{1}{2}} \le 4A^{\frac{1}{2}} \left(I - A^{-\frac{1}{2}} (H_v (A, B)) A^{-\frac{1}{2}} \right)^2 A^{\frac{1}{2}} \quad (5.58)$$

bulunur. Weyl' in monotonluk prensibinden $j = 1, 2, ..., n$ için

$$s_j \left(A^{\frac{1}{2}} \left(I - A^{-\frac{1}{2}} (H_v (A, BA^{-1}B)) A^{-\frac{1}{2}} \right)^2 A^{\frac{1}{2}} \right) \le 4 s_j \left(A^{\frac{1}{2}} \left(I - A^{-\frac{1}{2}} (H_v (A, B)) A^{-\frac{1}{2}} \right)^2 A^{\frac{1}{2}} \right)$$

yazılır. $X = A^{\frac{1}{2}}\left(I - A^{-\frac{1}{2}}(H_v(A, BA^{-1}B))A^{-\frac{1}{2}}\right)$ olarak alalım. $s_j(X^*X) = s_j(XX^*)$ olduğundan

$$s_j\left(A^{\frac{1}{2}}\left(I - A^{-\frac{1}{2}}(H_v(A, BA^{-1}B))A^{-\frac{1}{2}}\right)^2 A^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= s_j(XX^*)$$

$$= s_j(X^*X)$$

$$= s_j\left(\left(I - A^{-\frac{1}{2}}(H_v(A, BA^{-1}B))A^{-\frac{1}{2}}\right)A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}\left(I - A^{-\frac{1}{2}}(H_v(A, BA^{-1}B))A^{-\frac{1}{2}}\right)\right)$$

$$= s_j\left(\left(A^{\frac{1}{2}} - A^{-\frac{1}{2}}H_v(A, BA^{-1}B)\right)\left(A^{\frac{1}{2}} - H_v(A, BA^{-1}B)A^{-\frac{1}{2}}\right)\right) \tag{5.59}$$

$$= s_j\left(A^{-\frac{1}{2}}\left(A - H_v(A, BA^{-1}B)\right)\left(A - H_v(A, BA^{-1}B)\right)A^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= s_j\left(A^{-\frac{1}{2}}\left(A - H_v(A, BA^{-1}B)\right)^2 A^{-\frac{1}{2}}\right)$$

dır. Ayrıca

$$A^{\frac{1}{2}}\left(I - A^{-\frac{1}{2}}(H_v(A, B))A^{-\frac{1}{2}}\right)^2 A^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\left(\frac{A + H_v(A, B)A^{-1}H_v(A, B)}{2} - H_v(A, B)\right)$$

dır. O zaman

$$s_j\left(A^{-\frac{1}{2}}\left(A - H_v(A, BA^{-1}B)\right)^2 A^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\leq 4s_j\left(A^{\frac{1}{2}}(I - A^{-\frac{1}{2}}H_v(A, B)A^{-\frac{1}{2}})^2 A^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 8s_j\left(\frac{A + H_v(A, B)A^{-1}H_v(A, B)}{2} - H_v(A, B)\right)$$

bulunur ki ispat tamamlanır.

Sonuç 5.1.4. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri pozitif tanımlı, $A \geq B$ ve $0 \leq v \leq 1$ olsun. Öyleyse

$$H_v(A, B) + \frac{U^* A^{-\frac{1}{2}}(A - H_v(A, BA^{-1}B))^2 A^{-\frac{1}{2}}U}{8} - \frac{A^{\frac{1}{2}}(I - A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^2 A^{\frac{1}{2}}}{8} \leq \frac{A + B}{2} \tag{5.60}$$

olacak şekilde bir $U \in M_n(\mathbb{C})$ üniter matrisi vardır.

İspat: $$H_v(A,B)A^{-1}H_v(A,B) = A^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{v} + \left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{1-v}}{2}\right)^{2} A^{\frac{1}{2}}$$ olduğu

aşikardır. $A\#_v B \leq (1-v)A + vB$ eşitsizliğinden

$$\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{v} \leq (1-v)I + vA^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} \tag{5.61}$$

ve

$$\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{1-v} \leq vI + (1-v)A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} \tag{5.62}$$

eşitsizlikleri elde edilebilir. Buradan

$$\frac{\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{v} + \left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{1-v}}{2} \leq \frac{I + A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}}{2} \tag{5.63}$$

yazılabilir. $\dfrac{\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{v} + \left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{1-v}}{2}$ ve $\dfrac{I + A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}}{2}$ değişme özelliğine sahip olan pozitif tanımlı matrisler olduğundan, Lemma 5.1.1 ve (5.63) eşitsizliğinden

$$\left(\frac{\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{v} + \left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{1-v}}{2}\right)^{2} \leq \left(\frac{I + A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)^{2} \tag{5.64}$$

ve böylece

$$\begin{aligned} H_v(A,B)A^{-1}H_v(A,B) &\leq A^{\frac{1}{2}}\left(\frac{I + A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)^{2} A^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4}(A + 2B + BA^{-1}B) \end{aligned} \tag{5.65}$$

bulunur. Bu eşitsizliğin her iki tarafına $\dfrac{A}{2}$ eklersek

$$\frac{A+H_v(A,B)A^{-1}H_v(A,B)}{2} \leq \frac{A+B}{2} + \frac{A-2B+BA^{-1}B}{8}$$
$$= \frac{A+B}{2} + \frac{A^{\frac{1}{2}}(I-A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^2 A^{\frac{1}{2}}}{8} \tag{5.66}$$

olur. Teorem 5.1.4 den $\frac{A+H_v(A,B)A^{-1}H_v(A,B)}{2} - H_v(A,B)$ matrisinin pozitif tanımlı matris olduğunu biliyoruz. Teorem 5.1.1 ve (5.66) eşitsizliğinden $j=1,2,...,n$ için

$$\frac{1}{8}s_j(A^{-\frac{1}{2}}(A-H_v(A,BA^{-1}B))^2 A^{-\frac{1}{2}})$$
$$\leq s_j\left(\frac{A+H_v(A,B)A^{-1}H_v(A,B)}{2} - H_v(A,B)\right) \tag{5.67}$$
$$\leq s_j\left(\frac{A+B}{2} + \frac{A^{\frac{1}{2}}(I-A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^2 A^{\frac{1}{2}}}{8} - H_v(A,B)\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak (5.67) den

$$\frac{U^* A^{-\frac{1}{2}}(A-H_v(A,BA^{-1}B))^2 A^{-\frac{1}{2}}U}{8}$$
$$\leq \frac{A+B}{2} + \frac{A^{\frac{1}{2}}(I-A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^2 A^{\frac{1}{2}}}{8} - H_v(A,B) \tag{5.68}$$

yazılır. Buradan da

$$H_v(A,B) + \frac{U^* A^{-\frac{1}{2}}(A-H_v(A,BA^{-1}B))^2 A^{-\frac{1}{2}}U}{8} - \frac{A^{\frac{1}{2}}(I-A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^2 A^{\frac{1}{2}}}{8}$$
$$\leq \frac{A+B}{2} \tag{5.69}$$

elde edilir .

Teorem 5.1.5. $A,B \in M_n(\mathbb{C})$ matrislerinden A pozitif tanımlı, B pozitif yarı tanımlı, $A \geq B$ ve $0 \leq v \leq 1$ olsun. O zaman $j=1,2,...,n$ için

$$s_j\left(\frac{B+H_v(A,B)B^{-1}H_v(A,B)}{2} - H_v(A,B)\right) \leq \frac{1}{8}s_j(B^{-\frac{1}{2}}(H_v(B,AB^{-1}A)-B)^2 B^{-\frac{1}{2}}) \tag{5.70}$$

dir.

İspat: : $(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}})^2$ matrisini alalım. Bu matris

$$(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}})^2 = \left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right) = B^{-\frac{1}{2}}\left(AB^{-1}A\right)B^{-\frac{1}{2}} \tag{5.71}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $X = B^{-\frac{1}{2}}\left(AB^{-1}A\right)B^{-\frac{1}{2}}$ alınırsa, (5.30) ve (5.32) eşitsizliklerinden ve $0 \le v \le 1$ için

$$0 \le \left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{v} - I \le \frac{X^{v} - I}{2} \tag{5.72}$$

olur. (5.72) de *v* yerine 1-*v* yazarsak

$$0 \le \left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{1-v} - I \le \frac{X^{1-v} - I}{2} \tag{5.73}$$

yazabiliriz. (5.72) ve (5.73) eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak

$$\left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{v} + \left(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}\right)^{1-v} - 2I \le \frac{X^{v} + X^{1-v}}{2} - I \tag{5.74}$$

elde edilir. $X = B^{-\frac{1}{2}}\left(AB^{-1}A\right)B^{-\frac{1}{2}}$ olduğundan (5.74) eşitsizliğini

$$2B^{-\frac{1}{2}}H_v(A,B)B^{-\frac{1}{2}} - 2I \le B^{-\frac{1}{2}}H_v(B,AB^{-1}A)B^{-\frac{1}{2}} - I \tag{5.75}$$

şeklinde yazabiliriz. (5.75) eşitsizliğinin her iki tarafındaki matrisler değişme özelliğine sahip olduğundan Lemma 5.1.2 ve (5.75)' den $0 \le v \le 1$ için

$$\left(2B^{-\frac{1}{2}}H_v(A,B)B^{-\frac{1}{2}} - 2I\right)^2 \le \left(B^{-\frac{1}{2}}H_v(B,AB^{-1}A)B^{-\frac{1}{2}} - I\right)^2 \tag{5.76}$$

olur. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $B^{\frac{1}{2}}$ ile çarparsak,

$$4B^{\frac{1}{2}}\left(B^{-\frac{1}{2}}H_v(A,B)B^{-\frac{1}{2}} - I\right)^2 B^{\frac{1}{2}} \le B^{\frac{1}{2}}\left(B^{-\frac{1}{2}}H_v(B,AB^{-1}A)B^{-\frac{1}{2}} - I\right)^2 B^{\frac{1}{2}} \tag{5.77}$$

bulunur. Weyl' in monotonluk prensibinden $j = 1,2,...,n$ için

$$4s_j\left(B^{\frac{1}{2}}\left(B^{-\frac{1}{2}}H_v(A,B)B^{-\frac{1}{2}} - I\right)^2 B^{\frac{1}{2}}\right) \le s_j\left(B^{\frac{1}{2}}\left(B^{-\frac{1}{2}}H_v(B,AB^{-1}A)B^{-\frac{1}{2}} - I\right)^2 B^{\frac{1}{2}}\right) \tag{5.78}$$

yazılır. $X=B^{\frac{1}{2}}\left(B^{-\frac{1}{2}}H_v(B,AB^{-1}A)B^{-\frac{1}{2}}-I\right)$ olarak alalım. $s_j(X^*X)=s_j(XX^*)$

olduğundan

$$s_j\left(B^{\frac{1}{2}}\left(B^{-\frac{1}{2}}H_v(B,AB^{-1}A)B^{-\frac{1}{2}}-I\right)^2B^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=s_j(XX^*)$$

$$=s_j(X^*X)$$

$$=s_j\left(B^{-\frac{1}{2}}H_v(B,AB^{-1}A)B^{-\frac{1}{2}}-I\right)B^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\left(B^{-\frac{1}{2}}H_v(B,AB^{-1}A)B^{-\frac{1}{2}}-I\right)$$

$$=s_j\left(\left(B^{-\frac{1}{2}}H_v(B,AB^{-1}A)-B^{\frac{1}{2}}\right)\left(H_v(B,AB^{-1}A)B^{-\frac{1}{2}}-B^{\frac{1}{2}}\right)\right)$$

$$=s_j\left(B^{-\frac{1}{2}}\left(H_v(B,AB^{-1}A)-B\right)^2B^{-\frac{1}{2}}\right)$$

(5.79)

dır. Ayrıca

$$B^{\frac{1}{2}}\left(B^{-\frac{1}{2}}H_v(A,B)B^{-\frac{1}{2}}-I\right)^2B^{\frac{1}{2}}$$

$$=B^{\frac{1}{2}}\left(B^{-\frac{1}{2}}H_v(A,B)B^{-\frac{1}{2}}\right)^2B^{\frac{1}{2}}-2H_v(A,B)+B \tag{5.80}$$

$$=2\left(\frac{H_v(A,B)B^{-1}H_v(A,B)+B}{2}-H_v(A,B)\right)$$

dır. O halde (5.78), (5.79) ve (5.80)' den

$$s_j\left(\frac{B+H_v(A,B)B^{-1}H_v(A,B)}{2}-H_v(A,B)\right)\le\frac{1}{8}s_j(B^{-\frac{1}{2}}(H_v(B,AB^{-1}A)-B)^2B^{-\frac{1}{2}})$$

bulunur ki ispat tamamlanmış olur.

Bu bölümdeki çalışmaların bir kısmı (Gumus ve ark., -)' de yayınlanmıştır.

5.2. Pozitif Tanımlı Matrislerin Aritmetik, Geometrik ve Heinz Ortalamaları Üzerine Bazı Norm Sınırları

Tezimizin bu bölümünde D.S. Mitronovic'in Analitik eşitsizlikler adlı kitabında verdiği

$$\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} \le \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \le \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b}$$

eşitsizliğini tekrar inceleyeceğiz. Bu eşitsizliğin matris formunu yazıp, iz normu için ispatlayacağız. Sonra bu eşitsizliğin üzerinde bazı skaler işlemler yapıp düzenleyeceğiz. Son olarak da bu eşitsizlik üzerinden Hilbert-Schmidt norm için bazı eşitsizliklerin ispatları üzerinde duracağız.

Lemma 5.2.1. Eğer $0 < b \le a$ ise

$$\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} \le \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \le \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b} \tag{5.81}$$

dır.

İspat: Öncelikle eşitsizliğin sol tarafını ispatlayalım.

$$b \le a \Rightarrow b^{\frac{1}{2}} \le a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} \le 2a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)}{2a^{\frac{1}{2}}} \le a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow \frac{a-b}{2a^{\frac{1}{2}}} \le a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{(a-b)^2}{4a} \le \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} \le \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \tag{5.82}$$

elde edilir ki sol tarafın ispatı tamamlanmış olur. Sağ tarafın ispatı da

$$b \le a \Rightarrow b^{\frac{1}{2}} \le a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2b^{\frac{1}{2}} \le a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \Rightarrow a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \le \frac{\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)}{2b^{\frac{1}{2}}}$$
$$\Rightarrow \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \le \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b} \tag{5.83}$$

şeklinde elde edililir.

Şimdi bu skaler eşitsizlik yardımıyla matrislerin izlerine geçelim. Bu sayede iz normunu da ispatlamış olacağız.

Teorem 5.2.1 $A \ge B > 0$ pozitif tanımlı matrisler ve $\|\bullet\|_1$ iz normu olmak üzere

$$\frac{1}{8}\frac{\sum_{j=1}^{n} s_j^2(A) + \sum_{j=1}^{n} s_j^2(B) - 2iz(A)iz(B)}{\|A\|_1} + \left\|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\right\|_1 \le \frac{\|A+B\|_1}{2} \tag{5.84}$$

dır.

İspat: Lemma 5.2.1' den

$$\frac{1}{8}\frac{\left(s_j(A)-s_j(B)\right)^2}{s_j(A)}+s_j^{\frac{1}{2}}(A)s_j^{\frac{1}{2}}(B)\le\frac{s_j(A)+s_j(B)}{2} \tag{5.85}$$

yazabiliriz. (3.20) ve (5.85) den

$$\frac{\|A+B\|_1}{2}=\frac{iz(A+B)}{2}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\left(s_j(A)+s_j(B)\right)}{2}$$

$$\ge\sum_{j=1}^{n}s_j(A^{\frac{1}{2}})s_j(B^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{n}\frac{s_j^2(A)-2s_j(A)s_j(B)+s_j^2(B)}{s_j(A)} \tag{5.86}$$

$$\ge\sum_{j=1}^{n}s_j(A^{\frac{1}{2}})s_j(B^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{8}\frac{\sum_{j=1}^{n}s_j^2(A)+\sum_{j=1}^{n}s_j^2(B)-2\sum_{j=1}^{n}s_j(A)s_j(B)}{\sum_{j=1}^{n}s_j(A)}$$

olur. Lemma 4.1.1 ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\ge\sum_{j=1}^{n}s_j(A^{\frac{1}{2}})s_j(B^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{8}\frac{\sum_{j=1}^{n}s_j^2(A)+\sum_{j=1}^{n}s_j^2(b)-2\left(\sum_{j=1}^{n}s_j(A)\right)\left(\sum_{j=1}^{n}s_j(B)\right)}{iz(A)}$$

$$\ge\sum_{j=1}^{n}s_j(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{8}\frac{\sum_{j=1}^{n}s_j^2(A)+\sum_{j=1}^{n}s_j^2(B)-2iz(A)iz(B)}{iz(A)}$$

$$=iz\left|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\right|+\frac{1}{8}\frac{\sum_{j=1}^{n}s_j^2(A)+\sum_{j=1}^{n}s_j^2(B)-2iz(A)iz(B)}{izA}$$

$$=\frac{1}{8}\frac{\sum_{j=1}^{n}s_j^2(A)+\sum_{j=1}^{n}s_j^2(B)-2iz(A)iz(B)}{\|A\|_1}+\left\|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\right\|_1$$

elde edilir.

Eğer (5.81) eşitsizliğinde $m,n\in\mathbb{R}^+$ için *a* yerine m^2 ve *b* yerine n^2 yazarsak $m\ge n>0$ için

$$\frac{1}{8}\frac{\left(m^2-n^2\right)^2}{m^2}\le\frac{m^2+n^2}{2}-mn\le\frac{1}{8}\frac{\left(m^2-n^2\right)^2}{n^2} \tag{5.87}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliği düzenlersek

$$\frac{1}{4}\frac{\left(m^2-n^2\right)}{m^2}\le(m-n)^2\le\frac{1}{4}\frac{\left(m^2-n^2\right)}{n^2} \tag{5.88}$$

olup

$$\frac{\left(m^{-1}\left(m^{2}-n^{2}\right)\right)}{4}\leq\left(m-n\right)^{2}\leq\frac{\left(\left(m^{2}-n^{2}\right)n^{-1}\right)}{4} \tag{5.89}$$

ifadesini elde edebiliriz. (5.89) eşitsizliğinin matris formunu $A \geq B > 0$ matrisleri için

$$\frac{\left(A^{-1}\left(A^{2}X-XB^{2}\right)\right)}{4}\leq\left(AX-XB\right)^{2}\leq\frac{\left(\left(A^{2}X-XB^{2}\right)B^{-1}\right)}{4} \tag{5.90}$$

olur. Burada X matrisi eşitsizliği daha genel bir hale getiren bir matristir. Bu matris formunun Hilbert-Schmidt normunu

$$\frac{\left\|\left(A^{-1}\left(A^{2}X-XB^{2}\right)\right)\right\|_{2}^{2}}{4}\leq\left\|\left(AX-XB\right)\right\|_{2}^{2}\leq\frac{\left\|\left(\left(A^{2}X-XB^{2}\right)B^{-1}\right)\right\|_{2}^{2}}{4} \tag{5.91}$$

şeklinde yazabiliriz.

Şimdi (5.88) eşitsizliğinin ispatını verelim.

Teorem 5.2.2. $m \geq n > 0$ için

$$\frac{1}{4}\frac{\left(m^{2}-n^{2}\right)^{2}}{m^{2}}\leq\left(m-n\right)^{2}\leq\frac{1}{4}\frac{\left(m^{2}-n^{2}\right)^{2}}{n^{2}} \tag{5.92}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $m \geq n > 0$ için $\frac{m+n}{2m} \leq 1$ ve böylece $\left(\frac{m+n}{2m}\right)^2 \leq 1$ dir. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $(m-n)^2$ ile çarparsak $\frac{1}{4}\frac{\left(m^{2}-n^{2}\right)^{2}}{m^{2}}\leq\left(m-n\right)^{2}$ eşitsizliğini elde ederiz ki bu (5.92) ün sol tarafıdır.

$m \geq n > 0$ için $\frac{m+n}{2n} \geq 1$ ve böylece $\left(\frac{m+n}{2n}\right)^2 \geq 1$ dir. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $(m-n)^2$ ile çarparsak $\left(m-n\right)^{2}\leq\frac{1}{4}\frac{\left(m^{2}-n^{2}\right)^{2}}{n^{2}}$ eşitsizliğini elde ederiz ki bu da (5.92) ün sağ tarafıdır.

Şimdi de (5.91) eşitsizliğinin ispatına geçelim.

Teorem 5.2.3. $A, B, X \in M_n(\mathbb{C})$ matrislerini verilsin ve $A \geq B > 0$ olsun. Ayrıca A matrisinin bütün özdeğerleri, B matrisinin bütün özdeğerlerinden büyük olsun. Bu takdirde

$$\frac{\left\|\left(A^{-1}\left(A^{2}X-XB^{2}\right)\right)\right\|_{2}^{2}}{4}\leq\left\|\left(AX-XB\right)\right\|_{2}^{2}\leq\frac{\left\|\left(\left(A^{2}X-XB^{2}\right)B^{-1}\right)\right\|_{2}^{2}}{4} \tag{5.93}$$

dır.

İspat: Eşitsizliğin sol tarafı ile ispata başlayalım. Her pozitif yarı tanımlı matris üniter olarak köşegenleştirilebildiğinden $A = U\lambda U^{*}$ ve $B = VMV^{*}$ olacak şekilde $U, V \in M_n(\mathbb{C})$ üniter matrisleri vardır. Burada $\lambda = köş(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ ve $M = köş(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$ köşegen matrisler olup λ_i ve μ_i ler pozitiftir. $Y = U^{*}XV = [y_{ij}]$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(A^{-1}\left(A^2X - XB^2\right)\right) = \frac{1}{4}U\lambda^{-1}U^{*}\left(U\lambda^2U^{*}UYV^{*} - UYV^{*}VM^2V^{*}\right)\\
&= \frac{1}{4}U\lambda^{-1}U^{*}\left(U\lambda^2YV^{*} - UYM^2V^{*}\right)\\
&= \frac{1}{4}U\lambda^{-1}\left(\lambda^2Y - YM^2\right)V^{*}\\
&= U\left(\frac{\lambda_i^2 - \mu_j^2}{4\lambda_i}y_{ij}\right)V^{*}
\end{aligned} \tag{5.94}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
&AX - XB = U\lambda U^{*}UYV^{*} - UYV^{*}VMV^{*}\\
&= U\left(\lambda Y - YM\right)V^{*}\\
&= U\left(\left(\lambda_i - \mu_j\right)y_{ij}\right)V^{*}
\end{aligned} \tag{5.95}$$

dır. $|||UAV||| = |||A|||$, $\|A\|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ve (5.81) eşitsizliğinden yararlanarak $i, j = 1,2,...,n$ için

$$\begin{aligned}
&\frac{\left\|\left(A^{-1}\left(A^2X - XB^2\right)\right)\right\|_2^2}{4} = \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i^2 - \mu_j^2}{2\lambda_i}\right)^2|y_{ij}|^2\\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n}\left(\lambda_i - \mu_j\right)^2|y_{ij}|^2 = \left\|\left(AX - XB\right)\right\|_2^2
\end{aligned} \tag{5.96}$$

bulunur ki, bu eşitsizliğimizin sol tarafının ispatıdır. Benzer olarak

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(\left(A^2X - XB^2\right)B^{-1}\right) = \frac{1}{4}\left(U\lambda^2U^{*}UYV^{*} - UYV^{*}VM^2V^{*}\right)VM^{-1}V^{*}\\
&= \frac{1}{4}\left(U\lambda^2YV^{*} - UYM^2V^{*}\right)VM^{-1}V^{*}\\
&= \frac{1}{4}U\left(\lambda^2Y - YM^2\right)M^{-1}V^{*}\\
&= U\left(\frac{\lambda_i^2 - \mu_j^2}{4\mu_j}y_{ij}\right)V^{*}
\end{aligned} \tag{5.97}$$

elde edilir. Böylece

$$\left\|\left(AX - XB\right)\right\|_2^2 = \sum_{i,j=1}^{n}\left(\lambda_i - \mu_j\right)^2 \left|y_{ij}\right|^2$$
$$\leq \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i^2 - \mu_j^2}{2\mu_j}\right)^2 \left|y_{ij}\right|^2 = \frac{\left\|\left(\left(A^2X - XB^2\right)B^{-1}\right)\right\|_2^2}{4} \tag{5.98}$$

elde edilir ki, bu da eşitsizliğimizin sağ tarafıdır.

(5.93) eşitsizliğinin doğru olması akla şu soruyu getitirir. $A \geq B > 0$ ve $n \geq 1$ için

$$\frac{\left\|\left(A^{-1}\left(A^{n+1}X - XB^{n+1}\right)\right)\right\|_2^2}{4} \leq \left\|\left(A^nX - XB^n\right)\right\|_2^2 \leq \frac{\left\|\left(\left(A^{n+1}X - XB^{n+1}\right)B^{-1}\right)\right\|_2^2}{4}$$

genelleştirmesi doğru mudur? Bu eşitsizliğin doğruluğunu ispatlamak için $a \geq b > 0$ ve $n \geq 1$ için

$$\frac{\left(a^{n+1} - b^{n+1}\right)^2}{4a^2} \leq \left(a^n - b^n\right)^2 \leq \frac{\left(a^{n+1} - b^{n+1}\right)^2}{4b^2}$$

eşitsizliğini ispatlamalıyız.

Teorem 5.2.4 . $a \geq b > 0$ ve $n \geq 1$ doğal sayıları için

$$\frac{\left(a^{n+1} - b^{n+1}\right)^2}{4a^2} \leq \left(a^n - b^n\right)^2 \leq \frac{\left(a^{n+1} - b^{n+1}\right)^2}{4b^2} \tag{5.99}$$

dir.

İspat: Eşitsizliğin sol tarafını indüksiyon metodu ile ispatlayalım.

$n = 1$ için;

$\frac{a+b}{2a} \leq 1$ olduğu bilinen bir gerçektir. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $(a-b)$ ile çarpıp karesini alırsak

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{2a}\right)^2 \leq \left(a-b\right)^2 \tag{5.100}$$

bulunur ki, istenendir.

$n = 2$ için;

$$\frac{a^{-1}b^2}{2} \leq \frac{a+b}{2} \Rightarrow \frac{a+b}{2} + \frac{a^{-1}b^2}{2} \leq a+b \Rightarrow \frac{a^{-1}\left(a^2 + ab + b^2\right)}{2}$$

olur. Her iki tarafı $(a-b)$ ile çarpıp karesini alırsak

$$\left(\frac{a^3 - b^3}{2a}\right)^2 \leq \left(a^2 - b^2\right)^2 \tag{5.101}$$

elde edilir ki, istenendir.

Eşitsizliğimiz $n=k$ için

$$\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{2a} \leq a^k - b^k \tag{5.102}$$

doğru olsun. (5.102)' yi düzenlersek

$$b^{k+1} \geq 2ab^k - b^{k+1} \tag{5.103}$$

eşitsizliği elde edilebilir.

$n=k+1$ için doğru olduğunu gösterelim. (5.103) den

$$\begin{aligned} &b^{k+1} \geq 2ab^k - a^{k+1} \\ &b^{k+2} \geq 2ab^{k+1} - ba^{k+1} \geq 2ab^{k+1} - aa^{k+1} = 2ab^{k+1} - a^{k+2} \\ &-b^{k+2} \leq a^{k+2} - 2ab^{k+1} \end{aligned} \tag{5.104}$$

dır. Her iki tarafa a^{k+2} ekleyip $2a$ ya bölersek;

$$\frac{a^{k+2}-b^{k+2}}{2a} \leq a^{k+1} - b^{k+1} \tag{5.105}$$

elde edilir. Son olarak da her iki tarafın karesini alırsak

$$\left(\frac{a^{k+2}-b^{k+2}}{2a}\right)^2 \leq \left(a^{k+1}-b^{k+1}\right)^2 \tag{5.106}$$

bulunur ki, ispat tamamlanır. (5.99) eşitsizliğinini sağ tarafı da benzer şekilde ispatlanabilir.

Şimdi bu eşitsizliğin matris formunu yazıp Hilbert-Schmidt norm için ispatlayalım.

Teorem 5.2.5. $A,B,X \in M_n(\mathbb{C})$**,** $A \geq B > 0$ ve A matrisinin bütün özdeğerleri, B matrisinin bütün özdeğerlerinden büyük olsun. Bu takdirde

$$\frac{\left\|\left(A^{-1}\left(A^{k+1}X - XB^{k+1}\right)\right)\right\|_2^2}{4} \leq \left\|\left(A^k X - XB^k\right)\right\|_2^2 \leq \frac{\left\|\left(\left(A^{k+1}X - XB^{k+1}\right)B^{-1}\right)\right\|_2^2}{4} \tag{5.107}$$

dir.

İspat: Eşitsizliğin sol tarafı ile ispata başlayalım. Her pozitif yarı tanımlı matris üniter olarak köşegenleştirilebildiğinden, $A = U\lambda U^*$ ve $B = VMV^*$ olacak şekilde $U,V \in M_n(\mathbb{C})$ üniter matrisleri vardır. Burada $\lambda = k\ddot{o}ş(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ ve $M = k\ddot{o}ş(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$ köşegen matrislerdir. Buradaki λ_i ve μ_i ler pozitif sayılardır. $Y = U^* XV = \left[y_{ij}\right]$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(A^{-1}\left(A^{k+1}X-XB^{k+1}\right)\right)=\frac{1}{4}U\lambda^{-1}U^{*}\left(U\lambda^{k+1}U^{*}UYV^{*}-UYV^{*}VM^{k+1}V^{*}\right)\\
&=\frac{1}{4}U\lambda^{-1}U^{*}\left(U\lambda^{k+1}YV^{*}-UYM^{k+1}V^{*}\right)\\
&=\frac{1}{4}U\lambda^{-1}\left(\lambda^{k+1}Y-YM^{k+1}\right)V^{*}\\
&=U\left(\frac{\lambda_i^{k+1}-\mu_j^{k+1}}{4\lambda_i}y_{ij}\right)V^{*}
\end{aligned} \tag{5.108}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
&A^{k}X-XB^{k}=U\lambda^{k}U^{*}UYV^{*}-UYV^{*}V\mathrm{M}^{k}V^{*}\\
&=U\left(\lambda^{k}Y-YM^{k}\right)V^{*}\\
&=U\left(\left(\lambda_i^{k}-\mu_j^{k}\right)y_{ij}\right)V^{*}
\end{aligned} \tag{5.109}$$

dır. $|||UAV|||=|||A|||$, $\|A\|_2=\left(\sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ve (5.99) eşitsizliğinden yararlanarak $i,\ j=1,2,...,n$ için

$$\begin{aligned}
&\frac{\left\|\left(A^{-1}\left(A^{k+1}X-XB^{k+1}\right)\right)\right\|_2^2}{4}=\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i^{k+1}-\mu_j^{k+1}}{2\lambda_i}\right)^2\left|y_{ij}\right|^2\\
&\leq\sum_{i,j=1}^{n}\left(\lambda_i^{k}-\mu_j^{k}\right)^2\left|y_{ij}\right|^2=\left\|\left(A^{k}X-XB^{k}\right)\right\|_2^2
\end{aligned} \tag{5.110}$$

bulunur ki bu eşitsizliğimizin sol tarafının ispatıdır. Benzer olarak

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(\left(A^{k+1}X-XB^{k+1}\right)B^{-1}\right)=\frac{1}{4}\left(U\lambda^{k+1}U^{*}UYV^{*}-UYV^{*}VM^{k+1}V^{*}\right)VM^{-1}V^{*}\\
&=\frac{1}{4}\left(U\lambda^{k+1}YV^{*}-UYM^{k+1}V^{*}\right)VM^{-1}V^{*}\\
&=\frac{1}{4}U\left(\lambda^{2}Y-YM^{2}\right)M^{-1}V^{*}\\
&=U\left(\frac{\lambda_i^{k+1}-\mu_j^{k+1}}{4\mu_j}y_{ij}\right)V^{*}
\end{aligned} \tag{5.111}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(A^{k}X-XB^{k}\right)\right\|_2^2=\sum_{i,j=1}^{n}\left(\lambda_i^{k}-\mu_j^{k}\right)^2\left|y_{ij}\right|^2\\
&\leq\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i^{k+1}-\mu_j^{k+1}}{2\mu_j}\right)^2\left|y_{ij}\right|^2=\frac{\left\|\left(\left(A^{k+1}X-XB^{k+1}\right)B^{-1}\right)\right\|_2^2}{4}
\end{aligned} \tag{5.112}$$

elde edilir ki, ispat tamalanmış olur.

Bhatia' nın, 2007 de verdiği bir skaler eşitsizliği lemma olarak verelim.

Lemma 5.2.2. $a \geq b$ ve $\frac{1}{2} < v \leq 1$ için

$$\frac{a^v b^{1-v} - a^{1-v} b^v}{2v-1} \leq a - b \tag{5.113}$$

dir.

İspat: (4.64) den, $a \geq b$ ve $\frac{1}{2} < v \leq 1$ için

$$\begin{aligned} \frac{a^v b^{1-v} - a^{1-v} b^v}{2v-1} &\leq \frac{va + (1-v)b - (1-v)a - vb}{2v-1} \\ &\leq \frac{va + b - vb - a + va - vb}{2v-1} \leq \frac{(2v-1)(a-b)}{2v-1} \leq a - b \end{aligned} \tag{5.114}$$

bulunur. (5.113)' ün karesini alırsak;

$$\left(\frac{a^v b^{1-v} - a^{1-v} b^v}{2v-1}\right)^2 \leq (a-b)^2 \tag{5.115}$$

elde edilir. Şimdi (5.115) eşitsizliğinin matris versiyonunun Hilbert-Schmidt normunu inceleyelim.

Teorem 5.2.6. $A, B, X \in M_n(\mathbb{C})$, $A \geq B > 0$, $\frac{1}{2} < v \leq 1$ ve A matrisinin bütün özdeğerleri, B matrisinin bütün özdeğerlerinden büyük olsun. Bu takdirde

$$\left\| \frac{A^v X B^{1-v} - A^{1-v} X B^v}{2v-1} \right\|_2^2 \leq \| AX - XB \|_2^2 \tag{5.116}$$

dir.

İspat: $A, B, X \in M_n(\mathbb{C})$, $A \geq B > 0$ ve $\frac{1}{2} < v \leq 1$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} A^v X B^{1-v} - A^{1-v} X B^v &= U\lambda^v U^* UYV^* VM^{1-v} V^* - U\lambda^{1-v} U^* UYV^* VM^v V^* \\ &= U\lambda^v YM^{1-v} V^* - U\lambda^{1-v} YM^v V^* \\ &= U^{-1}\left(\lambda^v YM^{1-v} - \lambda^{1-v} YM^v\right) V^* \\ &= U\left(\left(\lambda_i^v \mu_j^{1-v} - \lambda_i^{1-v} \mu_j^v\right) y_{ij}\right) V^* \end{aligned} \tag{5.117}$$

dır. Buradan norma geçersek

$$\begin{aligned} \left\| \frac{A^v X B^{1-v} - A^{1-v} X B^v}{2v-1} \right\|_2^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\lambda_i^v \mu_j^{1-v} - \lambda_i^{1-v} \mu_j^v}{2v-1} \right)^2 \left| y_{ij} \right|^2 \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{n} (\lambda_i - \mu_j)^2 \left| y_{ij} \right|^2 = \| AX - XB \|_2^2 \end{aligned} \tag{5.118}$$

elde edilir. Şimdi akla gelen soru şu olur: (5.92) eşitsizliğinin sol tarafı ile (5.115) eşitsizliğinin sol tarafından hangisi büyüktür? sorusunun cevabını bir teoremle verelim.

Teorem 5.2.7. $a \geq b \geq 1$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} < 8.616$ ve $\dfrac{1}{2} < v \leq 1$ için

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{2a}\right)^2 \leq \left(\frac{a^v b^{1-v} - a^{1-v} b^v}{2v - 1}\right)^2 \tag{5.119}$$

dır.

İspat: Bu eşitsizliğin sağ tarafı $v = \dfrac{1}{2}$ de en küçük değerini alır. Bu değeri hesaplayalım. Ama bu değer bir belirsizlik durumudur. L'hospital Teoremi ile bu durumu ortadan kaldıralım.

$$\lim_{v \to \frac{1}{2}} \frac{a^v b^{1-v} \ln a - a^v b^{1-v} \ln b + a^{1-v} b^v \ln a - a^{1-v} b^v \ln b}{2} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \ln \frac{a}{b} \tag{5.120}$$

dır. Buradan (5.120) eşitsizliği

$$\frac{a^2 - b^2}{2a} \leq a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \ln \frac{a}{b} \tag{5.121}$$

haline gelir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{a^2 - b^2}{2a a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}} \leq \ln \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{2a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}}} \leq \ln \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} - \frac{b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}} \leq 2 \ln \frac{a}{b} \tag{5.122}$$

elde edilir. $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = x$ olarak alırsak (5.122) eşitsizliğinin son kısmı

$$x - x^{-3} \leq 4 \ln x \tag{5.123}$$

haline gelir. Bu eşitsizliğin de $x < 8.616$ için sağlandığı kolaylıkla gösterilebilir.

Şimdi de Hilbert-Schmidt norm için bu eşitsizliğin matris formunu inceleyelim.

Teorem 5.2.8. $A, B, X \in M_n(\mathbb{C})$ ve $A \geq B > 0$ olsun. λ_i ve μ_i ler sırasıyla A ve B matrisinin özdeğerleri olsun. A matrisinin bütün özdeğerleri, B matrisinin bütün özdeğerlerinden büyük olmak şartıyla $\sqrt{\dfrac{\lambda_i}{\mu_i}} \leq 8.616$, $\lambda_i, \mu_i \geq 1$ ve $\dfrac{1}{2} < v \leq 1$ ($i = 1, 2, ..., n$) için

$$\frac{\left\| A^{-1}\left(A^2 X - XB^2\right)\right\|_2^2}{4} \leq \left\| \frac{A^v XB^{1-v} - A^{1-v} XB^v}{2v-1} \right\|_2^2 \tag{5.124}$$

dir.

İspat: Üniter köşegenleştirmeden ve (5.119) dan

$$\frac{\left\| A^{-1}\left(A^2 X - XB^2\right)\right\|_2^2}{4} = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\lambda_i^2 - \mu_j^2}{2\lambda_i} \right)^2 \left| y_{ij} \right|^2$$
$$\leq \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\lambda_i^v \mu_j^{1-v} - \lambda_i^{1-v} \mu_j^v}{2v-1} \right)^2 \left| y_{ij} \right|^2 = \left\| \frac{A^v XB^{1-v} - A^{1-v} XB^v}{2v-1} \right\|_2^2 \tag{5.125}$$

bulunur ki, ispat tamamlanır.

Bu çalışmaların bir kısmı ICJMS' 2011 de sunulmuştur (Gumus ve Taskara, 2011).

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6.1. Sonuçlar

Bu çalışmada $\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b}$ eşitsizliği ispatlanarak bazı değişikliklerle $\frac{\left(a^{n+1}-b^{n+1}\right)^2}{4a^2} \leq \left(a^n - b^n\right)^2 \leq \frac{\left(a^{n+1}-b^{n+1}\right)^2}{4b^2}$ eşitsizliği elde edilmiştir. Bu skaler eşitsizliklerin matris formları yazılıp norm ve singüler değerleri incelenmiştir. Tezimizide özellikle

$$\frac{\left\|\left(A^{-1}\left(A^{k+1}X - XB^{k+1}\right)\right)\right\|_2^2}{4} \leq \left\|\left(A^k X - XB^k\right)\right\|_2^2 \leq \frac{\left\|\left(\left(A^{k+1}X - XB^{k+1}\right)B^{-1}\right)\right\|_2^2}{4}$$

ve

$$\frac{1}{8}s_j(B^{-\frac{1}{2}}(A-B)^2 B^{-\frac{1}{2}}) \geq s_j(\frac{A+B}{2} - A\#_{\frac{1}{2}} B) \geq \frac{1}{8}s_j(A^{-\frac{1}{2}}(A-B)^2 A^{-\frac{1}{2}})$$

eşitsizlikleri üzerinde durulmuştur. Singüler değerlerle ilgili eşitsizliklerde Heinz ortalaması ile ilgili eşitsizliklere büyük yer verilmiştir. Bu konularda birçok eşitsizlik tezimizde görülebilir. Bu çalışmada norm konusunda özellikle Hilbert- Schmidt norm ve iz normu üzerinde durulmuştur.

Diğer unitarily invaryant normlar üzerinde çalışmalar devam etmektedir. Özel matrisler için bu eşitsizliklerin durumları üzerine araştırmalar yapılmaktadır.

6.2. Öneriler

Bu konuda çalışmak isteyen araştırmacılar değişik skaler eşitsizlikler alıp matris formlarını inceleyebilirler. Bu konudaki çalışmalar genellikle aritmetik, geometrik ve Heinz ortalamaları üzerine devam etmektedir.

KAYNAKLAR

Ando, T., 1994, Majorizations and inequalities in matrix theory, *Linear Algebra Appl.*, 199, 17–67.

Ando, T., 1995, Matrix Young inequalities, *Oper. Theory Adv. Appl.*, 75, 33–38.

Audenaert, K., 2007, A singular value inequality for Heinz means, *Linear Algebra Appl.*, 422, 279–283.

Bhatia, R., Davis, C., 1993, More matrix forms of the arithmetic–geometric mean inequality, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 14, 132–136.

Bhatia, R., Davis, C., 1995, A Cauchy–Schwarz inequality for operators with applications, *Linear Algebra Appl.*, 223/224, 119–129

Bhatia, R., 1997, Matrix Analysis, Springer-Verlag, New York.

Bhatia, R., Kittaneh, F., 2000, Notes on matrix arithmetic–geometric mean inequalities, *Linear Algebra Appl,.* 308, 203–211.

Bhatia, R., Parthasarathy, K.R., 2000, Positive definite functions and operator inequalities, *Bull. London Math. Soc.* 32, 214–228.

Bhatia, R., 2007, Positive Definite Matrices, *Princeton University Press*, Princeton.

Bhatia, R., Kittaneh, F., 2008, The matrix arithmetic–geometric mean inequality revisited, *Linear Algebra Appl.*, 428, 2177–2191.

Hirzallah, O., Kittaneh, F., 2000, Matrix Young inequalities for the Hilbert–Schmidt norm, *Linear Algebra Appl.*, 308, 77–84.

Hirzallah, O., Kittaneh, F., 2010, Singular values, norms, and commutators, *Linear Algebra Appl.*, 432, 1322–1336.

Horn, R.A., Johnson, C.R., 1985, Matrix Analysis, *Cambridge University Pres*, New York.

Kittaneh, F., 1992, A note on the arithmetic–geometric mean inequality for matrices, *Linear Algebra Appl.*, 171, 1–8.

Kittaneh, F., 1993, Norm inequalities for fractional powers of positive operators, *Lett. Math. Phys.* 27, 279–285.

Kittaneh, F., 2004, Norm inequalities for sums and differences of positive operators, *Linear Algebra Appl.*, 383, 85–91.

Kittaneh, F., 2007, Inequalities for commutators of positive operators, *J. Funct. Anal.* 250, 132–143.

Kittaneh, F., Manasrah, Y., 2010, Improved Young and Heinz inequalities for matrices, *J. Math. Anal. Appl.*, 361, 262-269.

Kosaki, H., 1998, Arithmetic–geometric mean and related inequalities for operators, *J. Funct. Anal.*, 156, 429–451.

Kubo, F., Ando, T., 1980, Means of positive linear operators, *Math. Ann.*,246, 205–224.

Merris, R., Pierce, S., 1972, Monotonicity of positive semidefinite hermitian matrices, *Proc. Amer. Math. Soc.*, Volume 31, No. 2.

Mitrinovic, D.S., 1970, Analytic Inequalities, *Springer- Verlag*, New York.

Tao, Y., 2006, More results on singular value inequalities, *Linear Algebra Appl.*, 416, 724–729.

Zhan, X., 2002, Matrix Inequalities, *Springer-Verlag*, Berlin - Heidelnerg, (Lecture Notes in mathematics; Vol. 1970).

Zhan, X., 2004, On some matrix inequalities, *Linear Algebra Appl*. 376 (2004) 299–303

Zhang, F., 1999, Matrix Theory: Basic Results and techniques, *Springer- Verlag*, New York

Gumus, I.H., Hirzallah, O., Taskara, N., Singular value inequalities for the arithmetic, geometric and Heinz means of matrices, *Linear and Multilinear Algebra.*, DOI: 10.1080/03081087.2011.556632

Gumus, I.H.,Taskara, N., 2011, The Singular value and Hilbert-Schmidt norm inequalities for positive definite matrices, The 24th Int. Cong. of the Jangjeon Mathematical Society-ICJMS 2011, Konya

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	İBRAHİM HALİL GÜMÜŞ
Uyruğu	**:**	TÜRKİYE CUMHURİYETİ
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	NİZİP/ 1980
Telefon	**:**	05056860288
Faks	**:**	
e-mail	**:**	gumusibo@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**HASAN ÇAPAN ANADOLU LİSESİ**	**1998**
Üniversite	:	**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ**	**2002**
Yüksek Lisans	:	**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ**	**2005**
Doktora	:	**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ**	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2002	**MİLLİ EĞİTİM BAKANLIĞI**	**ÖĞRETMEN**

UZMANLIK ALANI
Lineer Cebir, Matris Teori

YABANCI DİLLER
İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR