

65733

FRAKTALLARIN YOĞUN MADDE FİZİĞİNDE UYGULAMALARI



Atila Güleç
DOKTORA TEZİ
Fizik Anabilim Dalı
10.0600.0000.045
1997-İZMİR

Atilla GÜLEÇ.....'inDOKTORA..... TEZİ olarak hazırladığı
 “Fraktalların Yoğun Madde Fizikinde Uygulamaları”.....
 başlıklı bu çalışma, jürimizce Lisansüstü
 Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oy birliği.....
 ile kabul edilmiştir.

29 / 04 / 1997

Başkan; Prof. Dr. Doğan Demirhan

Üye; Prof. Dr. Ahmet Öztarhan

Üye; Prof. Dr. Fevzi Büyükkılıç

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun / / gün ve /
 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET
FRAKTALLARIN YOĞUN MADDE FİZİĞİNDE
UYGULAMALARI

Güleç, Atilla

Doktora Tezi, Fizik Bölümü

Tez yöneticisi; Prof. Dr. Fevzi Büyükkılıç

Şubat 1997, 83 sayfa

Fiziksel sistemlerin makroskopik ve mikroskopik davranışı arasında bir köprü olan toplanabilir Boltzmann-Gibbs-Shannon (BGS) istatistiği, C. Tsallis tarafından fraktal esinlenmiş bir entropi formu yardımıyla geliştirilmiştir. Bu çalışmada, geliştirilmiş istatistiksel termodinamiğin temel kavramları yeniden ele alınmış ve Tsallis entropisinin özellikleri üzerinde durulmuştur.

Genleştirilmiş istatistiksel termodinamiğin, klasik ve kuantum gazlarının dağılım fonksiyonlarının belirlenmesi, siyah cisim ışıması, Bose-Einstein yoğunlaşması gibi seçilmiş bazı fiziksel problemlere uygulamaları yapılmıştır. Ayrıca, klasik gazların geliştirilmiş termostatistik davranışları Hurwitz zeta fonksiyonları kullanılarak ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler; Genleştirilmiş termodinamik, Tsallis istatistiği, Entropi, İstatistik topluluklar, Multifraktallar.

ABSTRACT
APPLICATIONS of FRACTALS in CONDENSED
MATTER PHYSICS

Güleç, Atilla

Thesis of Ph. D. in Science

Supervisor; Prof. Dr. Fevzi Büyükkılıç

February 1997, 83 pages

Extensive Boltzmann-Gibbs-Shannon (BGS) statistics, which forms a bridge between the macroscopic and the microscopic behaviors of a physical system, is generalized by C. Tsallis, with the aid of an entropy form which is inspired from fractals. In this study, basic concepts of generalized statistical thermodynamics are reviewed and properties of Tsallis entropy are considered.

Generalized statistical thermodynamics is applied to some selected physical problems such as determination of the distribution functions of classical and quantum gases, black-body radiation, Bose-Einstein condensation. In addition, generalized thermostistical behavior of classical gases is analyzed by using Hurwitz zeta functions.

Key Words; Generalized statistics, Tsallis statistics, Entropy, Statistical Ensembles, Multifractals.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmam süresince görüş ve tecrübeleri ile bana yol gösteren ve her türlü yardımlarını esirgemeyen danışmanım Prof. Dr. Fevzi Büyükkılıç'a en derin saygılarımla teşekkür ederim. Ayrıca Doktora çalışmamı E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yapmam için beni yönlendiren, öneri ve yardımlarını esirgemeyen hocam Prof. Dr. Nizamettin Armağan'a, derslerinden büyük ölçüde yararlandığım Prof. Dr. Hüseyin Erbil, Prof. Dr. Doğan Demirhan ve bir çok konuda yardımlarını esirgemeyen Arş. Grv. Uğur Tırnaklı, Arş. Grv. Serhat Özeren, Arş. Grv. Harun Eğrifes'e, tez metninde bazı düzenleme ve düzeltmelerinde büyük yardımları olan Arş. Grv. Ülfet Atav'a, tez metninin yazımında ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Arş. Grv. Haluk Şafak ve Arş. Grv. Erhan Akın'a en içten duygularıyla teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. STANDART İSTATİSTİKSEL TERMODİNAMİĞİN GENELLEŞTİRİLMESİ: GENELLEŞTİRİLMİŞ TERMO-İSTATİSTİK	4
2.1 Ölçme.....	4
2.2 Fraktallar	8
2.2.1 Fraktalların Geometrik Modelleri	12
2.2.2 Fraktal Boyutun belirlenmesi.....	16
2.3 Entropi Formları	19
2.3.1 Tsallis Entropisi (Fraktal Esinlenmiş Entropi)	20
2.3.2 Tsallis Entropisinin Özellikleri.....	21
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL TERMODİNAMİĞİN UYGULAMALARI.....	27
3.1 Klasik ve Kuantum Gazlarının İstatistiğinin Tsallis Formalizmi Çerçevesinde Genelleştirilmesi.....	27
3.1.1 Genelleştirilmiş Dağılım Fonksiyonları	28
3.1.2 Mükemmel Bose Gazı	31
3.1.3 Genelleştirilmiş Planck Dağılımı	38
3.1.4 Maxwell-Boltzmann Dağılımı	39
3.1.5 Mükemmel Fermi Gazı.....	40

3.2 Klasik ve Kuantum Gazlarının Genelleştirilmiş Riemann Zeta Fonksiyonları Kullanılarak Tsallis Formalizminde incelenmesi	44
3.2.1 Çarpanlara Ayırma Bakış Açısına Göre Klasik Gazların Davranışı.....	45
3.2.2 Çarpanlara Ayrılamayan Durum.....	50
3.2.3 Genel Çözüm	52
3.3 Genelleştirilmiş Bose-Einstein Yoğunlaşması.....	55
3.4 Planck Işıma Yasasının Genelleştirilmesi	60
4. SONUÇLAR	66
KAYNAKLAR DİZİNİ	68
EKLER.....	70
Ek 1 Dinamik Fiziksel Sistemlerin Ele Alınış Biçimleri	70
Ek 2 Genelleştirilmiş Termodinamik Formülasyon	71
Ek 3 Hurwitz (veya Genelleştirilmiş Riemann) Zeta Fonksiyonu.....	72
ÖZGEÇMİŞ.....	74

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Eğri büyüklüğünün ölçümü.....	5
2.2 Yüzey büyüklüğünün ölçümü	6
2.3 İki boyutlu sınırlı-difüzyon gruplaşmasının sonucu olarak ortaya çıkan $D=1.71$ boyutlu küme.....	9
2.4 Üçgensel Koch şeklinin oluşturulması.....	11
2.5 Üçgensel Cantor kümesinin oluşturulması. (a) Geometrik yöntem, (b) Curdling yöntemi.....	13
3.1 Bu çalışma ve Tsallis ve arkadaşlarının sunmuş olduğu çalışma (Tsallis et al., 1995) çerçevesinde elde edilen sonuçlara göre birim hacim başına siyah cisim foton enerji yoğunluğunun $h\nu/kT$ ye göre değişimi.....	62

1. GİRİŞ

İstatistiksel termodinamiğin amacı fiziksel sistemlerin makroskopik ve mikroskopik davranışı arasında bir köprü kurmaktır. Bu bağlamda, toplanabilir Boltzmann-Gibbs-Shannon (BGS) istatistiği önemli bir formalizmdir. Bu formalizm, (a) mikroskopik etkileşmelerin menzili, makroskopik sistemlerin lineer boyutuyla kıyaslandığında küçük olduğu durumda, (b) mikroskopik hafızanın zaman erişimi, gözlem zamanı ile kıyaslandığında küçük olduğunda (Markowian process) doğrudur. Bu sınırlamalar ortadan kalktığında BGS istatistiği yetersiz kalır. Yani termodinamik niceliklerin hesaplanmasında ortaya çıkan integraller ıraksamaktadır. Bu problemlerden kurtulmanın yolu istatistiksel termodinamiği genelleştirmekten geçmektedir.

1960'lı yıllarda B. Mandelbrot'un çalışmalarıyla popüler hale gelen fraktal teoriden esinlenerek 1980'li yıllarda C. Tsallis (Tsallis, 1988) tarafından öne sürülen fraktal esinlenmiş entropi formuna dayalı olarak geliştirilen ve toplanabilir olmayan (nonextensive) genelleştirilmiş istatistiksel termodinamik (GST), uzun menzilli etkileşimler, uzun süreli bellek etkileri ve evrenin fraktal yapısının göz önüne alınmasıyla son yıllarda fiziksel problemlerin çözümünde önemli bir araç haline gelmiştir. Üç boyutlu öz-çekimli (self-gravitating) astrofiziksel nesneler, kara delikler ve süpersicimler, Levy-türü rastgele yürüyüşler, girdap (vortex) problemi ve uzun menzilli etkileşimlerin mevcut olduğu karanlık madde (dark matter) gibi bir çok sistemin analizinde toplanabilir olmayan istatistiksel termodinamiğin gerekliliği çok açık olduğu için toplanabilir olmayan formalizmlere duyulan ilgiyi günümüzde daha da artırmıştır. Bu ilginin en yoğun olduğu alanlar iki başlık altında toplanabilir: (i) kuantum grupları yaklaşımı, (ii) genelleştirilmiş istatistiksel termodinamik. Bu çalışmada ikinci başlık altında sunulan formalizm kullanılmıştır. GST formalizmi, son yıllarda,

sayısız istatistiksel termodinamik kavramlara başarıyla uygulanmakla kalmamış, aynı zamanda toplanabilir (extensive) BGS istatistiğinin geçerli olmadığı fiziksel sistemler için de elverişli olduğu görülmüştür.

Formalizm, yukarda sözü edildiği gibi, entropi ve bir O operatörünün beklenen değeri için verilen iki aksiyoma dayalıdır. q entropi indisi, fraktal yapıyla ilgili bilgiyi bünyesinde muhafaza eden ve Tsallis q -indisi adı verilen yeni bir niceliktir. Ayrıca GST, BGS istatistiğini $q=1$ olduğunda özel bir hal olarak kapsar. Açıkca, Tsallis (genelleştirilmiş) entropi ifadesi, sadece $q=1$ ise toplanabilir (Nobre et al., 1995) ve $(1-q)$ terimi, sistemin toplanabilirlik özelliğindeki (extensivity) eksikliğin bir ölçüsü olarak yorumlanabilir (Tsallis et al., 1995).

Göz önüne alınan herhangi bir sistemle ilgili herhangi bir bilgi, ancak bir ölçüm yoluyla elde edilebileceği için Kesim 2.1 de fraktal ölçümün nasıl yapılacağı üzerinde durulmuştur. Daha sonra fraktalların geometrik modelleri Kesim 2.2.1 de, fraktal boyutun belirlenmesi ile ilgili basit bir yaklaşım Kesim 2.2.2 de ele alınmış ve Kesim 2.3 de fraktal esinlenmiş entropi formları, özellikle Tsallis entropisi ve özellikleri anlatılmıştır.

Kesim 3.1 de, GST nin seçilmiş bazı fiziksel problemlere, özellikle bu çalışmanın temel amaçlarından biri olan klasik ve kuantum gazlarının dağılım fonksiyonlarının genelleştirilmesi problemine uygulamaları literatürde ilk kez ele alınmıştır. Kesim 3.2 de klasik ve kuantum gazları istatistiğinin Hurwitz (veya genelleştirilmiş Riemann) zeta fonksiyonları kullanılarak Tsallis formalizmi çerçevesinde nasıl ele alınabileceği sunulmuştur ve dağılım fonksiyonları daha analitik hale getirilmiştir. Kesim 3.3 de Bose-Einstein yoğunlaşması, Kesim 3.4 de ise, elde edilen dağılım fonksiyonları kullanılarak Planck ışıma yasasının genelleştirilmesi problemleri incelenmiştir.

Ayrıca, dinamik fiziksel sistemlerin uzay ve zamanın sürekli ya da kesikli olmasına göre nasıl incelenebileceği EK 1 de, genelleştirilmiş termodinamik formülasyon çerçevesi içerisinde fiziksel niceliklere ait bağıntılar özet olarak EK 2 de tablo halinde ve Hurwitz zeta fonksiyonlarının bazı özellikleri ise EK 3 de sunulmuştur.



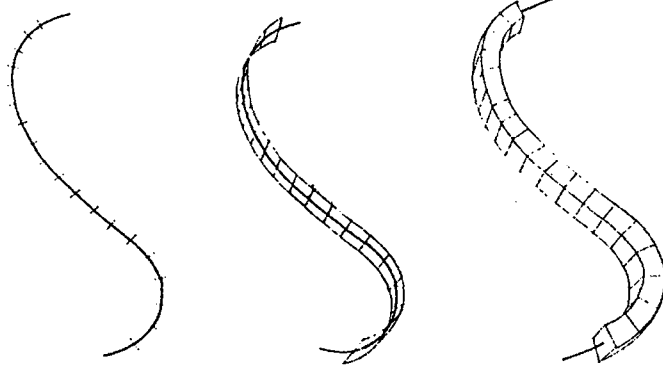
2. STANDART İSTATİSTİKSEL TERMODİNAMİĞİN GENELLEŞTİRİLMESİ: GENELLEŞTİRİLMİŞ TERMOİSTATİSTİK

2.1 Ölçme

İncelenen herhangi bir biçime sahip nesne, uzayda bulunan nokta kümeleri olarak göz önüne alınabilir. Örneğin, tek boyutlu Euclidean uzayda bir S noktalar kümesi bir doğru meydana getirir. Uzaydaki noktalar arasındaki mesafe kavramı, Hausdorff-Besicovitch boyutunun ve dolayısıyla D fraktal boyutunun tanımında merkezi bir rol oynar. Uzaydaki noktaların bir S kümesinin *büyükliğini* nasıl ölçeriz? Eğrilerin uzunluğunu, yüzeylerin alanını veya bir nesnenin hacmini ölçmenin basit bir yolu, uzayı Şekil 2.1’de gösterildiği gibi kenarları δ olan küçük küblere bölmektir. Bunun yerine çapı δ olan küçük küreler de kullanılabilir. Eğer küçük bir küreyi kümedeki bir noktaya merkezlersek, merkezdeki noktadan $r < (1/2)\delta$ uzaklığında bulunan bütün noktalar, küre tarafından örtülür. Noktalar kümesini örtmek için gereken küre sayısı sayılarak, kümenin büyüklüğünün bir ölçüsü elde edilir. Bir eğri, bu eğrinin örtülmesi için gereken δ uzunluklu doğru parçalarının $N(\delta)$ sayısı bulunarak ölçülebilir. Bilinen bir eğri için, $N(\delta) = L_0 / \delta$ yazılabilir. Burada L_0 eğrinin gerçek uzunluğu olup, eğrinin ölçülen uzunluğu

$$L = N(\delta)\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L_0 \delta^0 \quad (2.1)$$

ifadesi ile verilir. $\delta \rightarrow 0$ limitinde L ölçümü, asimtotik olarak eğrinin uzunluğuna eşittir ve δ ’dan bağımsızdır.



Şekil 2.1 Eğri büyüklüğünün ölçümü.

Eğriyi örtmek için gereken disk veya kare sayısı verilerek bir *alan* ile eğriyi tanımlayan noktalar kümesi arasında bir ilişki kurulması istenebilir. Bu karelerin alanı δ^2 dir. Dolayısıyla eğri ile ilişkili alan

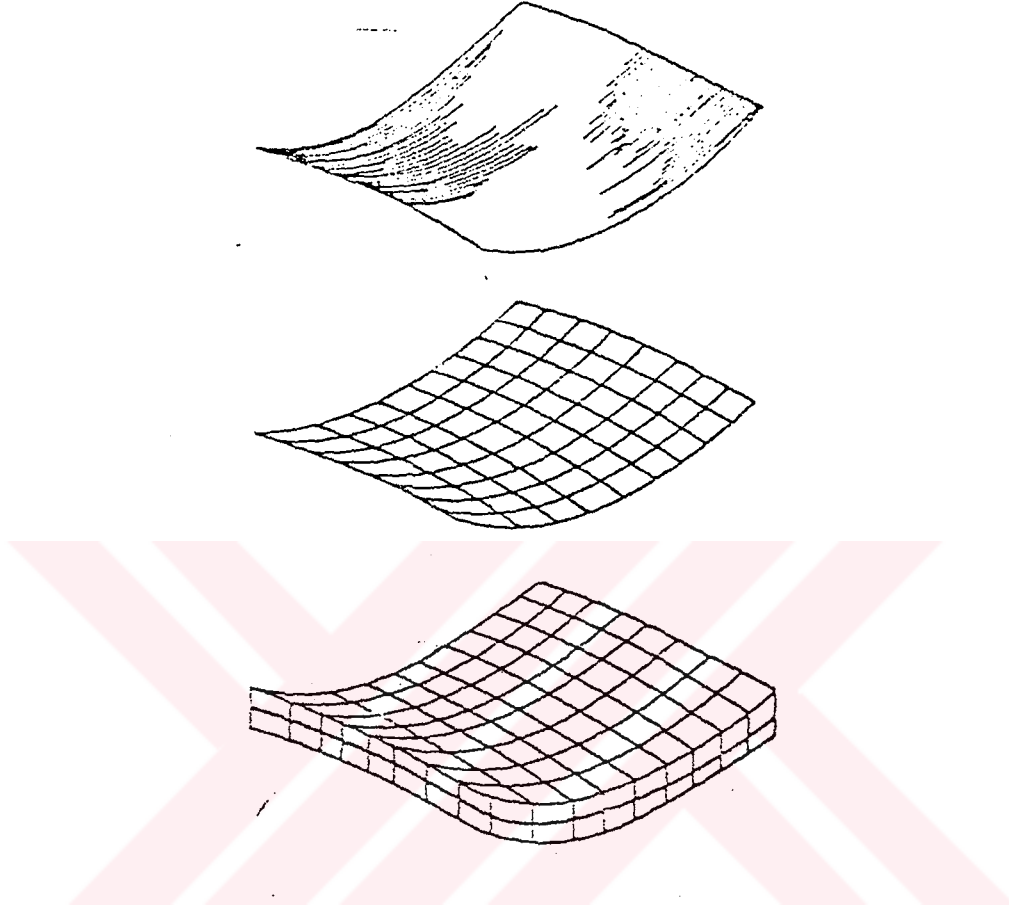
$$A = N(\delta)\delta^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L_0\delta^1 \quad (2.2)$$

bağıntısı ile verilir. Benzer şekilde bir *hacim* (V) ile eğri arasında aşağıdaki ilişki kurulabilir:

$$V = N(\delta)\delta^3 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L_0\delta^2 \quad (2.3)$$

Dolayısıyla, bilinen eğriler için hem A hem de V, δ sıfır olurken sıfıra gider ve tek ilginç ölçüm eğrinin uzunluğudur.

Şimdi, Şekil 2.2 de gösterildiği gibi bir yüzeyi tanımlayan noktalar kümesini göz önüne alalım. Normal ölçüm A alanıdır ve



Şekil 2.2 Yüzey büyüklüğünün ölçümü.

$$A = N(\delta)\delta^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} A_0\delta^0 \quad (2.4)$$

yazılır. Burada, bilinen bir yüzey halinde, bu yüzeyi örtmek için gereken karelerin sayısı, δ 'nın sıfır olması limitinde $N(\delta) = A_0/\delta^2$ olduğu bulunur. Burada A_0 , yüzeyin alanıdır.

Yüzeyi kapatmak için gereken küblerin hacimleri toplamı oluşturularak bir *hacim* ile bir yüzey arasında

$$V = N(\delta)\delta^3 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} A_0\delta^1 \quad (2.5)$$

ilişkisi kurulabilir. Beklenildiği gibi bu hacim, $\delta \rightarrow 0$ için sıfır olur. Bir *uzunluk* ile yüzey arasında bir ilişki kurulabilir mi? Formal olarak basitce, $\delta \rightarrow 0$ için ıraksayan

$$L = N(\delta)\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} A_0\delta^{-1} \quad (2.6)$$

ölçümü alınabilir. Bu sonuç, bir yüzeyi sonlu sayıda doğru parçaları ile kapatmak mümkün olmadığından mantıklıdır. Üç boyutlu uzayda bir yüzey tarafından tanımlanan noktalar kümesinin tek yararlı ölçümünün *alan* olduğu sonucu çıkarılabilir.

Şimdiye kadar uzaydaki bir S noktalar kümesinin büyüklüğünün bir ölçümünü vermek için $h(\delta) = \gamma(d)\delta^d$ (doğru, kare, disk, küre, küb) test fonksiyonu göz önüne alınmış ve küme, $M_d = \sum h(\delta)$ ölçümünü oluşturacak şekilde örtülmüştür. Doğrular, kareler ve kübler için geometrik çarpan $\gamma = 1$ dir. Diskler için $\gamma = \pi/4$ ve küreler için $\gamma = \pi/6$ dır. Genel olarak, $\delta \rightarrow 0$ için, M_d ölçümünün, d 'nin (ölçümün *boyutu*) seçimine bağlı olarak ya sıfır ya da sonsuz olduğu bulunur. S kümesinin D Hausdorff-Besicovitch boyutu *kritik boyuttur*. Bu durumda M_d ölçümü sıfırdan sonsuza değişir:

$$M_d = \sum \gamma(d)\delta^d = N(\delta)\gamma(d)\delta^d \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & d > D \\ \infty, & d < D \end{cases} \quad (2.7)$$

M_d 'ye kümenin *d-ölçümü* adı verilir. $d = D$ için M_d 'nin değeri çoğunlukla sonludur, ancak sıfır veya sonsuz olabilir; önemli olan d 'nin bir fonksiyonu olarak M_d 'deki sıçramanın konumudur. Bu tanımın, kümeyi örtmek için kullanılan test fonksiyonunun, δ büyüklüğünün sıfır olması limitinde noktalar kümesinin özelliklerini ölçmesi anlamında *yerel* bir özellik olarak D Hausdorff-Besicovitch boyutunu tanımladığına dikkat edilmelidir. Aynı zamanda D fraktal boyutunun konuma bağlı olduğu ortaya çıkar. Gerçekte göz önünde bulundurulması gereken bir kaç önemli nokta vardır. Özellikle, Hausdorff-Besicovitch boyutunun tanımı, kümenin, hepsi aynı büyüklükte olmayan ancak δ 'dan daha küçük çaplara sahip *küreler* ile örtülmesine izin verir. Bu durumda d -ölçümü, bütün örtme işlemlerinde elde edilebilecek minimum değere sahip olur (Feder, 1988).

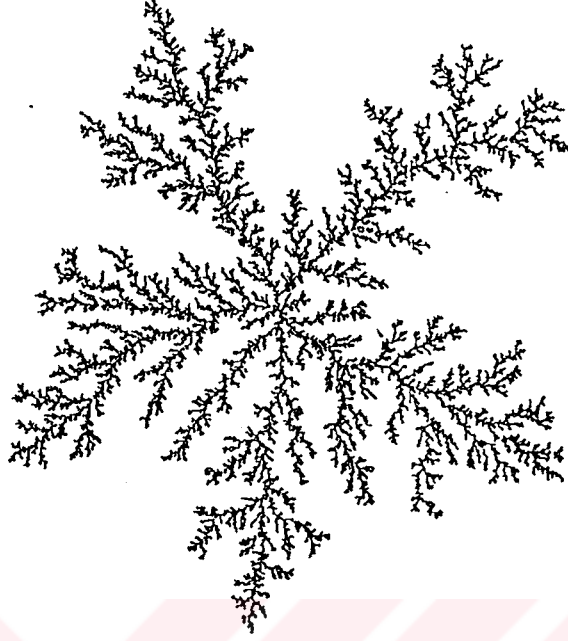
2.2 Fraktallar

Fraktalın orjinal tanımı Mandelbrot tarafından aşağıda verildiği şekilde yapılmıştır (Feder, 1988):

Bir fraktal, boyutu topolojik boyuttan farklı olan kendi kendine benzer (ölçekdeki değişme anlamında) bir kümedir.

Bu tanım daha ziyade matematiksel olduğundan fraktal kavramını daha açık bir şekilde ortaya koyan görüşlere ihtiyaç duyulur. Bu nedenle, mikroparçacıkların yeni bir faz oluşumunda yoğunlaşmasını göz önüne alalım. Böyle bir oluşum çoğunlukla kompakttır ve bu nedenle büyüklüğü R olan bir oluşumda parçacık sayısı

$$N \propto R^d \quad (2.8)$$



Şekil 2.3 İki boyutlu sınırlı-difüzyon yoğunlaşmasının (aggregation) sonucu ortaya çıkan $D=1.71$ boyutlu küme (cluster).

bağıntısı ile verilir. Burada d , uzayın boyutudur. Oluşumun hacmi de aynı formdadır ve

$$V = A_d R^d \quad (2.9)$$

ile verilir. Burada A_d , geometrik biçimin hesaba katıldığı geometrik çarpandır (eş-eksenli biçim için $A_1 = 2\pi$, $A_2 = 4\pi$, $A_3 = 4\pi/3$ dür). Dolayısıyla kompakt oluşumlarda $\rho = N/V$ biçiminde ifade edilen parçacık yoğunluğu, oluşumun büyüklüğünden bağımsızdır.

Kompakt olmayan oluşumlar için tamamen farklı bir durum gözlenmektedir (Şekil 2.3). Oluşumun R büyüklüğü artarken parçacık sayısı

$$N \propto R^D \quad (2.10)$$

çok yavaş bir şekilde artar. D üsteli, fraktalın temel nicel karakteristiğidir ve fraktal (Hausdorff) boyutu denir. D fraktal boyutu, yoğunluk oluşumu için verilen (2.8) bağıntısındaki fiziksel uzayın d boyutundan farklı olduğu için (2.10) bağıntısı anormal bir karaktere sahiptir. Dolayısıyla

$$\rho \propto R^{-(d-D)}, \quad d > D \quad (2.11)$$

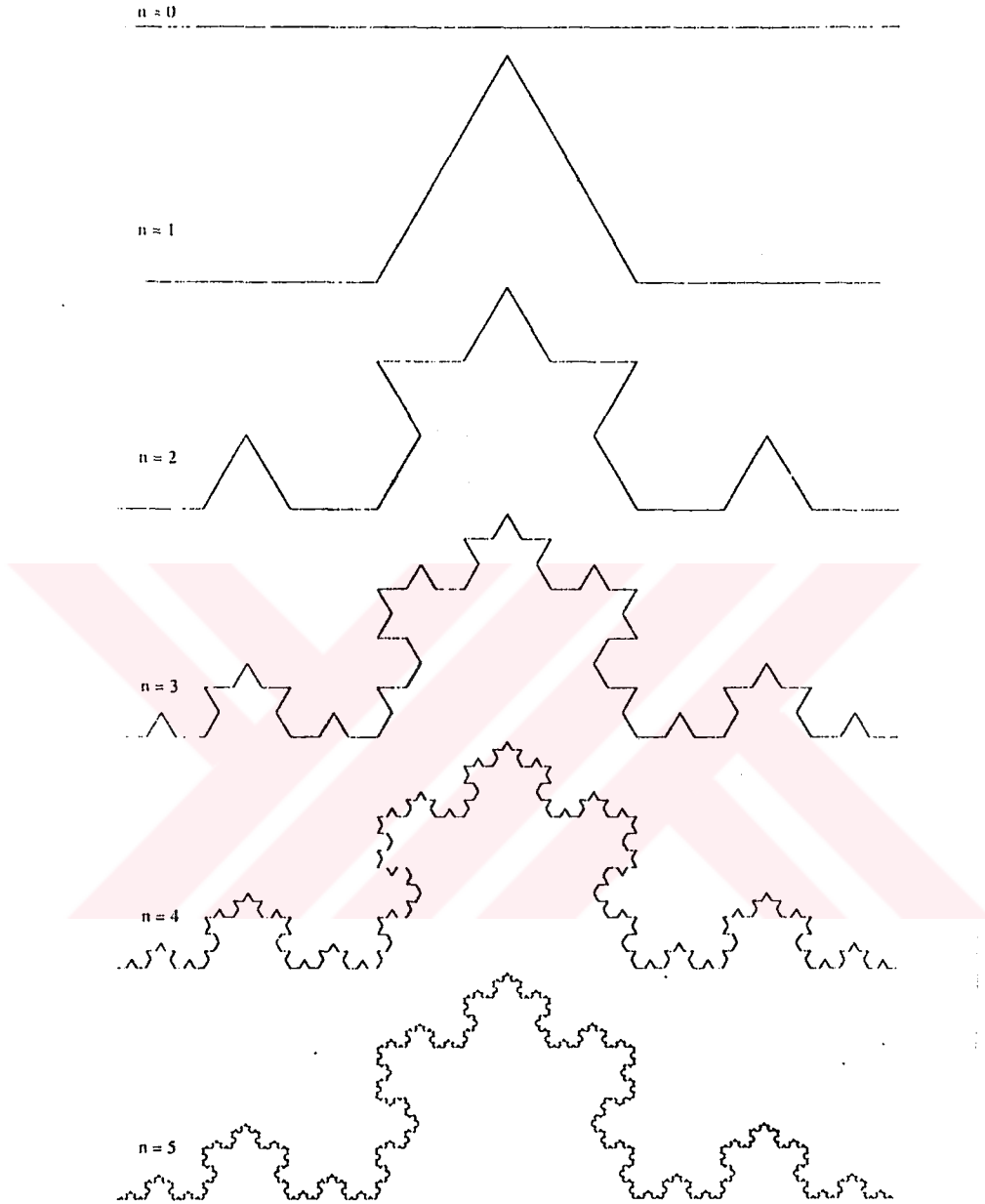
şeklinde verilen fraktalın yoğunluğu, fraktalın kompakt olmayan karakterini yansıtan büyüklüğün azalan bir fonksiyonu olur. Açıkça, d topolojik ve D fraktal boyutları arasındaki fark ne kadar büyükse fraktal nesne o kadar belirginleşir (Olemskoi et al., 1993).

Fraktal kavramı ile ilk önce sahil şeritlerinin uzunluğunun ölçümlerinde karşılaşılmıştır. Sezgisel olarak sahil şeridinin L uzunluğunun, ölçüm ölçeğinin ($\ell \rightarrow 0$) seçimine bağlı olmaması gerektiği halde ölçümler gerçekte

$$L \propto \ell^{1-D} \quad (2.12)$$

bağıntısının geçerli olduğunu göstermiştir. Sahil şeridi ölçümlerinde fraktal boyutun $D > 1$ olduğu bulunmuştur (örneğin, İngiltere adaları için $D \approx 1.3$, Norveç için $D \approx 1.5$ dir). Bu durum, sahil şeridinin doğru ($d=1$) ve yüzey ($d=2$) arasında orta bir konum işgal eden bir küme olduğunu gösterir ve $1 < D < 2$ niceliği ne kadar büyükse sahil şeridi o kadar düzensizdir.

Bir fraktalın temel karakteristiği boyutu D dir. Bu kesimde D 'nin tek değeri ile karakterize edilen ideal monofraktal hali göz önüne alınacaktır. İlk önce sezgisel anlamda D boyutunu bulabilmeyi mümkün kılan uygun geometrik



Şekil 2.4 Üçgenel Koch şeklinin oluşturulması.

modeller verilmiş daha sonra keyfi bir monofraktal için D 'yi analitik olarak belirleyebilmeyi mümkün kılan bir algoritma formüle edilmiştir.

2.2.1 Fraktalların Geometrik Modelleri

En basit Koch ve Cantor fraktal kümeleri göz önüne alınmıştır. Bu, bilinen fiziksel uzayda temsil edilen bir geometrik fraktal nesnenin boyutu için genel bir ifade bulma olanağı tanıyacaktır.

Koch'un üçgenel (triadic) şeklini göz önüne alalım. Şekil 2.4 den görülebileceği gibi bu şekli oluşturmak için $n=0$ adımında birim uzunluklu bir parça (segment) alınır. Daha sonraki $n=1$ adımında $1/3$ uzunluklu orta (iç) parça asıl parçanın merkezinden kesilerek çıkartılır ve tabanı olmayan eşit kenarlı bir üçgen parçanın üzerinde oluşturulur. Daha sonraki adımda $(1/3)^2$ uzunluklu iç parça, elde edilen dört parçanın herbiri üzerinden kesilerek çıkartılır ve yukarıda yapılan oluşum aynen tekrarlanır. Daha sonra bu işlem $n \rightarrow \infty$ kez tekrarlanır.

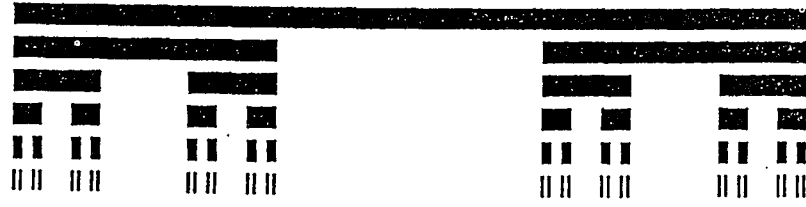
Elde edilen fraktalın uzunluğu L olsun. Her adımdan sonra uzunluk $4/3$ kez artacağından n 'inci adımda $L_n = (4/3)^n$ olacaktır. Her bir hattın uzunluğu $\ell_n = (1/3)^n$ olduğundan $n = -\ln(\ell_n)/\ln 3$ elde edilir ve L_n toplam uzunluğu ile ℓ_n temel uzunluğu arasında (2.12) bağıntısı geçerlidir. Burada fraktal boyut

$$D = \ln 4 / \ln 3 = 1.263 \quad (2.13)$$

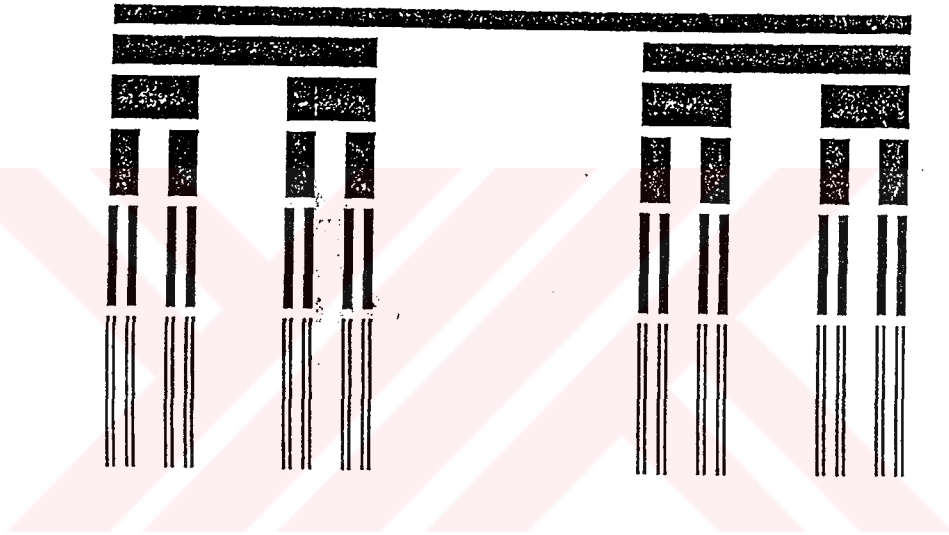
dır. Parça sayısı $N_n = L_n / \ell_n$

$$N(\ell) \propto \ell^{-D} \quad (2.14)$$

bağıntısı ile belirlenir (n indisi alınmamıştır). Şekil 2.4 den görüleceği üzere $n \rightarrow \infty$ limitinde Koch eğrisi, bir doğru ile bir yüzey arasında kalan bir şekildir. Bu nedenle (2.13) fraktal boyutu $1 < D < 2$ aralığındadır.



(a)



(b)

Şekil 2.5 Üçgenel Cantor kümesinin oluşturulması. (a) Geometrik yöntem. (b) Curdling yöntemi.

Yukarıda verilen tanıma göre fraktal, kendi kendine benzer bir kümedir. Bu, Şekil 2.4 den indirgenmiş bir ölçekte özdeş küme oluşturmanın her n adımda yapıldığına dikkat edilerek görülebilir. Bu nedenle Koch şeklinin her parçası, bileşenlerinin her biri gereken ölçeğe kadar basitçe artırılarak elde edilebilir. Gerçekten temel kesimin ℓ uzunluğu ζ kadar azaltılırsa $N(\ell)$ parça sayısı artar. Bu durumda (2.14) den

$$N(\zeta\ell) = \zeta^{-D}N(\ell), \quad \zeta < 1 \quad (2.15)$$

elde edilir. Tanım gereği (2.15) tipindeki denklemi sağlayan $N(\ell)$ fonksiyonu, değeri fraktal boyutuna eşit olan D mertebeli homojen bir fonksiyondur. Homojen $N(\ell)$ fonksiyonlarının karakteristik fonksiyonu ℓ argümanının ölçüm ölçeğinin ζ kadar azalması N fonksiyonunun ζ^{-D} kadar artmasına eşdeğerdir.

Bu kendi kendine benzerlik özelliği sadece Koch şeklinin değil, tüm fraktal oluşumların karakteristiğidir. (2.15) benzerlik bağıntısı üçgenel Koch şekli için verilen (2.13) ve (2.14) ifadelerinden daha geneldir. Gerçekten (2.15)'de ζ benzerlik parametresi $\zeta\ell = 1$ koşulu yardımıyla sabitlenerek (2.14) bağıntısı elde edilir. Diğer taraftan keyfi ζ ölçeğine sahip $\ell_n = \zeta^n$ temel uzunluğu $(1/3)^n$ e indirgenemez ve (2.13)

$$D = \ln 4 / \ln \zeta^{-1} \quad (2.16)$$

şeklinde genelleştirilmelidir. Burada $\zeta < 1$ benzerlik parametresi, Koch şeklini oluşturan bloğun dört parçasının her birinin kısalma miktarını gösterir.

Şimdi $D < 1$ (*Cantor tozu-Cantor dust*) boyutlu fraktal küme örneğini göz önüne alalım. Şekil 2.5 den görülebileceği gibi bunun oluşturulmasının Koch eğrisinden farkı sadece n 'inci adımda boyu $\ell_n = (1/3)^n$ olan n aralık eklemek yerine bu aralıkların çıkarılmasıdır. Dolayısıyla kalan kümenin uzunluğu $L_n = (2/3)^n$ dir ve her bir hattın ℓ_n uzunluğu yine $\ell_n = (1/3)^n$ dir. Sonuç olarak $L_n(\ell_n)$ bağıntısı daha önce verilen (2.12) fonksiyonu ile ifade edilir. Bununla birlikte burada fraktal boyut

$$D = \ln 2 / \ln 3 = 0.631 \quad (2.17)$$

dir. Şekil 2.5 den görülebileceği gibi $D < 1$ koşulu, *Cantor tozunun* nokta ile doğru arasında kalan bir ara oluşum olduğunu ifade edecektir. Yine ℓ_n uzunluklu parçaların $N_n = L_n / \ell_n$ sayısı, Koch eğrisi durumunda olduğu gibi (2.14) formülü ile belirlenecektir.

(2.17) eşitliği, Şekil 2.5 de gösterilen en basit simetrik Cantor kümesine karşılık gelir. Koch şekli için olduğu gibi oluşumun her n adımından sonra parçaların ℓ_n uzunluğu $(1/3)$ değil de ζ olacak şekilde alınırsa (2.17) nin paydasındaki $\ln 3$ terimi $\ln \zeta^{-1}$ ile değiştirilmelidir. Öte yandan, (2.13) ve (2.17) ifadelerinin paylarının karşılaştırılması genel halde $\ln j$ teriminin kullanılması gerektiğini gösterir. Burada j , fraktalın temel şeklinin oluşturulmasına katılan blok sayısıdır (Şekil 2.4 ve Şekil 2.5 de gösterilen Koch eğrisi ve Cantor tozu için sırasıyla $j=4$ ve $j=2$ alınmıştır). Böylece (2.13), (2.16) ve (2.17) denklemleri genelleştirilerek fraktal boyut ifadesinin

$$D = \ln j / \ln \zeta^{-1} \quad (2.18)$$

formunda olması gerektiği sonucu elde edilir. Burada j , fraktalın elemanter parçasını temsil eden blok sayısı, ζ ise blok büyüklüğünün oluşumun her adımında kaç kat küçüldüğünü tanımlayan benzerlik indisidir. Cantor kümesi için elde edilen parçanın büyüklüğü başlangıçtaki bloğun büyüklüğünü aşmaması gerektiğinden benzerlik parametresinin değeri $D \leq 1$ sonucuna götüren $\zeta \leq 1$ koşulu ile sınırlandırılmıştır. Yukarda elde edildiği gibi bu, yapılanmanın her adımında ayırık blokların çıkarıldığı fraktal kümelerle karşılık gelir. Koch şeklinde olduğu gibi blokların toplandığı durumda $D > 1$ dir ve (2.18) e göre benzerlik parametresinin $\zeta > j^{-1}$ olduğu varsayılır.

2.2.2 Fraktal Boyutun Belirlenmesi

Yukarıda verilen örneklerde fraktal boyut, grafikler yardımıyla belirlenir. Halbuki genel halde durum çok karmaşıktır ve yukarıda verilen yapılanmalar genelleştirilmelidir. Bunun çözümü, fraktal kümenin $\ell \rightarrow 0$ kenar uzunluklu d -boyutlu elemanter küblerle örtülmesi ve küblerin $N(\ell)$ sayısının sayılmasıdır. Bu durumda fraktal boyut, (2.14) benzeri bir bağıntı yardımıyla belirlenir. Bu işlemi tamamlama olanağı sağlayan formal bir yol, anlamı aşağıdaki örnekten görülebilecek olan bir yaratma fonksiyonunu tanımlamaktır.

$d = 2$ boyutlu ve S_0 olan olağan (fraktal olmayan) bir yüzeyi göz önüne alalım (Şekil 2.2). İlk olarak bu yüzeyi, kenarları $\ell \rightarrow 0$ olan

$$N(\ell) = S_0 / \ell^2 \quad (2.19)$$

sayıda kareler ile kaplayalım. Karelerin toplam alanı

$$S(\ell) = N(\ell)\ell^2 \quad (2.20)$$

formülü ile belirlenir. Cebirsel açıdan (2.8) ve (2.20) eşitlikleri özdeş gibi göründükleri halde, ilk eşitliğin sadece bilinen yüzeylere, ikinci eşitliğin ise sadece fraktal yüzeylere uygulanabileceği unutulmamalıdır. (2.19) eşitliği (2.20) de yerine konularak

$$S(\ell) = S_0 \quad (2.21)$$

sonucu elde edilir.

Elemanter karelerin, bir yüzeyin alanını saptamada kullanılabilecek en doğal elemanlar olduğu açıktır. Ancak bu tek seçim değildir. Dolayısıyla, verilen örnekteki yüzey Şekil 2.2 de görüldüğü gibi elemanter kübler ile de kaplanabilir. Bunların toplam hacmi (2.20) türünden

$$V(\ell) = N(\ell)\ell^3 \quad (2.22)$$

şeklinde bir eşitlik ile ifade edilebilir. (2.19) eşitliği ile verilen küb sayısı burada yerine konularak

$$V(\ell) = S_0 \ell \quad (2.23)$$

sonucu bulunur.

İlgilenilen yüzeylerin kapatılabildiği elemanter şekiller listesine devam edilerek, ilke olarak, $\ell \rightarrow 0$ uzunluklu $N(\ell)$ sayıda parça içeren kırık bir çizgi de kullanılabilir. Bu çizginin toplam uzunluğu

$$L(\ell) = N(\ell)\ell \quad (2.24)$$

dir ve (2.19) ile verilen $N(\ell)$ ifadesi yerine konulursa

$$L(\ell) = S_0 \ell^{-1} \quad (2.25)$$

sonucu elde edilir.

(2.21), (2.23) ve (2.25) denklemleri, ilgili kümeyi örten ($d = 2$ boyutlu bir yüzey) $q = 1, 2, 3$ boyutlu kümelerin χ_q ölçmesini ifade ederler. Bunlar genel olarak

$$\chi_q(\ell) = S_0 \ell^{q-d} \quad (2.26)$$

biçiminde temsil edilebilirler. Bu eşitliğin karakteristik bir özelliği, $\ell \rightarrow 0$ limitinde $q < d$ için $\chi_q(\ell) \rightarrow \infty$ olması [Denk.(2.25)] ve $q > d$ için $\chi_q(\ell) \rightarrow 0$ olmasıdır [Denk.(2.23)]. (2.26) ölçmesi, sadece $q = d$ (ilgili yüzeyin boyutunu veren bir koşul) ise $\chi_q(\ell) \rightarrow S_0$ sonlu değerini alır.

Yukarıda göz önüne alınan grafik örnek, keyfi bir kümenin D fraktal boyutunu (yukarıda göz önüne alınan örnekte, $d = 2$ boyutlu bilinen bir yüzeye indirgenmiştir) bulmayı mümkün kılan yaratma fonksiyonunun nasıl bulunacağını göstermektedir. Açıkça, bu fonksiyonun genel formu

$$\chi_q = \sum_i \ell_i^q \quad (2.27)$$

şeklinde temsil edilebilir. Burada toplam, ℓ_i uzunluğu ve q boyutu ile karakterize edilen elemanter formasyonlar üzerinden yapılır. Daha önce göz önüne alınan örneklerin aksine (bu örneklerde $\ell_i = \text{sabit} = \ell$ ve $q = 1, 2, 3$ idi) burada, ilk olarak, elemanter kümelere bölmenin düzgün olmadığı (ℓ_i sabit değildir) ve ikinci olarak q parametresinin sürekli olduğu varsayılmıştır. Düzgün bölme yapılırsa (2.27) tanımı

$$\chi_q(\ell) = N(\ell) \ell^q \quad (2.28)$$

şeklini alır. (2.28) hesaba katılarak fraktal nesneler için (2.26) sonucunu içeren

$$\chi_q(\ell) \propto \ell^{q-D} \quad (2.29)$$

bağıntısı elde edilir. Sahil şeridinin uzunluğu için verilen (2.14) formülü, $q = 1$ olan böyle bir bağıntıya örnektir.

Dolayısıyla, fraktal boyutu analitik olarak belirlemek için fraktal, ℓ_i kenar uzunluklu q -boyutlu elemanter bloklarla kaplanmalı ve yaratma fonksiyonu (2.27) formülü kullanılarak bulunmalıdır. Daha sonra, q değeri değiştirilerek yaratma fonksiyonunun sonlu bir değer verdiği $q = D$ değeri bulunmalıdır. Bu, D fraktal boyutu olacaktır. $\chi_q(\ell)$ yaratma fonksiyonunun kendisi, sahil şeridi uzunluğu gibi bir fraktalın temel karakteristiğidir.

2.3 Entropi Formları

Fiziksel sistemlerin istatistiksel termodinamik çerçevesinde incelenmesinde entropi önemli bir temel niceliktir. Bu nedenle bu kesimde entropi formları ele alınmaktadır. Boltzmann-Gibbs-Shannon (BGS) yaklaşımı standart istatistiksel termodinamik olarak bilinir. Standart istatistiksel termodinamiğin sınırlarını belirleyen varsayımlar aşağıda verilmiştir:

- 1) Mikroskopik etkileşmeler makroskopik sistemin boyutuna göre küçük (etkileşmeler kısa erişimli) olmalı.
- 2) Mikroskopik hafızanın zaman erişimi, gözlem zamanına göre küçük olmalı.
- 3) Sistem, fraktal yapıda olmayan bir uzay zaman içinde gelişmelidir.

Yukarda verilen şartlar dışında kalan durumlar söz konusu olması halinde standart istatistiksel termodinamik yardımıyla elde edilecek öngörüler yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle, standart olmayan bir istatistiksel termodinamiğe gerek duyulur. Standart istatistiksel termodinamiğin mümkün bir genelleştirilmesi, evrenin olası fraktal yapısı nedeniyle Boltzmann-Gibbs-Shannon entropisi yerine fraktal esinlenmiş bir entropi kullanılarak yapılabilir.

Fraktal esinlenmiş entropilere bir örnek olarak burada kısaca Rényi entropisinden de söz etmek yerinde olacaktır. Rényi entropisi

$$S_q = \frac{k}{1-q} \ln \sum_{i=1}^w p_i^q \quad (2.30)$$

ifadesi ile verilir. Rényi entropisi S_q^R , daha sonra daha ayrıntılı olarak söz edilecek olan Tsallis entropisi S_q^T ile gösterilirse Rényi ve Tsallis entropisi arasında

$$S_q^R = \frac{k}{1-q} \ln [1 + (1-q)S_q^T] \quad (2.31)$$

ilişkisi vardır. Bu bağıntıdan görülebileceği üzere S_q^R Rényi entropisi, S_q^T Tsallis entropisinin monoton artan fonksiyonudur (Ramshaw, 1995).

2.3.1 Tsallis Entropisi (Fraktal Esinlenmiş Entropi)

C. Tsallis, 1988 yılında yayınladığı makalesinde BGS istatistiğinin olası bir genelleştirilmesini yapmıştır (Tsallis, 1988). $q \in \mathbb{R}$ genelleştirmeyi (özel istatistikleri) karakterize eden herhangi reel bir sayı ve $\{p_i\}$ mikroskopik W

($W \in \mathbb{N}$) konfigürasyonları ile ilgili olasılıklar olsun. Normal olarak ölçülen nicelik p_i^q dur.

C. Tsallis, multifraktal ölçmelerden esinlenerek genelleştirilmiş entropi formu için

$$S_q = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1} \quad (2.32)$$

bağıntısını ortaya koymuştur. Ayrıca i halinde değeri O_i olan bir O gözlenebilirinin deneysel ölçümünün, O gözlenebilirinin

$$O_q = \sum_{i=1}^W p_i^q O_i \quad (2.33)$$

q -beklenen değerini vereceğini de ifade etmiştir.

2.3.2 Tsallis Entropisinin Özellikleri

Özellik 1. *Genelleştirilmiş entropi pozitifdir.* Yani, $S_q \geq 0$ dır. Burada eşitlik hali ($\exists i: p_i = 1$) durumları ve $q > 0$ için geçerlidir.

Özellik 2. *Mikrokanonik topluluk eşolasılığa sahiptir.* Bunu görmek için, genelleştirilmiş entropi $\sum_{i=1}^W p_i = 1$ ifadesi ile verilen normalize edilmiş olasılıklar bağ koşulu altında optimum yapılır. Matematiksel olarak λ Lagrange çarpanı olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \left(S_q - \lambda \sum_{i=1}^W p_i \right) = -\frac{q}{q-1} p_i^{q-1} - \lambda = 0 \quad (2.34)$$

olmalıdır. Buradan

$$p_i = \left[\frac{\lambda(1-q)}{q} \right]^{\frac{1}{q-1}} \quad (2.35)$$

sonucu çıkar. Bu ifade i 'ye bağlı olmadığından $\sum_{i=1}^W p_i = 1$ bağ koşulunun konması konması $p_i = 1/W$ sonucunu verir.

Özellik 3. Entropi $q > 0$ için dışbükey, $q < 0$ için ise içbükeydir. Bu durum açıkça, $q > 0$ ($q < 0$) için negatif (pozitif) sonlu bir değer olan

$$\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \left(S_q - \lambda \sum_{i=1}^W p_i \right) = -q p_i^{q-2} \delta_{ij} \quad (2.36)$$

Hessian matrisinden doğrudan elde edilir. Dolayısıyla genelleştirilmiş entropi $q > 0$ için maksimum, $q < 0$ için minimum olur.

Özellik 4. Kanonik toplulukta olasılık dağılımı.

Bundan sonra kanonik topluluğu göz önüne alalım. Eğer genelleştirilmiş iç enerji

$$U_q = \sum_{i=1}^W p_i^q \epsilon_i \quad (2.37)$$

olacak şekilde ε_i durum enerjisi tanımlanırsa, S_q ifadesi olasılığın ve enerjinin korunduğu bağ koşulları altında optimum yapılır. Sonuç olarak genelleştirilmiş kanonik dağılım

$$p_i = \frac{1}{Z_q} [1 - (1-q)\beta\varepsilon_i]^{-\frac{1}{1-q}} \quad (2.38)$$

elde edilir. Burada genelleştirilmiş bölüşüm fonksiyonu

$$Z_q = \sum_{i=1}^W [1 - (1-q)\beta\varepsilon_i]^{-\frac{1}{1-q}} \quad (2.39)$$

eşitliği ile ve ters sıcaklık $\beta = 1/T$ eşitliği ile tanımlanmıştır.

$q \rightarrow 1$ limitinde bilinen

$$p_i = \frac{e^{-\beta\varepsilon_i}}{Z_1} \quad (2.40)$$

ve

$$Z_1 = \sum_{i=1}^W e^{-\beta\varepsilon_i} \quad (2.41)$$

ifadeleri yeniden elde edilir. $q \neq 1$ için enerjinin mutlak değeri önemlidir - enerji spektrumundaki toplanabilir bir sabit fiziksel etkiler oluşturacaktır. Ayrıca, q 'nın genel değerleri için p_i ifadesi, eğer $1 - (1-q)\beta\varepsilon_i < 0$ olursa anlamsız olur. Böyle bir durumda i hali ısısal olarak yasaklanmıştır. Pozitif enerji spektrumu yukardan sınırsızdır ve $\beta > 0$ olduğu varsayılarak, yeteri kadar yüksek ε_i değerleri için $q < 1$

ise bu böyle olacaktır. Dolayısıyla, bu durumda, genelleştirilmiş kanonik dağılım $q < 1$ için enerjiye göre doğal bir kesilime (cutoff) sahip olur.

Özellik 5. *Termodinamiğin Legendre dönüşüm yapısı, tüm q değerleri için invaryanttır. Bunu görmek için*

$$-\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{Z_q^{1-q} - 1}{1-q} \right) = U_q \quad (2.42)$$

olduğunu ve serbest enerjinin

$$F_q = -\frac{1}{\beta} \left(\frac{Z_q^{1-q} - 1}{1-q} \right) \quad (2.43)$$

ifadesiyle tanımlandığını belirtelim. Bu durumda, $F_q = U_q - TS_q$ olduğunu doğrulamak mümkündür ve

$$\frac{\partial S_q}{\partial U_q} = \frac{1}{T} \quad (2.44)$$

sonucu bulunur.

Bu denklemler termodinamiğin temel denklemleridir ve bunların q 'nın değişmesine göre değişmez olmaları önemlidir. Genelleştirilmiş istatistiksel termodinamik ve standart istatistiksel termodinamik arasındaki en çarpıcı ve en önemli farklılıklar hal değişkenlerinin toplanabilirliği (extensivity) ile ilişkilidir. Eğer sistemin mikroskobik durumlarını $L = \{1, \dots, V\}$ ve $R = \{V+1, \dots, W\}$ şeklinde iki farklı kümeye ayırırsak ve bunların olasılıkları sırasıyla

$$P_L = \sum_{i=1}^V p_i, \quad P_R = \sum_{i=V+1}^W p_i \quad (2.45)$$

alınırsa Özellik 6 elde edilir.

Özellik 6. *Genelleştirilmiş entropi aşağıdaki genelleştirilmiş Shannon toplanabilirlik özelliğine uyar:*

$$S_q(p_1, \dots, p_R) = p_L^q S_q\left(\frac{p_1}{p_L}, \dots, \frac{p_V}{p_L}\right) + p_R^q S_q\left(\frac{p_{V+1}}{p_R}, \dots, \frac{p_W}{p_R}\right) + S_q(p_L, p_R) \quad (2.46)$$

Alternatif olarak tamamen bağımsız A ve B gibi iki alt sistemi göz önüne alabiliriz. Alt sistemler bağımsız olduğu için, i halinde A alt sisteminin ve j halinde B alt sisteminin $A \cup B$ bileşke olasılığı

$$p_{ij}^{A \cup B} = p_i^A p_j^B \quad (2.47)$$

eşitliği ile verilir. Kısa cebirsel işlemlerden sonra Özellik 7 elde edilir.

Özellik 7. *Genelleştirilmiş entropi aşağıdaki toplanabilirlik özelliğine uyar:*

$$S_q(A \cup B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B) \quad (2.48)$$

Dolayısıyla $q < 1$ için süper-toplanabilir (superadditive), $q > 1$ için ise alt-toplanabilir (subadditive) dir.

Özellik 8. *Bir O gözlenebilirinin genelleştirilmiş beklenen değeri aşağıdaki toplanabilirlik kuralına uyar:*

$$O_q(A \cup B) = O_q(A) + O_q(B) + (1-q)[O_q(A)S_q(B) + O_q(B)S_q(A)] \quad (2.49)$$

Her iki durumda da toplanabilirliğin sadece $q=1$ olduğunda yeniden elde edilebileceği görülmektedir.

Tsallis entropisi göz önüne alınarak istatistiksel termodinamiğin yeniden formülasyonuna genelleştirilmiş (Tsallis) termostatistiği denir. Dinamik fiziksel sistemlerin, uzay ve zamanın sürekli ya da kesikli olmasına göre nasıl ele alınacağı EK 1 de tablo halinde özet olarak verilmektedir. Genelleştirilmiş istatistiksel termodinamik çerçevesinde elde edilen konu ile ilgili fiziksel bağıntılar ise EK 2 de sunulmaktadır.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL TERMODİNAMİĞİN UYGULAMALARI

3.1 Klasik ve Kuantum Gazlarının İstatistiğinin Tsallis Formalizmi Çerçevesinde Genelleştirilmesi

Fraktal uzay-zaman içerisinde gelişen klasik veya kuantum sistemlerinin incelenmesinde, genelleştirilmiş istatistik mekanik doğal bir araçtır ve genelleştirilmiş dağılım fonksiyonları vazgeçilmez bir önem taşır. Tsallis tarafından öne sürülen genelleştirilmiş entropi (fraktal esinli entropi) kullanılarak, klasik gazlar için Maxwell-Boltzmann istatistiği olduğu kadar kuantum gazları için genelleştirilmiş Fermi-Dirac ve Bose-Einstein istatistikleri elde edilebilir. Klasik gazlar halinde, dağılım fonksiyonu, Bose-Einstein dağılımının özel hali olarak elde olunur. Klasik ve kuantum gazlarının dağılım fonksiyonlarının genelleştirilmesi literatürde ilk kez ele alınmıştır (Büyükkılıç et al., 1993, 1995). Bu kısımda dağılım fonksiyonlarının Tsallis formalizmi çerçevesinde nasıl genelleştirildiği ele alınmaktadır.

N parçacıktan oluşmuş etkileşmeyen bir kuantum gazını göz önüne alalım. Sistemin ısı ve parçacık banyosunda olduğunu, yani E enerjisinin ve N parçacık sayısının ortalama olarak korunduğunu varsayalım. Sistemin kararlı halleri

$$H\psi_R = E_R \psi_R \quad (3.1)$$

Schrödinger denkleminin çözümleridir. Burada H Hamiltonien, ψ_R dalga fonksiyonlarıdır. Sistemin girilebilir halleri, tüm gazın olası kuantum hallerini tanımlayan R ile verilir. İkinci kuantizasyon formalizminde R, $\{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$

işgal sayıları kümesi ile tanımlanır. Burada n_k , k halindeki parçacık sayısıdır. Sistemin halleri, P_R olasılıklarına sahip istatistik bir topluluk oluşturur. Öte yandan, sistemin parçacık banyosunda olduğu kadar enerji banyosunda da olduğundan büyük kanonik topluluk kurulabilir. Bu topluluğun R hallerinin P_R olasılık dağılımlarının elde edilmesi temel problemdir.

3.1.1 Genelleştirilmiş Dağılım Fonksiyonları

Denge halinde, büyük kanonik topluluktaki benzer sistemlerin R hallerine dağılım olasılıkları kolayca belirlenebilir. Denge halinde, Boltzmann H-teoremine uygun olarak, sistemin entropisi maksimum olmalıdır. Topluluğun entropi fonksiyonu olarak Tsallis entropisi alınırsa, verilen bağ koşulları altında bu entropi maksimum olmalıdır. Söz konusu bağ koşulları, P_R olasılıklarının normalizasyonunu ifade eden

$$\sum_R P_R = 1 \quad (3.2)$$

ve sırasıyla enerji ve parçacık sayısının ortalama olarak korunduğunu ifade eden

$$\bar{E} = \sum_R P_R^q E_R \quad (3.3)$$

$$\bar{N} = \sum_R P_R^q N_R \quad (3.4)$$

dır. Bu varyasyon hesabı probleminin çözümünde, Lagrange belirsiz çarpanlar yöntemi kullanılarak,

$$Q = \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_R P_R^q \right) - \alpha \sum_R P_R - \beta \sum_R P_R^q E_R - \gamma \sum_R P_R^q N_R \quad (3.5)$$

ifadesi maksimum yapılmalıdır. Burada α , β ve γ belirsiz Lagrange çarpanlarıdır. Bu ifadenin P_R ye göre kısmi diferansiyeli sıfıra eşitlenerek

$$\sum_R \left(\frac{q P_R^{q-1}}{q-1} + \alpha + q \beta P_R^{q-1} E_R + q \gamma P_R^{q-1} N_R \right) = 0 \quad (3.6)$$

denklemini bulunur. Parantez içindeki ifade tüm R ler için geçerli olduğundan, denklem toplam olmadan

$$q P_R^{q-1} + (q-1)\alpha + q(q-1)\beta P_R^{q-1} E_R + q(q-1)\gamma P_R^{q-1} N_R = 0 \quad (3.7)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. P_R , Denk.(3.7) den β ve γ çarpanları sırasıyla

$$\gamma = -\beta\mu, \quad \beta = 1/T \quad (3.8)$$

şeklinde belirlenerek çözülebilir. Burada μ kimyasal potansiyel, T termodinamik denge halinin sıcaklığıdır. Dolayısıyla, büyük kanonik topluluğun bir R halinde olma olasılığı

$$P_R = \left[1 + \beta(q-1)E_R - \beta(q-1)\mu \right]^{1/(1-q)} / Z_q \quad (3.9)$$

dır. Burada

$$Z_q = \sum_R \left[1 + \beta(q-1)E_R - \beta(q-1)\mu \right]^{1/(1-q)} \quad (3.10)$$

niceliği, büyük kanonik topluluğun bölüşüm fonksiyonudur. Eğer sistem parçacık sayısına göre yalıtılırsa (yani, $dN = 0$), bu durumda $\gamma = 0$ ve aynı zamanda $\mu = 0$

olur ve sonuç olarak Denk.(3.9) ve Denk.(3.10), kanonik topluluk olasılık ve bölüşüm fonksiyonları haline gelir.

Tüm gazın kuantum mekaniksel hali, tek-parçacık hallerinin işgal sayıları verildiğinde tek olarak belirlenir. Bu işgal sayıları, aynı zamanda,

$$E_R = n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \dots + n_k \varepsilon_k + \dots \quad (3.11)$$

$$N_R = n_1 + n_2 + \dots + n_k + \dots \quad (3.12)$$

toplam enerji ve toplam parçacık sayısını belirler. Burada ε_k , k halindeki bir parçacığın enerjisidir.

(3.11) ve (3.12) denklemleri (3.9) ve (3.10) denklemlerinde yerine konularak

$$P_{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots} = \frac{[1 + \beta(q-1)(\varepsilon_1 - \mu)n_1 + \beta(q-1)(\varepsilon_2 - \mu)n_2 + \dots + \beta(q-1)(\varepsilon_k - \mu)n_k + \dots]^{\frac{1}{1-q}}}{Z_q} \quad (3.13)$$

sonucu elde edilir. Burada

$$Z_q = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots} [1 + \beta(q-1)(\varepsilon_1 - \mu)n_1 + \beta(q-1)(\varepsilon_2 - \mu)n_2 + \dots + \beta(q-1)(\varepsilon_k - \mu)n_k + \dots]^{\frac{1}{1-q}} \quad (3.14)$$

dır. $P_{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots}$ niceliği, N-cisimli sistemi oluşturan parçacıkların $\{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$ halinde bulunma (genelleştirilmiş) olasılığıdır.

Parçacıklar arasındaki korelasyonların ihmal edilebildiği seyreltik bir gaz için, farklı parçacıkların halleri istatistiksel olarak bağımsız düşünülebilir. Dolayısıyla, bölüşüm fonksiyonu, her biri k tek-parçacık haline karşılık gelen çarpanlara

$$Z_q = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k=0}^{\infty} [1 + \beta(q-1)(\varepsilon_k - \mu)n_k]^{-\frac{1}{1-q}} \quad (3.15)$$

biçiminde ayrılabilir. Artık, kuantum gazları için dağılım fonksiyonları belirlenebilir.

3.1.2 Mükemmel Bose Gazı

Bosonlar, ayırd edilemez parçacıklardır ve her hangi bir halde her hangi sayıda parçacık bulunabilir. Bosonlar, parçacık değiş-tokuşuna göre simetrik olan dalga fonksiyonları ile temsil edilir. Bose gazı, tam sayılı spinlere sahip parçacıklardan meydana gelir ve Bose-Einstein istatistiğine uyarlar. Bosonlar için $n_k = 0, 1, 2, \dots$ dır.

Denk.(3.14) de verilen bölüşüm fonksiyonunu, bir Bose gazı için yazalım. Toplam üzerinde hiç bir sınırlama yoktur ve dolayısıyla parçacıklar istatistiksel bağımsız olarak göz önüne alınabileceği için her biri tek-parçacık haline karşılık gelen çarpanların bir çarpımı olarak yazılabilir. Dolayısıyla, Bose gazının büyük kanonik topluluk için bölüşüm fonksiyonu, Denk.(3.15) ile uyumlu bir şekilde,

$$Z_q^B = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k=0}^{\infty} [1 + \beta(q-1)(\varepsilon_k - \mu)n_k]^{-\frac{1}{1-q}} \quad (3.16)$$

veya

$$Z_q^B = \prod_{k=1}^{\infty} g(x_k, n_k, q) \quad (3.17)$$

dır. Burada

$$g(x_k, n_k, q) = \sum_{n_k=0}^{\infty} [1 + (q-1)x_k n_k]^{\frac{1}{1-q}}, \quad x_k = \beta(\varepsilon_k - \mu) \quad (3.18)$$

dır. Z_q^B bölüşüm fonksiyonu, $g(x_k, n_k, q)$ ile verilen fonksiyonel serilere bağlıdır. $q \rightarrow 1$, $n_k \rightarrow \infty$ limitinde Denk.(3.18) ile verilen seriler, geometrik seri formunu alır. Bu limitde,

$$\begin{aligned} g(x_k, n_k \rightarrow \infty, 1) &\Rightarrow f(x_k, n_k \rightarrow \infty, 1) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \sum_{n_k=0}^{\infty} \exp(-x_k n_k) \\ &= \frac{1}{1 - \exp(-x_k)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

dır. Serinin toplamı

$$f(x_k) = \frac{1}{1 - \exp(-x_k)} \quad (3.20)$$

olarak temsil edilebilir. Öte yandan, $q \neq 1$ halinde $g(x_k, n_k, q)$ niceliğini hesaplamak için (Plastino et al., 1993) de verilen

$$\frac{y^{q-1} - 1}{q-1} \leq y - 1, \quad q \leq 2 \text{ için} \quad (3.21a)$$

$$\frac{y^{q-1} - 1}{q-1} = y - 1, \quad q = 2 \text{ için} \quad (3.21b)$$

$$\frac{y^{q-1}-1}{q-1} \geq y-1, \quad q \geq 2 \text{ için} \quad (3.21c)$$

ifadelerinden yararlanılacaktır. (3.21) denklemlerinden

$$\left[1+(q-1)n_y\right]^{\frac{1}{1-q}} \leq \frac{1}{1+n_y}, \quad q \geq 2 \text{ için} \quad (3.22a)$$

$$\left[1+(q-1)n_y\right]^{\frac{1}{1-q}} = \frac{1}{1+n_y}, \quad q = 2 \text{ için} \quad (3.22b)$$

$$\left[1+(q-1)n_y\right]^{\frac{1}{1-q}} \geq \frac{1}{1+n_y}, \quad q \geq 2 \text{ için} \quad (3.22c)$$

yazılabilir. (3.22) denklemleri hesaba katılarak Denk.(3.18) den

$$g(x_k, n_k, q) \leq h(x_k, n_k), \quad q \leq 2 \text{ için} \quad (3.23a)$$

$$g(x_k, n_k, q) = h(x_k, n_k), \quad q = 2 \text{ için} \quad (3.23b)$$

$$g(x_k, n_k, q) \geq h(x_k, n_k), \quad q \geq 2 \text{ için} \quad (3.23c)$$

ifadeleri elde edilir. Burada

$$h(x_k, n_k) = \sum_{n_k=0}^{n_k} \frac{1}{1+x_k n_k} = 1+t(x_k, n_k) \quad (3.24)$$

ve

$$t(x_k, n_k) = \sum_{n_k=1}^{n_k} \frac{1}{1+x_k n_k} \quad (3.25)$$

dır. (Titchmarsh, 1968) e göre $U_1 = 1/(1+x_k)$ tanımı kullanılarak ve

$$U_{n_k} = -\frac{x_k}{(1+n_k x_k)[1+(n_k-1)x_k]}, \quad n_k > 2 \quad (3.26)$$

yazılarak Denk.(3.25) deki seri

$$t(x_k, n_k) = U_1 + (U_1 + U_2) + (U_1 + U_2 + U_3) + \dots + (U_1 + \dots + U_n)$$

veya,

$$t(x_k, n_k) = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $S_{n_k}(x_k)$, birbiçim olmayan (non-uniformly), sınırlı (boundedly) yakınsak serilere bir örnek olup

$$S_{n_k}(x_k) = U_1 + U_2 + \dots + U_{n_k} = \frac{1}{1+n_k x_k} \quad (3.27)$$

dır. S_{n_k} larla oluşturulan $n_k \times n_k$ matrisi göz önüne alınarak

$$t(x_k, n_k) = n_k S_{n_k} - v(x_k, n_k) \quad (3.28)$$

yazılır. Burada

$$v(x_k, n_k) = 0 \times U_1 + 1 \times U_2 + \dots + (n_k - 1) \times U_{n_k-1} \quad (3.29)$$

dır. Denk.(3.26) ya göre $|x_k| < 1$ halinde ve $n_k > 2$ alınarak $v(x_k, n_k)$ ifadesindeki her terimin sıfır olduğu, yani $\lim_{n_k \rightarrow \infty} v(x_k, n_k) \rightarrow 0$ olduğu gösterilebilir. Bu durumda Denk.(3.28)

$$t(x_k, n_k \rightarrow \infty) = \frac{1}{x_k} \quad (3.30)$$

formunu alır. Bu ifade, Denk.(3.24) de yerine konularak

$$h(x_k, n_k \rightarrow \infty) = 1 + \frac{1}{x_k}$$

veya yeniden yazılarak

$$h(x_k) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + x_k}} \quad (3.31)$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla, Denk.(3.17) de verilen bölüşüm fonksiyonu

$$Z_q^B \leq \prod_{k=1}^{\infty} h(x_k), \quad q < 2 \text{ için} \quad (3.32a)$$

$$Z_q^B = \prod_{k=1}^{\infty} h(x_k), \quad q = 2 \text{ için} \quad (3.32b)$$

$$Z_q^B \geq \prod_{k=1}^{\infty} h(x_k), \quad q > 2 \text{ için} \quad (3.32c)$$

olur. Öte yandan, $q \rightarrow 1$ limitinde, Denk.(3.20) nin Denk.(3.18) de yerine konulması halinde Denk.(3.17) yi

$$Z_1^B = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - \exp(-x_k)} \right) \quad (3.33)$$

sonucuna götürür. k tek-parçacık durumundaki hallerin ortalama sayısı

$$\bar{n}_k = \sum_{n_k=0}^{\infty} n_k P_{n_k} \quad (3.34)$$

ile verilir. k kuantum halinin n_k parçacık tarafından işgali olasılığı

$$P_{n_k}^B = \sum_{\substack{n_k \text{ üzerinden} \\ \text{toplam hariç}}} P_{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots} \quad (3.35)$$

olarak elde edilir. (3.22a) ifadesi hesaba katılarak ve bölüşüm fonksiyonunun elde edilmesinde kullanılan yol izlenerek Denk.(3.35) deki n_k hariç $n_1, n_2, \dots$ üzerinden toplama yapıldığında

$$P_{n_k}^B \leq \frac{1}{(1+n_k x_k) Z_q^B} \prod_{j=1, j \neq k}^{\infty} \sum_{n_j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n_j x_j} \right)$$

veya

$$P_{n_k}^B \leq \frac{1}{(1+n_k x_k) Z_q^B} \prod_{j=1, j \neq k}^{\infty} \sum_{n_j=0}^{\infty} h(x_j), \quad q \leq 2 \text{ için} \quad (3.36)$$

elde edilir. Bununla birlikte, Denk.(3.32a) ile verilen Z_q^B önceki denklemde yerine konulduğunda

$$P_{n_k}^B \leq \frac{1}{(1+n_k x_k) h(x_k)}, \quad q \leq 2 \text{ için} \quad (3.37a)$$

bulunur. Benzer şekilde (3.22b) ve (3.22c) ifadelerinden yararlanılarak

$$P_{n_k}^B = \frac{1}{(1+n_k x_k) h(x_k)}, \quad q = 2 \text{ için} \quad (3.37b)$$

$$P_{n_k}^B \geq \frac{1}{(1+n_k x_k) h(x_k)}, \quad q \geq 2 \text{ için} \quad (3.37c)$$

ifadeleri elde edilir. $q \rightarrow 1$ limitinde Denk.(3.36) dan

$$P_{n_k}^B = \frac{\exp(-n_k x_k)}{1/[1 - \exp(-x_k)]} \quad (3.38)$$

elde edilir. Denk.(3.37a) nın Denk.(3.34) de yerine konulmasıyla

$$\bar{n}_k \leq \sum_{n_k=0}^{\infty} \frac{n_k}{(1 + n_k x_k) h(x_k)}, \quad q < 2 \text{ için} \quad (3.39)$$

veya

$$\bar{n}_k \leq -\frac{1}{h(x_k)} \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{n_k=0}^{\infty} \ln(1 + n_k x_k)^{-1}$$

veya

$$\bar{n}_k \leq -\frac{1}{h(x_k)} \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{n_k=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + n_k x_k)} \quad (3.40)$$

bulunur. Denk.(3.25) ve Denk.(3.32) göz önünde bulundurularak $n_k \rightarrow \infty$ için

$$\bar{n}_k \leq -\frac{1}{h(x_k)} \frac{\partial}{\partial x_k} h(x_k) \quad (3.41)$$

elde edilir. Türevin alınması sonucunda

$$\bar{n}_k \leq \frac{1}{(1 + x_k) h(x_k)}, \quad q < 2 \text{ için} \quad (3.42)$$

ifadesi elde edilir. Denk.(3.23a) da $n_k = 1$ yazıldığında ve çıkış noktasına geri döndüğünde ve Denk.(3.42) de

$$\frac{1}{(1+x_k)} \geq [1+(q-1)x_k]^{\frac{1}{1-q}} \quad (3.43)$$

değişimi yapıldığında eşitlik hali için

$$\bar{n}_k = \frac{1}{[1+(q-1)x_k]^{\frac{1}{q-1}} - 1} \quad (3.44)$$

bulunur. Benzer tartışmalar $q = 2$ ve $q > 2$ için de yapılabilir, ancak elde edilecek sonuçlar Denk.(3.44) ile aynı olacaktır. Denk.(3.44) ile verilen ifadeye genelleştirilmiş Bose-Einstein dağılımı adı verilir. $q \rightarrow 1$ limitinde, Denk.(3.38) in Denk.(3.35) de yerine konulmasıyla

$$\bar{n}_k = \frac{1}{\exp(x_k) - 1} \quad (3.45)$$

sonucu elde edilir.

3.1.3 Genelleştirilmiş Planck Dağılımı

Özel hal olarak, Denk.(3.44) de $\mu = 0$ alındığında (Landau et al., 1980)

$$\bar{n}_k = \frac{1}{[1+\beta(q-1)\epsilon_k]^{\frac{1}{q-1}} - 1} \quad (3.46)$$

genelleştirilmiş Planck dağılımı elde edilir.

3.1.4 Maxwell-Boltzmann Dağılımı

Bose-Einstein istatistiğinde bir durumun çoklu (multiple) işgali, klasik haldekinden daha büyüktür. Bununla birlikte, Fermi-Dirac istatistiğinde tersi doğrudur. Pauli dışarlama ilkesi nedeniyle bir durumun çoklu işgal olasılığı sıfırdır. Yani hiç bir çoklu işgal izinli değildir. Çoklu işgallere sahip hallerin imkansız olduğu durumlar söz konusu ise bu durumda üç halin tümü için (Bose-Einstein, Fermi-Dirac ve Klasik) ortak bir dağılım, yani klasik dağılım elde edilmelidir. Matematiksel olarak bu, bütün k değerleri için $\bar{n}_k \ll 1$ durumunda oluşmalıdır. Bu bakımdan klasik istatistiğe (Maxwell-Boltzmann) dönmek olasıdır.

Denk.(3.44) de verilen genelleştirilmiş Bose-Einstein dağılımında

$$[1 + \beta(q-1)(\epsilon_k - \mu)]^{\frac{1}{q-1}} \gg 1$$

olması gerektiği sonucunu doğuran $\bar{n}_k \ll 1$ alalım. Bu, yeniden ifade edilerek

$$\begin{aligned} \bar{n}_k &\approx [1 + \beta(q-1)(\epsilon_k - \mu)]^{\frac{1}{1-q}} \\ &\approx [1 + \beta(q-1)\mu]^{\frac{1}{1-q}} [1 + \beta(q-1)\epsilon_k]^{\frac{1}{1-q}} \end{aligned} \quad (3.47)$$

sonucu bulunur. Denk.(3.47), Denk.(3.12) deki $\bar{N}$ de yerine konularak

$$\bar{N} = \sum_k n_k = [1 + \beta(q-1)\mu]^{\frac{1}{1-q}} \sum_k [1 + \beta(q-1)\epsilon_k]^{\frac{1}{1-q}} \quad (3.48)$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\left[1 + \beta(q-1)\mu\right]^{\frac{1}{1-q}} = \frac{\bar{N}}{\sum_k \left[1 + \beta(q-1)\varepsilon_k\right]^{\frac{1}{1-q}}} \quad (3.49)$$

elde edilir. Denk.(3.49), Denk.(3.47) de yerine konulursa genelleştirilmiş klasik dağılım ifadesi olan

$$\bar{n}_k = \bar{N} \frac{\left[1 + \beta(q-1)\varepsilon_k\right]^{\frac{1}{1-q}}}{\sum_{k=0}^{\infty} \left[1 + \beta(q-1)\varepsilon_k\right]^{\frac{1}{1-q}}} \quad (3.50)$$

ifadesi elde edilir.

3.1.5 Mükemmel Fermi Gazı

Sistemi oluşturan parçacıklar ayırd edilemez olduğu için herhangi bir halde 1 den fazla parçacık bulunamaz ve iki parçacık değiş-tokuşuna göre dalga fonksiyonu antisimetriktir. Fermi gazı, yarım tamsayı spinlere sahip parçacıklardan meydana gelir ve Fermi-Dirac istatistiğine uyarlar (bu istatistikte $n_k = 0,1$ dir). Şimdi Denk.(3.14) ile verilen büyük bölüşüm fonksiyonunu yeniden yazalım. Tüm gazın hali, tek-parçacık hallerinin tam kümesinin işgal sayıları verildiğinde tek olarak belirlenir. İşgal sayılarının bütün mümkün değerleri hesaba katılarak bölüşüm fonksiyonu

$$Z_q^F = \sum_{n_1, n_2, \dots} \left[1 + \beta(q-1)(\varepsilon_1 - \mu)n_1 + \beta(q-1)(\varepsilon_2 - \mu)n_2 + \dots + \beta(q-1)(\varepsilon_k - \mu)n_k + \dots\right]^{\frac{1}{1-q}} \quad (3.51)$$

olarak elde edilir. Sistemdeki parçacık sayısı sabit olmadığı için işgal sayıları birbirinden bağımsızdır. Dolayısıyla,

$$Z_q^F = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k=0}^1 [1 + \beta(q-1)(\epsilon_k - \mu)n_k]^{\frac{1}{1-q}}$$

elde edilir. Toplama işlemi yapıldıktan sonra

$$Z_q^F = \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ 1 + [1 + \beta(q-1)(\epsilon_k - \mu)n_k]^{\frac{1}{1-q}} \right\}$$

bulunur. Denk.(3.18) deki x_k tanımı göz önünde bulundurularak $q \neq 1$ için Fermi gazının bölüşüm fonksiyonu

$$Z_q^F = \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ 1 + [1 + (q-1)x_k]^{\frac{1}{1-q}} \right\} \quad (3.52)$$

şeklinde yazılır. $q \rightarrow 1$ limitinde bölüşüm fonksiyonu

$$Z_1^F = \prod_{k=1}^{\infty} [1 + \exp(-x_k)] \quad (3.53)$$

olur. Büyük kanonik topluluğun, işgal sayıları $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ olan bir halde olma olasılığı

$$P_{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots}^F = \frac{[1 + \beta(q-1)[(\epsilon_1 - \mu)n_1 + (\epsilon_2 - \mu)n_2 + \dots + (\epsilon_k - \mu)n_k + \dots]]^{\frac{1}{1-q}}}{Z_q^F} \quad (3.54)$$

dır. Öte yandan, $P_{n_k}^F$ olasılığı, yani k kuantum halinin n_k parçacık (fermion) tarafından işgal edilme olasılığı

$$P_{n_k} = \sum_{\substack{n_k \text{ üzerinden} \\ \text{toplam hariç}}} P_{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots} \quad (3.55)$$

ifadesinden elde edilir. Z_q^F bölüşüm fonksiyonunun hesaplanmasında kullanılan yol izlenerek ve Denk.(3.18) de verilen x_k tanımı hesaba katılarak Denk.(3.55) deki toplam yapılırsa

$$P_{n_k}^F = \frac{[1 + (q-1)x_k n_k]^{\frac{1}{1-q}}}{Z_q^F} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \left\{ 1 + [1 + (q-1)x_j]^{\frac{1}{1-q}} \right\} \quad (3.56)$$

sonucu bulunur. Z_q^F nin Denk.(3.52) de verilen değeri Denk.(3.56) da yerine konulduğunda

$$P_{n_k}^F = \frac{[1 + (q-1)x_k n_k]^{\frac{1}{1-q}}}{1 + [1 + (q-1)x_k]^{\frac{1}{1-q}}} \quad (3.57)$$

sonucu bulunur. $q \rightarrow 1$ limitinde

$$P_{n_k}^F = \frac{\exp(-x_k n_k)}{1 + \exp(-x_k)} \quad (3.58)$$

ifadesi elde edilir. Pauli dışarlama ilkesinin sonucu olarak $n_k = 0, 1$ olduğu için

$$\bar{n}_k = \sum_{n_k=0}^1 n_k P_{n_k}^F = P_1^F$$

dır. P_1^F , Denk.(3.57) den çözülerek

$$\bar{n}_k = P_1^F = 1 / \left\{ 1 + [1 + \beta(q-1)(\varepsilon_k - \mu)]^{\frac{1}{q-1}} \right\} \quad (3.59)$$

yazılır. Bu ifadeye genelleştirilmiş Fermi-Dirac dağılımı denir.

Eğer P_1^F , $q \rightarrow 1$ limitinde verilen Denk.(3.58) den belirlenirse sonuç

$$\bar{n}_k = P_1^F = \frac{1}{\exp(x_k) + 1} \quad (3.60)$$

bulunur. Bu standart sonuç, $q \rightarrow 1$ limitinde Denk.(3.57) den de elde edilir.

Bu kısımda, klasik ve kuantum gazlarını oluşturan parçacıkların istatistiksel özellikleri ile ilgili bir takım bağ koşulları konularak genelleştirilmiş dağılım fonksiyonları bulunmuştur. Bununla birlikte, bu hesaplamalarda kullanılan bölüşüm fonksiyonunun çarpanlara ayrılması, yaklaşımın temel problemidir (Pennini et al., 1995). Bu yaklaşımın, q 'nın değerlerine bağlı olarak tam sonuçlara bir sınırlama getirdiği iddia edilmektedir. Bunu ıspatlamak için A veya B enerji düzeylerine sahip bağlı veya serbest durumlarda olabilen çok basit bir fiziksel sistem ele alalım. Bu sistem için

$$[1 + (1-q)(A+B)]^{\frac{1}{1-q}} \neq [1 + (1-q)A]^{\frac{1}{1-q}} [1 + (1-q)B]^{\frac{1}{1-q}} \quad (3.61a)$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. Bu ifade

$$\exp\left\{\frac{1}{1-q}\ln[1+(1-q)(A+B)]\right\} \neq \exp\left\{\frac{1}{1-q}\ln[1+(1-q)A] + \frac{1}{1-q}\ln[1+(1-q)B]\right\} \quad (3.61b)$$

biçiminde üstel olarak yazılabilir. Cebirsel işlemler sonucu doğrudan

$$\exp\left\{\frac{1}{1-q}\ln[1+(1-q)A+(1-q)B]\right\} \neq \exp\left\{\frac{1}{1-q}\ln[1+(1-q)A+(1-q)B+(1-q)^2AB]\right\} \quad (3.61c)$$

elde edilir. Eğer bu eşitsizliğin sol ve sağ tarafları sırasıyla “tam” ve “yaklaşık” terimler olarak adlandırılırsa $q > 1$ için $\text{tam} > \text{yaklaşım}$, $q < 1$ için $\text{tam} < \text{yaklaşım}$ olduğu görülür. Bu durumun sadece $(A \cdot B)$ nin pozitif olması durumunda geçerli olduğuna dikkat edilmelidir. Dolayısıyla, burada kullanılan yaklaşım yönteminin, q değerlerine bağlı olarak tam sonuçlara bir alt veya bir üst sınır getirdiği açıktır.

3.2 Klasik ve Kuantum Gazlarının Genelleştirilmiş Riemann Zeta Fonksiyonları Kullanılarak Tsallis Formalizminde İncelenmesi

Burada genelleştirilmiş dağılım fonksiyonlarının daha matematiksel bir şekilde nasıl ifade edilebileceği ele alınmıştır. Hurwitz (veya genelleştirilmiş Riemann) zeta fonksiyonlarının (Elizalde, 1989) genelleştirilmiş istatistiksel termodinamiğin klasik ve kuantum gazlarının incelenmesi kapsamında kullanılması genel anlamda analitik ve sayısal hesap yapma olanağını sağlar (Oprisan, 1996). Gaz sistemleri için ayrı bir yol olmak üzere N tane parçacıktan meydana gelen, parçacıklar arası etkileşmelerin ihmal edilecek kadar az olduğu bir grand kanonik topluluk için bölüşüm fonksiyonu (3.14) denkleminde

$$Z_q = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_N} [1 + \beta(q-1)((\varepsilon_1 - \mu) + \dots + (\varepsilon_k - \mu))]^{\frac{1}{1-q}} \quad (3.62)$$

yazılabilir. Burada toplam, topluluğun girebileceği olası $k_1, k_2, \dots, k_N$ tek-parçacık halleri üzerinden alınır. Parçacıklar birbirinden ayırt edilemediğine göre, $k_1, k_2, \dots, k_N$ indisleri arasında bir fark yoktur. Bu nedenle (3.62) bölüşüm fonksiyonu

$$Z_q = z^N \quad (3.63)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} [1 + \beta(q-1)(\varepsilon_k - \mu)]^{\frac{1}{1-q}} \quad (3.64)$$

genelleştirilmiş tek-parçacık bölüşüm fonksiyonudur. (3.13) ifadesinden ise parçacığın bir k tek-parçacık halini işgal etme olasılığı

$$P_k = \frac{1}{z} [1 + \beta(q-1)(\varepsilon_k - \mu)]^{\frac{1}{1-q}} \quad (3.65)$$

olur.

3.2.1 Çarpanlara Ayırma Bakış Açısına Göre Klasik Gazların Davranışı

Genel yaklaşıma girmeden önce, sadece

$$\varepsilon_k = ak + b \quad (3.66)$$

şeklindeki lineer enerji seviyesi dağılımına sahip sistemleri göz önüne alalım. Burada a ve b , sabitlerdir. Geniş bir uygulama alanı olması nedeniyle harmonik osilatör ele alınmaktadır.

Çarpanlara ayırma yaklaşıklığına göre, (3.64) denklemi

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} [1 + \beta(q-1)\epsilon_k]^{-\frac{1}{1-q}} [1 + \beta(q-1)\mu]^{-\frac{1}{1-q}} \quad (3.67)$$

olarak yazılabilir ve dolayısıyla olasılık dağılımı

$$P_k = \frac{[1 + \beta(q-1)\epsilon_k]^{-\frac{1}{1-q}}}{\sum_{k=0}^{\infty} [1 + \beta(q-1)\epsilon_k]^{-\frac{1}{1-q}}} \quad (3.68)$$

haline gelir. (3.66) ifadesi, (3.67) ifadesinde yerine konularak

$$\begin{aligned} z &= \sum_{k=0}^{\infty} [1 + \beta(q-1)(ak + b)]^{-\frac{1}{1-q}} \\ &= [\beta(q-1)a]^{-\frac{1}{1-q}} \sum_{k=0}^{\infty} (k + \alpha)^{-\frac{1}{1-q}} \end{aligned} \quad (3.69)$$

elde edilir. Burada

$$\alpha = \frac{1 + \beta(q-1)b}{\beta(q-1)b} = \frac{b}{a} + \frac{1}{\beta(q-1)a} \quad (3.70)$$

dır. $\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-s}$ Hurwitz zeta fonksiyonu ile (3.69) ifadesi karşılaştırıldığında $s = \frac{1}{q-1}$ olduğuna dikkat edilmelidir. Dolayısıyla, (3.69) ifadesi ile verilen tek-parçacık dağılım fonksiyonu

$$z = \left(\frac{\beta a}{s} \right)^{-s} \zeta(s, \alpha) \quad (3.71)$$

biçiminde yazılabilir. (3.66) ve (3.71) ifadeleri kullanılarak, (3.68) denklemi

$$P_k = \frac{(k+s)^{-s}}{\zeta(s, \alpha)} \quad (3.72)$$

biçiminde daha yararlı bir forma sokulabilir. k tek-parçacık düzeyinin işgal sayısı

$$\bar{n}_k = \bar{N} P_k \quad (3.73)$$

dır. Burada $\bar{N}$, ortalama parçacık sayısıdır. sabit α değeri için işgal sayısı, k nın monoton olarak azalan bir fonksiyonu olup

$$\left(\frac{\partial \bar{n}_k}{\partial k} \right)_{\alpha} = -\bar{n}_k \frac{(k+\alpha)^{-s-1}}{\zeta(s, \alpha)} < 0 \quad (3.74)$$

dır. İşgal sayısının sıcaklığa göre değişimi daha ilginç bir davranış biçimi ortaya koymaktadır:

$$\left(\frac{\partial \bar{n}_k}{\partial T} \right)_s = \bar{N} \left(\frac{\partial P_k}{\partial T} \right)_s = \bar{n}_k \frac{s}{a} \left(\frac{\zeta(s+1, \alpha)}{\zeta(s, \alpha)} - \frac{1}{k+\alpha} \right) \quad (3.75)$$

k^* , k nin $\left(\frac{\partial \bar{n}_k}{\partial T}\right)_s = 0$ olduğu durumdaki değeri olsun. Bu değer,

$$k^*(\alpha, s) = \frac{\zeta(s, \alpha)}{\zeta(s+1, \alpha)} - \alpha = \frac{\sum_{p=0}^{\infty} p(p+\alpha)^{-s-1}}{\sum_{p=0}^{\infty} (p+\alpha)^{-s-1}} \quad (3.76)$$

denklemden bulunabilir. Dolayısıyla, belirli bir k değeri için, T sıcaklığı azaldığında $k < k^*$ olan enerji (energetic) düzeyin işgal sayısının arttığını (veya tersi) gösteren

$$\left(\frac{\partial \bar{n}_k}{\partial T}\right)_s = \bar{n}_k \frac{s}{a} \frac{k - k^*}{(k^* - \alpha)(k + \alpha)} \quad (3.77)$$

ifadesi yazılır. “Yoğunlaşma (condensation)” için enerjik değerler spektrumunun varlığı, Pauli dışarlama ilkesinin etkin olduğu Fermi-Dirac sistemlerinin özelliklerini hatırlatır. Dolayısıyla, genelleştirilmiş Maxwell-Boltzmann istatistiğinde sistemin, Fermi gazlarına benzer özelliklere sahip olduğu söylenebilir. Aynı zamanda, enerjinin ortalama değerinin

$$\bar{E} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k P_k^q = \frac{1}{\zeta^q(s, \alpha)} \left[a \zeta(s, \alpha) - \frac{s}{\beta} \zeta(s+1, \alpha) \right] \quad (3.78)$$

olduğu bulunur. Ayrıca Tsallis entropi tanımı zeta fonksiyonları aracılığıyla

$$S_q^T = s \left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} P_k^q \right) = s \left(1 - \frac{\zeta(s+1, \alpha)}{\zeta^q(s, \alpha)} \right) \quad (3.79)$$

biçiminde yazılabilir. Boltzmann H-teoreminin, özellikle Tsallis istatistiği için, geçerli olduğu kabul edilir (Ramshaw, 1995). Ancak bu varsayım, q fraktal indisinin anlamı problemini çözmez. Bu nedenle, aynı zamanda, Nernst teoreminin (termodinamiğin üçüncü kanununun) de geçerli olduğu varsayılmalıdır. Dolayısıyla,

$$\lim_{T \rightarrow 0} S_q^T = 0 \quad (3.80)$$

olduğunu göz önüne alalım. (3.79) ifadesinden, Tsallis termostatistiğinin fraktal indisini uygun bir şekilde belirleyen aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\zeta^{s+1}(s, \alpha_0) = \zeta^s(s+1, \alpha_0) \quad (3.81)$$

Burada $\alpha_0 = \lim_{T \rightarrow 0} \alpha$ dır. (3.81) ifadesi kullanılarak, sistemin ortalama taban durumu enerjisi

$$\lim_{T \rightarrow 0} \bar{E} = \bar{E}_0 = a \frac{\zeta(s, \alpha_0)}{\zeta^q(s, \alpha_0)} = ak_0^* + b = \varepsilon_{k_0^*} \quad (3.82)$$

biçiminde yazılır. Burada $k_0^* = \lim_{T \rightarrow 0} k^*$ dır. k^* ın anlamı göz önünde bulundurularak, $\varepsilon_{k_0^*}$ ın 0 K derecedeki Fermi düzeyinin enerjisi olduğu söylenebilir. Dolayısıyla, klasik ve genelleştirilmiş Maxwell-Boltzmann istatistiği arasında yeni bir fark ortaya çıkar.

3.2.2 Çarpanlara Ayrılamayan Durum

Burada (3.64) ifadesi ile verilen bölüşüm fonksiyonunun μ ye göre çarpanlara ayrılabilceğini kabul etmek için hiç bir neden olmadığını varsayalım. Dolayısıyla, (3.67) bağıntısı artık geçerli olmayacaktır. Bu şartlar altında, (3.64) ve (3.65) tanımları kullanılacaktır. Büyük kanonik topluluğun çarpanlara ayrılmış bölüşüm fonksiyonu

$$\begin{aligned} z &= \sum_{k=0}^{\infty} [1 + \beta(q-1)(ak + b - \mu)]^{\frac{1}{1-q}} \\ &= [\beta(q-1)a]^{\frac{1}{1-q}} \sum_{k=0}^{\infty} (k + \alpha^*)^{\frac{1}{1-q}} \end{aligned} \quad (3.83)$$

formunda yazılabilir. Burada

$$\alpha^* = \frac{1 + \beta(q-1)(b - \mu)}{\beta(q-1)a} = \frac{(b - \mu)}{a} - \frac{1}{\beta(q-1)a} \quad (3.84)$$

dır. (3.83) bağıntısı,

$$z = \left(\frac{\beta a}{s} \right)^{-s} \zeta(s, \alpha^*) \quad (3.85)$$

biçiminde biraz daha sade bir biçimde yazılabilir. (3.66) ve (3.85) ifadeleri (3.68) bağıntısında yerine konularak, olasılık dağılımı için

$$P_k = \frac{(k + \alpha^*)^{-s}}{\zeta(s, \alpha^*)} \quad (3.86)$$

sonucu elde edilir. Büyük kanonik toplulukta ortalama parçacık sayısının

$$\bar{N} = \sum_k n_k \quad (3.87)$$

tanımı ve $\bar{N}$ nin sabit olduğu gerçeği kullanılarak

$$\left(\frac{\partial \bar{n}_k}{\partial T} \right)_s = \bar{n}_k \frac{s}{a} \left(\frac{\zeta(s+1, \alpha^*)}{\zeta(s, \alpha^*)} - \frac{1}{k + \alpha^*} \right) \quad (3.88)$$

ifadesi elde edilir. $k_{(\mu)}^*$, k nın $\left(\frac{\partial \bar{n}_k}{\partial T} \right)_s = 0$ olduğu haldeki değeri olsun. Bu değer

$$k_{(\mu)}^* = \frac{\zeta(s, \alpha^*)}{\zeta(s+1, \alpha^*)} - \alpha^* = \frac{\sum_{p=0}^{\infty} p(p + \alpha^*)^{-s-1}}{\sum_{p=0}^{\infty} (p + \alpha^*)^{-s-1}} \quad (3.89)$$

denklemden bulunabilir. Dolayısıyla, belirli bir k değeri için

$$\left(\frac{\partial \bar{n}_k}{\partial T} \right)_s = \bar{n}_k \frac{s}{a} \frac{k - k_{(\mu)}^*}{(k_{(\mu)}^* - \alpha)(k + \alpha)} \quad (3.90)$$

yazılabilir. $k_{(\mu)}^*$ değeri, μ kimyasal potansiyeline bağlıdır.

Sonuç olarak, sistemin davranışının değişmediği ancak “Fermi seviyesinin”, artık, gazın kimyasal potansiyeline bağlı olduğu söylenebilir.

3.2.3 Genel Çözüm

Bölüşüm fonksiyonunun genel formu, (3.66) ifadesi dikkate alınarak,

$$\begin{aligned} Z_q &= \sum_{k_1, k_2, \dots} \left[1 + \beta(q-1)(\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2} + \dots + \varepsilon_{k_N}) \right]^{\frac{1}{1-q}} \\ &= \left[a\beta(q-1) \right]^{\frac{1}{1-q}} \sum_{k_1, k_2, \dots} (k_1 + k_2 + \dots + k_N + \gamma)^{\frac{1}{1-q}} \end{aligned} \quad (3.91)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada

$$\gamma = \frac{1 + \beta(q-1)Nb}{a\beta(q-1)} \quad (3.92)$$

dır. Bu şartlar altında, k tek-parçacık enerjik düzeyinin gerçekleşme olasılığı

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{\sum_{k_1, \dots, k_N \neq k} (k_1 + k_2 + \dots + k_N + \gamma)^{\frac{1}{1-q}}}{\sum_{k_1, \dots, k_N=0}^{\infty} (k_1 + k_2 + \dots + k_N + \gamma)^{\frac{1}{1-q}}} \\ &= \frac{\sum_{p=0}^{\infty} C_{N+p-3}^p \zeta(s, p+k+\gamma)}{\sum_{p=0}^{\infty} C_{N+p-2}^p \zeta(s, p+k)} \end{aligned} \quad (3.93)$$

dır. Burada, kısaca işgal sayısının en önemli özelliklerinden bazılarını belirtelim.

Beklenildiği gibi enerjik seviye mertebesi arttığında, işgal sayısı

$$\left(\frac{\partial \bar{n}_k}{\partial k} \right)_T = -s\bar{N} \frac{\sum_{p=0}^{\infty} C_{N+p-3}^p \zeta(s+1, p+k+\gamma)}{\sum_{p=0}^{\infty} C_{N+p-2}^p \zeta(s, p+k)} \quad (3.94)$$

formülüne göre azalır. Sıcaklığa göre davranışla ilgili bilgi elde etmek temel problemidir. Bu nedenle, olasılık dağılımını daha yararlı olan

$$P_k = (N-2) \frac{\sum_{p=0}^{\infty} (p+1)(p+2)\cdots(p+N-3)\zeta(s, p+k+\gamma)}{\sum_{p=0}^{\infty} (p+1)(p+2)\cdots(p+N-2)\zeta(s, p+k)} \quad (3.95)$$

biçiminde yazalım. $\bar{N} = \sum_k P_k \bar{n}_k$ olduğu akılda tutularak sıcaklığa göre türev alınırsa

$$\left(\frac{\partial \bar{n}_k}{\partial T} \right)_k = \frac{s}{a} \left(\frac{\partial \bar{n}_k}{\partial \gamma} \right)_k = \bar{N} \frac{(N-2)s^2 F}{a \left[\sum_{p=0}^{\infty} C_{N+p-2}^p \zeta(s, p+\gamma) \right]^2} \quad (3.96)$$

ifadesi bulunur. Burada, aşağıdaki notasyonlar kullanılmıştır:

$$F = \sum_{i,j=1}^{\infty} \delta_i \delta_j (j+N-2) \zeta(s, i+k+\gamma) \zeta(s, j+\gamma) \times \left[\frac{\zeta(s+1, j+\gamma)}{\zeta(s, j+\gamma)} - \frac{\zeta(s+1, i+k+\gamma)}{\zeta(s, i+k+\gamma)} \right] \quad (3.97)$$

$$\delta_i = (i+1)(i+2)\cdots(i+N-3)$$

Ayrıca,

$$\frac{\zeta(s+1, j+\gamma)}{\zeta(s, j+\gamma)} = \frac{1}{\gamma + j^*} \quad (3.98)$$

eşitliğini sağlayan bir j^* değeri mevcuttur ve bu değer kullanılırsa işgal sayısı

$$\left(\frac{\partial \bar{n}_k}{\partial T}\right)_k = \bar{N} \frac{(N-2)s^2 \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{\delta_i \delta_j (j+N-2) \zeta(s, i+k+\gamma) \zeta(s, j+\gamma) (k+i^*-j^*)}{(\gamma+i^*)(\gamma+j^*)}}{a \left[\sum_{p=0}^{\infty} C_{N+p-2}^p \zeta(s, p+\gamma) \right]^2} \quad (3.99)$$

olur. Genel olmasına rağmen bu bağıntı fazla yararlı değildir. Bu nedenle, $k=0$ enerjik seviyesini göz önüne alalım. Bu durumda $\bar{n}_0$ işgal sayısının davranışı

$$\left(\frac{\partial \bar{n}_0}{\partial T}\right)_k = \bar{N} \frac{(N-2)s^2 \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{\delta_i \delta_j (j+N-2) \zeta(s, i+\gamma) \zeta(s, j+\gamma) (i^*-j^*)}{(\gamma+i^*)(\gamma+j^*)}}{a \left[\sum_{p=0}^{\infty} C_{N+p-2}^p \zeta(s, p+\gamma) \right]^2} \quad (3.100)$$

formundadır.

$$\Pi_{ij} = \frac{\delta_i \delta_j (j+N-2) \zeta(s, i+\gamma) \zeta(s, j+\gamma)}{(\gamma+i^*)(\gamma+j^*)} \quad (3.101)$$

tanımını yapalım. Bu aşamada

$$\Pi_{ij} - \Pi_{ji} = \frac{\delta_i \delta_j \zeta(s, i+\gamma) \zeta(s, j+\gamma)}{(\gamma+i^*)(\gamma+j^*)} (j-i) = S_{ij} (j-i) \quad (3.102)$$

ifadesini hesaplamak uygundur. Burada S_{ij} , Π_{ij} nin simetrik kısmıdır. j^* ve i^* değerleri sırasıyla j ve i ye göre monoton fonksiyonlardır. Yukarda verilen ifadeler aracılığı ile

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{\delta_i \delta_j (j+N-2) \zeta(s, i+\gamma) \zeta(s, j+\gamma) (i^*-j^*)}{(\gamma+i^*)(\gamma+j^*)} \\ &= \sum_{i>j} S_{ij} (i^*-j^*) (j-i) < 0 \end{aligned} \quad (3.103)$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla, $\left(\frac{\partial \bar{n}_0}{\partial T}\right) < 0$ olduğu bulunur. Bu sonuç, $k = 0$ enerjik seviyesinin işgal sayısının sıcaklık azaldığında arttığını gösterir. Bu durum, kuantum istatistiğindeki yoğunlaşma olayını anımsatır.

3.3 Genelleştirilmiş Bose-Einstein Yoğunlaşması

Fraktal olmayan (Euclidean benzeri) bir uzay göz önüne alındığında, ideal Bose-Einstein gazı, bir faz geçişine sahip, tam olarak çözülebilir, sürekli bir sistemdir. Bu faz geçişi, Bose-Einstein yoğunlaşması (parçacıkların çoğu sıfır momentum haline geçer) olarak bilinir. Sistemin fraktal bir uzayda geliştiği ve etkileşimlerin söz konusu olmadığı bir durum göz önüne alınacaktır (Curilef, 1996).

Büyük bir V hacmi ve büyük N_1 parçacık sayısı için, T sıcaklığı ve μ kimyasal potansiyelinde Bose-Einstein istatistiğine uyan parçacıklardan oluşmuş ideal Bose-Einstein gazının ortalama parçacık sayısı

$$N_1 = n_1^{(0)} + V \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{D/2} g_{D/2}(e^{\mu/k_B T}) \quad (3.104)$$

dır. Burada D , sistemin içinde bulunduğu uzayın boyutudur ve sıfır olmayan kritik sıcaklık için $D > 2$ olduğu varsayılmıştır; $g_{D/2}$ fonksiyonu $g_{D/2}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} y^n n^{-D/2}$ olarak tanımlanır. $n_1^{(0)} = 1/[\exp(-\mu/k_B T) - 1]$ niceliğine sıfır momentum hali denir ve makroskopik olarak işgal edilebilir. Faz geçişi $\mu \rightarrow 0$ olurken gerçekleşir. Sıfır momentum halinin işgal edilmesi, Bose-Einstein yoğunlaşmasıdır. Bu durum $T \leq T_c$ sıcaklığında meydana gelir ve T_c kritik sıcaklığı

$$T_{c_1} = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \left(\frac{N_1}{\zeta(D/2)V} \right)^{2/D} \quad (3.105)$$

ile verilir. Burada $\zeta(x)$, Riemann zeta fonksiyonudur. $T \geq T_{c_1}$ için $n_1^{(0)} = 0$, $T \leq T_{c_1}$ için $\mu = 0$ ve $T = T_{c_1} + \varepsilon$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) için $n_1^{(0)} = \varepsilon$ dir.

Sıfır momentum halindeki parçacık oranı

$$\frac{n_1^{(0)}}{N_1} = 1 - \left(\frac{T}{T_{c_1}} \right), \quad T \leq T_{c_1} \quad (3.106)$$

biçiminde yazılabilir. (3.104)-(3.106) denklemleri, Boltzmann-Gibbs termostatistiği çerçevesinde elde edilen en ilginç sonuçlardır. Ancak fiziksel sistem için

- (i) uzun menzilli kuvvetler ve /veya
- (ii) uzun bellek etkisi ve /veya
- (iii) (multi)fraktal uzay-zaman

söz konusu olduğunda Boltzmann-Gibbs termostatistiği yeterli olmaz. Bu hallerin herhangi birinin söz konusu olması halinde, sistemin ekstensif özelliklerinin ihlal edilmesi beklenir. Daha doğrusu, karşılaşılan güçlükler ve sonuçları şöyle özetlenebilir:

(a) Euclidean benzeri uzay-zaman için kuvvetler ya da bellek (veya her ikisi de) uzun menzilli ise ve denge hali ile ilgileniliyorsa, Boltzmann-Gibbs termostatistiği çok az ihlale uğrar ve formalizm yaklaşık bir öngörü elde etmek

için kullanılabilir. Bununla birlikte, yarı-denge hali ile ilgileniliyor ise, Boltzmann-Gibbs termostatistiği çerçevesinde elde edilen sonuçlar önemli ölçüde beklenen sonuçlardan sapar.

(b) (Multi)fraktal uzay için, Boltzmann-Gibbs termostatistiği yine önemli ölçüde ihlale uğrar ve başka bir formalizme gerek duyulur. Bir fraktal uzay, kendi kendine benzerlik (self-similarity), kuvvet yasaları (power laws), analitik olmama (non-analyticity), korelasyon fonksiyonları (correlation functions), v.s. gibi fraktal yapıların özellikleri ile bilinir.

Tsallis entropisine dayanan genelleştirilmiş termostatistik çerçevesinde ideal Bose-Einstein gazını (Hamiltonien'de etkileşim terimi mevcut değildir), fraktal bir uzayda (Euclidean olmayan) inceleyelim. Uzayın fraktal yapılı olması sonucu, standart olmayan başka bir istatistiğin (bu durumda Tsallis formalizmi) kullanılması zorunludur. Burada sistemin kuantum mekaniği ile ilgili (yani, Hamiltonien) hiç bir değişiklik göz önüne alınmamış ve fraktal boyutla ilgili bilgi, q parametresinde muhafaza edilmiştir.

$$K_q(m, x, \mu) = \frac{(1-q)^{(m-x)} \Gamma(1/(1-q))}{\Gamma(1/(1-q) + x - m)} < (kT - (1-q)(\mathcal{H} - \mu N)^{(x-m)}) >_q$$

ifadesi tanımlanarak Denk.(3.104) de verilen ortalama parçacık sayısının genelleştirilmiş şekli

$$N_q = n_q^{(0)} + V \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{D/2} G_q(D/2, \mu) \quad (3.107)$$

ifadesi ile verilir. Burada $<O>_q$, O operatörünün q -beklenen değerleridir. $n_q^{(0)}$, sıfır momentum halinin genelleştirilmiş işgal sayısı olup

$$n_q^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n\mu)^m}{m!} K_q(m, 0, \mu) \quad (3.108)$$

ifadesi ile verilir. $G_q(D/2, \mu)$ niceliği

$$G_q(D/2, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{kT}{n} \right)^{D/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n\mu)^m}{m!} K_q(m, D/2, \mu) \quad (3.109)$$

biçiminde tanımlanır. (3.107) ve (3.109) denklemlerine göre, kritik sıcaklık, (3.105) ifadesinin genelleştirilmiş şekli olan

$$\langle (kT_{c_q} - (1-q)\mathcal{H})^{D/2} \rangle_q = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m} \right)^{D/2} \frac{N_q}{\zeta(D/2)V} \quad (3.110)$$

ifadesinin sağlanması şart koşularak elde edilebilir. Denk.(3.106) ile verilen sıfır momentum halindeki parçacık oranının genelleştirilmiş biçimi ise

$$\frac{n_q^{(0)}}{N_q} = 1 - \frac{\langle (kT - (1-q)\mathcal{H})^{D/2} \rangle_q}{\langle (kT_{c_q} - (1-q)\mathcal{H})^{D/2} \rangle_q} \quad (3.111)$$

olarak elde edilir.

q 'nın genel değerleri ile ilgili matematiksel güçlükler nedeniyle bundan sonra $q \approx 1$ (veya $q - 1 \approx 0$) hali göz önüne alınacaktır. (Tsallis et al., 1995) de verilen Denk.(7) kullanılarak, (3.110) eşitliği asimtotik olarak

$$kT_{c_q} \Xi_1(T_{c_q})^{2(1-q)/D} \left(1 + (1-q) \left(\frac{D}{2} - 1 \right) \frac{U_1(T_{c_q})}{kT_{c_q}} \right)^{2/D} = k_B T_{c_1} \quad (3.112)$$

biçiminde yazılabilir. $T \leq T_{c_1}$ olduğunda, Bose-Einstein sisteminin U_1 iç enerjisi sıcaklığın fonksiyonu olarak

$$U_1(T) = \frac{D}{2} V \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{D/2} (kT)^{\frac{D}{2}+1} \zeta(D/2+1) \quad (3.113)$$

biçimindedir ve aynı durum için termodinamik potansiyel

$$\Omega_1 = -V \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{D/2} (kT)^{\frac{D}{2}+1} \zeta(D/2+1) \quad (3.114)$$

ifadesi ile verilir. $q \neq 1$, $\Xi_1 = \exp(-\beta\Omega_1)$ olduğundan büyük kanonik topluluğun bölüşüm fonksiyonu

$$\Xi_1 = \exp \left(V \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{D/2} \zeta\left(\frac{D}{2}+1\right) \right) \quad (3.115)$$

olarak yazılır. Denk.(3.112) dan T_{c_1} için bir denklem elde edilir ve bu denklem T_{c_q} için çözülürse

$$T_{c_q} = \left[1 - (1-q) \left(\frac{D}{2} + \frac{2}{D} - 1 \right) \frac{\zeta(D/2+1)}{\zeta(D/2)} N_1 \right] T_{c_1} \quad (3.116)$$

ifadesi elde edilir. $(1-q)$ ya göre birinci mertebe düzeltme ile $k = k_B$ yazılır. Bu yaklaşım, eğer $q < 1$ ise kritik sıcaklığın azaldığını gösterir. Denk.(3.105) e göre, $q \rightarrow 1^-$ limitinde yoğunluk üzerinde açık bir düzeltme vardır (yani, eğer ortalama N_1 parçacık sayısı sabit ise $q < 1$ iken hacim artar). Ayrıca

$$\frac{1}{N_1} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{T_{e_q}}{T_{e_1}} \right) = \left(\frac{(D-2)^2}{2D} + 1 \right) \frac{\zeta(D/2+1)}{\zeta(D/2)} \quad (3.117)$$

olduğu bulunmuştur. Dolayısıyla, T_{e_q} nun q ya göre birinci türevi, $D > 2$ nin tüm değerleri için pozitiftir.

Sonuç olarak mevcut yaklaşımda, Bose-Einstein yoğunlaşmasının faz geçişi için kritik sıcaklığın, nonekstensif termostatistik gözönüne alındığında düzeltilmesi gerektiği görülür. Ayrıca, başka problemlerdeki kritik sıcaklık $q \neq 1$ için değişime uğrar.

Evrenin olası fraktal yapısı nedeniyle, genelde, bu formalizm kozmoloji ve gravitasyonda karşılaşılan problemlere uygulanabilir. Gravitasyon teorisindeki bazı problemler, $q \neq 1$ değerleri kullanılmadığında termodinamik olarak tanımlanamazlar. Yıldız sistemleri (galaksiler veya galaksi kümeleri gibi) ve solar nötrino problemleri buna örnek verilebilir.

3.4 Planck Işıma Yasasının Genelleştirilmesi

Tsallis ve arkadaşları (Tsallis et al., 1995) tarafından yapılan bir çalışmada, mevcut kozmik fon ışımasının, uzun-menzilli gravitasyonel etki nedeniyle Planck ışıma yasasından (biraz) farklı olup olmadığını görmek için genelleştirilmiş Planck ışıma yasası elde edilmiştir. Bu çalışmada Tsallis ve ark., $Z_q \approx Z_1 \left\{ 1 - \frac{1}{2} (1-q) \beta^2 < \hat{\mathcal{H}}^2 >_1 \right\}$ ifadesi ile verilen bölüşüm fonksiyonundan yararlanarak (burada Z_1 ve $< \hat{\mathcal{H}}^2 >_1$, Boltzmann-Gibbs istatistiğinde karşılık gelen niceliklerdir) $\beta(1-q) \rightarrow 0$ limitinde, $q \approx 1$ (Tsallis et al., 1995) için

$$\frac{D_q(\nu)h^2c^3}{8\pi(kT)^3} \approx \frac{x^3}{e^x - 1} (1 - e^{-x})^{q-1} \left\{ 1 + (1-q)x \left[\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{x}{2} \frac{1+3e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} \right] \right\} \quad (3.118)$$

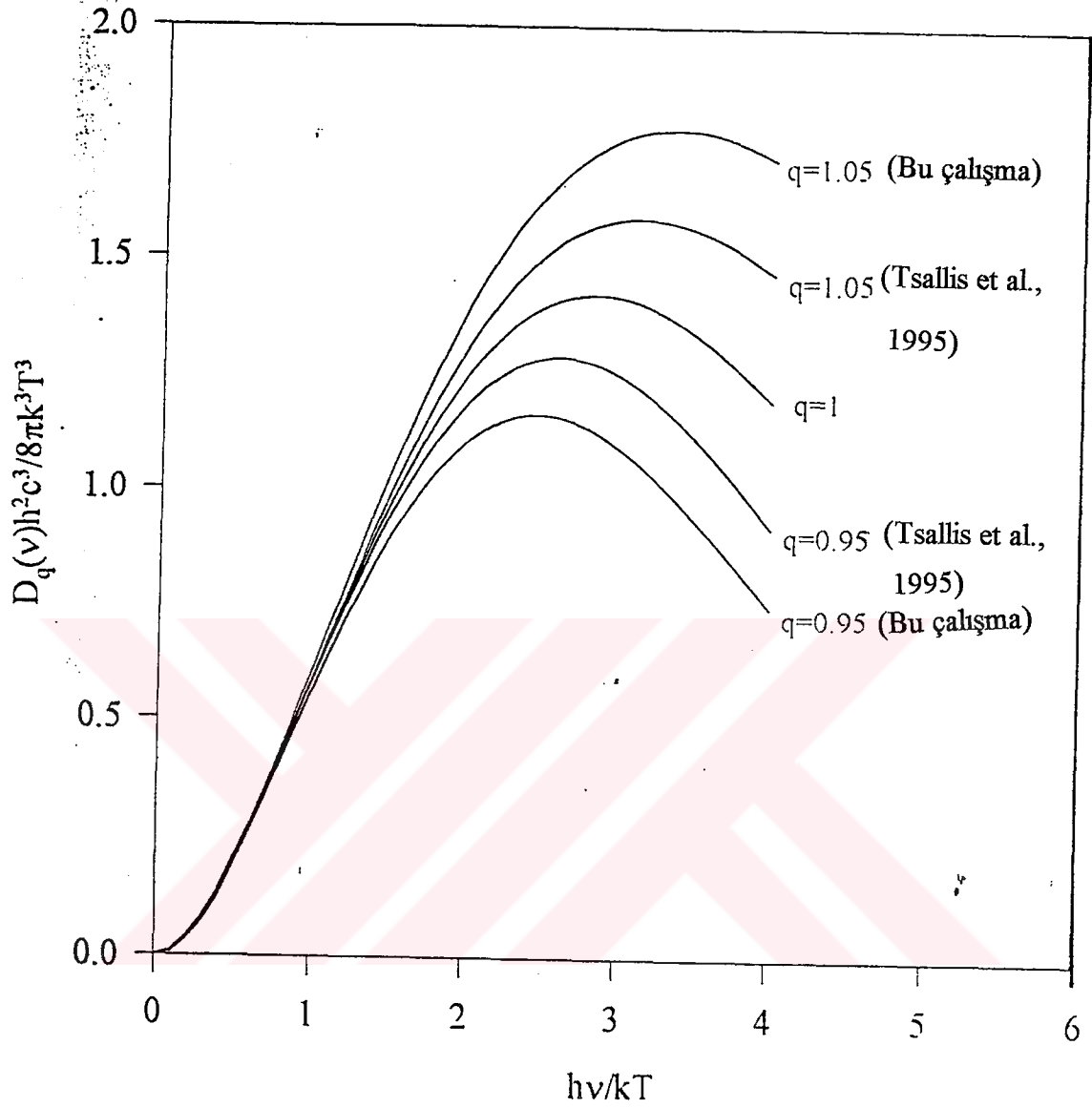
ifadesi ile verilen genelleştirilmiş Planck yasasını elde etmişlerdir. Burada $D_q(\nu)$ birim hacim başına foton enerji yoğunluğu, ν foton frekansı, $x \equiv h\nu/kT$ dir. Daha sonra bu ifadeyi, kozmik mikrodalga fon ışımasına, Planck ışıma yasasından sapmaları test etmek için uygulamışlar ve Cosmic Background Explorer uydusundan Mather ve arkadaşları (Mather et al., 1994) tarafından elde edilen verilerden $|q-1| < 3.6 \times 10^{-5}$ şartının sağlandığını %95 güvenilirlikle belirlemişlerdir. Bu çalışmada, daha basit ve daha genel olan ($q \approx 1$ olmak zorunluluğu yoktur) bir yaklaşım kullanılarak, Planck ışıma yasası genelleştirilmeye çalışılacaktır.

Fotonların, belirli $h\bar{k}/2\pi$ momentum ve $h\nu$ enerji değerlerine sahip çeşitli kuantum hallerine dağılımı,

$$\langle n_r \rangle_q^{PD} = \frac{1}{\left[1 - (1-q) \frac{h\nu}{kT} \right]^{\frac{1}{q-1}} - 1} \quad (3.119)$$

genelleştirilmiş Planck dağılımı [Denk.(3.46)] ile verilebilir. Diğer taraftan, ν ile $\nu + d\nu$ arasındaki frekanslara sahip fotonların kuantum halleri sayısı, $8\pi V \nu^2 d\nu / c^3$ dir (V , foton gazının hacmidir). Bu niceliğin Denk.(3.119) ile çarpılması sonucunda bu frekans aralığındaki foton sayısının belirlenebileceği açıktır:

$$dN = \frac{8\pi V}{c^3} \frac{\nu^2 d\nu}{\left[1 - (1-q) \frac{h\nu}{kT} \right]^{\frac{1}{q-1}} - 1} \quad (3.120)$$



Şekil 3.1 Bu çalışma ve Tsallis ve arkadaşlarının sunmuş olduğu çalışma (Tsallis et al., 1995) çerçevesinde elde edilen sonuçlara göre birim hacim başına siyah cisim foton enerji yoğunluğunun $h\nu/kT$ ye göre değişimi.

Dolayısıyla bu aralıktaki foton enerjisi

$$dE = \frac{8\pi h V}{c^3} \frac{v^3 dv}{\left[1 - (1-q) \frac{h\nu}{kT}\right]^{\frac{1}{q-1}} - 1} \quad (3.121)$$

ifadesi ile verilir ve nihayet birim hacim başına foton enerji yoğunluğu

$$D_q(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\left[1 - (1-q) \frac{h\nu}{kT}\right]^{\frac{1}{q-1}} - 1} \quad (3.122)$$

ile verilir. Bu ifade genelleştirilmiş Planck yasasıdır. Bu ifadenin Tsallis ve arkadaşları [makalelerindeki Denk.(5)] tarafından elde edilen ifade ile karşılaştırılması, Şekil 3.1 de gösterilmiştir. Şekilden, iki $D_q(\nu)$ eğrisinin düşük frekanslarda birbirine tam olarak uyduğu görülür. Öte yandan, eğrilerin maksimum olduğu frekanslara doğru, eğrilerin birbirinden bir miktar saptığı görülür. Bu, kullanılan yaklaşımın $q > 1$ ($q < 1$) olduğunda tam sonuca bir üst (alt) sınır olarak kendisini göstermesi nedeniyle beklenen bir sonuçtur. Bu sınırın, genelleştirilmiş dağılım fonksiyonlarının uygulamalarının tartışıldığı Pennini ve arkadaşları tarafında sunulan çalışmada (Pennini et al., 1995) (bu referansdaki Şekil 1 ve 3 e bakınız) ortaya konan sınırla tam olarak aynı olduğunu belirtmek önemlidir.

Ayrıca, $x \equiv h\nu/kT \ll 1$ halinde, Denk.(3.122) nin

$$D_q(\nu) = \frac{8\pi(kT)^3}{h^2 c^3} \frac{x^3}{x + \frac{(2-q)}{2!} x^2 + \frac{(2-q)(3-2q)}{3!} x^3 + \dots} \quad (3.123)$$

olacağı doğrulanabilir. Bu ifade, genelleştirilmiş Rayleigh-Jeans yasasıdır. Bilindiği gibi $q \rightarrow 1$ limitinde bu ifade, standart Rayleigh-Jeans yasasına karşılık gelen $D_1(\nu) \propto x^2 \propto \nu^2$ ifadesine dönüşür.

Buna ilaveten, Stefan-Boltzmann yasası doğrudan genelleştirilebilir ve q ya bağlı bir sabit göz önüne alınırsa (σ_q) yine T^4 ile orantılı olacak şekilde aynı formda kaldığı görülür. Bunu görmek için, birim yüzey başına yayılan toplam gücü yazalım:

$$P_q = \int_0^{\infty} d\nu D_q(\nu) \quad (3.124)$$

Eğer burada boyutsuz x değişkenine sahip Denk.(3.122) kullanılırsa

$$P_q = \frac{8\pi k^4}{h^3 c^3} T^4 \int_0^{\infty} \frac{x dx}{[1 - (1-q)x]^{\frac{1}{1-q}} - 1} \quad (3.125)$$

ifadesi elde edilir. İntegral T den bağımsız olduğu için

$$P_q = \sigma_q T^4 \quad (3.126)$$

yazılabilir. Bu ifade ise q ya bağlı bir sabit kullanılmak üzere genelleştirilmiş Stefan-Boltzmann yasasıdır.

Aynı zamanda, genelleştirilmiş Wien kayma yasasında elde etmek mümkündür. Denk.(3.122) maksimum yapılarak, ν_m ($D_q(\nu)$ ifadesini maksimum yapan frekans değeri) e göre lineer olmayan bir denklem elde edilir:

$$\left[\frac{h\nu_m}{kT} (3q-4) + 3 \right] \left[1 - (1-q) \frac{h\nu_m}{kT} \right]^{\frac{1}{q-1}} + \frac{h\nu_m}{kT} 3(1-q) - 3 = 0 \quad (3.127)$$

Bu denklemin analitik çözümünü bulmak çok güç olduğundan grafik çözüm daha uygundur. Grafik çözümden, $q = 0.95$ ve $q = 1.05$ için sırasıyla $h\nu_m / kT = 2.444$ ve 3.347 elde edilir. Tsallis q -indisinin aynı değerleri için (Tsallis et al., 1995) de verilen Denk.(19), $h\nu_m / kT = 2.563$ ve 3.08 değerlerini verir. Yine bu makalede verilen sonuçların tam sonuçlar için sınır sağladığını görmek mümkündür. Ayrıca, (Tsallis et al., 1995) de verilen $v_m(q > 1) > v_m(q = 1) > v_m(q < 1)$ sonucu, bu çalışma için de geçerlidir. Bu sonuç ve q_G -deforme kuantum grupları araştırmalarından elde edilen sonucun [yani $v_m(q_G) = v_m(1/q_G)$ ve $v_m(q_G < 1) < v_m(q_G = 1)$] arasında önemli bir sapmanın olduğu kolayca görülür.

Sonuç olarak genelleştirilmiş dağılım fonksiyonlarının kullanılması daha kolay fiziksel sonuçlara ulaşmamızı sağlamakta ve dağılım fonksiyonlarının genelleştirilmesinin önemi ve yararı açık olarak görülmektedir.

4. SONUÇLAR

Standard BGS istatistiğinin başarısız olduğu alanlarda toplanabilir olmayan bir formalizm, genelleştirilmiş (Tsallis) termoistatistiğidir. Bu çalışmada söz konusu termoistatistiğin temelleri ele alınmaktadır. Bu çerçevede içerisinde klasik ve kuantum gazları ele alınmıştır. q entropi indisinin, fiziksel sistemlerin hangi parametrelerine bağlı olduğunun araştırılması önem arz etmektedir. Bu nedenle klasik ve kuantum gazları uygulama alanı seçilmiştir.

Bose ve Fermi gazları (kuantum gazları) ve klasik gazlar için, Tsallis entropisi kullanılarak dağılım fonksiyonları elde edilmiştir. Boson ve fermion gazlarının Z_q^B ve Z_q^F bölüşüm fonksiyonları, $q \neq 1$ halinde elde edilmiştir [Denk.(3.32) ve Denk.(3.52)]. k kuantum halinin n_k parçacık tarafından işgali olasılığı p_{n_k} , yine bosonlar ve fermionlar için hesaplanmıştır [Denk.(3.37) ve Denk.(3.57)]. Klasik gazlar için genelleştirilmiş klasik dağılım fonksiyonu, Bose-Einstein dağılımının bir limit hali, yani bütün k değerleri için $\bar{n}_k \ll 1$, olarak belirlenmiştir [Denk.(3.50)]. Ayrıca, genelleştirilmiş Planck dağılımı, fotonların bosonlar olması nedeniyle kimyasal potansiyel üzerinde $\mu = 0$ koşulu kullanılarak, genelleştirilmiş Bose-Einstein dağılımından elde edilmiştir [Denk.(3.46)]. $q \rightarrow 1$ halinde, Tsallis entropisinin Shannon entropisine dönüşeceği açık olduğu için dağılım fonksiyonları standard formlarına dönüşürler.

Hurwitz zeta fonksiyonları kullanılarak klasik gazlar istatistiği, genelleştirilmiş formalizm çerçevesinde incelenmiş ve enerji düzeyleri Denk.(3.66) ile verilen lineer dağılıma sahip sistemler için Tsallis entropisi ve ortalama enerjinin açık ifadeleri bulunmuştur. Aynı zamanda olasılık dağılımı

analiz edilerek, sistemin bir Fermi gazı gibi davrandığı bulunmuştur. Bu çalışmada tanımlanan yöntem, lineer enerji seviyesi dağılımı ile sınırlı olmayıp daha genel sistemlere genişletilebilir.

Bose-Einstein yoğunlaşmasının faz geçişi için kritik sıcaklığın, toplanabilir olmayan termostatistik göz önüne alındığında düzeltilmesi gerektiği gösterilmiştir. Kritik sıcaklığın, q entropi indisine bağlı olarak arttığı görülebilir. q entropi indisinin fiziksel anlamı ortaya konulmuştur. Ayrıca, genelleştirilmiş Planck dağılımı [Denk.(3.46)], siyah cisim ışıması olayı için Planck yasasına uygulanmıştır.

Günümüzde toplanabilir olmayan fizik iki yönde gelişmektedir. Bunlardan birincisi kuantum grupları, ikincisi ise GST dir. Bu çalışma ikinci başlık altında sunulan alanda yapılmıştır. Her iki yönde yapılan çalışmalar, lineer olmayan fizik ile ilgili formalizmler arasındaki ilişkilerin ortaya konmasına imkan vermektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Büyükkılıç, F. and Demirhan, D., 1993, A fractal approach to entropy and distribution functions, Phys. Lett. A 181, 24-28.
- Büyükkılıç, F., Demirhan, D. and Güleç, A., 1995, A statistical mechanical approach to generalized statistics of quantum and classical gases, Phys. Lett. A 197, 209-220.
- Curilef, S., 1996, On the generalized Bose-Einstein condensation, Phys. Lett. A 218, 11-15.
- Elizalde, E., 1989, Multiple zeta functions with arbitrary exponents, J. Phys. A: Math. Gen. 22, 931-942.
- Feder, J., Fractals, 1988, Plenum Press, New York, 283p.
- Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., 1980, Statistical Physics, Pergamon Press, Oxford, 387p.
- Nobre, F.D. and Tsallis, C., 1995, Infinite-range ising ferromagnet: thermodynamic limit within generalized statistical mechanics, Physica A 213, 337-356.
- Olemskoi, A.I. and Flat, A. Ya., 1993, Application of fractals in condensed-matter physics, Physics-uspekhi 36(12), 1087-1128.

- Oprisan, S.A., 1996, The classical gases in the tsallis statistics using the generalized Riemann zeta functions, J. de Phys., (in press).
- Pennini, F., Plastino, A. and Plastino, A.R., 1995, Tsallis entropy and quantal distribution functions, Phys. Lett. A 208, 309-314.
- Plastino, A. and Tsallis, C., 1993, Variational method in generalized statistical mechanics, J. Phys. A. 26, L893-L896.
- Ramshaw, J.D., 1995, Entropy ambiguity in a system in equilibrium with a finite heath bath, Phys. Lett. A 198, 122-125.
- Tırnaklı, U., Büyükkılıç, F. and Demirhan, D., 1997, Generalized distribution functions and an alternative approach to generalized Planck radiation law, (in press).
- Tsallis, C., 1988, Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics, J. of Stat. Phys. 52, 479-487.
- Tsallis, C., Barreto, F.C. Sa. and Loh, E.D., 1995, Generalization of the Plack radiaton law and application to the cosmic microwave bacground radiation, Phys. Rev. E 52, 1447-1451.

EKLER

EK 1 Dinamik Fiziksel Sistemlerin Ele Alınış Biçimleri

Dinamik fiziksel sistemler, uzay ve zamanın sürekli ya da kesikli olmasına göre aşağıda listelendiği şekilde ele alınabilir:

(a) Sürekli zaman ($t \in \mathbb{R}$)

uzay Alan	Sürekli ($x \in \mathbb{R}^d$)	Kesikli ($x \in \mathbb{N}$)
Sürekli ($\phi \in \mathbb{R}^n$)	-Maxwell denklemleri. -Schrödinger denklemleri. -Navier-Stokes denklemleri -Alan teorisi.	-Bravais örgüsünde klasik fononlar. -Örgü alan teorisi.
Kesikli ($\phi \in \mathbb{N}$)	-Newton denklemleri. -Özel görelilik denklemleri.	-Gelişigüzel ikili gürültü.

(b) Kesikli zaman ($t \in \mathbb{N}$)

uzay Alan	Sürekli ($x \in \mathbb{R}^d$)	Kesikli ($x \in \mathbb{N}$)
Sürekli ($\phi \in \mathbb{R}^n$)	-Kesikli-zaman alan teorisi.	-Reel ve kompleks lojistik görüntüleme. -Bir örgüye çiftlenmiş görüntülemeler. -Sürekli nöron ağları.
Kesikli ($\phi \in \mathbb{N}$)	-Cantor fraktal tozu.	-Hopfield nöronal modeli. -Hücre otomatığı.

EK 2 Genelleştirilmiş Termodinamik Formülasyon

Genelleştirilmiş termodinamik formülasyon kısaca şöyle özetlenebilir:

Eşolasılıklı entropi	$S_q = k \ln_q W$
Genel (generic) entropi	$S_q = -k \langle \ln_q \hat{\rho} \rangle_q$
Kanonik eşbölüşüm dağılımı	$\hat{\rho}_q = \frac{e_q^{-\beta \hat{H}}}{\text{Tre}_q^{-\beta \hat{H}}}$
İç enerji	$U_q = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln_q Z_q$
Helmholtz enerjisi	$F_q = -\frac{1}{\beta} \ln_q Z_q$
Difüzyon	$P_q(x) = \frac{e_q^{-\beta x^2}}{\int dx e_q^{-\beta x^2}}$
Başlangıç koşullarına hassas bağımlılık	$\lim_{\Delta x(0) \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta x(0)} = e_q^{\lambda_q t}$
Likelihood fonksiyonu	$W(\{p_i\}) \propto e_q^{S_q(\{p_i\})}$
Keyfi-erişimli etkileşimler ($N \rightarrow \infty$)	$\frac{U(N, T)}{NN^*} \approx U\left(\frac{T}{N^*}\right), (N^* \equiv \ln_{\alpha/d} N)$
Tavlama benzeşimi ($t = 1, 2, 3, \dots$)	$\frac{T(t)}{T(1)} = \frac{\ln_q(1/2)}{\ln_q\left(\frac{1}{t+1}\right)} = \frac{2^{q-1} - 1}{(t+1)^{q-1} - 1}$

EK 3 Hurwitz (veya Genelleştirilmiş Riemann) Zeta Fonksiyonu

Hurwitz (veya genelleştirilmiş Riemann) zeta fonksiyonu, $\alpha > 0$ için

$$\zeta(s; \alpha) = \sum_{p=0}^{\infty} (p + \alpha)^{-s} \quad (E3.1)$$

serisi ile tanımlanır (Elizalde, 1989). Bu seri $\text{Re}(s) > 1$ için mutlak yakınsaktır. Bu çalışmada, aşağıda verilen çok boyutlu Hurwitz zeta fonksiyonu kullanılmıştır:

$$\zeta(s; a_1, \dots, a_N, a) = \sum_{n_1, \dots, n_N=0}^{\infty} (a_1 n_1, \dots, a_N n_N + a)^{-s} \quad (E3.2)$$

Burada $a_1, \dots, a_N, a$ değerleri sabitlerdir. (E3.2) serisinin Mellin dönüşümü yapıldığında

$$\begin{aligned} \zeta(s; a_1, \dots, a_N, a) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n_1, \dots, n_N=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-t(a_1 n_1, \dots, a_N n_N + a)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-at} \left((1 - e^{-a_N t})^{-1} + \sum_{k=1}^{N-1} e^{-a_k t} \prod_{j=k}^N (1 - e^{-a_j t})^{-1} \right) \\ &= a_N^{-s} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_p \leq N-1} \zeta(s; b + b_{k_1} + \dots + b_{k_p}) \end{aligned} \quad (E3.3)$$

ifadesi bulunur. Burada $b_j = \frac{a_j}{a_N}$, $b = \frac{a}{a_N}$, $j = 1, 2, \dots, (N-1)$ dir. Eğer

$a_1 = a_2 = \dots = a_N$ ise bu durumda

$$\zeta(s; a_1, \dots, a_N, a) = a_1^{-s} \sum_{p=0}^{\infty} C_{N+p-2}^p \zeta(s; p + \frac{a}{a_1}) \quad (E3.4)$$

olur.

Metin içinde kullanılan Hurwitz zeta fonksiyonunun en önemli özelliklerinden bazıları şunlardır:

$$1. \quad \left(\frac{\partial \zeta(s; \alpha)}{\partial s} \right)_{\alpha} = - \sum_{p=0}^{\infty} (p + \alpha)^{-s} \ln(p + \alpha) < 0$$

$$2. \quad \left(\frac{\partial \zeta(s; \alpha)}{\partial \alpha} \right)_s = -s \sum_{p=0}^{\infty} (p + \alpha)^{-s-1} = -s \zeta(s; \alpha) < 0$$

$$3. \quad \sum_{p=0}^{\infty} p^k (p + \alpha)^{-s} = \sum_{i=0}^k C_k^i (-\alpha)^i \zeta(s - k; \alpha)$$

$$4. \quad \sum_{p=0}^{\infty} p^i \zeta(s; p + \alpha) = \sum_{j=0}^i C_i^j (-\alpha)^j (\zeta(s - i + j; \alpha) + (1 - b) \zeta(s - i + j; \alpha))$$

ÖZGEÇMİŞ

1963 yılında Niğde ili Bor ilçesinde doğdum. İlk öğrenimimi Asım Eren İlkokulunda (Bor), orta öğrenimimi Aksaray Ortaokulunda (Aksaray), Lise öğrenimimi Endüstri Meslek Lisesinde (Konya) tamamladıktan sonra Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümüne 1984 yılında girdim ve 1988 yılında mezun oldum. Yüksek Lisans öğrenimimi aynı üniversitenin Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalında 1992 yılında tamamlayıp aynı yıl Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalında Doktora öğrenimime başladım. Halen bu enstitünün Doktora Programı öğrencisiyim.