T.C.

MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAFİKSEL METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Meryem IŞIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Aralık-2020

MUŞ

T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAFİKSEL METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Meryem IŞIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Doç. Dr. Muaz SEYDAOĞLU

Aralık-2020
MUŞ

TEZ KABUL ve ONAYI

Meryem IŞIK tarafından hazırlanan "Grafiksel Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri" adlı tez çalışması 14/12/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Doç. Dr. Erdal KORKMAZ Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	....
Danışman Doç. Dr. Muaz SEYDAOĞLU Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Gülcan ATICI TURAN Munzur Üniversitesi, Tunceli Meslek Yüksekokulu, Yönetim ve Organizasyon Bölümü, İşletme Yönetimi Pr., Matematik Bölümü	....

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu ....../....../...... Tarih ve ....../...... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

M. Işık

Meryem IŞIK

Tarih: 17/12/2020

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GRAFİKSEL METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Meryem IŞIK

Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Muaz SEYDAOĞLU

Bu tez çalışmasında, kısmi sıralama bağıntısı ve graf teorisi hakkında bilgi verilmiş olup grafiksel metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri incelenmiştir. İlk olarak, tez boyunca kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Daha sonra, grafiksel metrik uzay verilerek bazı topolojik özellikleri incelenmiştir. Ardından grafiksel metrik uzayda Banach sabit nokta teoreminin bazı genelleştirmeleri ispatlanmıştır. Bir sonraki kısımda grafiksel b-metrik uzay ve bazı topolojik özellikleri incelenerek grafiksel metrik uzaylardaki sabit nokta teoremleri bu uzaylara taşınmıştır. Ayrıca ana teoremlerin etkinliğini göstermek için bazı örnekler verilmiştir. Son olarak, grafiksel genişletilmiş b-metrik uzay kavramı tanıtılmış ve bu uzayda bazı sabit nokta teoremleri incelenmiştir.

2020, 44 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Metrik Uzay, Kısmi Sıralama Bağıntısı, Graf Teori, Grafiksel Metrik Uzay, Grafiksel b-Metrik Uzay

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

SOME FIXED POINT THEOREMS IN GRAPHICAL METRIC SPACES

Meryem IŞIK

Muş Alparslan University Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Muaz SEYDAOĞLU

In this study, informations about partial order relation and graph theory are given and some fixed point theorems in graph metric spaces are examined. Firstly, the basic definitions and theorems to be used throughout the thesis are given. Then, by giving graphical metric space, some topological properties on such space are examined. Subsequently, some generalizations of Banach's fixed point theorem in graphical metric space are proved. In the next section, by examining graphical b-metric space and some topological properties of such space, the fixed point theorems in graphical metric spaces are moved to graphical b-metric spaces. In addition, some examples are given to demonstrate the effectiveness of the main theorems. Finally, the notion of graphical extended b-metric space is introduced and some fixed point theorems on this space are investigated.
2020, 44 Pages

Keywords: Metric space, Partial order relation, Graph theory, Graphical metric space, Graphical b-metric space.

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın hazırlanmasında maddi ve manevi emeği bulunan her anlamda benden desteğini eksik etmeyen, akademik gelişmemde bilgi ve becerilerini paylaşarak bana yardımcı olan, rehberliği ile bana yol gösteren başta sevgili eşim ve saygı değer hocam Doç. Dr. Hüseyin IŞIK'a ve sayın danışman hocam Doç. Dr. Muaz SEYDAOĞLU'na; bilgi ve tecrübelerini paylaşan Dr. Öğr. Üyesi Gülcan ATICI TURAN ve kıymetli ders hocalarıma; beni bu günlere getiren ve her zaman yanımda olan annem Bediha ÖCAL, babam Abdullah ÖCAL ve kardeşlerime; sevgileriyle beni her an motive eden kızlarım Zehra IŞIK ve Nursena IŞIK'a bu süreçte desteklerini eksik etmeyen Melisa UYSAL ve değerli arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Meryem IŞIK
MUŞ-2020

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^+$	:	$[0, \infty)$

Kısaltmalar

(X, d)	:	Metrik uzay
(X, τ)	:	Topolojik uzay
$(X, \preccurlyeq)$	:	Kısmi sıralı küme
$(X, \preccurlyeq, d)$	:	Kısmi sıralı metrik uzay
$P(X)$	:	Kuvvet kümesi
G	:	Graf
$E(G)$	:	G grafının kenar kümesi
$V(G)$	:	G grafının köşe kümesi
G^{-1}	:	G grafının tersi
$\tilde{G}$	:	Yönlendirilmemiş G grafı
Δ	:	$X \times X$ in diyagonal kümesi
G^{ι}	:	Alt graf
$(xPy)_G$	:	G de, x den y ye en kısa yol
l_{xy}	:	x den y ye l uzunluğunda yol
$[x_0]_{G^*}^{l}$	:	G^* da, x den y ye l uzunluğun da yönlendirilmiş bir yol var

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Sabit nokta çalışmaları; bir dönüşümün sabit noktasının hangi şartlar altında var olduğunu, varsa tek olup olmadığını ve nasıl bulunabileceğini inceler. X boş olmayan bir küme ve T dönüşümü X den X e tanımlı olsun. Bu takdirde $T(x) = x$ denklemini sağlayan $x \in X$ noktalarına T dönüşümünün sabit noktaları denir. Örneğin; $\mathrm{X} = [0,1]$ aralığında tanımlı $f(x) = x^2$ ve $g(x) = 2x$ dönüşümlerini ele alırsak, f nin ($x = 0$ ve $x = 1$) iki tane sabit noktası vardır fakat g dönüşümünün $(x = 0)$ bir tane sabit noktası vardır. Ayrıca f ve g dönüşümlerini $\mathrm{Y} = (0,1]$ aralığında tanımlarsak f dönüşümünün $(x = 1)$ bir tane sabit noktası kaldığı gibi g dönüşümünün ise hiç sabit noktası kalmaz. Örnekten de anlaşılacağı üzere sabit noktanın varlığı tanımlanan aralığa bağlı olduğu gibi dönüşümün niteliğine de bağlıdır (Işık, 2016). Böyle bir dönüşümün sabit noktalarının varlığı, niteliği ve sayısı hakkında bilgi veren çok değişik teoremler vardır ve bu teoremler Sabit Nokta Teoremleri olarak adlandırılır. Sabit nokta teoremleri uygulama alanı son derece geniş olan teoremlerdir (Badii, 2008).

Sabit Nokta Teorisi, Matematiğin; Fonksiyonel Analiz, Genel Topoloji, Diferansiyel Denklemler vb. gibi alt dallarının yanı sıra; Fen bilimleri, istatistik ve ekonomi gibi farklı alanlarda da geniş çalışma alanlarına sahiptir. Bu yüzden bu konuda birçok farklı çalışma yapılmıştır ve halen yapılmaya devam etmektedir. Sabit nokta teorisinin geçmişi 19. yüzyılın son zamanlarına özellikle diferansiyel denklemler üzerindeki çalışmalarda kullanılan yaklaşım yöntemlerine kadar dayanmaktadır (Border, 1985) (Cataldo ve ark., 2006) (Goebel ve Kirk, 1990). Burada kullanılan yaklaşım yöntemleri Cauchy (1884), Liouville (1836), Lipschitz (1877) ve en önemlisi Picard (1890) ile bilinmektedir. Daha sonra 1910 yılında Brouwer (1910) tarafından sonlu boyutlu uzaylarda verilen bir teorem ile daha dikkat çekici hale gelmiştir. Ardından Schauder, $\mathbb{R}^n$ yerine Banach uzayını alarak Brouwer teoremini bazı ek şartlarla birlikte sonsuz boyutlu uzaylara şu şekilde genişletmiştir: "Bir Banach uzayının kompakt ve konveks bir alt kümesinden kendi üzerine tanımlı sürekli her dönüşüm bir sabit noktaya sahiptir." Sonrasında 1922 yılında Banach tam metrik uzaylarda sabit nokta teorisi çalışmalarını başlatmış ve büzülme dönüşümü prensibi olarak da bilinen "(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ daraltan dönüşümü olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde bir $k \in [0,1)$ sabiti varsa T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir." teoremini ifade ve ispat etmiştir. Metrik uzayda büzülme dönüşümünün en anlaşılır tanımı, farklı iki noktanın görüntüleri arasındaki uzaklığın bu noktalar arasındaki uzaklıktan daha küçük olmasıdır. Bu sebeple her büzülme dönüşümü süreklidir. "O halde sürekli olmayan dönüşümler de bir tek sabit noktaya sahip midir? Ve sürekli olmayan dönüşümlerin bir tek sabit noktaya sahip olduğu gösterilebilir mi?" 1968 de Kannan büzülme şartının yerine $\lambda \in [0,\frac{1}{2})$ olacak şekilde;

$$d(Tx,Ty) \leq \lambda[d(x,Tx) + d(y,Ty)]$$

eşitsizliğini kullanarak bu sorunun cevabının olumlu olduğunu göstermiştir (Kannan, 1968).

Banach büzülme dönüşümü prensibi, Picard iterasyon dizileri yardımıyla kolay ispatlanabilir olduğu için ve birçok farklı alanda denklemlerin bir tek çözümünün varlığını göstermede uygulanabildiği için birçok araştırmacı tarafından ya büzülme dönüşüm şartı zayıflatılarak ya da dönüşümün tanımlı olduğu küme genişletilerek genelleştirilmiştir (Işık, 2016). Örneğin, 2004 yılında Ran ve Reurings (2004), küme üzerinde kısmi sıralama bağıntısı tanımlayarak kümedeki bütün elemanlar yerine sadece karşılaştırılabilir elemanlar için sağlanan büzülme dönüşümlerini incelemiş ve ek şart olarak dönüşüm üzerine süreklilik şartını koymuştur. Elde ettikleri sonuçları da matris denklemlerin bir tek çözümünün varlığını göstermek için kullanmıştır. Daha sonra, Nieto ve Lopez (2005) dönüşümün süreklilik şartını kaldırarak Ran ve Reurings (2004) in sonuçlarını genişletmiş ve elde ettikleri sonuçları sınır değer problemlerin bir tek çözümünün varlığını göstermek için kullanmıştır. Daha sonra, 2007 de Jachymski (2008) büzülme dönüşümü üzerinde sıralama yapısı yerine graf yapısını vererek sabit nokta teorisinde yeni bir yaklaşım ele aldı. Son olarak, Shukla ve arkadaşları (2017), bir grafiksel yapıyı içeren kümeler için metrik uzay kavramını genelleştiren grafiksel metrik uzay kavramını tanıttı. Bir grafiksel metrik uzayda, üçgen eşitsizliği sadece uzay ile oluşturulan grafiksel yapıdaki bazı yollar üzerinde bulunan noktalar için sağlanır. Sonuç olarak onlar bir grafiksel metrik uzayın tüm noktaları için sağlanmasına gerek olmayan daha zayıf bir büzülme dönüşümü tanımladı. En son, Chuensupantharat ve arkadaşları (2015) grafiksel b-metrik uzayı kavramını tanıttı ve bu uzaylar üzerindeki büzülme dönüşümleri için bazı sabit nokta teoremleri verdi.

Grafik; köşeler ve köşeleri birleştiren kenarlardan oluşan yapıdır. Graf Teori diskret matematiğin bir branşıdır. Graf teori nesneler arasındaki ilişkileri modellemek için kullanılan matematiksel yapılar olan grafların incelemesidir. Graf Teori; fizikte, sayısal biyokimyada, farklı elektrik devrelerinde ayrıca DNA ve RNA yapılarını çalışmada kullanılabilir (Kaundal, 2017).

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Metrik ve Topolojik Kavramlar

Tanım 2.1 X boş olmayan bir küme olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonuna X üzerinde bir metrik, (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir (Bayraktar, 2006).

M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

M2) $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$;

M3) $\forall x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Örnek 2.1 $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = |x - y|$ şeklinde tanımlanan $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe mutlak değer (alışılmış) metriği denir (Bayraktar, 2006).

Örnek 2.2 X boştan faklı herhangi bir küme olmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \; ise \\ 1, & x \neq y \; ise \end{cases}$$

ile tanımlı d dönüşümü ayrık (diskret) metriktir (Işık, 2016).

Tanım 2.2 (X, d) bir metrik uzay, $\{x_n\}$, X de bir dizi ve $x_0 \in X$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n > n_0$ için $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ oluyorsa, $\{x_n\}$ dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ veya $x_n \to x_0$ şeklinde gösterilir.

Yakınsak olmayan diziye ıraksak dizi denir. Bir diğer ifadeyle, $x_n \to x_0$ ise dizinin belli bir terimden sonra bütün terimleri x_0 ın uygun bir ε civarında bulunur (Bayraktar, 2006).

Örnek 2.3 $(\mathbb{R}, d)$ öklid uzayını ve $X = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$ aralığını düşünelim. $x_n = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$ dizisi $\mathbb{R}$ de yakınsaktır ve $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ dır. x_n, X de yakınsak değildir. Çünkü $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ fakat $0 \notin X$ dır. Ancak $X = [0,1)$ alınırsa $x_n = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$ dizisi X de yakınsak olur. Bu örnekte de görüldüğü üzere yakınsaklık dizinin niteliğine göre değiştiği gibi dizinin tanımlandığı aralığa göre de değişir (Işık, 2016).

Örnek 2.4 Mutlak değer (alışılmış) metriğe göre $\mathbb{R}$ de $\{x_n\} = (1,2,3, \dots)$ dizisi yakınsak değildir. Fakat genel terimi $x_n = \frac{1}{n+1}$ olan dizi yakınsaktır. Çünkü,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, 0) = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n+1} - 0\right| = 0$$

dır. Yani aynı metriğe göre tanımladığımız diziden biri yakınsak diğeri yakınsak değildir. Dolayısıyla yakınsaklık diziye göre de değişebilir (Işık, 2016).

Örnek 2.5 $\mathbb{R}^2$ de genel terimi $x_n = (1, \frac{1}{n})$ olan $\{x_n\}$ dizisini düşünelim. $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$d(x,y) = max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

metriğini alırsak bu dizi bu metriğe göre $(1,0)$ noktasına yakınsar. Yani,

$$d(x_n, (1,0)) = max\left\{|1-1|, \left|\frac{1}{n} - 0\right|\right\} = \frac{1}{n} \to 0$$

dır. Fakat bu dizi ayrık metriğe göre yakınsak değildir. Çünkü d, $\mathbb{R}^2$ de ayrık metrik ise,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, (1,0)) = 1 \neq 0$$

dır. Yani, yakınsaklık metriğe göre de değişir (Işık, 2016).

Tanım 2.3 Bir metrik uzayda herhangi bir dizinin terimlerinin kümesi sınırlı ise, bu diziye sınırlı dizi denir (Bayraktar, 2006).

Teorem 2.1 Metrik uzayda yakınsak her dizinin limiti tektir ve yakınsak diziler sınırlıdır (Balcı, 1997).

Tanım 2.4 (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\} \subseteq X$ olsun. $k \in \mathbb{N}$ için $n_k < n_{k+1}$ olmak üzere $\{x_{n_k}\}$ dizisine $\{x_n\}$ dizisinin bir alt dizisi denir (Balcı, 1997).

Teorem 2.2 Bir metrik uzayda yakınsak bir dizinin her alt dizisi de yakınsaktır ve dizinin kendisi ile alt dizileri aynı noktaya yakınsar (Balcı, 1997).

Tanım 2.5 Bir (X, d) metrik uzayında herhangi bir dizi $\{x_n\}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $m > n \geq n_0$ özelliğindeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ise $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir. Eğer (X, d) metrik uzayındaki her

Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsıyor ise (X, d) ikilisine tam metrik uzay denir (Balcı, 1997).

Teorem 2.3 Bir metrik uzaydaki yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir (Balcı, 1997).

Uyarı 2.1 Yukarıdaki teoremin tersi genelde doğru değildir (Balcı, 1997).

Örnek 2.6 $X = (0, 1]$ bir alışılmış metrik uzay ve $\left\{x_n = \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, X de bir dizi olsun. Bu takdirde $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. Gerçekten, her $\varepsilon > 0$ ve $m, n > \frac{1}{\varepsilon}$ için

$$d(x_n, x_m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon$$

dir. Ancak $x_n \rightarrow 0 \notin X$ olduğundan $\{x_n\}$ dizisi X de yakınsak değildir (Balcı, 1997).

Uyarı 2.2 Tam bir metrik uzayın her alt uzayı tam olmayabilir (Balcı, 1997).

Örnek 2.7

a. R reel sayılar kümesi mutlak değer metriğine göre tamdır. Ancak $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ rasyonel sayılar kümesi bu metriğe göre tam değildir.
b. Bir diskret metrik uzayda her Cauchy dizisi yakınsak olduğundan, her diskret metrik uzay tamdır (Bayraktar, 2006).

Teorem 2.4 Bir X tam metrik uzayının bir M alt uzayının da tam olması için gerek ve yeter şart M nin X de kapalı bir küme olmasıdır (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.6 (X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve $A \subset X$ olsun. Eğer x noktasının her komşuluğunda A nın x den farklı noktaları varsa, x noktasına A nın bir yığılma noktasıdır denir. A nın tüm yığılma noktalarının kümesi A^{ι} ile gösterilir. Ayrıca $A \cup A^{\iota}$ kümesine A nın kapanışı denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir (Bayraktar, 2006).

Teorem 2.5 (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun.

a. Bir $x \in X$ noktasının A nın bir yığılma noktası olması için gerek ve yeter şart A kümesinde terimleri x den farklı ve $x_n \rightarrow x$ olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi vardır.

b. A nın kapalı olması için gerek ve yeter şart A daki yakınsak her dizinin limitinin A da olmasıdır (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.7 (X,d) ve (Y,ρ) metrik uzaylar, $f:(X,d) \rightarrow (Y,\rho)$ bir fonksiyon ve $a \in X$ olsun. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ için $d\,(x,a) < \delta$ olduğunda $\rho\,(f\,(x), f\,(a)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa f fonksiyonu a noktasında süreklidir. Eğer f fonksiyonu her $x \in X$ noktasında sürekli ise f ye X uzayında süreklidir ya da kısaca süreklidir denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.8 (X,d) bir metrik uzay ve $a \in X$ olsun. $r > 0$ olmak üzere,

$$B(a,r) = \{x \in X : d\,(a,x) < r\}$$

kümesine a merkezli r yarıçaplı açık yuvar (veya a nın r-açık komşuluğu),

$$D(a,r) = \{x \in X : d\,(a,x) \leq r\}$$

kümesine a merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar ve

$$S(a,r) = \{x \in X : d\,(a,x) = r\}$$

kümesine de a merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir (Bayraktar, 2006).

Örnek 2.8 (X,d) bir ayrık metrik uzay $a \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun.

$$B(a,\varepsilon) = \begin{cases} \{a\}, & \varepsilon \leq 1 \; ise \\ X\;, & \varepsilon > 1 \; ise \end{cases}$$

$$D(a,\varepsilon) = \begin{cases} \{a\}, & \varepsilon < 1 \; ise \\ X\,, & \varepsilon \geq 1 \; ise \end{cases}$$

$$S(a,\varepsilon) = \begin{cases} X \setminus \{a\}, & \varepsilon = 1 \; ise \\ \emptyset \;, & \varepsilon \neq 1 \; ise \end{cases}$$

dır (Bayraktar, 2006).

Örnek 2.9 $(\mathbb{R},d)$ standart (alışılmış) bir metrik uzay olsun. Buna göre $a \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} B(a,\varepsilon) &= \{x \in \mathbb{R}\colon d(x,a) < \varepsilon\} \\ &= \{\, x \in \mathbb{R}\colon |x-a| < \varepsilon\} \\ &= (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(a,\varepsilon) &= \{x \in \mathbb{R}\colon d(x,a) \leq \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}\colon |x-a| \leq \varepsilon\} \\ &= [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \end{aligned}$$

$$S(a,\varepsilon) = \{x\epsilon\mathbb{R}\colon\ d(x,a) = \varepsilon\}$$
$$= \{x\epsilon\mathbb{R}\colon\ |x-a| = \varepsilon\}$$
$$= \{x = \ a - \varepsilon \text{ veya } x = \ a + \varepsilon\ \}$$

dır (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.9 (X,d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve A ile B, X in bos olmayan iki alt kümesi olsun. Bu durumda

$$d\ (A,B) = inf\ \{d(x,y)\colon\ x \in A, y \in B\}$$

sayısına A ile B kümeleri arasındaki uzaklık,

$$\mathrm{d}\ (x,A) = inf\ \{d(x,y)\colon\ y \in A\}$$

sayısına x noktasının A kümesine uzaklığı ve

$$d\ (A) = sup\ \{d(x,y)\colon\ x,y \in A\}$$

sayısına da A kümesinin çapı denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.10 Bir metrik uzayda herhangi bir kümenin çapı sonlu ise, bu kümeye sınırlı küme denir (Bayraktar, 2006; Helvacı, 2014).

Tanım 2.11 (X,d) bir metrik uzay ve A, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer $x \in A$ için $B\ (x,r) \subseteq A$ olacak biçimde bir $r > 0$ varsa x noktasına A kümesinin bir iç noktası denir. Eğer her bir $x \in A$ noktası A kümesinin bir iç noktası ise A kümesine açık küme denir. $K \subset X$ olmak üzere eğer $K^c = X \backslash K$ açık ise K kümesine kapalı küme denir (Bayraktar, 2006).

Önerme 2.1 (X,d) bir metrik uzay olsun. Bu takdirde,

a. X deki her açık yuvar açık bir kümedir.
b. X deki her kapalı yuvar kapalı bir kümedir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.12 X boş olmayan bir küme ve τ ailesi de $P(X)$ kuvvet kümesinin herhangi bir alt ailesi olsun. Eğer $\tau \subseteq P(X)$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, τ ailesinin her elemanına, X kümesinde bir açık küme ve aşağıdaki özelliklere de açıklar aksiyomu denir (Yıldız, 2005).

A1) X ve $\emptyset$ kümeleri τ ailesine aittir.

A2) τ ailesine ait sonlu çokluktaki elemanların kesişimi τ ailesine aittir.

A3) τ ailesine ait keyfi sayıdaki elemanların birleşimi τ ailesine aittir.

Tanım 2.13 Tanım 2.12 deki açıklar aksiyomunu sağlayan τ ailesine X kümesi üzerinde topolojik yapı ya da kısaca topoloji; (X,τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir (Yıldız, 2005).

Tanım 2.14 (X,τ) bir topolojik uzay, $\{x_n\} \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. Eğer $x \in A$ olacak şekildeki her A açık kümesi için $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in A$ olacak şekilde bir $n_0 \in N$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ noktasına yakınsaktır denir ve $x_n \to x$ ya da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ile gösterilir (Bülbül, 2011).

Tanım 2.15 (X,τ_1) ve (Y,τ_2) iki topolojik uzay ve f: X→Y bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. Eğer $f(x) \in V$ olacak şekildeki her $V \in \tau_2$ için $x \in U$ ve $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir $U \in \tau_1$ varsa f ya X topolojik uzayında süreklidir denir ya da kısaca süreklidir denir (Yüksel, 2014).

Tanım 2.16 (X,τ_1) ve (Y,τ_2) iki topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer X topolojik uzayında $x \in X$ noktasına yakınsayan her $\{x_n\}$ dizisi için Y uzayındaki $\{fx_n\}$ dizisi de $f(x)$ noktasına yakınsıyorsa f ye X de dizisel süreklidir denir ya da kısaca süreklidir denir (Yüksel, 2014).

Teorem 2.6

a. (X,τ_1) ve (Y,τ_2) iki topolojik uzay ve $f: X \to Y$ sürekli bir dönüşüm ise f dizisel süreklidir. Fakat tersi doğru olmayabilir.
b. X ve Y iki metrik uzay ise f nin sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin dizisel sürekli olmasıdır (Yıldız, 2005).

Tanım 2.17 (X,τ) topolojik uzayı ve bir $x_0 \in X$ noktası verilsin. x_0 noktasını içeren her $A \subseteq X$ açık alt kümesine x_0 noktasının açık komşuluğu denir. Ayrıca eğer A kümesi bir açık küme ise, A kümesi kendi içindeki her noktanın bir açık komşuluğudur (Yüksel, 2014).

Tanım 2.18 (X, τ) topolojik uzayı ve bir $x_0 \in X$ noktası verilsin. x_0 noktasının bir açık komşuluğunu kapsayan her $V \subseteq X$ alt kümesine x_0 noktasının komşuluğu denir (Yüksel, 2014).

Tanım 2.19 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X kümesinin farklı her iki noktasının her birinin diğer noktayı içermeyecek şekilde bir komşuluğu varsa bu uzaya bir T_1-uzayı denir. Başka bir ifadeyle $x \neq y$ özelliğindeki her $x, y \in X$ noktaları için

$$x \in U, y \notin U \text{ ve } y \in V, x \notin V$$

olacak şekilde $U, V \in \tau$ kümeleri varsa bu uzaya bir T_1-uzayı denir (Koçak, 2015).

Tanım 2.20 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için

$$x \in U, y \in V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde $U, V \in \tau$ kümeleri varsa (X, τ) uzayına bir Hausdorff uzayı veya bir T_2-uzayı denir (Koçak, 2015).

2.2. Kısmi Sıralama Bağıntısı ve Bazı Özellikleri

Tanım 2.21 X boş olmayan bir küme, $x,\ y, z \in X$ ve $\preccurlyeq, X$ de bir bağıntı olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\preccurlyeq$ bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı denir.

S1. $\forall\, x \in X$ için $x \preccurlyeq x$ (yansıma özelliği),

S2. $x \preccurlyeq y$ ve $y \preccurlyeq x$ ise $x = y$ (ters simetri özelliği),

S3. $x \preccurlyeq y$ ve $y \preccurlyeq z$ ise $x \preccurlyeq z$ dir (geçişme özelliği).

$x \preccurlyeq y$ ifadesi "x, y den önce gelir" ya da "x küçük eşit y" seklinde okunur. X de kısmi sıralama bağıntısı tanımlanmışsa X e kısmi sıralı küme denir ve genellikle $(X, \preccurlyeq)$ ile gösterilir (Işık, 2016).

Örnek 2.10

a. $\mathbb{R}$ reel sayıar kümesi üzerinde $\preccurlyeq$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır ve bu bağıntı alışılmış sıralama bağıntısı olarak adlandırılır.
b. Bir X kümesinin $P(X)$ kuvvet kümesi $\preccurlyeq$ kapsama bağıntısına göre kısmi sıralı bir kümedir.
c. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde $x, y \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\preccurlyeq$ bagıntısı "$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x, y$ yi böler" seklinde tanımlanırsa $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir kümedir (Işık, 2016).

Tanım 2.22 (X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme olsun. $x, y \in X$ için $x \preccurlyeq y$ veya $y \preccurlyeq x$ oluyorsa x ile y elemanlarına karşılaştırılabilir denir (Işık, 2016).

Tanım 2.23 (X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme olsun. X in herhangi iki elemanı karşılaştırılabilir ise $\preccurlyeq$ bağıntısına tam sıralama bağıntısı, (X, $\preccurlyeq$) ikilisine de tam sıralı küme denir (Işık, 2016).

Tanım 2.24 (X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x \in A$ için $u \preccurlyeq x$ olacak şekilde bir $u \in X$ varsa u ya A nın X deki bir alt sınırı denir. Benzer şekilde, her $x \in A$ için $x \preccurlyeq v$ olacak şekilde bir $v \in X$ varsa v ye A nın X deki bir üst sınırı denir. Üst sınıra sahip bir kümeye üstten sınırlı; alt sınıra sahip bir kümeye de alttan sınırlı denir. Alttan ve üstten sınırlı bir kümeye ise kısaca sınırlı küme denir (Işık, 2016).

Tanım 2.25 (X, $\preccurlyeq$) kısmi sıralı bir küme, $A \subseteq X$ ve A nın (X deki) alt sınırlarının kümesi A_1 olsun. $\alpha \in A_1$ olmak üzere her $x \in A_1$ için x $\preccurlyeq$ α ise α ya A nın en büyük alt sınırı (veya A nın infimumu) denir ve $inf\ A$ ile gösterilir. A nın üst sınırlarının kümesini ise A_2 ile gösterelim. $\beta \in A_2$ olmak üzere her $y \in A_2$ için $\beta \preccurlyeq$ y ise β ya A nın en küçük üst sınırı (veya A nın supremumu) denir ve supA ile gösterilir. $infA \in A$ olması durumunda $infA$ ya A nın minimumu; $supA \in A$ olması halinde ise $supA$ ya A nın maksimumu denir (Işık, 2016).

Tanım 2.26 $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer $\forall\, x, y \in X$ için $\{x, y\}$ kümesinin supremumu ve infimumu varsa $(X, \preccurlyeq)$ ikilisine bir latis (örgü) denir. Eğer X in bos olmayan her A alt kümesinin supremumu ve infimumu varsa $(X, \preccurlyeq)$ ikilisine tam latis denir. Tam sayılar kümesi bilinen sıralamaya göre bir latistir fakat tam latis degildir (Işık, 2016).

Tanım 2.27 $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer $x \preccurlyeq y$ olacak şekildeki $\forall\, x, y \in X$ için $Tx \preccurlyeq Ty$ oluyorsa T ye azalmayan fonksiyon denir (Işık, 2016).

Teorem 2.7 $(X, \preccurlyeq)$ tam latis ve $T : X \to X$ azalmayan dönüşüm olsun. Bu durumda T bir sabit noktaya sahiptir (Işık, 2016).

Not 2.1 $\preccurlyeq$ bagıntısı X üzerinde bir kısmi sıralama ve d, X üzerinde bir metrik olmak üzere $(X, \preccurlyeq, d)$ ile kısmi sıralı metrik uzaylar ifade edilecektir (Işık, 2016).

Tanım 2.28 X, kısmi sıralı küme olsun. Bu takdirde $\forall x, y \in A$, $x \sqsubseteq$ y ya da $y \sqsubseteq$ x ise $A \subseteq X$ e iyi sıralıdır denir (Işık, 2016).

2.3. Graf Teori

Tanım 2.29 Bir yönlendirilmemiş G grafında V, köşelerin kümesi E ise kenarların kümesinden oluşur öyle ki her bir $e \in E$ kenarı köşelerin sıralı olmayan bir çiftinin birleşimidir. Eğer v ve w köşelerinin birleşimi bir tek e kenarı ise $e = (v, w)$ ya da $e = (w, v)$ şeklinde yazılır. (v, w) bir yönlendirilmemiş grafta v ve w arasındaki bir kenarı, sıralı olmayan bir çifti ifade eder (Shukla ve ark., 2017).

Tanım 2.30 Yönlendirilmiş bir G grafı, köşelerin bir V kümesi ve kenarların bir E kümesinden oluşur öyle ki her bir $e \in E$ kenarı köşelerin sıralı bir çiftinin birleşimidir. Eğer köşelerin sıralı bir çifti (v, w) nın oluşturduğu bir tek kenar e ise $e = (v, w)$ ile gösterilir (Shukla ve ark., 2017).

Tanım 2.31 X boş olmayan bir küme ve Δ, $X \times X$ kartezyen çarpım kümesinin diyagonali olarak tanımlansın öyle ki,

$$\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$$

dır (Shukla ve ark., 2017).

Tanım 2.32 G, paralelkenarlara sahip olmayan yönlendirilmiş bir graf olsun öyle ki X ile çakışan köşelerinin kümesini $V(G)$ ve $E(G) \subseteq X \times X$ tüm döngüleri içeren kenarların kümesini göstersin. Yani $\Delta \subseteq E(G)$ dir. Bu takdirde G, $(V(G), E(G))$ çifti ile tanımlanır (Chuensupantharat ve ark., 2018).

Tanım 2.33 G^{-1} ile G nin kenarlarının yönlerini tersine çevirerek elde edilen grafı tanımlarız. Yani,

$$V(G^{-1}) = V(G) \text{ ve } E(G^{-1}) = \{(x, y) \in X \times X \colon (y, x) \in E(G)\}$$

dır (Chuensupantharat ve ark., 2018).

Tanım 2.34 $\tilde{G}$ ile G nin tüm kenarlarının yönü ihmal edilerek G den elde edilen yönlendirilmemiş grafı tanımlarız. $\tilde{G}$ kenarlarının kümesi simetrik olan yönlendirilmiş graf olarak tanımlamak daha uygundur. Bu bağlamda,

$$V(\tilde{G}) = V(G) \text{ ve } E(\tilde{G}) = E(G) \cup E(G^{-1})$$

dır (Shukla ve ark., 2017).

Tanım 2.35 x ve y G yönlendirilmiş grafın köşeleri ise bu takdirde G de $l \in \mathbb{N}$ uzunluğunda bir yol, $l+1$ köşenin bir $\{x_i\}_{i=0}^{l}$ dizisidir öyle ki $x_0 = x,\ x_l = y$ ve $i \in (1,2,3,\dots,l)$ için $(x_{i-1}, x_i) \in E(G)$ dir (Chuensupantharat ve ark., 2018).

Tanım 2.36 Eğer G nin her köşe çifti arasında en az bir yol varsa G ye bağlantılıdır denir (Chuensupantharat ve ark., 2018).

Tanım 2.37 Yönlendirilmiş bir G grafının her köşesinden diğer bir köşesine en az bir yönlendirilmiş yol varsa G grafına kuvvetli bağlantılıdır denir. $\tilde{G}$ bağlantılı ise G ye zayıf bağlantılıdır denir (Chuensupantharat ve ark., 2018).

Tanım 2.38 Bir G grafının bir H alt grafı köşelerinin kümesi ve kenarlarının kümesinin tümü G nin alt kümeleri olan bir graftır. Her küme kendisinin alt kümesi olduğundan her graf da kendisinin bir alt grafıdır. G nin tüm kenarları ve köşeleri H da mevcut olmayabilir. Fakat eğer bir köşe H da mevcut ise G de de mevcuttur ve H da iki köşenin bağlantılı olduğu herhangi bir kenar ayrıca G de bağlantılıdır (Chuensupantharat ve ark., 2018).

Tanım 2.39 X üzerinde bir P bağıntısını aşağıdaki şekilde tanımlayalım. $(xPy)_G \Leftrightarrow G$ de x den y ye yönlendirilmiş bir yol vardır (Shukla ve ark., 2017).

Tanım 2.40 z, G de x ile y arasındaki bazı yönlendirilmiş yollarda mevcut ise $z \in (xPy)_G$ şeklinde yazılır. $l \in \mathbb{N}$,

$[x]_G^l = \{y \in X: x \text{ den } y \text{ ye } l \text{ uzunluğunda yönlendirilmiş bir yol vardır}\}$ (Shukla ve ark., 2017).

Tanım 2.41 X de bir $\{x_n\}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n P x_{n+1})_G$ ise G-terim bağlantılıdır denir (Shukla ve ark., 2017).

3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA

3.1. Grafiksel Metrik Uzaylar ve Sabit Nokta Teoremleri

Tanım 3.1 X, G grafı ile donatılmış boş olmayan bir küme $d: X \times X \to \mathbb{R}$ aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyon olsun.

GM1. $\forall\, x, y \in X$ için $d_G(x,y) \geq 0$;

GM2. $d_G(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

GM3. $\forall\, x, y \in X$ için $d_G(x,y) = d_G(y,x)$;

GM4. $(xPy)_G$ olmak üzere $z \in (xPy)_G$ olacak şekilde ki $\forall\, x, y, z \in X$ için

$$d_G(x,y) \leq d_G(x,z) + d_G(z,y)$$

dir. Bu takdirde d_G dönüşümü X üzerinde bir grafiksel metrik, (X, d_G) ikilisine de bir grafiksel metrik uzayı denir (Shukla ve ark., 2017).

Örnek 3.1 Her (X,d) metriği $V(G) = X$ ve $E(G) = X \times X$ olmak üzere G grafı ile bir grafiksel metrik uzaydır (Shukla ve ark., 2017).

Tanım 3.2 $(X, \sqsubseteq)$ kısmi sıralı bir küme ve $d_{\sqsubseteq}: X \times X \to \mathbb{R}$ aşağıdaki şartları sağlayan bir dönüşüm olsun.

OM1. $\forall x, y \in X$ için $d_{\sqsubseteq}(x,y) \geq 0$;

OM2. $d_{\sqsubseteq}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

OM3. $\forall x, y \in X$ için $d_{\sqsubseteq}(x,y) = d_{\sqsubseteq}(y,x)$;

OM4. $x \sqsubseteq z \sqsubseteq y$ olacak şekildeki $\forall x, y, z \in X$ için

$$d_{\sqsubseteq}(x,y) \leq d_{\sqsubseteq}(x,z) + d_{\sqsubseteq}(z,y)$$

dir. Bu takdirde $d_{\sqsubseteq}$ dönüşümüne X üzerinde bir sıralı metrik, $(X, d_{\sqsubseteq})$ ikilisine de bir sıralı metrik uzay denir (Shukla ve ark., 2017).

Uyarı 3.1 $(X, \sqsubseteq)$ bir sıralı metrik uzay ve G_l de $V(G_l) = X$ ve

$$E(G_l) = \{(x,y) \in X \times X : x \sqsubseteq y\}$$

ile tanımlanan bir graf olsun. Bu takdirde

$$\forall\, x, y \in X,\ d_{G_l}(x,y) = d_{\sqsubseteq}(x,y)$$

olmak üzere (X, d_{G_l}) bir grafiksel metrik uzaydır. Böylece her sıralı metrik uzay bu G_l grafı ile bir grafiksel metrik uzaydır. G_l grafına $\sqsubseteq$ sıralama bağıntısından indirgenen graf denir. Dikkat edersek bu şekildeki grafiksel metriğin aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi bir metrik olması gerekmez (Shukla ve ark., 2017).

Örnek 3.2 $X = \mathbb{N}$ kümesi $\sqsubseteq := \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y, x \text{ ile bölünebilir}\}$ sıralama bağıntısı ile donatılsın. $d_{\sqsubseteq}: X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümü,

$$d_{\sqsubseteq}(x,y) = \begin{cases} xy, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu takdirde $d_{\sqsubseteq}$, X üzerinde sıralı bir metrik ve $(X, d_{\sqsubseteq})$ de bir sıralı metrik uzaydır. G_l, $\sqsubseteq$ sıralama bağıntısı ile indirgenen graf olsun. Bu takdirde $d_{G_l} = d_{\sqsubseteq}$ grafiksel metriği bir metrik değildir. Gerçekten $x = 1, y = 5, z = 4$ için

$$d_{\sqsubseteq}(y,z) = 20 > 5 + 4 = d_{\sqsubseteq}(y,x) + d_{\sqsubseteq}(x,z)$$

dır (Shukla ve ark., 2017).

Uyarı 3.2 G bir yönlendirilmemiş graf, $V(G) = X$ olsun. $j = 1,2,3,\ldots,n$ olmak üzere G_j ler G nin bağlantılı bileşenleri olsun öyle ki

$$V(G) = \cup_{j=1}^{n} V(G_j) \text{ ve } E(G) = \Delta \cup \{\cup_{j=1}^{n} E(G_j)\}$$

dir. $x, y \in X$ için l_{xy}, $l_{xx} = 0$ olmak üzere x den y ye en kısa yolun uzunluğu olsun. Şimdi $d_G: X \times X \to \mathbb{R}$

$$d_G(x,y) = \begin{cases} l_{xy}, & x, y \in V_i, \ i \in \{1,2,\ldots,n\} \\ 1, & x \in V_i, \ y \in V_j, \ i,j \in \{1,2,\ldots,n\}, \ i \neq j \end{cases} \tag{3.1}$$

ile tanımlansın. Bu takdirde d_G, X üzerinde bir grafiksel metrik, (X, d_G) de bir grafiksel metrik uzaydır. Aşağıdaki örnek bu gibi bir grafiksel metriğin bir metrik olmasına gerek olmadığını gösterir (Shukla ve ark., 2017).

Örnek 3.3 $V(G) = \{x_i, \ i \in \{1,2,\ldots,6\}\}$, $E(G) = \Delta \cup \{e_i, \ i \in \{1,2,3,5\}\}$ ve $e_i = \{x_i, x_{i+1}\}$ olmak üzere G bir yönlendirilmemiş graf olsun. $V(G_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $E(G_1) = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve $V(G_2) = \{x_5, x_6\}$, $E(G_2) = \{e_5\}$ olmak üzere G_1 ve G_2 verilsin. Bu takdirde, $V(G_1) \cup V(G_2)$ ve G_1, G_2 , G nin bağlantılı bileşenleridir. Şimdi (3.1) de tanımlanan d_G, X üzerinde bir grafiksel metriktir. Dikkat edersek,

$$d_G(x_1, x_4) > d_G(x_1, x_6) + d_G(x_6, x_4)$$

den dolayı d_G, X üzerinde bir metrik değildir (Shukla ve ark., 2017).

Örnek 3.4 $X = [0,1]$ ve G, $V(G) = X$ ve

$$E(G) = \Delta \cup \{(x,y) \in X \times X: (x,y) \in [0,1],\ x \leq y\}$$

ile tanımlanan bir graf olsun. $d_G: X \times X \to \mathbb{R}$,

$$d_G(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y, \\ xy & , \quad x,y \in (0,1], \quad x < y \\ x + y & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu takdirde d_G, X üzerinde bir grafiksel metrik ve (X, d_G) bir grafiksel metrik uzaydır. Fakat, $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{4}$ alırsak;

$$d(x,y) > d(x,z) + d(z,y)$$

olduğundan d_G, X üzerinde bir metrik değildir (Shukla ve ark., 2017).

Tanım 3.3 (X, d_G) bir grafiksel metrik uzay olsun. $x \in X$ merkezli ve $\varepsilon > 0$ yarıçaplı $B_G(x,\varepsilon)$ açık yuvarı,

$$B_G(x,\varepsilon) = \{y \in X: (xPy)_G,\ d_G(x,y) < \varepsilon\}$$

ile tanımlansın. $\Delta \subseteq E(G)$ olduğundan $x \in B_G(x,\varepsilon)$ ve bu yüzden $\forall\, x \in X$ ve $\varepsilon > 0$, $B_G(x,\varepsilon) \neq \emptyset$ dır. $\mathfrak{B} = \{B_G(x,\varepsilon): x \in X,\ \varepsilon > 0\}$ ailesi X üzerinde d_G grafiksel metriği ile indirgenen τ_G topolojisi için bir komşuluk sistemidir. Açıkça X in bir U alt kümesi, $\forall x \in U$, $B_G(x,\varepsilon) \subseteq U$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa açıktır. X in bir C alt kümesi için tümleyeni yani $X \backslash C$ açıksa, C kapalıdır denir (Shukla ve ark., 2017).

Lemma 3.1 (X, d_G) grafiksel metrik uzayındaki her açık yuvar bir açık kümedir.

İspat. Herhangi bir $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $y \in B_G(x,\varepsilon)$ olsun. Bu takdirde $d_G(y,x) < \varepsilon$ ve bu yüzden $\delta := \varepsilon - d_G(y,x) > 0$ dır. Kabul edelim ki $z \in B_G(y,\delta)$ olsun. Açık yuvarın tanımından, $(xPy)_G$ ve $(yPz)_G$ den $(xPz)_G$ yi elde ederiz. Ayrıca (GM4) den

$$d_G(z,x) \leq d_G(z,y) + d_G(y,x) < \delta + d_G(y,x) = \varepsilon - d_G(y,x) + d_G(y,x) = \varepsilon$$

olduğundan $z \in B_G(x,\varepsilon)$ ve bu yüzden $B_G(y,\delta) \subseteq B_G(x,\varepsilon)$ elde edilir (Shukla ve ark., 2017).

Tanım 3.4 (X, d_G) bir grafiksel metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Bu takdirde her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n > n_0$ için $d_G(x_n, x) < \varepsilon$ oluyorsa, $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ noktasına yakınsar denir. $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsıyor ise $\lim_{n \to \infty} d_G(x_n, x) = 0$ olduğu açıktır (Shukla ve ark., 2017).

Uyarı 3.3 Grafiksel metrik uzayda bir dizinin limiti tek olmayabilir. Bunu görmek için $2_{\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{2^n}: n \in \mathbb{N}\right\}$ olmak üzere $X = 2_{\mathbb{N}} \cup \{0\}$ olsun. Ayrıca G, $V(G) = X$ ve

$$E(G) = \{(x,y) \in X \times X: \ y \leq x\}$$

ile verilen bir graf olsun. $d_G: X \times X \to \mathbb{R}$,

$$d_G(x,y) = \begin{cases} 0 \ , & x = y, \\ xy \ , & x,y \in 2_{\mathbb{N}},\ x \neq y \\ \frac{1}{2} \ , & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu takdirde d_G, X üzerinde bir grafiksel metrik ve (X, d_G) de bir grafiksel metrik uzaydır. $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \frac{1}{2^n}$ olmak üzere X deki $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Bu takdirde herhangi bir $k \in \mathbb{N}$ sabiti için $n \to \infty$ iken

$$d_G\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n+k}} \to 0$$

dır. Bu yüzden de $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ dizisi $\forall k \in \mathbb{N}$ sabiti için $\frac{1}{2^k}$ ya yakınsar (Shukla ve ark., 2017).

Lemma 3.2 (X, d_G), τ_G grafiksel metrik topolojisi ile indirgenen bir grafiksel metrik uzay olsun. Bu takdirde τ_G, bir T_1-uzayıdır. Fakat genelde Hausdorff, yani T_2 değildir.

İspat. $\forall x \in X$ için $\{x\}$ tek nokta kümesinin X in kapalı bir alt kümesi olduğunu göstermeliyiz. Yani, $X \backslash \{x\}$ in X in açık bir alt kümesi olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki $y \in X \backslash \{x\}$ olsun. Bu takdirde $y \neq x$ yani $d_G(x,y) > 0$ dır. Şimdi $\varepsilon = \frac{d_G(x,y)}{2} > 0$ olsun. Bu takdirde $x \notin B_G(y,\varepsilon)$ olduğuna dikkat edelim. Diğer türlü $d_G(x,y) < \varepsilon = \frac{d_G(x,y)}{2}$ olur ki bu bir çelişkidir. Bu yüzden $B_G(y,\varepsilon) \subseteq X \backslash \{x\}$ dır ve dolayısıyla $X \backslash \{x\}$ açıktır (Shukla ve ark., 2017).

Uyarı 3.4 (X, d_G), Uyarı 3.3 de tanımlanan grafiksel metrik uzay olsun. Bu takdirde $\frac{1}{2}$, $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ dizisinin bir limitidir. Ancak herhangi bir $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} d_G\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^k}\right) = 0 \neq d_G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^k}\right)$ dır. Bu yüzden bir grafiksel metrik uzay sürekli değildir (Shukla ve ark., 2017).

Tanım 3.5 (X, d_G) bir grafiksel metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n, m > n_0$ için $d_G(x_n, x_m) < \varepsilon$ ise $\{x_n\}$ e Cauchy dizisi denir. Ayrıca $\{x_n\}$ in Cauchy dizisi olması için gerek ve yeterli şart $\lim_{n\to\infty} d_G(x_n, x_m) = 0$ olduğu açıktır (Shukla ve ark., 2017).

Tanım 3.6 (X, d_G) grafiksel metrik uzayına, X deki her Cauchy dizisi X de yakınsak ise tamdır denir. G^ι, $X = V(G^\iota)$ olacak şekilde bir diğer graf olsun. Bu takdirde X deki her G^ι-terim bağlantılı Cauchy dizisi yakınsaksa (X, d_G) ye G^ι-tamdır denir (Shukla ve ark., 2017).

Tanım 3.7 (X, d_G) bir grafiksel metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve G^ι, G nin bir alt grafı olsun öyle ki $\Delta \subseteq E(G^\iota)$ dır. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa T ye X üzerinde bir (G, G^ι)-grafiksel büzülme dönüşümü denir.

GC1. T, $E(G^\iota)$ deki kenarları korur, yani $(x, y) \in E(G^\iota)$ iken $(Tx, Ty) \in E(G^\iota)$ dır.

GC2. $\lambda \in [0,1)$ olmak üzere $(x, y) \in E(G^1)$ olacak şekildeki $\forall x, y \in X$ için $d_G(Tx, Ty) \leq \lambda d_G(x, y)$ dır (Shukla ve ark., 2017).

Örnek 3.5 (X, d) bir grafiksel metrik uzay ve G_0, $V(G_0) = X$ olmak üzere bir graf olsun. Bu takdirde X üzerindeki her G_0 büzülme dönüşümü (Jachymski yaklaşımına göre) $E(G) = X \times X$ ve $G^\iota = G_0$ olmak üzere bir (G, G^ι)-grafiksel büzülmedir (Shukla ve ark., 2017).

Uyarı 3.5 $(X, \sqsubseteq)$ bir sıralı metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $\sqsubseteq^\iota$, $\sqsubseteq$ nın alt sıralama bağıntısı olsun. Bu takdirde eğer $x \sqsubseteq^\iota y$ iken $Tx \sqsubseteq^\iota Ty$ ise T ye $\sqsubseteq^\iota$ işlemine göre azalmayan denir. Kabul edelim ki T, $\sqsubseteq^\iota$ işlemine göre azalmayan bir dönüşüm ve $\lambda \in [0,1)$ olmak üzere $x \sqsubseteq^\iota y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için

$$d_{\sqsubseteq}(Tx, Ty) \leq \lambda d_{\sqsubseteq}(x, y)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu takdirde T ye $(X, d_{\sqsubseteq})$ sıralı metrik uzayında $(\sqsubseteq, \sqsubseteq^\iota)$-sıralı büzülme denir. Bir sıralı metrik uzayı üzerindeki $(\sqsubseteq, \sqsubseteq^\iota)$-sıralı büzülme dönüşümü (X, d_{G_l}) grafiksel metrik uzayındaki (G_l, G_l^ι)-grafiksel büzülmedir. Burada G_l ve G_l^ι sırasıyla $\sqsubseteq$ ve $\sqsubseteq^\iota$ tarafından indirgenen graflardır. Dikkat edilirse $(\sqsubseteq, \sqsubseteq^\iota)$-sıralı büzülmeler Ran ve Reurings (2004) tarafından ele alınan büzülme dönüşümleridir (Shukla ve ark., 2017).

Teorem 3.1 (X, d_G) bir G^ι-tam grafiksel metrik uzay ve $T: X \to X$ bir (G, G^ι)-grafiksel büzülme dönüşümü olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlansın.

A. $x_0 \in X$ vardır öyle ki bazı $l \in \mathbb{N}$ ler için $Tx_0 \in [x_0]_{G^\iota}^l$ dır;

B. X deki bir G^ι-terim bağlantılı $\{x_n\}$ T-Picard dizisi $z \in X$ noktasına yakınsak ise bu takdirde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0$ için $(x_n, z) \in E(G^\iota)$ ya da $(z, x_n) \in E(G^\iota)$ dır. Bu takdirde $x^* \in X$ vardır öyle ki $x_0 \in X$ başlangıç değeri ile $\{x_n\}$ T-Picard dizisi G^ι-terim bağlantılıdır ve hem x^* hem de Tx^* noktalarına yakınsaktır (Shukla ve ark., 2017).

İspat. Kabul edelim ki $x_0 \in X$ vardır öyle ki bazı $l \in \mathbb{N}$ ler için $Tx_0 \in [x_0]_{G^\iota}^l$ dır. $\{x_n\}$ de x_0 başlangıç değeri ile bir T-Picard dizisi olsun. Bu takdirde bir $\{y_i\}_{i=0}^l$ yolu vardır öyle ki $x_0 = y_0$, $Tx_0 = y_l$ ve $i = 1,2,\ldots,l$ için $(y_{i-1}, y_i) \in E(G^\iota)$ dır. Bu yüzden de $\{Ty_i\}_{i=0}^l$, $Ty_0 = Tx_0 = x_1$ den $Ty_1 = T^2x_0 = x_2$ ye l uzunluğunda bir yoldur ve dolayısıyla $x_2 \in [x_0]_{G^\iota}^l$ dır. Bu sürece devam edersek $\{T^n y_i\}_{i=0}^l$ için $T^n y_0 = T^n x_0 = x_n$ den $T^n y_l = T^n T x_0 = x_{n+1}$ noktasına l uzunluğunda bir yol olduğunu elde ederiz. Bu yüzden $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in [x_n]_{G^\iota}^l$ elde edilir. Böylece $\{x_n\}$ bir G^ι-terim bağlantılı dizidir. $i = 1,2,\ldots,l$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $(T^n y_{i-1}, T^n y_i) \in E(G^\iota)$ olduğundan (GC2) kullanılarak

$$d_G(T^n y_{i-1}, T^n y_i) \leq \lambda d_G(T^{n-1} y_{i-1}, T^{n-1} y_i) \leq \cdots \lambda^n d_G(y_{i-1}, y_i) \tag{3.2}$$

yazılabilir. G^ι, G nin bir alt grafı ve $\{x_n\}$, bir G^ι-terim bağlantılı bir dizi olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için (GM4) ve (3.2) den

$$\begin{aligned} d_G(x_n, x_{n+1}) &= d_G(T^n x_0, T^{n+1} x_0) = d_G(T^n y_0, T^n y_l) \\ &\leq \sum_{i=1}^{l} d_G(T^n y_{i-1}, T^n y_i) \leq \sum_{i=1}^{l} \lambda^n d_G(y_{i-1}, y_i) \\ &= \lambda^n D_l \end{aligned}$$

elde edilir ki burada $D_l = \sum_{i=1}^{l} d_G(y_{i-1}, y_i)$ dır.

Tekrar $\{x_n\}$ bir G^ι-terim bağlantılı dizi olduğundan $m > n$ olacak şekildeki $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d_G(x_n, x_m) &\leq \sum_{i=n}^{m-1} d_G(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=n}^{m-1} \lambda^i D_l \\ &= \lambda^n [\sum_{i=n}^{m-1} \lambda^{i-n}] D_l \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} D_l$$

dır. $\lambda \in [0,1)$ olduğundan $\lim_{n,m \to \infty} d_G(x_n, x_m) = 0$ elde edilir. Bu yüzden $\{x_n\}$, X de bir Cauchy dizisidir. X in G^l-tamlığından dolayı $\{x_n\}$ bir $x^* \in X$ noktasına yakınsaktır. (B) şartından dolayı da bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0$ için $(x_n, x^*) \in E(G^1)$ ya da $(x^*, x_n) \in E(G^1)$ dır. Şimdi eğer $\forall n > n_0$ için $(x_n, x^*) \in E(G^1)$ ise (GC2) yi kullanarak

$$d_G(x_{n+1}, Tx^*) = d_G(Tx_n, Tx^*) \leq \lambda d_G(x_n, x^*)$$

eşitsizliği elde edilir. $\lim_{n \to \infty} d_G(x_n, x^*) = 0$ olduğundan

$$\lim_{n \to \infty} d_G(x_{n+1}, Tx^*) = 0$$

dır. Bir benzer sonuç eğer $(x^*, x_n) \in E(G^1)$ ise de elde edilir. Bu yüzden de $\{x_n\}$ dizisi hem x^* a hem de Tx^* a yakınsar (Shukla ve ark., 2017).

Uyarı 3.6 Yukarıdaki teorem bir G^1-tam grafiksel metrik uzay üzerindeki bir (G, G^1)-grafiksel büzülme ile oluşturulan bir Picard dizisinin sadece yakınsaklığını garanti eder. Aşağıdaki örnek bu teoremi bir G^1-tam grafiksel metrik uzay üzerinde bir varlık teoremi olarak alınamayacağını gösterir (Shukla ve ark., 2017).

Örnek 3.6 $2_{\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ olmak üzere $X = 2_{\mathbb{N}} \cup \{0\}$ ve $G = G^1$, $V(G) = X$ ve $E(G) = \Delta \cup \{(x,y) \in 2_{\mathbb{N}} \times 2_{\mathbb{N}} : y \leq x\}$ ile tanımlanan graf olsun. $d_G : X \times X \to \mathbb{R}$,

$$d_G(x,y) = \begin{cases} 0 \quad , & x = y \\ xy \quad , & x, y \in 2_{\mathbb{N}}, \quad x \neq y \\ \frac{1}{2} \quad , & diğer\ durumlar \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu takdirde d_G, X üzerinde bir grafiksel metriktir ve (X, d_G) de G-tam grafiksel metrik uzaydır. (X, d) nin bir metrik uzay olmadığına dikkat ediniz.

Bir $T: X \to X$ dönüşümü,

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in 2_{\mathbb{N}} \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu takdirde T, $\lambda = 1/4$ sabiti ile bir grafiksel büzülmedir. Her $x \in 2_{\mathbb{N}}$ için $(x, Tx) \in E(G)$, yani $Tx \in [x]_{G^l}^l$ dır. Ayrıca X deki her G-terim bağlantılı ve yakınsak dizi ya sabit bir dizidir ya da $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ dizisinin monoton azalan (alışılmış sıralama bağıntısına göre) bir alt dizisidir. Bu yüzden de en az bir $z \in X$ vardır öyle ki Teorem 3.1 in (B) şartı sağlanır. Fakat T, X de bir sabit noktaya sahip değildir (Shukla ve ark., 2017).

Tanım 3.8 (X, d_G) bir grafiksel metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer aşağıdaki şart sağlanırsa (X, d_G, G^ι, T) dörtlüsüne (S)-özelliğine sahiptir denir.

(S): $\{x_n\}$, G^ι-terim bağlantılı bir T-Picard dizisi $x^* \in X$, $y^* \in T(X)$ olmak üzere x^* ve y^* gibi iki limite sahip olduğu zaman bu takdirde $x^* = y^*$ dır.

T nin tüm sabit noktalarının kümesini $Fix(T)$ ile tanımlayalım ve

$$X_T = \{x \in X: (x, Tx) \in E(G^\iota)\}$$

notasyonunu kullanalım (Shukla ve ark., 2017).

Uyarı 3.7 Eğer $E(G) = X \times X$ seçilirse bu takdirde keyfi G^ι alt grafı için (X, d_G, G^ι, T) dörtlüsünün (S)-özelliğine sahip olduğunu görmek kolaydır (Shukla ve ark., 2017).

Örnek 3.7 X, G ve d_G Örnek 3.4 deki gibi tanımlansın. G nin G^ι alt grafı $V(G^\iota)$ ve $E(G^\iota) = \Delta \cup \{(x,y) \in X \times X: x, y \in (0,1), x \leq y\}$ ile tanımlansın. $T: X \to X$,

$$Tx = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 1, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu takdirde (X, d_G, G^ι, T) dörtlüsü (S)-özelliğine sahiptir (Shukla ve ark., 2017).

Teorem 3.2 (X, d_G) bir G^ι-tam grafiksel metrik uzay ve $T: X \to X$ bir (G, G^ι)-grafiksel büzülme dönüşümü olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlansın.

A. $x_0 \in X$ vardır öyle ki bazı $l \in \mathbb{N}$ ler için $Tx_0 \in [x_0]^l_{G^\iota}$ dır;

B. X deki bir G^ι-terim bağlantılı $\{x_n\}$ T-Picard dizisi $z \in X$ noktasına yakınsak ise bu takdirde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0$ için $(x_n, z) \in E(G^\iota)$ ya da $(z, x_n) \in E(G^\iota)$ dır. Bu takdirde $x^* \in X$ vardır öyle ki $x_0 \in X$ başlangıç değeri ile $\{x_n\}$ T-Picard dizisi G^ι- terim bağlantılıdır ve hem x^* hem de Tx^* noktalarına yakınsaktır. Ek olarak, eğer (X, d_G, G^ι, T) dörtlüsü (S)-özelliğine sahipse, bu takdirde T, X de bir sabit noktaya sahiptir (Shukla ve ark., 2017).

İspat. Teorem 3.1 ile x_0 başlangıç değerli $\{x_n\}$ T-Picard dizisi hem x^* hem de Tx^* a yakınsaktır. Ayrıca $x^* \in X$ ve $Tx^* \in T(X)$ olduğundan (S)-özelliğini kullanarak $Tx^* = x^*$ elde edilir. Böylece x^*, T nin bir sabit noktasıdır (Shukla ve ark., 2017).

Örnek 3.8 X ve G, Örnek 3.4 deki gibi tanımlansın. Kabul edelim ki $G^{\iota} = G$ ve

$$d_G(x,y) = \begin{cases} 0 \quad , & x = y \\ \ln\left(\frac{1}{xy}\right), & x, y \in (0,1],\ x \neq y \\ 1 \quad , & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olsun. Bu takdirde d_G, X üzerinde bir grafiksel metriktir ve $(X,\ d_G)$ bir G-tam grafiksel metrik uzaydır. Açıkça d_G, X üzerinde bir metrik değildir. Bir $T: X \to X$ dönüşümü $\forall x \in X$ için $Tx = \sqrt{x}$ ile tanımlansın. Bu takdirde T, $\lambda = \frac{1}{2}$ sabiti ile bir grafiksel büzülmedir. Teorem 3.2 nin tüm şartlarının sağlandığına ve T nin iki sabit noktası olduğuna dikkat ediniz. Burada $Fix(T) = \{0,1\}$ dir. Diğer taraftan sıradan metrik uzaylardaki sonuçlar bu örneğe uygulanamaz. Özellikle T bir G-büzülme (sıradan metrik uzaylardaki Jachymski yaklaşımına göre) değildir (Shukla ve ark., 2017).

Teorem 3.3 (X, d_G) bir G^{ι}-tam grafiksel metrik uzay ve $T: X \to X$ bir (G, G^{ι})-grafiksel büzülme dönüşümü olsun. Kabul edelim ki Teorem 3.2 nin tüm şartları sağlansın. Bu takdirde T bir sabit noktaya sahiptir. Ek olarak, X_T zayıf bağlantılı (G^{ι} nin bir alt grafı olarak) ise bu takdirde T nin sabit noktası bir tektir (Shukla ve ark., 2017).

İspat. Teorem 3.2 den dolayı T en azından bir sabit noktaya sahiptir. Kabul edelim ki X_T zayıf bağlantılı olsun. Ayrıca x^* ve y^*, T nin farklı sabit noktaları olsun. $E(G^{\iota})$ tüm döngüleri içerdiği için $Fix(T) \subseteq X_T$ ve bu yüzden de $x^*, y^* \in X_T$ dir. X_T zayıf bağlantılı olduğundan bu takdirde $(x^*Py^*)_{G^{\iota}}$ ya da $(y^*Px^*)_{G^{\iota}}$ dır. Kabul edelim ki $(x^*Py^*)_{G^{\iota}}$ olsun. ($(y^*Px^*)_{G^{\iota}}$ olmasında da ispat benzerdir). Yani, $x_0 = x^*$, $x_l = y^*$ ve $i = 0,1,\dots,l-1$ için $(x_i,\ x_{i+1}) \in E(G^{\iota})$ olacak şekilde bir $\{x_i\}_{i=0}^{l}$ dizisi vardır. T bir (G, G^{ι})-grafiksel büzülme olduğundan (GC1) i kullanarak, $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $i = 0,1,\dots,l-1$ için $(T^n x_i,\ T^n x_{i+1}) \in E(G^{\iota})$ dır. Bu yüzden de (GC2) ile $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $i = 0,1,\dots,l-1$ için

$$d_G(T^n x_i,\ T^n x_{i+1}) \leq \lambda d_G(T^{n-1} x_i,\ T^{n-1} x_{i+1}) \leq \cdots \leq \lambda^n d_G(x_i,\ x_{i+1})$$

elde edilir. Şimdi (GM4) ile

$$d_G(T^n x^*, T^n y^*) \leq \sum_{i=0}^{l-1} d_G(T^n x_i, T^n x_{i+1}) \leq \lambda^n \sum_{i=0}^{l-1} d_G(x_i, x_{i+1})$$

eşitsizliği yazılabilir. $x^*, y^* \in Fix(T)$ olduğundan $T^n x^* = x^*$ ve $T^n y^* = y^*$ dır. Bu yüzden de $n \to \infty$ için limit alınırsa, yukarıdaki eşitsizlikten $d_G(x^*, y^*) = 0$ yani $x^* = y^*$ elde edilir. Böylece T nin sabit noktası bir tektir (Shukla ve ark., 2017).

Not: Bir sonraki teoremde, ele alınan grafiksel metrik uzay ile ilişkili G grafiğinin ağırlıklı olduğu göz önüne alınacaktır. Bir grafiğin her kenarının ağırlık olarak adlandırılan ilgili bir sayısal değeri vardır. Herhangi bir kenarın ağırlığı, o kenarın köşeleri arasındaki grafiksel mesafeye eşittir. Eğer $x \in X_T$ ise, o zaman (x, Tx) kenarına x in karşılık gelen kenarı denir.

Teorem 3.4 (X, d_G) bir grafiksel metrik uzay ve $T: X \to X$ bir (G, G^{ι})-grafiksel büzülme olsun. Kabul edelim ki $X_T \neq \emptyset$ ve X_T de bir nokta vardır öyle ki ona karşılık gelen kenar X_T de minimum ağırlıklıdır. Bu takdirde T, X de bir sabit noktaya sahiptir. Ek olarak, X_T zayıf bağlantılı ise, bu takdirde T nin sabit noktası bir tektir (Shukla ve ark., 2017).

İspat Hipotezden $X_T \neq \emptyset$ ve bir $x^* \in X_T$ vardır öyle ki x^* a karşılık gelen kenar X_T de minimum ağırlıklıdır. Yani, $\forall x \in X_T$ için

$$d_G(x^*, Tx^*) \leq d_G(x, Tx) \tag{3.3}$$

dır. Şimdi x^* ın T nin bir sabit noktası olduğunu gösterelim. $x^* \in X_T$ olduğundan $(x^*, Tx^*) \in E(G^I)$ ve T bir (G, G^{ι})-grafiksel büzülme olduğundan (GC1) ile $(Tx^*, TTx^*) \in E(G^I)$, yani $Tx^* \in X_T$ dir. $\forall x \in X$ için $\omega_c(x) = d_G(x, Tx)$, x e karşılık gelen kenarın ağırlığı ve $\omega_c(x^*) \neq \emptyset$ olsun. Bu takdirde (3.3) ile $\forall x \in X_T$ için $0 \leq \omega_c(x^*) \leq \omega_c(x)$ dır. Şimdi (GC2) ile

$$\omega_c(Tx^*) = d_G(Tx^*, TTx^*) \leq \lambda d_G(x^*, Tx^*) = \lambda\omega_c(x^*) < \omega_c(x^*),$$

elde edilir ki $Tx^* \in X_T$ olduğundan bu bir çelişkidir. Bu çelişki $\omega_c(x^*) = 0$, yani $d_G(x^*, Tx^*) = 0$ ya da $Tx^* = x^*$ olduğunu gösterir. Bu yüzden x^*, T nin bir sabit noktasıdır (Shukla ve ark., 2017).

Sonuç 3.1 (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Bu takdirde T bir tek $x^* \in X$ sabit noktasına sahiptir (Shukla ve ark., 2017).

İspat. $G = G^{\iota}$ grafını $V(G) = X$ ve $E(G) = X \times X$ ile tanımlansın. Bu takdirde Teorem 3.3 ün tüm şartları sağlanır ve bu yüzden istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2 $(X, \sqsubseteq)$ kısmi sıralı bir küme ve d, X üzerinde bir metrik öyle ki (X, d) bir tam metrik uzay olsun. Kabul edelim ki $T: X \to X$, $\sqsubseteq$ bağıntısına göre azalmayan bir dönüşüm olsun ve aşağıdaki şartlar sağlansın.

A. $\lambda \in [0,1)$ olmak üzere $x \sqsubseteq y$ olacak şekildeki $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) \text{ dır;}$$

B. en az bir $x_0 \in X$ vardır öyle ki $x_0 \sqsubseteq \mathrm{T}x_0$ dır;

C. $\{x_n\}$ bir dizi öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \sqsubseteq x_{n+1}$ ve $z \in X$ e yakınsak ise, bu takdirde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n > n_0$ $x_n \sqsubseteq z$ ya da $z \sqsubseteq x_n$ dır.

Bu takdirde T, X de bir sabit noktaya sahiptir. Üstelik $\{x\colon\ x \sqsubseteq Tx\}$ kümesi iyi sıralı ise T nin sabit noktası tektir (Shukla ve ark., 2017).

İspat. $G = X \times X$ ve $G^\iota = G_I$, yani $\sqsubseteq$ bağıntısı tarafından indirgenen graf olsun. Bu takdirde, Teorem 3.3 ün şartlarının sağlandığı açıktır ve bu yüzden istenen sonuç elde edilir.

Kirk ve arkadaşları (Kirk ve ark., 2003) döngüsel büzülme şartını kullandı ve bu şartı sağlayan dönüşümler için sabit nokta sonuçlarını elde etti.

(X, d) bir metrik uzay, A ve B, X in boş olmayan iki kapalı alt kümesi olsun. Kabul edelim ki $T\colon A \cup B \to A \cup B$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın.

A. $T(A) \subseteq B$ ve $T(B) \subseteq A$;

B. $\lambda \in [0,1)$ olmak üzere $\forall x \in A$ ve $\forall y \in B$ için $\mathrm{d}(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$ dır.

Bu takdirde T ye bir döngüsel büzülme denir. Eğer $x, y \in Fix(T)$ ise, bu takdirde (A) dan $x, y \in A \cap B$ olduğuna dikkat ediniz.

Sonuç 3.3 A ve B, bir X-tam metrik uzayının boş olmayan iki kapalı alt kümesi ve $T\colon A \cup B \to A \cup B$ bir döngüsel büzülme dönüşümü olsun. Bu takdirde T, $A \cap B$ de bir tek sabit noktaya sahiptir (Shukla ve ark., 2017).

İspat. $G = X \times X$ ve G^ι alt grafı da $V(G^\iota) = A \cup B$ ve

$E(G^\iota) = \Delta \cup \{(x, y)\colon\ (x, y) \in\ [A \times T(A)] \cup [B \times T(B)]\}$

ile tanımlansın. Bu takdirde tanımdan T, $A \cup B$ üzerinde bir (G, G^ι)-grafiksel büzülmedir. A ve B boştan farklı olduğundan bir $x_0 \in A \cup B$ vardır öyle ki $(x_0, Tx_0) \in E(G^\iota)$, yani $Tx_0 \in [x_0]^l_{G^\iota}$ dır. Eğer G^ι-terim bağlantılı bir $\{x_n\}$ T-Picard dizisi bir $z \in A \cup B$ ye yakınsıyor ise, bu takdirde $z \in A \cap B$, yani $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(x_n, z) \in E(G^\iota)$ dir. Teorem 3.2 nin diğer tüm şartları sağlanır. Bu yüzden T bir $x^* \in A \cap B$ sabit noktasına sahiptir. Üstelik $x^*, y^* \in Fix(T)$ ise, bu takdirde $x^*, y^* \in A \cap B$ yani $(x^*, y^*) \in\ E(G^\iota)$ dır. Böylece (GC2) den $x^* = y^*$ dır (Shukla ve ark., 2017).

(X, d) bir metrik uzay ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu takdirde her $x, y\ \in X$ için bir $l \in \mathbb{N}$ ve $\{x_n\}_{i=0}^{l}$ dizisi vardır öyle ki $i = 1,2, \dots, l$ için $x_0 = x$, $x_l = y$ ve $d(x_i, x_{i-1}) < \varepsilon$ ise (X, d) ye ε-zincirli denir (Shukla ve ark., 2017).

Sonuç 3.4 (X, d) tam ve ε-zincirli bir metrik uzay olsun. $T: X \rightarrow X$ dönüşümü, $\lambda \in [0,1)$ olmak üzere $d(x, y) < \varepsilon$ olacak şekildeki $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) \tag{3.4}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu takdirde T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. $G = X \times X$ ve G^ι alt grafı

$$V(G^\iota) = X, \; E(G^\iota) = \{(x, y) \in X \times X \colon d(x, y) < \varepsilon\}$$

ile tanımlansın. Eğer $(x, y) \in E(G^\iota)$ ise bu takdirde G^ι nin tanımı ve (3.4) eşitsizliği ile $(Tx, Ty) \in E(G^\iota)$ ve T bir (G, G^ι)-grafiksel büzülmedir. Ayrıca (X, d) nin ε-zincirliği, $l \in \mathbb{N}$ ve $\forall x_0 \in X$ için $Tx_0 \in [x_0]_{G^\iota}^{l}$ olmasını gerektirir. Ayrıca $\{x_n\}$ bir $z \in X$ e yakınsayan bir dizi ise bu takdirde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ seçebiliriz öyle ki

$$\forall n > n_0, \; d(x_n, z) < \varepsilon$$

dır. Teorem 3.3 ün tüm diğer şartları sağladığından T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir (Shukla ve ark., 2017).

3.2. Grafiksel b-Metrik Uzaylar ve Sabit Nokta Teoremleri

Tanım 3.9 X, G grafı ile donatılmış boş olmayan bir küme ve $s \geq 1$ olmak üzere $d_G \colon X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyon olsun.

G_bM_1 $\forall x, y \in X, d_{G_b}(x, y) \geq 0$;

G_bM_2 $d_{G_b}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

G_bM_3 $\forall x, y \in X, d_{G_b}(x, y) = d_{G_b}(y, x)$;

G_bM_4 $(xPy)_G$ olmak üzere $z \in (xPy)_G$ olacak şekildeki $\forall x, y, z \in X$ için

$$d_{G_b}(x, y) \leq s\left[d_{G_b}(x, z) + d_{G_b}(z, y)\right].$$

Bu takdirde d_{G_b} dönüşümü X de bir grafiksel b-metriktir denir ve (X, d_{G_b}, s) üçlüsüne de grafiksel b-metrik uzayı denir (Chuensupantharat ve ark., 2019).

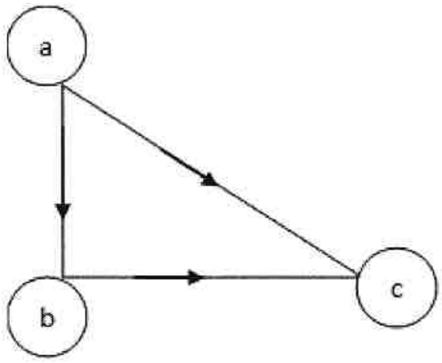
Açıklama 3.1 Grafiksel b-metrik uzay, $s = 1$ için grafiksel metrik uzay olduğundan grafiksel b-metrik kavramı, grafiksel metrik uzayın reel bir genellemesidir (Chuensupantharat ve ark., 2018).

Örnek 3.9 Her (X, d, s) b-metrik uzayı, $V(G) = X$ ve $E(G) = X \times X$ olacak şekildeki G grafını içeren bir grafik b-metrik uzayıdır. Örneğin; $X = \{a, b, c\}$ olsun. X üzerindeki bir b-metrik aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$d(a,a) = d(b,b) = d(c,c) = 0$$
$$d(a,c) = d(c,a) = 2$$
$$d(c,b) = d(b,c) = 2$$
$$d(a,b) = d(b,a) = 5$$

Bu takdirde, (X,d,s), $s = \frac{5}{4}$ sabiti ile bir b-metrik uzaydır.

$X = V(G)$ ve $E(G) = \Delta \cup \{(a,b),(a,c),(b,c)\}$ olmak üzere G grafını göz önüne alırsak, bu takdirde G grafı ile birlikte (X,d,s) nin bir grafiksel b-metrik uzay olduğu sonucuna varmak kolaydır (bkz şekil-3.1) (Chuensupantharat ve ark., 2018).



Şekil 3. 1. Graf

Örnek 3.10 $X = \{1,2,3,4\}$ ve $d_G\colon X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

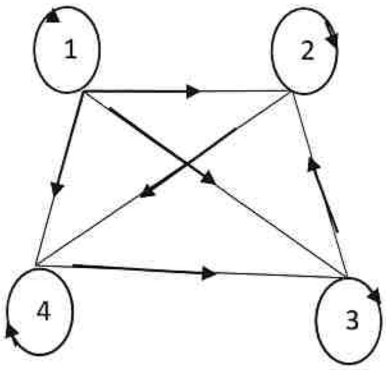
$$d_{G_b}(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 3a, & x,y \in \{1,2\}\ ve\ x \neq y\ iken \\ a, & x\ veya\ y \notin \{1,2\}\ ve\ x \neq y\ iken \end{cases}$$

ile tanımlansın. Burada $a > 0, G\big(V(G), E(G)\big)$ yi içeren bir sabittir.

$V(G) = X$ ve $E(G) = X \times X$ olmak üzere $\left(X, d_{G_b}, s\right)$, $s = \frac{3}{2} > 1$ katsayısı ile grafiksel b-metrik uzaydır. Fakat grafiksel metrik uzay değildir (Chuensupantharat ve ark., 2018). Gerçekten,

$$\mathrm{d}_{\mathrm{G_b}}(1,2) = 3\mathrm{a} > 2a = \mathrm{d}_{\mathrm{G_b}}(1,3) + \mathrm{d}_{\mathrm{G_b}}(3,2)$$

dır (bkz şekil-3.2) (Chuensupantharat ve ark., 2018).



Şekil 3. 2. Graf

Açıklama 3.2 Unutulmamalıdır ki sıralı bir b-metrik uzaydan her zaman bir grafiksel b-metrik uzay bulmak mümkündür. $(X, d_{\preccurlyeq}, s)$ sıralı bir metrik uzay olsun.

$$\mathrm{G} = (\mathrm{V(G)}, \mathrm{E(G)}), \mathrm{V(G)} = \mathrm{X} \text{ ve}$$

$$\mathrm{E(G)} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X} : \mathrm{x} \preccurlyeq \mathrm{y}\}$$

olsun. Bu takdirde (X, d_{G_b}, s), bir grafiksel b-metrik uzaydır (Chuensupantharat ve ark., 2018).

Örnek 3.11 $\mathrm{X} = \{0,1,2,3\}$ kümesi aşağıdaki kısmi sıralama bağıntısı ile donatılsın.

$$\preccurlyeq := \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (0,1), (0,3), (2,1), (1,3), (2,3)\}$$

$d_{\preccurlyeq} : X \times X \to \mathbb{R}^+$dönüşümü

$$d_{\preccurlyeq}(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ |x - y|^2, & x \neq y \end{cases}$$

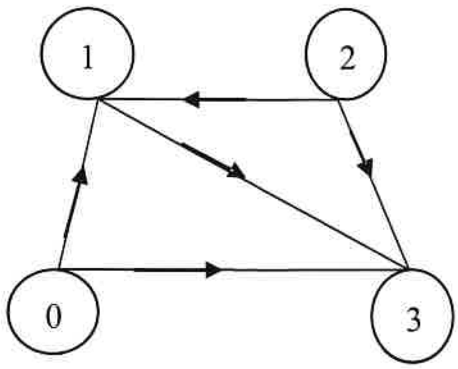
ile tanımlansın. Bu takdirde $(\mathrm{X}, d_{\preccurlyeq}, \mathrm{s})$ için $s = \frac{9}{5}$ ile bir sıralı b-metrik uzaydır.

G, $\preccurlyeq$ kısmi sıralama ile tanımlanan bir graf olur. O halde, $(\mathrm{X}, \mathrm{d}_{\mathrm{G}_{\preccurlyeq}}, \mathrm{s})$ X üzerinde bir grafiksel b-metrik uzaydır fakat grafiksel metrik uzay değildir. Gerçekten

$x = 0, y = 2,\ z = 1$ için

$$d_{\leq}(0,2) = 4 > s(1 + 1) = s[d_{\leq}(0,1) + d_{\leq}(1,2)]$$

dır (bkz şekil-3.3) (Chuensupantharat ve ark., 2018).



Şekil 3. 3 Graf

Örnek 3.12 $V(G) = \{v_1,\ v_2, v_3,\ v_4, v_5, v_6, v_7\}$ ve

$E(G) = \Delta \cup \{e_i = (v_i,\ v_{i+1}),\ i \in \{1,2,3,4,6\}\} \cup \{e_5 = (v_1,\ v_2)\}$

olmak üzere

$G = (V(G), E(G))$ yönlendirilmemiş bağlantısız bir graf olsun.

$G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ ve $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$ iki bağlantılı bileşendir öyle ki

$V(G) = V(G_1)\ \cup V(G_2)$ ve $E(G) = \Delta \cup E(G_1) \cup E(G_2)$ olmak üzere

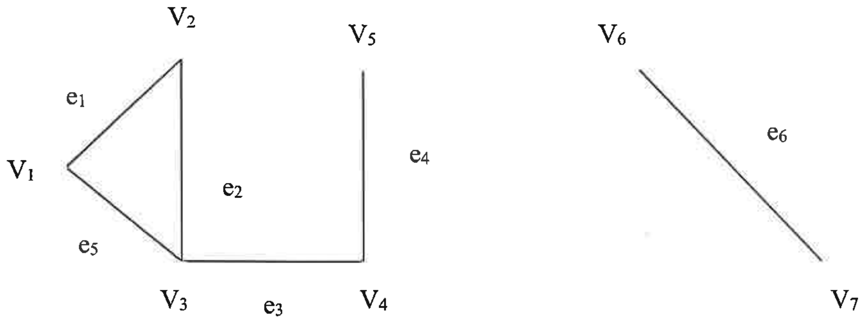
$(V(G_1), E(G_1)) = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\})$ ve

$(V(G_2), E(G_2)) = (\{v_6, v_7\}, \{e_6\})$

dır (bkz. şekil-3.4). G_1ve G_2 gibi iki bağlantılı bileşen içeren G grafını gösterir. $d_G: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$d_{G_b}(x,y) = \begin{cases} lxy, & x, y \in V(G_i)(i = 1,2 \text{ için}) \\ 1, & x \in V(G_i), y \in V(G_j)\ \ i,j \in \{1,2\}\ i \neq j \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.



G_1 *bileşeni* $\qquad$ G_2 *bileşeni*

Şekil 3. 4. Graf

l_{xy}, x den y ye en kısa yol ve $l_{xx} = 0$ dır.

$$d_{G_b}(v_i, v_i) = 0; \quad i = \{1,2,3,4,5,6,7\};$$

$$d_{G_b}(v_1, v_2) = 1; \; d_{G_b}(v_1, v_3) = 1; \; d_{G_b}(v_1, v_4) = 2; \; d_{G_b}(v_1, v_5) = 3;$$

$$d_{G_b}(v_1, v_6) = d_{G_b}(v_1, v_7) = 1; \; d_{G_b}(v_2, v_3) = 1; \; d_{G_b}(v_2, v_4) = 2;$$

$$d_{G_b}(v_2, v_5) = 3; \; d_{G_b}(v_2, v_6) = d_{G_b}(v_2, v_7) = 1; \; d_{G_b}(v_3, v_4) = 1;$$

$$d_{G_b}(v_3, v_5) = 2; \; d_{G_b}(v_3, v_6) = d_{G_b}(v_3, v_7) = 1;$$

$$d_{G_b}(v_5, v_6) = d_{G_b}(v_5, v_7) = d_{G_b}(v_6, v_7) = 1$$

dir. Bu takdirde (X, d_{G_b}), $s = 1$ için bir grafiksel b-metrik uzaydır. Ayrıca (X, d_{G_b}) nin

$$d_{G_b}(v_1, v_5) = 3 > (1 + 1) = d_{G_b}(v_1, v_6) + d_{G_b}(v_6, v_5)$$

den dolayı bir metrik uzay değildir (Chuensupantharat ve ark., 2018).

Tanım 3.10 (X, d_{G_b}) bir grafiksel b-metrik uzay olsun. $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere X üzerinde x merkezli ve ε yarıçaplı bir açık yuvar

$$B_{d_{G_b}}(x, \varepsilon) = \{y \in \mathrm{X}\colon \; (xPy)_{G_b}, \; d_{G_b}(x, y) < \varepsilon\}$$

dır.

$\Delta \subseteq E(G), \forall x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $B_{d_{G_b}}(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ dır (Chuensupantharat ve ark., 2018).

Önerme 3.1. (X, d_{G_b}) bir grafiksel b-metrik uzay, $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Eğer $y \in B_{d_{G_b}}(x, \varepsilon)$ ise bu takdirde bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $B_{d_{G_b}}(y, \delta) \subseteq B_{d_{G_b}}(x, \varepsilon)$ dır.

İspat. $y \in B_{d_{G_b}}\left(x, \frac{\varepsilon}{s}\right)$ ve $y = x$ ise $\delta = \frac{\varepsilon}{s}$ seçebiliriz. Eğer $x \neq y$ ise

$d_{G_b}(x, y) \neq 0$ olacak şekilde $\delta = \frac{\varepsilon}{s} - d_{G_b}(x, y) > 0$ sayısını alalım.

$z \in B_{d_{G_b}}(y, \delta)$ olsun.

Bağıntının tanımından $(xPy)_{G_b}$ ve $(yPz)_{G_b}$ ise $(xPz)_{G_b}$ dır. Üçgen eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} d_{G_b}(z, x) &\leq s\left[d_{G_b}(z, y) + d_{G_b}(y, x)\right] \\ &< s\left[\delta + d_{G_b}(y, x)\right] \\ &= s\left[\frac{\varepsilon}{s} - d_{G_b}(y, x) + d_{G_b}(y, x)\right] = \varepsilon \end{aligned}$$

dır, yani $d_{G_b}(z, x) < \varepsilon \Rightarrow z \in B(x, \varepsilon)$ dır. Bundan dolayı $B_{dGb}(y, \delta) \subseteq B_{dGb}(x, \varepsilon)$ dır. Böylece X deki her açık yuvarın açık küme olduğu sonucuna varılır (Chuensupantharat ve ark., 2018).

Tanım 3.11 (X, d_{G_b}) bir grafiksel b-metrik uzay olsun. O zaman X de bir $\{x_n\}$ dizisi,

i. yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $n \to \infty$ iken $d_{G_b}(x_n, x) \to 0$ olacak şekilde $x \in X$ vardır;

ii. Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow$ $n, m \to \infty$ iken $d_{G_b}(x_n, x_m) \to 0$ dır (Chuensupantharat ve ark., 2018).

Tanım 3.12 (X, d_{G_b}) bir grafiksel b-metrik uzay olsun ve $f: X \to X$ fonksiyonu verilsin. G^*, $\Delta \subseteq E(G^*)$ olacak şekilde G nin bir alt grafı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa f ye grafiksel b-metrik uzayı üzerinde grafiksel (G, G^*)-büzülme dönüşümüdür denir.

$\mathbf{G_bC1}$. f, G^* ın kenarlarını korur, yani her bir $(x, y) \in E(G^*)$ olduğunda $(fx, fy) \in E(G^*)$ dir.

$\mathbf{G_bC2}$. $(x, y) \in E(G^*)$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için $\alpha \in [0,1)$ olduğunda

$$d_{G_b}(fx, fy) \leq \frac{\alpha}{s^2} d_{G_b}(x, y)$$

dır (Chuensupantharat ve ark., 2018).

G^* grafı her kenarına onun köşeleri arasındaki grafiksel uzaklığı karşılık getiren bir ağırlıklı graf olarak göz önüne alınabilir. Bir $\{x_n\}$ dizisine her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = fx_{n-1}$ oluyorsa ilk terimi $x_0 \in X$ olan f-Picard dizisi denir. Daha fazla sonuç için $\Delta \subseteq E(G^*)$ olacak şekilde G^*ın G nin bir alt grafı olduğu kullanılır.

X deki bir $\{x_n\}$ bağıntılı Picard dizisi bir $z \in X$ noktasına yakınsıyor ise bu takdirde $\forall n > n_0$, $(x_n, z) \in E(G^*)$ ya da $(z, x_n) \in E(G^*)$ sağlıyorsa G^* grafına P^*-özelliğini sağlıyor denir. Yani,

$$x_{n+1} = fx_n = f^{n+1}x_0$$

$$(x_n, x_{n+1}) \in E(G^*) \text{ ve } x_n \to z \Rightarrow$$

$$(x_n, z) \in E(G^*) \text{ ya da } (z, x_n) \in E(G^*)$$

dır (Chuensupantharat ve ark., 2018).

Teorem 3.5 (X, d_{G_b}) bir G^*-tam grafiksel b-metrik uzay ve $f: X \to X$ bir grafiksel (G, G^*)-büzülme dönüşümü olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlansın.

i. $x_0 \in X$, $l \in \mathbb{N}$ için $fx_0 \in [x_0]_{G^*}^l$ dır;

ii. G^* grafı P*-özelliğini sağlar.

Bu takdirde $x_0 \in X$ başlangıç değerine sahip $\{x_n\}$ f-Picard dizisi $x^* \in X$ olmak üzere hem x^* hem de fx^* a yakınsak ve G^*-bağlantılıdır (Chuensupantharat ve ark., 2018).

İspat. Bir $l \in \mathbb{N}, fx_0 \in [x_0]_{G^*}^l$ olacak şekilde $x_0 \in X$ noktasından başlayarak ve x_0 başlangıç değeri ile $\{x_n\}$ in bir f-Picard dizisi olduğunu kullanarak $x_0 = y_0$, $fx_0 = y_l$

$$(y_{i-1}, y_i) \in E(G^*), \quad i = 1,2, \dots, l, \ \{y_i\}_{i=0}^l$$

yolu vardır.

($[x_0]_{G^*}^l = \{y \in X: x$ den y ye l uzunluğunda yönlendirilmiş bir yol vardır.)

f, G^* daki kenarları koruduğu için,

$$(fy_{i-1}, fy_i) \in E(G^*), \quad (i = 1,2, \dots, l)$$

dır. Böylece $\{fy_i\}_{i=0}^l$, $fy_0 = fx_0 = x_1$ den $fy_1 = f^2x_0 = x_2$ ye l uzunluğunda bir yol vardır. Bu da $x_2 \in \{x_1\}_{G^*}^l$ olduğunu verir. $x_1 \to^l x_2 \Rightarrow x_2 \in [x_1]_{G^*}^l$ dır. Bu süreci devam ettirirsek, $\{f^n y_i\}_{i=0}^l$, $f^n y_0 = f^n x_0 = x_n$ den $f^n y_1 = f^n f x_0 = x_{n+1}$ e l uzunluğunda bir yoldur ve bu yüzden, $x_{n+1} \in [x_n]_{G^*}^l$ ($\forall n \in \mathbb{N}$ için) dir. Dolayısıyla $\{x_n\}$, G^*-bağlantılı bir dizidir.

$$i = 1,2, \dots, l \text{ ve } n \in \mathbb{N} \text{ için } (f^n y_{i-1}, f^n y_i) \in E(G^*)$$

olduğundan f nin (G, G^*) grafik büzülme dönüşümü olduğunu kullanarak,

$$d_{G_b}(f^n y_{i-1}, f^n y_i) \leq \frac{\alpha}{s^2} d_{G_b}(f^{n-1} y_{i-1}, f^{n-1} y_i) \tag{3.5}$$

yazılabilir. (3.5) in tekrarlanmasıyla,

$$\begin{aligned} d_{G_b}(f^n y_{i-1}, f^n y_i) &\leq \frac{\alpha}{s^2} d_{G_b}(f^{n-1} y_{i-1}, f^{n-1} y_i) \\ &\leq \frac{\alpha}{s^2}\frac{\alpha}{s^2} d_{G_b}(f^{n-2} y_{i-1}, f^{n-2} y_i) \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\alpha^n}{s^{2n}} d_{G_b}(y_{i-1}, y_i)$$

elde edilir.

G^*, G nin bir alt grafı ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$ G^* bağlantılı bir dizi olduğu için $(G_b M_4)$ ve (3.5) uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
d_{G_b}(x_n, x_{n+1}) &= d_{G_b}(f^n x_0, f^{n+1} x_0) = d_{G_b}(f^n y_0, f^n y_l) \\
&\leq s d_{G_b}(f^n y_0, f^n y_1) + s d_{G_b}(f^n y_1, f^n y_l) \\
&\leq s d_{G_b}(f^n y_0, f^n y_1) + s^2 d_{G_b}(f^n y_1, f^n y_2) + s^2 d_{G_b}(f^n y_2, f^n y_l) \\
&\leq s d_{G_b}(f^n y_0, f^n y_1) + s^2 d_{G_b}(f^n y_1, f^n y_2) + \cdots + s^l d_{G_b}(f^n y_{l-1}, f^n y_l) \\
&\leq s \frac{\alpha^n}{s^{2n}} d_{G_b}(y_0, y_1) + s^2 \frac{\alpha^n}{s^{2n}} d_{G_b}(y_1, y_2) + \cdots + s^l \frac{\alpha^n}{s^{2n}} d_{G_b}(y_{l-1}, y_l) \\
&\leq \frac{\alpha^n}{s^{2n-1}} \left[d_{G_b}(y_0, y_1) + s d_{G_b}(y_1, y_2) + \cdots + s^{l-1} d_{G_b}(y_{l-1}, y_l) \right] \\
&\leq \frac{\alpha^n}{s^{2n-1}} \textstyle\sum_{i=1}^{l} s^{i-1} d_{G_b}(y_{i-1}, y_i)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow d_{G_b}(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\alpha^n}{s^{2n-1}} D_{l_b}$$

elde edilir. $m > n$ olacak şekildeki $\forall n, m \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$ nin G^* terimli bağlantılı dizi olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
d_{G_b}(x_n, x_m) &\leq s d_{G_b}(x_n, x_{n+1}) + s d_{G_b}(x_{n+1}, x_m) \\
&\leq s d_{G_b}(x_n, x_{n+1}) + s\left[s d_{G_b}(x_{n+1}, x_{n+2}) + s d_{G_b}(x_{n+2}, x_m) \right] \\
&\leq s d_{G_b}(x_n, x_{n+1}) + s^2 d_{G_b}(x_{n+1}, x_{n+2}) \\
&\quad + s^2 \left[s d_{G_b}(x_{n+2}, x_{n+3}) s d_{G_b}(x_{n+3}, x_m) \right] \\
&\leq s d_{G_b}(x_n, x_{n+1}) + s^2 d_{G_b}(x_{n+1}, x_{n+2}) \\
&\quad + s^3 d_{G_b}(x_{n+2}, x_{n+3}) \ldots + s^{m-n} d_{G_b}(x_{m-1}, x_m) \\
&\leq s \left(\frac{\alpha^n}{s^{2n-1}} D_{l_b} \right) + s^2 \left(\frac{\alpha^{n+1}}{s^{2(n+1)-1}} D_{l_b} \right) + \cdots + s^{m-n} \left(\frac{\alpha^{m-1}}{s^{2(m-1)-1}} D_{l_b} \right) \\
&\leq \frac{\alpha^n}{s^{2n-2}} \left(1 + \frac{\alpha}{s} + \frac{\alpha^2}{s^2} + \cdots + \frac{\alpha^{m-n-1}}{s^{m-n-1}} \right) D_{l_b} \\
&\leq \left(\frac{\alpha^n}{s^{2n-2}} \right) \left(\frac{s}{s-\alpha} \right) D_{l_b}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $m, n \to \infty$ iken

$$d_{G_b}(x_n, x_m) \leq \left(\frac{\alpha^n}{s^{2n-2}} \right) \left(\frac{s}{s-\alpha} \right) D_{l_b} \to 0$$

dır. Yani, $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

X, G^* tam olduğundan $x_n \to x$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. G^*, P^*-özelliğine sahip olduğundan, $\forall n > n_0$, $(x_n, x^*) \in E(G^*)$ veya $(x^*, x_n) \in E(G^*)$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}_{\mathrm{G_b}}(x_n, x^*) = 0$$

dır.

$(x_n, x^*) \in E(G^*)$ olduğundan (3.1) eşitsizliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} d_{G_b}(x_{n+1}, fx^*) &= d_{G_b}(fx_n, fx^*) \\ &\leq \frac{\alpha}{s^2} d_{G_b}(x_n, x^*) \to 0 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} d_{Gb}(x_{n+1}, fx^*) = 0$$

dır. $\{x_n\}$ dizisinin hem x^* hem de fx^* a yakınsadığı sonucuna varılır (Chuensupantharat ve ark., 2018).

Tanım 3.13 (X, d_{G_b}) bir grafiksel b-metrik uzay ve $f: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer aşağıdaki şart sağlanırsa (X, d_{G_b}, G^*, f) dörtlüsüne (P)-özelliğine sahiptir denir.

(P): $\{x_n\}$, G^*-bağlantılı bir f-Picard dizisi $x^* \epsilon X$, $y^* \in f(X)$ olmak üzere x^* ve y^* gibi iki limite sahip olduğu zaman bu takdirde $x^* = y^*$ dır.

Teorem 3.6 (X, d_{G_b}) bir G^*-tam grafiksel b-metrik uzay ve $f: X \to X$ bir grafiksel (G, G^*)-büzülme dönüşümü olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlansın.

i. $x_0 \in X$, $l \in \mathbb{N}$ için $fx_0 \in [x_0]_{G^*}^l$ dır;

ii. G^* grafı P^*-özelliğini sağlar.

Bu takdirde $x_0 \in X$ başlangıç değerine sahip $\{x_n\}$ f-Picard dizisi $x^* \in X$ olmak üzere hem x^* hem de fx^* a yakınsak ve G^*-bağlantılıdır. Ek olarak, eğer (X, d_{G_b}, G^*, f) dörtlüsü (P)-özelliğine sahipse, bu takdirde f, X de bir sabit noktaya sahiptir (Chuensupantharat ve ark., 2018).

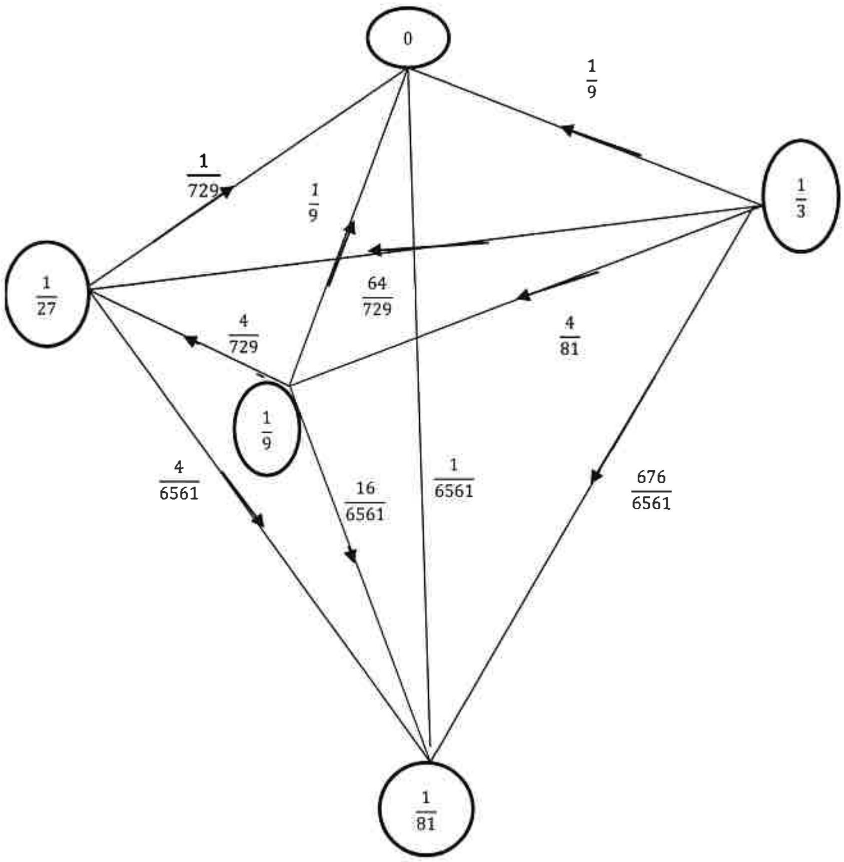
İspat. Teorem 3.5 ile x_0 başlangıç değerli $\{x_n\}$ f-Picard dizisi hem x^* hem de fx^* a yakınsaktır. Ayrıca $x^* \in X$ ve $fx^* \in f(X)$ olduğundan (P)-özelliğini kullanarak $fx^* = x^*$ elde edilir. Böylece x^*, f nin bir sabit noktasıdır (Chuensupantharat ve ark., 2018).

Örnek 3.13 $X = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{3^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ve $G^* = G$ grafı $\mathrm{V(G) = X}$ ve $E(G) = \Delta \cup \{(x, y) \in X \times X\colon\ y \leq x\}$ ile tanımlansın. $d_G: X \times X \to \mathbb{R}$,

$$d_{G_b}(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ |x - y|^2, & x \neq y \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu takdirde d_{G_b}, $s = 2$ ile X üzerinde bir grafiksel b-metriktir ve (X, d_{G_b}) de G-tam grafiksel b-metrik uzaydır.

Bir $f: X \to X$ dönüşümü her $x \in X$ için $fx = \frac{x}{3}$ ile verilsin. Bu takdirde T, $\alpha = \frac{1}{2}$ için X üzerinde bir grafiksel (G,G*)-büzülme dönüşümüdür. Ayrıca bir $x_0 = \frac{1}{3}$ vardır öyle ki $f\frac{1}{3} \in \left[\frac{1}{3}\right]_{G^l}^{l}$ dır. Böylece Teorem 3.6 nın tüm şartları sağlandığından f, X de bir sabit noktaya sahiptir (bkz şekil-3.5) (Chuensupantharat ve ark., 2018).



Şekil 3. 5 Graf

$n = 5$ için ağırlıklı grafik burada kenar ağırlığı $(x, y) = d_{G_b}(x, y)$ dır.

3.3. Grafiksel Genişletilmiş b-Metrik Uzaylar ve Sabit Nokta Teoremleri

Tanım 3.14 X boş olmayan bir küme $\theta: X \times X \to [1, \infty)$ verilsin, $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa d ye X üzerinde genişletilmiş b-metrik (kısaca θ-

metrik) ve (X, d_θ) ikilisine genişletilmiş b-metrik uzay (kısaca θ-metrik uzay) denir (Kamran ve ark., 2017).,

i. $d_\theta(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

ii. her $x, y \in X$ için $d_\theta(x,y) = d_\theta(y,x)$;

iii. her $x, y, z \in X$ için $d_\theta(x,z) \leq \theta(x,z)[d_\theta(x,y) + d_\theta(y,z)]$.

Not: $s \geq 1$ için eğer $\theta(x,y) = s$ ise b-metrik uzayını elde ederiz (Kamran ve ark., 2017).

Kamuran ve arkadaşları (Kamran ve ark., 2017) θ-metrik uzayını tanımladı. Bu kısımda, grafiksel metrik uzay ile θ-metrik uzay kavramlarını kullanarak grafiksel genişletilmiş b-metrik uzayını tanımlayacak ve bu uzay üzerinde bazı sabit nokta teoremlerini inceleyeceğiz.

Tanım 3.15 X, G grafı ile donatılmış boş olmayan bir küme ve $\varrho: X \times X \to [1, \infty)$ olsun. $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa d ye X üzerinde grafiksel genişletilmiş b-metrik (kısaca, grafiksel ϱ-metrik) ve (X, d_ϱ) ikilisine grafiksel genişletilmiş b-metrik uzay (kısaca, grafiksel ϱ-metrik uzay) denir.

ϱ_1) $\forall x, y \in X$, $d_\varrho(x,y) \geq 0$;

ϱ_2) $d_\varrho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

ϱ_3) $\forall\, x, y \in X$ için $d_\varrho(x,y) = d_\varrho(y,x)$;

ϱ_4) $(xPy)_G$ olmak üzere $z \in (xPy)_G$ olacak şekildeki $\forall x, y, z \in X$ için

$$d_\varrho(x,z) \leq \varrho(x,z)[d_\varrho(x,y) + d_\varrho(y,z)].$$

Not: $s \geq 1$ için eğer $\varrho(x,y) = s$ ise grafiksel b-metrik uzayını elde ederiz.

Örnek 3.14 $X = \{2,1,-1\}$ kümesini düşünelim, $X \times X$ üzerinde tanımlı ϱ fonksiyonu $\varrho(x,y) = |x| + |y|$ olsun. $V(G) = X$, $E(G) = \Delta \cup \{(1,-1), (-1,2), (2,1)\}$ ve d_ϱ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$d_\varrho(2,2) = d_\varrho(1,1) = d_\varrho(-1,-1) = 0,$$

$$d_\varrho(-1,2) = 8 = d_\varrho(2,-1) \text{ ve}$$

$$d_\varrho(1,-1) = d_\varrho(-1,1) = d_\varrho(2,1) = d_\varrho(1,2) = 1.$$

O zaman d_ϱ nın Tanım 3.15 deki ilk üç şartı sağladığı açıktır. (ϱ_4) şartının sağlandığını göstermeliyiz. Bu durumda, $(1,-1), (-1,2) \in E(G)$ olduğundan,

$$d_\varrho(1,2) = 1 \leq 3.[1 + 8] = \varrho(1,2)[d_\varrho(1,-1) + d_\varrho(-1,2)]$$

dır. Yine $(-1,2),(2,1) \in E(G)$ olduğundan,

$$d_\varrho(-1,1) = 1 \leq 2.[8+1] = \varrho(-1,1)[d_\varrho(-1,2) + d_\varrho(2,1)]$$

dır. Bu nedenle $(xPy)_G$ olmak üzere $z \in (xPy)_G$ olacak şekildeki $\forall x,y,z \in X$ için

$$d_\varrho(x,z) \leq \varrho(x,z)[d_\varrho(x,y) + d_\varrho(y,z)]$$

sağlandığından d_ϱ bir grafiksel ϱ-metrik uzaydır. Ancak,

$$d_\varrho(-1,2) = 8 > 3.[1+1] = \varrho(-1,2)[d_\varrho(-1,1) + d_\varrho(1,2)],$$

olması nedeniyle d_ϱ genişletilmiş b-metrik değildir.

Tanım 3.16 (X, d_ϱ) grafiksel ϱ-metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun.

i. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $N = N(\varepsilon) \in N$ sayısı var öyle ki her $n \geq N$ için $d_\varrho(x_n, x) < \varepsilon$ ise $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ e yakınsaktır denir ve $\lim_{n\to\infty} d_\varrho(x_n, x) = 0$ ile gösterilir.

ii. Eğer her $\varepsilon > 0$ için her $m, n \geq N$ olduğunda $d_\varrho(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon) \in N$ sayısı varsa $\{x_n\}$ e X de bir Cauchy dizisidir denir.

Tanım 3.17 (X, d_ϱ) grafiksel ϱ-metrik uzay olsun. Eğer X deki her Cauchy dizisi X deki bir noktaya yakınsak ise X uzayına tamdır denir.

Tanım 3.18 (X, d_ϱ) bir grafiksel ϱ-metrik uzay ve $T: X \to X$ olsun. G', $\Delta \subseteq E(G')$ olacak şekilde G nin bir alt grafı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa T ye X üzerinde grafiksel (G, G')-büzülme dönüşümüdür denir.

G_ϱC1. T, G' nin kenarlarını korur, yani her bir $(x,y) \in E(G')$ olduğunda $(Tx, Ty) \in E(G')$ dir.

G_ϱC2. $(x,y) \in E(G')$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için

$$d_\varrho(Tx, Ty) \leq k d_\varrho(x,y)$$

eşitsizliği sağlanır öyle ki $k \in [0,1)$ ve $\lim_{n,m\to\infty} \varrho(x_n, x_m) < \frac{1}{k}$ dır.

Teorem 3.7 (X, d_ϱ) bir G'-tam grafiksel ϱ-metrik uzay öyle ki d_ϱ sürekli bir fonksiyon ve $T: X \to X$ bir (G, G')-grafiksel büzülme dönüşümü olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlansın.

A. $x_0 \in X$ vardır öyle ki bazı $l \in \mathbb{N}$ ler için $Tx_0 \in [x_0]_{G'}^{l}$ dır;

B. X deki bir G'-terim bağlantılı $\{x_n\}$ T-Picard dizisi $z \in X$ noktasına yakınsak ise bu takdirde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0$ için $(x_n, z) \in E(G')$ ya da $(z, x_n) \in E(G')$ dır.

Bu takdirde $x^* \in X$ vardır öyle ki $x_0 \in X$ başlangıç değeri ile $\{x_n\}$ T-Picard dizisi G'-terim bağlantılıdır ve hem x^* hem de Tx^* noktalarına yakınsaktır.

İspat. Kabul edelim ki $x_0 \in X$ vardır öyle ki bazı $l \in \mathbb{N}$ ler için $Tx_0 \in [x_0]_{G'}^l$ dır. $\{x_n\}$ de x_0 başlangıç değeri ile bir T-Picard dizisi olsun. Bu takdirde bir $\{y_i\}_{i=0}^l$ yolu vardır öyle ki $x_0 = y_0$, $Tx_0 = y_l$ ve $i = 1,2,\dots,l$ için $(y_{i-1}, y_i) \in E(G')$ dır. Bu yüzden de $\{Ty_i\}_{i=0}^l$, $Ty_0 = Tx_0 = x_1$ den $Ty_1 = T^2x_0 = x_2$ ye l uzunluğunda bir yoldur ve dolayısıyla $x_2 \in [x_0]_{G'}^l$ dır. Bu sürece devam edersek $\{T^n y_i\}_{i=0}^l$ için $T^n y_0 = T^n x_0 = x_n$ den $T^n y_l = T^n T x_0 = x_{n+1}$ noktasına l uzunluğunda bir yol olduğunu elde ederiz. Bu yüzden $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in [x_n]_{G'}^l$ elde edilir. Böylece $\{x_n\}$ bir G'-terim bağlantılı dizidir. $i = 1,2,\dots,l$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $(T^n y_{i-1}, T^n y_i) \in E(G')$ olduğundan (G_ϱC2) kullanılarak,

$$d_\varrho(T^n y_{i-1}, T^n y_i) \leq k d_\varrho(T^{n-1} y_{i-1}, T^{n-1} y_i) \leq \cdots \leq k^n d_\varrho(y_{i-1}, y_i) \tag{3.6}$$

yazılabilir. G', G nin bir alt grafı ve $\{x_n\}$ bir G'-terim bağlantılı dizi olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için (ϱ_4) ve (3.6) dan

$$\begin{aligned} d_\varrho(x_n, x_{n+1}) &= d_\varrho(T^n x_0, T^{n+1} x_0) = d_\varrho(T^n y_0, T^n y_l) \\ &\leq \sum_{i=1}^{l} d_\varrho(T^n y_{i-1}, T^n y_i) \leq \sum_{i=1}^{l} k^n d_\varrho(y_{i-1}, y_i) \\ &= k^n H_l \end{aligned}$$

elde edilir ki burada $H_l = \sum_{i=1}^{l} d_\varrho(y_{i-1}, y_i)$ dır.

Tekrar $\{x_n\}$ bir G'-terim bağlantılı dizi olduğundan $m > n$ olacak şekildeki $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} & d_\varrho(x_n, x_m) \\ & \leq \varrho(x_n, x_m) k^n H_l + \varrho(x_n, x_m)\varrho(x_{n+1}, x_m) k^{n+1} H_l + \cdots \\ & \quad + \varrho(x_n, x_m)\varrho(x_{n+1}, x_m)\varrho(x_{n+2}, x_m) \dots \varrho(x_{m-2}, x_m)\varrho(x_{m-1}, x_m) k^{m-1} H_l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq H_l[\varrho(x_1, x_m)\varrho(x_2, x_m) \dots \varrho(x_{n-1}, x_m)\varrho(x_n, x_m) k^n \\ &+ \varrho(x_1, x_m)\varrho(x_2, x_m) \dots \varrho(x_n, x_m)\varrho(x_{n+1}, x_m) k^{n+1} \\ &+ \varrho(x_1, x_m)\varrho(x_2, x_m) \dots \varrho(x_n, x_m)\varrho(x_{n+1}, x_m) \dots \varrho(x_{m-2}, x_m)\varrho(x_{m-1}, x_m) k^{m-1}] \end{aligned}$$

$$d_\varrho(x_{n+1}, Tx^*) = d_\varrho(Tx_n, Tx^*) \leq kd_\varrho(x_n, x^*)$$

eşitsizliği elde edilir. $\lim_{n\to\infty} d_\varrho(x_n, x^*) = 0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} d_\varrho(x_{n+1}, Tx^*) = 0$$

dır. Bir benzer sonuç eğer $(x^*, x_n) \in E(G')$ olması durumunda da elde edilir. Bu yüzden $\{x_n\}$ dizisi hem x^* a hem de Tx^* a yakınsar.

Tanım 3.19 (X, d_ϱ) bir grafiksel ϱ-metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer aşağıdaki şart sağlanırsa (X, d_ϱ, G', T) dörtlüsüne (H)-özelliğine sahiptir denir.

(H): $\{x_n\}$, G'-terim bağlantılı bir T-Picard dizisi $x^* \epsilon X$, $y^* \in T(X)$ olmak üzere x^* ve y^* gibi iki limite sahip ise, bu takdirde $x^* = y^*$ dır.

Teorem 3.8 (X, d_ϱ) bir G'-tam grafiksel ϱ-metrik uzay ve $T: X \to X$ bir (G, G') grafiksel büzülme dönüşümü olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlansın.

A. $x_0 \in X$ vardır öyle ki bazı $l \in \mathbb{N}$ ler için $Tx_0 \in [x_0]_{G'}^{l}$ dır;

B. X deki bir G'-terim bağlantılı $\{x_n\}$ T-Picard dizisi $z \in X$ noktasına yakınsak ise bu takdirde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0$ için $(x_n, z) \in E(G')$ ya da $(z, x_n) \in E(G')$ dır.

Bu takdirde $x^* \in X$ vardır öyle ki $x_0 \in X$ başlangıç değeri ile $\{x_n\}$ T-Picard dizisi G'-terim bağlantılıdır ve hem x^* hem de Tx^* noktalarına yakınsaktır. Ek olarak, eğer (X, d_ϱ, G', T) dörtlüsü (H)-özelliğine sahipse, bu takdirde T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. Teorem 3.7 ile x_0 başlangıç değerli $\{x_n\}$ T-Picard dizisi hem x^* hem de Tx^* a yakınsaktır. Ayrıca $x^* \in X$ ve $Tx^* \in T(X)$ olduğundan (H)-özelliğini kullanarak $Tx^* = x^*$ elde edilir. Böylece x^*, T nin bir sabit noktasıdır.

4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

4.1. Sonuçlar

Bu çalışmada grafiksel metrik uzay ve grafiksel b-metrik uzayların bazı topolojik özellikleri ve bu uzaylardaki bazı sabit nokta teoremleri incelenmiştir. Ayrıca, grafiksel genişletilmiş b-metrik uzay kavramı tanıtılmış olup bu uzay üzerinde tanımlanan dönüşümlerin sabit noktasının varlığı incelenmiştir.

4.2. Öneriler

Bundan sonraki çalışmalarda grafiksel metrik uzay kavramı bazı sabit nokta teoremleriyle genelleştirilip yeni sonuçlara ulaşılabilir. Ayrıca grafiksel genişletilmiş b-metrik uzay kavramı da genelleştirilerek daha farklı sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Badii, M. 2008. Existence of periodic solutions for the thermistor problem with the Joule–Thomson effect, *Annalı Dell'Universita'Di Ferrara*, 54 (1), 1-10.

Balcı, M., 1997, Matematik analiz: cilt 1, *Balcı yayınları*, Ankara.

Bayraktar, M., 2006, Fonksiyonel Analiz, *Gazi kitabevi*, Ankara.

Beg, I., Butt, A.R., Radojević, S. 2010. The contraction principle for set valued mappings on a metric space with a graph, *Computers & Mathematics with Applications*, 60 (5), 1214-1219.

Border, K.C., 1985, Fixed point theorems with applications to economics and game theory, *Cambridge university press*.

Brouwer, L., 1910, On the structure of perfect sets of points, *Knaw, Proceedings*, 785-794.

Bülbül, A., 2011, Genel topoloji, Hacettepe Üniversitesi Yayınları, Ankara.

Cataldo, A., Lee, E., Liu, X., Matsikoudis, E., Zheng, H., 2006, A constructive fixed-point theorem and the feedback semantics of timed systems, *2006 8th International Workshop on Discrete Event Systems*, 27-32.

Cauchy, A.L.B., 1884, Œuvres complètes d'Augustin Cauchy, *Gauthier-Villars*.

Chuensupantharat, N., Kumam, P., Chauhan, V., Singh, D., Menon, R. 2018. Graphic contraction mappings via graphical b-metric spaces with applications, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 1-17.

Chuensupantharat, N., Kumam, P., Chauhan, V., Singh, D., Menon, R. 2019. Graphic contraction mappings via graphical b-metric spaces with applications, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 42 (6), 3149-3165.

Chuensupantharat, N., Kumam, P., Dhompongsa, S. 2015. A graphical proof of the Brouwer fixed point theorem, *Thai Journal of Mathematics*, 15 (3), 607-610.

Czerwik, S. 1993. Contraction mappings in $ b $-metric spaces, *Acta mathematica et informatica universitatis ostraviensis*, 1 (1), 5-11.

Edelstein, M. 1961. An extension of Banach's contraction principle, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 12 (1), 7-10.

Goebel, K., Kirk, W.A., 1990, Topics in metric fixed point theory, *Cambridge University Press*.

Helvacı, A., 2014, Metrik uzayda F-büzülme dönüşümleri için sabit nokta sonuçları Fixed point results for F-contractions on metric space.

Işık, H., Imdad, M., Turkoglu, D., Hussain, N. 2017. Generalized Meir-Keeler type ψ-contractive mappings and applications to common solution of integral equations, *International Journal of Analysis and Applications*, 13 (2), 185-197.

Işık, H., Türkoğlu, D. 2014. Coupled fixed point theorems for new contractive mixed monotone mappings and applications to integral equations, *Filomat*, 28 (6), 1253-1264.

Jachymski, J. 2008. The contraction principle for mappings on a metric space with a graph, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136 (4), 1359-1373.

Kamran, T., Samreen, M., UL Ain, Q. 2017. A generalization of b-metric space and some fixed point theorems, *Mathematics*, 5 (2), 19.

Kannan, R. 1968. Some results on fixed points, *Bull. Cal. Math. Soc.*, 60, 71-76.

Kaundal, K. 2017. Applications of graph theory in everyday life and technology, *Imperial Journal of Interdisciplinary Research*, 3 (3), 892-894.

Kirk, W., Srinivasan, P., Veeramani, P. 2003. Fixed points for mappings satisfying cyclical contractive conditions, *Fixed point theory*, 4 (1), 79-89.

Koçak, M. 2015. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel formülleri anlamlandırılabilme ve matematiksel formüller ile ilgili öğretim stratejisi bilgilerinin incelenmesi, *Yayımlanmamış yüksek lisans tezi, Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum*.

Liouville, J. 1836. Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujétis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 253-265.

Lipschitz, R., 1877, Lehrbuch der analysis, *M. Cohen & Sohn (F. Cohen)*.

Nieto, J.J., Rodríguez-López, R. 2005. Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations, *Order*, 22 (3), 223-239.

Picard, E. 1890. Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 6, 145-210.

Ran, A.C., Reurings, M.C. 2004. A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations, *proceedings of the American Mathematical Society*, 1435-1443.

Samreen, M., Kamran, T., Postolache, M. 2018. Extended b-metric space, extended b-comparison function and nonlinear contractions, *Univ. Politeh. Buchar. Sci. Bull. Ser. A*, 4, 21-28.

Shukla, S., Radenović, S., Vetro, C. 2017. Graphical metric space: a generalized setting in fixed point theory, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 111 (3), 641-655.

Yıldız, C., 2005, Genel topoloji, *Gazi Kitabevi*, Ankara.

Yüksel, Ş., 2014, Genel topoloji, *Eğitim Yayınevi*, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Meryem IŞIK
Uyruğu	:	T.C
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Sorgun-Yozgat 23/06/1985
Telefon	:	05435140697
Faks	:	
e-mail	:	meryemisik0224@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Sorgun Süper Lisesi**	**2003**
Üniversite	:	**Gaziosmanpaşa Üniversitesi**	**2007**
Yüksek Lisans	:	**Muş Alparslan Üniversitesi**	**2020**
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2011	**MEB**	**Öğretmen**

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER: İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR