T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ

DUAL UZAYDA YÜZEYLER VE ÜZERİNDEKİ BAZI ÖZEL EĞRİLER

Buşra AKTAŞ

ARALIK - 2020

Matematik Anabilim Dalında Buşra AKTAŞ tarafından hazırlanan DUAL UZAYDA YÜZEYLER VE ÜZERİNDEKİ BAZI ÖZEL EĞRİLER adlı Doktora Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Ali OLGUN

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Doktora Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN

Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	:	Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU	_______________
Üye(Danışman)	:	Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN	_______________
Üye	:	Prof. Dr. Nejmi CENGİZ	_______________
Üye	:	Prof. Dr. Mehmet YILDIRIM	_______________
Üye	:	Doç. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU	_______________

25.12.2020

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Sevgili annem İTİBAR AKTAŞ anısına…

ÖZET

DUAL UZAYDA YÜZEYLER VE ÜZERİNDEKİ BAZI ÖZEL EĞRİLER

AKTAŞ, Buşra
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi
Danışman: Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN
Aralık 2020, 166 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu kısımda, çalışmanın konusu ile ilgili literatürde yer alan bilgiler verilmiştir. Ayrıca, bu bölümde çalışmanın amacı, önemi ve kaynak özetleri belirtilmiştir.

İkinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, $\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı olan sözlük sıralama bağıntısı aracılığıyla dual sayılar üzerinde bir sıralama bağıntısı ifade edilmiştir. Dual uzayda iç çarpım, norm ve metrik kavramları bu bağıntıdan faydalanılarak yeniden ele alınmıştır. Daha sonra, dual uzayda metrik kavramının vasıtasıyla eğriler ve yüzeyler teorisinin temelini oluşturan topoloji kavramı verilmiştir.

Dördüncü bölümün ilk kısmında, dual uzayda yüzeyler teorisinde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler inşa edilmiştir. Ayrıca, Öklid uzayında büyük öneme sahip olan invers (ters) fonksiyon teoreminin dual uzaydaki ifadesine ve ispatına yer verilmiştir. Daha sonrasında, dual uzayda yüzey kavramı detaylı bir şekilde açıklanmış ve bu kavramla ilgili bazı teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Bu kısmın sonunda ise konunun daha iyi anlaşılabilmesi için örnekler verilmiştir. Bu bölümün ikinci kısmında, dual yüzey üzerinde dual analitik fonksiyonlar incelenmiştir. Bu bölümün üçüncü kısmında, bir dual yüzeyin tanjant uzayı kavramı tanımlanıp bu kavramla ilgili bir teorem ifade ve ispat edilmiştir. Bölümün son kısmında ise dual yüzey üzerinde özel eğrilerin tanımlanması için gerekli olan dual yüzeyin şekil operatörü kavramı ifade edilmiş ve bu kavram ile ilgili birtakım örneklere yer verilmiştir.

Beşinci bölümde, dördüncü bölümde oluşturulan kavramlardan yararlanılarak dual asli (asal) eğri, dual asimptotik eğri ve dual geodezik eğri kavramları detaylı bir biçimde incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dual Uzay, Dual Analitik Fonksiyonlar, Dual Yüzey, $\mathbf{D}-$modül Eğrisi, Dual Şekil Operatörü

ABSTRACT

SURFACES AND SOME SPECIAL CURVES ON THESE SURFACES IN DUAL SPACE

AKTAŞ, Buşra
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematic, PhD. Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN
December 2020, 166 pages

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction. In this section, the information in the literature regarding the subject of the study is given. In addition, the purpose, importance and resource summaries of the study are specified in this chapter.

In the second chapter, basic definitions and theorems that will be used in the following chapters are given.

In the third chapter, an order relation on dual numbers is expressed by means of dictionary order relation defined on $\mathbb{R}^2$. The concepts of inner product, norm and metric in dual space are reconsidered by making use of this relation. Then, the concept of topology constituting the basic structure of theory of curves and surfaces is given via the expression of metric in dual space.

In the first part of the fourth chapter, basic definitions and theorems to be used in the theory of surfaces in dual space are constructed. Furthermore, the expression and proof of the inverse function theorem which is of great importance in Euclidean space are made in dual space. Afterwards, the notion of surface in dual space is explained in detail and some theorems related to this notion are expressed and proved. At the end of the part, examples are given for a better understanding of this subject. In the second part of the chapter, the dual analytic functions on dual surface are investigated. In the third part of the chapter, the tangent space of dual surface is defined and a theorem related to this concept is expressed and proved. At the end of the chapter, the concept of shape operator required to define special curves on the dual surface is expressed and some examples related to this concept are given.

In the fifth chapter, the notions of dual line of curvatures, dual asymptotic curve and dual geodesic curve are examined in detail by using the notions expressed in the fourth chapter.

Key Words: Dual Space, Dual Analytic Functions, Dual Surface, $\mathbf{D}-$module curve, Dual Shape Operator.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca ilminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösteren ve destek olan, yanında çalışmaktan onur duyduğum ve ayrıca tez çalışmam sırasında tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu sabır ve hoşgörüden dolayı değerli hocam Sayın Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN'a, tez çalışmalarımda değerli bilgilerini benimle paylaşan, kıymetli zamanlarını ayırıp sabır ve hoşgörü ile her daim yardımcı olan saygıdeğer tez izleme kurulu üyesi hocalarım Sayın Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU (Gazi Üniversitesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalı) ve Sayın Doç. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU (Kırıkkale Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'na, tez çalışmalarım boyunca yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli arkadaşlarım Arş.Gör. Olgun DURMAZ ve eşi Sevgi DURMAZ'a, bugünlere gelmemde en büyük emeğe sahip olan, maddi ve manevi olarak hayatım boyunca beni motive eden, bu güzel zamanlarımı görmesini çok arzu ettiğim ancak doktora eğitimim sırasında vefat eden, bu tezi kendisine ithafen yazdığım sevgili annem İtibar AKTAŞ'a ve aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na doktora öğrenimim boyunca 2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında desteklerinden dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$\overline{\mathbb{R}}$	Genelleştirilmiş reel sayılar
x_i	$i-$inci koordinat fonksiyonu
$\bar{x}_i$	$i-$inci dual koordinat fonksiyonu
$g \circ f$	f ile g fonksiyonlarının bileşkesi
∇	Gradiyent
$\mathbf{V}$	Vektör uzayı
$\mathscr{F}$	Cisim
$\mathbf{D}$	Dual uzay
$\mathbf{D}^n$	$n-$boyutlu dual uzay
$\langle , \rangle$	Öklid uzayında iç çarpım
$\langle , \rangle_{\mathbf{D}}$	Dual uzayda iç çarpım
$\Vert . \Vert$	Öklid uzayında norm
$\Vert . \Vert_{\mathbf{D}}$	Dual uzayda norm
d	Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu
$\overline{d}$	Dual uzaklık fonksiyonu
τ	Topoloji
$P(\mathbf{X})$	$\mathbf{X}$ in kuvvet cümlesi
$\overline{\tau}$	Dual topoloji
$B(a,r)$	a merkezli, r yarıçaplı açık yuvar
$\overline{B}(\overline{a},\overline{r})$	$\overline{a}$ merkezli, $\overline{r}$ yarıçaplı dual açık yuvar
$T_p\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^n$ uzayının p noktasındaki tanjant uzayı
M	$\mathbb{R}^3$ uzayında yüzey
$\overline{M}$	$\mathbf{D}^3$ uzayında (dual) yüzey
T_pM	M yüzeyinin p noktasındaki tanjant uzayı
$T_{\overline{p}}\overline{M}$	$\overline{M}$ dual yüzeyinin $\overline{p}$ dual noktasındaki tanjant uzayı

$\chi(M)$	M yüzeyi üzerindeki bütün tanjant vektör alanlarının cümlesi
$\chi(\overline{M})$	$\overline{M}$ dual yüzeyi üzerindeki bütün dual tanjant vektör alanlarının cümlesi
S	$\mathbb{R}^3$ uzayında yüzeyin şekil operatörü
$\overline{S}$	$\mathbf{D}^3$ uzayında (dual) yüzeyin dual şekil operatörü
α, β	Eğri
$\overline{\alpha}, \overline{\beta}$	$\mathbf{D}-$modül eğrisi
$C(\mathbf{D}^n, \mathbf{D}^m)$	Dual analitik fonksiyonların cümlesi
$J(F, p)$	F fonksiyonunun p noktasındaki jakobiyen matrisi
D	Kovaryant türev
$\overline{D}$	Dual Kovaryant türev
k	Yüzeyin normal eğriliği
$\overline{k}$	Dual Yüzeyin normal eğriliği
k_1, k_2	Yüzeyin asli eğrilikleri
$\overline{k}_1, \overline{k}_2$	Dual yüzeyin asli eğrilikleri

1 . GİRİŞ

Diferensiyel geometri, geometrik problemleri çözmek için geometrik cisimleri diferensiyel ve integral hesabından faydalanarak inceleyen matematiğin bir alt dalıdır. Diferensiyel geometri ile ilgili ilk çalışmalar C. Friedrich Gauss tarafından yapılmıştır. Gauss, eğriler ve yüzeylerin modern diferensiyel geometrisi alanındaki temel yapıların oluşumuna önemli ölçüde katkı sağlamış ve bu yapılar Öklid dışı geometride de benzer şekilde kullanılmaktadır. Diferensiyel geometride yüzeyler fizik, mühendislik, tıp ve bilgisayar grafikleri gibi bir çok modern disiplinde kullanılmaktadır. Bu yüzeylerin en önemlilerinden biri G. Monge tarafından tanımlanan regle yüzeylerdir. Yüzeyler teorisinde, regle yüzeyler, bir eğri boyunca bir doğrunun sürekli hareketinin bir sonucu olarak meydana gelir. Yani, yüzeyin her noktasında yüzey üzerinde yatan bir doğru var ise bu yüzey regle yüzey olarak adlandırılır. Bütün yüzeyler arasında regle yüzeyler geometrik modellemede önemli ve temel yüzey türüdür. Yüzeylerin bu çeşitleri bilgisayar destekli geometrik dizayn, matematiksel fizik, hareket geometrisi ve mekanik ürünlerin model tabanlı imalatı gibi bir çok alanda kullanılır. Bu nedenle, regle yüzeyler matematik, özellikle matematiksel fizik ve mühendislikte önemli bir yer tutar [1].

19. yüzyılda, W.K. Clifford [2] dual sayıları tanımladı ve bu sayıları geometrik araştırmaları için bir araç olarak kullandı. Bu kavram, 1895'te A.P. Katelnikov [3] tarafından mekaniğe uygulandı ve vida sistemleri, düzlemsel joint (eklem) modellemesi, uzaysal mekanizmaların yer değiştirme analizi için tekrarlı yöntemler ve uzaysal mekanizmaların eylemsizlik kuvvet analizi gibi bir çok uygulama alanına sahiptir. Eduard Study doğruların geometrisi ve kinematik üzerindeki çalışmalarında dual sayıları ve dual vektörleri kullanmıştır. Doğrular geometrisi, $\mathbb{R}^3$ 3-boyutlu Öklid uzayında doğruları ve bu doğruların hareketlerini inceler. Bu doğrular bir doğrular uzayı oluşturur. Bu uzaydaki elemanları incelemek için projektif, dual ve vektörel gösterimler kullanılır. J. Plücker

doğruyu sıralı altılı bir koordinat olarak göstermiştir. Bu koordinatın ilk üç bileşeni doğrunun doğrultman vektörünün koordinatlarını, son üç bileşeni ise bu doğrultman vektörüne ait moment vektörünün $\mathbb{R}^3$ 3-boyutlu Öklid uzayındaki koordinatlarını göstermektedir. J. Plücker'in öğrencisi olan E. Study doğrunun bu ifadesini dual sayılardan faydalanarak dual vektör uzayına taşıdı. E. Study, $\mathbb{R}^3$ uzayındaki yönlendirilmiş doğrular ile $\mathbf{D}^3$ uzayında birim dual küre üzerindeki her bir nokta arasında birebir bir eşleme olduğunu göstermiştir [4]. Bu eşleme Study dönüşümü olarak adlandırılmaktadır. 1977 yılında H. H. Hacısalihoğlu bir çemberin Study dönüşümünü tanımlamış ve onun özelliklerini incelemiştir [5]. 1993 yılında Cheng dual sayıları kullanarak C^H programlama dilini tanıtmıştır ([6] ve [7]). Bu sayı sistemi alan teorisinde de önemli bir yere sahiptir. Alan teorisinde dual sayıların en ilginç kullanımına Wald'un bir dizi makalesi gösterilebilir [8]. Ayrıca, Gromov bir dizi makalesinde dual sayıları klasik grupların analitik devamlılıkları ve kısaltmalarında ve daha sonra kuantum grup formalizminde kullanmıştır ([9] ve [10]). Dual sayılar, katı cisimlerin bilgisayar modellemesi, mekanik dizayn, kinematik, insan vücudunun modellemesi ve dinamik gibi modern kullanım alanlarına sahiptir. Örneğin, dual sayılar kullanılarak uzaysal mekanik hareketlerin açıklanması mümkündür [11]. Sonuç olarak, dual sayılar matematik ve fizikte, özellikle mekanik ve teorik kinematikte, bir çok kullanım alanlarına sahip önemli bir sayı sistemidir [12].

1.1. Tezin Amacı

Bu çalışmada, dual eşitsizlik sisteminden faydalanılarak dual uzayda bir baz ve bu bazdan bir topoloji elde edilmiştir. Daha sonra, bu topolojinin belli bölgeleri (dual analitik bölgeleri) kullanılarak dual yüzeyin tanımı verilmiştir. Diferensiyel geometrinin temel kavramları olan bir yüzeyin tanjant uzayı, yüzey üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve şekil operatörü kavramları dual uzayda detaylı bir biçimde incelenmiştir. Tezin son kısmında, dual yüzey üzerinde tanımlanan temel kavramlar kullanılarak, bu yüzey üzerindeki bazı özel eğriler olan dual asli (asal) eğri, dual asimptotik eğri ve dual geodezik eğriler araştırılmıştır.

Bu tezin temel amacı dual uzayda daha önce değinilmemiş olan diferensiyel geometrinin temel yapılarını tanım, teorem ve örnekler yardımıyla inşa etmek ve detaylı bir biçimde incelemektir.

1.2. Kaynak Özetleri

Bu tezin temelini oluşturan dual yapılar $[1, 24, 25, 26, 27, 28, 29]$ nolu kaynaklar kullanılarak hazırlanmıştır. Tezin üçüncü bölümündeki dual uzayda iç çarpım, norm, uzaklık fonksiyonu ve baz kavramları $[19, 20, 21, 22, 29, 30]$ nolu kaynaklardan faydalanılarak ele alınmıştır. Dördüncü bölümde ise $[18, 27, 28]$ nolu kaynaklar kullanılarak dual analitik fonksiyonların ters fonksiyonları incelenmiştir. Daha sonra, $[13, 14, 15, 16, 23]$ nolu kaynaklar göz önüne alınarak tezin ana teması olan dual uzayda yüzey kavramı detaylı bir şekilde verilmiştir. Son bölümü oluşturan dual yüzey üzerindeki bazı özel eğriler $[13, 16, 19, 20, 23]$ nolu kaynaklardan esinlenilerek ve örneklerle desteklenerek incelenmiştir.

2 . TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Genel Matematik, Topoloji ve Diferensiyel Geometri ile İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $-\infty < x$ ve $x < +\infty$ olmak üzere, $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ cümlesine genelleştirilmiş reel sayılar cümlesi denir ve

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$$

biçiminde gösterilir.

Tanım 2.1.2. $1 \leq i \leq n$ ve $p = (p_1, p_2, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x_i(p) = p_i$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona $\mathbb{R}^n$ üzerinde $i-$inci koordinat fonksiyonu denir [13].

Tanım 2.1.3. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $p \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\lim_{s \longrightarrow 0} \frac{1}{s} \left[f\left(p_1, ..., p_{j-1}, p_j + s, p_{j+1}, ..., p_n\right) - f\left(p_1, ..., p_{j-1}, p_j, p_{j+1}, ..., p_n\right) \right]$$

limiti varsa bu limite, f fonksiyonunun $j-$inci değişkene göre kısmi türevi denir ve $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(p)$ veya $f_{x_j}(p)$ biçiminde gösterilir [13].

Tanım 2.1.4. $U \subseteq_{\text{açık}} \mathbb{R}^n$ bir alt cümle, $p \in U$ ve $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun p noktasında $k-$ıncı basamağa kadar kısmi türevleri var ve bu kısmi türevler sürekli ise f fonksiyonuna p noktasında C^k-sınıfındandır denir. f fonksiyonu U cümlesinin her noktasında $k-$ıncı basamağa kadar sürekli kısmi türevlere sahip ise f fonksiyonuna U üzerinde C^k-sınıfındandır denir.

U üzerinde C^k-sınıfından olan bütün fonksiyonların cümlesi $C^k(U,\mathbb{R})$ ile gösterilir ve

$$C^k(U,\mathbb{R}) = \left\{ f \mid f : U \longrightarrow \mathbb{R}\ C^k - \text{sınıfından} \right\}$$

dır. Ayrıca, f fonksiyonu her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ise f fonksiyonuna $C^\infty-$sınıfındandır denir ([14] ve [15]).

Tanım 2.1.5. U ve V sırası ile, $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^m$ uzaylarının birer açık alt cümleleri ve

$$\begin{aligned} F \quad &: \quad U \longrightarrow V \\ x \quad &\longrightarrow \quad F(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) \end{aligned}$$

fonksiyonu için bütün $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları C^k-sınıfından ise F fonksiyonuna C^k-sınıfındandır denir. Eğer bütün f_i fonksiyonları $C^\infty-$sınıfından ise F fonksiyonuna $C^\infty-$sınıfındandır denir ([14] ve [15]).

Tanım 2.1.6. f, $\mathbb{R}^n$ üzerinde reel değerli $C^\infty-$sınıfından bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun gradiyenti

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

şeklinde tanımlanır ([14] ve [15]).

Teorem 2.1.7. Bir $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve onun $f_{x_i}, f_{x_j}, f_{x_i x_j}$ ve $f_{x_j x_i}$ kısmi türevleri $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ noktasını içeren bir açık bölgenin her yerinde tanımlı ve bunların tümü a noktasında sürekli ise, bu durumda

$$f_{x_i x_j}(a) = f_{x_j x_i}(a)$$

dır. Burada, $1 \leq i, j \leq n$ dir [17].

Tanım 2.1.8. U ile V, $\mathbb{R}^n$ uzayının iki açık alt cümlesi olsun. Bir $F : U \longrightarrow V$ fonksiyonu için

$i)$ F fonksiyonu C^k-sınıfından,

$ii)$ F^{-1} var ve $F^{-1} : V \longrightarrow U$ fonksiyonu C^k-sınıfından,

şartları sağlanıyorsa F fonksiyonuna C^k-sınıfından diffeomorfizmdir denir ve U ile V ye birbirine C^k-sınıfından diffeomorftur denir.

Eğer $F, C^{\infty}-$sınıfından diffeomorfizm ise U ile V ye birbirine diffeomorftur denir ([13], [14] ve [15]).

Teorem 2.1.9. $\big($İnvers Fonksiyon Teoremi$\big)$ $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $C^{\infty}-$sınıfından bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonunun bir $p \in \mathbb{R}^n$ noktasında $rankJ(f,p) = n$ yani, $\det[J(f,p)] \neq 0$ ise $\mathbb{R}^n$ uzayında p noktasını kapsayan en az bir U açığı vardır öyle ki $f\,|_U : U \longrightarrow f(U)$ fonksiyonu bir diffeomorfizmdir ([13] ve [18]).

Tanım 2.1.10. $\mathbf{V}$ bir $\mathscr{F}$ cismi üzerinde tanımlı vektör uzayı ve

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathscr{F} \\ (x,y) & \longrightarrow & f(x,y) \end{array}$$

bir fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki üç aksiyom sağlanırsa f fonksiyonuna $\mathbf{V}$ vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım fonksiyonu veya kısaca bir iç çarpım adı verilir.
$i)$ (Pozitif tanımlılık özelliği) $\forall x \in \mathbf{V}$ için $f(x,x) \geq 0$ dır. Ayrıca,

$$f(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

dır.
$ii)$ (Simetri özelliği) $\forall x,y \in \mathbf{V}$ için $f(x,y) = f(y,x)$ dir.
$iii)$ (Bilineerlik özelliği) $\forall x,y,z \in \mathbf{V}$ ve $\forall a,b \in \mathscr{F}$ için

$$f(ax+by,z) = af(x,z) + bf(y,z)$$

$$f(x,ay+bz) = af(x,y) + bf(x,z)$$

dir.
Örneğin, $\mathbf{V} = \mathbb{R}^n$ olsun. $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ olmak üzere,

$$\begin{array}{ccc} \langle , \rangle & : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longrightarrow & \langle , \rangle (x,y) = \langle x,y \rangle = x_1y_1 + ... + x_ny_n \end{array}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma Öklid iç çarpımı denir ([19] ve [20]).

Tanım 2.1.11. $\mathscr{F}$ cismi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere; $\mathbf{V}$, $\mathscr{F}$ cismi üzerinde tanımlı vektör uzayı ve

$$\begin{array}{rcl} \|.\| & : & \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \|.\|(x) = \|x\| \end{array}$$

bir fonksiyon olsun.

$i)$ $\forall x \in \mathbf{V}$ için $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$

$ii)$ $\forall \lambda \in \mathscr{F}$ ve $\forall x \in \mathbf{V}$ için $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|,$

$iii)$ $\forall x, y \in \mathbf{V}$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özellikleri sağlanıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna $\mathbf{V}$ üzerinde bir norm denir. $(\mathbf{V}, \|.\|)$ sıralı ikilisine $\mathscr{F}$ cisminin $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmasına göre normlu reel vektör uzayı veya normlu kompleks vektör uzayı denir ([19] ve [20]).

Tanım 2.1.12. $\mathbf{X}$ boştan farklı bir cümle ve

$$\begin{array}{rcl} d & : & \mathbf{X} \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & d(x, y) \end{array}$$

bir fonksiyon olsun.

$i)$ $\forall x, y \in \mathbf{X}$ için $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y,$

$ii)$ $\forall x, y \in \mathbf{X}$ için $d(x, y) = d(y, x),$

$iii)$ $\forall x, y, z \in \mathbf{X}$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

şartları sağlanıyorsa d fonksiyonuna $\mathbf{X}$ üzerinde metrik ve $(\mathbf{X}, d)$ sıralı ikilisine metrik uzay denir ([21] ve [22]).

Tanım 2.1.13. $(\mathbf{X}, d)$ bir metrik uzay, $a \in \mathbf{X}$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.

$$B(a, r) = \{x \in \mathbf{X} \mid d(x, a) < r\}$$

cümlesine a merkezli r yarıçaplı açık yuvar denir.

$$S(a, r) = \{x \in \mathbf{X} \mid d(x, a) \leq r\}$$

cümlesine a merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar denir ([21] ve [22]).

Tanım 2.1.14. $\mathbf{X} \neq \varnothing$ ve $\beta \subseteq P(\mathbf{X})$ olsun. Eğer aşağıdaki iki aksiyom sağlanırsa β sınıfına $\mathbf{X}$ cümlesi için bir topolojik baz denir.

i) $\bigcup\limits_{B\in\beta} B = \mathbf{X}$,

ii) $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$ olacak şekildeki $\forall B_1, B_2 \in \beta$ için $B_1 \cap B_2 = \bigcup\limits_{B\in\mathscr{A}\subseteq\beta} B$ dir. Burada $\mathscr{A}$, β sınıfının bazı elemanlarından oluşan bir sınıftır ([21] ve [22]).

Tanım 2.1.15. $\mathbf{X} \neq \varnothing$ ve $\tau \subseteq P(\mathbf{X})$ olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa τ sınıfına $\mathbf{X}$ üzerinde bir topoloji, $(\mathbf{X}, \tau)$ ikilisine de topolojik uzay denir. τ sınıfının elemanlarına da $\mathbf{X}$ cümlesinin birer açık alt cümlesi denir.

i) $\mathbf{X}, \varnothing \in \tau$,

ii) $\forall U, V \in \tau$ ise $U \cap V \in \tau$,

iii) I herhangi bir indis cümlesi ve $i \in I$ için $U_i \in \tau$ ise

$$\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$$

dur ([21] ve [22]).

Tanım 2.1.16. $(\mathbf{X}, \tau)$ bir topolojik uzay, $x \in \mathbf{X}$ ve $A \subseteq \mathbf{X}$ olsun. $x \in U \subseteq A$ olacak şekilde bir U açık cümlesi varsa x noktasına A cümlesinin bir iç noktası denir. A cümlesinin her bir elemanı iç nokta ise A cümlesine $(\mathbf{X}, \tau)$ topolojik uzayında açık cümle denir ([21] ve [22]).

Tanım 2.1.17. $p \in \mathbb{R}^n$ bir sabit nokta,

$$T_p\mathbb{R}^n = \{p\} \times \mathbb{R}^n = \{(p, \overrightarrow{v}) \mid \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n\}$$

cümlesini ele alalım. $T_p\mathbb{R}^n$ üzerinde iç ve dış işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{array}{rcl} + & : & T_p\mathbb{R}^n \times T_p\mathbb{R}^n \longrightarrow T_p\mathbb{R}^n \\ ((p, \overrightarrow{v}), (p, \overrightarrow{w})) & \longrightarrow & (p, \overrightarrow{v}) + (p, \overrightarrow{w}) = (p, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \cdot & : & \mathbb{R} \times T_p\mathbb{R}^n \longrightarrow T_p\mathbb{R}^n \\ (\lambda, (p, \overrightarrow{v})) & \longrightarrow & \lambda \cdot (p, \overrightarrow{v}) = (p, \lambda . \overrightarrow{v}). \end{array}$$

Bu işlemlerle birlikte $(T_p\mathbb{R}^n, +, (\mathbb{R}, +, .), \cdot)$ altılısı bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına $\mathbb{R}^n$ uzayının p noktasındaki tanjant uzayı denir. $(p, \overrightarrow{v}) \in T_p\mathbb{R}^n$ elemanına $\mathbb{R}^n$ uzayının p noktasındaki bir tanjant vektörü denir ve $\overrightarrow{v}_p$ ile gösterilir ([13] ve [14]).

Tanım 2.1.18. $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ ve $\overrightarrow{v}_p \in T_p\mathbb{R}^n$ olsun. f fonksiyonunun $\overrightarrow{v}_p$ tanjant vektörü yönündeki türevi $\overrightarrow{v}_p[f]$ ile gösterilir ve

$$\overrightarrow{v}_p[f] = \frac{d}{dt} f(p + t\overrightarrow{v})\mid_{t=0}$$

olarak tanımlanır ([13] ve [14]).

Tanım 2.1.19. $\mathbb{R}^n$ uzayının her noktasına bu noktada bir tanjant vektör karşılık getiren fonksiyona $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir vektör alanı denir. $\overrightarrow{X}$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir vektör alanı ise

$$\begin{array}{ccc} X & : & \mathbb{R}^n \longrightarrow T\mathbb{R}^n \\ p & \longrightarrow & X(p) = \overrightarrow{X}_p \in T_p\mathbb{R}^n \end{array}$$

dir. Burada, $\bigcup\limits_{p \in \mathbb{R}^n} T_p\mathbb{R}^n = T\mathbb{R}^n$ dir ([13] ve [14]).

Tanım 2.1.20. $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $F(p) = (f_1(p), f_2(p), ..., f_m(p))$ fonksiyonu $C^\infty-$sınıfından olsun.

$$\begin{array}{ccc} F_{*p} & : & T_p\mathbb{R}^n \longrightarrow T_{F(p)}\mathbb{R}^m \\ \overrightarrow{v}_p & \longrightarrow & F_{*p}(\overrightarrow{v}_p) = (\overrightarrow{v}_p[f_1], \overrightarrow{v}_p[f_2], ..., \overrightarrow{v}_p[f_m]) \end{array}$$

dönüşümüne F fonksiyonunun p noktasındaki türev dönüşümü denir([13] ve [14]).

Tanım 2.1.21. I, $\mathbb{R}$ uzayının bir açık aralığı olsun. Eğer bir

$$\begin{array}{ccc} \alpha & : & I \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t & \longrightarrow & \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t)) \end{array}$$

fonksiyonu $C^\infty-$sınıfından ve $\forall t \in I$ için $\exists \alpha_i'(t) \neq 0$ ise bu α fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$ uzayında bir eğri (regüler eğri) adı verilir ([13] ve [14]).

Tanım 2.1.22.

$$\begin{aligned} \alpha &: I \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longrightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t)) \end{aligned}$$

bir eğri olsun. $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), ..., \alpha_n'(t))$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir ve

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(\alpha_1'(t))^2 + (\alpha_2'(t))^2 + ... + (\alpha_n'(t))^2}$$

sayısına da α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hızı denir. Her noktasında hızı 1-birim olan eğriye birim hızlı eğri denir ([13] ve [14]).

Tanım 2.1.23. p ve $\overrightarrow{v}$ sırasıyla $\mathbb{R}^n$ uzayında birer nokta ve vektör; α, p noktasından geçen ve doğrultmanı $\overrightarrow{v}$ olan bir doğru

$$\begin{aligned} \alpha &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longrightarrow \alpha(t) = p + t\overrightarrow{v} \end{aligned}$$

ve $\overrightarrow{W}$, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir vektör alanı olsun. $\overrightarrow{W}$ vektör alanı α doğrusuna kısıtlanırsa $\overrightarrow{W}(\alpha(t)) = \overrightarrow{W}(p + t\overrightarrow{v})$ elde edilir. Bu durumda,

$$\frac{d\overrightarrow{W}(p + t\overrightarrow{v})}{dt}\Big|_{t=0}$$

tanjant vektörüne $\overrightarrow{W}$ vektör alanının $\overrightarrow{v}_p$ tanjant vektörüne göre kovaryant türevi denir ve $D_{\overrightarrow{v}_p}\overrightarrow{W}$ ile gösterilir ([13], [14] ve [15]).

Tanım 2.1.24. M, $\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt cümlesi olsun. $\forall p \in M$ noktasının $(\mathbb{R}^3, \tau)$ standart topolojik uzayındaki bir komşuluğu V olsun. p noktasının (M, τ_M) alt uzayındaki komşuluğu $M \cap V$ olmak üzere $M \cap V$ ile $(\mathbb{R}^2, \tau)$ uzayındaki bir U açığı arasında bir F diffeomorfizmi varsa yani, bir

$$F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \cap M \subseteq M \subset \mathbb{R}^3$$

diffeomorfizmi mevcut ise M cümlesine $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey adı verilir. (F, U) ikilisine M yüzeyi için bir parametrizasyon veya M yüzeyinin bir lokal koordinat sistemi denir ([13], [14] ve [16]).

Tanım 2.1.25. M, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey ve (F,U) bu yüzey için bir parametrizasyon olsun. $(u_0,v_0)\in U$ bir sabit nokta olmak üzere, $F(u,v_0)$ eğrisine M yüzeyi üzerinde $v=v_0$ ile elde edilen $u-$parametre eğrisi, $F(u_0,v)$ eğrisine de M yüzeyi üzerinde $u=u_0$ ile elde edilen $v-$parametre eğrisi denir ([13] ve [14]).

Tanım 2.1.26. U, $\mathbb{R}^n$ uzayında açık bir cümle ve $F:U\longrightarrow\mathbb{R}^m$ $C^\infty-$sınıfından bir fonksiyon olsun. Bir $p\in U$ için $F_{*p}:T_p\mathbb{R}^n\longrightarrow T_{F(p)}\mathbb{R}^m$ örten değilse p noktasına F fonksiyonunun bir kritik noktası denir. Bu durumda, $F(p)$ noktasına da F fonksiyonunun bir kritik değeri denir. Eğer bir $q\in F(U)$ noktası F fonksiyonunun bir kritik değeri değilse, q noktasına F fonksiyonunun bir regüler değeri denir ([13] ve [14]).

Teorem 2.1.27. U, $\mathbb{R}^3$ uzayında açık bir cümle ve $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ $C^\infty-$sınıfından bir fonksiyon olsun. Eğer bir $a\in\mathbb{R}$ noktası f fonksiyonunun bir regüler değeri ise $f^{-1}\{a\}$ cümlesi $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzeydir ([13] ve [14]).

Tanım 2.1.28. M, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey, (F,U) bu yüzey için bir parametrizasyon, $p\in F(U)\subset V\subset_{\text{açık}} M$ ve $f:V\longrightarrow\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $F(q)=p$ olmak üzere, $q=F^{-1}(p)\in U$ dur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} f\circ F &: U\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R} \\ q &= F^{-1}(p)\longrightarrow(f\circ F)(q)=f(F(q))=f\left(F\left(F^{-1}(p)\right)\right)=f(p) \end{aligned}$$

biçiminde olup eğer $f\circ F$ fonksiyonu $q=F^{-1}(p)$ noktasında $C^\infty-$sınıfından ise f fonksiyonu $p\in V$ noktasında $C^\infty-$sınıfındandır denir. Eğer $\forall p\in V$ noktasında f fonksiyonu $C^\infty-$sınıfından ise f fonksiyonuna V cümlesi üzerinde $C^\infty-$sınıfındandır denir ([13] ve [14]).

Tanım 2.1.29. M, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey ve $p\in M$ olmak üzere, $\vec{v}_p\in T_p\mathbb{R}^3$ olsun. Eğer $\vec{v}_p$, p noktasından geçen ve M üzerinde bulunan bir eğrinin hız vektörü olarak yazılırsa $\vec{v}_p$ vektörü p noktasında M yüzeyine teğettir veya $\vec{v}_p$ vektörüne M yüzeyinin p noktasındaki bir tanjant veya teğet vektörüdür denir. M yüzeyinin p noktasındaki tüm tanjant vektörlerinin cümlesi T_pM ile gösterilir ve M yüzeyinin p noktasındaki tanjant (teğet) uzayı olarak adlandırılır ([13] ve [14]).

Tanım 2.1.30. M, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey olsun.

$$\begin{array}{rcl} X & : & M \longrightarrow T\mathbb{R}^3 \\ p & \longrightarrow & X(p) = \overrightarrow{X}_p \in T_p\mathbb{R}^3 \end{array}$$

biçiminde tanımlanan bir X fonksiyonuna M yüzeyi üzerinde bir vektör alanı denir. Eğer $\forall p \in M$ için $\overrightarrow{X}_p \in T_pM$ ise X fonksiyonuna M yüzeyi üzerinde bir teğet (tanjant) vektör alanı denir. M yüzeyinin bütün tanjant vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir. Ayrıca, eğer $\forall p \in M$ için $\overrightarrow{X}_p$ vektörü T_pM uzayına dik ise yani, $\forall p \in M$ için $\overrightarrow{X}_p \in (T_pM)^\perp$ ise $\overrightarrow{X}$ vektör alanına M yüzeyi üzerinde bir normal (dik) vektör alanı denir. Bu durumda, $\dfrac{\overrightarrow{X}}{\left\|\overrightarrow{X}\right\|}$ vektör alanına M yüzeyinin birim normal vektör alanı denir ([13] ve [14]).

Tanım 2.1.31. M, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey, $p \in M$, $\overrightarrow{w}_p \in T_pM$ ve $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ $C^\infty-$sınıfından bir fonksiyon olsun. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M$ bir eğri olmak üzere, $\alpha(0) = p$ ve $\alpha'(0) = \overrightarrow{w}_p$ ise f fonksiyonunun $\overrightarrow{w}_p$ tanjant vektörü yönündeki türevi

$$\overrightarrow{w}_p[f] = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)\mid_{t=0} = (f \circ \alpha)'(0)$$

biçiminde tanımlanır ([13] ve [14]).

Tanım 2.1.32. M, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey ve $\overrightarrow{Z}$, M yüzeyinin birim normal vektör alanı olsun.

$$\begin{array}{rcl} S & : & \chi(M) \longrightarrow \chi(M) \\ \overrightarrow{X} & \longrightarrow & S\left(\overrightarrow{X}\right) = D_{\overrightarrow{X}}\overrightarrow{Z} \end{array}$$

fonksiyonuna M yüzeyinin şekil operatörü (veya Weingarten dönüşümü) denir. $\forall p \in M$ için

$$\begin{array}{rcl} S_p & : & T_pM \longrightarrow T_pM \\ \overrightarrow{X}_p & \longrightarrow & S_p\left(\overrightarrow{X}_p\right) = D_{\overrightarrow{X}_p}\overrightarrow{Z} \end{array}$$

fonksiyonuna M yüzeyinin p noktasındaki şekil operatörü denir ([13] ve [14]).

Tanım 2.1.33. M, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey olsun. $\forall p \in M$ ve $\forall \overrightarrow{X}_p, \overrightarrow{Y}_p \in T_pM$ için

$$\begin{array}{ccl} I_p & : & T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R} \\ \left(\overrightarrow{X}_p, \overrightarrow{Y}_p\right) & \longrightarrow & I_p\left(\overrightarrow{X}_p, \overrightarrow{Y}_p\right) = \left\langle \overrightarrow{X}_p, \overrightarrow{Y}_p \right\rangle \end{array}$$

biçiminde tanımlanan I fonksiyonuna M yüzeyi üzerinde birinci temel form,

$$\begin{array}{ccl} II_p & : & T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R} \\ \left(\overrightarrow{X}_p, \overrightarrow{Y}_p\right) & \longrightarrow & II_p\left(\overrightarrow{X}_p, \overrightarrow{Y}_p\right) = \left\langle S\left(\overrightarrow{X}_p\right), \overrightarrow{Y}_p \right\rangle \end{array}$$

biçiminde tanımlanan II fonksiyonuna M yüzeyi üzerinde ikinci temel form ve

$$\begin{array}{ccl} III_p & : & T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R} \\ \left(\overrightarrow{X}_p, \overrightarrow{Y}_p\right) & \longrightarrow & III_p\left(\overrightarrow{X}_p, \overrightarrow{Y}_p\right) = \left\langle S^2\left(\overrightarrow{X}_p\right), \overrightarrow{Y}_p \right\rangle = \left\langle S\left(S\left(\overrightarrow{X}_p\right)\right), \overrightarrow{Y}_p \right\rangle \end{array}$$

biçiminde tanımlanan III fonksiyonuna M yüzeyi üzerinde üçüncü temel form denir ([13] ve [14]).

Tanım 2.1.34. M, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey, M yüzeyinin şekil operatörü S, $p \in M$, $\overrightarrow{w}_p \in T_pM$ ve $\left\|\overrightarrow{w}_p\right\| = 1$ olsun. $\left\langle S\left(\overrightarrow{w}_p\right), \overrightarrow{w}_p \right\rangle$ sayısına M yüzeyinin $\overrightarrow{w}_p$ birim tanjant vektörü doğrultusundaki normal eğriliği adı verilir ve $k\left(\overrightarrow{w}_p\right)$ ile gösterilir ([13] ve [23]).

Tanım 2.1.35. M, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey ve M yüzeyinin şekil operatörü S olsun. $p \in M$ olmak üzere, $S_p : T_pM \longrightarrow T_pM$ lineer dönüşümünün özdeğerlerine (karakteristik değerlerine) M yüzeyinin $p \in M$ noktasındaki asli (asal) eğrilikleri denir. $S_p : T_pM \longrightarrow T_pM$ lineer dönüşümünün sıfırdan farklı özvektörlerine (karakteristik vektörlerine) M yüzeyinin $p \in M$ noktasındaki asli (asal) vektörleri denir ([13] ve [23]).

Tanım 2.1.36. M, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey, M yüzeyinin şekil operatörü S, $p \in M$ ve $\overrightarrow{X}_p \in T_pM$ olsun. $\overrightarrow{X}_p \neq \overrightarrow{0}$ olmak üzere, $\left\langle S\left(\overrightarrow{X}_p\right), \overrightarrow{X}_p \right\rangle = 0$ ise $\overrightarrow{X}_p$ tanjant vektörüne M yüzeyinin p noktasındaki bir asimptotik vektörü denir ([13] ve [23]).

Tanım 2.1.37. M, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey ve α, M yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. Eğer α eğrisinin her p noktasındaki hız vektörü (yani, $\alpha'(t)\mid_p$ vektörü) yüzeyin p

noktasındaki asli (asal) vektörlerinden birine paralel ise α eğrisine M yüzeyi üzerinde bir asli (asal) eğri denir ([13] ve [23]).

Tanım 2.1.38. M, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey ve α, M yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. Eğer α eğrisinin her p noktasındaki hız vektörü (yani, $\alpha'(t)\mid_p$ vektörü) yüzeyin p noktasındaki bir asimptotik vektörüne paralel ise α eğrisine M yüzeyi üzerinde bir asimptotik eğri denir ([13] ve [23]).

Tanım 2.1.39. M, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey ve α, M yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. $\forall\alpha(t)\in M$ noktasında $\alpha''(t)\in\left(T_{\alpha(t)}M\right)^{\perp}$ (yani, yüzeyin her $\alpha(t)\in M$ noktasında $\alpha''(t)$ ivme vektörü M yüzeyine dik) ise α eğrisine M yüzeyi üzerinde bir geodezik (jeodezik) eğri denir ([13] ve [23]).

2.2. Dual Sayılar ve Dual Uzay

Tanım 2.2.1. $\mathbf{D}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{\overline{x}=(x,x^*)\mid x,x^*\in\mathbb{R}\}$ cümlesini ele alalım. Bu cümle üzerinde bir eşitlik ve iki iç işlem aşağıdaki şekilde tanımlanır:
i) $\overline{x}=\overline{y}$ olması için gerek ve yeter şart $x=y$ ve $x^*=y^*$ olmasıdır.
ii) $\overline{x}=(x,x^*)$ ve $\overline{y}=(y,y^*)$ için

$$+_{\mathbf{D}}:\mathbf{D}\times\mathbf{D}\to\mathbf{D}$$

$$\overline{x}+_{\mathbf{D}}\overline{y}=(x+y,x^*+y^*),$$

iii) $\overline{x}=(x,x^*)$ ve $\overline{y}=(y,y^*)$ için

$$\cdot_{\mathbf{D}}:\mathbf{D}\times\mathbf{D}\to\mathbf{D}$$

$$\overline{x}\cdot_{\mathbf{D}}\overline{y}=(xy,xy^*+x^*y),$$

Teorem 2.2.2. $\mathbf{D}$ cümlesi üzerinde tanımlanan $+_{\mathbf{D}}$ ve $\cdot_{\mathbf{D}}$ işlemleri göz önüne alındığında aşağıdaki özellikler vardır.
1) $\mathbf{D}$ cümlesi $+_{\mathbf{D}}$ ve $\cdot_{\mathbf{D}}$ işlemlerine göre kapalıdır.
2) $\forall\overline{x},\overline{y},\overline{z}\in\mathbf{D}$ için $(\overline{x}+_{\mathbf{D}}\overline{y})+_{\mathbf{D}}\overline{z}=\overline{x}+_{\mathbf{D}}(\overline{y}+_{\mathbf{D}}\overline{z})$ dir.

3) $\forall \overline{x} \in \mathbf{D}$ için $\overline{x} +_{\mathbf{D}} \overline{0} = \overline{0} +_{\mathbf{D}} \overline{x} = \overline{x}$ olacak şekilde $\overline{0} = (0,0) \in \mathbf{D}$ vardır.

4) $\forall \overline{x} \in \mathbf{D}$ için $\overline{x} +_{\mathbf{D}} \overline{a} = \overline{a} +_{\mathbf{D}} \overline{x} = \overline{0}$ olacak şekilde $\overline{a} = (-x, -x^*) \in \mathbf{D}$ vardır.

5) $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbf{D}$ için $\overline{x} +_{\mathbf{D}} \overline{y} = \overline{y} +_{\mathbf{D}} \overline{x}$ dir.

6) $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbf{D}$ için $(\overline{x} \cdot_{\mathbf{D}} \overline{y}) \cdot_{\mathbf{D}} \overline{z} = \overline{x} \cdot_{\mathbf{D}} (\overline{y} \cdot_{\mathbf{D}} \overline{z})$ dir.

7) $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbf{D}$ için

$$(\overline{x} +_{\mathbf{D}} \overline{y}) \cdot_{\mathbf{D}} \overline{z} = \overline{x} \cdot_{\mathbf{D}} \overline{z} +_{\mathbf{D}} \overline{y} \cdot_{\mathbf{D}} \overline{z}$$

ve

$$\overline{z} \cdot_{\mathbf{D}} (\overline{x} +_{\mathbf{D}} \overline{y}) = \overline{z} \cdot_{\mathbf{D}} \overline{x} +_{\mathbf{D}} \overline{z} \cdot_{\mathbf{D}} \overline{y}$$

dir.

8) $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbf{D}$ için $\overline{x} \cdot_{\mathbf{D}} \overline{y} = \overline{y} \cdot_{\mathbf{D}} \overline{x}$ dir.

9) $\forall \overline{x} \in \mathbf{D}$ ve $(1,0) \in \mathbf{D}$ için $\overline{x} \cdot_{\mathbf{D}} (1,0) = (1,0) \cdot_{\mathbf{D}} \overline{x} = \overline{x}$ dir ([24],[25] ve [26]).

Sonuç 2.2.1. $(\mathbf{D}, +_{\mathbf{D}}, \cdot_{\mathbf{D}})$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır. Fakat $(\mathbf{D}, +_{\mathbf{D}}, \cdot_{\mathbf{D}})$ üçlüsü bir cisim değildir. Gerçekten, $\forall \overline{x} = (x, x^*) \in \mathbf{D}$ elemanının ikinci işleme göre tersi, $x \neq 0$ için $\overline{x}^{-1} = \left(\frac{1}{x}, -\frac{x^*}{x^2} \right)$ şeklindedir. Buradan görülmektedir ki $x^* \neq 0$ için, $(0, x^*) \in \mathbf{D}$ elemanının tersi yoktur ([24], [25] ve [26]).

Tanım 2.2.3. $\mathbf{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\overline{x} = (x, x^*) \mid x, x^* \in \mathbb{R}\}$ bir cümle, bu cümle üzerinde tanımlanan eşitlik ve iki iç işlem $+_{\mathbf{D}}$ ve $\cdot_{\mathbf{D}}$ göz önüne alındığında $\mathbf{D}$ cümlesi dual sayılar sistemi olarak adlandırılır ve $\overline{x} = (x, x^*)$ elemanına bir dual sayı denir. Burada, x reel sayısına $\overline{x}$ nin reel kısmı ve x^* reel sayısına da $\overline{x}$ nin dual kısmı denir [24].

Teorem 2.2.4. $\overline{\mathbf{D}} = \{\overline{x} = (x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ cümlesini ele alalım. Bu durumda, $f : \overline{\mathbf{D}} \to \mathbb{R}$, $f(x, 0) = x$ şeklinde tanımlanan dönüşüm izomorfizmdir. O halde, $\overline{x} = (x, 0) = x$ yazılabilir [24].

Sonuç 2.2.2. Yukarıdaki tanım ve teoremler dikkate alındığında $\overline{x} = (x, x^*)$ dual sayısı aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= (x, x^*) \\ &= (x, 0) +_{\mathbf{D}} (0, x^*) \\ &= (x, 0) +_{\mathbf{D}} (0, 1) \cdot_{\mathbf{D}} (x^*, 0) \\ &= x +_{\mathbf{D}} \varepsilon \cdot_{\mathbf{D}} x^*. \end{aligned}$$

$(0,1)$ dual sayı ε ile gösterilir ve bu eleman dual birim olarak adlandırılır. $(0,1) = \varepsilon$ elemanı aşağıdaki özelliği sağlar:

$$\varepsilon^2 = \varepsilon \cdot_{\mathbf{D}} \varepsilon = (0,0) = 0.$$

[24].

Açıklama 1. Kolaylık için bu çalışma boyunca $+_{\mathbf{D}}$ ve $\cdot_{\mathbf{D}}$ işlemleri yerine $+$ ve $\cdot$ işlemlerini kullanacağız. Bu durumda, bütün dual sayıların cümlesi aşağıdaki şekilde verilir:

$$\mathbf{D} = \left\{ \bar{x} = x + \varepsilon x^* \mid x, x^* \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0 \right\}.$$

Böylece, $\bar{x} = x + \varepsilon x^*$ ve $\bar{y} = y + \varepsilon y^*$ dual sayılarının toplamı ve çarpımı

$$\begin{aligned} (x + \varepsilon x^*) + (y + \varepsilon y^*) &= (x + y) + \varepsilon (x^* + y^*), \\ (x + \varepsilon x^*)(y + \varepsilon y^*) &= xy + \varepsilon (xy^* + x^* y) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, bu dual sayılar için eğer $y \neq 0$ ise bu durumda,

$$\frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \frac{x}{y} + \varepsilon \left(\frac{x^* y - x y^*}{y^2} \right)$$

biçimindedir [24].

Tanım 2.2.5.

$$\mathbf{D}^n = \mathbf{D} \times \mathbf{D} \times \ldots \times \mathbf{D} = \left\{ \overrightarrow{\bar{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) \mid \bar{x}_i \in \mathbf{D},\ i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

cümlesini ele alalım. Bu cümle üzerinde bir eşitlik, bir iç işlem ve bir dış işlem aşağıdaki şekilde tanımlanır:

i) $\overrightarrow{\bar{x}} = \overrightarrow{\bar{y}}$ olması için gerek ve yeter şart $\bar{x}_i = \bar{y}_i$ olmasıdır $(1 \leq i \leq n)$,

ii) $\overrightarrow{\bar{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ ve $\overrightarrow{\bar{y}} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n)$ için

$$+_{\mathbf{D}^n} : \mathbf{D}^n \times \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}^n,$$

$$\overrightarrow{\bar{x}} +_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\bar{y}} = (\bar{x}_1 + \bar{y}_1, \bar{x}_2 + \bar{y}_2, \ldots, \bar{x}_n + \bar{y}_n),$$

iii) $\overline{\lambda} = (\lambda, \lambda^*)$ ve $\overrightarrow{\overline{x}} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ için

$$\cdot_{\mathbf{D}^n} : \mathbf{D} \times \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}^n,$$

$$\overline{\lambda} \cdot_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\overline{x}} = \left(\overline{\lambda}\overline{x}_1, \overline{\lambda}\overline{x}_2, ..., \overline{\lambda}\overline{x}_n\right).$$

Teorem 2.2.6. $\mathbf{D}^n$ cümlesi üzerinde tanımlanan $+_{\mathbf{D}^n}$ ve $\cdot_{\mathbf{D}^n}$ işlemleri dikkate alındığında aşağıdaki özellikler sağlanır:

1) $\forall \overrightarrow{\overline{x}}, \overrightarrow{\overline{y}} \in \mathbf{D}^n$ için $\overrightarrow{\overline{x}} +_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\overline{y}} \in \mathbf{D}^n$ dir.

2) $\forall \overrightarrow{\overline{x}}, \overrightarrow{\overline{y}}, \overrightarrow{\overline{z}} \in \mathbf{D}^n$ için $\overrightarrow{\overline{x}} +_{\mathbf{D}^n} \left(\overrightarrow{\overline{y}} +_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\overline{z}}\right) = \left(\overrightarrow{\overline{x}} +_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\overline{y}}\right) +_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\overline{z}}$ dir.

3) $\forall \overrightarrow{\overline{x}} \in \mathbf{D}^n$ için $\overrightarrow{\overline{x}} +_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\overline{0}} = \overrightarrow{\overline{0}} +_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\overline{x}} = \overrightarrow{\overline{x}}$ olacak şekilde $\overrightarrow{\overline{0}} = \left(\overline{0}, \overline{0}, ..., \overline{0}\right) \in \mathbf{D}^n$ vardır.

4) $\forall \overrightarrow{\overline{x}} \in \mathbf{D}^n$ için $\overrightarrow{\overline{x}} +_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\overline{a}} = \overrightarrow{\overline{a}} +_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\overline{x}} = \overrightarrow{\overline{0}}$ olacak şekilde $\overrightarrow{\overline{a}} = (-\overline{x}_1, -\overline{x}_2, ..., -\overline{x}_n) \in \mathbf{D}^n$ vardır.

5) $\forall \overrightarrow{\overline{x}}, \overrightarrow{\overline{y}} \in \mathbf{D}^n$ için $\overrightarrow{\overline{x}} +_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\overline{y}} = \overrightarrow{\overline{y}} +_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\overline{x}}$ dir.

6) $\forall \overline{\lambda} \in \mathbf{D}$ ve $\forall \overrightarrow{\overline{x}}, \overrightarrow{\overline{y}} \in \mathbf{D}^n$ için

$$\overline{\lambda} \cdot_{\mathbf{D}^n} \left(\overrightarrow{\overline{x}} +_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\overline{y}}\right) = \overline{\lambda} \cdot_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\overline{x}} +_{\mathbf{D}^n} \overline{\lambda} \cdot_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\overline{y}}$$

dir.

7) $\forall \overline{\lambda}, \overline{\mu} \in \mathbf{D}$ ve $\forall \overrightarrow{\overline{x}} \in \mathbf{D}^n$ için

$$\left(\overline{\lambda} + \overline{\mu}\right) \cdot_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\overline{x}} = \overline{\lambda} \cdot_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\overline{x}} +_{\mathbf{D}^n} \overline{\mu} \cdot_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\overline{x}}$$

dir.

8) $\forall \overline{\lambda}, \overline{\mu} \in \mathbf{D}$ ve $\forall \overrightarrow{\overline{x}} \in \mathbf{D}^n$ için

$$\left(\overline{\lambda}\overline{\mu}\right) \cdot_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\overline{x}} = \overline{\lambda} \cdot_{\mathbf{D}^n} \left(\overline{\mu} \cdot_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\overline{x}}\right)$$

dir.

9) $(1,0) \in \mathbf{D}$ ve $\forall \overrightarrow{\overline{x}} \in \mathbf{D}^n$ için $(1,0) \cdot_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\overline{x}} = \overrightarrow{\overline{x}}$ dir.

Sonuç 2.2.3. Yukarıdaki özellikler dikkate alındığında $(\mathbf{D}^n, +_{\mathbf{D}^n}, (\mathbf{D}, +, \cdot), \cdot_{\mathbf{D}^n})$ altılısı bir modül oluşturur. Bu modüle $\mathbf{D}-$Modül adı verilir ve $\mathbf{D}-$Modül'ün elemanlarına dual vektör denir.

Sonuç 2.2.4. $\mathbf{D}^n$ üzerinde tanımlanan iç işlem ve dış işlem dikkate alındığında bir dual vektör aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\overline{x}} &= (\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n) \\
&= (x_1 + \varepsilon x_1^*, x_2 + \varepsilon x_2^*, ..., x_n + \varepsilon x_n^*) \\
&= (x_1, x_2, ..., x_n) +_{\mathbf{D}^n} \varepsilon \cdot_{\mathbf{D}^n} (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \\
&= \overrightarrow{x} +_{\mathbf{D}^n} \varepsilon \cdot_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{x}^*.
\end{aligned}$$

Burada, $\overrightarrow{x}$ ve $\overrightarrow{x}^*$ vektörleri $\mathbb{R}^n$ uzayının vektörleridir [24].

Açıklama 2. Bu çalışma boyunca kolaylık için $+_{\mathbf{D}^n}$ ve $\cdot_{\mathbf{D}^n}$ işlemlerinin yerine sırasıyla $+$ ve $\cdot$ işlemlerini kullanacağız. Bu durumda, bütün dual vektörlerin cümlesi

$$\mathbf{D}^n = \left\{ \overrightarrow{\overline{x}} = \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{x}^* \mid \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}^* \in \mathbb{R}^n,\ \varepsilon^2 = 0 \right\}$$

şeklindedir. İki dual vektörün toplamı ve bir dual vektörün bir dual skaler ile çarpımı aşağıdaki şekilde verilir:

$$\overrightarrow{\overline{x}} + \overrightarrow{\overline{y}} = (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + \varepsilon (\overrightarrow{x}^* + \overrightarrow{y}^*)$$

ve

$$\overline{\lambda}\,\overrightarrow{\overline{x}} = \lambda \overrightarrow{x} + \varepsilon (\lambda \overrightarrow{x}^* + \lambda^* \overrightarrow{x}).$$

Teorem 2.2.7. $\overline{\mathbf{D}}^n = \left\{ \overrightarrow{\overline{x}} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{0}\varepsilon \mid \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \right\}$ cümlesini ele alalım. Bu durumda,

$$f : \overline{\mathbf{D}}^n \to \mathbb{R}^n,\ f\left(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{0}\varepsilon\right) = \overrightarrow{x}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir izomorfizmdir [24].

Tanım 2.2.8. $\overrightarrow{\overline{0}} = \left(\overline{0}, \overline{0}, ..., \overline{0}\right) = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}\varepsilon$ dual vektörüne sıfır dual vektörü denir ve bu dual vektör $\overrightarrow{0}$ reel vektörü ile gösterilebilir [24].

Tanım 2.2.9. $\overrightarrow{\overline{e}}_i = \left(\overline{\delta}_{i1}, \overline{\delta}_{i2}, ..., \overline{\delta}_{in}\right)$ şeklindeki vektörleri ele alalım.

$$\overline{\delta}_{ij} = \begin{cases} 1 + 0\varepsilon & , i = j \\ 0 + 0\varepsilon & , i \neq j \end{cases} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

olup $\left\{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, ..., \overrightarrow{e}_n\right\}$ cümlesi $\mathbf{D}^n$ nin standart bazıdır. Her $\overrightarrow{\overline{x}} \in \mathbf{D}^n$ dual vektörü

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\overline{x}} &= \overline{x}_1 \cdot_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\overline{e}}_1 +_{\mathbf{D}^n} \overline{x}_2 \cdot_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\overline{e}}_2 +_{\mathbf{D}^n} ... +_{\mathbf{D}^n} \overline{x}_n \cdot_{\mathbf{D}^n} \overrightarrow{\overline{e}}_n \\ &= \overline{x}_1 \overrightarrow{\overline{e}}_1 + \overline{x}_2 \overrightarrow{\overline{e}}_2 + ... + \overline{x}_n \overrightarrow{\overline{e}}_n\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Burada, $1 \leq i \leq n$ için $\overrightarrow{\overline{e}}_i = \overrightarrow{e}_i + \overrightarrow{0}\varepsilon$ dır [24].

Tanım 2.2.10. $\overrightarrow{\overline{x}} = \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{x}^*$ ve $\overrightarrow{\overline{y}} = \overrightarrow{y} + \varepsilon \overrightarrow{y}^*$ dual vektörlerini ele alalım. Bu dual vektörler arasındaki dual iç çarpım

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{\overline{x}}, \overrightarrow{\overline{y}} \right\rangle_{\mathbf{D}} &= \overline{x}_1\overline{y}_1 + \overline{x}_2\overline{y}_2 + ... + \overline{x}_n\overline{y}_n \\ &= \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle + \varepsilon \left(\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}^* \rangle + \langle \overrightarrow{x}^*, \overrightarrow{y} \rangle \right)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\langle , \rangle$, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Öklid iç çarpımıdır [24].

Tanım 2.2.11. $\overrightarrow{\overline{x}} = \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{x}^* \in \mathbf{D}^n$ dual vektörünü ele alalım. Bu dual vektörün dual normu

$$\left\| \overrightarrow{\overline{x}} \right\|_{\mathbf{D}} = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{\overline{x}}, \overrightarrow{\overline{x}} \right\rangle_{\mathbf{D}}} = \begin{cases} \overline{0} & , \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \\ \|\overrightarrow{x}\| + \varepsilon \dfrac{\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}^* \rangle}{\|\overrightarrow{x}\|} & , \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0} \end{cases}$$

şeklinde tanmlanır [24].

Tanım 2.2.12. $\overline{x} = x + \varepsilon x^*$ bir dual değişken ve

$$\begin{aligned}\overline{f} &: \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D} \\ \overline{f}(\overline{x}) &= f(x, x^*) + \varepsilon f^0(x, x^*)\end{aligned}$$

dual fonksiyon olsun. Burada, f ile f^0, x ve x^* reel değişkenlerine sahip reel fonksiyonlardır. Eğer $\overline{f}$ dual fonksiyonu

$$\frac{\partial f}{\partial x^*} = 0$$

ve

$$\frac{\partial f^0}{\partial x^*} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

şartlarını sağlıyorsa $\overline{f}$ dual fonksiyonuna $\mathbf{D}$ uzayında dual analitiktir denir. Analitikliğin birinci şartından görülmektedir ki f fonksiyonu sadece x değişkenine bağlıdır. Yani,

$$f(x,x^*) = f(x)$$

dir. Analitikliğin ikinci şartından

$$f^0(x,x^*) = x^* \frac{\partial f}{\partial x} + \widetilde{f}(x)$$

elde edilir. Burada, $\widetilde{f}(x)$, x değişkeninin kesin fonksiyonudur. O halde, dual analitik fonksiyonun genel notasyonu

$$\overline{f}(\overline{x}) = \overline{f}(x+\varepsilon x^*) = f(x) + \varepsilon \left(x^* \frac{\partial f}{\partial x} + \widetilde{f}(x) \right)$$

dir. Burada, f ve $\widetilde{f}$ fonksiyonları $C^\infty -$sınıfındandır. $\overline{f} : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D}$ dual analitik fonksiyonunun $\overline{x}$ dual değişkene göre türevi

$$\frac{d\overline{f}}{d\overline{x}} = \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon \left(x^* \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x} \right)$$

dir. Burada, görülmektedir ki $\overline{f}$ dual analitik fonksiyonunun $\overline{x}$ dual değişkene göre türevi x reel değişkene göre türevine indirgenmektedir [27].

Tanım 2.2.13.

$$\begin{aligned} \overline{f} \quad &: \quad \mathbf{D}^n \longrightarrow \mathbf{D} \\ \overline{f}(\overline{x}) \quad &= \quad \overline{f}(x+\varepsilon x^*) = f(x_1,\ldots,x_n,x_1^*,\ldots,x_n^*) + \varepsilon f^0(x_1,\ldots,x_n,x_1^*,\ldots,x_n^*) \end{aligned}$$

dual fonksiyonu verilsin. Burada, f, $f^0 : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyonlardır. Eğer $\overline{f}$ dual fonksiyonu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i^*} = 0 \text{ ve } \frac{\partial f^0}{\partial x_i^*} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$(1 \leq i \leq n)$ şartlarını sağlıyorsa $\overline{f}$ dual fonksiyonuna $\mathbf{D}^n$ uzayında dual analitiktir denir. Bu durumda, $\mathbf{D}^n$ uzayında dual analitik fonksiyonların genel notasyonu

$$\overline{f}(\overline{x}) = \overline{f}(x+\varepsilon x^*) = f(x_1,\ldots,x_n) + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \frac{\partial f}{\partial x_i} + \widetilde{f}(x_1,\ldots,x_n) \right)$$

dir. Bu dual analitik fonksiyonların $\overline{x}_j$ dual değişkenlerine göre kısmi türevleri

$$\frac{d\overline{f}}{d\overline{x}_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_j} \right)$$

$(1 \leq j \leq n)$ dir. Burada, f ve $\widetilde{f}$, $C^\infty-$sınıfından fonksiyonlardır. $\overline{f} : \mathbf{D}^n \longrightarrow \mathbf{D}^m$, $\overline{f}(\overline{x}) = \left(\overline{f}_1(\overline{x}), \overline{f}_2(\overline{x}), ..., \overline{f}_m(\overline{x})\right)$ genel dual fonksiyonları için eğer $\overline{f}_k : \mathbf{D}^n \longrightarrow \mathbf{D}$ $(1 \leq k \leq m)$ dual analitik fonksiyonlar ise $\overline{f} : \mathbf{D}^n \longrightarrow \mathbf{D}^m$ dual analitik bir fonksiyondur. Dual analitik fonksiyonların cümlesi $C(\mathbf{D}^n, \mathbf{D}^m)$ ile gösterilir. Buna göre,

$$C(\mathbf{D}^n, \mathbf{D}^m) = \left\{ \overline{f} \mid \overline{f} : \mathbf{D}^n \longrightarrow \mathbf{D}^m \text{ dual analitik fonksiyondur} \right\}$$

dir [28].

Tanım 2.2.14. $\{x_1, ..., x_n, x_1^*, ..., x_n^*\}$; $\mathbb{R}^{2n}$ üzerinde koordinat fonksiyonları olsun. $1 \leq i \leq n$ için $x_i, x_i^* : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyonlar olup $x_i(\widetilde{p}) = p_i$ ve $x_i^*(\widetilde{p}) = p_i^*$ dır. Burada, $\widetilde{p} = (p_1, ..., p_n, p_1^*, ..., p_n^*) \in \mathbb{R}^{2n}$ dir. Bu durumda, dual koordinat fonksiyonları

$$\begin{array}{rcl} \overline{x}_i & : & \mathbf{D}^n \longrightarrow \mathbf{D} \\ \overline{p} & \longrightarrow & \overline{x}_i(\overline{p}) = x_i(\widetilde{p}) + \varepsilon x_i^*(\widetilde{p}) = p_i + \varepsilon p_i^* = \overline{p}_i \end{array}$$

biçiminde tanımlanır. Burada, $\overline{p} = (\overline{p}_1, \overline{p}_2, ..., \overline{p}_n) \in \mathbf{D}^n$ bir dual nokta ve $\overline{p} \longleftrightarrow \widetilde{p}$ dır [28].

Tanım 2.2.15.

$$\overline{p} = (p_1, ..., p_n) + \varepsilon (p_1^*, ..., p_n^*) = p + \varepsilon p^* \text{ ve } \overrightarrow{\overline{v}} = \overrightarrow{v} + \varepsilon \overrightarrow{v}^*$$

sırasıyla $\mathbf{D}^n$ uzayında birer dual nokta ve dual vektör olsun.

$$T_{\overline{p}}\mathbf{D}^n = \left\{ \overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}} \mid \overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}} = \left(\overline{p}, \overrightarrow{\overline{v}}\right), \overrightarrow{\overline{v}} \in \mathbf{D}^n \right\}$$

cümlesi verilsin. Bu cümle üzerinde bir eşitlik, bir iç işlem ve bir dış işlem aşağıdaki biçimde tanımlanır:

i)

$$\overrightarrow{v}_{\overline{p}}=\overrightarrow{w}_{\overline{q}}\Longleftrightarrow \overline{p}=\overline{q} \text{ ve } \overrightarrow{v}=\overrightarrow{w},$$

ii)

$$\begin{aligned} \oplus \quad &: \quad T_{\overline{p}}\mathbf{D}^n\times T_{\overline{p}}\mathbf{D}^n\longrightarrow T_{\overline{p}}\mathbf{D}^n \\ \left(\left(\overline{p},\overrightarrow{v}\right),\left(\overline{p},\overrightarrow{w}\right)\right) &\longrightarrow \left(\overline{p},\overrightarrow{v}\right)\oplus\left(\overline{p},\overrightarrow{w}\right)=\left(\overline{p},\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right), \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} \odot \quad &: \quad \mathbf{D}\times T_{\overline{p}}\mathbf{D}^n\longrightarrow T_{\overline{p}}\mathbf{D}^n \\ \left(\overline{\lambda},\left(\overline{p},\overrightarrow{v}\right)\right) &\longrightarrow \overline{\lambda}\odot\left(\overline{p},\overrightarrow{v}\right)=\left(\overline{p},\overline{\lambda}\cdot\overrightarrow{v}\right). \end{aligned}$$

Bu işlemler göz önüne alındığında $(T_{\overline{p}}\mathbf{D}^n,\oplus,(\mathbf{D},+,\cdot),\odot)$ altılısı bir $\mathbf{D}-$modüldür. Bu $\mathbf{D}-$modüle $\mathbf{D}^n$ uzayının $\overline{p}$ dual noktasındaki dual tanjant uzayı ve $\overrightarrow{v}_{\overline{p}}=\left(\overline{p},\overrightarrow{v}\right)\in T_{\overline{p}}\mathbf{D}^n$ elemanına $\mathbf{D}^n$ uzayının $\overline{p}$ dual noktasındaki bir dual tanjant vektörü denir.

Yukarıdaki işlemler ve Teorem 2.2.7. dikkate alındığında bir dual tanjant vektörü

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v}_{\overline{p}} &= (\overline{p},\overrightarrow{v}+\varepsilon\overrightarrow{v}^*) \\ &= (\overline{p},\overrightarrow{v})\oplus\varepsilon\odot(\overline{p},\overrightarrow{v}^*) \\ &= \left(\overline{p},\overrightarrow{v}+\overrightarrow{0}\varepsilon\right)\oplus\varepsilon\odot\left(\overline{p},\overrightarrow{v}^*+\overrightarrow{0}\varepsilon\right) \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Şimdi,

$$X=\left\{\left(\overline{p},\overrightarrow{v}+\overrightarrow{0}\varepsilon\right)\mid\overrightarrow{v}\in\mathbb{R}^n\right\}$$

ve

$$Y=\left\{(\widetilde{p},(v_1,...,v_n,0,...,0))\mid\widetilde{p}\in\mathbb{R}^{2n},\ v_i\in\mathbb{R},\ 1\leq i\leq n\right\}$$

olmak üzere; $f:X\longrightarrow Y,\ f\left(\overline{p},\overrightarrow{v}+\overrightarrow{0}\varepsilon\right)=(\widetilde{p},(v_1,...,v_n,0,...,0))$ dönüşümü izomorfizmdir. Ayrıca, $(v_1,...,v_n,0,...,0)\cong(v_1,...,v_n)=\overrightarrow{v}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left(\overline{p},\overrightarrow{v}+\overrightarrow{0}\varepsilon\right) &= (\widetilde{p},(v_1,...,v_n,0,...,0)) \\ &= (\widetilde{p},\overrightarrow{v})=\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. O halde, bir $\overrightarrow{v}_{\overline{p}} = \left(\overline{p}, \overrightarrow{v}\right) \in T_{\overline{p}}\mathbf{D}^n$ dual tanjant vektörü

$$\overrightarrow{v}_{\overline{p}} = \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}} \oplus \varepsilon \odot \overrightarrow{v}^*_{\widetilde{p}}$$

biçimindedir. Bu çalışma boyunca $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri yerine $+$ ve $\cdot$ işlemlerini kullanacağız. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\overrightarrow{v}_{\overline{p}} + \overrightarrow{w}_{\overline{p}} = \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}} + \overrightarrow{w}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \left(\overrightarrow{v}^*_{\widetilde{p}} + \overrightarrow{w}^*_{\widetilde{p}}\right)$$

$$\overline{\lambda}.\overrightarrow{v}_{\overline{p}} = \lambda \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \left(\lambda^* \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}} + \lambda \overrightarrow{v}^*_{\widetilde{p}}\right).$$

Ayrıca, $\left\{\overrightarrow{e}_{1\overline{p}}, ..., \overrightarrow{e}_{n\overline{p}}\right\}$ cümlesi $T_{\overline{p}}\mathbf{D}^n$ dual tanjant uzayının bir bazıdır. Burada, $\overrightarrow{e}_{i\overline{p}} = \overrightarrow{e}_{i\widetilde{p}} + \overrightarrow{0}_{\widetilde{p}}$ $(1 \leq i \leq n)$ dir [28].

Tanım 2.2.16. $\overline{f} \in C(\mathbf{D}^n, \mathbf{D})$ bir dual analitik fonksiyon ve $\overrightarrow{v}_{\overline{p}}$, $\mathbf{D}^n$ uzayında bir dual tanjant vektör olsun. $\frac{d}{d\overline{t}}\overline{f}\left(\overline{p} + \overline{t}\,\overrightarrow{v}\right)|_{\overline{t}=\overline{0}}$ dual sayısına $\overline{f}$ fonksiyonunun $\overrightarrow{v}_{\overline{p}}$ dual tanjant vektörü yönündeki türevi denir ve

$$\overline{v}_{\overline{p}}\left[\overline{f}\right] = \frac{d}{d\overline{t}}\overline{f}\left(\overline{p} + \overline{t}\,\overrightarrow{v}\right)|_{\overline{t}=\overline{0}}$$

ile gösterilir[28].

Teorem 2.2.17. $\overline{f}, \overline{g} \in C(\mathbf{D}^n, \mathbf{D})$ dual analitik fonksiyonlar ve $\overrightarrow{v}_{\overline{p}} = \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \overrightarrow{v}^*_{\widetilde{p}}$, $\mathbf{D}^n$ üzerinde dual tanjant vektör olsun. Aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:
(i) $\overrightarrow{v}_{\overline{p}}\left[\overline{f} + \overline{g}\right] = \overrightarrow{v}_{\overline{p}}\left[\overline{f}\right] + \overrightarrow{v}_{\overline{p}}[\overline{g}]$,
(ii) $\forall \overline{\lambda} \in \mathbf{D}^n$ için $\overrightarrow{v}_{\overline{p}}\left[\overline{\lambda}\overline{f}\right] = \overline{\lambda}.\overrightarrow{v}_{\overline{p}}\left[\overline{f}\right]$,
(iii) $\overrightarrow{v}_{\overline{p}}\left[\overline{f}.\overline{g}\right] = \overrightarrow{v}_{\overline{p}}\left[\overline{f}\right].\overline{g}(\overline{p}) + \overline{f}(\overline{p}).\overrightarrow{v}_{\overline{p}}[\overline{g}]$
[28].

Tanım 2.2.18. $\overline{f} \in C(\mathbf{D}^n, \mathbf{D})$ dual analitik fonksiyon ve $\overrightarrow{v}_{\overline{p}} = \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \overrightarrow{v}^*_{\widetilde{p}}$, $\mathbf{D}^n$ üzerinde dual tanjant vektör olsun. Buna göre, $\overrightarrow{v}_{\overline{p}}$ dual tanjant vektörü aşağıdaki şekilde bir operatör olarak tanımlanabilir:

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{v}_{\overline{p}} & : & C(\mathbf{D}^n, \mathbf{D}) \longrightarrow \mathbf{D} \\ \overline{f} & \longrightarrow & \overrightarrow{v}_{\overline{p}}(\overline{f}) = \overrightarrow{v}_{\overline{p}}\left[\overline{f}\right] = \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[f] + \varepsilon\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[f^0\right] + \overrightarrow{v}^*_{\widetilde{p}}[f]\right) \end{array}$$

[28].

Tanım 2.2.19. $\mathbf{D}^n$ uzayının her noktasına bu noktada bir dual tanjant vektör karşılık getiren fonksiyona $\mathbf{D}^n$ üstünde bir dual vektör alanı denir. Yani; $\overrightarrow{\overline{X}}$, $\mathbf{D}^n$ üstünde bir dual vektör alanı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{array}{rcl} \overline{X} & : & \mathbf{D}^n \longrightarrow T\mathbf{D}^n \\ \overline{p} & \longrightarrow & \overline{X}(\overline{p}) = \overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \overrightarrow{X}^*_{\widetilde{p}} \in T_{\overline{p}}\mathbf{D}^n. \end{array}$$

Burada, $\overrightarrow{\overline{X}} = \overrightarrow{X} + \varepsilon \overrightarrow{X}^*$ ve $\bigcup\limits_{\overline{p}\in\mathbf{D}^n} T_{\overline{p}}\mathbf{D}^n = T\mathbf{D}^n$ dir. Dual vektör alanlarının cümlesi

$$\chi(\mathbf{D}^n) = \left\{ \overrightarrow{\overline{X}} \mid \overline{X} : \mathbf{D}^n \longrightarrow T\mathbf{D}^n, \overline{X}(\overline{p}) = \overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \overrightarrow{X}^*_{\widetilde{p}} \right\}$$

ile verilir. Ayrıca, $1 \le i \le n$ için $\overline{a}_i : \mathbf{D}^n \longrightarrow \mathbf{D}$ dual analitik fonksiyonlar olmak üzere,

$$\overrightarrow{\overline{X}}(\overline{x}) = (\overline{a}_1(\overline{x}), \overline{a}_2(\overline{x}), ..., \overline{a}_n(\overline{x}))$$

biçimindedir [28].

Tanım 2.2.20. $\overline{f} \in C(\mathbf{D}^n, \mathbf{D}^m)$ bir dual analitik fonksiyon ve $\overline{f} = (\overline{f}_1, \overline{f}_2, ..., \overline{f}_m)$ olsun. $\forall \overline{p} = p + \varepsilon p^* \in \mathbf{D}^n$ için

$$\overline{f}_{*\overline{p}} : T_{\overline{p}}\mathbf{D}^n \longrightarrow T_{\overline{f}(\overline{p})}\mathbf{D}^m$$

dual fonksiyonu $\overline{p}$ dual noktasında $\overline{f}$ fonksiyonunun dual türev dönüşümü olarak adlandırılır ve

$$\begin{array}{rcl} \overline{f}_{*\overline{p}}\left(\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\right) & = & \left(\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{f}_1\right], ..., \overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}\left[\overline{f}_m\right]\right)|_{\overline{q}=q+\varepsilon q^*} \\ & = & \left(\begin{array}{c} \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[f_1] + \varepsilon\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[f_1^0\right] + \overrightarrow{v}^*_{\widetilde{p}}[f_1]\right), ..., \\ \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[f_m] + \varepsilon\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[f_m^0\right] + \overrightarrow{v}^*_{\widetilde{p}}[f_m]\right) \end{array} \right) \\ & = & \left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[f_1], ..., \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}[f_m]\right) \\ & & +\varepsilon\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[f_1^0\right] + \overrightarrow{v}^*_{\widetilde{p}}[f_1], ..., \overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\left[f_m^0\right] + \overrightarrow{v}^*_{\widetilde{p}}[f_m]\right) \\ & = & f_{*\widetilde{p}}\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\right) + \varepsilon\left(f^0_{*\widetilde{p}}\left(\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}\right) + f_{*\widetilde{p}}\left(\overrightarrow{v}^*_{\widetilde{p}}\right)\right) \end{array}$$

biçiminde ifade edilir. Burada, $\overline{q} = q + \varepsilon q^* = f(\widetilde{p}) + \varepsilon f^0(\widetilde{p}) = \overline{f}(\overline{p}) \in \mathbf{D}^m$ dir [28].

Teorem 2.2.21. $\overline{f} \in C(\mathbf{D}^n, \mathbf{D}^m)$ bir dual analitik fonksiyon ve $\overline{p} = p + \varepsilon p^* \in \mathbf{D}^n$ olmak üzere, $\overline{f}_{*\overline{p}}$ dual türev dönüşümü bir lineer dönüşümdür[28].

Tanım 2.2.22. $\overline{f} \in C(\mathbf{D}^n, \mathbf{D}^m)$ bir dual analitik fonksiyon ve $\overline{p} = p + \varepsilon p^* \in \mathbf{D}^n$ olmak üzere, $\overline{f}_{*\overline{p}} : T_{\overline{p}}\mathbf{D}^n \longrightarrow T_{\overline{f}(\overline{p})}\mathbf{D}^m$ dual türev dönüşümü olsun.

$$\overline{f}_{*\overline{p}} : T_{\overline{p}}\mathbf{D}^n \longrightarrow T_{\overline{f}(\overline{p})}\mathbf{D}^m$$

dual türev dönüşümüne karşılık gelen matrise $\overline{f}$ fonksiyonunun $\overline{p} = p + \varepsilon p^* \in \mathbf{D}^n$ noktasındaki dual jakobiyen matrisi denir ve $\overline{J}\left(\overline{f}, \overline{p}\right)$ ile gösterilir. Bu ifade

$$\begin{aligned}\overline{J}\left(\overline{f}\right)(\overline{p}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\widetilde{p}) & . & . & . & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\widetilde{p}) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\widetilde{p}) & . & . & . & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\widetilde{p}) \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^0}{\partial x_1}(\widetilde{p}) & . & . & . & \frac{\partial f_1^0}{\partial x_n}(\widetilde{p}) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial f_m^0}{\partial x_1}(\widetilde{p}) & . & . & . & \frac{\partial f_m^0}{\partial x_n}(\widetilde{p}) \end{bmatrix} \\ &= J(f, \widetilde{p}) + \varepsilon J\left(f^0, \widetilde{p}\right)\end{aligned}$$

biçimindedir[28].

Tanım 2.2.23. $\overline{\alpha} : \overline{I} \subseteq \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D}^n$, $\overline{\alpha}(\overline{t}) = \alpha(t) + \varepsilon(t^*\alpha'(t) + \widetilde{\alpha}(t))$ dual analitik fonksiyonu verilsin. $\exists\alpha_i'(t) \neq 0$ $(1 \leq i \leq n)$ ise $\overline{\alpha}$ fonksiyonuna $\mathbf{D}^n$ üzerinde bir $\mathbf{D}-$modül eğrisi denir [28]. $\overline{I}$ cümlesi sonraki bölümlerde açıklanacaktır.

Açıklama 3. $\mathbf{D}^n$ üzerinde $\mathbf{D}-$modül eğrisi bu çalışma boyunca eğri olarak adlandırılacaktır.

Tanım 2.2.24. $\overline{p} = p + \varepsilon p^* \in \mathbf{D}^n$ bir dual nokta ve $\overrightarrow{\overline{v}} = \overrightarrow{v} + \varepsilon \overrightarrow{v}^*$, $\mathbf{D}^n$ üzerinde bir dual vektör olsun. Dual doğrunun denklemi

$$\overline{\alpha}(\overline{t}) = \alpha(t) + \varepsilon\left(t^*\alpha'(t) + \widetilde{\alpha}(t)\right) = p + t\overrightarrow{v} + \varepsilon(t^*\overrightarrow{v} + p^* + t\overrightarrow{v}^*) = \overline{p} + \overline{t}\,\overrightarrow{\overline{v}}$$

biçimindedir [28].

Tanım 2.2.25. $\overline{p} = p + \varepsilon p^* \in \mathbf{D}^n$ bir dual nokta, $\overrightarrow{\overline{v}} = \overrightarrow{v} + \varepsilon \overrightarrow{v}^* \in \mathbf{D}^n$ bir dual vektör ve $\overrightarrow{\overline{X}} \in \chi(\mathbf{D}^n)$ bir dual vektör alanı olsun. $\overline{\alpha} : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D}^n$, $\overline{\alpha}(\overline{t}) = \overline{p} + \overline{t}\,\overrightarrow{\overline{v}}$ bir dual doğru olmak üzere, $\overrightarrow{\overline{X}}$ dual vektör alanını $\overline{\alpha}$ eğrisine kısıtlayalım.

$$\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{v}}_{\overline{p}}}\overrightarrow{\overline{X}} = \frac{d}{d\overline{t}}\overrightarrow{\overline{X}}\left(\overline{p} + \overline{t}\,\overrightarrow{\overline{v}}\right)|_{\overline{t}=\overline{0}}$$

dual tanjant vektörüne $\overrightarrow{\overline{X}}$ dual vektör alanının $\overrightarrow{v}_{\overline{p}}$ dual tanjant vektörüne göre kovaryant türevi denir ve

$$\begin{aligned}
\overline{D}_{\overrightarrow{v}_{\overline{p}}}\overrightarrow{\overline{X}} &= D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}\overrightarrow{X}+\varepsilon\left(D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}\overrightarrow{X}^{0}+D_{\overrightarrow{v}^{*}_{\widetilde{p}}}\overrightarrow{X}\right)\\
&= D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}\overrightarrow{X}+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}p_i^{*}D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}\overrightarrow{X}_{x_i}+D_{\overrightarrow{v}_{\widetilde{p}}}\overrightarrow{\widetilde{X}}+D_{\overrightarrow{v}^{*}_{\widetilde{p}}}\overrightarrow{X}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir [28].

3 . DUAL UZAYDA İÇ ÇARPIM, NORM, METRİK ve TOPOLOJİ

3.1. Dual İç Çarpım, Dual Norm ve Dual Metrik

Bu bölümde, öncelikle dual sayılar sistemi üzerinde bir sıralama bağıntısı tanımlanacaktır. Bu bağıntının yardımıyla dual iç çarpım, norm ve uzaklık fonksiyonu kavramları detaylı bir şekilde incelenecektir.

Tanım 3.1.1. A boştan farklı bir cümle ve bu cümle üzerinde bir $\mathbf{C}$ bağıntısı verilsin.
$i)$ $\forall a,b \in A$ için $a\mathbf{C}b$ veya $b\mathbf{C}a$ dır. Burada, $a \neq b$ dir.
$ii)$ Herhangi bir $a \in A$ için $a\mathbf{C}a$ özelliği mevcut değildir.
$iii)$ $\forall a,b,c \in A$ için $a\mathbf{C}b$ ve $b\mathbf{C}c$ iken $a\mathbf{C}c$ dir.
Yukarıdaki özellikler sağlanıyorsa $\mathbf{C}$ bağıntısına A cümlesi üzerinde bir sıralama bağıntısı denir [22].

Tanım 3.1.2. (Sözlük Sıralama Bağıntısı) İki sözcük verildiğinde ilk olarak sözcüklerin ilk harfleri karşılaştırılır ve alfabedeki harf sırasına göre sıralama yapılır. Eğer sözcüklerin ilk harfleri aynı ise ikinci harflerine bakılarak alfabedeki sıraya göre sıralama yapılır ve bu şekilde sıralama devam eder [22].

Şimdi bu tanımı matematiksel olarak ifade edelim.

Tanım 3.1.3. A ve B, sırasıyla $<_A$ ve $<_B$ bağıntılarına sahip boştan farklı iki cümle olsun. (a_1,b_1) ve $(a_2,b_2) \in A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ için $(a_1,b_1) < (a_2,b_2)$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanır:
$1)$ Bu ikililerin ilk bileşenleri karşılaştırılır ve $a_1 <_A a_2$ olmalıdır.
$2)$ Eğer bu ikililerin ilk bileşenleri eşit ise ikinci bileşenleri karşılaştırılır ve $b_1 <_B b_2$ olmalıdır [22].

Yukarıdaki tanımlar ışığında dual sayılar arasında kullanacağımız sıralamayı tanımlayalım.

Tanım 3.1.4. $\bar{x} = x + \varepsilon x^*$ ve $\bar{y} = y + \varepsilon y^*$ dual sayılar olsun. Bu dual sayılar arasındaki $\bar{x} <_{\mathbf{D}} \bar{y}$ (sırasıyla $\bar{x} \leq_{\mathbf{D}} \bar{y}$) sıralaması aşağıdaki gibidir:

1) İlk olarak, bu dual sayıların reel kısımları karşılaştırılır ve $x < y$ (sırasıyla $x < y$) olmalıdır.

2) Eğer dual sayıların reel kısımları eşit ise bu sayıların dual kısımları karşılaştırılır ve $x^* < y^*$ (sırasıyla $x^* \leq y^*$) olmalıdır.

Buna göre, yukarıdaki tanım göz önüne alınarak, aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.1.1. $\bar{x} = x + \varepsilon x^*$ ve $\bar{y} = y + \varepsilon y^*$ dual sayıları verilsin. Aşağıdaki ifadeleri yazmak mümkündür.

1) $\bar{x} <_{\mathbf{D}} \bar{y}$ gerek ve yeter şart $x < y$ veya ($x = y$ ve $x^* < y^*$).

2) $\bar{x} \leq_{\mathbf{D}} \bar{y}$ gerek ve yeter şart $x < y$ veya ($x = y$ ve $x^* \leq y^*$).

Teorem 3.1.5. $\bar{x} = x + \varepsilon x^*$, $\bar{y} = y + \varepsilon y^*$ ve $\bar{z} = z + \varepsilon z^*$ dual sayıları verilsin. Yukarıda tanımlanan $<_{\mathbf{D}}$ ve $\leq_{\mathbf{D}}$ bağıntıları aşağıdaki ifadeleri sağlar.

1) Eğer $\bar{x} \neq \bar{y}$ ise bu durumda, $\bar{x} <_{\mathbf{D}} \bar{y}$ veya $\bar{y} <_{\mathbf{D}} \bar{x}$ dir.

2) Eğer $\bar{x} <_{\mathbf{D}} \bar{y}$ ise bu durumda, $\bar{x} \neq \bar{y}$ dir.

3) Eğer $\bar{x} <_{\mathbf{D}} \bar{y}$ ve $\bar{y} <_{\mathbf{D}} \bar{z}$ ise bu durumda, $\bar{x} <_{\mathbf{D}} \bar{z}$ dir.

4) $\bar{x} \leq_{\mathbf{D}} \bar{x}$ dir.

5) Eğer $\bar{x} \leq_{\mathbf{D}} \bar{y}$ ve $\bar{y} \leq_{\mathbf{D}} \bar{x}$ ise bu durumda, $\bar{x} = \bar{y}$ dir.

6) Eğer $\bar{x} \leq_{\mathbf{D}} \bar{y}$ ve $\bar{y} \leq_{\mathbf{D}} \bar{z}$ ise bu durumda, $\bar{x} \leq_{\mathbf{D}} \bar{z}$ dir.

Tanım 3.1.6. $\bar{x} = x + \varepsilon x^*$ bir dual sayı olsun.

$$\mathbf{D}^{+} = \{\bar{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D} \mid x > 0,\ x^* \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbf{D}^{-} = \{\bar{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D} \mid x < 0,\ x^* \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbf{D}^{0+} = \{\bar{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D} \mid x = 0,\ x^* > 0\}$$

$$\mathbf{D}^{0-} = \{\bar{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D} \mid x = 0,\ x^* < 0\}$$

cümleleri sırasıyla dual pozitif, dual negatif, yarı dual pozitif ve yarı dual negatif sayılar olarak adlandırılır.

Teorem 3.1.7. $\mathbf{D}^n$ $n-$boyutlu bir dual uzay ve $\langle,\rangle$ notasyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde Öklid iç çarpımı olmak üzere,

$$\langle,\rangle_{\mathbf{D}} : \mathbf{D}^n \times \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}$$

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle_{\mathbf{D}} = \langle x, y \rangle + \varepsilon \left(\langle x, y^* \rangle + \langle x^*, y \rangle \right)$$

dual fonksiyonu verilsin. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler mevcuttur:

$i)$ (Dual Pozitif Tanımlılık) $\forall \overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n$ için $\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle_{\mathbf{D}} \geq_{\mathbf{D}} \overline{0}$ dır. Ayrıca, $x = 0 \Longleftrightarrow \langle \overline{x}, \overline{x} \rangle_{\mathbf{D}} = \overline{0}$ dir.

$ii)$ (Simetri Özelliği) $\forall \overline{x} = x + \varepsilon x^*, \overline{y} = y + \varepsilon y^* \in \mathbf{D}^n$ için $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle_{\mathbf{D}} = \langle \overline{y}, \overline{x} \rangle_{\mathbf{D}}$ dır.

$iii)$ (Bilineerlik Özelliği) $\forall \overline{x} = x + \varepsilon x^*, \overline{y} = y + \varepsilon y^*, \overline{z} = z + \varepsilon z^* \in \mathbf{D}^n$ ve $\forall \overline{\lambda} = \lambda + \varepsilon \lambda^*, \overline{\mu} = \mu + \varepsilon \mu^* \in \mathbf{D}$ için

$$\left\langle \overline{\lambda}\overline{x} + \overline{\mu}\overline{y}, \overline{z} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{\lambda} \langle \overline{x}, \overline{z} \rangle_{\mathbf{D}} + \overline{\mu} \langle \overline{y}, \overline{z} \rangle_{\mathbf{D}}$$

ve

$$\left\langle \overline{x}, \overline{\lambda}\overline{y} + \overline{\mu}\overline{z} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{\lambda} \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle_{\mathbf{D}} + \overline{\mu} \langle \overline{x}, \overline{z} \rangle_{\mathbf{D}}$$

dır.

İspat. $i)$ $\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n$ bir dual vektör olsun. $\langle,\rangle_{\mathbf{D}}$ fonksiyonu tanımından,

$$\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle_{\mathbf{D}} = \langle x, x \rangle + 2\varepsilon \langle x, x^* \rangle$$

şeklinde olup $x = 0$ ise $\langle,\rangle$ notasyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde Öklid iç çarpımı olduğundan dolayı $\langle x, x \rangle = 0$ ve $\langle x, x^* \rangle = 0$ dır. O halde, $\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle_{\mathbf{D}} = \overline{0}$ dir. Diğer yandan, $\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle_{\mathbf{D}} = \langle x, x \rangle + 2\varepsilon \langle x, x^* \rangle = \overline{0}$ olması durumunda $x = 0$ olduğu açıktır. Eğer $x \neq 0$ ise bu durumda, $\langle x, x \rangle > 0$ dır. $\mathbf{D}$ üzerindeki sıralama bağıntısından $\forall \overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n$ için $\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle_{\mathbf{D}} \geq_{\mathbf{D}} \overline{0}$ elde edilir.

$ii)$ $\forall \overline{x} = x + \varepsilon x^*, \overline{y} = y + \varepsilon y^* \in \mathbf{D}^n$ için

$$\begin{aligned}
\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle_{\mathbf{D}} &= \langle x + \varepsilon x^*, y + \varepsilon y^* \rangle_{\mathbf{D}} \\
&= \langle x, y \rangle + \varepsilon \left(\langle x, y^* \rangle + \langle x^*, y \rangle \right) \\
&= \langle y, x \rangle + \varepsilon \left(\langle y, x^* \rangle + \langle y^*, x \rangle \right) \\
&= \langle \overline{y}, \overline{x} \rangle_{\mathbf{D}}
\end{aligned}$$

dir.

iii) $\forall \overline{x} = x + \varepsilon x^*$, $\overline{y} = y + \varepsilon y^*$, $\overline{z} = z + \varepsilon z^* \in \mathbf{D}^n$ ve $\forall \overline{\lambda} = \lambda + \varepsilon \lambda^*$, $\overline{\mu} = \mu + \varepsilon \mu^* \in \mathbf{D}$ için

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{\lambda}\overline{x} + \overline{\mu}\overline{y}, \overline{z} \right\rangle_{\mathbf{D}} &= \langle (\lambda + \varepsilon \lambda^*)(x + \varepsilon x^*) + (\mu + \varepsilon \mu^*)(y + \varepsilon y^*), z + \varepsilon z^* \rangle_{\mathbf{D}} \\
&= \langle \lambda x + \mu y + \varepsilon (\lambda x^* + \lambda^* x + \mu y^* + \mu^* y), z + \varepsilon z^* \rangle_{\mathbf{D}} \\
&= \lambda \langle x, z \rangle + \varepsilon (\lambda \langle x, z^* \rangle + \lambda \langle x^*, z \rangle + \lambda^* \langle x, z \rangle) \\
&\quad + \mu \langle y, z \rangle + \varepsilon (\mu \langle y, z^* \rangle + \mu \langle y^*, z \rangle + \mu^* \langle y, z \rangle) \\
&= (\lambda + \varepsilon \lambda^*)(\langle x, z \rangle + \varepsilon (\langle x, z^* \rangle + \langle x^*, z \rangle)) \\
&\quad + (\mu + \varepsilon \mu^*)(\langle y, z \rangle + \varepsilon (\langle y, z^* \rangle + \langle y^*, z \rangle)) \\
&= \overline{\lambda} \langle \overline{x}, \overline{z} \rangle_{\mathbf{D}} + \overline{\mu} \langle \overline{y}, \overline{z} \rangle_{\mathbf{D}}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{x}, \overline{\lambda}\overline{y} + \overline{\mu}\overline{z} \right\rangle_{\mathbf{D}} &= \langle x + \varepsilon x^*, (\lambda + \varepsilon \lambda^*)(y + \varepsilon y^*) + (\mu + \varepsilon \mu^*)(z + \varepsilon z^*) \rangle_{\mathbf{D}} \\
&= \langle x + \varepsilon x^*, \lambda y + \mu z + \varepsilon (\lambda y^* + \lambda^* y + \mu z^* + \mu^* z) \rangle_{\mathbf{D}} \\
&= \lambda \langle x, y \rangle + \varepsilon (\lambda \langle x, y^* \rangle + \lambda^* \langle x, y \rangle + \lambda \langle x^*, y \rangle) \\
&\quad + \mu \langle x, z \rangle + \varepsilon (\mu \langle x, z^* \rangle + \mu^* \langle x, z \rangle + \mu \langle x^*, z \rangle) \\
&= (\lambda + \varepsilon \lambda^*)(\langle x, y \rangle + \varepsilon (\langle x, y^* \rangle + \langle x^*, y \rangle)) \\
&\quad + (\mu + \varepsilon \mu^*)(\langle x, z \rangle + \varepsilon (\langle x, z^* \rangle + \langle x^*, z \rangle)) \\
&= \overline{\lambda} \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle_{\mathbf{D}} + \overline{\mu} \langle \overline{x}, \overline{z} \rangle_{\mathbf{D}}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır [30]. □

Tanım 3.1.8. $\mathbf{D}^n$ $n-$boyutlu bir dual uzay ve $\langle , \rangle$ notasyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde Öklid iç çarpımı olmak üzere,

$$\langle , \rangle_{\mathbf{D}} : \mathbf{D}^n \times \mathbf{D}^n \to \mathbf{D}$$

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle_{\mathbf{D}} = \langle x, y \rangle + \varepsilon (\langle x, y^* \rangle + \langle x^*, y \rangle)$$

dual fonksiyonuna $\mathbf{D}^n$ üzerinde dual iç çarpım fonksiyonu ve $(\mathbf{D}^n, \langle , \rangle_{\mathbf{D}})$ ikilisine de dual iç çarpım uzayı adı verilir.

Teorem 3.1.9. $\mathbf{D}^n$ $n-$boyutlu bir dual uzay ve $\|.\|, \mathbb{R}^n$ üzerinde norm olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|.\|_{\mathbf{D}} &: \mathbf{D}^n \to \mathbf{D} \\ \|\overline{x}\|_{\mathbf{D}} &= \sqrt{\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle_{\mathbf{D}}} = \begin{cases} \overline{0} & , x = 0 \\ \|x\| + \varepsilon \dfrac{\langle x, x^* \rangle}{\|x\|} & , x \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

dual fonksiyonu verilsin. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler mevcuttur:

i) $\forall \overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n$ için $\|\overline{x}\|_{\mathbf{D}} \geq_{\mathbf{D}} \overline{0}$ dir.

ii) $\forall \overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n$ ve $\forall \overline{\lambda} = \lambda + \varepsilon \lambda^* \in \mathbf{D}$ için $\left\|\overline{\lambda}\overline{x}\right\|_{\mathbf{D}} = \left|\overline{\lambda}\right|_{\mathbf{D}} . \|\overline{x}\|_{\mathbf{D}}$ dir.

iii) $\overline{x} = x + \varepsilon x^*, \overline{y} = y + \varepsilon y^* \in \mathbf{D}^n$ için $x = 0$, $y \neq 0$ ve $\langle x^*, y \rangle \geq 0$ (veya $x \neq 0$, $y = 0$ ve $\langle x, y^* \rangle \geq 0$) şartları sağlanması durumunda

$$\|\overline{x} + \overline{y}\|_{\mathbf{D}} \geq_{\mathbf{D}} \|\overline{x}\|_{\mathbf{D}} + \|\overline{y}\|_{\mathbf{D}}$$

dual eşitsizliği elde edilir. Diğer bütün durumlarda,

$$\|\overline{x} + \overline{y}\|_{\mathbf{D}} \leq_{\mathbf{D}} \|\overline{x}\|_{\mathbf{D}} + \|\overline{y}\|_{\mathbf{D}}$$

dual eşitsizliği mevcuttur. Bu özelliğe dual üçgen eşitsizliği adı verilir.

İspat. *i)* $\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n$ bir dual vektör olsun. $x = 0$ ise $\|\overline{x}\|_{\mathbf{D}} = \overline{0}$ dır. Eğer $x \neq 0$ ise bu durumda, $\|x\| > 0$ dır. Böylece, $\mathbf{D}$ üzerindeki sıralama bağıntısından $\|\overline{x}\|_{\mathbf{D}} = \|x\| + \varepsilon \dfrac{\langle x, x^* \rangle}{\|x\|} \geq_{\mathbf{D}} \overline{0}$ elde edilir. Bu durumda, $\forall \overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n$ için $\|\overline{x}\|_{\mathbf{D}} \geq_{\mathbf{D}} \overline{0}$ dir.

ii) $\forall \overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n$ ve $\forall \overline{\lambda} = \lambda + \varepsilon \lambda^* \in \mathbf{D}$ için

$$\begin{aligned} \left\|\overline{\lambda}\overline{x}\right\|_{\mathbf{D}} &= \|(\lambda + \varepsilon \lambda^*)(x + \varepsilon x^*)\|_{\mathbf{D}} \\ &= \|\lambda x + \varepsilon (\lambda x^* + \lambda^* x)\|_{\mathbf{D}} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\left\|\overline{\lambda}\overline{x}\right\|_{\mathbf{D}} = \begin{cases} \overline{0} & , \lambda x = 0 \\ \|\lambda x\| + \varepsilon \dfrac{\langle \lambda x, \lambda x^* + \lambda^* x \rangle}{\|\lambda x\|} & , \lambda x \neq 0 \end{cases}$$

yazılabilir. Bu durumda, $\lambda x = 0$ ise $\left\|\overline{\lambda}\overline{x}\right\|_{\mathbf{D}} = \overline{0} = \left|\overline{\lambda}\right|_{\mathbf{D}} . \|\overline{x}\|_{\mathbf{D}}$ dir. Kabul edelim ki

$\lambda x \neq 0$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
\left\| \overline{\lambda} \overline{x} \right\|_{\mathbf{D}} &= \|\lambda x\| + \varepsilon \frac{\langle \lambda x, \lambda x^* + \lambda^* x \rangle}{\|\lambda x\|} \\
&= |\lambda| \, . \, \|x\| + \varepsilon \left(\frac{\lambda^2 \langle x, x^* \rangle + \lambda \lambda^* \langle x, x \rangle}{|\lambda| \, . \, \|x\|} \right) \\
&= \left(|\lambda| + \varepsilon \frac{\lambda \lambda^*}{|\lambda|} \right) \left(\|x\| + \varepsilon \frac{\langle x, x^* \rangle}{\|x\|} \right) \\
&= \left| \overline{\lambda} \right|_{\mathbf{D}} . \, \|\overline{x}\|_{\mathbf{D}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

iii) $\overline{x} = x + \varepsilon x^*$ ve $\overline{y} = y + \varepsilon y^* \in \mathbf{D}^n$ olsun. Teoremin bu öncülünde verilen iki dual eşitsizliğin varlığını aşağıdaki dört durumda inceleyelim.

1) $x = 0$, $y = 0$ olsun. Bu durumda, $\|\overline{x} + \overline{y}\|_{\mathbf{D}} \leq_{\mathbf{D}} \|\overline{x}\|_{\mathbf{D}} + \|\overline{y}\|_{\mathbf{D}}$ yazılabilir.

2) $x = 0$, $y \neq 0$ olsun. O halde,

$$\|\overline{x}\|_{\mathbf{D}} = \overline{0}$$

ve

$$\|\overline{y}\|_{\mathbf{D}} = \|y\| + \varepsilon \frac{\langle y, y^* \rangle}{\|y\|}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\|\overline{x} + \overline{y}\|_{\mathbf{D}} &= \|y + \varepsilon (x^* + y^*)\|_{\mathbf{D}} \\
&= \|y\| + \varepsilon \left(\frac{\langle y, x^* \rangle + \langle y, y^* \rangle}{\|y\|} \right)
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. $\langle y, x^* \rangle \geq 0$ olması durumunda

$$\|\overline{x} + \overline{y}\|_{\mathbf{D}} \geq_{\mathbf{D}} \|\overline{x}\|_{\mathbf{D}} + \|\overline{y}\|_{\mathbf{D}}$$

olduğu açıktır. $\langle y, x^* \rangle \leq 0$ ise

$$\|\overline{x} + \overline{y}\|_{\mathbf{D}} \leq_{\mathbf{D}} \|\overline{x}\|_{\mathbf{D}} + \|\overline{y}\|_{\mathbf{D}}$$

elde edilir.

3) $x \neq 0$, $y = 0$ olsun. (2) öncülüne benzer şekilde birtakım matematiksel hesaplamalar

yapılırsa $\langle x, y^* \rangle \geq 0$ olması durumunda

$$\|\overline{x}+\overline{y}\|_{\mathbf{D}} \geq_{\mathbf{D}} \|\overline{x}\|_{\mathbf{D}} + \|\overline{y}\|_{\mathbf{D}}$$

olduğu açıktır. $\langle x, y^* \rangle \leq 0$ ise

$$\|\overline{x}+\overline{y}\|_{\mathbf{D}} \leq_{\mathbf{D}} \|\overline{x}\|_{\mathbf{D}} + \|\overline{y}\|_{\mathbf{D}}$$

elde edilir.

4) $x \neq 0$, $y \neq 0$ olsun. Eğer $x = -y$ ise

$$\|\overline{x}+\overline{y}\|_{\mathbf{D}} \leq_{\mathbf{D}} \|\overline{x}\|_{\mathbf{D}} + \|\overline{y}\|_{\mathbf{D}}$$

dual eşitsizliğinin elde edileceği açıktır. Şimdi, $x \neq -y$ olsun. O halde, $\|.\|_{\mathbf{D}}$ dual fonksiyonu tanımından

$$\|\overline{x}+\overline{y}\|_{\mathbf{D}} = \|x+y\| + \varepsilon \frac{\langle x+y, x^*+y^* \rangle}{\|x+y\|}$$

ve

$$\|\overline{x}\|_{\mathbf{D}} + \|\overline{y}\|_{\mathbf{D}} = \|x\| + \|y\| + \varepsilon \left(\frac{\langle x, x^* \rangle}{\|x\|} + \frac{\langle y, y^* \rangle}{\|y\|} \right)$$

elde edilir. $\|.\|$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde norm olduğundan

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

olduğunu biliyoruz.

Kabul edelim ki $\|x+y\| < \|x\| + \|y\|$ olsun. O halde,

$$\|\overline{x}+\overline{y}\|_{\mathbf{D}} \leq_{\mathbf{D}} \|\overline{x}\|_{\mathbf{D}} + \|\overline{y}\|_{\mathbf{D}}$$

olduğu aşikardır.

Şimdi, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ olduğunu göz önüne alalım. Bu durumda,

$$\langle x, y \rangle = \|x\| . \|y\|$$

olduğundan $\mathbb{R}^n$ uzayında x ve y vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere $\cos\theta = 1$ elde edilir. Bu durumda, $x = \mu y$, $\mu \in \mathbb{R}^+$ yazılabilir. Yani, $\mathbb{R}^n$ uzayında x ve y vektörleri lineer bağımlıdır. O halde,

$$\begin{aligned}
\|\overline{x}+\overline{y}\|_{\mathbf{D}} &= \|\mu y + y + \varepsilon (x^* + y^*)\|_{\mathbf{D}} \\
&= \|(\mu+1)y + \varepsilon (x^* + y^*)\|_{\mathbf{D}} \\
&= (\mu+1)\|y\| + \varepsilon \frac{\langle (\mu+1)y, x^* + y^* \rangle}{(\mu+1)\|y\|}
\end{aligned}$$

şeklinde olup biliyoruz ki $\langle , \rangle$ notasyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde Öklid iç çarpımı olduğundan bilineerlik özelliğine sahiptir. Bu bilgiden hareketle aşağıdaki ifadenin yazılabileceği açıktır:

$$\begin{aligned}
\|\overline{x}+\overline{y}\|_{\mathbf{D}} &= \mu\|y\| + \|y\| + \varepsilon \left(\frac{\langle y, x^* \rangle}{\|y\|} + \frac{\langle y, y^* \rangle}{\|y\|} \right) \\
&= \|\mu y\| + \varepsilon \frac{\langle \mu y, x^* \rangle}{\|\mu y\|} + \|y\| + \varepsilon \frac{\langle y, y^* \rangle}{\|y\|} \\
&= \|x + \varepsilon x^*\|_{\mathbf{D}} + \|y + \varepsilon y^*\|_{\mathbf{D}} \\
&= \|\overline{x}\|_{\mathbf{D}} + \|\overline{y}\|_{\mathbf{D}} .
\end{aligned}$$

Buradan,

$$\|\overline{x}+\overline{y}\|_{\mathbf{D}} \leq_{\mathbf{D}} \|\overline{x}\|_{\mathbf{D}} + \|\overline{y}\|_{\mathbf{D}}$$

yazmak mümkündür. Böylece ispat tamamlanır [30]. □

Tanım 3.1.10. $\mathbf{D}^n$ $n-$boyutlu bir dual uzay ve $\|.\|, \mathbb{R}^n$ üzerinde norm olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\|\cdot\|_{\mathbf{D}} &: \mathbf{D}^n \to \mathbf{D} \\
\|\overline{x}\|_{\mathbf{D}} &= \sqrt{\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle_{\mathbf{D}}} = \begin{cases} \overline{0} & , x = 0 \\ \|x\| + \varepsilon \dfrac{\langle x, x^* \rangle}{\|x\|} & , x \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

dual fonksiyonuna $\mathbf{D}^n$ üzerinde bir dual norm adı verilir.

Açıklama 4. Özel olarak, $\overline{x} = x + \varepsilon x^*$ dual sayısının dual mutlak değeri

$$|\overline{x}|_{\mathbf{D}} = \sqrt{\overline{x}^2} = \begin{cases} \overline{0} & , x = 0 \\ |x| + \varepsilon \dfrac{x x^*}{|x|} & , x \neq 0 \end{cases}$$

biçiminde elde edilir [29].

Teorem 3.1.11. 1) $\overline{x}=x+\varepsilon x^*\in\mathbf{D}$ ve $\overline{a}=a+\varepsilon a^*\in\mathbf{D}^+$ olsun. Bu durumda, $|\overline{x}|_{\mathbf{D}}<_{\mathbf{D}}\overline{a}$ olması için gerek ve yeter şart $-\overline{a}<_{\mathbf{D}}\overline{x}<_{\mathbf{D}}\overline{a}$ olmasıdır.
2) $x=0$ haricindeki $\overline{x}=x+\varepsilon x^*\in\mathbf{D}$ ve $\overline{a}=a+\varepsilon a^*\in\mathbf{D}^+$ olsun. Bu durumda, $|\overline{x}|_{\mathbf{D}}>_{\mathbf{D}}\overline{a}$ olması için gerek ve yeter şart $\overline{x}>_{\mathbf{D}}\overline{a}$ veya $\overline{x}<_{\mathbf{D}}-\overline{a}$ olmasıdır.

Teorem 3.1.12. $\mathbf{D}^n$ $n-$boyutlu bir dual uzay ve $\|.\|,\mathbb{R}^n$ üzerinde norm olmak üzere,

$$\overline{d}:\mathbf{D}^n\times\mathbf{D}^n\to\mathbf{D}$$

$$\overline{d}\left(\overline{x},\overline{y}\right)=\|\overline{x}-\overline{y}\|_{\mathbf{D}}=\begin{cases}\overline{0} & ,x=y\\ \|x-y\|+\varepsilon\dfrac{\langle x-y,x^*-y^*\rangle}{\|x-y\|} & ,x\neq y\end{cases}$$

dual fonksiyonu verilsin. Bu durumda, aşağıdaki üç özellik mevcuttur:
i) $\forall\overline{x}=x+\varepsilon x^*,\overline{y}=y+\varepsilon y^*\in\mathbf{D}^n$ için $\overline{d}\left(\overline{x},\overline{y}\right)\geq_{\mathbf{D}}\overline{0}$ dir.
ii) $\forall\overline{x}=x+\varepsilon x^*,\overline{y}=y+\varepsilon y^*\in\mathbf{D}^n$ için $\overline{d}\left(\overline{x},\overline{y}\right)=\overline{d}\left(\overline{y},\overline{x}\right)$ dir. Yani, $\overline{d}$ fonksiyonu simetri özelliğini sağlar.
iii) $\overline{x}=x+\varepsilon x^*,\overline{y}=y+\varepsilon y^*,\overline{z}=z+\varepsilon z^*\in\mathbf{D}^n$ için $x-y=0$, $y-z\neq 0$ ve $\langle x^*-y^*,y-z\rangle\geq 0$ (veya $x-y\neq 0$, $y-z=0$ ve $\langle x-y,y^*-z^*\rangle\geq 0$) şartları sağlanması durumunda

$$\overline{d}\left(\overline{x},\overline{z}\right)\geq_{\mathbf{D}}\overline{d}\left(\overline{x},\overline{y}\right)+\overline{d}\left(\overline{y},\overline{z}\right)$$

dual eşitsizliği elde edilir. Diğer bütün durumlarda,

$$\overline{d}\left(\overline{x},\overline{z}\right)\leq_{\mathbf{D}}\overline{d}\left(\overline{x},\overline{y}\right)+\overline{d}\left(\overline{y},\overline{z}\right)$$

dual eşitsizliği mevcuttur. Bu özelliğe dual üçgen eşitsizliği adı verilir.

İspat. *i)* $\overline{x}=x+\varepsilon x^*,\overline{y}=y+\varepsilon y^*\in\mathbf{D}^n$ iki dual vektör olsun. $x=y$ ise $\overline{d}\left(\overline{x},\overline{y}\right)=\overline{0}$ dir. $x\neq y$ olması durumunda, $\|x-y\|>0$ dır. O halde,

$$\overline{d}\left(\overline{x},\overline{y}\right)=\|x-y\|+\varepsilon\frac{\langle x-y,x^*-y^*\rangle}{\|x-y\|}\geq_{\mathbf{D}}\overline{0}$$

dual eşitsizliği elde edilir. $\forall\overline{x}=x+\varepsilon x^*,\overline{y}=y+\varepsilon y^*\in\mathbf{D}^n$ için $\overline{d}\left(\overline{x},\overline{y}\right)\geq_{\mathbf{D}}\overline{0}$ dir.
ii) $\forall\overline{x}=x+\varepsilon x^*$ ve $\overline{y}=y+\varepsilon y^*\in\mathbf{D}^n$ için $\overline{d}\left(\overline{x},\overline{y}\right)=\overline{d}\left(\overline{y},\overline{x}\right)$ olduğu açıktır.

$iii)$ $\overline{x} = x + \varepsilon x^*, \overline{y} = y + \varepsilon y^*$ ve $\overline{z} = z + \varepsilon z^* \in \mathbf{D}^n$ olsun. Bu öncül için verilen iki dual eşitsizliğin varlığını aşağıdaki dört durumda inceleyelim.

$1)$ $x = y = z$ olsun. O halde,

$$\overline{d}(\overline{x}, \overline{z}) \leq_{\mathbf{D}} \overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) + \overline{d}(\overline{y}, \overline{z})$$

yazılabilir.

$2)$ $x = y$ ve $y \neq z$ olsun. O halde, $\overline{d}$ fonksiyonunun tanımından

$$\overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{0},$$

$$\overline{d}(\overline{y}, \overline{z}) = \|y - z\| + \varepsilon \frac{\langle y - z, y^* - z^* \rangle}{\|y - z\|}$$

ve

$$\overline{d}(\overline{x}, \overline{z}) = \|x - z\| + \varepsilon \frac{\langle x - z, x^* - z^* \rangle}{\|x - z\|}$$

elde edilir.

$$\overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) + \overline{d}(\overline{y}, \overline{z}) = \|y - z\| + \varepsilon \frac{\langle y - z, y^* - z^* \rangle}{\|y - z\|}$$

ve $x = y$ olduğundan

$$\begin{aligned} \overline{d}(\overline{x}, \overline{z}) &= \|x - z\| + \varepsilon \frac{\langle x - z, x^* - z^* \rangle}{\|x - z\|} \\ &= \|y - z\| + \varepsilon \frac{\langle y - z, x^* - z^* \rangle}{\|y - z\|} \\ &= \|y - z\| + \varepsilon \frac{\langle x^* - y^*, y - z \rangle + \langle y - z, y^* - z^* \rangle}{\|y - z\|} \end{aligned}$$

bulunur. O halde, yukarıdaki bilgiler ışığında $\langle x^* - y^*, y - z \rangle \geq 0$ olması durumunda

$$\overline{d}(\overline{x}, \overline{z}) \geq_{\mathbf{D}} \overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) + \overline{d}(\overline{y}, \overline{z})$$

elde edilir. $\langle x^* - y^*, y - z \rangle \leq 0$ olması halinde

$$\overline{d}(\overline{x}, \overline{z}) \leq_{\mathbf{D}} \overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) + \overline{d}(\overline{y}, \overline{z})$$

bulunur.

3) $x \neq y$ ve $y = z$ olsun. Eğer $\langle x-y, y^{*}-z^{*}\rangle \geq 0$ ise

$$\overline{d}\,(\bar{x},\bar{z}) \geq_{\mathbf{D}} \overline{d}\,(\bar{x},\bar{y}) + \overline{d}\,(\bar{y},\bar{z})$$

dual eşitsizliği elde edilir. $\langle x-y, y^{*}-z^{*}\rangle \leq 0$ olması durumunda

$$\overline{d}\,(\bar{x},\bar{z}) \leq_{\mathbf{D}} \overline{d}\,(\bar{x},\bar{y}) + \overline{d}\,(\bar{y},\bar{z})$$

bulunur.

4) $x \neq y$ ve $y \neq z$ olsun. Eğer $x = z$ ise

$$\overline{d}\,(\bar{x},\bar{z}) \leq_{\mathbf{D}} \overline{d}\,(\bar{x},\bar{y}) + \overline{d}\,(\bar{y},\bar{z})$$

dual eşitsizliğinin elde edileceği açıktır. Şimdi, $x \neq z$ olsun. Bu durumda, $\overline{d}$ fonksiyonunun tanımından

$$\overline{d}\,(\bar{x},\bar{z}) = \|x-z\| + \varepsilon \frac{\langle x-z, x^{*}-z^{*}\rangle}{\|x-z\|}$$

ve

$$\overline{d}\,(\bar{x},\bar{y}) + \overline{d}\,(\bar{y},\bar{z}) = \|x-y\| + \|y-z\| + \varepsilon \left(\frac{\langle x-y, x^{*}-y^{*}\rangle}{\|x-y\|} + \frac{\langle y-z, y^{*}-z^{*}\rangle}{\|y-z\|} \right)$$

olduğu açıktır. $\|.\|, \mathbb{R}^{n}$ üzerinde norm olduğundan

$$\|x-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\|$$

elde edilir. Eğer

$$\|x-z\| < \|x-y\| + \|y-z\|$$

ise **D** üzerindeki sıralama bağıntısından

$$\overline{d}\,(\bar{x},\bar{z}) \leq_{\mathbf{D}} \overline{d}\,(\bar{x},\bar{y}) + \overline{d}\,(\bar{y},\bar{z})$$

dual eşitsizliği kolaylıkla elde edilir. $\|x-z\| = \|x-y\| + \|y-z\|$ olması durumunda

$$\|x-y\|\,\|y-z\| = \langle x-y, y-z\rangle$$

olarak bulunur. Bu durumda, $x-y$ ve $y-z$ vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere $\cos\theta = 1$ dir. O halde, $x-y=\mu\left(y-z\right), \mu \in \mathbb{R}^{+}$ yazılabilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\frac{\langle x-z, x^{*}-z^{*}\rangle}{\|x-z\|} &= \frac{\langle x-y+y-z, x^{*}-z^{*}\rangle}{\|x-y+y-z\|} \\
&= \frac{\langle \mu\left(y-z\right)+y-z, x^{*}-z^{*}\rangle}{\|\mu\left(y-z\right)+y-z\|} \\
&= \frac{\left(\mu+1\right)\langle y-z, x^{*}-z^{*}\rangle}{\left(\mu+1\right)\|y-z\|} \\
&= \frac{\langle y-z, x^{*}-z^{*}\rangle}{\|y-z\|} \\
&= \frac{\langle y-z, x^{*}-y^{*}\rangle}{\|y-z\|} + \frac{\langle y-z, y^{*}-z^{*}\rangle}{\|y-z\|} \\
&= \frac{\langle \mu\left(y-z\right), x^{*}-y^{*}\rangle}{\|\mu\left(y-z\right)\|} + \frac{\langle y-z, y^{*}-z^{*}\rangle}{\|y-z\|} \\
&= \frac{\langle x-y, x^{*}-y^{*}\rangle}{\|x-y\|} + \frac{\langle y-z, y^{*}-z^{*}\rangle}{\|y-z\|}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde,

$$\overline{d}\left(\overline{x},\overline{z}\right) \leq_{\mathbf{D}} \overline{d}\left(\overline{x},\overline{y}\right) + \overline{d}\left(\overline{y},\overline{z}\right)$$

yazmak mümkündür. Böylece ispat tamamlanır [30]. □

Tanım 3.1.13. $\mathbf{D}^{n}$ $n-$boyutlu bir dual uzay ve $\|.\|, \mathbb{R}^{n}$ üzerinde norm olmak üzere,

$$\overline{d} : \mathbf{D}^{n} \times \mathbf{D}^{n} \to \mathbf{D}$$

$$\overline{d}\left(\overline{x},\overline{y}\right) = \|\overline{x}-\overline{y}\|_{\mathbf{D}} = \begin{cases} \overline{0} & , x = y \\ \|x-y\| + \varepsilon \dfrac{\langle x-y, x^{*}-y^{*}\rangle}{\|x-y\|} & , x \neq y \end{cases}$$

dual fonksiyonuna $\mathbf{D}^{n}$ üzerinde dual uzaklık fonksiyonu veya dual metrik adı verilir.

3.2. Dual Baz ve Topoloji

Bu bölümde, önceki bölümde tanımlanan dual sıralama bağıntısı ve dual uzaklık fonksiyonu yardımıyla $\mathbf{D}$ ve $\mathbf{D}^{2}$ dual uzaylarında birer baz belirleyelim ve daha sonra oluşturduğumuz bazlardan elde ettiğimiz topolojilerin bazı elemanlarının sırasıyla $\mathbb{R}^{2}$ ve $\mathbb{R}^{3}$ uzayındaki modellemesini gösterelim.

Tanım 3.2.1. $\overline{a} = a + \varepsilon a^* \in \mathbf{D}$ ve $\overline{r} = r + \varepsilon r^* \in \mathbf{D}^+$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\overline{B}(\overline{a},\overline{r}) &= \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D} \mid |x-a| < r,\ x^* \in \mathbb{R}\} \\ &\quad \cup \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D} \mid |x-a| = r \text{ ve } \frac{(x-a)(x^*-a^*)}{|x-a|} < r^*\right\} \\ &= U_1 \cup U_2\end{aligned}$$

cümlesine $\mathbf{D}$ uzayında $\overline{a}$ merkezli ve $\overline{r}$ yarıçaplı dual açık yuvar adı verilir. Burada,

$$\begin{aligned}U_2 &= \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D} \mid x = a + r \text{ ve } x^* < a^* + r^*\} \\ &\quad \cup \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D} \mid x = a - r \text{ ve } x^* > a^* - r^*\} \\ &= C_1 \cup C_2\end{aligned}$$

biçimindedir.

Teorem 3.2.2. $\overline{a} = a + \varepsilon a^* \in \mathbf{D}$ ve $\overline{r} = r + \varepsilon r^* \in \mathbf{D}^+$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\overline{B}(\overline{a},\overline{r}) &= \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D} \mid |x-a| < r,\ x^* \in \mathbb{R}\} \\ &\quad \cup \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D} \mid |x-a| = r \text{ ve } \frac{(x-a)(x^*-a^*)}{|x-a|} < r^*\right\} \\ &= U_1 \cup C_1 \cup C_2\end{aligned}$$

olsun. Bu durumda,

$$U_3 = \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D} \mid x = a',\ m < x^* < n,\ m,n \in \overline{\mathbb{R}}\}$$

olup bütün U_1, C_1, C_2 ve U_3 cümlelerinin kolleksiyonu $\mathbf{D}$ üzerinde $\overline{\beta}$ bazını oluşturur.

İspat. *i*)

$$\bigcup_{\overline{A} \in \overline{\beta}} \overline{A} = \mathbf{D}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

ii) $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \emptyset$ dışındaki bütün $\overline{A}_1, \overline{A}_2 \in \overline{\beta}$ için $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$ cümlesinin $\overline{\beta}$ sınıfına ait birtakım cümlelerin birleşimi şeklinde yazılabileceğini yani,

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \bigcup_{\overline{A} \in \mathscr{A} \subseteq \overline{\beta}} \overline{A}$$

olduğunu gösterelim. Burada, $\overline{\mathscr{A}}$, $\overline{\beta}$ sınıfının bazı elemanlarından oluşan bir sınıftır.

$$\begin{aligned}
\overline{B}_1(\overline{a}_1,\overline{r}_1) &= \{\overline{x}=x+\varepsilon x^*\in\mathbf{D} \mid |x-a_1|<r_1, x^*\in\mathbb{R}\} \\
&\quad \cup\left\{\overline{x}=x+\varepsilon x^*\in\mathbf{D} \mid |x-a_1|=r_1 \text{ ve } \frac{(x-a_1)(x^*-a_1^*)}{|x-a_1|}<r_1^*\right\} \\
&= U_1\cup C_1\cup C_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{B}_2(\overline{a}_2,\overline{r}_2) &= \{\overline{x}=x+\varepsilon x^*\in\mathbf{D} \mid |x-a_2|<r_2, x^*\in\mathbb{R}\} \\
&\quad \cup\left\{\overline{x}=x+\varepsilon x^*\in\mathbf{D} \mid |x-a_2|=r_2 \text{ ve } \frac{(x-a_2)(x^*-a_2^*)}{|x-a_2|}<r_2^*\right\} \\
&= U_1'\cup C_1'\cup C_2',
\end{aligned}$$

$$U_3^1=\left\{\overline{x}=x+\varepsilon x^*\in\mathbf{D} \mid x=a_1', m_1<x^*<n_1,\ m_1,n_1\in\overline{\mathbb{R}}\right\}$$

ve

$$U_3^2=\left\{\overline{x}=x+\varepsilon x^*\in\mathbf{D} \mid x=a_2', m_2<x^*<n_2,\ m_2,n_2\in\overline{\mathbb{R}}\right\}$$

olsun. Kabul edelim ki $\overline{y}\in\overline{A}_1\cap\overline{A}_2$ olsun. O halde, aşağıdaki durumlar mevcuttur:

1) $\overline{y}\in U_3^1\cap U_3^2$ olmak üzere, $y=a_1'$, $m_1<y^*<n_1$ ve $y=a_2'$, $m_2<y^*<n_2$ yazılabilir. Bu durumda, $y=a_1'=a_2'=a$, $m=\max\{m_1,m_2\}$ ve $n=\min\{n_1,n_2\}$ denilirse

$$\overline{A}_1\cap\overline{A}_2=\{\overline{x}=x+\varepsilon x^*\in\mathbf{D} \mid x=a,\ m<x^*<n\}\in\overline{\beta}$$

elde edilir.

2) $\overline{y}\in U_1\cap U_3^2$ olmak üzere, $|y-a_1|<r_1$, $y^*\in\mathbb{R}$ ve $y=a_2'$, $m_2<y^*<n_2$ yazılabilir. Bu durumda,

$$\overline{A}_1\cap\overline{A}_2=\left\{\overline{x}=x+\varepsilon x^*\in\mathbf{D} \mid x=a_2',\ m_2<x^*<n_2\right\}\in\overline{\beta}$$

bulunur.

3) $\overline{y}\in C_1\cap U_3^2$ olmak üzere, $y=a_1+r_1$, $y^*<a_1^*+r_1^*$ ve $y=a_2'$, $m_2<y^*<n_2$ yazılabilir. O halde, $y=a_1+r_1=a_2'=a$ ve $n=\min\{a_1^*+r_1^*,n_2\}$ denilirse,

$$\overline{A}_1\cap\overline{A}_2=\{\overline{x}=x+\varepsilon x^*\in\mathbf{D} \mid x=a,\ m_2<x^*<n\}\in\overline{\beta}$$

elde edilir.

Şimdi de $\overline{y} \in C_2 \cap U_3^2$ olmak üzere, $y = a_1 - r_1$, $y^* > a_1^* - r_1^*$ ve $y = a_2'$, $m_2 < y^* < n_2$ yazılabilir. O halde, $y = a_1 - r_1 = a_2' = a$ ve $m = \max\{a_1^* - r_1^*, m_2\}$ alınırsa,

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D} \mid x = a,\ m < x^* < n_2\} \in \overline{\beta}$$

bulunur.

4) $\overline{y} \in U_1 \cap U_1'$ olmak üzere, $|y - a_1| < r_1$, $y^* \in \mathbb{R}$ ve $|y - a_2| < r_2$, $y^* \in \mathbb{R}$ yazılabilir. Bu durumda, $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$ cümlesi

$$U_1 = \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D} \mid |x - a| < r, x^* \in \mathbb{R}\}$$

biçimindeki $\overline{\beta}$ sınıfına ait birtakım cümlelerin keyfi birleşimleri şeklinde yazılabilir. Yani,

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \bigcup_{i \in I} U_1^i$$

elde edilir. Burada, $I = \{1, 2, 3, ...\}$ dır.

5) $\overline{y} \in U_1 \cap C_1'$ olmak üzere, $|y - a_1| < r_1$, $y^* \in \mathbb{R}$ ve $y = a_2 + r_2 = a$, $y^* < a_2^* + r_2^*$ olup

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D} \mid x = a,\ x^* < a_2^* + r_2^*\} \in \overline{\beta}$$

elde edilir.

Şimdi de, $\overline{y} \in U_1 \cap C_2'$ olmak üzere, $|y - a_1| < r_1$, $y^* \in \mathbb{R}$ ve $y = a_2 - r_2 = a$, $y^* > a_2^* - r_2^*$ yazılabilir. O halde,

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D} \mid x = a,\ a_2^* - r_2^* < x^*\} \in \overline{\beta}$$

bulunur.

6) $\overline{y} \in C_1 \cap C_1'$ olmak üzere, $y = a_1 + r_1$, $y^* < a_1^* + r_1^*$ ve $y = a_2 + r_2$,$y^* < a_2^* + r_2^*$ yazılabilir. Bu durumda, $y = a_1 + r_1 = a_2 + r_2 = a$ ve $a^* + r^* = \min\{a_1^* + r_1^*, a_2^* + r_2^*\}$ denilirse

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D} \mid x = a,\ x^* < a^* + r^*\} \in \overline{\beta}$$

elde edilir.

$\overline{y} \in C_1 \cap C_2'$ olmak üzere, $y = a_1 + r_1$, $y^* < a_1^* + r_1^*$ ve $y = a_2 - r_2$, $y^* > a_2^* - r_2^*$ yazılabilir. Bu durumda, $y = a_1 + r_1 = a_2 - r_2 = a$ denilirse

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D} \mid x = a,\ a_2^* - r_2^* < x^* < a_1^* + r_1^*\} \in \overline{\beta}$$

bulunur.

$\overline{y} \in C_2 \cap C_1'$ olmak üzere, $y = a_1 - r_1$, $y^* > a_1^* - r_1^*$ ve $y = a_2 + r_2$,$y^* < a_2^* + r_2^*$ yazılabilir. Bu durumda, $y = a_1 - r_1 = a_2 + r_2 = a$ denilirse

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D} \mid x = a,\ a_1^* - r_1^* < x^* < a_2^* + r_2^*\} \in \overline{\beta}$$

elde edilir.

$\overline{y} \in C_2 \cap C_2'$ olmak üzere, $y = a_1 - r_1$, $y^* > a_1^* - r_1^*$ ve $y = a_2 - r_2$, $y^* > a_2^* - r_2^*$ olsun. Bu durumda, $y = a_1 - r_1 = a_2 - r_2 = a$ ve $a^* - r^* = \max\{a_1^* - r_1^*, a_2^* - r_2^*\}$ denilirse

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D} \mid x = a,\ a^* - r^* < x^*\} \in \overline{\beta}$$

bulunur.

Diğer durumlar için çözümler yukarıdaki öncüllere benzer şekilde kolaylıkla gösterilebilir.

Sonuç olarak, $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \neq \varnothing$ olacak şekildeki $\forall \overline{A}_1, \overline{A}_2 \in \overline{\beta}$ için $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \bigcup\limits_{\overline{A} \in \overline{\mathscr{A}} \subseteq \overline{\beta}} \overline{A}$ dır. (i) ve (ii) şartları sağlandığından dolayı $\overline{\beta}$, $\mathbf{D}$ üzerinde bir bazdır. Böylece ispat tamamlanır. □

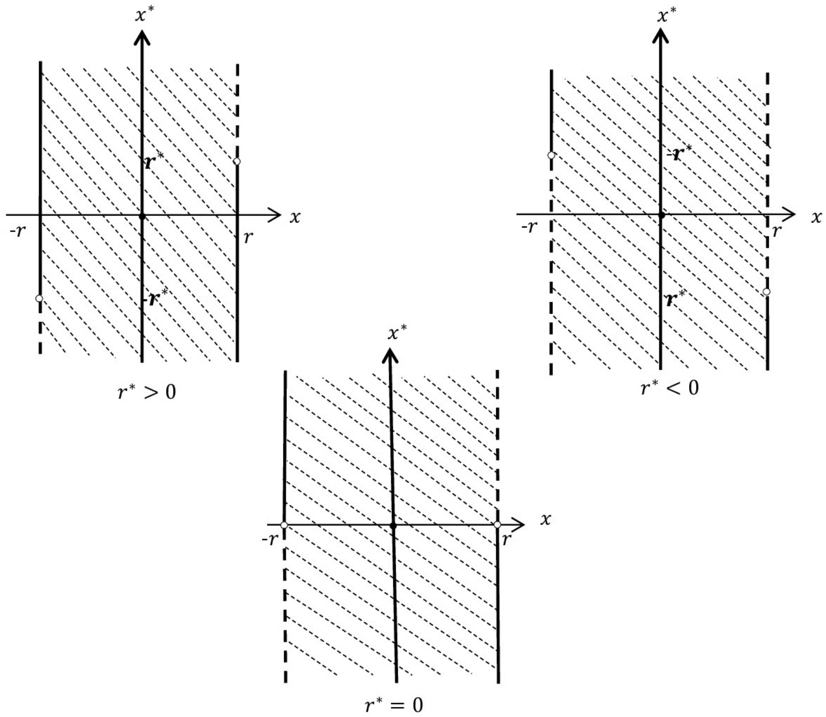
Yukarıda $\mathbf{D}$ için oluşturduğumuz bazdaki elemanların keyfi birleşimleri $\overline{\tau}_{\overline{d}}$ topolojisini oluşturur. Bu durumda, yukarıda tanımladığımız $\overline{B}(\overline{a}, \overline{r})$ dual açık yuvarı $\overline{\tau}_{\overline{d}}$ topolojisine göre dual açık cümledir. $\mathbf{D}$ uzayındaki orijin merkezli ve $\overline{r} = r + \varepsilon r^* \in \mathbf{D}^+$ yarıçaplı dual açık yuvar

$$\begin{aligned} \overline{B}\left(\overline{0}, \overline{r}\right) &= \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D} \mid |x| < r,\ x^* \in \mathbb{R}\} \\ &\quad \cup \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D} \mid |x| = r \text{ ve } \frac{x.x^*}{|x|} < r^*\right\} \end{aligned}$$

için geometrik modellemeleri belirleyelim.

$i)$ $|x| < r$ olduğunu göz önüne alalım. Bu durumda, $\mathbb{R}$ uzayında mutlak değer fonksiyonunun özelliğinden $-r < x < r$ olduğu açıktır. Burada, $x^* \in \mathbb{R}$ dir.

$ii)$ $|x| = r$ olsun. Böylece, $x = r$ olması durumunda $x^* < r^*$ ve $x = -r$ olması durumunda $x^* > -r^*$ dır. O halde, (i) ve (ii) durumları birlikte göz önüne alındığında r^* reel sayısının durumlarına göre dual açık yuvar $\overline{B}\left(\overline{0},\overline{r}\right)$ için geometrik modellemeler Şekil 3.1. ile gösterilir [30].



Şekil 3.1: $\overline{B}\left(\overline{0},\overline{r}\right)$ yuvarının $\mathbb{R}^2$ uzayındaki modellemesi

Tanım 3.2.3. $\overline{a} = a + \varepsilon a^* \in \mathbf{D}^2$ ve $\overline{r} = r + \varepsilon r^* \in \mathbf{D}^+$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \overline{B}\left(\overline{a},\overline{r}\right) &= \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid \|x-a\| < r,\, x^* \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &\cup \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid \|x-a\| = r \text{ ve } \frac{\langle x-a, x^*-a^*\rangle}{\|x-a\|} < r^*\right\} \\ &= U_1 \cup U_2 \end{aligned}$$

cümlesine $\mathbf{D}^2$ uzayında dual açık yuvar denir. Burada, $k \in I = \{1, 2, ...\}$ için

$$C_k = \left\{ \begin{array}{c} \overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid x = \left(a_1 + r\lambda_1^k, a_2 + r\lambda_2^k\right) \\ \text{ve } \lambda_1^k\left(x_1^* - a_1^*\right) + \lambda_2^k\left(x_1^* - a_1^*\right) < r^* \end{array} \right\}$$

şeklinde olup

$$U_2 = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_k$$

biçimindedir.

Teorem 3.2.4. $\overline{a} = a + \varepsilon a^* \in \mathbf{D}^2$ ve $\overline{r} = r + \varepsilon r^* \in \mathbf{D}^+$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{B}(\overline{a},\overline{r}) &= \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid \|x-a\| < r,\, x^* \in \mathbb{R}^2\right\} \\
&\quad \cup \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid \|x-a\| = r \text{ ve } \frac{\langle x-a, x^*-a^*\rangle}{\|x-a\|} < r^*\right\} \\
&= U_1 \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k
\end{aligned}$$

olsun. Bu durumda,

$$U_3 = \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid x = a', m < x_1^* < n,\ x_2^* = c \in \mathbb{R},\ m,n \in \overline{\mathbb{R}}\right\}$$

olup bütün U_1, U_3, C_k $(k \in I)$ cümlelerinin kolleksiyonu $\mathbf{D}^2$ üzerinde $\overline{\beta}$ bazını oluşturur.

İspat. *i*)

$$\bigcup_{\overline{A}\in\overline{\beta}} \overline{A} = \mathbf{D}^2$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

ii) $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \emptyset$ dışındaki bütün $\overline{A}_1, \overline{A}_2 \in \overline{\beta}$ için $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$ cümlesinin $\overline{\beta}$ sınıfına ait birtakım cümlelerin birleşimi şeklinde yazılabileceğini yani,

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \bigcup_{\overline{A}\in\overline{\mathscr{A}}\subseteq\overline{\beta}} \overline{A}$$

olduğunu gösterelim. Burada, $\overline{\mathscr{A}}$, $\overline{\beta}$ sınıfının bazı elemanlarından oluşan bir sınıftır. Şimdi,

$$\begin{aligned}
\overline{B}_1 &= \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid \|x-a_1\| < r_1,\, x^* \in \mathbb{R}^2\right\} \\
&\quad \cup \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid \|x-a_1\| = r_1 \text{ ve } \frac{\langle x-a_1, x^*-a_1^*\rangle}{\|x-a_1\|} < r_1^*\right\}, \\
&= U_1 \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{B}_2 &= \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid \|x-a_2\| < r_2,\, x^* \in \mathbb{R}^2\right\} \\
&\quad \cup \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid \|x-a_2\| = r_2 \text{ ve } \frac{\langle x-a_2, x^*-a_2^*\rangle}{\|x-a_2\|} < r_2^*\right\}, \\
&= U_1' \cup C_1' \cup C_2' \cup \ldots \cup C_l',
\end{aligned}$$

$$U_3^1 = \left\{\bar{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid x = b', m_1 < x_1^* < n_1,\ x_2^* = c_1 \in \mathbb{R},\ m_1, n_1 \in \overline{\mathbb{R}}\right\}$$

ve

$$U_3^2 = \left\{\bar{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid x = b'', m_2 < x_1^* < n_2,\ x_2^* = c_2 \in \mathbb{R},\ m_2, n_2 \in \overline{\mathbb{R}}\right\}$$

olmak üzere, $\bar{y} \in \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$ olsun. O halde, aşağıdaki durumlar mevcuttur:
1) $\bar{y} \in U_3^1 \cap U_3^2$ olmak üzere, $y = b', m_1 < y_1^* < n_1, y_2^* = c_1 \in \mathbb{R}$ ve $y = b'', m_2 < y_1^* < n_2$, $y_2^* = c_2 \in \mathbb{R}$ yazılabilir. Bu durumda, $y = b' = b'' = a$, $m < y_1^* < n$ ve $y_2^* = c_1 = c_2 = c$ denilirse

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \left\{\bar{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid x = a,\ m < x_1^* < n,\ x_2^* = c \in \mathbb{R}\right\} \in \overline{\beta}$$

elde edilir. Burada, $m = \max\{m_1, m_2\}$ ve $n = \min\{n_1, n_2\}$ dir.
2) $\bar{y} \in U_1 \cap U_3^2$ olmak üzere,

$$\|y - a_1\| < r_1, y^* \in \mathbb{R}^2$$

ve

$$y = b'', m_2 < y_1^* < n_2, y_2^* = c_2 \in \mathbb{R}$$

yazılabilir. Bu durumda,

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \left\{\bar{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid x = b'', m_2 < x_1^* < n_2,\ x_2^* = c_2 \in \mathbb{R}\right\} \in \overline{\beta}$$

bulunur.
3) $\bar{y} \in C_k \cap U_3^2$ olsun. $0 \leq t < 2\pi$ olmak üzere, t nin her bir değeri için

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1' + r_1 \cos t, \\ y_2 &= a_1'' + r_1 \sin t, \end{aligned}$$

ve

$$\cos t \left(y_1^* - a_1'^*\right) + \sin t \left(y_2^* - a_1''^*\right) < r_1^*$$

denklemlerinin çözümlerinden elde edeceğimiz her bir C_k cümlelerinin $\overline{\beta}$ sınıfına ait olduğunu biliyoruz. Şimdi,

$$U_3^2 = \left\{ \bar{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid x = b'', m_2 < x_1^* < n_2,\ x_2^* = c_2 \in \mathbb{R},\ m_2, n_2 \in \overline{\mathbb{R}} \right\}$$

olmak üzere, aşağıdaki durumları inceleyelim:

$a)$ $t = 0$ olsun. Bu durumda, $y_1 = a_1' + r_1$, $y_2 = a_1''$ ve $y_1^* < a_1'^* + r_1^*$, $y_2^* \in \mathbb{R}$ dir.

$$y_1 = a_1' + r_1 = b_1'' = b_1,$$

$$y_2 = a_1'' = b_2'' = b_2$$

ve

$$m_2 < y_1^* < n_2, y_2^* = c_2 \in \mathbb{R}$$

olup

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \left\{ \bar{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid x = b = (b_1, b_2),\ m_2 < x_1^* < n,\ x_2^* = c_2 \in \mathbb{R} \right\} \in \overline{\beta}$$

dır. Burada, $n = \min\{a_1'^* + r_1^*, n_2\}$ dir.

$b)$ $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1' + r_1 \lambda_1^2, \\ y_2 &= a_1'' + r_1 \lambda_2^2, \end{aligned}$$

$$\lambda_1^2 \left(y_1^* - a_1'^* \right) + \lambda_2^2 \left(y_2^* - a_1''^* \right) < r_1^*$$

şeklindedir. Burada, $\cos t = \lambda_1^2$, $\sin t = \lambda_2^2$ ve $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ dir.

$$y_1 = a_1' + r_1 \lambda_1^2 = b_1'' = b_1,$$

$$y_2 = a_1'' + r_1 \lambda_2^2 = b_2'' = b_2$$

denilirse ve $m_2 < y_1^* < n_2, y_2^* = c_2 \in \mathbb{R}$ olduğundan, yukarıdaki bilgiler göz önüne alınırsa her bir λ_1, λ_2 değerleri için

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \left\{ \bar{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid x = b = (b_1, b_2),\ m_2 < x_1^* < n',\ x_2^* = c_2 \in \mathbb{R} \right\} \in \overline{\beta}$$

elde edilir. Burada, $n' \leq n_2$ dir.

$c)$ $t = \dfrac{\pi}{2}$ olsun. Bu durumda, $y_1 = a_1'$, $y_2 = a_1'' + r_1$, $y_2^* < a_1''^* + r_1^*$ ve $y_1^* \in \mathbb{R}$ olur. O halde,

$$y_1 = a_1' = b_1'' = b_1,$$

$$y_2 = a_1'' + r_1 = b_2'' = b_2$$

denilirse ve $m_2 < y_1^* < n_2$, $y_2^* = c_2 \in \mathbb{R}$ olduğundan

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid x = b = (b_1, b_2),\ m_2 < x_1^* < n_2,\ x_2^* = c_2 \in \mathbb{R}\right\} \in \overline{\beta}$$

bulunur. Burada, $c_2 < a_1''^* + r_1^*$ olduğu açıktır.

$d)$ $\dfrac{\pi}{2} < t < \pi$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1' - r_1 \lambda_1^2, \\ y_2 &= a_1'' + r_1 \lambda_2^2 \end{aligned}$$

ve

$$-\lambda_1^2 \left(y_1^* - a_1'^*\right) + \lambda_2^2 \left(y_2^* - a_1''^*\right) < r_1^*$$

olur. Burada, $\cos t = -\lambda_1^2$, $\sin t = \lambda_2^2$ ve $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ dir.

$$y_1 = a_1' - r_1 \lambda_1^2 = b_1'' = b_1,$$

$$y_2 = a_1'' + r_1 \lambda_2^2 = b_2'' = b_2$$

denilirse ve $m_2 < y_1^* < n_2$, $y_2^* = c_2 \in \mathbb{R}$ olduğundan, her bir λ_1, λ_2 değerleri için

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid x = b = (b_1, b_2),\ m' < x_1^* < n_2,\ x_2^* = c_2 \in \mathbb{R}\right\} \in \overline{\beta}$$

elde edilir. Burada, $m' \geq m_2$ dir.

O halde, t parametresinin kalan diğer durumlarına göre incelemeye devam edilirse $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$ cümlesinin $\overline{\beta}$ sınıfına ait birtakım cümlelerin birleşimi şeklinde yazılabileceği açıktır.

4) $\overline{y} \in \overline{U}_1 \cap \overline{U}_1'$ olmak üzere, $\|y - a_1\| < r_1$, $y^* \in \mathbb{R}^2$ ve $\|y - a_2\| < r_2$, $y^* \in \mathbb{R}^2$ yazıla-

bilir. Bu durumda, $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$ cümlesi

$$U_1 = \left\{ \overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid \|x - a\| < r, x^* \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

biçimindeki $\overline{\beta}$ sınıfına ait birtakım cümlelerin keyfi birleşimleri şeklinde yazılabilir. Yani,

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \bigcup_{i \in I} U_1^i$$

elde edilir.

5) $\overline{y} \in U_1 \cap C_l'$ olsun. Bu durumda, her $C_l' \in \overline{\beta}$ için $U_1 \cap C_l' = C_l'$ olduğundan

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \in \overline{\beta}$$

elde edilir.

6) $\overline{y} \in C_k \cap C_l'$ olsun. $0 \leq t_1, t_2 < 2\pi$ olmak üzere, $t_1$ve t_2 nin her bir değeri için

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1' + r_1 \cos t_1, \\ y_2 &= a_1'' + r_1 \sin t_1, \end{aligned}$$

$$\cos t_1 \left(y_1^* - a_1'^* \right) + \sin t_1 \left(y_2^* - a_1''^* \right) < r_1^*$$

ve

$$\begin{aligned} y_1 &= a_2' + r_2 \cos t_2, \\ y_2 &= a_2'' + r_2 \sin t_2, \end{aligned}$$

$$\cos t_2 \left(y_1^* - a_2'^* \right) + \sin t_2 \left(y_2^* - a_2''^* \right) < r_2^*$$

denklemlerinin çözümlerinden elde edeceğimiz her bir C_k ve C_l' cümlelerinin $\overline{\beta}$ sınıfına ait olduğunu biliyoruz. Şimdi, aşağıdaki durumları inceleyelim.

$a)$ $t_1 = t_2 = 0$ olsun. Bu durumda,

$$y_1 = a_1' + r_1 = a_2' + r_2 = b_1,$$

$$y_2 = a_1'' = a_2'' = b_2,$$

$$y_1^* < a_1'^* + r_1^*,$$

$$y_1^* < a_2'^* + r_2^*,$$

ve

$$y_2^* \in \mathbb{R}$$

olup

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \left\{ \overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid x = b = (b_1, b_2),\ x_1^* < a^* + r^*,\ x_2^* \in \mathbb{R} \right\} \in \overline{\beta}$$

elde edilir. Burada, $a^* + r^* = \min\{a_1'^* + r_1^*, a_2'^* + r_2^*\}$ dir.
$b)$ $t_1 = 0$, $0 < t_2 < \dfrac{\pi}{2}$ olsun. Bu durumda,

$$y_1 = a_1' + r_1 = a_2' + r_2\lambda_1^2 = b_1,$$

$$y_2 = a_1'' = a_2'' + r_2\lambda_2^2 = b_2,$$

$$y_1^* < a_1'^* + r_1^*, y_2^* \in \mathbb{R}$$

ve

$$\lambda_1^2 \left(y_1^* - a_2'^*\right) + \lambda_2^2 \left(y_2^* - a_2''^*\right) < r_2^*$$

biçiminde elde edilir. Burada, $\cos t_2 = \lambda_1^2$, $\sin t_2 = \lambda_2^2$ ve $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ dir. Bu durumda, her bir λ_1 ve λ_2 değerleri için $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$ cümlesi

$$U_3 = \left\{ \overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid x = b = (b_1, b_2),\ m < x_1^* < n,\ x_2^* = c \in \mathbb{R}, m, n \in \overline{\mathbb{R}} \right\}$$

biçimindeki $\overline{\beta}$ sınıfına ait birtakım cümlelerin keyfi birleşimleri şeklinde yazılabilir. Yani,

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \bigcup_{i \in I} U_3^i$$

elde edilir. Burada, $I = \{1, 2, 3, ...\}$ dır.
$c)$ $t_1 = 0$, $t_2 = \dfrac{\pi}{2}$ olsun. Bu durumda,

$$y_1 = a_1' + r_1 = a_2' = b_1,$$

$$y_2 = a_1'' = a_2'' + r_2 = b_2,$$

$$y_1^* < a_1'^* + r_1^*,$$

$$y_2^* \in \mathbb{R},$$

ve

$$y_2^* < a_2''^* + r_2^*,$$

$$y_1^* \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Bu durumda, $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$ cümlesi U_3 biçimindeki cümlelerin keyfi birleşimi olarak yazılabilir. Yani,

$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \bigcup_{i \in I} U_3^i$$

elde edilir.

Bu öncül için toplam 64 durum söz konusudur. Her bir durum için $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$ cümlesi $\overline{\beta}$ sınıfına ait bir takım cümlelerinin keyfi birleşimleri biçiminde yazılabileceği açıktır. Sonuç olarak, $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \neq \varnothing$ olacak şekildeki $\forall \overline{A}_1, \overline{A}_2 \in \overline{\beta}$ için $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \bigcup_{\overline{A} \in \overline{\mathscr{A}} \subseteq \overline{\beta}} \overline{A}$ dir.

(i) ve (ii) şartları sağlandığından dolayı $\overline{\beta}$ sınıfı, $\mathbf{D}^2$ üzerinde bir bazdır. □

Teorem 3.2.5. $\overline{a} = a + \varepsilon a^* \in \mathbf{D}^n$ ve $\overline{r} = r + \varepsilon r^* \in \mathbf{D}^+$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \overline{B}(\overline{a}, \overline{r}) &= \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid \|x - a\| < r,\, x^* \in \mathbb{R}^n\} \\ &\quad \cup \left\{ \overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid \|x - a\| = r \text{ ve } \frac{\langle x - a, x^* - a^* \rangle}{\|x - a\|} < r^* \right\} \\ &= U_1 \cup U_2 \\ &= U_1 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_l,\ (l \in I) \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda,

$$U_3 = \left\{ \overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid x = a', m < x_1^* < n,\ x_{j+1}^* = c_j \in \mathbb{R},\ m, n \in \overline{\mathbb{R}} \right\}$$

şeklinde olup bütün $U_1, U_3, C_l\,(l \in I)$ cümlelerinin kolleksiyonu $\mathbf{D}^n$ üzerinde bir baz oluşturur. Burada, $1 \leq j \leq n-1$ dir.

Açıklama 5. Yukarıdaki teoremde verilen $\overline{\beta}$ sınıfına $\mathbf{D}^n$ üzerinde dual baz adı verilir.

Bu bazdan elde edilen topoloji $\overline{\tau}_{\overline{d}}$ ile gösterilir ve bu topolojinin her bir elemanı dual açık cümle olarak adlandırılır.

Şimdi, $\mathbf{D}^2$ uzayındaki orijin merkezli ve $\overline{r} = r + \varepsilon r^* \in \mathbf{D}^+$ yarıçaplı dual açık yuvar

$$\begin{aligned} \overline{B}\left(\overline{0},\overline{r}\right) &= \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid \|x\| < r,\, x^* \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &\quad \cup \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid \|x\| = r \text{ ve } \frac{\langle x, x^*\rangle}{\|x\|} < r^*\right\} \end{aligned}$$

için geometrik modellemeleri inşa edelim.

(i) $\|x\| < r$ alalım. Bu eşitsizliğin çözüm kümesi r yarıçaplı çemberin iç bölgesidir. Burada, $x^* \in \mathbb{R}^2$ dir.

(ii) $\|x\| = r$ olsun. $x = (x_1, x_2)\,, x^* = (x_1^*, x_2^*) \in \mathbb{R}^2$ olup bunlar arasındaki açı θ olmak üzere, $\|x^*\|\,.\cos\theta < r^*$ olduğu açıktır. $\overline{B}\left(\overline{0},\overline{r}\right)$ dual açık yuvarının $\mathbb{R}^3$ uzayındaki modellemelerini görmek için $x^* = (x_1^*, 0)$ kabul edelim. Bu durumda, $|x_1^*|\,.\cos\theta < r^*$ yazılabilir. $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ olduğundan dolayı aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

$$\cos\theta = \begin{cases} -\lambda^2 & , -1 \leq \cos\theta < 0 \\ \lambda^2 & , 0 < \cos\theta \leq 1 \\ 0 & , \cos\theta = 0. \end{cases}$$

Burada, $0 < \lambda \leq 1$ dir. r^* ve $\cos\theta$ sayılarının durumlarına göre, $\overline{B}\left(\overline{0},\overline{r}\right)$ yuvarının geometrik modellemeleri incelenmelidir. Bu yöntem $\mathbf{D}^n$ uzayında x^* noktalarını belirlemek için kullanılabilecek bir yöntem olmasına rağmen bu yolla x^* noktalarını belirlemek oldukça zahmetlidir.

$\mathbf{D}^2$ uzayında x^* noktalarını belirlemek için daha kolay bir yol mevcuttur. Bu yöntemle çözüm kümesini inşa edelim ve bir özel çözüm için geometrik modellemeleri oluşturalım. Öncelikle, bahsettiğimiz yöntemle

$$\begin{aligned} \overline{B}\left(\overline{0},\overline{r}\right) &= \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid \|x\| < r,\, x^* \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &\quad \cup \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid \|x\| = r \text{ ve } \frac{\langle x, x^*\rangle}{\|x\|} < r^*\right\} \end{aligned}$$

dual açık yuvarının çözüm kümesini belirleyelim.

(1) $\|x\| < r$ olduğunu farzedelim. Bu durum için gerekli hesaplamalar yapılırsa çözüm kümesi

$$\overline{B}_1 = \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < r^2, x^* \in \mathbb{R}^2\right\}$$

elde edilir.

(2) $\|x\| = r$ olsun. Bu durumda, $0 \leq t < 2\pi$ olmak üzere, $x_1 = r\cos t$ ve $x_2 = r\sin t$ yazılabilir. O halde,

$$\frac{\langle x, x^*\rangle}{\|x\|} = \frac{x_1x_1^* + x_2x_2^*}{r} = \frac{r\cos t x_1^* + r\sin t x_2^*}{r} < r^*$$

dır. Böylece, aşağıdaki eşitsizliği ifade etmek mümkündür:

$$x_1^*\cos t + x_2^*\sin t < r^*. \tag{3.2.1}$$

Şimdi, t açısına göre $(3.2.1)$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

(i) $t = 0$ olduğunu farzedelim. Bu durum için çözüm kümesi

$$\overline{B}_2 = \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid x_1 = r,\ x_2 = 0,\ x_1^* < r^*,\ x_2^* \in \mathbb{R}\right\}$$

olur.

(ii) $0 < t < \frac{\pi}{2}$ durumunu inceleyelim. $\cos t > 0$ ve $\sin t > 0$ olduğundan dolayı $\cos t = \lambda_1^2$ ve $\sin t = \lambda_2^2$ eşitliklerini yazmak mümkündür. Burada, $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ dir. Bu durumun çözüm kümesi aşağıdaki gibidir:

$$\overline{B}_3 = \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid x_1 = r\lambda_1^2,\ x_2 = r\lambda_2^2,\ x_1^* < \frac{r^* - A_1\lambda_2^2}{\lambda_1^2},\ x_2^* = A_1 \in \mathbb{R}\right\}.$$

(iii) $t = \frac{\pi}{2}$ olduğunu farzedelim. Bu durum için çözüm kümesi

$$\overline{B}_4 = \left\{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid x_1 = 0,\ x_2 = r,\ x_2^* < r^*,\ x_1^* \in \mathbb{R}\right\}$$

şeklindedir.

(iv) $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ durumunu inceleyelim. O halde, $\cos t < 0$ ve $\sin t > 0$ olduğunu biliyoruz. Böylece, $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ olmak üzere,

$$\cos t = -\lambda_1^2 < 0 \text{ ve } \sin t = \lambda_2^2 > 0$$

yazmak mümkündür. Bu durum için çözüm kümesi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\overline{B}_5 = \left\{ \overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid x_1 = -r\lambda_1^2,\ x_2 = r\lambda_2^2,\ x_1^* > \frac{A_2\lambda_2^2 - r^*}{\lambda_1^2},\ x_2^* = A_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(v) $t = \pi$ olduğunu farzedelim. O halde, aşağıdaki çözüm kümesi elde edilir:

$$\overline{B}_6 = \left\{ \overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid x_1 = -r,\ x_2 = 0,\ x_1^* > -r^*,\ x_2^* \in \mathbb{R} \right\}.$$

(vi) $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$ durumunu inceleyelim. $\cos t < 0$ ve $\sin t < 0$ olduğundan dolayı $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ olmak üzere, $\cos t = -\lambda_1^2 < 0$ ve $\sin t = -\lambda_2^2 < 0$ yazılabilir. Bu durumun çözüm kümesi

$$\overline{B}_7 = \left\{ \overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid x_1 = -r\lambda_1^2,\ x_2 = -r\lambda_2^2,\ x_1^* > \frac{-A_3\lambda_2^2 - r^*}{\lambda_1^2},\ x_2^* = A_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

elde edilir.

(vii) $t = \frac{3\pi}{2}$ durumunu inceleyelim. Çözüm kümesi

$$\overline{B}_8 = \left\{ \overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid x_1 = 0,\ x_2 = -r,\ x_2^* > -r^*,\ x_1^* \in \mathbb{R} \right\}$$

bulunur.

$(viii)$ $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$ olduğunu farzedelim. $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ olmak üzere, $\cos t = \lambda_1^2 > 0$ ve $\sin t = -\lambda_2^2 < 0$ olduğundan dolayı bu durum için çözüm kümesi

$$\overline{B}_9 = \left\{ \overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2 \mid x_1 = r\lambda_1^2,\ x_2 = -r\lambda_2^2,\ x_1^* < \frac{A_4\lambda_2^2 + r^*}{\lambda_1^2},\ x_2^* = A_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

biçiminde ifade edilir. Bütün durumlar göz önüne alındığında yukarıda verilen yuvarın çözüm kümesi elde edilir. Böylece, $\overline{B}\left(\overline{0}, \overline{r}\right)$ yuvarının çözüm kümesi

$$\overline{B}\left(\overline{0}, \overline{r}\right) = \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2 \cup \ldots \cup \overline{B}_8 \cup \overline{B}_9$$

şeklinde bulunur.

Şimdi, $\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^2$ dual noktaları için $x = (x_1, x_2), x^* = (x_1^*, 0)$ olduğunu farzedelim. $\overline{B}\left(\overline{0}, \overline{r}\right)$ cümlesinin bir özel çözümünü bulalım ve bu çözüme karşılık gelen geometrik modellemeleri inceleyelim.

1. $\|x\| < r$ olduğunu farzedelim. Bu durum için, $\overline{B}\left(\overline{0},\overline{r}\right)$ nin çözüm kümesi $\overline{B}_1$ dir.

2. $\|x\| = r$ durumunu inceleyelim. O halde, aşağıdaki eşitsizliği yazmak mümkündür:

$$x_1^* \cos t < r^*. \tag{3.2.2}$$

Burada $0 \leq t < 2\pi$ dir. r^* reel sayısının durumlarına göre (3.2.2) eşitsizliğini inceleyelim.

(i) $r^* > 0$ olduğunu farzedelim. $0 \neq \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere $r^* = \mu^2$ yazılabilir. $0 \leq t < \dfrac{\pi}{2}$ ve $\dfrac{3\pi}{2} < t < 2\pi$ için $\cos t > 0$ olduğu açıktır. $0 < \lambda \leq 1$ olmak üzere, $\cos t = \lambda^2$ denilirse aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$x_1^* < \frac{\mu^2}{\lambda^2}.$$

Şimdi, $\dfrac{\pi}{2} < t \leq \pi$ ve $\pi \leq t < \dfrac{3\pi}{2}$ için $\cos t = -\lambda^2$ yazmak mümkündür. Böylece,

$$x_1^* > -\frac{\mu^2}{\lambda^2}$$

elde edilir. Eğer $t = \dfrac{\pi}{2}$ ve $t = \dfrac{3\pi}{2}$ olduğu göz önüne alınırsa bütün $x_1^* \in \mathbb{R}$ için (3.2.2) eşitsizliği sağlanır. Bu öncül için geometrik modelleme şekil 3.2.A. ile verilir.

(ii) $r^* < 0$ olduğunu farzedelim. $0 \neq \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $r^* = -\mu^2$ eşitliğini yazabiliriz. $0 \leq t < \dfrac{\pi}{2}$ ve $\dfrac{3\pi}{2} < t < 2\pi$ için $\cos t > 0$ olduğu kolayca görülebilir. $0 < \lambda \leq 1$ olmak üzere, $\cos t = \lambda^2$ eşitliği göz önüne alınırsa aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

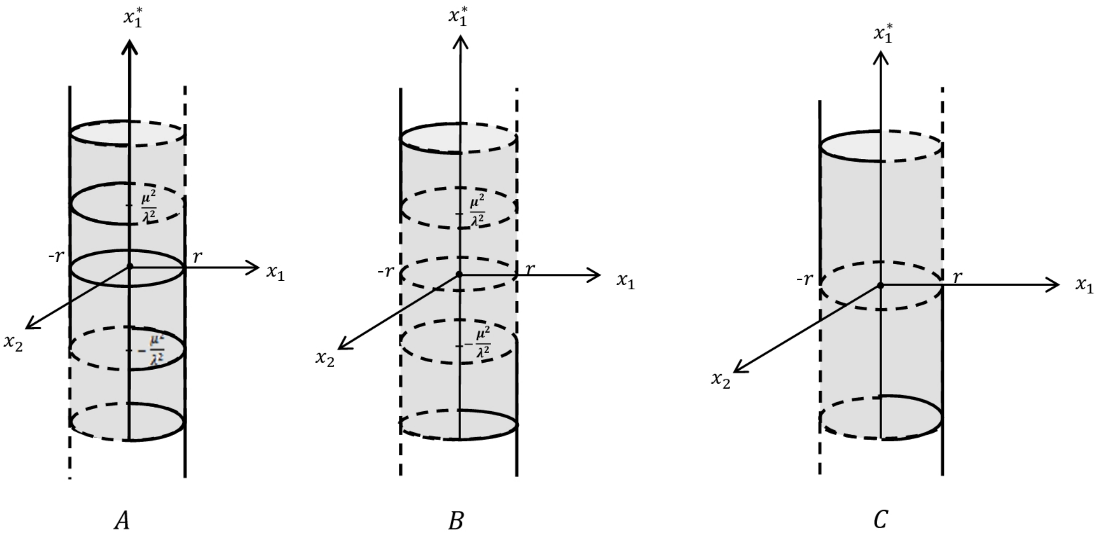
$$x_1^* < -\frac{\mu^2}{\lambda^2}.$$

Şimdi, $\dfrac{\pi}{2} < t \leq \pi$ ve $\pi \leq t < \dfrac{3\pi}{2}$ için $0 < \lambda \leq 1$ olmak üzere, $\cos t = -\lambda^2$ yazılabileceğinden dolayı

$$x_1^* > \frac{\mu^2}{\lambda^2}$$

eşitsizliği elde edilir. $t = \dfrac{\pi}{2}$ ve $t = \dfrac{3\pi}{2}$ durumları incelenirse bu durumlar için çözüm kümesinin boş olduğu sonucuna varılır. $r^* < 0$ durumu için bütün t açıları göz önüne alındığında bu öncül için geometrik modelleme şekil 3.2.B. ile gösterilir.

(iii) $r^* = 0$ olduğunu farzedelim. $0 \leq t < \dfrac{\pi}{2}$ ve $\dfrac{3\pi}{2} < t < 2\pi$ için $0 < \lambda \leq 1$ olmak üzere, $\cos t = \lambda^2$ yazılabileceğinden dolayı $(3.2.2)$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $x_1^* < 0$ dır. $\dfrac{\pi}{2} < t \leq \pi$ ve $\pi \leq t < \dfrac{3\pi}{2}$ için $0 < \lambda \leq 1$ olmak üzere, $\cos t = -\lambda^2$ olduğundan dolayı $(3.2.2)$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $x_1^* > 0$ dır. $t = \dfrac{\pi}{2}$ ve $t = \dfrac{3\pi}{2}$ durumları incelenirse çözüm kümesinin boş olduğu görülür. $r^* = 0$ durumu için bütün t açıları göz önüne alındığında geometrik modelleme şekil 3.2.C. deki gibidir.



Şekil 3.2: $\overline{B}\left(\overline{0}, \overline{r}\right)$ yuvarının $\mathbb{R}^3$ uzayındaki modellemesi

4 . DUAL UZAYDA YÜZEYLER TEORİSİ

4.1. Dual Uzayda Yüzey

Dual uzayda diferensiyel geometri yapabilmemiz için bu uzayda yüzey kavramını ve özelliklerini detaylı bir biçimde incelememiz gerekmektedir. İlk olarak, dual yüzeyler teorisinde sıkça kullanacağımız bazı temel kavramları tanımlayalım.

Açıklama 6. Bu bölümde 3. bölümde tanımlanan $\overline{\tau}_{\overline{d}}$ topolojisindeki

$$\overline{U} = \{\overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \mathbf{D}^n \mid \|x - a\| < r, x^* \in \mathbb{R}^n\}$$

cümlelerinden oluşan $\overline{\beta}_1$ sınıfını ele alacağız. $\overline{\beta}_1$ sınıfı $\mathbf{D}^n$ üzerinde bir baz oluşturur. Bu bazdan elde edilen topoloji $\overline{\tau}$ ile gösterilirse $\overline{\tau} \subseteq \overline{\tau}_{\overline{d}}$ olduğu açıktır. $\overline{\tau}$ topolojisinin cümleleri dual analitik fonksiyonların dual analitik bölgeleridir. Ayrıca, $\overline{f} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n \longrightarrow \mathbf{D}$ dual analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\overline{f}(\overline{x}) = f(x_1, ..., x_n) + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \frac{\partial f}{x_i}(x_1, ..., x_n) + \widetilde{f}(x_1, ..., x_n) \right)$$

biçimindedir ve bu fonksiyonun $\overline{x} = \overline{p}$ noktasındaki değeri

$$\begin{aligned} \overline{f}(\overline{p}) &= f(x_1(\widetilde{p}), ..., x_n(\widetilde{p})) \\ &\quad + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^*(\widetilde{p}) \frac{\partial f}{x_i}(x_1(\widetilde{p}), ..., x_n(\widetilde{p})) + \widetilde{f}(x_1(\widetilde{p}), ..., x_n(\widetilde{p})) \right) \\ &= f(p_1, ..., p_n) + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^* \frac{\partial f}{x_i}(p_1, ..., p_n) + \widetilde{f}(p_1, ..., p_n) \right) \end{aligned}$$

şeklinde olup f ve $\widetilde{f}$ fonksiyonları $U \subseteq \mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı $C^\infty-$sınıfından fonksiyonlara indirgenebilmektedir.

Tanım 4.1.1. $\overline{f}:\overline{U}\subseteq\mathbf{D}\longrightarrow\mathbf{D}$, $\overline{f}(\overline{x})=f(x)+\varepsilon\left(x^{*}f'(x)+\widetilde{f}(x)\right)$ bir dual analitik fonksiyon ve $\forall x\in U\subseteq\mathbb{R}$ için $f'(x)\neq 0$ olsun. $\forall\overline{x}_1,\overline{x}_2\in\overline{U}\subseteq\mathbf{D}$ için $\overline{f}(\overline{x}_1)=\overline{f}(\overline{x}_2)$ eşitliği $\overline{x}_1=\overline{x}_2$ eşitliğini gerektiriyorsa $\overline{f}$ fonksiyonuna birebir fonksiyon denir.

Teorem 4.1.2. $\overline{f}:\overline{U}\subseteq\mathbf{D}\longrightarrow\mathbf{D}$, $\overline{f}(\overline{x})=f(x)+\varepsilon\left(x^{*}f'(x)+\widetilde{f}(x)\right)$ bir dual analitik fonksiyon ve $\forall x\in U\subseteq\mathbb{R}$ için $f'(x)\neq 0$ olsun. Bu durumda, f fonksiyonunun birebir olması için gerek ve yeter şart $\overline{f}$ dual fonksiyonunun birebir olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki f birebir bir fonksiyon olsun. $\overline{f}$ dual fonksiyonunun birebir olduğunu göstermek için, $\forall\overline{x}_1,\overline{x}_2\in\overline{U}\subseteq\mathbf{D}$ için $\overline{f}(\overline{x}_1)=\overline{f}(\overline{x}_2)$ eşitliğinin $\overline{x}_1=\overline{x}_2$ eşitliğini gerektirdiğini göstermeliyiz. Bunun için öncelikle kabul edelim ki $\forall\overline{x}_1,\overline{x}_2\in\overline{U}\subseteq\mathbf{D}$ için $\overline{f}(\overline{x}_1)=\overline{f}(\overline{x}_2)$ olsun. Bu durumda,

$$\overline{f}(\overline{x}_1)=f(x_1)+\varepsilon\left(x_1^{*}f'(x_1)+\widetilde{f}(x_1)\right)=f(x_2)+\varepsilon\left(x_2^{*}f'(x_2)+\widetilde{f}(x_2)\right)=\overline{f}\left(\overline{x}_2\right)$$

elde edilir. Dual sayılarda eşitlik tanımından

$$f(x_1)=f(x_2)$$

ve

$$x_1^{*}f'(x_1)+\widetilde{f}(x_1)=x_2^{*}f'(x_2)+\widetilde{f}(x_2)$$

eşitlikleri yazılabilir. Hipotezden, f birebir bir fonksiyon olduğundan $x_1=x_2$ dir. Diğer taraftan, $\widetilde{f}$ bir fonksiyon olup iyi tanımlılıktan $\widetilde{f}(x_1)=\widetilde{f}(x_2)$ elde edilir. O halde, $\forall x\in U\subseteq\mathbb{R}$ için $f'(x)\neq 0$ ve $\widetilde{f}(x_1)=\widetilde{f}(x_2)$ olduğundan

$$x_1^{*}f'(x_1)=x_2^{*}f'(x_2)$$

şeklinde olup, $x_1^{*}=x_2^{*}$ elde edilir. Yani, $\overline{x}_1=\overline{x}_2$ eşitliği mevcuttur. O halde, $\overline{f}$ birebir bir fonksiyondur.

Tersine, teoremin bu kısmının ispatını olmayana ergi metodu ile gösterelim. Kabul edelim ki f birebir bir fonksiyon olmasın. Yani, $\exists x_1,x_2\in U\subseteq\mathbb{R}$ için $f(x_1)=f\left(x_2\right)$ eşitliği $x_1\neq x_2$ ifadesini gerektirir. $\overline{f}$ dual analitik fonksiyonunun birebir bir fonksiyon olmadığını göstermeliyiz. Yani, $\exists\overline{x}_1,\overline{x}_2\in\overline{U}\subseteq\mathbf{D}$ için $\overline{f}(\overline{x}_1)=\overline{f}(\overline{x}_2)$ eşitliği $\overline{x}_1\neq\overline{x}_2$ ifadesini gerektirmelidir. Kabul edelim ki $\exists\overline{x}_1,\overline{x}_2\in\overline{U}\subseteq\mathbf{D}$ için $\overline{f}(\overline{x}_1)=\overline{f}(\overline{x}_2)$ eşitliği mevcut olsun. O halde,

$$\overline{f}(\overline{x}_1) = f(x_1) + \varepsilon\left(x_1^* f'(x_1) + \widetilde{f}(x_1)\right) = f(x_2) + \varepsilon\left(x_2^* f'(x_2) + \widetilde{f}(x_2)\right) = \overline{f}\,(\overline{x}_2)$$

eşitliği yani,

$$f(x_1) = f(x_2)$$

ve

$$x_1^* f'(x_1) + \widetilde{f}(x_1) = x_2^* f'(x_2) + \widetilde{f}(x_2)$$

eşitlikleri mevcuttur. Bu durumda, f birebir bir fonksiyon olmadığından $\exists x_1, x_2 \in U \subseteq \mathbb{R}$ için $f(x_1) = f\,(x_2)$ eşitliği mevcut olduğunda $x_1 \neq x_2$ dir. Böylece, $\exists \overline{x}_1, \overline{x}_2 \in \overline{U} \subseteq \mathbf{D}$ için $\overline{f}(\overline{x}_1) = \overline{f}(\overline{x}_2)$ eşitliği $\overline{x}_1 \neq \overline{x}_2$ ifadesini gerektirir. Yani, $\overline{f}$ dual analitik fonksiyonu birebir bir fonksiyon değildir. Böylece, ispat tamamlanır. □

Tanım 4.1.3. $\overline{f} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D} \longrightarrow \overline{V} \subseteq \mathbf{D}$, $\overline{f}(\overline{x}) = f(x) + \varepsilon\left(x^* f'(x) + \widetilde{f}(x)\right)$ bir dual analitik fonksiyon ve $\forall x \in U \subseteq \mathbb{R}$ için $f'(x) \neq 0$ olsun. Bu durumda, $\forall \overline{y} = y + \varepsilon y^* \in \mathbf{D}$ için $\overline{y} = \overline{f}(\overline{x})$ olacak şekilde $\exists \overline{x} = x + \varepsilon x^* \in \overline{U} \subseteq \mathbf{D}$ mevcut ise $\overline{f}$ dual analitik fonksiyonuna örtendir denir. Buradan görülmektedir ki f fonksiyonu örten ve $x^* = \dfrac{y^* - \widetilde{f}(x)}{f'(x)}$ olacak şekilde $x^* \in \mathbb{R}$ varsa $\overline{f}$ dual analitik fonksiyonuna örtendir denir.

Sonuç 4.1.1. $\overline{f} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D} \longrightarrow \overline{V} \subseteq \mathbf{D}$, $\overline{f}(\overline{x}) = f(x) + \varepsilon\left(x^* f'(x) + \widetilde{f}(x)\right)$ bir dual analitik fonksiyon ve $\forall x \in U \subseteq \mathbb{R}$ için $f'(x) \neq 0$ olsun. $\overline{f}$ dual analitik fonksiyonu örten olması durumunda f fonksiyonu örtendir.

Tanım 4.1.4. $\overline{f} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D} \longrightarrow \overline{V} \subseteq \mathbf{D}$, $\overline{f}(\overline{x}) = f(x) + \varepsilon\left(x^* f'(x) + \widetilde{f}(x)\right)$ bir dual analitik fonksiyon ve $\forall x \in U \subseteq \mathbb{R}$ için $f'(x) \neq 0$ olsun. $\overline{f}$ fonksiyonu birebir ve örten ise $\left(\overline{g} \circ \overline{f}\right)(\overline{x}) = I\,(\overline{x})$ ve $\left(\overline{f} \circ \overline{g}\right)(\overline{y}) = I\,(\overline{y})$ birim fonksiyonlar olacak şekilde bir tek $\overline{g} : \overline{V} \subseteq \mathbf{D} \longrightarrow \overline{U} \subseteq \mathbf{D}$ dual fonksiyonu vardır. Bu $\overline{g}$ fonksiyonuna $\overline{f}$ dual fonksiyonunun ters fonksiyonu denir ve $\overline{g} = \overline{f}^{-1}$ ile gösterilir.

Teorem 4.1.5. $\overline{f} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D} \longrightarrow \overline{f}\left(\overline{U}\right) \subseteq \mathbf{D}$, $\overline{f}(\overline{x}) = f(x) + \varepsilon\left(x^* f'(x) + \widetilde{f}(x)\right)$ bir dual analitik fonksiyon ve $\forall x \in U \subseteq \mathbb{R}$ için $f'(x) \neq 0$ olsun. Bu durumda, $\overline{f}$ dual fonksiyonunun tersi var ise

$$\overline{f}^{-1}(\overline{y}) = f^{-1}(y) + \varepsilon\left(y^*\left(f^{-1}(y)\right)' - (\widetilde{f} \circ f^{-1})(y).\left(f^{-1}(y)\right)'\right)$$

biçiminde ifade edilir. Burada, f^{-1}, f fonksiyonunun tersidir.

İspat. $\overline{f}$ dual analitik fonksiyonunun tersi var olsun. Bu durumda, $\overline{f}$ fonksiyonu birebir ve örten olduğundan f fonksiyonu birebir ve örtendir. O halde, f^{-1} mevcuttur ve ayrıca, $y = f(x)$ için $x = f^{-1}(y)$ ve $\forall x \in U \subseteq \mathbb{R}$ için $f'(x) \neq 0$ olduğundan $\left(f^{-1}(y)\right)'$ mevcuttur. Diğer yandan, birim dual analitik fonksiyon

$$\begin{aligned} \overline{I} \quad &: \quad \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D} \\ \overline{x} \quad &\longrightarrow \quad \overline{I}(\overline{x}) = x + \varepsilon\left(x^*(x)' + 0(x)\right) = x + \varepsilon x^* \end{aligned}$$

biçiminde olup göstermeliyiz ki

$$\left(\overline{f}^{-1} \circ \overline{f}\right)(\overline{x}) = \overline{I}(\overline{x})$$

ve

$$\left(\overline{f} \circ \overline{f}^{-1}\right)(\overline{y}) = \overline{I}(\overline{y})$$

dir. Şimdi, bu iki eşitliğin varlığını gösterelim.

$$\begin{aligned} \left(\overline{f}^{-1} \circ \overline{f}\right)(\overline{x}) &= \overline{f}^{-1}\left(\overline{f}(\overline{x})\right) \\ &= \overline{f}^{-1}\left(f(x) + \varepsilon\left(x^* f'(x) + \widetilde{f}(x)\right)\right) \\ &= \left(f^{-1} \circ f\right)(x) \\ &\quad + \varepsilon \begin{pmatrix} x^*\left(\left(\left(f^{-1} \circ f\right)(x)\right)' + \widetilde{f}(x).\left(f^{-1}\right)'(f(x))\right. \\ \left. -\widetilde{f}\left(f^{-1}(f(x))\right).\left(f^{-1}\right)'(f(x))\right. \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olup $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = I(x)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left(\overline{f}^{-1} \circ \overline{f}\right)(\overline{x}) &= I(x) + \varepsilon \begin{pmatrix} x^*(I(x))' + \widetilde{f}(x).\left(f^{-1}\right)'(f(x)) \\ -\widetilde{f}(I(x)).\left(f^{-1}\right)'(f(x)) \end{pmatrix} \\ &= x + \varepsilon\left(x^*(x)' + \widetilde{f}(x).\left(f^{-1}\right)'(f(x)) - \widetilde{f}(x).\left(f^{-1}\right)'(f(x))\right) \\ &= x + \varepsilon x^* \\ &= \overline{x} \\ &= \overline{I}(\overline{x}) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$
\begin{aligned}
\left(\overline{f}\circ\overline{f}^{-1}\right)(\overline{y}) &= \overline{f}\left(f^{-1}(y)+\varepsilon\left(y^{*}\left(f^{-1}(y)\right)'-(\widetilde{f}\circ f^{-1})(y).\left(f^{-1}(y)\right)'\right)\right) \\
&= \left(f\circ f^{-1}\right)(y)+\varepsilon\left(\begin{array}{c} y^{*}\left(f^{-1}(y)\right)'.f'\left(f^{-1}(y)\right) \\ -\left(\widetilde{f}\circ f^{-1}\right)(y).\left(f^{-1}(y)\right)'.f'\left(f^{-1}(y)\right) \\ +\left(\widetilde{f}\circ f^{-1}\right)(y) \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

şeklinde olup $\left(f\circ f^{-1}\right)(y)=I(y)$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
\left(\overline{f}\circ\overline{f}^{-1}\right)(\overline{y}) &= y+\varepsilon\left(y^{*}\left(I(y)\right)'-\left(\widetilde{f}\circ f^{-1}\right)(y).\left(I(y)\right)'+\left(\widetilde{f}\circ f^{-1}\right)(y)\right) \\
&= y+\varepsilon\left(y^{*}-\left(\widetilde{f}\circ f^{-1}\right)(y)+\left(\widetilde{f}\circ f^{-1}\right)(y)\right) \\
&= y+\varepsilon y^{*} \\
&= \overline{y}=\overline{I}(\overline{y})
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada, $\forall x\in U\subseteq\mathbb{R}$ için $f'(x)\neq 0$ olduğundan $\left(f^{-1}(y)\right)'=\dfrac{1}{f'(x)}\neq 0$ dır. O halde, ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.1.2. $\overline{f}:\overline{U}\subseteq\mathbf{D}\longrightarrow\overline{f}\left(\overline{U}\right)\subseteq\mathbf{D}$, $\overline{f}(\overline{x})=f(x)+\varepsilon\left(x^{*}f'(x)+\widetilde{f}(x)\right)$ bir dual analitik fonksiyonunun tersi var ise

$$
\overline{f}^{-1}(\overline{x})=f^{-1}(x)+\varepsilon\left(x^{*}\left(f^{-1}(x)\right)'-(\widetilde{f}\circ f^{-1})(x).\left(f^{-1}(x)\right)'\right)
$$

biçiminde olan bir dual analitik fonksiyondur. Bu fonksiyonun $\overline{x}$ dual değişkenine göre türevi

$$
\frac{d\overline{f}^{-1}}{d\overline{x}}=\left(f^{-1}(x)\right)'+\varepsilon\left(\begin{array}{c} x^{*}\left(f^{-1}(x)\right)''-(\widetilde{f}\circ f^{-1})(x).\left(f^{-1}(x)\right)'' \\ -\widetilde{f}'(f^{-1}(x)).\left(\left(f^{-1}(x)\right)'\right)^{2} \end{array}\right)
$$

biçiminde ifade edilir.

Tanım 4.1.6.

$$
\begin{aligned}
\overline{f} &: \overline{U}\subseteq\mathbf{D}^{n}\longrightarrow\overline{V}\subseteq\mathbf{D}^{n} \\
\overline{x} &= (\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_n)\longrightarrow\overline{f}(\overline{x})=\left(\overline{f}_1(\overline{x}),\overline{f}_2(\overline{x}),\ldots,\overline{f}_n(\overline{x})\right)
\end{aligned}
$$

dual analitik fonksiyonunu ele alalım. Burada,

$$\begin{aligned}
\overline{f}(\overline{x}) &= \left(\overline{f}_1(\overline{x}), \overline{f}_2(\overline{x}), ..., \overline{f}_n(\overline{x})\right) \\
&= (f_1(x), ..., f_n(x)) + \varepsilon\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \frac{\partial f_1}{\partial x_i}, ..., \sum_{i=1}^{n} x_i^* \frac{\partial f_n}{\partial x_i}\right) + \left(\widetilde{f}_1(x), ..., \widetilde{f}_n(x)\right)\right) \\
&= f(x) + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \frac{\partial f}{\partial x_i} + \widetilde{f}(x)\right)
\end{aligned}$$

biçimindedir. Eğer $\overline{f}^{-1}$ mevcut ve dual analitik bir fonksiyon ise $\overline{f}$ dual fonksiyonuna dual diffeomorfizm adı verilir.

Teorem 4.1.7.

$$\begin{aligned}
\overline{f} \quad &: \quad \mathbf{D}^n \longrightarrow \mathbf{D}^n \\
\overline{x} \quad &\longrightarrow \quad \overline{f}(\overline{x}) = \left(\overline{f}_1(\overline{x}), \overline{f}_2(\overline{x}), ..., \overline{f}_n(\overline{x})\right) = f(x) + \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^* \frac{\partial f}{\partial x_j} + \widetilde{f}(x)\right)
\end{aligned}$$

dual analitik bir fonksiyon olsun. Eğer $\overline{q} = q + \varepsilon q^* \in \mathbf{D}^n$ ve U, $\mathbb{R}^n$ uzayının standart topolojisine göre açık olmak üzere, $\forall q \in U$ için $rankJ(f, q) = n$ ise $\mathbf{D}^n$ uzayında $\overline{q} \in \mathbf{D}^n$ noktasını kapsayan en az bir $\overline{U} \in \overline{\tau}$ dual açığı vardır öyle ki $\overline{f}\mid_{\overline{U}}: \overline{U} \longrightarrow \overline{f}\left(\overline{U}\right)$ dual diffeomorfizmdir.

İspat. $\overline{f} : \mathbf{D}^n \longrightarrow \mathbf{D}^n$ dual fonksiyonu dual analitik bir fonksiyon ve $\forall q \in U$ için $rankJ(f, q) = n$ olsun.

$$\begin{aligned}
\overline{f} \quad &: \quad \mathbf{D}^n \longrightarrow \mathbf{D}^n \\
\overline{x} \quad &\longrightarrow \quad \overline{f}(\overline{x}) = f(x) + \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^* \frac{\partial f}{\partial x_j} + \widetilde{f}(x)\right)
\end{aligned}$$

biçiminde olup

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$$

ve

$$\widetilde{f}(x) = \left(\widetilde{f}_1(x), \widetilde{f}_2(x), ..., \widetilde{f}_n(x)\right)$$

fonksiyonlarının $\mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}^n$ ye tanımlı $C^\infty-$sınıfından fonksiyonlara indirgenebildiklerini biliyoruz. O halde, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $C^\infty-$sınıfından bir fonksiyon ve

$\forall q \in U$ için $rankJ\left(f,q\right)=n$ olduğundan invers fonksiyon teoremine göre $f\mid_{U}: U\longrightarrow f\left(U\right)$ bir diffeomorfizmdir.

$i)$ $\overline{f}\mid_{\overline{U}}$ dual analitik fonksiyonunun birebirliğini araştıralım.

$\forall \overline{p},\overline{q}\in\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n$ $\left(p,q\in U\subseteq\mathbb{R}^n\right)$ için $\overline{f}\left(\overline{p}\right)=\overline{f}\left(\overline{q}\right)$ olsun. Bu durumda,

$$f\left(p\right)+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}p_j^*\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(p\right)+\widetilde{f}\left(p\right)\right)=f\left(q\right)+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}q_j^*\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(q\right)+\widetilde{f}\left(q\right)\right)$$

olmak üzere,

$$f\left(p\right)=f\left(q\right)$$

ve

$$\sum_{j=1}^{n}p_j^*\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(p\right)+\widetilde{f}\left(p\right)=\sum_{j=1}^{n}q_j^*\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(q\right)+\widetilde{f}\left(q\right) \tag{4.1.1}$$

elde edilir. $f\mid_{U}$ birebir olduğundan $p=q$ olur. Yani,

$$\left(p_1,p_2,...,p_n\right)=\left(q_1,q_2,...,q_n\right)$$

elde edilir. $\widetilde{f}$, $\mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}^n$ ye tanımlı bir fonksiyon olup iyi tanımlılıktan $\widetilde{f}\left(p\right)=\widetilde{f}\left(q\right)$ dur. Bu durumda, $(4.1.1)$ denkleminden

$$\left(p_1^*-q_1^*\right)\frac{\partial f}{\partial x_1}+\left(p_2^*-q_2^*\right)\frac{\partial f}{\partial x_2}+...+\left(p_n^*-q_n^*\right)\frac{\partial f}{\partial x_n}=\left(0,0,...,0\right)$$

eşitliği yazılır. Ayrıca, $\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},...,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}$ cümlesi lineer bağımsız olduğundan $1\leq i\leq n$ için $p_i^*=q_i^*$ elde edilir. Yani, $p^*=q^*$ dır. O halde,

$$\overline{p}=p+\varepsilon p^*=q+\varepsilon q^*=\overline{q}$$

olur. Sonuç olarak, $\overline{f}\mid_{\overline{U}}$ dual analitik fonksiyonu birebirdir.

$ii)$ $\overline{f}\mid_{\overline{U}}$ dual analitik fonksiyonunun örtenliğini araştıralım.

$\forall\overline{p}\in\overline{f}\left(\overline{U}\right)\subseteq\mathbf{D}^n$ için $\overline{p}=\overline{f}\left(\overline{q}\right)$ olacak şekilde en az bir $\overline{q}\in\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^n$ dual noktasının mevcut olduğunu gösterelim.

$\forall \overline{p} \in \overline{f}\left(\overline{U}\right) \subseteq \mathbf{D}^n$ $\left(p \in f\left(U\right) \subseteq \mathbb{R}^n\right)$ için $\overline{p} = \overline{f}\left(\overline{q}\right)$ olsun. Bu durumda,

$$p = f\left(q\right)$$

ve

$$p^* = \sum_{j=1}^{n} q_j^* \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(q\right) + \widetilde{f}\left(q\right) \tag{4.1.2}$$

yazılabilir. $f\mid_U$ birebir ve örten olduğundan $q = f^{-1}\left(p\right) \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ mevcuttur. (4.1.2) denklemi açılırsa

$$\begin{aligned} q_1^* \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(q\right) + q_2^* \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\left(q\right) + \ldots + q_n^* \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\left(q\right) &= p_1^* - \widetilde{f_1}\left(q\right) \\ &. \\ &. \\ &. \\ q_1^* \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\left(q\right) + q_2^* \frac{\partial f_n}{\partial x_2}\left(q\right) + \ldots + q_n^* \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\left(q\right) &= p_n^* - \widetilde{f_n}\left(q\right) \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin elde edileceği kolaylıkla görülebilir. Bu denklem sisteminin matris formu

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(q\right) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\left(q\right) & . & . & . & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\left(q\right) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(q\right) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\left(q\right) & . & . & . & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\left(q\right) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\left(q\right) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}\left(q\right) & . & . & . & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\left(q\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ . \\ . \\ . \\ q_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1^* - \widetilde{f_1}\left(q\right) \\ p_2^* - \widetilde{f_2}\left(q\right) \\ . \\ . \\ . \\ p_n^* - \widetilde{f_n}\left(q\right) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $[A]_{n\times n} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(q\right)\right]_{1\leq i,j\leq n}$ ve $[B]_{n\times 1} = \left[p_i^* - \widetilde{f_i}\left(q\right)\right]_{1\leq i\leq n}$ denilirse yukarıdaki matris formu

$$[A]_{n\times n} \cdot [q^*]_{n\times 1} = [B]_{n\times 1} \tag{4.1.3}$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca, $\forall q \in U$ için $rankJ\left(f, q\right) = n$ olduğundan $[A]_{n\times n}$ matrisinin tersi vardır ve $\left(4.1.3\right)$ denkleminin her iki tarafı soldan $[A]_{n\times n}$ matrisinin tersi ile çarpılırsa $[q^*]_{n\times 1} = \left[A^{-1}\right]_{n\times n}.[B]_{n\times 1}$ elde edilir. O halde, $\overline{q} = q + \varepsilon q^* \in \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n$ mevcuttur. Yani, $\overline{f}\mid_{\overline{U}}$ dual analitik fonksiyonu örtendir.

Sonuç olarak, (i) ve (ii) öncüllerinden $\overline{f}\mid_{\overline{U}}$ dual analitik fonksiyonunun tersi vardır ve bu fonksiyonun tersi

$$\begin{array}{rcl}\overline{g} & : & \overline{f}\left(\overline{U}\right) \subseteq \mathbf{D}^n \longrightarrow \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^n \\ \overline{y} & \longrightarrow & \overline{g}\left(\overline{y}\right) = g\left(y\right) + \varepsilon\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j^* \frac{\partial g}{\partial y_j} + \widetilde{g}\left(y\right)\right) = g + \varepsilon g^0\end{array}$$

biçimindedir. Burada, $g\left(y\right) = \left(f\mid_U\right)^{-1}\left(y\right)$ ve $1 \leq i \leq n$ için $\widetilde{g}_i\left(y\right) = \left\langle -\widetilde{f}\left(g\left(y\right)\right), \nabla g_i\left(y\right)\right\rangle$ dır. Gerçekten,

$$\left(\overline{f}\mid_{\overline{U}} \circ \overline{g}\right)\left(\overline{y}\right) = \overline{f}\mid_{\overline{U}}\left(g\left(y\right) + \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^* \tfrac{\partial g}{\partial y_j} + \widetilde{g}\left(y\right)\right)\right)$$

$$= \left(f\mid_U \circ g\right)\left(y\right) + \varepsilon\left(\begin{array}{c} y_1^*\left(\frac{\partial g_1}{\partial y_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(g\left(y\right)\right) + \ldots + \frac{\partial g_n}{\partial y_1}\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(g\left(y\right)\right)\right) \\ + \ldots + y_n^*\left(\frac{\partial g_1}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(g\left(y\right)\right) + \ldots + \frac{\partial g_n}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(g\left(y\right)\right)\right) \\ + \widetilde{g}_1\left(y\right)\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(g\left(y\right)\right) + \ldots + \widetilde{g}_n\left(y\right)\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(g\left(y\right)\right) \\ + \widetilde{f}\left(g\left(y\right)\right)\end{array}\right)$$

şeklinde olup $1 \leq i \leq n$ için

$$\frac{\partial\left(f\mid_U \circ g\right)}{\partial y_i} = \frac{\partial g_1}{\partial y_i}\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(g\left(y\right)\right) + \ldots + \frac{\partial g_n}{\partial y_i}\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(g\left(y\right)\right)$$

olduğundan

$$\begin{array}{rcl}\left(\overline{f}\mid_{\overline{U}} \circ \overline{g}\right)\left(\overline{y}\right) & = & \left(f\mid_U \circ g\right)\left(y\right) + \varepsilon\left(\begin{array}{c} y_1^*\frac{\partial(f\circ g)}{\partial y_1} + \ldots + y_n^*\frac{\partial(f\circ g)}{\partial y_n} \\ + \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(g\left(y\right)\right)\left(\begin{array}{c} -\widetilde{f}_1\left(g\left(y\right)\right)\frac{\partial g_1}{\partial y_1} - \ldots \\ -\widetilde{f}_n\left(g\left(y\right)\right)\frac{\partial g_1}{\partial y_n}\end{array}\right) \\ + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(g\left(y\right)\right)\left(\begin{array}{c} -\widetilde{f}_1\left(g\left(y\right)\right)\frac{\partial g_n}{\partial y_1} - \ldots \\ -\widetilde{f}_n\left(g\left(y\right)\right)\frac{\partial g_n}{\partial y_n}\end{array}\right) \\ + \widetilde{f}\left(g\left(y\right)\right)\end{array}\right) \\ & = & \left(f\mid_U \circ g\right)\left(y\right) + \varepsilon\left(\begin{array}{c} y_1^*\frac{\partial(f\circ g)}{\partial y_1} + \ldots + y_n^*\frac{\partial(f\circ g)}{\partial y_n} \\ -\widetilde{f}_1\left(g\left(y\right)\right)\frac{\partial(f\circ g)}{\partial y_1} - \ldots - \widetilde{f}_n\left(g\left(y\right)\right)\frac{\partial(f\circ g)}{\partial y_n} \\ + \widetilde{f}\left(g\left(y\right)\right)\end{array}\right)\end{array}$$

olur.

$$\left(f\mid_U\circ g\right)(y)=I(y)=y=(y_1,...,y_n)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\left(\overline{f}\mid_{\overline{U}}\circ\overline{g}\right)(\overline{y}) &= y+\varepsilon\left(\begin{array}{c} y_1^*(1,0,...,0)+...+y_n^*(0,0,...,1) \\ -\widetilde{f}_1(g(y))(1,0,...,0)-...-\widetilde{f}_n(g(y))(0,0,...,1) \\ +\widetilde{f}(g(y)) \end{array}\right) \\ &= y+\varepsilon y^* \\ &= \overline{I}(\overline{y})\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, $\left(\overline{g}\circ\overline{f}\mid_{\overline{U}}\right)(\overline{x})=\overline{I}(\overline{x})$ olduğu gösterilebilir. Diğer yandan, $1\leq i\leq n$ için $\dfrac{\partial g}{\partial y_i^*}=0$, $\dfrac{\partial g^0}{\partial y_i^*}=\dfrac{\partial g}{\partial y_i}$ ve g ile $\widetilde{g}$ fonksiyonları $C^\infty-$sınıfından olduğundan $\overline{g}=\left(\overline{f}\mid_{\overline{U}}\right)^{-1}$ dual fonksiyonu dual analitik bir fonksiyondur. O halde, $\overline{f}\mid_{\overline{U}}$ dual diffeomorfizmdir. Böylece ispat tamamlanır. □

Tanım 4.1.8. $\overline{M}\subset\mathbf{D}^3$ olmak üzere,

$$\overline{\tau}_{\overline{M}}=\left\{\overline{M}\cap\overline{V}\mid\overline{V}\in\overline{\tau}\right\}$$

sınıfına $\left(\mathbf{D}^3,\overline{\tau}\right)$ dual topolojik uzayından indirgenen dual alt cümle topolojisi (dual relatif topoloji) denir. Eğer $\overline{M}$ cümlesindeki $\overline{\tau}_{\overline{M}}$ topolojisine göre dual açıklar $\mathbf{D}^2$ uzayındaki dual açıklara dual diffeomorf oluyorsa $\overline{M}$ cümlesine $\mathbf{D}^3$ uzayında bir dual basit yüzey denir.

Buna göre yüzey tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir:

$\overline{M}$, $\mathbf{D}^3$ uzayının bir alt cümlesi olsun. $\forall\overline{p}\in\overline{M}$ noktasının $\left(\mathbf{D}^3,\overline{\tau}\right)$ topolojik uzayındaki bir komşuluğu $\overline{V}$ olsun. $\overline{p}$ noktasının $\left(\overline{M},\overline{\tau}_{\overline{M}}\right)$ alt uzayındaki komşuluğu $\overline{M}\cap\overline{V}$ olmak üzere $\overline{M}\cap\overline{V}$ ile $\left(\mathbf{D}^2,\overline{\tau}\right)$ uzayındaki bir $\overline{U}$ dual açığı arasında bir $\overline{F}$ dual diffeomorfizmi mevcut ise yani;

$$\begin{aligned}\overline{F}\quad &:\quad \overline{U}\subseteq\mathbf{D}^2\longrightarrow\overline{M}\cap\overline{V}\subseteq\overline{M}\subset\mathbf{D}^3 \\ (\overline{u}_1,\overline{u}_2)\quad &\longrightarrow\quad \overline{F}(\overline{u}_1,\overline{u}_2)=\left(\overline{f}_1(\overline{u}_1,\overline{u}_2),\overline{f}_2(\overline{u}_1,\overline{u}_2),\overline{f}_3(\overline{u}_1,\overline{u}_2)\right)\end{aligned}$$

bir dual diffeomorfizmi mevcut ise $\overline{M}$ cümlesine $\mathbf{D}^3$ uzayında bir dual basit yüzey denir. Burada, $1 \leq i \leq 3$ için

$$\overline{f}_i(\overline{u}_1,\overline{u}_2) = f_i(u_1,u_2) + \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{2} u_j^* \frac{\partial f_i}{\partial u_j} + \widetilde{f}_i(u_1,u_2)\right)$$

biçiminde olup

$$\begin{aligned}
\overline{F}(\overline{u}_1,\overline{u}_2) &= \left(\overline{f}_1(\overline{u}_1,\overline{u}_2), \overline{f}_2(\overline{u}_1,\overline{u}_2), \overline{f}_3(\overline{u}_1,\overline{u}_2)\right) \\
&= \left(f_1(u_1,u_2), f_2(u_1,u_2), f_3(u_1,u_2)\right) \\
&\quad +\varepsilon\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{2} u_j^* \dfrac{\partial f_1}{\partial u_j} + \widetilde{f}_1(u_1,u_2), \sum\limits_{j=1}^{2} u_j^* \dfrac{\partial f_2}{\partial u_j} + \widetilde{f}_2(u_1,u_2), \\ \sum\limits_{j=1}^{2} u_j^* \dfrac{\partial f_3}{\partial u_j} + \widetilde{f}_3(u_1,u_2) \end{pmatrix} \\
&= F(u_1,u_2) + \varepsilon\left(u_1^* F_{u_1} + u_2^* F_{u_2} + \widetilde{F}(u_1,u_2)\right) = F + \varepsilon F^0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda, $\left(\overline{F},\overline{U}\right)$ ikilisine veya kısaca $\overline{F}$ dönüşümüne $\overline{M}$ dual yüzeyi için bir parametrizasyon adı verilir. $\overline{u}_1 = u_1 + \varepsilon u_1^*$ ve $\overline{u}_2 = u_2 + \varepsilon u_2^*$, $\mathbf{D}^2$ uzayının dual koordinat fonksiyonları olsun. O halde, $\overline{q} \in \mathbf{D}^2$ için bu dual koordinat fonksiyonlarının

$$\begin{aligned}
\overline{u}_1 &: \mathbf{D}^2 \longrightarrow \mathbf{D} \\
\overline{q} &\longrightarrow \overline{u}_1(\overline{q}) = u_1(\widetilde{q}) + \varepsilon u_1^*(\widetilde{q}) = q_1 + \varepsilon q_1^* = \overline{q}_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{u}_2 &: \mathbf{D}^2 \longrightarrow \mathbf{D} \\
\overline{q} &\longrightarrow \overline{u}_2(\overline{q}) = u_2(\widetilde{q}) + \varepsilon u_2^*(\widetilde{q}) = q_2 + \varepsilon q_2^* = \overline{q}_2
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\overline{F}(\overline{q}) &= F(u_1(\widetilde{q}), u_2(\widetilde{q})) \\
&\quad +\varepsilon\left(u_1^*(\widetilde{q}) F_{u_1}(u_1(\widetilde{q}), u_2(\widetilde{q})) + u_2^*(\widetilde{q}) F_{u_2}(u_1(\widetilde{q}), u_2(\widetilde{q})) + \widetilde{F}(u_1(\widetilde{q}), u_2(\widetilde{q}))\right) \\
&= F(q) + \varepsilon\left(q_1^* F_{u_1}(q) + q_2^* F_{u_2}(q) + \widetilde{F}(q)\right) \\
&= p + \varepsilon p^* \\
&= \overline{p}
\end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\overline{q} = q + \varepsilon q^* \in \overline{U}$ vardır. Burada, $F = F(u_1, u_2)$ biçiminde olup

$$\begin{aligned} F \quad &: \quad U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow F(U) \subseteq \mathbb{R}^3 \\ q \quad &\longrightarrow \quad F(q) = F(u_1(q), u_2(q)) \end{aligned}$$

şekline de indirgenebileceği kolaylıkla görülmektedir.

Açıklama 7. Bu çalışma boyunca $\overline{M}$ dual basit yüzeyi dual yüzey olarak adlandırılacaktır.

Şimdi, $(\overline{F}, \overline{U})$ parametrizasyonuna sahip $\overline{M}$ dual yüzeyini ele alalım. $\overline{q} \in \overline{U}$ için $\overline{F}(\overline{q}) = \overline{p}$ olsun. $\left\{\overrightarrow{e}_{1\overline{q}}, \overrightarrow{e}_{2\overline{q}}\right\}$ cümlesi, $\overline{q} \in \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2$ noktasındaki dual tanjant uzayının standart bazı, $\overline{F}(\overline{q}) = \overline{p} \in \mathbf{D}^3$ noktasındaki dual tanjant uzayının standart bazı $\left\{\overrightarrow{e}_{1\overline{p}}, \overrightarrow{e}_{2\overline{p}}, \overrightarrow{e}_{3\overline{p}}\right\}$ olmak üzere, $\overline{F}_{*\overline{q}}$ lineer dönüşümüne karşılık gelen matrisi belirleyelim.

$$\begin{aligned} \overline{F} &= (\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3) \\ &= (f_1 + \varepsilon f_1^0, f_2 + \varepsilon f_2^0, f_3 + \varepsilon f_3^0) \\ &= (f_1, f_2, f_3) + \varepsilon (f_1^0, f_2^0, f_3^0) \\ &= F + \varepsilon F^0 \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \overline{F}_{*\overline{q}} \quad &: \quad T_{\overline{q}}\mathbf{D}^2 \longrightarrow T_{\overline{F}(\overline{q})}\mathbf{D}^3 \\ \overrightarrow{e}_{1\overline{q}} \quad &\longrightarrow \quad \overline{F}_{*\overline{q}}\left(\overrightarrow{e}_{1\overline{q}}\right) = \left(\overrightarrow{e}_{1\overline{q}}\left[\overline{f}_1\right], \overrightarrow{e}_{1\overline{q}}\left[\overline{f}_2\right], \overrightarrow{e}_{1\overline{q}}\left[\overline{f}_3\right]\right)|_{p+\varepsilon p^* = \overline{p}} \end{aligned}$$

lineer dönüşümünün $\overline{F}$ dual analitik fonksiyonun $\overline{q} \in \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2$ dual noktasındaki dual türev dönüşümü olduğunu biliyoruz. Şimdi, dual türev dönüşümü ve dual yöne göre türev tanımları kullanılırsa

$$\begin{aligned} \overline{F}_{*\overline{q}}\left(\overrightarrow{e}_{1\overline{q}}\right) &= \left(\overrightarrow{e}_{1\overline{q}}\left[\overline{f}_1\right], \overrightarrow{e}_{1\overline{q}}\left[\overline{f}_2\right], \overrightarrow{e}_{1\overline{q}}\left[\overline{f}_3\right]\right)|_{p+\varepsilon p^* = \overline{p}} \\ &= \left(\overrightarrow{e}_{1\overline{q}}\left[f_1 + \varepsilon f_1^0\right], \overrightarrow{e}_{1\overline{q}}\left[f_2 + \varepsilon f_2^0\right], \overrightarrow{e}_{1\overline{q}}\left[f_3 + \varepsilon f_3^0\right]\right)|_{p+\varepsilon p^* = \overline{p}} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\overrightarrow{e}_{1\widetilde{q}}[f_1], \overrightarrow{e}_{1\widetilde{q}}[f_2], \overrightarrow{e}_{1\widetilde{q}}[f_3]\right) \\ +\varepsilon\left(\overrightarrow{e}_{1\widetilde{q}}\left[f_1^0\right], \overrightarrow{e}_{1\widetilde{q}}\left[f_2^0\right], \overrightarrow{e}_{1\widetilde{q}}\left[f_3^0\right]\right) \end{pmatrix}|_{p+\varepsilon p^* = \overline{p}} \end{aligned}$$

olup $1 \leq i \leq 3$ için

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e}_{1\overline{q}}\left[\overline{f}_i\right] &= \overrightarrow{e}_{1\widetilde{q}}[f_i] + \varepsilon \overrightarrow{e}_{1\widetilde{q}}\left[f_i^0\right] \\
&= \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_1} \mid_{\widetilde{q}} .1 + \frac{\partial f_i}{\partial u_2} \mid_{\widetilde{q}} .0\right) + \varepsilon \left(\frac{\partial f_i^0}{\partial u_1} \mid_{\widetilde{q}} .1 + \frac{\partial f_i^0}{\partial u_2} \mid_{\widetilde{q}} .0\right) \\
&= \frac{\partial f_i}{\partial u_1} \mid_{\widetilde{q}} + \varepsilon \frac{\partial f_i^0}{\partial u_1} \mid_{\widetilde{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $f_i = f_i(u_1, u_2)$ ve $f_i^0 = \sum_{j=1}^{2} u_j^* \frac{\partial f_i}{\partial u_j} + \widetilde{f}_i(u_1, u_2)$ dir. O halde,

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{*\overline{q}}\left(\overrightarrow{e}_{1\overline{q}}\right) &= \left(\overrightarrow{e}_{1\overline{q}}\left[\overline{f}_1\right], \overrightarrow{e}_{1\overline{q}}\left[\overline{f}_2\right], \overrightarrow{e}_{1\overline{q}}\left[\overline{f}_3\right]\right) \mid_{p+\varepsilon p^* = \overline{p}} \\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} \mid_{\widetilde{q}} + \varepsilon \frac{\partial f_1^0}{\partial u_1} \mid_{\widetilde{q}}, \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \mid_{\widetilde{q}} + \varepsilon \frac{\partial f_2^0}{\partial u_1} \mid_{\widetilde{q}}, \frac{\partial f_3}{\partial u_1} \mid_{\widetilde{q}} + \varepsilon \frac{\partial f_3^0}{\partial u_1} \mid_{\widetilde{q}}\right) \\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} \mid_{\widetilde{q}}, \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \mid_{\widetilde{q}}, \frac{\partial f_3}{\partial u_1} \mid_{\widetilde{q}}\right) + \varepsilon \left(\frac{\partial f_1^0}{\partial u_1} \mid_{\widetilde{q}}, \frac{\partial f_2^0}{\partial u_1} \mid_{\widetilde{q}}, \frac{\partial f_3^0}{\partial u_1} \mid_{\widetilde{q}}\right) \\
&= F_{u_1} \mid_{\widetilde{q}} + \varepsilon F_{u_1}^0 \mid_{\widetilde{q}}
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan, dual yüzey kavramından

$$\begin{aligned}
\overline{F}\left(\overline{u}_1, \overline{u}_2\right) &= F(u_1, u_2) + \varepsilon \left(u_1^* F_{u_1} + u_2^* F_{u_2} + \widetilde{F}(u_1, u_2)\right) \\
&= F + \varepsilon F^0
\end{aligned}$$

eşitliğinin var olduğunu biliyoruz. Bu eşitliğin $\overline{u}_1$ dual değişkene göre kısmi türevi

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{u}_1} \mid_{\overline{q}} = \frac{\partial F}{\partial u_1} \mid_{\widetilde{q}} + \varepsilon \frac{\partial F^0}{\partial u_1} \mid_{\widetilde{q}} = F_{u_1} \mid_{\widetilde{q}} + \varepsilon F_{u_1}^0 \mid_{\widetilde{q}}$$

bulunur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{*\overline{q}}\left(\overrightarrow{e}_{1\overline{q}}\right) &= F_{u_1} \mid_{\widetilde{q}} + \varepsilon F_{u_1}^0 \mid_{\widetilde{q}} \\
&= \frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{u}_1} \mid_{\overline{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{*\overline{q}} \quad &: \quad T_{\overline{q}}\mathbf{D}^2 \longrightarrow T_{\overline{F}(\overline{q})}\mathbf{D}^3 \\
\overrightarrow{e}_{2\overline{q}} \quad &\longrightarrow \quad \overline{F}_{*\overline{q}}\left(\overrightarrow{e}_{2\overline{q}}\right) = \left(\overrightarrow{e}_{2\overline{q}}\left[\overline{f}_1\right], \overrightarrow{e}_{2\overline{q}}\left[\overline{f}_2\right], \overrightarrow{e}_{2\overline{q}}\left[\overline{f}_3\right]\right) \mid_{p+\varepsilon p^* = \overline{p}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{*\overline{q}}\left(\overrightarrow{e}_{2\overline{q}}\right) &= \left(\overrightarrow{e}_{2\overline{q}}\left[\overline{f}_1\right], \overrightarrow{e}_{2\overline{q}}\left[\overline{f}_2\right], \overrightarrow{e}_{2\overline{q}}\left[\overline{f}_3\right]\right) |_{p+\varepsilon p^*=\overline{p}} \\
&= \left(\overrightarrow{e}_{2\overline{q}}\left[f_1+\varepsilon f_1^0\right], \overrightarrow{e}_{2\overline{q}}\left[f_2+\varepsilon f_2^0\right], \overrightarrow{e}_{2\overline{q}}\left[f_3+\varepsilon f_3^0\right]\right) |_{p+\varepsilon p^*=\overline{p}} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\overrightarrow{e}_{2\widetilde{q}}[f_1], \overrightarrow{e}_{2\widetilde{q}}[f_2], \overrightarrow{e}_{2\widetilde{q}}[f_3]\right) \\ +\varepsilon\left(\overrightarrow{e}_{2\widetilde{q}}\left[f_1^0\right], \overrightarrow{e}_{2\widetilde{q}}\left[f_2^0\right], \overrightarrow{e}_{2\widetilde{q}}\left[f_3^0\right]\right) \end{pmatrix} |_{p+\varepsilon p^*=\overline{p}}
\end{aligned}$$

olup $1 \leq i \leq 3$ için

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e}_{2\overline{q}}\left[\overline{f}_i\right] &= \overrightarrow{e}_{2\widetilde{q}}[f_i] + \varepsilon \overrightarrow{e}_{2\widetilde{q}}\left[f_i^0\right] \\
&= \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_1} |_{\widetilde{q}} .0 + \frac{\partial f_i}{\partial u_2} |_{\widetilde{q}} .1\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial f_i^0}{\partial u_1} |_{\widetilde{q}} .0 + \frac{\partial f_i^0}{\partial u_2} |_{\widetilde{q}} .1\right) \\
&= \frac{\partial f_i}{\partial u_2} |_{\widetilde{q}} + \varepsilon \frac{\partial f_i^0}{\partial u_2} |_{\widetilde{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{*\overline{q}}\left(\overrightarrow{e}_{2\overline{q}}\right) &= \left(\overrightarrow{e}_{2\overline{q}}\left[\overline{f}_1\right], \overrightarrow{e}_{2\overline{q}}\left[\overline{f}_2\right], \overrightarrow{e}_{2\overline{q}}\left[\overline{f}_3\right]\right) |_{p+\varepsilon p^*=\overline{p}} \\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_2} |_{\widetilde{q}} + \varepsilon \frac{\partial f_1^0}{\partial u_2} |_{\widetilde{q}}, \frac{\partial f_2}{\partial u_2} |_{\widetilde{q}} + \varepsilon \frac{\partial f_2^0}{\partial u_2} |_{\widetilde{q}}, \frac{\partial f_3}{\partial u_2} |_{\widetilde{q}} + \varepsilon \frac{\partial f_3^0}{\partial u_2} |_{\widetilde{q}}\right) \\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_2} |_{\widetilde{q}}, \frac{\partial f_2}{\partial u_2} |_{\widetilde{q}}, \frac{\partial f_3}{\partial u_2} |_{\widetilde{q}}\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial f_1^0}{\partial u_2} |_{\widetilde{q}}, \frac{\partial f_2^0}{\partial u_2} |_{\widetilde{q}}, \frac{\partial f_3^0}{\partial u_2} |_{\widetilde{q}}\right) \\
&= F_{u_2} |_{\widetilde{q}} + \varepsilon F_{u_2}^0 |_{\widetilde{q}}
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
\overline{F}\left(\overline{u}_1, \overline{u}_2\right) &= F\left(u_1, u_2\right) + \varepsilon\left(u_1^* F_{u_1} + u_2^* F_{u_2} + \widetilde{F}\left(u_1, u_2\right)\right) \\
&= F + \varepsilon F^0
\end{aligned}$$

dual analitik fonksiyonunun $\overline{u}_2$ dual değişkene göre kısmi türevi

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{u}_2} |_{\overline{q}} = \frac{\partial F}{\partial u_2} |_{\widetilde{q}} + \varepsilon \frac{\partial F^0}{\partial u_2} |_{\widetilde{q}} = F_{u_2} |_{\widetilde{q}} + \varepsilon F_{u_2}^0 |_{\widetilde{q}}$$

şeklindedir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{*\overline{q}}\left(\overrightarrow{e}_{2\overline{q}}\right) &= F_{u_2} |_{\widetilde{q}} + \varepsilon F_{u_2}^0 |_{\widetilde{q}} \\
&= \frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{u}_2} |_{\overline{q}}
\end{aligned}$$

bulunur. $\overline{F}_{*\overline{q}}$ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris

$$
\begin{aligned}
\overline{J}\left(\overline{F},\overline{q}\right) &= \left[\begin{array}{cc} \overline{F}_{*\overline{q}}\left(\overrightarrow{e}_{1\overline{q}}\right) & \overline{F}_{*\overline{q}}\left(\overrightarrow{e}_{2\overline{q}}\right) \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc} \dfrac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{u}_1}\mid_{\overline{q}} & \dfrac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{u}_2}\mid_{\overline{q}} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc} F_{u_1}\mid_{\widetilde{q}} & F_{u_2}\mid_{\widetilde{q}} \end{array}\right] + \varepsilon \left[\begin{array}{cc} F^0_{u_1}\mid_{\widetilde{q}} & F^0_{u_2}\mid_{\widetilde{q}} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\mid_{\widetilde{q}} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}\mid_{\widetilde{q}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1}\mid_{\widetilde{q}} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2}\mid_{\widetilde{q}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1}\mid_{\widetilde{q}} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2}\mid_{\widetilde{q}} \end{array}\right] + \varepsilon \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1^0}{\partial u_1}\mid_{\widetilde{q}} & \frac{\partial f_1^0}{\partial u_2}\mid_{\widetilde{q}} \\ \frac{\partial f_2^0}{\partial u_1}\mid_{\widetilde{q}} & \frac{\partial f_2^0}{\partial u_2}\mid_{\widetilde{q}} \\ \frac{\partial f_3^0}{\partial u_1}\mid_{\widetilde{q}} & \frac{\partial f_3^0}{\partial u_2}\mid_{\widetilde{q}} \end{array}\right] \\
&= \left(J(F) + \varepsilon J\left(F^0\right)\right)\mid_{\widetilde{q}}
\end{aligned}
$$

biçimindedir. Burada, $1 \leq i \leq 3$ için

$$
\frac{\partial f_i^0}{\partial u_1} = u_1^* \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_1^2} + u_2^* \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_1 \partial u_2} + \frac{\partial \widetilde{f}_i}{\partial u_1}
$$

olup

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_i^0}{\partial u_1}\left(\widetilde{q}\right) &= u_1^*\left(\widetilde{q}\right) \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_1^2}\left(u_1\left(\widetilde{q}\right), u_2\left(\widetilde{q}\right)\right) + u_2^*\left(\widetilde{q}\right) \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_1 \partial u_2}\left(u_1\left(\widetilde{q}\right), u_2\left(\widetilde{q}\right)\right) \\
&\quad + \frac{\partial \widetilde{f}_i}{\partial u_1}\left(u_1\left(\widetilde{q}\right), u_2\left(\widetilde{q}\right)\right) \\
&= q_1^* \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_1^2}(q) + q_2^* \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_1 \partial u_2}(q) + \frac{\partial \widetilde{f}_i}{\partial u_1}(q)
\end{aligned}
$$

bulunur. Benzer şekilde, $1 \leq i \leq 3$ için

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_i^0}{\partial u_2}\left(\widetilde{q}\right) &= u_1^*\left(\widetilde{q}\right) \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_2 \partial u_1}\left(u_1\left(\widetilde{q}\right), u_2\left(\widetilde{q}\right)\right) + u_2^*\left(\widetilde{q}\right) \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_2^2}\left(u_1\left(\widetilde{q}\right), u_2\left(\widetilde{q}\right)\right) \\
&\quad + \frac{\partial \widetilde{f}_i}{\partial u_2}\left(u_1\left(\widetilde{q}\right), u_2\left(\widetilde{q}\right)\right) \\
&= q_1^* \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_2 \partial u_1}(q) + q_2^* \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_2^2}(q) + \frac{\partial \widetilde{f}_i}{\partial u_2}(q)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu $\overline{J}\left(\overline{F},\overline{q}\right)$ matrisi $\overline{F}$ dönüşümünün $\overline{q}$ dual noktasındaki dual jakobiyen matrisidir.

Teorem 4.1.9.

$$\overline{F}:\mathbf{D}^2\longrightarrow\mathbf{D}^3$$

$$\overline{F}(\overline{u})=\overline{F}(\overline{u}_1,\overline{u}_2)=F(u_1,u_2)+\varepsilon\left(u_1^*F_{u_1}+u_2^*F_{u_2}+\widetilde{F}(u_1,u_2)\right)$$

bir dual analitik fonksiyon olsun. Eğer $\overline{q}=q+\varepsilon q^*\in\mathbf{D}^2$ ve U, $\mathbb{R}^2$ uzayının standart topolojisine göre açık olmak üzere, $\forall q\in U$ için $rankJ(F,q)=2$ ise $\mathbf{D}^2$ uzayında $\overline{q}\in\mathbf{D}^2$ noktasını kapsayan en az bir $\overline{U}\in\overline{\tau}$ dual açığı vardır öyle ki $\overline{F}\mid_{\overline{U}}:\overline{U}\longrightarrow\overline{F}(\overline{U})$ bir dual diffeomorfizmdir.

İspat.

$$\overline{F}:\mathbf{D}^2\longrightarrow\mathbf{D}^3$$

$$\overline{F}(\overline{u}_1,\overline{u}_2)=F(u_1,u_2)+\varepsilon\left(u_1^*F_{u_1}+u_2^*F_{u_2}+\widetilde{F}(u_1,u_2)\right)$$

dual analitik bir fonksiyon ve $\forall q\in U$ için $rankJ(F,q)=2$ olsun. Burada, F ve $\widetilde{F}$ fonksiyonlarının $\mathbb{R}^2$ den $\mathbb{R}^3$ e tanımlı $C^\infty-$sınıfından fonksiyonlara indirgenebildiğini biliyoruz. O halde, $F:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ fonksiyonu $C^\infty-$sınıfından bir fonksiyon ve $\forall q\in U$ için $rankJ(F,q)=2$ olduğundan invers fonksiyon teoreminden biliyoruz ki $F\mid_U:U\longrightarrow F(U)$ bir diffeomorfizmdir. Yani, $(F\mid_U)^{-1}$ mevcut ve $C^\infty-$sınıfındandır. Şimdi, $\overline{F}\mid_{\overline{U}}:\overline{U}\longrightarrow\overline{F}(\overline{U})$ bir dual diffeomorfizm olduğunu göstermek için $\left(\overline{F}\mid_{\overline{U}}\right)^{-1}$ dual fonksiyonunun mevcut ve dual analitik bir fonksiyon olduğunu göstermek yeterlidir. Teorem 4.1.7. den $\overline{F}\mid_{\overline{U}}$ dual analitik fonksiyonunun birebir ve örten olduğu kolaylıkla görülebilir. O halde, $\overline{F}\mid_{\overline{U}}$ dual analitik fonksiyonunun tersi mevcuttur. Kolaylık olması için bu fonksiyonun tersini $\left(\overline{F}\mid_{\overline{U}}\right)^{-1}=\overline{G}$ ile gösterelim. Bu durumda, $\overline{G}$ dual fonksiyonu

$$\begin{aligned}\overline{G}\quad&:\quad\overline{F}(\overline{U})\subseteq\mathbf{D}^3\longrightarrow\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^2\\ \overline{x}\quad&=\quad(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)\longrightarrow\overline{G}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)=\left(\overline{G}_1(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3),\overline{G}_2(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)\right)\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır ve bu fonksiyon

$$\begin{aligned}\overline{G}(\overline{x})&=\overline{G}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)\\&=G(x_1,x_2,x_3)+\varepsilon\left(x_1^*G_{x_1}+x_2^*G_{x_2}+x_3^*G_{x_3}+\widetilde{G}(x_1,x_2,x_3)\right)\\&=G+\varepsilon G^0\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada,

$$\left(F\mid_U\right)^{-1}(x) = G(x) = G(x_1,x_2,x_3) = \left(G_1(x_1,x_2,x_3), G_2(x_1,x_2,x_3)\right)$$

ve

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}(x) &= \widetilde{G}(x_1,x_2,x_3) = \left(\widetilde{G}_1(x_1,x_2,x_3), \widetilde{G}_2(x_1,x_2,x_3)\right) \\
&= \left(\left\langle -\widetilde{F}(G(x)), \nabla G_1\right\rangle, \left\langle -\widetilde{F}(G(x)), \nabla G_2\right\rangle\right) \\
&= \left(\begin{array}{c} -\widetilde{f}_1(G(x))\,G_{1x_1} - \widetilde{f}_2(G(x))\,G_{1x_2} - \widetilde{f}_3(G(x))\,G_{1x_3}, \\ -\widetilde{f}_1(G(x))\,G_{2x_1} - \widetilde{f}_2(G(x))\,G_{2x_2} - \widetilde{f}_3(G(x))\,G_{2x_3} \end{array}\right)
\end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir. Gerçekten, $\overline{G}$, $\overline{F}\mid_{\overline{U}}$ dual analitik fonksiyonunun tersidir. Bunu görmek için,

$$\left(\overline{F}\mid_{\overline{U}}\circ\overline{G}\right)(\overline{x}) = \overline{F}\mid_{\overline{U}}\left(\overline{G}(\overline{x})\right) = \overline{F}\mid_{\overline{U}}\left(\overline{G}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)\right) = \overline{I}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3) = (\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3) = \overline{x}$$

ve

$$\left(\overline{G}\circ\overline{F}\mid_{\overline{U}}\right)(\overline{u}) = \left(\overline{G}\circ\overline{F}\mid_{\overline{U}}\right)(\overline{u}_1,\overline{u}_2) = \overline{I}(\overline{u}_1,\overline{u}_2) = (\overline{u}_1,\overline{u}_2) = \overline{u}$$

eşitliklerinin varlığını göstermek yeterlidir. Şimdi, bu eşitliklerin varlığını gösterelim. İlk eşitlik için,

$$\begin{aligned}
\left(\overline{F}\mid_{\overline{U}}\circ\overline{G}\right)(\overline{x}) &= \overline{F}\mid_{\overline{U}}\left(G(x_1,x_2,x_3) + \varepsilon\left(x_1^*G_{x_1} + x_2^*G_{x_2} + x_3^*G_{x_3} + \widetilde{G}(x_1,x_2,x_3)\right)\right) \\
&= \left(F\mid_U\circ G\right)(x_1,x_2,x_3) \\
&\quad +\varepsilon\left(\begin{array}{c} x_1^*\left(G_{1x_1}F_{u_1}(G(x)) + G_{2x_1}F_{u_2}(G(x))\right) \\ +x_2^*\left(G_{1x_2}F_{u_1}(G(x)) + G_{2x_2}F_{u_2}(G(x))\right) \\ +x_3^*\left(G_{1x_3}F_{u_1}(G(x)) + G_{2x_3}F_{u_2}(G(x))\right) \\ +F_{u_1}(G(x))\widetilde{G}_1(x) + F_{u_2}(G(x))\widetilde{G}_2(x) + \widetilde{F}(G(x)) \end{array}\right)
\end{aligned}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu durumda,

$$\left(F\mid_U\circ G\right)(x_1,x_2,x_3) = I(x_1,x_2,x_3)$$

olduğundan yukarıdaki ifade için gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki eşitliğin elde edileceği açıktır:

$$\begin{aligned}
\left(\overline{F}\mid_{\overline{U}}\circ\overline{G}\right)(\overline{x}) &= I(x_1,x_2,x_3) \\
&\quad +\varepsilon\begin{pmatrix} x_1^*\frac{\partial(F\circ G)}{\partial x_1}+x_2^*\frac{\partial(F\circ G)}{\partial x_2}+x_3^*\frac{\partial(F\circ G)}{\partial x_3} \\ -\widetilde{f}_1(G(x))\frac{\partial(F\circ G)}{\partial x_1}-\widetilde{f}_2(G(x))\frac{\partial(F\circ G)}{\partial x_2} \\ -\widetilde{f}_3(G(x))\frac{\partial(F\circ G)}{\partial x_3}+\widetilde{F}(G(x)) \end{pmatrix} \\
&= (x_1,x_2,x_3)+\varepsilon(x_1^*,x_2^*,x_3^*) \\
&= (\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)=\overline{x}.
\end{aligned}$$

İkinci eşitlik,

$$\begin{aligned}
\left(\overline{G}\circ\overline{F}\mid_{\overline{U}}\right)(\overline{u}) &= \overline{G}\left(F\mid_U(u_1,u_2)+\varepsilon\left(u_1^*F_{u_1}+u_2^*F_{u_2}+\widetilde{F}(u_1,u_2)\right)\right) \\
&= G(F\mid_U(u_1,u_2)) \\
&\quad +\varepsilon\begin{pmatrix} \left(u_1^*f_{1u_1}+u_2^*f_{1u_2}+\widetilde{f}_1(u_1,u_2)\right)G_{x_1}(F(u_1,u_2)) \\ +\left(u_1^*f_{2u_1}+u_2^*f_{2u_2}+\widetilde{f}_2(u_1,u_2)\right)G_{x_2}(F(u_1,u_2)) \\ +\left(u_1^*f_{3u_1}+u_2^*f_{3u_2}+\widetilde{f}_3(u_1,u_2)\right)G_{x_3}(F(u_1,u_2)) \\ +\widetilde{G}(F(u_1,u_2)) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olmak üzere, $(G\circ F\mid_U)(u_1,u_2)=I(u_1,u_2)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\left(\overline{G}\circ\overline{F}\mid_{\overline{U}}\right)(\overline{u}) &= I(u_1,u_2)+\varepsilon\begin{pmatrix} u_1^*\frac{\partial(G\circ F)}{\partial u_1}+u_2^*\frac{\partial(G\circ F)}{\partial u_2} \\ -\widetilde{G}(F(u_1,u_2))+\widetilde{G}(F(u_1,u_2)) \end{pmatrix} \\
&= (u_1,u_2)+\varepsilon(u_1^*(1,0)+u_2^*(0,1)) \\
&= (u_1,u_2)+\varepsilon(u_1^*,u_2^*) \\
&= (\overline{u}_1,\overline{u}_2)=\overline{u}
\end{aligned}$$

biçiminde hesaplanır. Burada,

$$\widetilde{G}(F(u_1,u_2))=\begin{pmatrix} \left\langle -\widetilde{F}(u_1,u_2),\nabla G_1(F(u_1,u_2))\right\rangle, \\ \left\langle -\widetilde{F}(u_1,u_2),\nabla G_2(F(u_1,u_2))\right\rangle \end{pmatrix}$$

dir. Ayrıca, $1\leq i\leq 3$ için $\dfrac{\partial G}{\partial x_i^*}=0$, $\dfrac{\partial G}{\partial x_i}=\dfrac{\partial G^0}{\partial x_i^*}$ ve G ile $\widetilde{G}$, $C^\infty-$sınıfından fonksiyonlar olduğundan $\left(\overline{F}\mid_{\overline{U}}\right)^{-1}=\overline{G}$ dual analitik bir fonksiyondur. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.1.3. $\overline{M}$, $\mathbf{D}^3$ uzayında bir dual yüzey ve $\left(\overline{F},\overline{U}\right)$ ikilisi bu dual yüzey için bir parametrizasyon olsun. O halde, dual yüzey tanımına göre

$$\overline{F}\left(\overline{u}\right)=\overline{F}\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right)=F\left(u_1,u_2\right)+\varepsilon\left(u_1^*F_{u_1}+u_2^*F_{u_2}+\widetilde{F}\left(u_1,u_2\right)\right)=F+\varepsilon F^0$$

dönüşümünün bir dual diffeomorfizm olduğunu biliyoruz. Yani, $\overline{F}$ ve $\overline{F}^{-1}$ birer dual analitik fonksiyonlardır. O halde, $\left\{\overline{F}_{\overline{u}_1},\overline{F}_{\overline{u}_2}\right\}$ cümlesi lineer bağımsızdır. Yani, $\overline{F}_{\overline{u}_1}\times_{\mathbf{D}}\overline{F}_{\overline{u}_2}\neq\overline{0}$ dır.

Teorem 4.1.10. $\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^2$ dual açık cümle ve $\overline{f}:\overline{U}\longrightarrow\mathbf{D}$ bir dual analitik fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\overline{M}=\left\{\left(\overline{q}_1,\overline{q}_2,\overline{f}\left(\overline{q}_1,\overline{q}_2\right)\right)\mid\left(\overline{q}_1,\overline{q}_2\right)\in\overline{U}\right\}$$

cümlesi $\mathbf{D}^3$ uzayında bir dual yüzeydir.

İspat. $\overline{u}_1=u_1+\varepsilon u_1^*$ ve $\overline{u}_2=u_2+\varepsilon u_2^*$, $\mathbf{D}^2$ uzayının dual koordinat fonksiyonları olsun. Öncelikle, $\overline{M}$ cümlesi için bir parametrizasyon belirleyeceğiz.

$$\begin{aligned}\overline{F}\quad&:\quad\overline{U}\longrightarrow\overline{F}(\overline{U})=\overline{M}\subset\mathbf{D}^3\\ \overline{q}\quad&=\quad\left(\overline{q}_1,\overline{q}_2\right)\longrightarrow\overline{F}\left(\overline{q}\right)=\left(\overline{q}_1,\overline{q}_2,\overline{f}\left(\overline{q}_1,\overline{q}_2\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{F}\left(\overline{q}\right)&=\overline{F}\left(\overline{u}_1\left(\overline{q}\right),\overline{u}_2\left(\overline{q}\right)\right)=\left(\overline{q}_1,\overline{q}_2,\overline{f}\left(\overline{q}_1,\overline{q}_2\right)\right)=\left(\overline{u}_1\left(\overline{q}\right),\overline{u}_2\left(\overline{q}\right),\overline{f}\left(\overline{u}_1\left(\overline{q}\right),\overline{u}_2\left(\overline{q}\right)\right)\right)\\&=\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{f}\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right)\right)\left(\overline{q}\right)\end{aligned}$$

bulunur. $\forall\overline{q}\in\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^2$ için $\overline{F}\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right)\left(\overline{q}\right)=\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{f}\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right)\right)\left(\overline{q}\right)$ olduğundan fonksiyon eşitliği tanımından $\overline{F}\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right)=\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{f}\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right)\right)$ dual fonksiyonu elde edilir. Şimdi, $\overline{F}$ fonksiyonunun bir dual diffeomorfizm olduğunu gösterelim.

$$\overline{F}\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right)=\left(\overline{f}_1\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right),\overline{f}_2\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right),\overline{f}_3\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right)\right)=\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{f}\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right)\right)=F+\varepsilon F^0$$

olmak üzere, $\overline{F}$ fonksiyonunun dual analitik ve $\forall q\in U$ için $rankJ(F,q)=2$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$\overline{F}$ fonksiyonunun dual analitikliği:

$\overline{F}(\overline{u}_1,\overline{u}_2) = \left(\overline{f}_1(\overline{u}_1,\overline{u}_2), \overline{f}_2(\overline{u}_1,\overline{u}_2), \overline{f}_3(\overline{u}_1,\overline{u}_2)\right) = \left(\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{f}(\overline{u}_1,\overline{u}_2)\right)$ olup

$$\begin{aligned} \overline{f}_1 &: \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2 \longrightarrow \mathbf{D} \\ (\overline{u}_1,\overline{u}_2) &\longrightarrow \overline{f}_1(\overline{u}_1,\overline{u}_2) = \overline{u}_1 = u_1 + \varepsilon u_1^* = f_1(u_1,u_2) + \varepsilon\left(u_1^*\frac{\partial f_1}{\partial u_1} + u_2^*\frac{\partial f_1}{\partial u_2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{f}_2 &: \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2 \longrightarrow \mathbf{D} \\ (\overline{u}_1,\overline{u}_2) &\longrightarrow \overline{f}_2(\overline{u}_1,\overline{u}_2) = \overline{u}_2 = u_2 + \varepsilon u_2^* = f_2(u_1,u_2) + \varepsilon\left(u_1^*\frac{\partial f_2}{\partial u_1} + u_2^*\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \overline{f}_3 &: \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2 \longrightarrow \mathbf{D} \\ (\overline{u}_1,\overline{u}_2) &\longrightarrow \overline{f}_3(\overline{u}_1,\overline{u}_2) = \overline{f}(\overline{u}_1,\overline{u}_2) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu durumda, $1 \leq i \leq 3$ için $\overline{f}_i$ dönüşümlerinin dual analitik olduğu açıktır. O halde, $\overline{F}$ dönüşümü dual analitiktir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \overline{J}\left(\overline{F}\right) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^0}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1^0}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2^0}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2^0}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_3^0}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3^0}{\partial u_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\partial f_3^0}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3^0}{\partial u_2} \end{bmatrix} \\ &= J(F) + \varepsilon J\left(F^0\right) \end{aligned}$$

olmak üzere, $\forall q \in U$ için $rankJ(F,q) = 2$ olduğu açıktır. Teorem 4.1.9. dikkate alındığında $\overline{F}$ bir dual diffeomorfizmdir. Buradan, $\overline{F}(\overline{U}) = \overline{M}$ cümlesi $\mathbf{D}^3$ uzayında bir dual yüzeydir. Burada, $rank\overline{J}\left(\overline{F},\overline{q}\right) = 2$ olduğu kolaylıkla görülebilir. □

Teorem 4.1.11. $\overline{U}$, $\mathbf{D}^3$ uzayının bir dual açık alt cümlesi olmak üzere, $\overline{f} : \overline{U} \longrightarrow \mathbf{D}$, $\overline{f} =$

$f+\varepsilon f^0$ dual analitik bir fonksiyon olsun. $c\in\mathbb{R}$ noktası f fonksiyonunun bir regüler değeri ise $\overline{f}^{-1}\{\overline{c}\}$ cümlesi $\mathbf{D}^3$ uzayında bir dual yüzeydir. Burada, $\overline{c}=c+\varepsilon c^*\in\mathbf{D}$ dir.

Tanım 4.1.12. $\overline{M}$, $\mathbf{D}^3$ uzayında bir dual yüzey ve $\left(\overline{F},\overline{U}\right)$ ikilisi bu dual yüzey için bir parametrizasyon olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\overline{F}\quad &:\quad \overline{U}\subseteq\mathbf{D}^2\longrightarrow\overline{F}\left(\overline{U}\right)\subseteq\overline{M}\subset\mathbf{D}^3\\ (\overline{u}_1,\overline{u}_2)\quad &\longrightarrow\quad \overline{F}(\overline{u}_1,\overline{u}_2)=F(u_1,u_2)+\varepsilon\left(u_1^*F_{u_1}+u_2^*F_{u_2}+\widetilde{F}(u_1,u_2)\right)\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. $(\overline{u}_{1_0},\overline{u}_{2_0})\in\overline{U}$ bir dual sabit olsun. $\overline{F}(\overline{u}_1,\overline{u}_{2_0})$, $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde bir eğri tanımlar.

$$\begin{aligned}\overline{F}(\overline{u}_1,\overline{u}_{2_0}) &= F(u_1,u_{2_0})+\varepsilon\left(u_1^*F_{u_1}(u_1,u_{2_0})+u_{2_0}^*F_{u_2}(u_1,u_{2_0})+\widetilde{F}(u_1,u_{2_0})\right)\\ &= \alpha(u_1)+\varepsilon\left(u_1^*\alpha'(u_1)+\widetilde{\alpha}(u_1)\right)\\ &= \overline{\alpha}(\overline{u}_1)\end{aligned}$$

eğrisine $\overline{M}$ dual yüzeyinin $\overline{u}_{2_0}=u_{2_0}+\varepsilon u_{2_0}^*\in\mathbf{D}$ ile elde edilen $\overline{u}_1-$dual parametre eğrisi denir. Diğer yandan, $\overline{F}(\overline{u}_{1_0},\overline{u}_2)$ dual fonksiyonu da $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde bir eğri tanımlar.

$$\begin{aligned}\overline{F}(\overline{u}_{1_0},\overline{u}_2) &= F(u_{1_0},u_2)+\varepsilon\left(u_{1_0}^*F_{u_1}(u_{1_0},u_2)+u_2^*F_{u_2}(u_{1_0},u_2)+\widetilde{F}(u_{1_0},u_2)\right)\\ &= \beta(u_2)+\varepsilon\left(u_2^*\beta'(u_2)+\widetilde{\beta}(u_2)\right)\\ &= \overline{\beta}(\overline{u}_2)\end{aligned}$$

eğrisine $\overline{M}$ dual yüzeyinin $\overline{u}_{1_0}=u_{1_0}+\varepsilon u_{1_0}^*\in\mathbf{D}$ ile elde edilen $\overline{u}_2-$dual parametre eğrisi denir. $\overline{\alpha}$ ve $\overline{\beta}$ dual eğrileri $\mathbf{D}^3$ uzayında birer eğridir. Bu eğrilere dual yüzey üzerindeki dual şebeke eğrileri de denir. $\overline{u}_1-$parametre eğrisinin hız vektör alanı

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{\alpha}}{d\overline{u}_1} &= \dot{\overline{\alpha}}(\overline{u}_1)\\ &= \overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{u}_1,\overline{u}_{2_0})\\ &= F_{u_1}(u_1,u_{2_0})+\varepsilon\left(u_1^*F_{u_1u_1}(u_1,u_{2_0})+u_{2_0}^*F_{u_2u_1}(u_1,u_{2_0})+\widetilde{F}_{u_1}(u_1,u_{2_0})\right)\\ &= \alpha'(u_1)+\varepsilon\left(u_1^*\alpha''(u_1)+\widetilde{\alpha}'(u_1)\right)\end{aligned}$$

ve $\overline{u}_2-$parametre eğrisinin hız vektör alanı

$$\begin{aligned}
\frac{d\overline{\beta}}{d\overline{u}_2} &= \overset{\bullet}{\overline{\beta}}(\overline{u}_2) \\
&= \overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{u}_{1_0},\overline{u}_2) \\
&= F_{u_2}(u_{1_0},u_2)+\varepsilon\left(u_{1_0}^{*}F_{u_1u_2}(u_{1_0},u_2)+u_2^{*}F_{u_2u_2}(u_{1_0},u_2)+\widetilde{F}_{u_2}(u_{1_0},u_2)\right) \\
&= \beta'(u_2)+\varepsilon\left(u_2^{*}\beta''(u_2)+\widetilde{\beta}'(u_2)\right)
\end{aligned}$$

biçimindedir.

Örnek 4.1.13.

$$\begin{aligned}
\overline{F} \quad &: \quad \overline{U}\subseteq \mathbf{D}^2 \longrightarrow \overline{F}\left(\overline{U}\right)=\overline{M}\subset \mathbf{D}^3 \\
(\overline{u}_1,\overline{u}_2) &\longrightarrow \overline{F}(\overline{u}_1,\overline{u}_2)=(\overline{r}\cos\overline{u}_2\cos\overline{u}_1,\overline{r}\cos\overline{u}_2\sin\overline{u}_1,\overline{r}\sin\overline{u}_2)
\end{aligned}$$

orijin merkezli ve $\overline{r}$ dual yarıçaplı dual kürenin bir parametrizasyonudur. Burada, $\overline{u}_1=u_1+\varepsilon u_1^{*}$ ve $\overline{u}_2=u_2+\varepsilon u_2^{*}$ olmak üzere, $-\pi<u_1<\pi,-\frac{\pi}{2}<u_2<\frac{\pi}{2},u_1^{*},u_2^{*}\in\mathbb{R}$ ve $\overline{r}=r+\varepsilon r^{*}\in\mathbf{D}^{+}$ dır. Şimdi, $\overline{F}\left(\overline{U}\right)=\overline{M}$ cümlesinin $\mathbf{D}^3$ uzayında bir dual yüzey olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\overline{F}(\overline{u}_1,\overline{u}_2) &= (\overline{r}\cos\overline{u}_2\cos\overline{u}_1,\overline{r}\cos\overline{u}_2\sin\overline{u}_1,\overline{r}\sin\overline{u}_2) \\
&= (r\cos u_2\cos u_1,r\cos u_2\sin u_1,r\sin u_2) \\
&\quad +\varepsilon\begin{pmatrix} u_1^{*}(-r\cos u_2\sin u_1,r\cos u_2\cos u_1,0) \\ +u_2^{*}(-r\sin u_2\cos u_1,-r\sin u_2\sin u_1,r\cos u_2) \\ +(r^{*}\cos u_2\cos u_1,r^{*}\cos u_2\sin u_1,r^{*}\sin u_2) \end{pmatrix} \\
&= F(u_1,u_2)+\varepsilon\left(u_1^{*}F_{u_1}+u_2^{*}F_{u_2}+\widetilde{F}(u_1,u_2)\right) \\
&= F+\varepsilon F^0=(f_1,f_2,f_3)+\varepsilon\left(f_1^0,f_2^0,f_3^0\right)
\end{aligned}$$

olmak üzere, $\overline{F}$ fonksiyonunun bir dual diffeomorfizm olduğunu gösterelim.

İlk olarak, $\overline{F}$ fonksiyonunun bir dual analitik fonksiyon olduğunu gösterelim.

$$\overline{F}(\overline{u}_1,\overline{u}_2)=\left(\overline{f}_1(\overline{u}_1,\overline{u}_2),\overline{f}_2(\overline{u}_1,\overline{u}_2),\overline{f}_3(\overline{u}_1,\overline{u}_2)\right)$$

olmak üzere, $1\leq i\leq 3$ için $\overline{f}_i$ dual fonksiyonları genişletilirse aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned}
\overline{f}_1 \quad &: \quad \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2 \longrightarrow \mathbf{D} \\
(\overline{u}_1, \overline{u}_2) \quad &\longrightarrow \quad \overline{f}_1(\overline{u}_1, \overline{u}_2) = r\cos u_2 \cos u_1 \\
& \qquad + \varepsilon\left(-u_1^* r\cos u_2 \sin u_1 - u_2^* r\sin u_2 \cos u_1 + r^* \cos u_2 \cos u_1\right) \\
&= \quad f_1(u_1, u_2) + \varepsilon\left(u_1^* \frac{\partial f_1}{\partial u_1} + u_2^* \frac{\partial f_1}{\partial u_2} + \widetilde{f}_1(u_1, u_2)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{f}_2 \quad &: \quad \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2 \longrightarrow \mathbf{D} \\
(\overline{u}_1, \overline{u}_2) \quad &\longrightarrow \quad \overline{f}_2(\overline{u}_1, \overline{u}_2) = r\cos u_2 \sin u_1 \\
& \qquad + \varepsilon\left(u_1^* r\cos u_2 \cos u_1 - u_2^* r\sin u_2 \sin u_1 + r^* \cos u_2 \sin u_1\right) \\
&= \quad f_2(u_1, u_2) + \varepsilon\left(u_1^* \frac{\partial f_2}{\partial u_1} + u_2^* \frac{\partial f_2}{\partial u_2} + \widetilde{f}_2(u_1, u_2)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{f}_3 \quad &: \quad \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2 \longrightarrow \mathbf{D} \\
(\overline{u}_1, \overline{u}_2) \quad &\longrightarrow \quad \overline{f}_3(\overline{u}_1, \overline{u}_2) = r\sin u_2 + \varepsilon\left(u_2^* r\cos u_2 + r^* \sin u_2\right) \\
&= \quad f_3(u_1, u_2) + \varepsilon\left(u_1^* \frac{\partial f_3}{\partial u_1} + u_2^* \frac{\partial f_3}{\partial u_2} + \widetilde{f}_3(u_1, u_2)\right)
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Bu durumda, $1 \leq i \leq 3$ için $\overline{f}_i$ dönüşümlerinin dual analitik olduğu açıktır. O halde, $\overline{F}$ dönüşümü dual analitiktir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
\overline{J}\left(\overline{F}\right) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^0}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1^0}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2^0}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2^0}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_3^0}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3^0}{\partial u_2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -r\cos u_2 \sin u_1 & -r\sin u_2 \cos u_1 \\ r\cos u_2 \cos u_1 & -r\sin u_2 \sin u_1 \\ 0 & r\cos u_2 \end{bmatrix} \\
&+\varepsilon \begin{bmatrix} -u_1^* r\cos u_2 \cos u_1 & u_1^* r\sin u_2 \sin u_1 \\ +u_2^* r\sin u_2 \sin u_1 - r^* \cos u_2 \sin u_1 & -u_2^* r\cos u_2 \cos u_1 - r^* \sin u_2 \cos u_1 \\ -u_1^* r\cos u_2 \sin u_1 & -u_1^* r\sin u_2 \cos u_1 \\ -u_2^* r\sin u_2 \cos u_1 + r^* \cos u_2 \cos u_1 & -u_2^* r\cos u_2 \sin u_1 - r^* \sin u_2 \sin u_1 \\ 0 & -u_2^* r\sin u_2 + r^* \cos u_2 \end{bmatrix} \\
&= J(F) + \varepsilon J\left(F^0\right)
\end{aligned}$$

şeklinde olup $\forall q \in U$ için $rankJ(F,q)=2$ dir. O halde, teorem 4.1.9. dikkate alındığında $\overline{F}$ fonksiyonu bir dual diffeomorfizmdir. Yani, $\overline{F}\left(\overline{U}\right)=\overline{M}$ cümlesi $\mathbf{D}^3$ uzayında bir dual yüzeydir. Diğer taraftan,

$$\overline{M}=\left\{(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)\in\mathbf{D}^3 \mid \overline{x}_1^2+\overline{x}_2^2+\overline{x}_3^2=\overline{r}^2\right\}$$

bu dual yüzeyin nokta cümlesidir.

Örnek 4.1.14.

$$\begin{array}{rcl}\overline{F} & : & \overline{U}\subseteq\mathbf{D}^2\longrightarrow\overline{F}\left(\overline{U}\right)=\overline{M}\subset\mathbf{D}^3 \\ (\overline{u}_1,\overline{u}_2) & \longrightarrow & \overline{F}(\overline{u}_1,\overline{u}_2)=(\overline{r}\cos\overline{u}_1,\overline{r}\sin\overline{u}_1,\overline{u}_2)\end{array}$$

olmak üzere $\left(\overline{F},\overline{U}\right)$ ikilisi $\overline{F}\left(\overline{U}\right)=\overline{M}$ dual yüzeyi için bir parametrizasyondur. Burada, $0<u_1<2\pi$, $u_2,u_1^*,u_2^*\in\mathbb{R}$ ve $\overline{r}=r+\varepsilon r^*\in\mathbf{D}^+$ dır.

$$\begin{array}{rcl}\overline{F}(\overline{u}_1,\overline{u}_2) & = & (\overline{r}\cos\overline{u}_1,\overline{r}\sin\overline{u}_1,\overline{u}_2) \\ & = & (r\cos u_1,r\sin u_1,u_2) \\ & & +\varepsilon\left(\begin{array}{c} u_1^*(-r\sin u_1,r\cos u_1,0) \\ +u_2^*(0,0,1)+(r^*\cos u_1,r^*\sin u_1,0)\end{array}\right) \\ & = & F(u_1,u_2)+\varepsilon\left(u_1^*F_{u_1}+u_2^*F_{u_2}+\widetilde{F}(u_1,u_2)\right) \\ & = & F+\varepsilon F^0=(f_1,f_2,f_3)+\varepsilon\left(f_1^0,f_2^0,f_3^0\right)\end{array}$$

olmak üzere, $\overline{F}$ fonksiyonunun bir dual diffeomorfizm olduğunu gösterelim.

İlk olarak, $\overline{F}$ fonksiyonunun bir dual analitik fonksiyon olduğunu gösterelim.

$$\overline{F}(\overline{u}_1,\overline{u}_2)=\left(\overline{f}_1(\overline{u}_1,\overline{u}_2),\overline{f}_2(\overline{u}_1,\overline{u}_2),\overline{f}_3(\overline{u}_1,\overline{u}_2)\right)$$

olmak üzere,

$$\begin{array}{rcl}\overline{f}_1 & : & \overline{U}\subseteq\mathbf{D}^2\longrightarrow\mathbf{D} \\ (\overline{u}_1,\overline{u}_2) & \longrightarrow & \overline{f}_1(\overline{u}_1,\overline{u}_2)=r\cos u_1+\varepsilon(-u_1^*r\sin u_1+r^*\cos u_1) \\ & = & f_1(u_1,u_2)+\varepsilon\left(u_1^*\dfrac{\partial f_1}{\partial u_1}+u_2^*\dfrac{\partial f_1}{\partial u_2}+\widetilde{f}_1(u_1,u_2)\right),\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{f}_2 \quad &: \quad \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2 \longrightarrow \mathbf{D} \\
(\overline{u}_1, \overline{u}_2) \quad &\longrightarrow \quad \overline{f}_2(\overline{u}_1, \overline{u}_2) = r \sin u_1 + \varepsilon \left(u_1^* r \cos u_1 + r^* \sin u_1\right) \\
&= \quad f_2(u_1, u_2) + \varepsilon \left(u_1^* \frac{\partial f_2}{\partial u_1} + u_2^* \frac{\partial f_2}{\partial u_2} + \widetilde{f}_2(u_1, u_2) \right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{f}_3 \quad &: \quad \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2 \longrightarrow \mathbf{D} \\
(\overline{u}_1, \overline{u}_2) \quad &\longrightarrow \quad \overline{f}_3(\overline{u}_1, \overline{u}_2) = u_2 + \varepsilon u_2^* \\
&= \quad f_3(u_1, u_2) + \varepsilon \left(u_1^* \frac{\partial f_3}{\partial u_1} + u_2^* \frac{\partial f_3}{\partial u_2} + \widetilde{f}_3(u_1, u_2) \right)
\end{aligned}
$$

biçiminde elde edilir. Bu durumda, $1 \leq i \leq 3$ için $\overline{f}_i$ dönüşümlerinin dual analitik olduğu açıktır. O halde, $\overline{F}$ dönüşümü dual analitiktir. Diğer yandan,

$$
\begin{aligned}
\overline{J}(\overline{F}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^0}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1^0}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2^0}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2^0}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_3^0}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3^0}{\partial u_2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -r \sin u_1 & 0 \\ r \cos u_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} -u_1^* r \cos u_1 - r^* \sin u_1 & 0 \\ -u_1^* r \sin u_1 + r^* \cos u_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= J(F) + \varepsilon J\left(F^0\right)
\end{aligned}
$$

olmak üzere, $\forall q \in U$ için $rankJ(F,q) = 2$ olduğu açıktır. Teorem 4.1.9. dikkate alındığında $\overline{F}$ dönüşümü bir dual diffeomorfizmdir. O halde, $\overline{M}$ cümlesi $\mathbf{D}^3$ uzayında bir dual yüzeydir. Diğer taraftan, $\overline{M} = \left\{(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) \in \mathbf{D}^3 \mid \overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2 = \overline{r}^2\right\}$ bu dual yüzeyin nokta cümlesidir.

4.2. Bir Dual Yüzey Üzerinde Dual Analitik Fonksiyonlar

Çalışmanın bu kısmında diğer bölümlerde kullanılacak olan dual yüzey üzerinde dual analitik fonksiyon kavramı ayrıntılı bir biçimde incelenecektir. Ayrıca, dual yüzey üzerindeki dual koordinat fonksiyonlarının yapısı oluşturulup bölüm sonunda yüzey üzerindeki dual analitik fonksiyon ve koordinat fonksiyonuna ilişkin bir örnek verilecektir.

$\overline{M}$, $\mathbf{D}^3$ uzayında bir dual yüzey,

$$\begin{aligned}
\overline{F} \quad &: \quad \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2 \longrightarrow \overline{F}\left(\overline{U}\right) \subseteq \overline{M} \subset \mathbf{D}^3 \\
\left(\overline{u}_1, \overline{u}_2\right) \quad &\longrightarrow \quad \overline{F}\left(\overline{u}_1, \overline{u}_2\right) = \left(\overline{f}_1\left(\overline{u}_1, \overline{u}_2\right), \overline{f}_2\left(\overline{u}_1, \overline{u}_2\right), \overline{f}_3\left(\overline{u}_1, \overline{u}_2\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{F}\left(\overline{u}_1, \overline{u}_2\right) &= F\left(u_1, u_2\right) + \varepsilon\left(u_1^* F_{u_1} + u_2^* F_{u_2} + \widetilde{F}\left(u_1, u_2\right)\right) \\
&= F + \varepsilon F^0
\end{aligned}$$

dönüşümü $\overline{M}$ dual yüzeyi için bir parametrizasyon ve $\overline{p} \in \overline{F}\left(\overline{U}\right) \subset \overline{V} \subset_{\text{açık}} \overline{M}$ olmak üzere $\overline{f} : \overline{V} \subset \overline{M} \longrightarrow \mathbf{D}$ bir fonksiyon ve

$$\begin{aligned}
\overline{F}\left(\overline{q}\right) &= F\left(\widetilde{q}\right) + \varepsilon F^0\left(\widetilde{q}\right) \\
&= F\left(u_1\left(\widetilde{q}\right), u_2\left(\widetilde{q}\right)\right) \\
&\quad + \varepsilon\left(\begin{array}{c} u_1^*\left(\widetilde{q}\right) F_{u_1}\left(u_1\left(\widetilde{q}\right), u_2\left(\widetilde{q}\right)\right) + u_2^*\left(\widetilde{q}\right) F_{u_2}\left(u_1\left(\widetilde{q}\right), u_2\left(\widetilde{q}\right)\right) \\ +\widetilde{F}\left(u_1\left(\widetilde{q}\right), u_2\left(\widetilde{q}\right)\right) \end{array}\right) \\
&= F\left(q\right) + \varepsilon\left(q_1^* F_{u_1}\left(q\right) + q_2^* F_{u_2}\left(q\right) + \widetilde{F}\left(q\right)\right) \\
&= p + \varepsilon p^* \\
&= \overline{p}
\end{aligned}$$

olsun. Burada,

$$\begin{aligned}
\overline{q} &= \left(\overline{q}_1, \overline{q}_2\right) \\
&= \left(q_1 + \varepsilon q_1^*, q_2 + \varepsilon q_2^*\right) \\
&= \left(q_1, q_2\right) + \varepsilon\left(q_1^*, q_2^*\right) \\
&= q + \varepsilon q^* \in \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2
\end{aligned}$$

bir dual nokta ve $\overline{u}_1, \overline{u}_2$; $\overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2$ üzerindeki dual koordinat fonksiyonları olmak üzere, $1 \leq i \leq 2$ için

$$\begin{aligned}
\overline{u}_i \quad &: \quad \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2 \longrightarrow \mathbf{D} \\
\overline{q} \quad &\longrightarrow \quad \overline{u}_i\left(\overline{q}\right) = u_i\left(\widetilde{q}\right) + \varepsilon u_i^*\left(\widetilde{q}\right) = q_i + \varepsilon q_i^* = \overline{q}_i
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\begin{tikzcd} \bar{U} \subseteq D^2 \arrow[rr, "\bar{F}"] \arrow[dr, "\bar{h} = \bar{f} \circ \bar{F}"'] & & \bar{F}(\bar{U}) \subset \bar{V} \subset \bar{M} \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

Şekil 4.1: $\overline{F}$ ile $\overline{f}$ fonksiyonlarının bileşkesi

diyagramı oluşturulabilir. Burada,

$$\begin{aligned} \overline{h} &= \overline{f} \circ \overline{F} : \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2 \longrightarrow \mathbf{D} \\ \overline{q} &\longrightarrow \overline{h}(\overline{q}) = \left(\overline{f} \circ \overline{F}\right)(\overline{q}) = \overline{f}\left(\overline{F}(\overline{q})\right) = \overline{f}(\overline{p}) \end{aligned}$$

dir. Eğer $\overline{h} = \overline{f} \circ \overline{F}$ dual fonksiyonu $\overline{q} = (\overline{u}_{1_0}, \overline{u}_{2_0}) = (u_{1_0}, u_{2_0}) + \varepsilon\left(u^*_{1_0}, u^*_{2_0}\right)$ dual noktasında dual analitik bir fonksiyon oluyorsa $\overline{f}$ fonksiyonuna $\overline{p}$ dual noktasında dual analitik fonksiyondur denir. Eğer $\forall \overline{p} \in \overline{V} \subset_{\text{açık}} \overline{M}$ noktasında $\overline{f}$ dual analitik bir fonksiyon ise $\overline{f}$ fonksiyonuna $\overline{V}$ cümlesi üzerinde dual analitik fonksiyondur denir.
Ayrıca, $\overline{F}$ bir dual diffeomorfizm olduğundan $\overline{F}^{-1}$ mevcut ve dual analitiktir. Gerçekten, eğer $\overline{h}$ dual fonksiyonu dual analitik bir fonksiyon ise $\overline{f}$ dual fonksiyonu da dual analitik bir fonksiyondur. Şimdi bunu görelim:

$$\begin{aligned} \overline{F}^{-1}(\overline{x}) &= \overline{G}(\overline{x}) = \overline{G}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) \\ &= G(x_1, x_2, x_3) + \varepsilon\left(x_1^* G_{x_1}(x) + x_2^* G_{x_2}(x) + x_3^* G_{x_3}(x) + \widetilde{G}(x_1, x_2, x_3)\right) \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Burada,

$$G(x) = (G_1(x_1, x_2, x_3), G_2(x_1, x_2, x_3)) = F^{-1}(x)$$

ve

$$\begin{aligned} \widetilde{G}(x) &= \widetilde{G}(x_1, x_2, x_3) = \left(\widetilde{G}_1(x_1, x_2, x_3), \widetilde{G}_2(x_1, x_2, x_3)\right) \\ &= \begin{pmatrix} -\widetilde{f}_1(G(x))\, G_{1x_1}(x) - \widetilde{f}_2(G(x))\, G_{1x_2}(x) - \widetilde{f}_3(G(x))\, G_{1x_3}(x), \\ -\widetilde{f}_1(G(x))\, G_{2x_1}(x) - \widetilde{f}_2(G(x))\, G_{2x_2}(x) - \widetilde{f}_3(G(x))\, G_{2x_3}(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir. Şekil 4.1 göz önüne alındığında

$$\overline{h}=\overline{f}\circ\overline{F}\Longleftrightarrow\overline{h}\circ\overline{F}^{-1}=\left(\overline{f}\circ\overline{F}\right)\circ\overline{F}^{-1}=\overline{f}\circ\left(\overline{F}\circ\overline{F}^{-1}\right)=\overline{f}\circ\overline{I}=\overline{f}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{f}\left(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3\right) &= \left(\overline{h}\circ\overline{F}^{-1}\right)\left(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3\right)\\
&= \overline{h}\left(\overline{F}^{-1}\left(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3\right)\right)\\
&= \overline{h}\left(G(x)+\varepsilon\left(x_1^*G_{x_1}+x_2^*G_{x_2}+x_3^*G_{x_3}+\widetilde{G}(x)\right)\right)\\
&= (h\circ G)(x)+\varepsilon\left(\begin{array}{c}
x_1^*\left(G_{1x_1}(x)\dfrac{\partial h}{\partial u_1}(G(x))+G_{2x_1}(x)\dfrac{\partial h}{\partial u_2}(G(x))\right)\\
+x_2^*\left(G_{1x_2}(x)\dfrac{\partial h}{\partial u_1}(G(x))+G_{2x_2}(x)\dfrac{\partial h}{\partial u_2}(G(x))\right)\\
+x_3^*\left(G_{1x_3}(x)\dfrac{\partial h}{\partial u_1}(G(x))+G_{2x_3}(x)\dfrac{\partial h}{\partial u_2}(G(x))\right)\\
+\widetilde{G}_1(x)\dfrac{\partial h}{\partial u_1}(G(x))\\
+\widetilde{G}_2(x)\dfrac{\partial h}{\partial u_2}(G(x))+\left(\widetilde{h}\circ G\right)(x)
\end{array}\right)\\
&= (h\circ G)(x)+\varepsilon\left(x_1^*\tfrac{\partial(h\circ G)}{\partial x_1}+x_2^*\tfrac{\partial(h\circ G)}{\partial x_2}+x_3^*\tfrac{\partial(h\circ G)}{\partial x_3}+\widetilde{K}(x)\right)\\
&= f+\varepsilon f^0
\end{aligned}$$

elde edilir. G ve h fonksiyonları $C^\infty-$ sınıfından olduğundan $h\circ G$ fonksiyonu da $C^\infty-$ sınıfındandır. Ayrıca; G, $\widetilde{G}$ ve $\widetilde{h}$ fonksiyonları $C^\infty-$ sınıfından olduğundan $\widetilde{K}$ fonksiyonu da $C^\infty-$ sınıfındandır. Diğer yandan, $1\leq i\leq 3$ için

$$\frac{\partial f}{\partial x_i^*}=0,\frac{\partial f}{\partial x_i}=\frac{\partial f^0}{\partial x_i^*}$$

ve $h\circ G$ ile $\widetilde{K}$ fonksiyonları $C^\infty-$ sınıfından olduğundan $\overline{f}$ dual fonksiyonu dual analitik bir fonksiyondur.

Tersine, $\overline{f}$ dual fonksiyonu dual analitik bir fonksiyon ise $\overline{h}$ dual fonksiyonunun da dual analitik bir fonksiyon olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{ccc}
\overline{F} & : & \overline{U}\subseteq\mathbf{D}^2\longrightarrow\overline{F}\left(\overline{U}\right)\subseteq\overline{M}\subset\mathbf{D}^3\\
\left(\bar{u}_1,\bar{u}_2\right) & \longrightarrow & \overline{F}\left(\bar{u}_1,\bar{u}_2\right)=\left(\overline{f}_1\left(\bar{u}_1,\bar{u}_2\right),\overline{f}_2\left(\bar{u}_1,\bar{u}_2\right),\overline{f}_3\left(\bar{u}_1,\bar{u}_2\right)\right)
\end{array}$$

$$\overline{F}\left(\bar{u}_1,\bar{u}_2\right)=F\left(u_1,u_2\right)+\varepsilon\left(u_1^*F_{u_1}+u_2^*F_{u_2}+\widetilde{F}\left(u_1,u_2\right)\right)$$

biçiminde ifade edildiğini biliyoruz. $\overline{h}=\overline{f}\circ\overline{F}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{h}(\overline{u}_1,\overline{u}_2) &= \left(\overline{f}\circ\overline{F}\right)(\overline{u}_1,\overline{u}_2)\\
&= \overline{f}\left(\overline{F}(\overline{u}_1,\overline{u}_2)\right)\\
&= \overline{f}\left(F(u_1,u_2)+\varepsilon\left(u_1^*F_{u_1}+u_2^*F_{u_2}+\widetilde{F}(u_1,u_2)\right)\right)\\
&= (f\circ F)(u_1,u_2)\\
&\quad +\varepsilon\left(\begin{array}{c}
\left(u_1^*f_{1u_1}+u_2^*f_{1u_2}+\widetilde{f}_1(u_1,u_2)\right)\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(F(u_1,u_2))\\
+\left(u_1^*f_{2u_1}+u_2^*f_{2u_2}+\widetilde{f}_2(u_1,u_2)\right)\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(F(u_1,u_2))\\
+\left(u_1^*f_{3u_1}+u_2^*f_{3u_2}+\widetilde{f}_3(u_1,u_2)\right)\dfrac{\partial f}{\partial x_3}(F(u_1,u_2))\\
+\widetilde{f}(F(u_1,u_2))
\end{array}\right)
\end{aligned}$$

olduğundan yukarıdaki ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\overline{h}(\overline{u}_1,\overline{u}_2) &= (f\circ F)(u_1,u_2)+\varepsilon\left(u_1^*\frac{\partial(f\circ F)}{\partial u_1}+u_2^*\frac{\partial(f\circ F)}{\partial u_2}+\widetilde{H}(u_1,u_2)\right)\\
&= h(u_1,u_2)+\varepsilon\left(u_1^*\frac{\partial h}{\partial u_1}+u_2^*\frac{\partial h}{\partial u_2}+\widetilde{H}(u_1,u_2)\right)\\
&= h+\varepsilon h^0
\end{aligned}$$

elde edilir. F ve f fonksiyonları $C^\infty-$ sınıfından olduğundan $f\circ F$ fonksiyonu da $C^\infty-$ sınıfındandır. Ayrıca; $\widetilde{f}$, F ve $\widetilde{F}$ fonksiyonları $C^\infty-$ sınıfından olduğundan $\widetilde{H}$ fonksiyonu da $C^\infty-$ sınıfındandır. Diğer yandan, $1\leq i\leq 2$ için $\dfrac{\partial h}{\partial u_i^*}=0$, $\dfrac{\partial h}{\partial u_i}=\dfrac{\partial h^0}{\partial u_i^*}$ ve h ile $\widetilde{H}$ fonksiyonları $C^\infty-$sınıfından olduğundan $\overline{h}$ dual fonksiyonu dual analitik bir fonksiyondur.

Sonuç olarak, $\overline{f}$ dual fonksiyonu dual analitik bir fonksiyondur.$\Longleftrightarrow\overline{h}$ dual fonksiyonu dual analitik bir fonksiyondur.

$\overline{u}_1$ ve $\overline{u}_2$ koordinatlarının $\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^2$ üzerinde dual koordinat fonksiyonları olduğunu biliyoruz. Şimdi, $\overline{F}\left(\overline{U}\right)\subset\overline{V}\subset_{\text{açık}}\overline{M}$ üzerindeki dual koordinat fonksiyonlarını bulalım. O halde,

$$\begin{array}{ccl}
\overline{u} & : & \overline{F}\left(\overline{U}\right)\subseteq\overline{M}\subset\mathbf{D}^3\longrightarrow\mathbf{D}\\
\overline{p} & \longrightarrow & \overline{u}(\overline{p})=\left(\overline{u}_1\circ\overline{F}^{-1}\right)(\overline{p})=\overline{u}_1\left(\overline{F}^{-1}(\overline{p})\right)=\overline{u}_1(\overline{q})=\overline{q}_1
\end{array}$$

$$
\begin{tikzcd}
\bar{U} \subseteq D^2 \arrow[rr, "\bar{F}"] \arrow[dr, "\bar{u}_1"'] & & \bar{F}(\bar{U}) \subset \bar{M} \subset D^3 \arrow[dl, "\bar{u} = \bar{u}_1 \circ \bar{F}^{-1}"] \\
& D &
\end{tikzcd}
$$

Şekil 4.2: $\overline{M}$ dual yüzeyinin birinci dual koordinat fonksiyonunun diyagramı

ve

$$
\begin{aligned}
\overline{v} \quad &: \quad \overline{F}\left(\overline{U}\right) \subseteq \overline{M} \subset \mathbf{D}^3 \longrightarrow \mathbf{D} \\
\overline{p} \quad &\longrightarrow \quad \overline{v}\left(\overline{p}\right) = \left(\overline{u}_2 \circ \overline{F}^{-1}\right)\left(\overline{p}\right) = \overline{u}_2\left(\overline{F}^{-1}\left(\overline{p}\right)\right) = \overline{u}_2\left(\overline{q}\right) = \overline{q}_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\bar{U} \subseteq D^2 \arrow[rr, "\bar{F}"] \arrow[dr, "\bar{u}_2"'] & & \bar{F}(\bar{U}) \subset \bar{M} \subset D^3 \arrow[dl, "\bar{v} = \bar{u}_2 \circ \bar{F}^{-1}"] \\
& D &
\end{tikzcd}
$$

Şekil 4.3: $\overline{M}$ dual yüzeyinin ikinci dual koordinat fonksiyonunun diyagramı

elde edilir.
$\overline{u},\overline{v} : \overline{F}\left(\overline{U}\right) \subseteq \overline{M} \longrightarrow \mathbf{D}$ dual fonksiyonlarına $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde $\left(\overline{F},\overline{U}\right)$ parametrizasyonuna göre elde edilen dual koordinat fonksiyonları denir.

Örnek 4.2.1.

$$
\begin{aligned}
\overline{F} \quad &: \quad \mathbf{D}^2 \longrightarrow \overline{F}\left(\mathbf{D}^2\right) = \overline{M} \subset \mathbf{D}^3 \\
\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right) \quad &\longrightarrow \quad \overline{F}\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right) = \left(\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{u}_1.\overline{u}_2\right)
\end{aligned}
$$

parametrizasyonuna sahip $\overline{M}$ dual yüzeyi verilsin. $\mathbf{D}^2$ uzayının dual koordinat fonksiyonları $\overline{u}_1 = u_1 + \varepsilon u_1^*$ ve $\overline{u}_2 = u_2 + \varepsilon u_2^*$ şeklinde olduğundan

$$
\begin{aligned}
\overline{F}\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right) &= \left(u_1,u_2,u_1.u_2\right) + \varepsilon\left(u_1^*\left(1,0,u_2\right) + u_2^*\left(0,1,u_1\right)\right) \\
&= F\left(u_1,u_2\right) + \varepsilon\left(u_1^* F_{u_1} + u_2^* F_{u_2}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi,

$$\begin{aligned}
\overline{f} \quad &: \quad \overline{M} \longrightarrow \mathbf{D} \\
\overline{p} \quad &\longrightarrow \quad \overline{f}(\overline{p}) = 2p_2p_3 - 4p_1 + 5 + \varepsilon(-4p_1^* + 2p_3p_2^* + 2p_2p_3^*)
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlı dual fonksiyonunun $\overline{M}$ üzerinde dual analitik bir fonksiyon olduğunu gösterelim.
$\overline{M} \subset \mathbf{D}^3$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\overline{p} &= (\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3) \\
&= (p_1, p_2, p_3) + \varepsilon(p_1^*, p_2^*, p_3^*) \in \overline{M} \subset \mathbf{D}^3
\end{aligned}$$

noktası $\mathbf{D}^3$ uzayının dual koordinat fonksiyonları cinsinden yazılabilir. O halde, $\overline{p}$ dual noktasının aşağıdaki gibi ifade edilebileceği açıktır:

$$\begin{aligned}
\overline{p} &= (\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3) \\
&= (p_1, p_2, p_3) + \varepsilon(p_1^*, p_2^*, p_3^*) \\
&= (x_1(\widetilde{p}) + \varepsilon x_1^*(\widetilde{p}), x_2(\widetilde{p}) + \varepsilon x_2^*(\widetilde{p}), x_3(\widetilde{p}) + \varepsilon x_3^*(\widetilde{p})) \\
&= (\overline{x}_1(\overline{p}), \overline{x}_2(\overline{p}), \overline{x}_3(\overline{p}))
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{f}(\overline{p}) &= 2p_2p_3 - 4p_1 + 5 + \varepsilon(-4p_1^* + 2p_3p_2^* + 2p_2p_3^*) \\
&= 2(\widetilde{p})x_2(\widetilde{p})x_3(\widetilde{p}) - 4(\widetilde{p})x_1(\widetilde{p}) + 5(\widetilde{p}) \\
&\quad + \varepsilon(-4(\widetilde{p})x_1^*(\widetilde{p}) + 2(\widetilde{p})x_3(\widetilde{p})x_2^*(\widetilde{p}) + 2(\widetilde{p})x_2(\widetilde{p})x_3^*(\widetilde{p})) \\
&= ((2x_2x_3 - 4x_1 + 5) + \varepsilon(-4x_1^* + 2x_3x_2^* + 2x_2x_3^*))(\overline{p})
\end{aligned}$$

elde edilir. Fonksiyon eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\overline{f} &= ((2x_2x_3 - 4x_1 + 5) + \varepsilon(-4x_1^* + 2x_3x_2^* + 2x_2x_3^*)) \\
&= f(x) + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{3} x_i^* \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Şekil 4.1 dikkate alındığında

$$\begin{aligned}\overline{h} &= \overline{f}\circ\overline{F} : \mathbf{D}^2 \longrightarrow \mathbf{D}\\ (\overline{u}_1,\overline{u}_2) &\longrightarrow \overline{h}(\overline{u}_1,\overline{u}_2) = \left(\overline{f}\circ\overline{F}\right)(\overline{u}_1,\overline{u}_2) = \overline{f}\left(\overline{F}(\overline{u}_1,\overline{u}_2)\right)\end{aligned}$$

biçiminde olup

$$\begin{aligned}\overline{h}(\overline{u}_1,\overline{u}_2) &= \left(\overline{f}\circ\overline{F}\right)(\overline{u}_1,\overline{u}_2)\\ &= \overline{f}\left(\overline{F}(\overline{u}_1,\overline{u}_2)\right)\\ &= \overline{f}\left(F(u_1,u_2)+\varepsilon\left(u_1^*F_{u_1}+u_2^*F_{u_2}\right)\right)\\ &= \overline{f}\left((u_1,u_2,u_1.u_2)+\varepsilon\left(u_1^*(1,0,u_2)+u_2^*(0,1,u_1)\right)\right)\\ &= 2u_2^2u_1-4u_1+5+\varepsilon\left(u_1^*\left(2u_2^2-4\right)+4u_1u_2u_2^*\right)\\ &= h(u_1,u_2)+\varepsilon\left(u_1^*h_{u_1}+u_2^*h_{u_2}\right)\end{aligned}$$

dual fonksiyonu $\forall\overline{q}\in\mathbf{D}^2$ dual noktasında dual analitik bir fonksiyondur. O halde, $\overline{f}$ dual fonksiyonu bu dual yüzey üzerinde dual analitik bir fonksiyondur.

Şimdi, yukarıda tanımlanan $\overline{f}$ dual analitik fonksiyonunu $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerindeki koordinatlar cinsinden ifade edelim.

$\overline{u},\overline{v} : \overline{M}\subset\mathbf{D}^3\longrightarrow\mathbf{D}$ koordinat fonksiyonları $\overline{M}$ dual yüzeyinin koordinatları olmak üzere,

$$\begin{aligned}\overline{u}(\overline{p}) &= \left(\overline{u}_1\circ\overline{F}^{-1}\right)(\overline{p})\\ &= \overline{u}_1\left(\overline{F}^{-1}(\overline{p})\right)\\ &= \overline{u}_1(\overline{q}) = u_1(\widetilde{q})+\varepsilon u_1^*(\widetilde{q})\\ &= q_1+\varepsilon q_1^* = \overline{q}_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{v}(\overline{p}) &= \left(\overline{u}_2\circ\overline{F}^{-1}\right)(\overline{p})\\ &= \overline{u}_2\left(\overline{F}^{-1}(\overline{p})\right)\\ &= \overline{u}_2(\overline{q}) = u_2(\widetilde{q})+\varepsilon u_2^*(\widetilde{q})\\ &= q_2+\varepsilon q_2^* = \overline{q}_2\end{aligned}$$

şeklinde olup

$$\begin{aligned}
\overline{f}(\overline{p}) &= \left(\overline{f}\circ\overline{F}\right)(\overline{q}) \\
&= \overline{f}\left(\overline{F}(\overline{q})\right) \\
&= \overline{f}(\overline{q}_1,\overline{q}_2,\overline{q}_1.\overline{q}_2) \\
&= 2\overline{q}_2^2\overline{q}_1 - 4\overline{q}_1 + 5 \\
&= 2\overline{v}^2(\overline{p})\,\overline{u}(\overline{p}) - 4\overline{u}(\overline{p}) + 5(\overline{p}) \\
&= \left(2\overline{v}^2\overline{u} - 4\overline{u} + 5\right)(\overline{p})
\end{aligned}$$

bulunur. Fonksiyon eşitliğinden $\overline{f} = 2\overline{v}^2\overline{u} - 4\overline{u} + 5$ elde edilir.

4.3. Bir Dual Yüzeyin Tanjant Uzayı

Tanım 4.3.1. $\mathbf{D}^3$ dual uzayında bir eğri

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha} &: \quad \overline{I} \subseteq_{\text{açık}} \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D}^3 \\
\overline{t} &\longrightarrow \quad \overline{\alpha}(\overline{t}) = \alpha(t) + \varepsilon\left(t^*\alpha'(t) + \widetilde{\alpha}(t)\right)
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. $\overline{M} \subset \mathbf{D}^3$ bir dual yüzey olmak üzere, $\forall\overline{t} \in \overline{I}$ için $\overline{\alpha}(\overline{t}) \in \overline{M}$ ise $\overline{\alpha}$ eğrisine yüzey üzerindedir denir ve

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha} &: \quad \overline{I} \subseteq \mathbf{D} \longrightarrow \overline{M} \\
\overline{t} &\longrightarrow \quad \overline{\alpha}(\overline{t}) = \alpha(t) + \varepsilon\left(t^*\alpha'(t) + \widetilde{\alpha}(t)\right) = \alpha + \varepsilon\alpha^0
\end{aligned}$$

biçiminde yazılır.

$\overline{M}$ bir dual yüzey olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{F} &: \quad \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2 \longrightarrow \overline{F}\left(\overline{U}\right) \subseteq \overline{M} \subset \mathbf{D}^3 \\
(\overline{u}_1,\overline{u}_2) &\longrightarrow \quad \overline{F}(\overline{u}_1,\overline{u}_2) = F(u_1,u_2) + \varepsilon\left(u_1^*F_{u_1} + u_2^*F_{u_2} + \widetilde{F}(u_1,u_2)\right) = F + \varepsilon F^0
\end{aligned}$$

dual diffeomorfizminin mevcut olduğunu biliyoruz. $\forall\overline{p} = p + \varepsilon p^* \in \overline{M} \subset \mathbf{D}^3$ için $\overline{M}$

dual yüzeyi üzerinde bulunan ve $\overline{p} = p + \varepsilon p^*$ dual noktasından geçen en az bir eğri vardır. En azından dual parametre eğrileri (dual şebeke eğrileri) vardır. Diğer yandan,

$$\overline{\alpha} = \overline{F} \circ \overline{\beta}$$

olacak şekilde bir

$$\begin{array}{rcl} \overline{\beta} & : & \overline{I} \subseteq \mathbf{D} \to \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2 \\ \bar{t} & \longrightarrow & \overline{\beta}(\bar{t}) = \beta(t) + \varepsilon\left(t^*\beta'(t) + \widetilde{\beta}(t)\right), \end{array}$$

$$\begin{aligned} \overline{\beta}(\bar{t}) &= \beta(t) + \varepsilon\left(t^*\beta'(t) + \widetilde{\beta}(t)\right) \\ &= (\beta_1(t), \beta_2(t)) + \varepsilon\left(t^*\beta_1'(t) + \widetilde{\beta}_1(t), t^*\beta_2'(t) + \widetilde{\beta}_2(t)\right) \end{aligned}$$

eğrisi vardır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}(\bar{t}) &= \left(\overline{F} \circ \overline{\beta}\right)(\bar{t}) \\ &= (F \circ \beta)(t) + \varepsilon \left(\begin{array}{c} t^*(F \circ \beta)'(t) + \widetilde{\beta}_1(t)(F_{u_1} \circ \beta)(t) \\ +\widetilde{\beta}_2(t)(F_{u_2} \circ \beta)(t) + \left(\widetilde{F} \circ \beta\right)(t) \end{array} \right) \\ &= \alpha(t) + \varepsilon\left(t^*\alpha'(t) + \widetilde{\alpha}(t)\right) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Burada, $\overline{\beta}$ tek olarak belli iken $\overline{\alpha}$, $\overline{\alpha}$ tek olarak belli iken $\overline{\beta}$ tek olarak bellidir.

Tanım 4.3.2. $\overline{M}$, $\mathbf{D}^3$ uzayında bir dual yüzey ve $\overline{p} = p + \varepsilon p^* \in \overline{M}$ için $\overrightarrow{\overrightarrow{V}}_{\overline{p}} = \overrightarrow{V}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \overrightarrow{V}^*_{\widetilde{p}} \in T_{\overline{p}}\mathbf{D}^3$ olsun. $\overrightarrow{\overrightarrow{V}}_{\overline{p}}$ dual tanjant vektörü $\overline{p}$ noktasından geçen ve $\overline{M}$ üzerinde bulunan bir eğrinin hız vektörü olarak yazılabiliyorsa, $\overrightarrow{\overrightarrow{V}}_{\overline{p}}$ dual vektörüne $\overline{M}$ dual yüzeyinin $\overline{p} = p + \varepsilon p^* \in \overline{M}$ dual noktasındaki dual tanjant vektörüdür denir.

Açıklama 8. $\overline{M}$ dual yüzeyinin $\overline{p} = p + \varepsilon p^* \in \overline{M}$ noktasındaki tüm dual tanjant vektörlerinin cümlesi $T_{\overline{p}}\overline{M}$ ile gösterilir ve $\overline{M}$ yüzeyinin $\overline{p}$ noktasındaki tanjant uzayı olarak adlandırılır. Bu durumda, $\overrightarrow{\overrightarrow{V}}_{\overline{p}} = \overrightarrow{V}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \overrightarrow{V}^*_{\widetilde{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$ olması için gerek ve yeter şart $\overline{I} \subseteq \mathbf{D}$ bir dual açık cümle olmak üzere, $\exists \overline{\alpha} : \overline{I} \subseteq \mathbf{D} \longrightarrow \overline{M}$ eğrisi için $\exists \bar{t}_0 = t_0 + \varepsilon t_0^* \in \overline{I} \subseteq \mathbf{D}$

vardır öyle ki

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}(\bar{t}_0) &= \alpha\left(t\left(\widetilde{t}_0\right)\right)+\varepsilon\left(t^*\left(\widetilde{t}_0\right)\alpha'\left(t\left(\widetilde{t}_0\right)\right)+\widetilde{\alpha}\left(t\left(\widetilde{t}_0\right)\right)\right)\\ &= \alpha(t_0)+\varepsilon\left(t_0^*\alpha'(t_0)+\widetilde{\alpha}(t_0)\right)\\ &= p+\varepsilon p^*=\overline{p}\in\overline{M}\end{aligned}$$

ve

$$\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t}_0)=\alpha'(t_0)+\varepsilon\left(t_0^*\alpha''(t_0)+\widetilde{\alpha}'(t_0)\right)=\overrightarrow{V}_{\widetilde{p}}+\varepsilon\overrightarrow{V}^*_{\widetilde{p}}=\overrightarrow{\overline{V}}_{\overline{p}}$$

olmasıdır.

Teorem 4.3.3. $\overline{M}$, $\mathbf{D}^3$ uzayında bir dual yüzey, $\left(\overline{F},\overline{U}\right)$, $\overline{M}$ dual yüzeyi için bir parametrizasyon ve $\overline{q}=q+\varepsilon q^*=(u_{1_0},u_{2_0})+\varepsilon\left(u^*_{1_0},u^*_{2_0}\right)\in\overline{U}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\overline{F}(\overline{q}) &= F(\widetilde{q})+\varepsilon F^0(\widetilde{q})\\ &= F(q)+\varepsilon\left(u^*_{1_0}F_{u_1}(q)+u^*_{2_0}F_{u_2}(q)+\widetilde{F}(q)\right)\\ &= p+\varepsilon p^*\\ &= \overline{p}\end{aligned}$$

olsun. Bu durumda,

$$\overrightarrow{\overline{V}}_{\overline{p}}=\overrightarrow{V}_{\widetilde{p}}+\varepsilon\overrightarrow{V}^*_{\widetilde{p}}\in T_{\overline{p}}\overline{M}\Leftrightarrow\overrightarrow{\overline{V}}_{\overline{p}}\in Sp\left\{\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q}),\overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q})\right\}$$

dir. Burada,

$$\overline{F}_{\overline{u}_1}=F_{u_1}+\varepsilon\left(u_1^*F_{u_1u_1}+u_2^*F_{u_2u_1}+\widetilde{F}_{u_1}\right),$$

$$\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q})=F_{u_1}(q)+\varepsilon\left(u^*_{1_0}F_{u_1u_1}(q)+u^*_{2_0}F_{u_2u_1}(q)+\widetilde{F}_{u_1}(q)\right),$$

$$\overline{F}_{\overline{u}_2}=F_{u_2}+\varepsilon\left(u_1^*F_{u_1u_2}+u_2^*F_{u_2u_2}+\widetilde{F}_{u_2}\right),$$

$$\overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q})=F_{u_2}(q)+\varepsilon\left(u^*_{1_0}F_{u_1u_2}(q)+u^*_{2_0}F_{u_2u_2}(q)+\widetilde{F}_{u_2}(q)\right)$$

dır.

İspat. $\overline{F}:\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^2\to\overline{F}\left(\overline{U}\right)\subseteq\overline{M}\subset\mathbf{D}^3$ bir dual diffeomorfizm olduğundan göstermiştik ki $\left\{\overline{F}_{\overline{u}_1},\overline{F}_{\overline{u}_2}\right\}$ cümlesi lineer bağımsızdır. $\overline{q}=q+\varepsilon q^*=(u_{1_0},u_{2_0})+\varepsilon\left(u^*_{1_0},u^*_{2_0}\right)$ olmak üzere,

$$\overline{F}(\overline{q}) = F(\widetilde{q}) + \varepsilon F^0(\widetilde{q}) = p + \varepsilon p^* = \overline{p}$$

olup $\overline{p}$ noktasından geçen $\overline{u}_1$ ve $\overline{u}_2$ dual parametre eğrileri $\overline{F}(\overline{u}_1, \overline{u}_{2_0})$ ve $\overline{F}(\overline{u}_{1_0}, \overline{u}_2)$ şeklindedir ve $\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q}), \overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q}) \in T_{\overline{p}}\overline{M}$ dir.

Şimdi, kabul edelim ki $\overrightarrow{\overline{V}}_{\overline{p}} = V_{\widetilde{p}} + \varepsilon V^*_{\widetilde{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}(\overline{0}) &= \alpha\left(t\left(\widetilde{0}\right)\right) + \varepsilon\left(t^*\left(\widetilde{0}\right)\alpha'\left(t\left(\widetilde{0}\right)\right) + \widetilde{\alpha}\left(t\left(\widetilde{0}\right)\right)\right) \\ &= \alpha(0) + \varepsilon\widetilde{\alpha}(0) = p + \varepsilon p^* = \overline{p} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \dot{\overline{\alpha}}(\overline{0}) &= \dot{\overline{\alpha}}(0 + \varepsilon 0) = \alpha'(0) + \varepsilon\widetilde{\alpha}'(0) \\ &= \overrightarrow{V}_{\widetilde{p}} + \varepsilon\overrightarrow{V}^*_{\widetilde{p}} = \overrightarrow{\overline{V}}_{\overline{p}} \end{aligned}$$

olacak şekilde $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde bir

$$\overline{\alpha} : \overline{I} \subseteq \mathbf{D} \to \overline{M} \subset \mathbf{D}^3$$

$$\overline{\alpha}(\overline{t}) = \alpha(t) + \varepsilon\left(t^*\alpha'(t) + \widetilde{\alpha}(t)\right),$$

eğrisi vardır. Diğer yandan,

$$\overline{\beta} : \overline{I} \subseteq \mathbf{D} \to \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2$$

$$\begin{aligned} \overline{\beta}(\overline{t}) &= \beta(t) + \varepsilon\left(t^*\beta'(t) + \widetilde{\beta}(t)\right) \\ &= (\beta_1(t), \beta_2(t)) + \varepsilon\left(t^*\beta_1'(t) + \widetilde{\beta}_1(t), t^*\beta_2'(t) + \widetilde{\beta}_2(t)\right) \\ &= \beta + \varepsilon\beta^0 \end{aligned}$$

bir eğri olmak üzere,

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}(\overline{t}) &= \left(\overline{F} \circ \overline{\beta}\right)(\overline{t}) \\ &= (F \circ \beta)(t) + \varepsilon\begin{pmatrix} t^*(F \circ \beta)'(t) + \widetilde{\beta}_1(t)(F_{u_1} \circ \beta)(t) \\ +\widetilde{\beta}_2(t)(F_{u_2} \circ \beta)(t) + \left(\widetilde{F} \circ \beta\right)(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. $\bar{t} = 0 + 0\varepsilon$ için

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}\left(\overline{0}\right) &= \left(\overline{F} \circ \overline{\beta}\right)\left(\overline{0}\right) \\
&= \overline{F}\left(\overline{\beta}\left(\overline{0}\right)\right) \\
&= \overline{F}\left(\beta(0) + \varepsilon \widetilde{\beta}(0)\right) \\
&= (F \circ \beta)(0) + \varepsilon \left(\begin{array}{c} \widetilde{\beta}_1(0)\left(F_{u_1} \circ \beta\right)(0) + \widetilde{\beta}_2(0)\left(F_{u_2} \circ \beta\right)(0) \\ + \left(\widetilde{F} \circ \beta\right)(0) \end{array} \right) \\
&= p + \varepsilon p^* = \overline{p}
\end{aligned}$$

olup

$$u_{1_0} = \beta_1(0), u_{2_0} = \beta_2(0), u_{1_0}^* = \widetilde{\beta}_1(0) \text{ ve } u_{2_0}^* = \widetilde{\beta}_2(0)$$

dır. Bu durumda, $F = F(u_1, u_2)$ olup

$$(F \circ \beta)(0) = F(\beta(0)) = F(q)$$

şeklindedir ve buradan

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}\left(\overline{0}\right) &= F(q) + \varepsilon\left(u_{1_0}^* F_{u_1}(q) + u_{2_0}^* F_{u_2}(q) + \widetilde{F}(q)\right) \\
&= p + \varepsilon p^* \\
&= \overline{p}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan, yukarıda ifade ettiğimiz $\overline{\alpha} = \left(\overline{F} \circ \overline{\beta}\right)$ eğrisinin $\bar{t}$ dual değişkenine göre türevi

$$\begin{aligned}
\frac{d\overline{\alpha}}{d\bar{t}} &= F_{u_1}(\beta(t)).\beta_1'(t) + F_{u_2}(\beta(t)).\beta_2'(t) \\
&\quad + \varepsilon \left(\begin{array}{c} t^* (F \circ \beta)''(t) + \widetilde{\beta}_1'(t)\left(F_{u_1} \circ \beta\right)(t) \\ + \widetilde{\beta}_1(t)\left(F_{u_1 u_1}(\beta(t))\beta_1'(t) + F_{u_1 u_2}(\beta(t))\beta_2'(t)\right) \\ + \widetilde{\beta}_2'(t)\left(F_{u_2} \circ \beta\right)(t) + \widetilde{\beta}_2(t)\left(\begin{array}{c} F_{u_2 u_1}(\beta(t))\beta_1'(t) \\ + F_{u_2 u_2}(\beta(t))\beta_2'(t) \end{array} \right) \\ + \widetilde{F}_{u_1}(\beta(t)).\beta_1'(t) + \widetilde{F}_{u_2}(\beta(t)).\beta_2'(t) \end{array} \right)
\end{aligned}$$

biçimindedir. Bu durumda, $\dfrac{d\overline{\alpha}}{d\overline{t}}$ ifadesinin $\overline{t}=\overline{0}$ noktasındaki değeri

$$
\begin{aligned}
\frac{d\overline{\alpha}}{d\overline{t}}\left(\overline{0}\right) &= \begin{pmatrix} \left(F_{u_1}\circ\beta\right)(0) \\ +\varepsilon\begin{pmatrix} u_{1_0}^{*}\left(F_{u_1u_1}\circ\beta\right)(0) \\ +u_{2_0}^{*}\left(F_{u_2u_1}\circ\beta\right)(0) \\ +\left(\widetilde{F}_{u_1}\circ\beta\right)(0)\end{pmatrix}\end{pmatrix}.\left(\beta_1'(0)+\varepsilon\widetilde{\beta}_1'(0)\right) \\
&+\begin{pmatrix} \left(F_{u_2}\circ\beta\right)(0) \\ +\varepsilon\begin{pmatrix} u_{1_0}^{*}\left(F_{u_1u_2}\circ\beta\right)(0) \\ +u_{2_0}^{*}\left(F_{u_2u_2}\circ\beta\right)(0) \\ +\left(\widetilde{F}_{u_2}\circ\beta\right)(0)\end{pmatrix}\end{pmatrix}.\left(\beta_2'(0)+\varepsilon\widetilde{\beta}_2'(0)\right)
\end{aligned}
$$

dir. Burada, $F_{u_1}=F_{u_1}\left(u_1,u_2\right)$ ve $F_{u_2}=F_{u_2}\left(u_1,u_2\right)$ dir. Bu durumda,

$$\left(F_{u_1}\circ\beta\right)(0)=F_{u_1}\left(u_{1_0},u_{2_0}\right)=F_{u_1}(q)$$

$$\left(F_{u_2}\circ\beta\right)(0)=F_{u_2}\left(u_{1_0},u_{2_0}\right)=F_{u_2}(q)$$

olur. Böylece, $c_1=\beta_1'(0)$, $c_1^{*}=\widetilde{\beta}_1'(0)$, $c_2=\beta_2'(0)$ ve $c_2^{*}=\widetilde{\beta}_2'(0)\in\mathbb{R}$ denilirse

$$
\begin{aligned}
\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{0}) &= \left(c_1+\varepsilon c_1^{*}\right)\left(F_{u_1}(q)+\varepsilon\left(u_{1_0}^{*}F_{u_1u_1}(q)+u_{2_0}^{*}F_{u_2u_1}(q)+\widetilde{F}_{u_1}(q)\right)\right) \\
&\quad+\left(c_2+\varepsilon c_2^{*}\right)\left(F_{u_2}(q)+\varepsilon\left(u_{1_0}^{*}F_{u_1u_2}(q)+u_{2_0}^{*}F_{u_2u_2}(q)+\widetilde{F}_{u_2}(q)\right)\right) \\
&= \overline{c}_1\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q})+\overline{c}_2\overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q})
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde,

$$\overrightarrow{\overrightarrow{V}}_{\overline{p}}=\overrightarrow{V}_{\widetilde{p}}+\varepsilon\overrightarrow{V}_{\widetilde{p}}^{*}=\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{0})\in Sp\left\{\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q}),\overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q})\right\}$$

dir.

Tersine, kabul edelim ki $\overrightarrow{\overrightarrow{V}}_{\overline{p}}=\overrightarrow{V}_{\widetilde{p}}+\varepsilon\overrightarrow{V}_{\widetilde{p}}^{*}\in Sp\left\{\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q}),\overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q})\right\}$ olsun. Bu durumda,

$$\overrightarrow{\overrightarrow{V}}_{\overline{p}}=\overrightarrow{V}_{\widetilde{p}}+\varepsilon\overrightarrow{V}_{\widetilde{p}}^{*}=\overline{c}_1\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q})+\overline{c}_2\overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q})$$

olacak şekilde $\overline{c}_1,\overline{c}_2\in\mathbf{D}$ vardır. Şimdi, $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde $\overline{\alpha}(\overline{0})=\overline{p}$ ve $\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{0})=$

$\overrightarrow{\overline{V}}_{\overline{p}}$ olacak şekilde bir $\overline{\alpha}:\overline{I}\subseteq\mathbf{D}\to\overline{M}\subset\mathbf{D}^3$ eğrisi belirleyelim.

$$\overline{\alpha}:\overline{I}\subseteq\mathbf{D}\to\overline{M}\subset\mathbf{D}^3$$

$$\overline{\alpha}(\overline{t})=\overline{F}\left(\overline{u}_{1_0}+\overline{t}\overline{c}_1,\overline{u}_{2_0}+\overline{t}\overline{c}_2\right)$$

olmak üzere, $u_{1_0}+tc_1=\beta_1(t)$, $u_{2_0}+tc_2=\beta_2(t)$, $u^*_{1_0}+tc^*_1=\widetilde{\beta}_1(t)$ ve $u^*_{2_0}+tc^*_2=\widetilde{\beta}_2(t)$ denilirse,

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}(\overline{t}) &= \left(\overline{F}\circ\overline{\beta}\right)(\overline{t})\\
&= (F\circ\beta)(t)+\varepsilon\begin{pmatrix} t^*(F\circ\beta)'(t)+\widetilde{\beta}_1(t)(F_{u_1}\circ\beta)(t)\\ +\widetilde{\beta}_2(t)(F_{u_2}\circ\beta)(t)+\left(\widetilde{F}\circ\beta\right)(t)\end{pmatrix}\\
&= \alpha(t)+\varepsilon\left(t^*\alpha'(t)+\widetilde{\alpha}(t)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}(\overline{0}) &= \left(\overline{F}\circ\overline{\beta}\right)(\overline{0})\\
&= \overline{F}\left(\overline{\beta}(\overline{0})\right)\\
&= \overline{F}\left(\beta(0)+\varepsilon\widetilde{\beta}(0)\right)\\
&= (F\circ\beta)(0)+\varepsilon\begin{pmatrix} \widetilde{\beta}_1(0)(F_{u_1}\circ\beta)(0)+\widetilde{\beta}_2(0)(F_{u_2}\circ\beta)(0)\\ +\left(\widetilde{F}\circ\beta\right)(0)\end{pmatrix}\\
&= F(\beta(0))+\varepsilon\left(\widetilde{\beta}_1(0)F_{u_1}(\beta(0))+\widetilde{\beta}_2(0)F_{u_2}(\beta(0))+\widetilde{F}(\beta(0))\right)\\
&= F(u_{1_0},u_{2_0})+\varepsilon\left(u^*_{1_0}F_{u_1}(u_{1_0},u_{2_0})+u^*_{2_0}F_{u_2}(u_{1_0},u_{2_0})+\widetilde{F}(u_{1_0},u_{2_0})\right)
\end{aligned}$$

biçimindedir ve biliyoruz ki

$$(F\circ\beta)(0)=F(\beta(0))=F(u_{1_0},u_{2_0})=F(q)$$

dir. Benzer şekilde,

$$(F_{u_1}\circ\beta)(0)=F_{u_1}(q)\ \text{ ve }\ (F_{u_2}\circ\beta)(0)=F_{u_2}(q)$$

dır. Bu durumda, yukarıda bulduğumuz eşitlikler göz önüne alındığında $\overline{\alpha}$ eğrisinin

$\bar{t}=\bar{0}$ noktasındaki değeri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}(\overline{0}) &= F(q)+\varepsilon\left(u_{1_0}^{*}F_{u_1}(q)+u_{2_0}^{*}F_{u_2}(q)+\widetilde{F}(q)\right)\\ &= \overline{F}(\overline{q})=p+\varepsilon p^{*}=\overline{p}.\end{aligned}$$

Şimdi, $\overline{\alpha}$ eğrisinin $\bar{t}$ dual değişkenine göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{\alpha}}{d\bar{t}} &= (F_{u_1}\circ\beta)(t)\beta_1'(t)+(F_{u_2}\circ\beta)(t).\beta_2'(t)\\ &+\varepsilon\begin{pmatrix} t^{*}(F\circ\beta)''(t)+\widetilde{\beta}_1'(t)(F_{u_1}\circ\beta)(t)\\ +\widetilde{\beta}_1(t)\left((F_{u_1u_1}\circ\beta)(t)\beta_1'(t)+(F_{u_1u_2}\circ\beta)(t)\beta_2'(t)\right)\\ +\widetilde{\beta}_2'(t)(F_{u_2}\circ\beta)(t)+\widetilde{\beta}_2(t)\begin{pmatrix}(F_{u_2u_1}\circ\beta)(t)\beta_1'(t)\\ +(F_{u_2u_2}\circ\beta)(t)\beta_2'(t)\end{pmatrix}\\ +\left(\widetilde{F}_{u_1}\circ\beta\right)(t).\beta_1'(t)+\left(\widetilde{F}_{u_2}\circ\beta\right)(t).\beta_2'(t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

olur. $c_1=\beta_1'(0)$, $c_1^{*}=\widetilde{\beta}_1'(0)$, $c_2=\beta_2'(0)$ ve $c_2^{*}=\widetilde{\beta}_2'(0)\in\mathbb{R}$ olup

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{\alpha}}{d\bar{t}}(\overline{0}) &= (F_{u_1}\circ\beta)(0).c_1+(F_{u_2}\circ\beta)(0).c_2\\ &+\varepsilon\begin{pmatrix} c_1^{*}(F_{u_1}\circ\beta)(0)+u_{1_0}^{*}((F_{u_1u_1}\circ\beta)(0).c_1+(F_{u_1u_2}\circ\beta)(0).c_2)\\ +c_2^{*}(F_{u_2}\circ\beta)(0)+u_{2_0}^{*}((F_{u_2u_1}\circ\beta)(0).c_1+(F_{u_2u_2}\circ\beta)(0).c_2)\\ +\left(\widetilde{F}_{u_1}\circ\beta\right)(0).c_1+\left(\widetilde{F}_{u_2}\circ\beta\right)(0).c_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{0}) &= \frac{d\overline{\alpha}}{d\bar{t}}(\overline{0})\\ &= (c_1+\varepsilon c_1^{*})\left(F_{u_1}(q)+\varepsilon\left(u_{1_0}^{*}F_{u_1u_1}(q)+u_{2_0}^{*}F_{u_2u_1}(q)+\widetilde{F}_{u_1}(q)\right)\right)\\ &\quad+(c_2+\varepsilon c_2^{*})\left(F_{u_2}(q)+\varepsilon\left(u_{1_0}^{*}F_{u_1u_2}(q)+u_{2_0}^{*}F_{u_2u_2}(q)+\widetilde{F}_{u_2}(q)\right)\right)\\ &= \overline{c}_1\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q})+\overline{c}_2\overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q})\\ &= \overrightarrow{\overline{V}}_{\overline{p}}\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak, $\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(0)=\overrightarrow{\overline{V}}_{\overline{p}}=\overrightarrow{V}_{\widetilde{p}}+\varepsilon\overrightarrow{V}^{*}_{\widetilde{p}}\in T_{\overline{p}}\overline{M}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Örnek 4.3.4. Orijin merkezli birim dual küreyi ele alalım. Bu kürenin bir parametrizasyonu

$$\overline{F}:\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^2\to\overline{F}\left(\overline{U}\right)=\overline{M}\subset\mathbf{D}^3$$

$$\begin{aligned}
\overline{F}\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right) &= \left(\cos u_2\cos u_1,\cos u_2\sin u_1,\sin u_2\right)\\
&\quad+\varepsilon\left(\begin{array}{c} u_1^*\left(-\cos u_2\sin u_1,\cos u_2\cos u_1,0\right)\\ +u_2^*\left(-\sin u_2\cos u_1,-\sin u_2\sin u_1,\cos u_2\right)\end{array}\right)\\
&= F\left(u_1,u_2\right)+\varepsilon\left(u_1^*F_{u_1}+u_2^*F_{u_2}\right)\\
&= F+\varepsilon F^0
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. $u_{1_0}=\frac{\pi}{2}$, $u_{2_0}=\frac{\pi}{4}$, $u_{1_0}^*=1$, $u_{2_0}^*=2$ için $u_{1_0}+\varepsilon u_{1_0}^*=\frac{\pi}{2}+\varepsilon$ ve $u_{2_0}+\varepsilon u_{2_0}^*=\frac{\pi}{4}+2\varepsilon$ olmak üzere, $\overline{q}=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)+\varepsilon\left(1,2\right)$ olup

$$\begin{aligned}
\overline{F}\left(\overline{q}\right) &= F\left(\widetilde{q}\right)+\varepsilon F^0\left(\widetilde{q}\right)\\
&= \left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\varepsilon\left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\right)\\
&= p+\varepsilon p^*=\overline{p}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{\overline{u}_1} &= \left(-\cos u_2\sin u_1,\cos u_2\cos u_1,0\right)\\
&\quad+\varepsilon\left(\begin{array}{c} u_1^*\left(-\cos u_2\cos u_1,-\cos u_2\sin u_1,0\right)\\ +u_2^*\left(\sin u_2\sin u_1,-\sin u_2\cos u_1,0\right)\end{array}\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{\overline{u}_2} &= \left(-\sin u_2\cos u_1,-\sin u_2\sin u_1,\cos u_2\right)\\
&\quad+\varepsilon\left(\begin{array}{c} u_1^*\left(\sin u_2\sin u_1,-\sin u_2\cos u_1,0\right)\\ +u_2^*\left(-\cos u_2\cos u_1,-\cos u_2\sin u_1,-\sin u_2\right)\end{array}\right),
\end{aligned}$$

olup bu ifadelerin $\overline{q}$ dual noktasındaki değerleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{\overline{u}_1}\left(\overline{q}\right) &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)+\varepsilon\left(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)\\
&= F_{u_1}\left(\widetilde{q}\right)+\varepsilon F_{u_1}^0\left(\widetilde{q}\right)
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q}) &= \left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\varepsilon\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) \\
&= F_{u_2}(\widetilde{q})+\varepsilon F_{u_2}^{0}(\widetilde{q})
\end{aligned}
$$

biçiminde bulunur. Ayrıca, burada

$$
\begin{aligned}
\left\langle \overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q}),\overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q})\right\rangle_{\mathbf{D}} &= \left\langle F_{u_1}(\widetilde{q})+\varepsilon F_{u_1}^{0}(\widetilde{q}),F_{u_2}(\widetilde{q})+\varepsilon F_{u_2}^{0}(\widetilde{q})\right\rangle_{\mathbf{D}} \\
&= \langle F_{u_1}(\widetilde{q}),F_{u_2}(\widetilde{q})\rangle+\varepsilon\begin{pmatrix}\left\langle F_{u_1}(\widetilde{q}),F_{u_2}^{0}(\widetilde{q})\right\rangle \\ +\left\langle F_{u_1}^{0}(\widetilde{q}),F_{u_2}(\widetilde{q})\right\rangle\end{pmatrix} \\
&= 0+0\varepsilon \\
&= \overline{0}
\end{aligned}
$$

dır. O halde, $\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q}) \perp_{\mathbf{D}} \overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q})$ elde edilir.
Şimdi, $\overline{p}=p+\varepsilon p^{*}=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\varepsilon\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ noktasında bir dual tanjant vektör belirleyelim. Teoremde gösterdik ki $\overrightarrow{\overrightarrow{V}}_{\overline{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}=Sp\left\{\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q}),\overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q})\right\}$ olduğundan $\overrightarrow{\overrightarrow{V}}_{\overline{p}}=\overline{c}_1\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q})+\overline{c}_2\overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q})$ olacak şekilde $\overline{c}_1=c_1+\varepsilon c_1^{*}$, $\overline{c}_2=c_2+\varepsilon c_2^{*}\in\mathbf{D}$ vardır. Bu durumda, $c_1=1$, $c_1^{*}=2$, $c_2=-1$, $c_2^{*}=1$ için $\overline{c}_1=1+2\varepsilon$ ve $\overline{c}_2=-1+\varepsilon$ seçilirse

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\overrightarrow{V}}_{\overline{p}} &= \overline{c}_1\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q})+\overline{c}_2\overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q}) \\
&= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\varepsilon\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \overrightarrow{V}_{\widetilde{p}}+\varepsilon\overrightarrow{V}_{\widetilde{p}}^{*}
\end{aligned}
$$

bulunur. Şimdi,

$$\overline{\alpha}(\overline{0})=\overline{p} \text{ ve } \overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{0})=\overrightarrow{\overrightarrow{V}}_{\overline{p}}$$

olacak şekilde $\overline{\alpha}:\overline{I}\subseteq\mathbf{D}\to\overline{M}\subset\mathbf{D}^3$ eğrisi belirleyelim. $\overline{I}\subseteq\mathbf{D}$ bir dual açık cümle olmak üzere,

$$\overline{\alpha}:\overline{I}\subseteq\mathbf{D}\to\overline{M}\subset\mathbf{D}^3$$

$$\overline{\alpha}(\overline{t})=\overline{F}\left(\overline{u}_{1_0}+\overline{t}\overline{c}_1,\overline{u}_{2_0}+\overline{t}\overline{c}_2\right)$$

$$
\begin{aligned}
\overline{u}_{1_0}+\bar{t}\overline{c}_1 &= u_{1_0}+\varepsilon u_{1_0}^{*}+(t+\varepsilon t^{*})(c_1+\varepsilon c_1^{*}) \\
&= u_{1_0}+tc_1+\varepsilon\left(t^{*}c_1+u_{1_0}^{*}+tc_1^{*}\right) \\
&= \beta_1(t)+\varepsilon\left(t^{*}\beta_1'(t)+\widetilde{\beta}_1(t)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{u}_{2_0}+\bar{t}\overline{c}_2 &= u_{2_0}+\varepsilon u_{2_0}^{*}+(t+\varepsilon t^{*})(c_2+\varepsilon c_2^{*}) \\
&= u_{2_0}+tc_2+\varepsilon\left(t^{*}c_2+u_{2_0}^{*}+tc_2^{*}\right) \\
&= \beta_2(t)+\varepsilon\left(t^{*}\beta_2'(t)+\widetilde{\beta}_2(t)\right)
\end{aligned}
$$

denilirse,

$$
\overline{\beta}:\bar{I}\subseteq\mathbf{D}\to\overline{U}\subseteq\mathbf{D}^2
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\beta}(\bar{t}) &= \beta(t)+\varepsilon\left(t^{*}\beta'(t)+\widetilde{\beta}(t)\right) \\
&= \left(\frac{\pi}{2}+t,\frac{\pi}{4}-t\right)+\varepsilon\left(t^{*}+1+2t,-t^{*}+2+t\right) \\
&= \left(\frac{\pi}{2}+t,\frac{\pi}{4}-t\right)+\varepsilon\left(t^{*}(1,-1)+(1+2t,2+t)\right)
\end{aligned}
$$

eğrisi vardır. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
\overline{\alpha}(\bar{t}) &= (F\circ\beta)(t)+\varepsilon\begin{pmatrix} t^{*}(F\circ\beta)'(t)+\widetilde{\beta}_1(t)(F_{u_1}\circ\beta)(t) \\ +\widetilde{\beta}_2(t)(F_{u_2}\circ\beta)(t)+\left(\widetilde{F}\circ\beta\right)(t)\end{pmatrix} \\
&= \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right),\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right),\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right) \\
&\quad +\varepsilon\begin{pmatrix} t^{*}\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right), \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right), \\ -\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\end{pmatrix} \\
+(1+2t)\begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right), \\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right),0\end{pmatrix} \\
+(2+t)\begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right), \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right), \\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\end{pmatrix}\end{pmatrix} \\
&= \alpha(t)+\varepsilon\left(t^{*}\alpha'(t)+\widetilde{\alpha}(t)\right)
\end{aligned}
$$

biçiminde bir eğri elde edilir. Burada, $\langle\alpha(t),\alpha(t)\rangle = 1$ ve $\langle\alpha(t),\widetilde{\alpha}(t)\rangle = 0$ şeklinde olup $\overline{\alpha}$ birim dual kürenin üzerindedir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}(\overline{0}) &= \overline{\alpha}(0+0\varepsilon) = \left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\varepsilon\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\\ &= p+\varepsilon p^{*} = \overline{p}\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan; $\overline{\alpha}$ eğrisinin $\overline{t}$ dual değişkenine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{\alpha}}{d\overline{t}} &= \begin{pmatrix}\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right),\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right),-\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\end{pmatrix}\\ &+\varepsilon\begin{pmatrix} t^{*}\begin{pmatrix}\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right),\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right),\\ -\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\end{pmatrix}' \\ +2.\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right),\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right),0\right)\\ +(1+2t)\\ .\begin{pmatrix}-\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right),\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right),0\end{pmatrix}\\ +\left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right),-\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right),\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)\\ +(2+t)\\ .\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right),\\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right),\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\end{pmatrix}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

şeklinde olup bu ifadenin $\overline{t} = 0+0\varepsilon$ dual noktasındaki değeri

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{\alpha}}{d\overline{t}}(\overline{0}) &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\varepsilon\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= \overrightarrow{V}_{\widetilde{p}}+\varepsilon\overrightarrow{V}^{*}_{\widetilde{p}} = \overrightarrow{\overrightarrow{V}}_{\overline{p}}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak,

$$\overline{\alpha}(\overline{0}) = \overline{p} \text{ ve } \overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{0}) = \overrightarrow{\overrightarrow{V}}_{\overline{p}}$$

elde edilir.

Sonuç 4.3.1. $\left(\overline{F},\overline{U}\right)$, $\overline{M}$ dual yüzeyi için bir parametrizasyon olsun. O halde,

$$\begin{array}{rcl} \overline{F} & : & \overline{U}\subseteq \mathbf{D}^2 \longrightarrow \overline{F}\left(\overline{U}\right)\subseteq \overline{M}\subset \mathbf{D}^3 \\ (\overline{u}_1,\overline{u}_2) & \longrightarrow & \overline{F}\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right)=F\left(u_1,u_2\right)+\varepsilon\left(u_1^*F_{u_1}+u_2^*F_{u_2}+\widetilde{F}\left(u_1,u_2\right)\right)=F+\varepsilon F^0 \end{array}$$

dual diffeomorfizmi mevcuttur.

$$\overline{q}=\left(\overline{u}_{1_0},\overline{u}_{2_0}\right)=\left(u_{1_0},u_{2_0}\right)+\varepsilon\left(u_{1_0}^*,u_{2_0}^*\right)=q+\varepsilon q^*$$

olmak üzere,

$$\overline{F}\left(\overline{q}\right)=F\left(\widetilde{q}\right)+\varepsilon F^0\left(\widetilde{q}\right)=p+\varepsilon p^*=\overline{p}$$

$\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde bir dual nokta olsun. O halde, $\left\{\overline{F}_{\overline{u}_1}\left(\overline{q}\right),\overline{F}_{\overline{u}_2}\left(\overline{q}\right)\right\}$ cümlesi lineer bağımsız ve

$$T_{\overline{p}}\overline{M}=Sp\left\{\overline{F}_{\overline{u}_1}\left(\overline{q}\right),\overline{F}_{\overline{u}_2}\left(\overline{q}\right)\right\}$$

olduğundan $\left\{\overline{F}_{\overline{u}_1}\left(\overline{q}\right),\overline{F}_{\overline{u}_2}\left(\overline{q}\right)\right\}$ cümlesi $T_{\overline{p}}\overline{M}$ dual tanjant uzayının bir bazıdır.

Tanım 4.3.5. $\overline{M}$, $\mathbf{D}^3$ uzayında bir dual yüzey olsun. Bir

$$\begin{array}{rcl} \overline{X} & : & \overline{M}\longrightarrow T\mathbf{D}^3 \\ \overline{p} & \longrightarrow & \overline{X}\left(\overline{p}\right)=\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}=\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}+\varepsilon\overrightarrow{X}^*_{\widetilde{p}}\in T_{\overline{p}}\mathbf{D}^3 \end{array}$$

dönüşümüne $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde bir dual vektör alanı denir. $\forall\overline{p}\in\overline{M}$ için $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\in T_{\overline{p}}\overline{M}$ ise $\overrightarrow{\overline{X}}$ vektör alanına $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde dual tanjant vektör alanı denir. $\forall\overline{p}\in\overline{M}$ için $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\in\left(T_{\overline{p}}\overline{M}\right)^{\perp_{\mathbf{D}}}$ ise $\overrightarrow{\overline{X}}$ vektör alanına $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde dual normal vektör alanı denir. Bu durumda, $\dfrac{\overrightarrow{\overline{X}}}{\left\|\overrightarrow{\overline{X}}\right\|_{\mathbf{D}}}=\overrightarrow{\overline{Z}}$ dual vektör alanına $\overline{M}$ dual yüzeyinin birim dual normal vektör alanı denir. Yani,

$$\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}=\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}+\varepsilon\overrightarrow{X}^*_{\widetilde{p}}\in\left(T_{\overline{p}}\overline{M}\right)^{\perp_{\mathbf{D}}}\Longleftrightarrow\forall\overrightarrow{\overline{V}}_{\overline{p}}\in T_{\overline{p}}\overline{M}\text{ için }\left\langle\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}},\overrightarrow{\overline{V}}_{\overline{p}}\right\rangle_{\mathbf{D}}=\overline{0}\text{ dir.}$$

Açıklama 9. Bir $\overline{M}$ dual yüzeyinin dual tanjant vektör alanlarının cümlesi $\chi\left(\overline{M}\right)$ ile dual normal vektör alanlarının cümlesi $\chi\left(\overline{M}\right)^{\perp_{\mathbf{D}}}$ ile gösterilecektir.

Tanım 4.3.6. $\overline{M}$, $\mathbf{D}^3$ uzayında bir dual yüzey, $\overline{p}=p+\varepsilon p^*\in\overline{M}$ bir dual nokta ve

$\overrightarrow{\overline{W}}_{\overline{p}} = \overrightarrow{W}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \overrightarrow{W}^*_{\widetilde{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$ olsun.

$$\begin{array}{ccl} \overline{\alpha} & : & \overline{I} \subseteq \mathbf{D} \longrightarrow \overline{M} \subset \mathbf{D}^3 \\ \overline{t} & \longrightarrow & \overline{\alpha}\left(\overline{t}\right) = \alpha\left(t,t^*\right) + \varepsilon\alpha^0\left(t,t^*\right) = \alpha(t) + \varepsilon\left(t^*\alpha'(t) + \widetilde{\alpha}\left(t\right)\right) \end{array}$$

bir eğri olmak üzere,

$$\overline{\alpha}\left(\overline{0}\right) = \alpha(0) + \varepsilon\widetilde{\alpha}\left(0\right) = p + \varepsilon p^* = \overline{p}$$

ve

$$\frac{d\overline{\alpha}}{d\overline{t}} = \overset{\bullet}{\overline{\alpha}}\left(\overline{t}\right) = \alpha'\left(t\right) + \varepsilon\left(t^*\alpha''(t) + \widetilde{\alpha}'\left(t\right)\right)$$

olup

$$\begin{array}{rcl} \overset{\bullet}{\overline{\alpha}}\left(\overline{0}\right) & = & \alpha'(0) + \varepsilon\left(0.\alpha''(0) + \widetilde{\alpha}'\left(0\right)\right) \\ & = & \alpha'(0) + \varepsilon\left(\widetilde{\alpha}'\left(0\right)\right) \\ & = & \overrightarrow{W}_{\widetilde{p}} + \varepsilon\overrightarrow{W}^*_{\widetilde{p}} \\ & = & \overrightarrow{\overline{W}}_{\overline{p}} \end{array}$$

olsun. Diğer yandan,

$$\begin{array}{ccl} \overline{f} & : & \overline{M} \subset \mathbf{D}^3 \longrightarrow \mathbf{D} \\ \overline{p} & \longrightarrow & \overline{f}\left(\overline{p}\right) = f\left(\widetilde{p}\right) + \varepsilon f^0\left(\widetilde{p}\right) \end{array}$$

$$\overline{f}\left(\overline{p}\right) = f\left(p\right) + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{3} p_i^* \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(p\right) + \widetilde{f}(p)\right)$$

biçiminde bir dual analitik fonksiyon olmak üzere, bu fonksiyonunun $\overrightarrow{\overline{W}}_{\overline{p}}$ yönündeki türevi

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{\overline{W}}_{\overline{p}}\left[\overline{f}\right] & = & \dfrac{d}{d\overline{t}}\left(\overline{f}\circ\overline{\alpha}\right)|_{\overline{t}=\overline{0}} \\ & = & \left(f\circ\alpha\right)'(0) + \varepsilon\left(\left\langle \widetilde{\alpha}\left(t\right), \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\circ\alpha\right)\left(t\right).\overrightarrow{e}_i \right\rangle'(0) + \left(\widetilde{f}\circ\alpha\right)'(0)\right) \end{array}$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$\begin{aligned}\left(\overline{f}\circ\overline{\alpha}\right)(\overline{t}) &= (f\circ\alpha)(t)+\varepsilon\left(\begin{array}{c} t^*(f\circ\alpha)'(t)+\left\langle\widetilde{\alpha}(t),\sum\limits_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\circ\alpha\right)(t).\overrightarrow{e}_i\right\rangle \\ +\left(\widetilde{f}\circ\alpha\right)(t)\end{array}\right) \\ &= \beta(t)+\varepsilon\left(t^*\beta'(t)+\widetilde{\beta}(t)\right)\end{aligned}$$

bir dual analitik fonksiyondur.

Açıklama 10. $\overrightarrow{\overline{W}}_{\overline{p}}\in T_{\overline{p}}\overline{M}$ dual tanjant vektörü bir operatör olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\overline{W}}_{\overline{p}} &: C\left(\overline{U}\subseteq\overline{M},\mathbf{D}\right)\longrightarrow\mathbf{D} \\ \overline{f} &\longrightarrow \overrightarrow{\overline{W}}_{\overline{p}}\left(\overline{f}\right)=\overrightarrow{\overline{W}}_{\overline{p}}\left[\overline{f}\right]=\frac{d}{d\overline{t}}\left(\overline{f}\circ\overline{\alpha}\right)|_{\overline{t}=\overline{0}}\,.\end{aligned}$$

Burada, $\overline{U}\subseteq\overline{M}$ bir dual açık ve

$$C\left(\overline{U}\subseteq\overline{M},\mathbf{D}\right)=\left\{\overline{f}\mid\overline{f}:\overline{U}\subseteq\overline{M}\longrightarrow\mathbf{D}\text{ dual analitik fonksiyon}\right\}$$

şeklindedir.

Aşağıdaki teoremde $\overrightarrow{\overline{W}}_{\overline{p}}$ dual tanjant vektörünün bir operatör olarak lineer olduğunu ve Leibniz kuralını sağladığını göstereceğiz.

Teorem 4.3.7. $\overline{M}$, $\mathbf{D}^3$ uzayında bir dual yüzey, $\overline{p}=p+\varepsilon p^*\in\overline{M}$ bir dual nokta, $\overline{M}$ nin $\overline{p}\in\overline{M}$ noktasını içeren $\overline{U}$ dual açık alt cümlesi ve $\overrightarrow{\overline{W}}_{\overline{p}}=\overrightarrow{W}_{\widetilde{p}}+\varepsilon\overrightarrow{W}^*_{\widetilde{p}}\in T_{\overline{p}}\overline{M}$ olsun. $\overline{f},\overline{g}\in C\left(\overline{U}\subseteq\overline{M},\mathbf{D}\right)$ dual analitik fonksiyonlar olmak üzere,
i) $\overrightarrow{\overline{W}}_{\overline{p}}\left[\overline{f}+\overline{g}\right]=\overrightarrow{\overline{W}}_{\overline{p}}\left[\overline{f}\right]+\overrightarrow{\overline{W}}_{\overline{p}}\left[\overline{g}\right]$,
ii) $\forall\overline{\lambda}=\lambda+\varepsilon\lambda^*\in\mathbf{D}$ için $\overrightarrow{\overline{W}}_{\overline{p}}\left[\overline{\lambda}.\overline{f}\right]=\overline{\lambda}.\overrightarrow{\overline{W}}_{\overline{p}}\left[\overline{f}\right]$,
iii) $\overrightarrow{\overline{W}}_{\overline{p}}\left[\overline{f}.\overline{g}\right]=\overrightarrow{\overline{W}}_{\overline{p}}\left[\overline{f}\right].\overline{g}(\overline{p})+\overline{f}(\overline{p}).\overrightarrow{\overline{W}}_{\overline{p}}\left[\overline{g}\right]$
eşitlikleri mevcuttur.

İspat.

$$\begin{aligned}\overline{\alpha} &: \overline{I}\subseteq\mathbf{D}\longrightarrow\overline{M}\subset\mathbf{D}^3 \\ \overline{t} &\longrightarrow \overline{\alpha}(\overline{t})=\alpha(t,t^*)+\varepsilon\alpha^0(t,t^*)=\alpha(t)+\varepsilon\left(t^*\alpha'(t)+\widetilde{\alpha}(t)\right)\end{aligned}$$

bir eğri olmak üzere,

$$\overline{\alpha}\left(\overline{0}\right)=\alpha(0)+\varepsilon\widetilde{\alpha}\,(0)=p+\varepsilon p^{*}=\overline{p}$$

ve

$$\frac{d\overline{\alpha}}{d\overline{t}}=\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}\,(\overline{t})=\alpha'(t)+\varepsilon\left(t^{*}\alpha''(t)+\widetilde{\alpha}'\,(t)\right)$$

olup

$$\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}\left(\overline{0}\right)=\overrightarrow{W}_{\widetilde{p}}+\varepsilon\overrightarrow{W}^{*}_{\widetilde{p}}=\overrightarrow{\overline{W}}_{\overline{p}}$$

olsun. $\overline{f},\overline{g}\in C\left(\overline{U}\subseteq\overline{M},\mathbf{D}\right)$ dual analitik fonksiyonlarının $\mathbf{D}^3$ uzayının dual koordinat fonksiyonları cinsinden yazılımı

$$\overline{f}\,(\overline{x})=f\,(x)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{3}x_i^{*}\frac{\partial f}{\partial x_i}+\widetilde{f}\,(x)\right)=f+\varepsilon f^{0}$$

$$\overline{g}\,(\overline{x})=g\,(x)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{3}x_i^{*}\frac{\partial g}{\partial x_i}+\widetilde{g}\,(x)\right)=g+\varepsilon g^{0}$$

biçimindedir.

i) $\forall\overline{f},\overline{g}\in C\left(\overline{U}\subseteq\overline{M},\mathbf{D}\right)$ için,

$$\begin{aligned}\left(\overline{f}+\overline{g}\right)(\overline{x}) &= \overline{f}\,(\overline{x})+\overline{g}\,(\overline{x})\\ &= (f+g)\,(x)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{3}x_i^{*}\frac{\partial\,(f+g)}{\partial x_i}+\left(\widetilde{f}+\widetilde{g}\right)(x)\right)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\overline{W}}_{\overline{p}}\left[\overline{f}+\overline{g}\right] &= ((f+g)\circ\alpha)'\,(0)\\ &\quad+\varepsilon\left(\begin{array}{c}\left\langle\widetilde{\alpha}\,(t)\,,\sum\limits_{i=1}^{3}\left(\left(\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i}\right)\circ\alpha\right)(t)\,.\overrightarrow{e}_i\right\rangle'(0)\\ +\left(\left(\widetilde{f}+\widetilde{g}\right)\circ\alpha\right)'(0)\end{array}\right)\\ &= (f\circ\alpha)'\,(0)+(g\circ\alpha)'\,(0)\\ &\quad+\varepsilon\left(\begin{array}{c}\left\langle\widetilde{\alpha}\,(t)\,,\sum\limits_{i=1}^{3}\left(\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\circ\alpha\right)(t)+\left(\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)\circ\alpha\right)(t)\right).\overrightarrow{e}_i\right\rangle'(0)\\ +\left(\widetilde{f}\circ\alpha\right)'(0)+(\widetilde{g}\circ\alpha)'\,(0)\end{array}\right)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{\overline{p}}\left[\overline{f}+\overline{g}\right] &= (f\circ\alpha)'(0)+\varepsilon\begin{pmatrix}\left\langle \widetilde{\alpha}(t), \sum\limits_{i=1}^{3}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\circ\alpha\right)(t).\overrightarrow{e}_i\right\rangle'(0)\\ +\left(\widetilde{f}\circ\alpha\right)'(0)\end{pmatrix}\\
&\quad +(g\circ\alpha)'(0)+\varepsilon\begin{pmatrix}\left\langle \widetilde{\alpha}(t), \sum\limits_{i=1}^{3}\left(\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)\circ\alpha\right)(t).\overrightarrow{e}_i\right\rangle'(0)\\ +(\widetilde{g}\circ\alpha)'(0)\end{pmatrix}\\
&= \overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{\overline{p}}\left[\overline{f}\right]+\overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{\overline{p}}\left[\overline{g}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii) $\forall\overline{f}\in C\left(\overline{U}\subseteq\overline{M},\mathbf{D}\right)$ ve $\forall\overline{\lambda}=\lambda+\varepsilon\lambda^*\in\mathbf{D}$ için,

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\lambda}.\overline{f}\right)(\overline{x}) &= \overline{\lambda}.\overline{f}(\overline{x})\\
&= (\lambda f)(x)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{3}x_i^*\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i}+\left(\lambda\widetilde{f}+\lambda^* f\right)(x)\right)
\end{aligned}$$

biçiminde hesaplanır. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{\overline{p}}\left[\overline{\lambda}.\overline{f}\right] &= ((\lambda f)\circ\alpha)'(0)+\varepsilon\begin{pmatrix}\left\langle \widetilde{\alpha}(t), \sum\limits_{i=1}^{3}\left(\left(\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i}\right)\circ\alpha\right)(t).\overrightarrow{e}_i\right\rangle'(0)\\ +\left(\left(\lambda\widetilde{f}+\lambda^* f\right)\circ\alpha\right)'(0)\end{pmatrix}\\
&= \lambda.(f\circ\alpha)'(0)+\varepsilon\begin{pmatrix}\lambda.\left\langle \widetilde{\alpha}(t), \sum\limits_{i=1}^{3}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\circ\alpha\right)(t).\overrightarrow{e}_i\right\rangle'(0)\\ +\lambda.\left(\widetilde{f}\circ\alpha\right)'(0)+\lambda^*.(f\circ\alpha)'(0)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olup bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{\overline{p}}\left[\overline{\lambda}.\overline{f}\right] &= (\lambda+\varepsilon\lambda^*).\begin{pmatrix}(f\circ\alpha)'(0)\\ +\varepsilon\begin{pmatrix}\left\langle \widetilde{\alpha}(t), \sum\limits_{i=1}^{3}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\circ\alpha\right)(t).\overrightarrow{e}_i\right\rangle'(0)\\ +\left(\widetilde{f}\circ\alpha\right)'(0)\end{pmatrix}\end{pmatrix}\\
&= \overline{\lambda}.\overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{\overline{p}}\left[\overline{f}\right]
\end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak,

$$\overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{\overline{p}}\left[\overline{\lambda}.\overline{f}\right]=\overline{\lambda}.\overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{\overline{p}}\left[\overline{f}\right].$$

$iii)$ $\forall \overline{f},\overline{g} \in C\left(\overline{U} \subseteq \overline{M},\mathbf{D}\right)$ için,

$$
\begin{aligned}
\left(\overline{f}.\overline{g}\right)(\overline{x}) &= \overline{f}(\overline{x}).\overline{g}(\overline{x}) \\
&= (fg)(x)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{3} x_i^{*}\frac{\partial (f.g)}{\partial x_i}+\left(f.\widetilde{g}+\widetilde{f}.g\right)(x)\right)
\end{aligned}
$$

biçimindedir. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\overline{W}}_{\overline{p}}\left[\overline{f}.\overline{g}\right] &= ((f.g)\circ\alpha)'(0) \\
&\quad +\varepsilon\left(\begin{array}{c}\left\langle \widetilde{\alpha}(t),\sum\limits_{i=1}^{3}\left(\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)g+f.\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)\right)\circ\alpha\right)(t).\overrightarrow{e}_i\right\rangle'(0) \\ +\left(\left(f.\widetilde{g}+\widetilde{f}.g\right)\circ\alpha\right)'(0)\end{array}\right) \\
&= ((f\circ\alpha)(g\circ\alpha))'(0) \\
&\quad +\varepsilon\left(\begin{array}{c}\left\langle \widetilde{\alpha}(t),\sum\limits_{i=1}^{3}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\circ\alpha\right)(g\circ\alpha)+(f\circ\alpha).\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\circ\alpha\right)\right)(t).\overrightarrow{e}_i\right\rangle'(0) \\ +((f\circ\alpha).(\widetilde{g}\circ\alpha))'(0)+\left(\left(\widetilde{f}\circ\alpha\right).(g\circ\alpha)\right)'(0)\end{array}\right)
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\overline{W}}_{\overline{p}}\left[\overline{f}.\overline{g}\right] &= (f\circ\alpha)'(0).(g\circ\alpha)(0)+(f\circ\alpha)(0).(g\circ\alpha)'(0) \\
&\quad +\varepsilon\left(\begin{array}{c}\left\langle \widetilde{\alpha}(t),\sum\limits_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\circ\alpha\right)(t)(g\circ\alpha)(t).\overrightarrow{e}_i\right\rangle'(0) \\ +\left\langle \widetilde{\alpha}(t),\sum\limits_{i=1}^{3}(f\circ\alpha)(t).\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\circ\alpha\right)(t).\overrightarrow{e}_i\right\rangle'(0) \\ +(f\circ\alpha)'(0).(\widetilde{g}\circ\alpha)(0)+(f\circ\alpha)(0).(\widetilde{g}\circ\alpha)'(0) \\ +\left(\widetilde{f}\circ\alpha\right)'(0).(g\circ\alpha)(0)+\left(\widetilde{f}\circ\alpha\right)(0).(g\circ\alpha)'(0)\end{array}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yukarıdaki ifade düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\overline{W}}_{\overline{p}}\left[\overline{f}.\overline{g}\right] &= \left[(f\circ\alpha)'(0)+\varepsilon\left(\left\langle \widetilde{\alpha}(t),\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\circ\alpha\right)(t).\overrightarrow{e}_i\right\rangle'(0)+\left(\widetilde{f}\circ\alpha\right)'(0)\right)\right] \\
&\quad .\left[(g\circ\alpha)(0)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{3}\widetilde{\alpha}_i(0).\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\circ\alpha\right)(0)+(\widetilde{g}\circ\alpha)(0)\right)\right] \qquad (4.3.1) \\
&\quad +\left[(f\circ\alpha)(0)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{3}\widetilde{\alpha}_i(0).\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\circ\alpha\right)(0)+\left(\widetilde{f}\circ\alpha\right)(0)\right)\right] \\
&\quad .\left[(g\circ\alpha)'(0)+\varepsilon\left(\left\langle \widetilde{\alpha}(t),\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\circ\alpha\right)(t).\overrightarrow{e}_i\right\rangle'(0)+(\widetilde{g}\circ\alpha)'(0)\right)\right]
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}\overline{f}(\overline{x}) &= f(x)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{3}x_i^*\frac{\partial f}{\partial x_i}+\widetilde{f}(x)\right)\\ &= f+\varepsilon f^0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\overline{g}(\overline{x}) &= g(x)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{3}x_i^*\frac{\partial g}{\partial x_i}+\widetilde{g}(x)\right)\\ &= g+\varepsilon g^0\end{aligned}$$

dual analitik fonksiyonları için

$$f=f(x_1,x_2,x_3) \text{ ve } g=g(x_1,x_2,x_3)$$

biçiminde olup

$$f(\widetilde{p})=f(\alpha(0))=(f\circ\alpha)(0)$$

ve

$$g(\widetilde{p})=g(\alpha(0))=(g\circ\alpha)(0)$$

dir. Benzer şekilde, bu dual analitik fonksiyonların dual kısımları

$$f^0=\sum_{i=1}^{3}x_i^*\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,x_2,x_3)+\widetilde{f}(x_1,x_2,x_3)$$

ve

$$g^0=\sum_{i=1}^{3}x_i^*\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1,x_2,x_3)+\widetilde{g}(x_1,x_2,x_3)$$

olmak üzere,

$$f^0(\widetilde{p})=\sum_{i=1}^{3}\widetilde{\alpha}_i(0)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\circ\alpha\right)(0)+\left(\widetilde{f}\circ\alpha\right)(0)$$

ve

$$g^0(\widetilde{p})=\sum_{i=1}^{3}\widetilde{\alpha}_i(0)\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\circ\alpha\right)(0)+(\widetilde{g}\circ\alpha)(0)$$

olarak hesaplanır. O halde, yukarıda bulduğumuz eşitlikler (4.3.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{\overline{p}}\left[\overline{f}.\overline{g}\right] &= \left[\begin{array}{c}(f\circ\alpha)'(0)\\ +\varepsilon\left(\begin{array}{c}\left\langle\widetilde{\alpha}(t),\sum\limits_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\circ\alpha\right)(t).\overrightarrow{e}_i\right\rangle'(0)\\ +\left(\widetilde{f}\circ\alpha\right)'(0)\end{array}\right)\end{array}\right].\left(g(\widetilde{p})+\varepsilon g^0(\widetilde{p})\right)\\
&\quad+\left(f(\widetilde{p})+\varepsilon f^0(\widetilde{p})\right)\left[\begin{array}{c}(g\circ\alpha)'(0)\\ +\varepsilon\left(\begin{array}{c}\left\langle\widetilde{\alpha}(t),\sum\limits_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\circ\alpha\right)(t).\overrightarrow{e}_i\right\rangle'(0)\\ +\left(\widetilde{g}\circ\alpha\right)'(0)\end{array}\right)\end{array}\right]\\
&= \overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{\overline{p}}\left[\overline{f}\right].\overline{g}(\overline{p})+\overline{f}(\overline{p}).\overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{\overline{p}}[\overline{g}]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

4.4. Bir Dual Yüzeyin Şekil Operatörü

$\overrightarrow{\overrightarrow{V}}\in\chi\left(\mathbf{D}^3\right)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\overline{V} &: \mathbf{D}^3\longrightarrow T\mathbf{D}^3\\
\overline{p} &\longrightarrow \overline{V}(\overline{p})=\overrightarrow{\overrightarrow{V}}_{\overline{p}}=\overrightarrow{V}_{\widetilde{p}}+\varepsilon\overrightarrow{V}^*_{\widetilde{p}}\in T_{\overline{p}}\mathbf{D}^3
\end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir. Burada, $\overrightarrow{\overrightarrow{V}}=(\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{v}_3)$ olup $\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3$; $\mathbf{D}^3$ uzayının dual koordinat fonksiyonları olmak üzere, $1\leq i\leq 3$ için

$$\begin{aligned}
\overline{v}_i &: \mathbf{D}^3\longrightarrow\mathbf{D}\\
\overline{x} &\longrightarrow \overline{v}_i(\overline{x})=v_i(x)+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{3}x_j^*\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\widetilde{v}_i(x)\right)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı dual analitik fonksiyonlardır.
Diğer yandan, $\overline{D}$ dual kovaryant türev operatörü olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{D} &: \chi\left(\mathbf{D}^3\right)\times\chi\left(\mathbf{D}^3\right)\longrightarrow\chi\left(\mathbf{D}^3\right)\\
\left(\overrightarrow{\overrightarrow{V}},\overrightarrow{\overrightarrow{W}}\right) &\longrightarrow \overline{D}\left(\overrightarrow{\overrightarrow{V}},\overrightarrow{\overrightarrow{W}}\right)=\overline{D}_{\overrightarrow{\overrightarrow{V}}}\overrightarrow{\overrightarrow{W}}
\end{aligned}$$

ve $\overline{p} \in \mathbf{D}^3$ için

$$\begin{array}{rcl} \overline{D}_{\overrightarrow{\overline{V}}}\overrightarrow{\overline{W}} & : & \mathbf{D}^3 \longrightarrow T\mathbf{D}^3 \\ \overline{p} & \longrightarrow & \left(\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{V}}}\overrightarrow{\overline{W}}\right)(\overline{p}) = \overline{D}_{\overrightarrow{\overline{V}}_{\overline{p}}}\overrightarrow{\overline{W}} \end{array}$$

olup

$$\begin{aligned} \overline{D}_{\overrightarrow{\overline{V}}_{\overline{p}}}\overrightarrow{\overline{W}} &= D_{\overrightarrow{V}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{W} + \varepsilon\left(D_{\overrightarrow{V}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{W}^0 + D_{\overrightarrow{V}^*_{\tilde{p}}}\overrightarrow{W}\right) \\ &= D_{\overrightarrow{V}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{W} + \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{3} p_j^* D_{\overrightarrow{V}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{W}_{x_j} + D_{\overrightarrow{V}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{\widetilde{W}} + D_{\overrightarrow{V}^*_{\tilde{p}}}\overrightarrow{W}\right) \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir.
Ayrıca, $\overline{M}$, $\mathbf{D}^3$ uzayında bir dual yüzey ve $\overrightarrow{\overline{W}} \in \chi\left(\overline{M}\right)$ olmak üzere,

$$\begin{array}{rcl} \overline{\alpha} & : & \overline{I} \subseteq \mathbf{D} \longrightarrow \overline{M} \subset \mathbf{D}^3 \\ \overline{t} & \longrightarrow & \overline{\alpha}(\overline{t}) = \alpha(t) + \varepsilon\left(t^*\alpha'(t) + \widetilde{\alpha}(t)\right), \end{array}$$

$\overline{\alpha}\left(\overline{0}\right) = \overline{p}$ ve $\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}\left(\overline{0}\right) = \overrightarrow{\overline{V}}_{\overline{p}}$ olacak şekilde bir eğri ise

$$\begin{aligned} \overline{D}_{\overrightarrow{\overline{V}}_{\overline{p}}}\overrightarrow{\overline{W}} &= \frac{d}{d\overline{t}}\left(\overrightarrow{\overline{W}} \circ \overline{\alpha}\right)|_{\overline{t}=\overline{0}} \\ &= \left(\frac{d}{d\overline{t}}\left(\overline{w}_1 \circ \overline{\alpha}\right)|_{\overline{t}=\overline{0}}, \frac{d}{d\overline{t}}\left(\overline{w}_2 \circ \overline{\alpha}\right)|_{\overline{t}=\overline{0}}, \frac{d}{d\overline{t}}\left(\overline{w}_3 \circ \overline{\alpha}\right)|_{\overline{t}=\overline{0}}\right) \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir. Burada, $1 \leq i \leq 3$ için

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\overline{t}}\left(\overline{w}_i \circ \overline{\alpha}\right) \quad | \quad_{\overline{t}=\overline{0}} &= \left(w_i \circ \alpha\right)'(0) \\ &+ \varepsilon\left(\left\langle \widetilde{\alpha}(t), \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \circ \alpha\right)(t) \,.\, \overrightarrow{e}_j \right\rangle'(0) + \left(\widetilde{w}_i \circ \alpha\right)'(0)\right) \end{aligned}$$

eşitliği mevcuttur.

Teorem 4.4.1. $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}, \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$, $\overrightarrow{\overline{V}}, \overrightarrow{\overline{W}}$; $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde iki vektör alanı, $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbf{D}$ ve $\overline{f} \in C\left(\overline{U} \subseteq \overline{M}, \mathbf{D}\right)$ olsun. Bu durumda,
$i)$ $\overline{D}_{\overline{a}\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} + \overline{b}\overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}}\overrightarrow{\overline{W}} = \overline{a}\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}}\overrightarrow{\overline{W}} + \overline{b}\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}}\overrightarrow{\overline{W}}$,

$ii)$ $\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}}\left(\overline{a}\overrightarrow{\overline{V}}+\overline{b}\overrightarrow{\overline{W}}\right)=\overline{a}\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}}\overrightarrow{\overline{V}}+\overline{b}\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}}\overrightarrow{\overline{W}}$,

$iii)$ $\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}}\left(\overline{f}.\overrightarrow{\overline{W}}\right)=\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\left[\overline{f}\right].\overrightarrow{\overline{W}}\left(\overline{p}\right)+\overline{f}\left(\overline{p}\right).\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}}\overrightarrow{\overline{W}}$,

$iv)$ $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\left[\left\langle\overrightarrow{\overline{V}},\overrightarrow{\overline{W}}\right\rangle_{\mathbf{D}}\right]=\left\langle\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}}\overrightarrow{\overline{V}},\overrightarrow{\overline{W}}\left(\overline{p}\right)\right\rangle_{\mathbf{D}}+\left\langle\overrightarrow{\overline{V}}\left(\overline{p}\right),\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}}\overrightarrow{\overline{W}}\right\rangle_{\mathbf{D}}$

eşitlikleri mevcuttur.

Açıklama 11. $\overline{M}$, $\mathbf{D}^3$ uzayında bir dual yüzey ve bu yüzeyin birim dual normal vektör alanı $\overrightarrow{\overline{Z}}$ olsun. Burada, $\overrightarrow{\overline{Z}}=\overrightarrow{Z}+\varepsilon\overrightarrow{Z}^0$ olup

$$\left\|\overrightarrow{\overline{Z}}\right\|_{\mathbf{D}}=\left\|\overrightarrow{Z}\right\|+\varepsilon\frac{\left\langle\overrightarrow{Z},\overrightarrow{Z}^0\right\rangle}{\left\|\overrightarrow{Z}\right\|}=1+0\varepsilon$$

biçimindedir. Buradan görülmektedir ki $\left\|\overrightarrow{Z}\right\|=1$ ve $\left\langle\overrightarrow{Z},\overrightarrow{Z}^0\right\rangle=0$ dır. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\left\langle\overrightarrow{\overline{Z}},\overrightarrow{\overline{Z}}\right\rangle_{\mathbf{D}} &= \left\langle\overrightarrow{Z}+\varepsilon\overrightarrow{Z}^0,\overrightarrow{Z}+\varepsilon\overrightarrow{Z}^0\right\rangle_{\mathbf{D}}\\ &= \left\langle\overrightarrow{Z},\overrightarrow{Z}\right\rangle+2\varepsilon\left\langle\overrightarrow{Z},\overrightarrow{Z}^0\right\rangle\\ &= 1+0\varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $\forall\overrightarrow{\overline{V}}_{\overline{p}}\in T_{\overline{p}}\overline{M}$ için

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\overline{V}}_{\overline{p}}\left[\left\langle\overrightarrow{\overline{Z}},\overrightarrow{\overline{Z}}\right\rangle_{\mathbf{D}}\right] &= \overrightarrow{\overline{V}}_{\overline{p}}\left[1+0\varepsilon\right]\\ &= \overrightarrow{V}_{\widetilde{p}}\left[1\right]+\varepsilon.\overrightarrow{V}^{*}_{\widetilde{p}}\left[1\right]=0+0\varepsilon=\overline{0}\end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan, yukarıdaki teoremden biliyoruz ki

$$\overrightarrow{\overline{V}}_{\overline{p}}\left[\left\langle\overrightarrow{\overline{Z}},\overrightarrow{\overline{Z}}\right\rangle_{\mathbf{D}}\right]=\left\langle\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{V}}_{\overline{p}}}\overrightarrow{\overline{Z}},\overrightarrow{\overline{Z}}\mid_{\overline{p}}\right\rangle_{\mathbf{D}}+\left\langle\overrightarrow{\overline{Z}}\mid_{\overline{p}},\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{V}}_{\overline{p}}}\overrightarrow{\overline{Z}}\right\rangle_{\mathbf{D}}=\overline{0}$$

olduğundan

$$\left\langle\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{V}}_{\overline{p}}}\overrightarrow{\overline{Z}},\overrightarrow{\overline{Z}}\mid_{\overline{p}}\right\rangle_{\mathbf{D}}=\overline{0}$$

yani,

$$\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{V}}_{\overline{p}}}\overrightarrow{\overline{Z}}\perp_{\mathbf{D}}\overrightarrow{\overline{Z}}\mid_{\overline{p}}$$

dir. $\overrightarrow{\overline{Z}}=\overrightarrow{Z}+\varepsilon\overrightarrow{Z}^0$ bu yüzeyin birim dual normal vektör alanı olduğundan $\forall\overline{p}\in\overline{M}$ için

$\overrightarrow{\overline{Z}}\ |_{\overline{p}} \in \left(T_{\overline{p}}\overline{M}\right)^{\perp_{\mathbf{D}}}$ dir. O halde, $\forall \overline{p} \in \overline{M}$ için $\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{V}}_{\overline{p}}} \overrightarrow{\overline{Z}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$ elde edilir.

Diğer yandan, $\overrightarrow{\overline{Z}} \in \left(\chi\left(\overline{M}\right)\right)^{\perp_{\mathbf{D}}}$ ve

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\overline{Z}} &= \overrightarrow{Z} + \varepsilon \overrightarrow{Z}^0 \\
&= (\overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{z}_3) \\
&= \left(z_1 + \varepsilon z_1^0, z_2 + \varepsilon z_2^0, z_3 + \varepsilon z_3^0\right) \\
&= (z_1, z_2, z_3) + \varepsilon\left(z_1^0, z_2^0, z_3^0\right)
\end{aligned}$$

olup $1 \leq i \leq 3$ için

$$\begin{aligned}
\overline{z}_i \quad &: \quad \mathbf{D}^3 \longrightarrow \mathbf{D} \\
\overline{x} \quad &\longrightarrow \quad \overline{z}_i\left(\overline{x}\right) = z_i\left(x\right) + \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^* \frac{\partial z_i}{\partial x_j} + \widetilde{z}_i\left(x\right)\right) = z_i + \varepsilon z_i^0
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı dual analitik fonksiyonlardır. Buradan görülmektedir ki $\forall \overline{p} \in \overline{M}$ için $\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{V}}_{\overline{p}}} \overrightarrow{\overline{Z}} = \left(\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{V}}} \overrightarrow{\overline{Z}}\right)(\overline{p}) \in T_{\overline{p}}\overline{M}$ olup $\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{V}}} \overrightarrow{\overline{Z}} \in \chi\left(\overline{M}\right)$ dir.

Buna göre aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 4.4.2. $\overline{M}$, $\mathbf{D}^3$ uzayında bir dual yüzey ve bu yüzeyin birim dual normal vektör alanı $\overrightarrow{\overline{Z}}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\overline{S} \quad &: \quad \chi\left(\overline{M}\right) \longrightarrow \chi\left(\overline{M}\right) \\
\overrightarrow{\overline{X}} \quad &\longrightarrow \quad \overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}\right) = \overline{D}_{\overrightarrow{\overline{X}}} \overrightarrow{\overline{Z}} = D_{\overrightarrow{X}} \overrightarrow{Z} + \varepsilon\left(D_{\overrightarrow{X}} \overrightarrow{Z}^0 + D_{\overrightarrow{X}^*} \overrightarrow{Z}\right),
\end{aligned}$$

$$\overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}\right) = D_{\overrightarrow{X}} \overrightarrow{Z} + \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^* \left(D_{\overrightarrow{X}} \overrightarrow{Z}\right)_{x_j} + D_{\overrightarrow{X}} \overrightarrow{\widetilde{Z}} + D_{\overrightarrow{\widetilde{X}}} \overrightarrow{Z}\right) = S + \varepsilon S^0$$

dönüşümüne $\overline{M}$ dual yüzeyinin dual şekil operatörü denir. Bu durumda, $\forall \overline{p} = p + \varepsilon p^* \in \overline{M}$ için

$$\begin{aligned}
\overline{S}_{\overline{p}} \quad &: \quad T_{\overline{p}}\overline{M} \longrightarrow T_{\overline{p}}\overline{M} \\
\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} \quad &\longrightarrow \quad \overline{S}_{\overline{p}}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right) = \overline{D}_{\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}} \overrightarrow{\overline{Z}}
\end{aligned}$$

dönüşümüne $\overline{M}$ dual yüzeyinin $\overline{p} = p + \varepsilon p^* \in \overline{M}$ noktasındaki dual şekil operatörü denir. Burada,

$$\begin{aligned}
\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}}\overrightarrow{\overline{Z}} &= \overline{D}_{\overrightarrow{X}_{\tilde{p}}+\varepsilon\overrightarrow{X}^{*}_{\tilde{p}}}\left(\overrightarrow{Z}+\varepsilon\overrightarrow{Z}^{0}\right) \\
&= \left(D_{\overrightarrow{X}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{Z}+\varepsilon\left(D_{\overrightarrow{X}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{Z}^{0}+D_{\overrightarrow{X}^{*}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{Z}\right)\right) \\
&= D_{\overrightarrow{X}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{Z}+\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{3}p_j^{*}D_{\overrightarrow{X}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{Z}_{x_j}+D_{\overrightarrow{X}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{\tilde{Z}}+D_{\overrightarrow{X}^{*}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{Z}\right)
\end{aligned}$$

biçimindedir.

Teorem 4.4.3. $\overline{M}$, $\mathbf{D}^3$ uzayında bir dual yüzey ve $\overline{M}$ dual yüzeyinin dual şekil operatörü $\overline{S}$ olsun. $\forall\overline{p}\in\overline{M}$ için $\overline{S}_{\overline{p}}$ dönüşümü bir lineer dönüşümdür.

İspat. $\forall\overline{a},\overline{b}\in\mathbf{D}$ ve $\forall\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}},\overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}\in T_{\overline{p}}\overline{M}$ için

$$\begin{aligned}
\overline{S}_{\overline{p}}\left(\overline{a}\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}+\overline{b}\overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}\right) &= \overline{D}_{\overline{a}\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}+\overline{b}\overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}}\overrightarrow{\overline{Z}} \\
&= \overline{D}_{(a+\varepsilon a^{*})\left(\overrightarrow{X}_{\tilde{p}}+\varepsilon\overrightarrow{X}^{*}_{\tilde{p}}\right)+(b+\varepsilon b^{*})\left(\overrightarrow{Y}_{\tilde{p}}+\varepsilon\overrightarrow{Y}^{*}_{\tilde{p}}\right)}\overrightarrow{Z}+\varepsilon\overrightarrow{Z}^{0} \\
&= \overline{D}_{a\overrightarrow{X}_{\tilde{p}}+b\overrightarrow{Y}_{\tilde{p}}+\varepsilon\left(a\overrightarrow{X}^{*}_{\tilde{p}}+a^{*}\overrightarrow{X}_{\tilde{p}}+b\overrightarrow{Y}^{*}_{\tilde{p}}+b^{*}\overrightarrow{Y}_{\tilde{p}}\right)}\overrightarrow{Z}+\varepsilon\overrightarrow{Z}^{0} \\
&= \left(D_{a\overrightarrow{X}_{\tilde{p}}+b\overrightarrow{Y}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{Z}\right)+\varepsilon\left(\begin{array}{c}\left(D_{a\overrightarrow{X}_{\tilde{p}}+b\overrightarrow{Y}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{Z}^{0}\right) \\ +\left(D_{a\overrightarrow{X}^{*}_{\tilde{p}}+a^{*}\overrightarrow{X}_{\tilde{p}}+b\overrightarrow{Y}^{*}_{\tilde{p}}+b^{*}\overrightarrow{Y}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{Z}\right)\end{array}\right)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\overline{S}_{\overline{p}}\left(\overline{a}\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}+\overline{b}\overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}\right) &= a\left(D_{\overrightarrow{X}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{Z}\right)+\varepsilon\left(\begin{array}{c}a\left(D_{\overrightarrow{X}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{Z}^{0}\right)+a\left(D_{\overrightarrow{X}^{*}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{Z}\right) \\ +a^{*}\left(D_{\overrightarrow{X}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{Z}\right)\end{array}\right) \\
&\quad +b\left(D_{\overrightarrow{Y}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{Z}\right)+\varepsilon\left(\begin{array}{c}b\left(D_{\overrightarrow{Y}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{Z}^{0}\right)+b\left(D_{\overrightarrow{Y}^{*}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{Z}\right) \\ +b^{*}\left(D_{\overrightarrow{Y}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{Z}\right)\end{array}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde olup bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\overline{S}_{\overline{p}}\left(\overline{a}\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}+\overline{b}\overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}\right) &= (a+\varepsilon a^{*})\left(D_{\overrightarrow{X}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{Z}+\varepsilon\left(D_{\overrightarrow{X}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{Z}^{0}+D_{\overrightarrow{X}^{*}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{Z}\right)\right) \\
&\quad +(b+\varepsilon b^{*})\left(D_{\overrightarrow{Y}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{Z}+\varepsilon\left(D_{\overrightarrow{Y}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{Z}^{0}+D_{\overrightarrow{Y}^{*}_{\tilde{p}}}\overrightarrow{Z}\right)\right) \\
&= \overline{a}\left(\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}}\overrightarrow{\overline{Z}}\right)+\overline{b}\left(\overline{D}_{\overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}}\overrightarrow{\overline{Z}}\right) \\
&= \overline{a}\overline{S}_{\overline{p}}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right)+\overline{b}\overline{S}_{\overline{p}}\left(\overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde, $\forall \overline{p} \in \overline{M}$ dual noktasında $\overline{S}_{\overline{p}}$ lineer olduğundan $\overline{S}$ lineerdir. □

Şimdi,

$$\begin{aligned} \overline{\alpha} \quad &: \quad \overline{I} \subseteq \mathbf{D} \longrightarrow \overline{M} \subset \mathbf{D}^3 \\ \overline{t} \quad &\longrightarrow \quad \overline{\alpha}(\overline{t}) = \alpha(t) + \varepsilon\left(t^* \alpha'(t) + \widetilde{\alpha}(t)\right), \end{aligned}$$

$\overline{\alpha}\left(\overline{0}\right) = \overline{p} \in \overline{M}$ ve $\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}\left(\overline{0}\right) = \overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$ olacak şekilde bir eğri olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \overline{D}_{\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}} \overrightarrow{\overline{Z}} &= \frac{d}{d\overline{t}}\left(\overrightarrow{\overline{Z}} \circ \overline{\alpha}\right)|_{\overline{t}=\overline{0}} \\ &= \left(\frac{d}{d\overline{t}}(\overline{z}_1 \circ \overline{\alpha})|_{\overline{t}=\overline{0}}, \frac{d}{d\overline{t}}(\overline{z}_2 \circ \overline{\alpha})|_{\overline{t}=\overline{0}}, \frac{d}{d\overline{t}}(\overline{z}_3 \circ \overline{\alpha})|_{\overline{t}=\overline{0}}\right) \end{aligned}$$

olup $1 \leq i \leq 3$ için

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\overline{t}}(\overline{z}_i \circ \overline{\alpha}) \quad | \quad _{\overline{t}=\overline{0}} &= (z_i \circ \alpha)'(0) \\ &+\varepsilon\left(\left\langle \widetilde{\alpha}(t), \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \circ \alpha\right)(t).\overrightarrow{e}_j \right\rangle'(0) + (\widetilde{z}_i \circ \alpha)'(0)\right) \end{aligned}$$

biçimindedir. O halde, $\overline{M}$ dual yüzeyinin $\overrightarrow{\overline{Z}}$ birim dual normal vektör alanının $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}$ dual tanjant vektörüne göre dual kovaryant türevi

$$\begin{aligned} \overline{D}_{\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}} \overrightarrow{\overline{Z}} &= \frac{d}{d\overline{t}}\left(\overrightarrow{\overline{Z}} \circ \overline{\alpha}\right)|_{\overline{t}=\overline{0}} \\ &= \left(\frac{d}{d\overline{t}}(\overline{z}_1 \circ \overline{\alpha})|_{\overline{t}=\overline{0}}, \frac{d}{d\overline{t}}(\overline{z}_2 \circ \overline{\alpha})|_{\overline{t}=\overline{0}}, \frac{d}{d\overline{t}}(\overline{z}_3 \circ \overline{\alpha})|_{\overline{t}=\overline{0}}\right) \\ &= \left((z_1 \circ \alpha)'(0), (z_2 \circ \alpha)'(0), (z_3 \circ \alpha)'(0)\right) \\ &\quad +\varepsilon\left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \left\langle \widetilde{\alpha}(t), \sum\limits_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial z_1}{\partial x_j} \circ \alpha\right)(t).\overrightarrow{e}_j \right\rangle'(0), \\ \left\langle \widetilde{\alpha}(t), \sum\limits_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial z_2}{\partial x_j} \circ \alpha\right)(t).\overrightarrow{e}_j \right\rangle'(0), \\ \left\langle \widetilde{\alpha}(t), \sum\limits_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial z_3}{\partial x_j} \circ \alpha\right)(t).\overrightarrow{e}_j \right\rangle'(0) \end{array}\right) \\ +\left((\widetilde{z}_1 \circ \alpha)'(0), (\widetilde{z}_2 \circ \alpha)'(0), (\widetilde{z}_3 \circ \alpha)'(0)\right) \end{array}\right) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Açıklama 12. $\left(\overline{F},\overline{U}\right)$, $\overline{M}$ dual yüzeyi için bir parametrizasyon olsun. O halde,

$$\begin{array}{rcl} \overline{F} & : & \overline{U}\subseteq \mathbf{D}^2 \longrightarrow \overline{F}\left(\overline{U}\right)\subseteq \overline{M}\subset \mathbf{D}^3 \\ (\overline{u}_1,\overline{u}_2) & \longrightarrow & \overline{F}(\overline{u}_1,\overline{u}_2)=F(u_1,u_2)+\varepsilon\left(u_1^*F_{u_1}+u_2^*F_{u_2}+\widetilde{F}(u_1,u_2)\right)=F+\varepsilon F^0 \end{array}$$

dual diffeomorfizmi mevcuttur. $1\leq i\leq 2$ için

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{u}_i}=\overline{F}_{\overline{u}_i}=F_{u_i}(u_1,u_2)+\varepsilon\left(u_1^*F_{u_1u_i}+u_2^*F_{u_2u_i}+\widetilde{F}_{u_i}(u_1,u_2)\right)=F_{u_i}+\varepsilon F_{u_i}^0$$

biçiminde olup

$$\overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_1}\right)=\overline{D}_{\overline{F}_{\overline{u}_1}}\overrightarrow{\overline{Z}}=\frac{\partial \overrightarrow{\overline{Z}}}{\partial \overline{u}_1}$$

ve

$$\overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_2}\right)=\overline{D}_{\overline{F}_{\overline{u}_2}}\overrightarrow{\overline{Z}}=\frac{\partial \overrightarrow{\overline{Z}}}{\partial \overline{u}_2}$$

elde edilir. Burada, dual yüzeyin birim dual normal vektör alanı $\overrightarrow{\overline{Z}}=\dfrac{\overline{F}_{\overline{u}_1}\times_{\mathbf{D}}\overline{F}_{\overline{u}_2}}{\left\|\overline{F}_{\overline{u}_1}\times_{\mathbf{D}}\overline{F}_{\overline{u}_2}\right\|_{\mathbf{D}}}$ şeklinde tanımlıdır. Gerçekten, $(\overline{u}_{1_0},\overline{u}_{2_0})\in\overline{U}$ bir dual sabit olsun. $\overline{F}(\overline{u}_1,\overline{u}_{2_0})$, $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde bir eğri tanımlar.

$$\begin{array}{rcl} \overline{F}(\overline{u}_1,\overline{u}_{2_0}) & = & F(u_1,u_{2_0})+\varepsilon\left(u_1^*F_{u_1}(u_1,u_{2_0})+u_{2_0}^*F_{u_2}(u_1,u_{2_0})+\widetilde{F}(u_1,u_{2_0})\right) \\ & = & \alpha(u_1)+\varepsilon\left(u_1^*\alpha'(u_1)+\widetilde{\alpha}(u_1)\right) \\ & = & \overline{\alpha}(\overline{u}_1) \end{array}$$

eğrisi $\overline{M}$ dual yüzeyinin $\overline{u}_{2_0}=u_{2_0}+\varepsilon u_{2_0}\in\mathbf{D}$ ile elde edilen eğrisidir. Diğer yandan,

$$\begin{array}{rcl} \overline{F}(\overline{u}_{1_0},\overline{u}_2) & = & F(u_{1_0},u_2)+\varepsilon\left(u_{1_0}^*F_{u_1}(u_{1_0},u_2)+u_2^*F_{u_2}(u_{1_0},u_2)+\widetilde{F}(u_{1_0},u_2)\right) \\ & = & \beta(u_2)+\varepsilon\left(u_2^*\beta'(u_2)+\widetilde{\beta}(u_2)\right) \\ & = & \overline{\beta}(\overline{u}_2) \end{array}$$

eğrisi $\overline{M}$ dual yüzeyinin $\overline{u}_{1_0}=u_{1_0}+\varepsilon u_{1_0}\in\mathbf{D}$ ile elde edilen eğrisidir. Bu durumda, elde edilen bu eğrilerin $\overline{u}_1$ ve $\overline{u}_2$ dual değişkenlere göre türevleri sırasıyla

$$\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{u}_1,\overline{u}_{2_0})=\frac{d\overline{\alpha}}{d\overline{u}_1}=\alpha'(u_1)+\varepsilon\left(u_1^*\alpha''(u_1)+\widetilde{\alpha}'(u_1)\right)$$

ve

$$\overline{F}_{\overline{u}_2}\left(\overline{u}_{1_0},\overline{u}_2\right)=\frac{d\overline{\beta}}{d\overline{u}_2}=\beta'\left(u_2\right)+\varepsilon\left(u_2^*\beta''\left(u_2\right)+\widetilde{\beta}'\left(u_2\right)\right)$$

bulunur. O halde,

$$\overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_1}\right)=\overline{D}_{\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{u}_1)}\overrightarrow{\overline{Z}}=\frac{\partial\overrightarrow{\overline{Z}}}{\partial\overline{u}_1}$$

ve

$$\overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_2}\right)=\overline{D}_{\overset{\bullet}{\overline{\beta}}(\overline{u}_2)}\overrightarrow{\overline{Z}}=\frac{\partial\overrightarrow{\overline{Z}}}{\partial\overline{u}_2}$$

elde edilir.

Şimdi, bir dual yüzeyin birim dual normal vektör alanını daha ayrıntılı inceleyelim. $\left(\overline{F},\overline{U}\right)$, $\overline{M}$ dual yüzeyi için bir parametrizasyon olsun. O halde,

$$\begin{array}{rcl}\overline{F} & : & \overline{U}\subseteq\mathbf{D}^2\longrightarrow\overline{F}\left(\overline{U}\right)\subseteq\overline{M}\subset\mathbf{D}^3\\ \left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right) & \longrightarrow & \overline{F}\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right)=F\left(u_1,u_2\right)+\varepsilon\left(u_1^*F_{u_1}+u_2^*F_{u_2}+\widetilde{F}\left(u_1,u_2\right)\right)=F+\varepsilon F^0\end{array}$$

dual diffeomorfizminin mevcut olduğunu biliyoruz. $\chi\left(\overline{M}\right)$ uzayının bir bazı $\left\{\overline{F}_{\overline{u}_1},\overline{F}_{\overline{u}_2}\right\}$ dir. Ayrıca,

$$\overline{F}_{\overline{u}_1}=F_{u_1}+\varepsilon\left(u_1^*F_{u_1u_1}+u_2^*F_{u_2u_1}+\widetilde{F}_{u_1}\right),$$

$$\overline{F}_{\overline{u}_2}=F_{u_2}+\varepsilon\left(u_1^*F_{u_1u_2}+u_2^*F_{u_2u_2}+\widetilde{F}_{u_2}\right)$$

olup

$$\begin{array}{rcl}\overline{F}_{\overline{u}_1}\times_{\mathbf{D}}\overline{F}_{\overline{u}_2} & = & F_{u_1}\times F_{u_2}\\ & & +\varepsilon\left(\begin{array}{c}u_1^*\frac{\partial\left(F_{u_1}\times F_{u_2}\right)}{\partial u_1}+u_2^*\frac{\partial\left(F_{u_1}\times F_{u_2}\right)}{\partial u_2}\\ +\left(F_{u_1}\times\widetilde{F}_{u_2}+\widetilde{F}_{u_1}\times F_{u_2}\right)\end{array}\right)\end{array}$$

biçiminde hesaplanır. Burada, $F_{u_1u_2}=F_{u_2u_1}$ dir. Diğer yandan,

$$\begin{array}{rcl}\left\|\overline{F}_{\overline{u}_1}\times_{\mathbf{D}}\overline{F}_{\overline{u}_2}\right\|_{\mathbf{D}} & = & \left\|F_{u_1}\times F_{u_2}\right\|\\ & & +\varepsilon\left(\begin{array}{c}\frac{\left\langle F_{u_1}\times F_{u_2},u_1^*\frac{\partial\left(F_{u_1}\times F_{u_2}\right)}{\partial u_1}+u_2^*\frac{\partial\left(F_{u_1}\times F_{u_2}\right)}{\partial u_2}\right\rangle}{\left\|F_{u_1}\times F_{u_2}\right\|}\\ +\frac{\left\langle F_{u_1}\times F_{u_2},F_{u_1}\times\widetilde{F}_{u_2}+\widetilde{F}_{u_1}\times F_{u_2}\right\rangle}{\left\|F_{u_1}\times F_{u_2}\right\|}\end{array}\right)\end{array}$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\overline{Z}} &= \frac{\overline{F}_{\overline{u}_1} \times_{\mathbf{D}} \overline{F}_{\overline{u}_2}}{\left\| \overline{F}_{\overline{u}_1} \times_{\mathbf{D}} \overline{F}_{\overline{u}_2} \right\|_{\mathbf{D}}} \\
&= \frac{F_{u_1} \times F_{u_2}}{\| F_{u_1} \times F_{u_2} \|} \\
&\quad + \varepsilon \left(\begin{array}{c} u_1^* \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{F_{u_1} \times F_{u_2}}{\| F_{u_1} \times F_{u_2} \|} \right) + u_2^* \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{F_{u_1} \times F_{u_2}}{\| F_{u_1} \times F_{u_2} \|} \right) + \frac{\left(F_{u_1} \times \widetilde{F}_{u_2} + \widetilde{F}_{u_1} \times F_{u_2} \right)}{\| F_{u_1} \times F_{u_2} \|} \\ - \left(F_{u_1} \times F_{u_2} \right) \frac{\left\langle F_{u_1} \times F_{u_2}, F_{u_1} \times \widetilde{F}_{u_2} + \widetilde{F}_{u_1} \times F_{u_2} \right\rangle}{\| F_{u_1} \times F_{u_2} \|^3} \end{array} \right)
\end{aligned}
$$

biçiminde ifade edilir. Buradan görülmektedir ki $\overrightarrow{\overline{Z}}$ dual analitik vektör alanıdır. Yani,

$$
\overrightarrow{Z}\left(u_1, u_2\right) = \frac{F_{u_1} \times F_{u_2}}{\| F_{u_1} \times F_{u_2} \|}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\widetilde{Z}}\left(u_1, u_2\right) &= \frac{\left(F_{u_1} \times \widetilde{F}_{u_2} + \widetilde{F}_{u_1} \times F_{u_2} \right)}{\| F_{u_1} \times F_{u_2} \|} \\
&\quad - \left(F_{u_1} \times F_{u_2} \right) \frac{\left\langle F_{u_1} \times F_{u_2}, F_{u_1} \times \widetilde{F}_{u_2} + \widetilde{F}_{u_1} \times F_{u_2} \right\rangle}{\| F_{u_1} \times F_{u_2} \|^3}
\end{aligned}
$$

şeklinde olup $\overrightarrow{Z}$ ve $\overrightarrow{\widetilde{Z}}$, $C^\infty-$sınıfından olduğundan

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\overline{Z}} &= \overrightarrow{\overline{Z}}\left(\overline{u}_1, \overline{u}_2\right) \\
&= \overrightarrow{Z}\left(u_1, u_2\right) + \varepsilon \left(u_1^* \frac{\partial \overrightarrow{Z}}{\partial u_1} + u_2^* \frac{\partial \overrightarrow{Z}}{\partial u_2} + \overrightarrow{\widetilde{Z}}\left(u_1, u_2\right) \right) \\
&= \overrightarrow{Z} + \varepsilon \overrightarrow{Z}^0
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlı bir dual analitik vektör alanıdır. Ayrıca,

$$
\left\| \overrightarrow{\overline{Z}} \right\|_{\mathbf{D}} = \left\| \overrightarrow{Z} \right\| + \varepsilon \frac{\left\langle \overrightarrow{Z}, \overrightarrow{Z}^0 \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{Z} \right\|}
$$

olup

$$
\left\| \overrightarrow{Z} \right\| = \left\| \frac{F_{u_1} \times F_{u_2}}{\| F_{u_1} \times F_{u_2} \|} \right\| = 1
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{Z}, \overrightarrow{Z}^{0} \right\rangle &= \left\langle \begin{array}{c} \dfrac{F_{u_1} \times F_{u_2}}{\|F_{u_1} \times F_{u_2}\|}, u_1^* \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{F_{u_1} \times F_{u_2}}{\|F_{u_1} \times F_{u_2}\|} \right) \\ + u_2^* \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{F_{u_1} \times F_{u_2}}{\|F_{u_1} \times F_{u_2}\|} \right) + \overrightarrow{\widetilde{Z}}\,(u_1, u_2) \end{array} \right\rangle \\
&= \left\langle \overrightarrow{Z}, u_1^* \frac{\partial \overrightarrow{Z}}{\partial u_1} + u_2^* \frac{\partial \overrightarrow{Z}}{\partial u_2} + \overrightarrow{\widetilde{Z}} \right\rangle \\
&= u_1^* \left\langle \overrightarrow{Z}, \frac{\partial \overrightarrow{Z}}{\partial u_1} \right\rangle + u_2^* \left\langle \overrightarrow{Z}, \frac{\partial \overrightarrow{Z}}{\partial u_2} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{Z}, \overrightarrow{\widetilde{Z}} \right\rangle \qquad (4.4.1)
\end{aligned}
$$

bulunur. Şimdi, $\left\langle \overrightarrow{Z}, \overrightarrow{Z}^{0} \right\rangle = 0$ olduğunu gösterelim. $\overrightarrow{Z}$ vektör alanının u_1 ve u_2 değişkenlerine göre kısmi türevleri

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \overrightarrow{Z}}{\partial u_1} &= \frac{(F_{u_1u_1} \times F_{u_2} + F_{u_1} \times F_{u_2u_1})}{\|F_{u_1} \times F_{u_2}\|} \\
&\quad - \frac{(F_{u_1} \times F_{u_2}) \langle F_{u_1} \times F_{u_2}, F_{u_1u_1} \times F_{u_2} + F_{u_1} \times F_{u_2u_1} \rangle}{\|F_{u_1} \times F_{u_2}\|^3}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \overrightarrow{Z}}{\partial u_2} &= \frac{(F_{u_1u_2} \times F_{u_2} + F_{u_1} \times F_{u_2u_2})}{\|F_{u_1} \times F_{u_2}\|} \\
&\quad - \frac{(F_{u_1} \times F_{u_2}) \langle F_{u_1} \times F_{u_2}, F_{u_1u_2} \times F_{u_2} + F_{u_1} \times F_{u_2u_2} \rangle}{\|F_{u_1} \times F_{u_2}\|^3}
\end{aligned}
$$

şeklindedir ve burada açıktır ki

$$
\left\langle \overrightarrow{Z}, \frac{\partial \overrightarrow{Z}}{\partial u_1} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{Z}, \frac{\partial \overrightarrow{Z}}{\partial u_2} \right\rangle = 0
$$

dır. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{Z}, \overrightarrow{\widetilde{Z}} \right\rangle &= \left\langle \begin{array}{c} \dfrac{F_{u_1} \times F_{u_2}}{\|F_{u_1} \times F_{u_2}\|}, \\ \frac{\left(F_{u_1} \times \widetilde{F}_{u_2} + \widetilde{F}_{u_1} \times F_{u_2}\right)}{\|F_{u_1} \times F_{u_2}\|} - (F_{u_1} \times F_{u_2}) \frac{\left\langle F_{u_1} \times F_{u_2}, F_{u_1} \times \widetilde{F}_{u_2} + \widetilde{F}_{u_1} \times F_{u_2} \right\rangle}{\|F_{u_1} \times F_{u_2}\|^3} \end{array} \right\rangle \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olduğundan yukarıda bulduğumuz ifadeler $(4.4.1)$ denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\left\langle \overrightarrow{Z}, \overrightarrow{Z}^{0} \right\rangle = u_1^* \left\langle \overrightarrow{Z}, \frac{\partial \overrightarrow{Z}}{\partial u_1} \right\rangle + u_2^* \left\langle \overrightarrow{Z}, \frac{\partial \overrightarrow{Z}}{\partial u_2} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{Z}, \overrightarrow{\widetilde{Z}} \right\rangle = 0.$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\left\| \overrightarrow{Z} \right\| = 1$ ve $\left\langle \overrightarrow{Z}, \overrightarrow{Z}^{0} \right\rangle = 0$ olduğundan

$$\left\| \overrightarrow{\overline{Z}} \right\|_{\mathbf{D}} = \left\| \overrightarrow{Z} \right\| + \varepsilon \frac{\left\langle \overrightarrow{Z}, \overrightarrow{Z}^{0} \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{Z} \right\|} = 1 + 0\varepsilon = 1$$

olup $\overrightarrow{\overline{Z}}$ birim dual analitik vektör alanıdır. $\overline{F}_{\overline{u}_1}, \overline{F}_{\overline{u}_2} \in \chi\left(\overline{M}\right)$ ve $\overrightarrow{\overline{Z}} \in \left(\chi\left(\overline{M}\right)\right)^{\perp_{\mathbf{D}}}$ olduğundan $\left\langle \overline{F}_{\overline{u}_1}, \overrightarrow{\overline{Z}} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{0}$ ve $\left\langle \overline{F}_{\overline{u}_2}, \overrightarrow{\overline{Z}} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{0}$ dir. Şimdi, bu eşitliklerin varlığını gösterelim. Gerçekten, biliyoruz ki

$$\overline{F}_{\overline{u}_1} = F_{u_1} + \varepsilon \left(u_1^* F_{u_1 u_1} + u_2^* F_{u_2 u_1} + \widetilde{F}_{u_1} \right)$$

ve

$$\overrightarrow{\overline{Z}} = \overrightarrow{\overline{Z}}\left(\overline{u}_1, \overline{u}_2\right) = \overrightarrow{Z}\left(u_1, u_2\right) + \varepsilon \left(u_1^* \frac{\partial \overrightarrow{Z}}{\partial u_1} + u_2^* \frac{\partial \overrightarrow{Z}}{\partial u_2} + \overrightarrow{\widetilde{Z}}\left(u_1, u_2\right) \right)$$

biçiminde olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{F}_{\overline{u}_1}, \overrightarrow{\overline{Z}} \right\rangle_{\mathbf{D}} &= \left\langle \begin{array}{c} F_{u_1} + \varepsilon \left(u_1^* F_{u_1 u_1} + u_2^* F_{u_2 u_1} + \widetilde{F}_{u_1} \right) \\ , \overrightarrow{Z}\left(u_1, u_2\right) + \varepsilon \left(u_1^* \frac{\partial \overrightarrow{Z}}{\partial u_1} + u_2^* \frac{\partial \overrightarrow{Z}}{\partial u_2} + \overrightarrow{\widetilde{Z}}\left(u_1, u_2\right) \right) \end{array} \right\rangle_{\mathbf{D}} \\
&= \left\langle F_{u_1}, \overrightarrow{Z} \right\rangle + \varepsilon \left(\begin{array}{c} u_1^* \left(\left\langle F_{u_1}, \frac{\partial \overrightarrow{Z}}{\partial u_1} \right\rangle + \left\langle F_{u_1 u_1}, \overrightarrow{Z} \right\rangle \right) \\ + u_2^* \left(\left\langle F_{u_1}, \frac{\partial \overrightarrow{Z}}{\partial u_2} \right\rangle + \left\langle F_{u_1 u_2}, \overrightarrow{Z} \right\rangle \right) \\ + \left\langle F_{u_1}, \overrightarrow{\widetilde{Z}} \right\rangle + \left\langle \widetilde{F}_{u_1}, \overrightarrow{Z} \right\rangle \end{array} \right)
\end{aligned}$$

olup

$$\left\langle \overline{F}_{\overline{u}_1}, \overrightarrow{\overline{Z}} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \left\langle F_{u_1}, \overrightarrow{Z} \right\rangle + \varepsilon \left(\begin{array}{c} u_1^* \frac{\partial \left\langle F_{u_1}, \overrightarrow{Z} \right\rangle}{\partial u_1} + u_2^* \frac{\partial \left\langle F_{u_1}, \overrightarrow{Z} \right\rangle}{\partial u_2} \\ + \left\langle F_{u_1}, \overrightarrow{\widetilde{Z}} \right\rangle + \left\langle \widetilde{F}_{u_1}, \overrightarrow{Z} \right\rangle \end{array} \right)$$

biçiminde hesaplanır. $\overrightarrow{Z} = \frac{F_{u_1} \times F_{u_2}}{\left\| F_{u_1} \times F_{u_2} \right\|}$ olduğundan kolayca görülmektedir ki $\left\langle F_{u_1}, \overrightarrow{Z} \right\rangle =$

0 dır. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\left\langle F_{u_1}, \overrightarrow{\overline{Z}} \right\rangle + \left\langle \widetilde{F}_{u_1}, \overrightarrow{Z} \right\rangle &= \frac{1}{\|F_{u_1} \times F_{u_2}\|} \left\langle F_{u_1}, F_{u_1} \times \widetilde{F}_{u_2} \right\rangle \\
&+ \frac{1}{\|F_{u_1} \times F_{u_2}\|} \left\langle F_{u_1}, \widetilde{F}_{u_1} \times F_{u_2} \right\rangle \\
&- \frac{\langle F_{u_1}, F_{u_1} \times F_{u_2} \rangle \left\langle F_{u_1} \times F_{u_2}, F_{u_1} \times \widetilde{F}_{u_2} + \widetilde{F}_{u_1} \times F_{u_2} \right\rangle}{\|F_{u_1} \times F_{u_2}\|^3} \\
&+ \frac{1}{\|F_{u_1} \times F_{u_2}\|} \left\langle \widetilde{F}_{u_1}, F_{u_1} \times F_{u_2} \right\rangle
\end{aligned}$$

şeklindedir ve bu ifade düzenlenirse,

$$\left\langle F_{u_1}, \overrightarrow{\overline{Z}} \right\rangle + \left\langle \widetilde{F}_{u_1}, \overrightarrow{Z} \right\rangle = 0$$

bulunur. O halde, $\left\langle \overline{F}_{\overline{u}_1}, \overrightarrow{\overline{Z}} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{0}$ yani, $\overline{F}_{\overline{u}_1} \perp_{\mathbf{D}} \overrightarrow{\overline{Z}}$ dir. Benzer şekilde, $\overline{F}_{\overline{u}_2} \perp_{\mathbf{D}} \overrightarrow{\overline{Z}}$ yani, $\left\langle \overline{F}_{\overline{u}_2}, \overrightarrow{\overline{Z}} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{0}$ olduğu gösterilir. Sonuç olarak, $\overrightarrow{\overline{Z}} = \dfrac{\overline{F}_{\overline{u}_1} \times_{\mathbf{D}} \overline{F}_{\overline{u}_2}}{\left\| \overline{F}_{\overline{u}_1} \times_{\mathbf{D}} \overline{F}_{\overline{u}_2} \right\|_{\mathbf{D}}}$ dual vektör alanı $\overline{M}$ dual yüzeyinin birim normal dual analitik vektör alanıdır.

Şimdi, bir dual yüzeyin şekil operatörünün matris formunu elde edelim.

$$\begin{aligned}
\overline{F} \quad &: \quad \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2 \longrightarrow \overline{F}\left(\overline{U}\right) \subseteq \overline{M} \subset \mathbf{D}^3 \\
(\overline{u}_1, \overline{u}_2) \quad &\longrightarrow \quad \overline{F}(\overline{u}_1, \overline{u}_2) = F(u_1, u_2) + \varepsilon \left(u_1^* F_{u_1} + u_2^* F_{u_2} + \widetilde{F}(u_1, u_2) \right) = F + \varepsilon F^0,
\end{aligned}$$

$\overline{M}$ dual yüzeyi için bir parametrizasyon olsun. $\chi\left(\overline{M}\right)$ uzayının bir bazının $\left\{ \overline{F}_{\overline{u}_1}, \overline{F}_{\overline{u}_2} \right\}$ olduğunu biliyoruz. $\overline{S} : \chi\left(\overline{M}\right) \longrightarrow \chi\left(\overline{M}\right)$ dönüşümü lineer olduğundan bu lineer dönüşüme $\left\{ \overline{F}_{\overline{u}_1}, \overline{F}_{\overline{u}_2} \right\}$ bazına göre bir matris karşılık gelir. Dual yüzeyin dual normal vektör alanı $\overline{F}_{\overline{u}_1} \times_{\mathbf{D}} \overline{F}_{\overline{u}_2}$ olduğundan birim dual normal vektör alanı $\overrightarrow{\overline{Z}} = \dfrac{\overline{F}_{\overline{u}_1} \times_{\mathbf{D}} \overline{F}_{\overline{u}_2}}{\left\| \overline{F}_{\overline{u}_1} \times_{\mathbf{D}} \overline{F}_{\overline{u}_2} \right\|_{\mathbf{D}}}$ dir. Yukarıdaki bilgiler göz önüne alındığında $\overline{S}$ dual şekil operatörünün

$$\begin{aligned}
\overline{S} \quad &: \quad \chi\left(\overline{M}\right) \longrightarrow \chi\left(\overline{M}\right) \\
\overline{F}_{\overline{u}_1} \quad &\longrightarrow \quad \overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_1}\right) = \overline{D}_{\overline{F}_{\overline{u}_1}} \overrightarrow{\overline{Z}} = \overrightarrow{\overline{Z}}_{\overline{u}_1}, \\
\overline{F}_{\overline{u}_2} \quad &\longrightarrow \quad \overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_2}\right) = \overline{D}_{\overline{F}_{\overline{u}_2}} \overrightarrow{\overline{Z}} = \overrightarrow{\overline{Z}}_{\overline{u}_2},
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlandığını biliyoruz. Bu ifadeleri genişletir ve bu kısımda bahsedilen diğer bilgileri göz önüne alırsak

$$\overrightarrow{\overline{Z}}_{\overline{u}_1}=\overrightarrow{Z}_{u_1}+\varepsilon\left(u_1^*\overrightarrow{Z}_{u_1u_1}+u_2^*\overrightarrow{Z}_{u_2u_1}+\overrightarrow{\widetilde{Z}}_{u_1}\right)=\overline{a}\overline{F}_{\overline{u}_1}+\overline{b}\overline{F}_{\overline{u}_2}=\begin{bmatrix}\overline{a}\\ \overline{b}\end{bmatrix}$$

ve

$$\overrightarrow{\overline{Z}}_{\overline{u}_2}=\overrightarrow{Z}_{u_2}+\varepsilon\left(u_1^*\overrightarrow{Z}_{u_1u_2}+u_2^*\overrightarrow{Z}_{u_2u_2}+\overrightarrow{\widetilde{Z}}_{u_2}\right)=\overline{c}\overline{F}_{\overline{u}_1}+\overline{d}\overline{F}_{\overline{u}_2}=\begin{bmatrix}\overline{c}\\ \overline{d}\end{bmatrix}$$

olacak şekilde $\overline{a},\overline{b},\overline{c},\overline{d}$ dual değerleri vardır. Burada,

$$\begin{aligned}\overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_1}\right) &= \overrightarrow{\overline{Z}}_{\overline{u}_1}=\frac{\partial\overrightarrow{\overline{Z}}}{\partial\overline{u}_1}=\overrightarrow{Z}_{u_1}+\varepsilon\left(u_1^*\overrightarrow{Z}_{u_1u_1}+u_2^*\overrightarrow{Z}_{u_2u_1}+\overrightarrow{\widetilde{Z}}_{u_1}\right)\\ &= S\left(F_{u_1}\right)+\varepsilon\left(u_1^*\frac{\partial\left(S\left(F_{u_1}\right)\right)}{\partial u_1}+u_2^*\frac{\partial\left(S\left(F_{u_1}\right)\right)}{\partial u_2}+\overrightarrow{\widetilde{Z}}_{u_1}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_2}\right) &= \overrightarrow{\overline{Z}}_{\overline{u}_2}=\frac{\partial\overrightarrow{\overline{Z}}}{\partial\overline{u}_2}=\overrightarrow{Z}_{u_2}+\varepsilon\left(u_1^*\overrightarrow{Z}_{u_1u_2}+u_2^*\overrightarrow{Z}_{u_2u_2}+\overrightarrow{\widetilde{Z}}_{u_2}\right)\\ &= S\left(F_{u_2}\right)+\varepsilon\left(u_1^*\frac{\partial\left(S\left(F_{u_2}\right)\right)}{\partial u_1}+u_2^*\frac{\partial\left(S\left(F_{u_2}\right)\right)}{\partial u_2}+\overrightarrow{\widetilde{Z}}_{u_2}\right)\end{aligned}$$

şeklinde olup $\overline{S}:\chi\left(\overline{M}\right)\longrightarrow\chi\left(\overline{M}\right)$ lineer dönüşümüne (dual şekil operatörüne) $\left\{\overline{F}_{\overline{u}_1},\overline{F}_{\overline{u}_2}\right\}$ bazına göre karşılık gelen dual matris

$$\overline{\Omega}=\begin{bmatrix}\overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_1}\right) & \overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_2}\right)\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

biçimindedir. Yani, $\overline{S}$ dual şekil operatörü lineer olduğundan

$$\begin{aligned}\overline{S} &: \chi\left(\overline{M}\right)\longrightarrow\chi\left(\overline{M}\right)\\ \overrightarrow{\overline{X}} &\longrightarrow \overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}\right)=\overline{\Omega}.\overrightarrow{\overline{X}}\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada, $\overline{\Omega}=\begin{bmatrix}\overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_1}\right) & \overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_2}\right)\end{bmatrix}_{2\times 2}=\begin{bmatrix}\overline{a} & \overline{c}\\ \overline{b} & \overline{d}\end{bmatrix}_{2\times 2}$ matrisi $\overline{S}$ şekil operatörünün $\left\{\overline{F}_{\overline{u}_1},\overline{F}_{\overline{u}_2}\right\}$ dual bazına göre karşılık gelen dual matrisidir. $Sp\left\{\overline{F}_{\overline{u}_1},\overline{F}_{\overline{u}_2}\right\}=$

$\chi\left(\overline{M}\right)$ olduğundan, $\forall \overrightarrow{\overline{X}} \in \chi\left(\overline{M}\right)$ için $\overrightarrow{\overline{X}} = \overline{\lambda}\overline{F}_{\overline{u}_1} + \overline{\mu}\overline{F}_{\overline{u}_2}$ olacak şekilde $\overline{\lambda}, \overline{\mu} \in C\left(\overline{M}, \mathbf{D}\right)$ vardır. O halde, $\forall \overrightarrow{\overline{X}} \in \chi\left(\overline{M}\right)$ için

$$\begin{aligned}
\overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}\right) &= \overline{\Omega}.\overrightarrow{\overline{X}} = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \overline{\lambda} \\ \overline{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a}\overline{\lambda} + \overline{c}\overline{\mu} \\ \overline{b}\overline{\lambda} + \overline{d}\overline{\mu} \end{bmatrix} \\
&= \left(\overline{a}\overline{\lambda} + \overline{c}\overline{\mu}, \overline{b}\overline{\lambda} + \overline{d}\overline{\mu}\right) = \left(\overline{a}\overline{\lambda} + \overline{c}\overline{\mu}\right)\overline{F}_{\overline{u}_1} + \left(\overline{b}\overline{\lambda} + \overline{d}\overline{\mu}\right)\overline{F}_{\overline{u}_2}
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 4.4.4.

$$\begin{aligned}
\overline{F} \quad &: \quad \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2 \longrightarrow \overline{F}\left(\overline{U}\right) = \overline{M} \subset \mathbf{D}^3 \\
\left(\overline{u}_1, \overline{u}_2\right) \quad &\longrightarrow \quad \overline{F}\left(\overline{u}_1, \overline{u}_2\right) = \left(\overline{r}\cos\overline{u}_2\cos\overline{u}_1, \overline{r}\cos\overline{u}_2\sin\overline{u}_1, \overline{r}\sin\overline{u}_2\right)
\end{aligned}$$

parametrizasyonu ile verilen $\overline{M}$ dual yüzeyinin şekil operatörünün matris formunu elde edelim.

$$\begin{aligned}
\overline{F}\left(\overline{u}_1, \overline{u}_2\right) &= \left(\overline{r}\cos\overline{u}_2\cos\overline{u}_1, \overline{r}\cos\overline{u}_2\sin\overline{u}_1, \overline{r}\sin\overline{u}_2\right) \\
&= \left(r\cos u_2\cos u_1, r\cos u_2\sin u_1, r\sin u_2\right) \\
&\quad + \varepsilon\begin{pmatrix} u_1^*\left(-r\cos u_2\sin u_1, r\cos u_2\cos u_1, 0\right) \\ +u_2^*\left(-r\sin u_2\cos u_1, -r\sin u_2\sin u_1, r\cos u_2\right) \\ +\left(r^*\cos u_2\cos u_1, r^*\cos u_2\sin u_1, r^*\sin u_2\right) \end{pmatrix} \\
&= F\left(u_1, u_2\right) + \varepsilon\left(u_1^* F_{u_1} + u_2^* F_{u_2} + \widetilde{F}\left(u_1, u_2\right)\right)
\end{aligned}$$

olmak üzere, $\overline{F}\left(\overline{u}_1, \overline{u}_2\right)$ fonksiyonunun $\overline{u}_1$ ve $\overline{u}_2$ dual değişkenlere göre kısmi türevleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{\overline{u}_1} &= F_{u_1} + \varepsilon\left(u_1^* F_{u_1u_1} + u_2^* F_{u_2u_1} + \widetilde{F}_{u_1}\right) \\
&= \left(-r\cos u_2\sin u_1, r\cos u_2\cos u_1, 0\right) \\
&\quad + \varepsilon\begin{pmatrix} u_1^*\left(-r\cos u_2\cos u_1, -r\cos u_2\sin u_1, 0\right) \\ +u_2^*\left(r\sin u_2\sin u_1, -r\sin u_2\cos u_1, 0\right) \\ +\left(-r^*\cos u_2\sin u_1, r^*\cos u_2\cos u_1, 0\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{\overline{u}_2} &= F_{u_2}+\varepsilon\left(u_1^* F_{u_1 u_2}+u_2^* F_{u_2 u_2}+\widetilde{F}_{u_2}\right) \\
&= \left(-r\sin u_2\cos u_1,-r\sin u_2\sin u_1,r\cos u_2\right) \\
&\quad +\varepsilon\begin{pmatrix} u_1^*\left(r\sin u_2\sin u_1,-r\sin u_2\cos u_1,0\right) \\ +u_2^*\left(-r\cos u_2\cos u_1,-r\cos u_2\sin u_1,-r\sin u_2\right) \\ +\left(-r^*\sin u_2\cos u_1,-r^*\sin u_2\sin u_1,r^*\cos u_2\right)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\overline{M}$ dual yüzeyinin birim dual normal vektör alanı

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\overline{Z}}\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right) &= \frac{F_{u_1}\times F_{u_2}}{\|F_{u_1}\times F_{u_2}\|}+\varepsilon\begin{pmatrix} u_1^*\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{F_{u_1}\times F_{u_2}}{\|F_{u_1}\times F_{u_2}\|}\right) \\ +u_2^*\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{F_{u_1}\times F_{u_2}}{\|F_{u_1}\times F_{u_2}\|}\right)\end{pmatrix} \\
&\quad +\varepsilon\begin{pmatrix} \frac{\left(F_{u_1}\times\widetilde{F}_{u_2}+\widetilde{F}_{u_1}\times F_{u_2}\right)}{\|F_{u_1}\times F_{u_2}\|} \\ -\left(F_{u_1}\times F_{u_2}\right)\frac{\left\langle F_{u_1}\times F_{u_2},F_{u_1}\times\widetilde{F}_{u_2}+\widetilde{F}_{u_1}\times F_{u_2}\right\rangle}{\|F_{u_1}\times F_{u_2}\|^3}\end{pmatrix} \\
&= \overrightarrow{Z}\left(u_1,u_2\right)+\varepsilon\left(u_1^*\frac{\partial\overrightarrow{Z}}{\partial u_1}+u_2^*\frac{\partial\overrightarrow{Z}}{\partial u_2}+\overrightarrow{\widetilde{Z}}\left(u_1,u_2\right)\right)
\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre,

$$F_{u_1}\times F_{u_2}=\left(r^2\cos^2 u_2\cos u_1,r^2\cos^2 u_2\sin u_1,r^2\cos u_2\sin u_2\right)$$

biçiminde olup

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{Z}\left(u_1,u_2\right) &= \frac{F_{u_1}\times F_{u_2}}{\|F_{u_1}\times F_{u_2}\|} \\
&= \left(\cos u_2\cos u_1,\cos u_2\sin u_1,\sin u_2\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca,

$$F_{u_1}\times\widetilde{F}_{u_2}=\left(rr^*\cos^2 u_2\cos u_1,rr^*\cos^2 u_2\sin u_1,rr^*\cos u_2\sin u_2\right)$$

ve

$$\widetilde{F}_{u_1}\times F_{u_2}=\left(rr^*\cos^2 u_2\cos u_1,rr^*\cos^2 u_2\sin u_1,rr^*\cos u_2\sin u_2\right)$$

olmak üzere,

$$\frac{F_{u_1}\times\widetilde{F}_{u_2}+\widetilde{F}_{u_1}\times F_{u_2}}{\|F_{u_1}\times F_{u_2}\|}=\left(\frac{2r^*}{r}\cos u_2\cos u_1,\frac{2r^*}{r}\cos u_2\sin u_1,\frac{2r^*}{r}\sin u_2\right)$$

ve

$$\begin{aligned}&\frac{F_{u_1}\times F_{u_2}}{\|F_{u_1}\times F_{u_2}\|}\left\langle\frac{F_{u_1}\times F_{u_2}}{\|F_{u_1}\times F_{u_2}\|},\frac{F_{u_1}\times\widetilde{F}_{u_2}+\widetilde{F}_{u_1}\times F_{u_2}}{\|F_{u_1}\times F_{u_2}\|}\right\rangle\\=&\left(\frac{2r^*}{r}\cos u_2\cos u_1,\frac{2r^*}{r}\cos u_2\sin u_1,\frac{2r^*}{r}\sin u_2\right)\end{aligned}$$

bulunur. O halde, $\overline{M}$ dual yüzeyinin birim dual normal vektör alanı

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\overline{Z}}(\overline{u}_1,\overline{u}_2)&=(\cos u_2\cos u_1,\cos u_2\sin u_1,\sin u_2)\\&+\varepsilon\begin{pmatrix}u_1^*(-\cos u_2\sin u_1,\cos u_2\cos u_1,0)\\+u_2^*(-\sin u_2\cos u_1,-\sin u_2\sin u_1,\cos u_2)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. $\overrightarrow{\overline{Z}}(\overline{u}_1,\overline{u}_2)$ dual vektör alanının $\overline{u}_1$ ve $\overline{u}_2$ dual değişkenlere göre kısmi türevleri sırasıyla

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\overline{Z}}_{\overline{u}_1}&=\frac{\partial\overrightarrow{\overline{Z}}}{\partial\overline{u}_1}\\&=(-\cos u_2\sin u_1,\cos u_2\cos u_1,0)\\&+\varepsilon\begin{pmatrix}u_1^*(-\cos u_2\cos u_1,-\cos u_2\sin u_1,0)\\+u_2^*(\sin u_2\sin u_1,-\sin u_2\cos u_1,0)\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{4.4.2}$$

ve

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\overline{Z}}_{\overline{u}_2}&=\frac{\partial\overrightarrow{\overline{Z}}}{\partial\overline{u}_2}\\&=(-\sin u_2\cos u_1,-\sin u_2\sin u_1,\cos u_2)\\&+\varepsilon\begin{pmatrix}u_1^*(\sin u_2\sin u_1,-\sin u_2\cos u_1,0)\\+u_2^*(-\cos u_2\cos u_1,-\cos u_2\sin u_1,-\sin u_2)\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{4.4.3}$$

biçiminde bulunur. Bu durumda, yukarıda elde ettiğimiz bilgileri kullanarak orijin merkezli $\overline{r}$ dual yarıçaplı kürenin şekil operatörü ve dual yüzeyin $\overrightarrow{\overline{Z}}$ birim dual normal vektör alanının $\overline{u}_1$ ve $\overline{u}_2$ dual değişkenlere göre kısmi türevleri sırasıyla aşağıdaki gibi olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{S} \quad &: \quad \chi\left(\overline{M}\right) \longrightarrow \chi\left(\overline{M}\right) \\
\overline{F}_{\overline{u}_1} \quad &\longrightarrow \quad \overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_1}\right) = \overline{D}_{\overline{F}_{\overline{u}_1}} \overrightarrow{\overline{Z}} = \overrightarrow{\overline{Z}}_{\overline{u}_1}, \\
\overline{F}_{\overline{u}_2} \quad &\longrightarrow \quad \overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_2}\right) = \overline{D}_{\overline{F}_{\overline{u}_2}} \overrightarrow{\overline{Z}} = \overrightarrow{\overline{Z}}_{\overline{u}_2},
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\overline{Z}}_{\overline{u}_1} = \overrightarrow{Z}_{u_1} + \varepsilon\left(u_1^* \overrightarrow{Z}_{u_1 u_1} + u_2^* \overrightarrow{Z}_{u_2 u_1} + \overrightarrow{\widetilde{Z}}_{u_1}\right) = \overline{a}\overline{F}_{\overline{u}_1} + \overline{b}\overline{F}_{\overline{u}_2} = \begin{bmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{bmatrix}$$

ve

$$\overrightarrow{\overline{Z}}_{\overline{u}_2} = \overrightarrow{Z}_{u_2} + \varepsilon\left(u_1^* \overrightarrow{Z}_{u_1 u_2} + u_2^* \overrightarrow{Z}_{u_2 u_2} + \overrightarrow{\widetilde{Z}}_{u_2}\right) = \overline{c}\overline{F}_{\overline{u}_1} + \overline{d}\overline{F}_{\overline{u}_2} = \begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ dual değerlerinin var olduğunu biliyoruz. Şimdi, bu dual değerleri belirleyelim ve bu değerler yardımıyla dual kürenin şekil operatörünü bulalım. (4.4.2) ve (4.4.3) eşitlikleri göz önüne alındığında

$$\overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_1}\right) = \overrightarrow{\overline{Z}}_{\overline{u}_1} = \left(\frac{1}{r} + \varepsilon\left(-\frac{r^*}{r^2}\right)\right)\overline{F}_{\overline{u}_1} + (0 + 0\varepsilon)\overline{F}_{\overline{u}_2}$$

ve

$$\overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_2}\right) = \overrightarrow{\overline{Z}}_{\overline{u}_2} = (0 + 0\varepsilon)\overline{F}_{\overline{u}_1} + \left(\frac{1}{r} + \varepsilon\left(-\frac{r^*}{r^2}\right)\right)\overline{F}_{\overline{u}_2}$$

biçiminde olup

$$\begin{aligned}
\overline{a} &= \frac{1}{r} + \varepsilon\left(-\frac{r^*}{r^2}\right), \\
\overline{b} &= 0 + 0\varepsilon, \\
\overline{c} &= 0 + 0\varepsilon, \\
\overline{d} &= \frac{1}{r} + \varepsilon\left(-\frac{r^*}{r^2}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned}
\overline{S} \quad &: \quad \chi\left(\overline{M}\right) \longrightarrow \chi\left(\overline{M}\right) \\
\overline{X} \quad &\longrightarrow \quad \overline{S}\left(\overline{X}\right) = \overline{\Omega}.\overline{X}
\end{aligned}$$

dönüşümü bir lineer dönüşüm olmak üzere, $\overline{M}$ dual yüzeyinin $\overline{S}$ dual şekil operatörünün matris formu

$$\overline{\Omega}=\begin{bmatrix}\overline{a} & \overline{c}\\ \overline{b} & \overline{d}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{r}+\varepsilon\left(-\frac{r^{*}}{r^{2}}\right) & 0+0\varepsilon\\ 0+0\varepsilon & \frac{1}{r}+\varepsilon\left(-\frac{r^{*}}{r^{2}}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\overline{r}} & \overline{0}\\ \overline{0} & \frac{1}{\overline{r}}\end{bmatrix}$$

dir.

Örnek 4.4.5.

$$\begin{aligned}\overline{F}\quad &:\quad \overline{U}\subseteq \mathbf{D}^{2}\longrightarrow \overline{F}\left(\overline{U}\right)=\overline{M}\subset \mathbf{D}^{3}\\ (\overline{u}_1,\overline{u}_2)\quad &\longrightarrow\quad \overline{F}\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right)=\left(\overline{r}\cos\overline{u}_1,\overline{r}\sin\overline{u}_1,\overline{u}_2\right)\end{aligned}$$

parametrizasyonuyla verilen $\overline{M}$ dual yüzeyinin şekil operatörünün matris formunu elde edelim.

$$\begin{aligned}\overline{F}\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right) &= \left(\overline{r}\cos\overline{u}_1,\overline{r}\sin\overline{u}_1,\overline{u}_2\right)\\ &= \left(r\cos u_1, r\sin u_1, u_2\right)\\ &\quad +\varepsilon\begin{pmatrix} u_1^{*}\left(-r\sin u_1, r\cos u_1, 0\right)+u_2^{*}\left(0,0,1\right)\\ +\left(r^{*}\cos u_1, r^{*}\sin u_1, 0\right)\end{pmatrix}\\ &= F\left(u_1,u_2\right)+\varepsilon\left(u_1^{*}F_{u_1}+u_2^{*}F_{u_2}+\widetilde{F}\left(u_1,u_2\right)\right)\end{aligned}$$

olmak üzere, $\overline{F}\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right)$ fonksiyonunun $\overline{u}_1$ ve $\overline{u}_2$ dual değişkenlere göre kısmi türevleri sırasıyla

$$\begin{aligned}\overline{F}_{\overline{u}_1} &= \left(-r\sin u_1, r\cos u_1, 0\right)+\varepsilon\begin{pmatrix} u_1^{*}\left(-r\cos u_1,-r\sin u_1,0\right)\\ +u_2^{*}\left(0,0,0\right)+\left(-r^{*}\sin u_1, r^{*}\cos u_1, 0\right)\end{pmatrix}\\ &= F_{u_1}+\varepsilon\left(u_1^{*}F_{u_1u_1}+u_2^{*}F_{u_2u_1}+\widetilde{F}_{u_1}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\overline{F}_{\overline{u}_2} &= \left(0,0,1\right)+\varepsilon\left(u_1^{*}\left(0,0,0\right)+u_2^{*}\left(0,0,0\right)\right)\\ &= F_{u_2}+\varepsilon\left(u_1^{*}F_{u_1u_2}+u_2^{*}F_{u_2u_2}+\widetilde{F}_{u_2}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $\overline{M}$ dual yüzeyinin birim dual normal vektör alanı

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\overline{Z}}\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right) &= \frac{F_{u_1}\times F_{u_2}}{\left\|F_{u_1}\times F_{u_2}\right\|}+\varepsilon\left(u_1^*\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{F_{u_1}\times F_{u_2}}{\left\|F_{u_1}\times F_{u_2}\right\|}\right)+u_2^*\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{F_{u_1}\times F_{u_2}}{\left\|F_{u_1}\times F_{u_2}\right\|}\right)\right) \\
&\quad+\varepsilon\left(\begin{array}{c} \frac{\left(F_{u_1}\times \widetilde{F}_{u_2}+\widetilde{F}_{u_1}\times F_{u_2}\right)}{\left\|F_{u_1}\times F_{u_2}\right\|} \\ -\left(F_{u_1}\times F_{u_2}\right)\frac{\left\langle F_{u_1}\times F_{u_2},F_{u_1}\times \widetilde{F}_{u_2}+\widetilde{F}_{u_1}\times F_{u_2}\right\rangle}{\left\|F_{u_1}\times F_{u_2}\right\|^3}\end{array}\right) \\
&= \overrightarrow{Z}\left(u_1,u_2\right)+\varepsilon\left(u_1^*\frac{\partial \overrightarrow{Z}}{\partial u_1}+u_2^*\frac{\partial \overrightarrow{Z}}{\partial u_2}+\overrightarrow{\widetilde{Z}}\left(u_1,u_2\right)\right)
\end{aligned}
$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre,

$$
F_{u_1}\times F_{u_2}=\left(r\cos u_1, r\sin u_1, 0\right)
$$

olduğundan

$$
\overrightarrow{Z}\left(u_1,u_2\right)=\frac{F_{u_1}\times F_{u_2}}{\left\|F_{u_1}\times F_{u_2}\right\|}=\left(\cos u_1,\sin u_1,0\right)
$$

bulunur. Diğer yandan,

$$
F_{u_1}\times \widetilde{F}_{u_2}=(0,0,0)
$$

ve

$$
\widetilde{F}_{u_1}\times F_{u_2}=\left(r^*\cos u_1, r^*\sin u_1, 0\right)
$$

olmak üzere,

$$
\frac{\left(F_{u_1}\times \widetilde{F}_{u_2}+\widetilde{F}_{u_1}\times F_{u_2}\right)}{\left\|F_{u_1}\times F_{u_2}\right\|}=\frac{r^*}{r}\left(\cos u_1,\sin u_1,0\right)
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\frac{F_{u_1}\times F_{u_2}}{\left\|F_{u_1}\times F_{u_2}\right\|}\left\langle\frac{F_{u_1}\times F_{u_2}}{\left\|F_{u_1}\times F_{u_2}\right\|},\frac{F_{u_1}\times \widetilde{F}_{u_2}+\widetilde{F}_{u_1}\times F_{u_2}}{\left\|F_{u_1}\times F_{u_2}\right\|}\right\rangle \\
&= \frac{r^*}{r}\left(\cos u_1,\sin u_1,0\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buna göre, $\overline{M}$ dual yüzeyinin birim dual normal vektör alanı

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\overline{Z}}\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right) &= \overrightarrow{Z}\left(u_1,u_2\right)+\varepsilon\left(u_1^*\frac{\partial \overrightarrow{Z}}{\partial u_1}+u_2^*\frac{\partial \overrightarrow{Z}}{\partial u_2}+\overrightarrow{\widetilde{Z}}\left(u_1,u_2\right)\right) \\
&= \left(\cos u_1,\sin u_1,0\right)+\varepsilon\left(u_1^*\left(-\sin u_1,\cos u_1,0\right)+u_2^*(0,0,0)\right)
\end{aligned}
$$

dir. $\overrightarrow{\overline{Z}}\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right)$ dual vektör alanının $\overline{u}_1$ ve $\overline{u}_2$ dual değişkenlere göre kısmi türevleri sırasıyla

$$\overrightarrow{\overline{Z}}_{\overline{u}_1} = \frac{\partial \overrightarrow{\overline{Z}}}{\partial \overline{u}_1} = \left(-\sin u_1, \cos u_1, 0\right) + \varepsilon \left(u_1^* \left(-\cos u_1, -\sin u_1, 0\right) + u_2^* \left(0,0,0\right)\right) \quad (4.4.4)$$

ve

$$\overrightarrow{\overline{Z}}_{\overline{u}_2} = \frac{\partial \overrightarrow{\overline{Z}}}{\partial \overline{u}_2} = \left(0,0,0\right) + \varepsilon \left(u_1^* \left(0,0,0\right) + u_2^* \left(0,0,0\right)\right) \quad (4.4.5)$$

şeklindedir. O halde,

$$\begin{array}{rcl} \overline{S} & : & \chi\left(\overline{M}\right) \longrightarrow \chi\left(\overline{M}\right) \\ \overline{F}_{\overline{u}_1} & \longrightarrow & \overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_1}\right) = \overline{D}_{\overline{F}_{\overline{u}_1}} \overrightarrow{\overline{Z}} = \overrightarrow{\overline{Z}}_{\overline{u}_1}, \\ \overline{F}_{\overline{u}_2} & \longrightarrow & \overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_2}\right) = \overline{D}_{\overline{F}_{\overline{u}_2}} \overrightarrow{\overline{Z}} = \overrightarrow{\overline{Z}}_{\overline{u}_2}, \end{array}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\overline{Z}}_{\overline{u}_1} &= \overrightarrow{Z}_{u_1} + \varepsilon \left(u_1^* \overrightarrow{Z}_{u_1 u_1} + u_2^* \overrightarrow{Z}_{u_2 u_1} + \overrightarrow{\widetilde{Z}}_{u_1}\right) \\ &= \overline{a}\overline{F}_{\overline{u}_1} + \overline{b}\overline{F}_{\overline{u}_2} = \begin{bmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\overline{Z}}_{\overline{u}_2} &= \overrightarrow{Z}_{u_2} + \varepsilon \left(u_1^* \overrightarrow{Z}_{u_1 u_2} + u_2^* \overrightarrow{Z}_{u_2 u_2} + \overrightarrow{\widetilde{Z}}_{u_2}\right) \\ &= \overline{c}\overline{F}_{\overline{u}_1} + \overline{d}\overline{F}_{\overline{u}_2} = \begin{bmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olacak şekilde $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ ve $\overline{d}$ dual değerlerinin var olduğunu biliyoruz. Şimdi, bu dual değerleri belirleyelim ve bu değerler yardımıyla şekil operatörünü hesaplayalım. $(4.4.4)$ ve $(4.4.5)$ eşitlikleri göz önüne alındığında

$$\overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_1}\right) = \overrightarrow{\overline{Z}}_{\overline{u}_1} = \left(\frac{1}{r} + \varepsilon\left(-\frac{r^*}{r^2}\right)\right)\overline{F}_{\overline{u}_1} + \left(0 + 0\varepsilon\right)\overline{F}_{\overline{u}_2}$$

ve

$$\overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_2}\right) = \overrightarrow{\overline{Z}}_{\overline{u}_2} = \left(0 + 0\varepsilon\right)\overline{F}_{\overline{u}_1} + \left(0 + 0\varepsilon\right)\overline{F}_{\overline{u}_2}$$

biçiminde olup

$$\begin{aligned}
\overline{a} &= \frac{1}{r}+\varepsilon\left(-\frac{r^*}{r^2}\right),\\
\overline{b} &= 0+0\varepsilon,\\
\overline{c} &= 0+0\varepsilon,\\
\overline{d} &= 0+0\varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\overline{S} &: \chi\left(\overline{M}\right) \longrightarrow \chi\left(\overline{M}\right)\\
\overrightarrow{\overline{X}} &\longrightarrow \overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}\right)=\overline{\Omega}.\overrightarrow{\overline{X}}
\end{aligned}$$

olmak üzere, $\overline{S}$ şekil operatörünün dual matris formu

$$\overline{\Omega}=\begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{r}+\varepsilon\left(-\frac{r^*}{r^2}\right) & 0+0\varepsilon \\ 0+0\varepsilon & 0+0\varepsilon \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\overline{r}} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

Örnek 4.4.6. $\overline{M}=\left\{(\overline{x},\overline{y},\overline{z})\in\mathbf{D}^3 \mid \overline{ax}+\overline{by}+\overline{cz}+\overline{d}=\overline{0}\right\}$ dual düzleminin şekil operatörünü belirleyelim. Burada, $\overline{a}=a+\varepsilon a^*$, $\overline{b}=b+\varepsilon b^*$, $\overline{c}=c+\varepsilon c^*$, $\overline{d}=d+\varepsilon d^*\in\mathbf{D}$ olmak üzere; a,b ve c reel sayılarından en az biri sıfırdan farklıdır.

Öncelikle, bu dual düzlemin birim dual normal vektör alanını bulalım. $\overline{X}=(\overline{x}_1,\overline{y}_1,\overline{z}_1)$ ve $\overline{Y}=(\overline{x}_2,\overline{y}_2,\overline{z}_2)$ bu dual düzlem üzerinde iki nokta olsun. O halde, bu iki nokta düzlemin denklemini sağlar. Yani,

$$\overline{ax}_1+\overline{by}_1+\overline{cz}_1+\overline{d}=\overline{0} \text{ ve } \overline{ax}_2+\overline{by}_2+\overline{cz}_2+\overline{d}=\overline{0}$$

eşitlikleri mevcuttur. Bu eşitlikler düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\overline{ax}_1+\overline{by}_1+\overline{cz}_1+\overline{d} &= ax_1+by_1+cz_1+d\\
&\quad+\varepsilon\begin{pmatrix} x_1^*\frac{\partial(ax_1+by_1+cz_1+d)}{\partial x_1}+y_1^*\frac{\partial(ax_1+by_1+cz_1+d)}{\partial y_1}\\ +z_1^*\frac{\partial(ax_1+by_1+cz_1+d)}{\partial z_1}\\ +a^*x_1+b^*y_1+c^*z_1+d^* \end{pmatrix}\\
&= 0+0\varepsilon
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\overline{a}\overline{x}_2+\overline{b}\overline{y}_2+\overline{c}\overline{z}_2+\overline{d} &= ax_2+by_2+cz_2+d \\
&\quad +\varepsilon\begin{pmatrix} x_2^*\frac{\partial(ax_2+by_2+cz_2+d)}{\partial x_2}+y_2^*\frac{\partial(ax_2+by_2+cz_2+d)}{\partial y_2} \\ +z_2^*\frac{\partial(ax_2+by_2+cz_2+d)}{\partial z_2} \\ +a^*x_2+b^*y_2+c^*z_2+d^* \end{pmatrix} \\
&= 0+0\varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur. Bu iki denklem eşitlenirse

$$\overline{a}\overline{x}_1+\overline{b}\overline{y}_1+\overline{c}\overline{z}_1+\overline{d}=\overline{a}\overline{x}_2+\overline{b}\overline{y}_2+\overline{c}\overline{z}_2+\overline{d}=\overline{0}$$

olup bu ifade genişletilirse

$$\begin{aligned}
& a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2)+c(z_1-z_2) \\
& +\varepsilon\begin{pmatrix} a(x_1^*-x_2^*)+b(y_1^*-y_2^*)+c(z_1^*-z_2^*) \\ +a^*(x_1-x_2)+b^*(y_1-y_2)+c^*(z_1-z_2) \end{pmatrix} \\
= \;& 0+0\varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. $\overrightarrow{\overline{Z}}=(\overline{Z}_1,\overline{Z}_2,\overline{Z}_3)=(Z_1,Z_2,Z_3)+\varepsilon(Z_1^0,Z_2^0,Z_3^0)=\overrightarrow{Z}+\varepsilon\overrightarrow{Z}^0$ bu düzlemin dual normal vektör alanı olmak üzere, $\left\langle \overrightarrow{\overline{YX}},\overrightarrow{\overline{Z}}\right\rangle_{\mathbf{D}}=\overline{0}$ olmalıdır. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\overline{YX}},\overrightarrow{\overline{Z}}\right\rangle_{\mathbf{D}} &= \left\langle(\overline{x}_1-\overline{x}_2,\overline{y}_1-\overline{y}_2,\overline{z}_1-\overline{z}_2),(\overline{Z}_1,\overline{Z}_2,\overline{Z}_3)\right\rangle_{\mathbf{D}} \\
&= \left\langle \begin{matrix} (x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)+\varepsilon(x_1^*-x_2^*,y_1^*-y_2^*,z_1^*-z_2^*) \\ ,(Z_1,Z_2,Z_3)+\varepsilon(Z_1^0,Z_2^0,Z_3^0) \end{matrix}\right\rangle_{\mathbf{D}} \\
&= (x_1-x_2)Z_1+(y_1-y_2)Z_2+(z_1-z_2)Z_3 \\
&\quad +\varepsilon\begin{pmatrix} (x_1^*-x_2^*)Z_1+(y_1^*-y_2^*)Z_2+(z_1^*-z_2^*)Z_3 \\ +(x_1-x_2)Z_1^0+(y_1-y_2)Z_2^0+(z_1-z_2)Z_3^0 \end{pmatrix} \\
&= 0+0\varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki bilgilerden

$$\overrightarrow{\overline{Z}}=(\overline{Z}_1,\overline{Z}_2,\overline{Z}_3)=(Z_1,Z_2,Z_3)+\varepsilon(Z_1^0,Z_2^0,Z_3^0)=\overrightarrow{Z}+\varepsilon\overrightarrow{Z}^0=(a,b,c)+\varepsilon(a^*,b^*,c^*)$$

elde edilir. O halde, bu düzlemin birim dual normal vektör alanı

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\overrightarrow{N}} &= \frac{\overrightarrow{\overrightarrow{Z}}}{\left\|\overrightarrow{\overrightarrow{Z}}\right\|_{\mathbf{D}}} = \frac{\overrightarrow{Z}}{\left\|\overrightarrow{Z}\right\|} + \varepsilon \left(\frac{\overrightarrow{Z}^{0}}{\left\|\overrightarrow{Z}\right\|} - \overrightarrow{Z} \frac{\left\langle \overrightarrow{Z}, \overrightarrow{Z}^{0} \right\rangle}{\left\|\overrightarrow{Z}\right\|^{3}} \right) \\
&= \frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \varepsilon \left(\frac{(a^*,b^*,c^*)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} - (a,b,c) \frac{(aa^*+bb^*+cc^*)}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\
&= \overrightarrow{N} + \varepsilon \overrightarrow{N}^{0}
\end{aligned}
$$

biçiminde elde edilir. $\forall \overrightarrow{\overrightarrow{X}} = \overrightarrow{X} + \varepsilon \overrightarrow{X}^{*} \in \chi\left(\overline{M}\right)$ için

$$
\begin{aligned}
\overline{S}\left(\overrightarrow{\overrightarrow{X}}\right) &= \overline{D}_{\overrightarrow{\overrightarrow{X}}} \overrightarrow{\overrightarrow{N}} \\
&= D_{\overrightarrow{X}} \overrightarrow{N} + \varepsilon \left(D_{\overrightarrow{X}} \overrightarrow{N}^{0} + D_{\overrightarrow{X}^{*}} \overrightarrow{N} \right) \\
&= D_{\overrightarrow{X}} \overrightarrow{N} + \varepsilon \left(\sum_{j=1}^{3} x_j^{*} \left(D_{\overrightarrow{X}} \overrightarrow{N} \right)_{x_j} + D_{\overrightarrow{X}} \overrightarrow{\widetilde{N}} + D_{\overrightarrow{\widetilde{X}}} \overrightarrow{N} \right)
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Buradan açıkça görülmektedir ki

$$
D_{\overrightarrow{X}} \overrightarrow{N} = D_{\overrightarrow{X}} \overrightarrow{\widetilde{N}} = D_{\overrightarrow{\widetilde{X}}} \overrightarrow{N} = (0,0,0) = \overrightarrow{0}
$$

dır. Bu durumda,

$$
\overline{S}\left(\overrightarrow{\overrightarrow{X}}\right) = \overline{D}_{\overrightarrow{\overrightarrow{X}}} \overrightarrow{\overrightarrow{N}} = \left(\overline{0},\overline{0},\overline{0}\right) = \overrightarrow{\overrightarrow{0}}
$$

elde edilir. Yani, $\forall \overrightarrow{\overrightarrow{X}} \in \chi\left(\overline{M}\right)$ için $\overline{S}\left(\overrightarrow{\overrightarrow{X}}\right) = \overrightarrow{\overrightarrow{0}}$ dir. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
\overline{0} \quad &: \quad \chi\left(\overline{M}\right) \longrightarrow \chi\left(\overline{M}\right) \\
\overrightarrow{\overrightarrow{X}} \quad &\longrightarrow \quad \overline{0}\left(\overrightarrow{\overrightarrow{X}}\right) = \overrightarrow{\overrightarrow{0}}
\end{aligned}
$$

yazmak mümkündür. Bütün bu bilgiler göz önüne alındığında, $\forall \overrightarrow{\overrightarrow{X}} \in \chi\left(\overline{M}\right)$ için $\overline{S}\left(\overrightarrow{\overrightarrow{X}}\right) = \overrightarrow{\overrightarrow{0}} = \overline{0}\left(\overrightarrow{\overrightarrow{X}}\right)$ şeklinde olup fonksiyon eşitliğinden $\overline{S} = \overline{0}$ elde edilir. O halde, $\overline{S}$ dual şekil operatörünün matris formu

$$
\overline{\Omega} = \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}
$$

biçimindedir. Yani, $\mathbf{D}^3$ uzayında dual düzlemin şekil operatörü sıfırdır.

Teorem 4.4.7. $\overline{M}$ bir dual yüzey ve $\forall \overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}, \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$ için

$$\left\langle \overline{S}_{\overline{p}}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right), \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}\right\rangle_{\mathbf{D}} = \left\langle \overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}, \overline{S}_{\overline{p}}\left(\overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}\right)\right\rangle_{\mathbf{D}}$$

eşitliği mevcuttur.

İspat.

$$\begin{array}{cccl} \overline{F} & : & \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2 \longrightarrow \overline{F}\left(\overline{U}\right) \subseteq \overline{M} \subset \mathbf{D}^3 \\ (\overline{u}_1, \overline{u}_2) & \longrightarrow & \overline{F}(\overline{u}_1, \overline{u}_2) = F(u_1, u_2) + \varepsilon\left(u_1^* F_{u_1} + u_2^* F_{u_2} + \widetilde{F}(u_1, u_2)\right) = F + \varepsilon F^0, \end{array}$$

$\overline{M}$ dual yüzeyi için bir parametrizasyon olsun. $\overline{F}(\overline{q}) = \overline{p} \in \overline{M}$ olmak üzere, biliyoruz ki $T_{\overline{p}}\overline{M} = Sp\left\{\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q}), \overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q})\right\}$ dir ve $\forall \overline{p} \in \overline{M}$ için

$$\overline{S}_{\overline{p}} : T_{\overline{p}}\overline{M} \longrightarrow T_{\overline{p}}\overline{M}$$

bir lineer dönüşümdür. Yani; $\overline{S} : \chi\left(\overline{M}\right) \longrightarrow \chi\left(\overline{M}\right)$ bir lineer dönüşümdür. Bir lineer dönüşüm ile ilgili özellikleri baz vektörü üzerinde göstermek yeterlidir. $\overline{F}_{\overline{u}_1}, \overline{F}_{\overline{u}_2} \in \chi\left(\overline{M}\right)$ olduğundan

$$\left\langle \overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_1}\right), \overline{F}_{\overline{u}_2}\right\rangle_{\mathbf{D}} = \left\langle \overline{F}_{\overline{u}_1}, \overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_2}\right)\right\rangle_{\mathbf{D}}$$

eşitliğinin mevcut olduğunu göstermek yeterlidir. Ayrıca,

$$\overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_1}\right) = \overline{D}_{\overline{F}_{\overline{u}_1}} \overrightarrow{\overline{Z}} = \frac{\partial \overrightarrow{\overline{Z}}}{\partial \overline{u}_1}$$

ve

$$\overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_2}\right) = \overline{D}_{\overline{F}_{\overline{u}_2}} \overrightarrow{\overline{Z}} = \frac{\partial \overrightarrow{\overline{Z}}}{\partial \overline{u}_2}$$

olduğunu biliyoruz. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} \left\langle \overline{F}_{\overline{u}_1}, \overrightarrow{\overline{Z}}\right\rangle_{\mathbf{D}} &= \left\langle F_{u_1}, \overrightarrow{Z}\right\rangle + \varepsilon \left(\begin{array}{c} u_1^* \frac{\partial \left\langle \overrightarrow{Z}, F_{u_1}\right\rangle}{\partial u_1} + u_2^* \frac{\partial \left\langle \overrightarrow{Z}, F_{u_1}\right\rangle}{\partial u_2} \\ + \left\langle F_{u_1}, \overrightarrow{\widetilde{Z}}\right\rangle + \left\langle \widetilde{F}_{u_1}, \overrightarrow{Z}\right\rangle \end{array} \right) \\ &= h_1(u_1, u_2) + \varepsilon\left(u_1^* \frac{\partial h_1}{\partial u_1} + u_2^* \frac{\partial h_1}{\partial u_2} + \widetilde{h}_1(u_1, u_2)\right) \qquad (4.4.6) \\ &= 0 + 0\varepsilon \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\left\langle \overline{F}_{\overline{u}_2}, \overrightarrow{\overline{Z}} \right\rangle_{\mathbf{D}} &= \left\langle F_{u_2}, \overrightarrow{Z} \right\rangle + \varepsilon \begin{pmatrix} u_1^* \frac{\partial \left\langle \overrightarrow{Z}, F_{u_2} \right\rangle}{\partial u_1} + u_2^* \frac{\partial \left\langle \overrightarrow{Z}, F_{u_2} \right\rangle}{\partial u_2} \\ + \left\langle F_{u_2}, \overrightarrow{\widetilde{Z}} \right\rangle + \left\langle \widetilde{F}_{u_2}, \overrightarrow{Z} \right\rangle \end{pmatrix} \\
&= h_2(u_1, u_2) + \varepsilon \left(u_1^* \frac{\partial h_2}{\partial u_1} + u_2^* \frac{\partial h_2}{\partial u_2} + \widetilde{h}_2(u_1, u_2) \right) \qquad (4.4.7) \\
&= 0 + 0\varepsilon
\end{aligned}
$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada, $h_1, h_2, \widetilde{h}_1$ ve $\widetilde{h}_2$ $C^{\infty}-$sınıfından fonksiyonlardır. (4.4.6) denkleminin $\overline{u}_2$ dual değişkene göre kısmi türevini ve (4.4.7) denkleminin $\overline{u}_1$ dual değişkene göre kısmi türevini alalım. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \overline{u}_2} \left\langle \overline{F}_{\overline{u}_1}, \overrightarrow{\overline{Z}} \right\rangle_{\mathbf{D}} &= \frac{\partial \left\langle F_{u_1}, \overrightarrow{Z} \right\rangle}{\partial u_2} + \varepsilon \begin{pmatrix} u_1^* \frac{\partial^2 \left\langle \overrightarrow{Z}, F_{u_1} \right\rangle}{\partial u_2 \partial u_1} + u_2^* \frac{\partial^2 \left\langle \overrightarrow{Z}, F_{u_1} \right\rangle}{\partial u_2^2} \\ + \frac{\partial \left\langle F_{u_1}, \overrightarrow{\widetilde{Z}} \right\rangle}{\partial u_2} + \frac{\partial \left\langle \widetilde{F}_{u_1}, \overrightarrow{Z} \right\rangle}{\partial u_2} \end{pmatrix} \\
&= \left\langle \overline{F}_{\overline{u}_1 \overline{u}_2}, \overrightarrow{\overline{Z}} \right\rangle_{\mathbf{D}} + \left\langle \overline{F}_{\overline{u}_1}, \frac{\partial \overrightarrow{\overline{Z}}}{\partial \overline{u}_2} \right\rangle_{\mathbf{D}} \\
&= \overline{0}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} \left\langle \overline{F}_{\overline{u}_2}, \overrightarrow{\overline{Z}} \right\rangle_{\mathbf{D}} &= \frac{\partial \left\langle F_{u_2}, \overrightarrow{Z} \right\rangle}{\partial u_1} + \varepsilon \begin{pmatrix} u_1^* \frac{\partial^2 \left\langle \overrightarrow{Z}, F_{u_2} \right\rangle}{\partial u_1^2} + u_2^* \frac{\partial^2 \left\langle \overrightarrow{Z}, F_{u_2} \right\rangle}{\partial u_1 \partial u_2} \\ + \frac{\partial \left\langle F_{u_2}, \overrightarrow{\widetilde{Z}} \right\rangle}{\partial u_1} + \frac{\partial \left\langle \widetilde{F}_{u_2}, \overrightarrow{Z} \right\rangle}{\partial u_1} \end{pmatrix} \\
&= \left\langle \overline{F}_{\overline{u}_2 \overline{u}_1}, \overrightarrow{\overline{Z}} \right\rangle_{\mathbf{D}} + \left\langle \overline{F}_{\overline{u}_2}, \frac{\partial \overrightarrow{\overline{Z}}}{\partial \overline{u}_1} \right\rangle_{\mathbf{D}} \\
&= \overline{0}
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır. Yani,

$$
\left\langle \overline{F}_{\overline{u}_1}, \frac{\partial \overrightarrow{\overline{Z}}}{\partial \overline{u}_2} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \left\langle \overline{F}_{\overline{u}_1}, \overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_2}\right) \right\rangle_{\mathbf{D}} = -\left\langle \overline{F}_{\overline{u}_1 \overline{u}_2}, \overrightarrow{\overline{Z}} \right\rangle_{\mathbf{D}}
$$

ve

$$
\left\langle \overline{F}_{\overline{u}_2}, \frac{\partial \overrightarrow{\overline{Z}}}{\partial \overline{u}_1} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \left\langle \overline{F}_{\overline{u}_2}, \overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_1}\right) \right\rangle_{\mathbf{D}} = -\left\langle \overline{F}_{\overline{u}_2 \overline{u}_1}, \overrightarrow{\overline{Z}} \right\rangle_{\mathbf{D}}
$$

elde edilir. $\overline{F}_{\overline{u}_1\overline{u}_2}=\overline{F}_{\overline{u}_2\overline{u}_1}$ olduğundan

$$\left\langle \overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_1}\right),\overline{F}_{\overline{u}_2}\right\rangle_{\mathbf{D}}=\left\langle \overline{F}_{\overline{u}_1},\overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_2}\right)\right\rangle_{\mathbf{D}}$$

eşitliği yazılır. Böylece ispat tamamlanır. Ayrıca, $\forall\overrightarrow{\overline{X}},\overrightarrow{\overline{Y}}\in\chi\left(\overline{M}\right)$ için

$$\left\langle \overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}\right),\overrightarrow{\overline{Y}}\right\rangle_{\mathbf{D}}=\left\langle \overrightarrow{\overline{X}},\overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{Y}}\right)\right\rangle_{\mathbf{D}}$$

olduğunu gösterelim. $\overrightarrow{\overline{X}},\overrightarrow{\overline{Y}}\in\chi\left(\overline{M}\right)=Sp\left\{\overline{F}_{\overline{u}_1},\overline{F}_{\overline{u}_2}\right\}$ olduğundan

$$\overrightarrow{\overline{X}}=\overline{a}\overline{F}_{\overline{u}_1}+\overline{b}\overline{F}_{\overline{u}_2}$$

$$\overrightarrow{\overline{Y}}=\overline{c}\overline{F}_{\overline{u}_1}+\overline{d}\overline{F}_{\overline{u}_2}$$

olacak şekilde $\overline{a},\overline{b},\overline{c},\overline{d}\in C\left(\overline{M},\mathbf{D}\right)$ vardır. O halde,

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}\right),\overrightarrow{\overline{Y}}\right\rangle_{\mathbf{D}} &= \left\langle \overline{S}\left(\overline{a}\overline{F}_{\overline{u}_1}+\overline{b}\overline{F}_{\overline{u}_2}\right),\overline{c}\overline{F}_{\overline{u}_1}+\overline{d}\overline{F}_{\overline{u}_2}\right\rangle_{\mathbf{D}}\\
&= \left\langle \overline{a}\overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_1}\right)+\overline{b}\overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_2}\right),\overline{c}\overline{F}_{\overline{u}_1}+\overline{d}\overline{F}_{\overline{u}_2}\right\rangle_{\mathbf{D}}\\
&= \overline{a}\overline{c}\left\langle \overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_1}\right),\overline{F}_{\overline{u}_1}\right\rangle_{\mathbf{D}}+\overline{a}\overline{d}\left\langle \overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_1}\right),\overline{F}_{\overline{u}_2}\right\rangle_{\mathbf{D}}\\
&\quad+\overline{b}\overline{c}\left\langle \overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_2}\right),\overline{F}_{\overline{u}_1}\right\rangle_{\mathbf{D}}+\overline{b}\overline{d}\left\langle \overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_2}\right),\overline{F}_{\overline{u}_2}\right\rangle_{\mathbf{D}}\\
&= \overline{a}\overline{c}\left\langle \overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_1}\right),\overline{F}_{\overline{u}_1}\right\rangle_{\mathbf{D}}+\overline{a}\overline{d}\left\langle \overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_2}\right),\overline{F}_{\overline{u}_1}\right\rangle_{\mathbf{D}}\\
&\quad+\overline{b}\overline{c}\left\langle \overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_1}\right),\overline{F}_{\overline{u}_2}\right\rangle_{\mathbf{D}}+\overline{b}\overline{d}\left\langle \overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_2}\right),\overline{F}_{\overline{u}_2}\right\rangle_{\mathbf{D}}
\end{aligned}$$

şeklinde olup bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}\right),\overrightarrow{\overline{Y}}\right\rangle_{\mathbf{D}} &= \overline{a}\left\langle \overline{c}\overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_1}\right)+\overline{d}\overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_2}\right),\overline{F}_{\overline{u}_1}\right\rangle_{\mathbf{D}}\\
&\quad+\overline{b}\left\langle \overline{c}\overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_1}\right)+\overline{d}\overline{S}\left(\overline{F}_{\overline{u}_2}\right),\overline{F}_{\overline{u}_2}\right\rangle_{\mathbf{D}}\\
&= \left\langle \overline{a}\overline{F}_{\overline{u}_1},\overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{Y}}\right)\right\rangle_{\mathbf{D}}+\left\langle \overline{b}\overline{F}_{\overline{u}_2},\overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{Y}}\right)\right\rangle_{\mathbf{D}}\\
&= \left\langle \overline{a}\overline{F}_{\overline{u}_1}+\overline{b}\overline{F}_{\overline{u}_2},\overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{Y}}\right)\right\rangle_{\mathbf{D}}\\
&= \left\langle \overrightarrow{\overline{X}},\overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{Y}}\right)\right\rangle_{\mathbf{D}}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Tanım 4.4.8. $\overline{M}$ bir dual yüzey olsun. $\forall \overline{p} \in \overline{M}$ ve $\forall \overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}, \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$ için

$$\begin{aligned} \overline{I}_{\overline{p}} \quad &: \quad T_{\overline{p}}\overline{M} \times T_{\overline{p}}\overline{M} \longrightarrow \mathbf{D} \\ \left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}, \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}\right) \quad &\longrightarrow \quad \overline{I}_{\overline{p}}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}, \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}\right) = \left\langle \overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}, \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}} \right\rangle_{\mathbf{D}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}, \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}} \right\rangle_{\mathbf{D}} &= \left\langle \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \overrightarrow{X}^*_{\widetilde{p}}, \overrightarrow{Y}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \overrightarrow{Y}^*_{\widetilde{p}} \right\rangle_{\mathbf{D}} \\ &= \left\langle \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}, \overrightarrow{Y}_{\widetilde{p}} \right\rangle + \varepsilon \left(\left\langle \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}, \overrightarrow{Y}^*_{\widetilde{p}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{X}^*_{\widetilde{p}}, \overrightarrow{Y}_{\widetilde{p}} \right\rangle \right) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $\overline{I}$ dual fonksiyonuna $\overline{M}$ dual yüzeyinin birinci dual esas formu,

$$\begin{aligned} \overline{II} \quad &: \quad T_{\overline{p}}\overline{M} \times T_{\overline{p}}\overline{M} \longrightarrow \mathbf{D} \\ \left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}, \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}\right) \quad &\longrightarrow \quad \overline{II}_{\overline{p}}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}, \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}\right) = \left\langle \overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right), \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}} \right\rangle_{\mathbf{D}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right), \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}} \right\rangle_{\mathbf{D}} &= \left\langle \overline{D}_{\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}} \overrightarrow{\overline{Z}}, \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}} \right\rangle_{\mathbf{D}} \\ &= \left\langle D_{\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}} \overrightarrow{Z} + \varepsilon \left(D_{\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}} \overrightarrow{Z}^0 + D_{\overrightarrow{X}^*_{\widetilde{p}}} \overrightarrow{Z} \right), \overrightarrow{Y}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \overrightarrow{Y}^*_{\widetilde{p}} \right\rangle_{\mathbf{D}} \\ &= \left\langle D_{\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}} \overrightarrow{Z}, \overrightarrow{Y}_{\widetilde{p}} \right\rangle \\ &\quad + \varepsilon \left(\left\langle D_{\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}} \overrightarrow{Z}, \overrightarrow{Y}^*_{\widetilde{p}} \right\rangle + \left\langle D_{\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}} \overrightarrow{Z}^0, \overrightarrow{Y}_{\widetilde{p}} \right\rangle + \left\langle D_{\overrightarrow{X}^*_{\widetilde{p}}} \overrightarrow{Z}, \overrightarrow{Y}_{\widetilde{p}} \right\rangle \right) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $\overline{II}$ dual fonksiyonuna $\overline{M}$ dual yüzeyinin ikinci dual esas formu ve

$$\begin{aligned} \overline{S}^2\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right) &= \overline{S}\left(\overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right)\right) \\ &= \overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{W}}_{\overline{p}}\right) \\ &= \overline{D}_{\overrightarrow{\overline{W}}_{\overline{p}}} \overrightarrow{\overline{Z}} = D_{\overrightarrow{W}_{\widetilde{p}}} \overrightarrow{Z} + \varepsilon \left(D_{\overrightarrow{W}_{\widetilde{p}}} \overrightarrow{Z}^0 + D_{\overrightarrow{W}^*_{\widetilde{p}}} \overrightarrow{Z} \right) \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \overline{III} \quad &: \quad T_{\overline{p}}\overline{M} \times T_{\overline{p}}\overline{M} \longrightarrow \mathbf{D} \\ \left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}, \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}\right) \quad &\longrightarrow \quad \overline{III}_{\overline{p}}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}, \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}\right) = \left\langle \overline{S}^2\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right), \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}} \right\rangle_{\mathbf{D}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \overline{S}^2\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right), \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}} \right\rangle_{\mathbf{D}} &= \left\langle D_{\overrightarrow{W}_{\widetilde{p}}} \overrightarrow{Z} + \varepsilon \left(D_{\overrightarrow{W}_{\widetilde{p}}} \overrightarrow{Z}^0 + D_{\overrightarrow{W}^*_{\widetilde{p}}} \overrightarrow{Z} \right), \overrightarrow{Y}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \overrightarrow{Y}^*_{\widetilde{p}} \right\rangle_{\mathbf{D}} \\
&= \left\langle D_{\overrightarrow{W}_{\widetilde{p}}} \overrightarrow{Z}, \overrightarrow{Y}_{\widetilde{p}} \right\rangle \\
&\quad + \varepsilon \left(\left\langle D_{\overrightarrow{W}_{\widetilde{p}}} \overrightarrow{Z}, \overrightarrow{Y}^*_{\widetilde{p}} \right\rangle + \left\langle D_{\overrightarrow{W}_{\widetilde{p}}} \overrightarrow{Z}^0, \overrightarrow{Y}_{\widetilde{p}} \right\rangle + \left\langle D_{\overrightarrow{W}^*_{\widetilde{p}}} \overrightarrow{Z}, \overrightarrow{Y}_{\widetilde{p}} \right\rangle \right)
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlanan $\overline{III}$ dual fonksiyonuna $\overline{M}$ dual yüzeyinin üçüncü dual esas formu adı verilir.

5 . BİR DUAL YÜZEY ÜZERİNDE BAZI ÖZEL EĞRİLER

5.1. Dual Asli (Asal) Eğri

Tanım 5.1.1. $\overline{M}$ bir dual yüzey, $\overline{M}$ yüzeyinin dual şekil operatörü $\overline{S}$, $\overline{p} \in \overline{M}$, $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$ ve $\left\| \overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} \right\|_{\mathbf{D}} = 1 + 0\varepsilon$ olsun. $\overline{k}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right) = \left\langle \overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right), \overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} \right\rangle_{\mathbf{D}}$ dual sayısı $\overline{M}$ dual yüzeyinin $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}$ birim dual tanjant vektörü doğrultusundaki dual normal eğriliği olarak adlandırılır.

Tanım 5.1.2. $\overline{M}$ bir dual yüzey ve $\overline{M}$ yüzeyinin dual şekil operatörü $\overline{S}$ olsun. $\overline{p} \in \overline{M}$, $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \overrightarrow{X}^{*}_{\widetilde{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}, \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} \neq \overrightarrow{0}$ olmak üzere, $\overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right) = \overline{\lambda}.\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}$ eşitliğinden elde edilen $\overline{\lambda}$ değerlerine yani, $\overline{S}$ lineer dönüşümünün karakteristik değerlerine $\overline{M}$ dual yüzeyinin $\overline{p}$ dual noktasındaki asli eğrilikleri, bu dual asli eğriliklere karşılık gelen dual asli vektörlere de bu yüzeyin $\overline{p}$ dual noktasındaki dual asli vektörleri adı verilir.

$$\overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right) = \overline{\Omega}.\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = \overline{\lambda}.\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = \overline{\lambda}\overline{I}_2\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right)$$

$$\overline{\lambda}\overline{I}_2\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right) - \overline{\Omega}.\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = \overline{0}$$

$$\left(\overline{\lambda}\overline{I}_2 - \overline{\Omega}\right).\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = \overline{0} \tag{5.1.1}$$

olmak üzere, $\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} \neq \overrightarrow{0}$ olduğundan dolayı det $\left(\overline{\lambda}\overline{I} - \overline{\Omega}\right) = \overline{0}$ dır.

Şimdi, $(5.1.1)$ denklemi genişletilirse

$$(\lambda I_2 - \Omega).\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} + \varepsilon\left((\lambda I_2 - \Omega).\overrightarrow{X}^{*}_{\widetilde{p}} + (\lambda^{*} I_2 - \Omega^{*}).\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}\right) = 0 + 0\varepsilon$$

şeklinde olup

$$(\lambda I_2 - \Omega).\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} = 0 \text{ ve } (\lambda I_2 - \Omega).\overrightarrow{X}^{*}_{\widetilde{p}} + (\lambda^{*} I_2 - \Omega^{*}).\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} = 0 \tag{5.1.2}$$

elde edilir. Burada, $\overline{\Omega} = \Omega + \varepsilon \Omega^*$ dır.

Örnek 5.1.3.

$$\begin{array}{rcl} \overline{F} & : & \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2 \longrightarrow \overline{F}\left(\overline{U}\right) = \overline{M} \subset \mathbf{D}^3 \\ (\overline{u}_1, \overline{u}_2) & \longrightarrow & \overline{F}(\overline{u}_1, \overline{u}_2) = (\overline{r}\cos\overline{u}_1, \overline{r}\sin\overline{u}_1, \overline{u}_2) \end{array}$$

parametrizasyonuyla verilen $\overline{M}$ dual yüzeyinin herhangi bir $\overline{p} \in \overline{M}$ noktasındaki dual asli eğriliklerini ve bu dual asli eğriliklere karşılık gelen dual asli vektörlerini bulalım. $\overline{M}$ dual yüzeyinin $\overline{S}$ dual şekil operatörünün matris formunun

$$\overline{\Omega} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\overline{r}} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} -\frac{r^*}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \Omega + \varepsilon \Omega^*$$

olduğunu biliyoruz. $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \overrightarrow{X}^*_{\widetilde{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$, $\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} \neq \overrightarrow{0}$ olmak üzere,

$$\overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right) = \overline{\lambda}.\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}$$

denklemindeki $\overline{\lambda} = \lambda + \varepsilon \lambda^*$ dual değerlerini belirleyelim. $\overline{F}(\overline{q}) = \overline{p}$ olmak üzere, $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M} = \left\{\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q}), \overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q})\right\}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} &= \overline{\upsilon}.\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q}) + \overline{\mu}.\overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q}) \\ &= (\overline{\upsilon}, \overline{\mu}) \\ &= (\upsilon + \varepsilon \upsilon^*, \mu + \varepsilon \mu^*) \\ &= (\upsilon, \mu) + \varepsilon (\upsilon^*, \mu^*) \\ &= \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \overrightarrow{X}^*_{\widetilde{p}} \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada, $\overline{\upsilon}, \overline{\mu} \in \mathbf{D}$ dir. $\overline{S}$ dönüşümü $\overline{M}$ dual yüzeyinin şekil operatörü olup bu dönüşüm lineer olduğundan

$$\begin{aligned} \overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right) &= \overline{\Omega}.\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} \\ &= \overline{\lambda}.\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} \\ &= \overline{\lambda} I_2\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right) \end{aligned}$$

yazılabilir ve buradan

$$\left(\overline{\lambda}\overline{I}_2-\overline{\Omega}\right).\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}=\overline{0}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\begin{bmatrix}\lambda-\frac{1}{r} & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\upsilon\\ \mu\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \tag{5.1.3}$$

ve

$$\begin{bmatrix}\lambda-\frac{1}{r} & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\upsilon^*\\ \mu^*\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\lambda^*+\frac{r^*}{r^2} & 0\\ 0 & \lambda^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\upsilon\\ \mu\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \tag{5.1.4}$$

dır. (5.1.3) eşitliğinde $\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}\neq\overrightarrow{0}$ çözümünün olabilmesi için $\det(\lambda I_2-\Omega)=0$ olmalıdır. Bu durumda, $\lambda_1=\frac{1}{r}$ ve $\lambda_2=0$ bulunur.

$i)$ $\lambda_1=\frac{1}{r}$ değerine karşılık gelen vektör için

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{r} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\upsilon\\ \mu\end{bmatrix}=\frac{1}{r}\begin{bmatrix}\upsilon\\ \mu\end{bmatrix}$$

denklemi göz önüne alınırsa $\upsilon=t_1\in\mathbb{R}-\{0\}$ ve $\mu=0$ elde edilir. Elde ettiğimiz değerler (5.1.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix}t_1\left(\lambda_1^*+\frac{r^*}{r^2}\right)\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -\dfrac{\mu^*}{r}\end{bmatrix}$$

şeklinde olup $\lambda_1^*=-\dfrac{r^*}{r^2}$, $\mu^*=0$ ve $\upsilon^*=t_1^*\in\mathbb{R}$ elde edileceği açıktır. Sonuç olarak, $\overline{\lambda}_1=\dfrac{1}{r}-\varepsilon\dfrac{r^*}{r^2}=\dfrac{1}{\overline{r}}$ dual asli eğriliğine karşılık gelen dual asli vektör

$$\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}=(\overline{\upsilon},\overline{\mu})=\overline{\upsilon}\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q})+\overline{\mu}\overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q})=\overline{t}_1\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q})+\overline{0}.\overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q})=\overline{t}_1\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q})$$

biçimindedir.

$ii)$ $\lambda_2=0$ değerine karşılık gelen vektör için

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{r} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\upsilon\\ \mu\end{bmatrix}=0.\begin{bmatrix}\upsilon\\ \mu\end{bmatrix}$$

denklemi göz önüne alınırsa $\upsilon = 0$ ve $\mu = t_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$ elde edilir. Elde ettiğimiz değerler (5.1.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2^* t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\upsilon^*}{r} \\ 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde olup $\lambda_2^* = 0$, $\upsilon^* = 0$ ve $\mu^* = t_2^* \in \mathbb{R}$ elde edilir. Sonuç olarak, $\overline{\lambda}_2 = 0 + 0\varepsilon = \overline{0}$ dual asli eğriliğine karşılık gelen dual asli vektör

$$\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = (\overline{\upsilon}, \overline{\mu}) = \overline{\upsilon} \overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q}) + \overline{\mu} \overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q}) = \overline{0}.\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q}) + \overline{t}_2.\overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q}) = \overline{t}_2 \overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q})$$

şeklindedir.

Örnek 5.1.4.

$$\begin{array}{rcl} \overline{F} & : & \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2 \longrightarrow \overline{F}\left(\overline{U}\right) = \overline{M} \subset \mathbf{D}^3 \\ (\overline{u}_1, \overline{u}_2) & \longrightarrow & \overline{F}(\overline{u}_1, \overline{u}_2) = (\overline{r} \cos \overline{u}_2 \cos \overline{u}_1, \overline{r} \cos \overline{u}_2 \sin \overline{u}_1, \overline{r} \sin \overline{u}_2) \end{array}$$

parametrizasyonuna sahip $\overline{M}$ dual yüzeyinin herhangi bir $\overline{p} \in \overline{M}$ noktasındaki dual asli eğriliklerini ve bu asli eğriliklere karşılık gelen dual asli vektörlerini bulalım.
$\overline{M}$ dual yüzeyinin $\overline{S}$ dual şekil operatörünün matris formunun

$$\overline{\Omega} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\overline{r}} & \overline{0} \\ \overline{0} & \frac{1}{\overline{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} -\frac{r^*}{r^2} & 0 \\ 0 & -\frac{r^*}{r^2} \end{bmatrix} = \Omega + \varepsilon \Omega^*$$

olduğunu biliyoruz. $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \overrightarrow{X}^*_{\widetilde{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$, $\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} \neq \overrightarrow{0}$ olmak üzere, $\overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right) = \overline{\lambda}.\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}$ denklemindeki $\overline{\lambda} = \lambda + \varepsilon \lambda^*$ dual değerlerini belirleyelim. $\overline{F}(\overline{q}) = \overline{p}$ olmak üzere, $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M} = \left\{\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q}), \overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q})\right\}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} &= \overline{\upsilon}.\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q}) + \overline{\mu}.\overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q}) \\ &= (\overline{\upsilon}, \overline{\mu}) \\ &= (\upsilon + \varepsilon \upsilon^*, \mu + \varepsilon \mu^*) \\ &= (\upsilon, \mu) + \varepsilon (\upsilon^*, \mu^*) \\ &= \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \overrightarrow{X}^*_{\widetilde{p}} \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada, $\overline{\upsilon}, \overline{\mu} \in \mathbf{D}$ dir. $\overline{M}$ dual yüzeyinin $\overline{S}$ dual şekil operatörü lineer olduğundan

$$\overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right) = \overline{\Omega}.\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = \overline{\lambda}.\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = \overline{\lambda}\overline{I}_2\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right)$$

yazılabilir ve buradan

$$\left(\overline{\lambda}\overline{I}_2 - \overline{\Omega}\right).\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = \overline{0}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.1.5}$$

ve

$$\begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon^* \\ \mu^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda^* + \frac{r^*}{r^2} & 0 \\ 0 & \lambda^* + \frac{r^*}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.1.6}$$

dır. (5.1.5) eşitliğinde $\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} \neq \overrightarrow{0}$ çözümünün olabilmesi için $\det(\lambda I_2 - \Omega) = 0$ olmalıdır. Bu durumda, $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{r}$ elde edilir.

Şimdi, $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{r}$ değerine karşılık gelen vektör için

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon \\ \mu \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \upsilon \\ \mu \end{bmatrix}$$

denklemi göz önüne alınırsa $\upsilon = t_1 \in \mathbb{R}$ ve $\mu = t_2 \in \mathbb{R}$ elde edilir. Burada, $1 \leq i \leq 2$ için $\exists t_i \neq 0$ dır. Elde ettiğimiz değerler (5.1.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} t_1\left(\lambda^* + \frac{r^*}{r^2}\right) \\ t_2\left(\lambda^* + \frac{r^*}{r^2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup $\lambda^* = -\dfrac{r^*}{r^2}$, $\upsilon^* = t_1^* \in \mathbb{R}$ ve $\mu^* = t_2^* \in \mathbb{R}$ elde edileceği açıktır. Sonuç olarak, $\overline{\lambda} = \dfrac{1}{r} - \varepsilon\dfrac{r^*}{r^2} = \dfrac{1}{\overline{r}}$ dual asli eğriliğine karşılık gelen dual asli vektör

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} &= (\overline{\upsilon}, \overline{\mu}) = \overline{\upsilon}\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q}) + \overline{\mu}\overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q}) \\ &= \overline{t}_1\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q}) + \overline{t}_2\overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q}) \end{aligned}$$

biçimindedir.

Örnek 5.1.5. $\overline{M}=\left\{(\overline{x},\overline{y},\overline{z})\in\mathbf{D}^3 \mid \overline{ax}+\overline{by}+\overline{cz}+\overline{d}=0\right\}$ dual düzleminin herhangi bir $\overline{p}\in\overline{M}$ noktasındaki dual asli eğriliklerini ve bu dual asli eğriliklere karşılık gelen dual asli vektörlerini bulalım.

$\overline{M}$ dual yüzeyinin $\overline{S}$ dual şekil operatörünün matris formunun

$$\overline{\Omega}=\begin{bmatrix}\overline{0} & \overline{0}\\ \overline{0} & \overline{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\Omega+\varepsilon\Omega^*$$

olduğunu biliyoruz. $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}=\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}+\varepsilon\overrightarrow{X}^*_{\widetilde{p}}\in T_{\overline{p}}\overline{M}$, $\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}\neq\overrightarrow{0}$ olmak üzere, $\overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right)=\overline{\lambda}.\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}$ denklemindeki $\overline{\lambda}=\lambda+\varepsilon\lambda^*$ dual değerlerini belirleyelim. $\overline{F}(\overline{q})=\overline{p}$ olmak üzere, $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\in T_{\overline{p}}\overline{M}=\left\{\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q}),\overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q})\right\}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} &= \overline{\upsilon}.\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q})+\overline{\mu}.\overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q})\\ &= (\overline{\upsilon},\overline{\mu})\\ &= (\upsilon+\varepsilon\upsilon^*,\mu+\varepsilon\mu^*)\\ &= (\upsilon,\mu)+\varepsilon(\upsilon^*,\mu^*)\\ &= \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}+\varepsilon\overrightarrow{X}^*_{\widetilde{p}}\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada, $\overline{\upsilon},\overline{\mu}\in\mathbf{D}$ dir. $\overline{M}$ dual yüzeyinin $\overline{S}$ şekil operatörü lineer olduğundan

$$\left(\overline{\lambda}I_2-\overline{\Omega}\right).\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}=\overline{0}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\upsilon\\ \mu\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \tag{5.1.7}$$

ve

$$\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\upsilon^*\\ \mu^*\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\lambda^* & 0\\ 0 & \lambda^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\upsilon\\ \mu\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \tag{5.1.8}$$

dır. (5.1.7) eşitliğinde $\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}\neq\overrightarrow{0}$ çözümünün olabilmesi için $\det(\lambda I_2-\Omega)=0$ olmalıdır. Bu durumda, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ elde edilir.

Şimdi, $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ değerine karşılık gelen vektör için

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon \\ \mu \end{bmatrix} = 0. \begin{bmatrix} \upsilon \\ \mu \end{bmatrix}$$

denklemi göz önüne alınırsa $\upsilon = t_1 \in \mathbb{R}$ ve $\mu = t_2 \in \mathbb{R}$ elde edilir. Burada, $1 \leq i \leq 2$ için $\exists t_i \neq 0$ dır. Elde ettiğimiz değerler $(5.1.8)$ denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} t_1\lambda^* \\ t_2\lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup $\lambda^* = 0$, $\upsilon^* = t_1^* \in \mathbb{R}$ ve $\mu^* = t_2^* \in \mathbb{R}$ elde edileceği açıktır. Sonuç olarak, $\overline{\lambda} = 0 + 0\varepsilon = \overline{0}$ dual asli eğriliğine karşılık gelen dual asli vektör

$$\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = (\overline{\upsilon}, \overline{\mu}) = \overline{\upsilon}\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q}) + \overline{\mu}\overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q}) = \overline{t}_1\overline{F}_{\overline{u}_1}(\overline{q}) + \overline{t}_2\overline{F}_{\overline{u}_2}(\overline{q})$$

biçimindedir.

Tanım 5.1.6. $\overline{M}$, $\mathbf{D}^3$ uzayında bir dual yüzey ve $\overline{\alpha}$, $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. $\overline{\alpha}$ eğrisinin her $\overline{p}$ noktasındaki dual tanjant vektörü $\overline{M}$ dual yüzeyinin $\overline{p}$ noktasındaki dual asli vektörlerinden birine paralel ise $\overline{\alpha}$ eğrisine $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde bir dual asli eğri adı verilir.

Teorem 5.1.7. $\overline{\alpha}$, $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde bir dual asli eğridir.$\Longleftrightarrow$ $\forall \overline{t} \in \overline{I}$ için $\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t})$ vektörü $\overline{S}$ şekil operatörünün $\overline{\alpha}(\overline{t})$ noktasındaki bir karakteristik vektörüdür.

İspat. $\overline{\alpha}$, $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde bir dual asli eğri olsun. Bu durumda; $\overline{\alpha}$ eğrisinin her $\overline{p}$ noktasındaki dual tanjant vektörü $\overline{M}$ dual yüzeyinin $\overline{p}$ noktasındaki dual asli vektörlerinden birine paraleldir. $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \overrightarrow{X}^*_{\widetilde{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$, $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde bir dual asli vektör olmak üzere, herhangi bir $\overline{t} \in \overline{I}$ için $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = \overline{\lambda}.\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t})$ olacak şekilde $\overline{\lambda} \in \mathbf{D}$ vardır.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} &= \overline{\lambda}.\overset{\bullet}{\overline{\alpha}} = (\lambda + \varepsilon\lambda^*)\left(\alpha' + \varepsilon\left(t^*\alpha'' + \widetilde{\alpha}'\right)\right) \\ &= \lambda.\alpha' + \varepsilon\left(t^*\left(\lambda\alpha''\right) + \lambda\widetilde{\alpha}' + \lambda^*\alpha'\right) \\ &= \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} + \varepsilon\overrightarrow{X}^*_{\widetilde{p}} \end{aligned}$$

olmak üzere, $\overrightarrow{X}_{\tilde{p}} \neq \overrightarrow{0}$ olduğundan $\lambda \neq 0$ dır. Diğer yandan, $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$ bir dual asli vektör olduğundan $\overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right) = \overline{k}.\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}$ olacak şekilde $\overline{k} \in \mathbf{D}$ vardır.

$$\overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right) = \overline{k}.\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} \Leftrightarrow \overline{S}\left(\overline{\lambda}.\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}\right) = \overline{k}.\overline{\lambda}.\overset{\bullet}{\overline{\alpha}} \Longleftrightarrow \overline{\lambda}.\overline{S}\left(\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}\right) = \overline{\lambda}.\overline{k}.\overset{\bullet}{\overline{\alpha}} \Longleftrightarrow \overline{S}\left(\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}\right) = \overline{k}.\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}$$

elde edilir. Bu durumda, $\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t}), \overline{S}$ şekil operatörünün $\overline{p} = \overline{\alpha}(\overline{t})$ noktasındaki karakteristik vektörüdür. Yani, $\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t})$ dual tanjant vektörü $\overline{M}$ dual yüzeyinin bir asli vektörüdür. Tersine $\forall \overline{t} \in \overline{I}$ için $\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t})$ vektörü $\overline{S}$ dual şekil operatörünün $\overline{\alpha}(\overline{t})$ noktasındaki bir karakteristik vektörü olsun. Bu durumda, herhangi bir $\overline{t} \in \overline{I}$ için

$$\overline{S}\left(\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t})\right) = \overline{k}.\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t})$$

olacak biçimde $\overline{k} \in \mathbf{D}$ vardır. $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = \overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t})$ denilirse

$$\overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right) = \overline{k}.\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}$$

elde edilir. Yani, $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}$, $\overline{M}$ dual yüzeyinin $\overline{p} = \overline{\alpha}(\overline{t})$ noktasındaki dual asli vektörü ve $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} \setminus\setminus_{\mathbf{D}} \overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t})$ bulunur. O halde; $\overline{\alpha}$, $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde bir dual asli eğridir. $\square$

Teorem 5.1.8. $\overline{M}$, $\mathbf{D}^3$ uzayında bir dual yüzey ve $\overline{\alpha}$, $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. Bu yüzeyin birim dual normal vektör alanı $\overline{Z}$ olmak üzere; $\overline{\alpha}$, $\overline{M}$ dual yüzeyinin bir dual asli eğrisidir. $\Longleftrightarrow \left\{\left(\overrightarrow{\overline{Z}} \circ \overline{\alpha}\right)^{\bullet}, \overset{\bullet}{\overline{\alpha}}\right\}$ cümlesi lineer bağımlıdır.

İspat. $\overline{\alpha}$, $\overline{M}$ dual yüzeyinin bir dual asli eğrisi olsun. O halde, $\forall \overline{t} \in \overline{I}$ için $\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t})$ vektörü $\overline{S}$ dual şekil operatörünün $\overline{\alpha}(\overline{t})$ noktasındaki bir karakteristik vektörüdür. Bu durumda,

$$\overline{S}\left(\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t})\right) = \overline{\lambda}.\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t})$$

olacak şekilde $\overline{\lambda} \in \mathbf{D}$ vardır. Yani, $\forall \overline{t} \in \overline{I}$ için $\left\{\overline{S}\left(\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t})\right), \overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t})\right\}$ cümlesi lineer bağımlıdır. $\overline{S}\left(\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t})\right) = \overline{D}_{\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t})}\overrightarrow{\overline{Z}} = \left(\overrightarrow{\overline{Z}} \circ \overline{\alpha}\right)^{\bullet}(\overline{t})$ olduğundan $\forall \overline{t} \in \overline{I}$ için $\left\{\left(\overrightarrow{\overline{Z}} \circ \overline{\alpha}\right)^{\bullet}(\overline{t}), \overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t})\right\}$ cümlesi lineer bağımlıdır. O halde, $\left\{\left(\overrightarrow{\overline{Z}} \circ \overline{\alpha}\right)^{\bullet}, \overset{\bullet}{\overline{\alpha}}\right\}$ cümlesi lineer bağımlıdır.

Tersine $\left\{\left(\overrightarrow{\overline{Z}} \circ \overline{\alpha}\right)^{\bullet}, \overset{\bullet}{\overline{\alpha}}\right\}$ cümlesi lineer bağımlı olsun. Yani, $\left\{\overline{S}\left(\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}\right), \overset{\bullet}{\overline{\alpha}}\right\}$ cümlesi lineer bağımlıdır. Bu durumda, $\forall \bar{t} \in \bar{I}$ için $\overline{S}\left(\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t})\right) = \overline{\lambda}.\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t})$ olacak şekilde $\overline{\lambda} \in \mathbf{D}$ vardır. $\forall \bar{t} \in \bar{I}$ için $\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t})$ vektörü, $\overline{S}$ lineer dönüşümünün $\overline{\alpha}(\bar{t})$ noktasındaki karakteristik vektörüdür. Yani; $\overline{\alpha}$, $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde bir dual asli eğridir. □

$\overline{\alpha}$, $\overline{M}$ dual yüzeyinin bir dual asli eğrisi olsun. O halde, $\forall \bar{t} \in \bar{I}$ için $\overline{S}\left(\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t})\right) = \overline{\lambda}.\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t})$ olacak şekilde $\overline{\lambda} \in \mathbf{D}$ vardır. Bu durumda,

$$\overline{S}\left(\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t})\right) = \overline{D}_{\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t})}\overrightarrow{\overline{Z}} = \left(\overrightarrow{\overline{Z}} \circ \overline{\alpha}\right)^{\bullet}(\bar{t}) = \overline{\lambda}.\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t})$$

şeklinde olup

$$\left(\overrightarrow{\overline{Z}} \circ \overline{\alpha}\right)^{\bullet}(\bar{t}) - \overline{\lambda}.\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t}) = \overline{0}$$

denklemi elde edilir.

Örnek 5.1.9.

$$\begin{array}{rcl} \overline{F} & : & \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2 \longrightarrow \overline{F}\left(\overline{U}\right) = \overline{M} \subset \mathbf{D}^3 \\ (\overline{u}_1, \overline{u}_2) & \longrightarrow & \overline{F}(\overline{u}_1, \overline{u}_2) = (\bar{r}\cos\overline{u}_2\cos\overline{u}_1, \bar{r}\cos\overline{u}_2\sin\overline{u}_1, \bar{r}\sin\overline{u}_2) \end{array}$$

parametrizasyonuna sahip $\overline{M}$ dual yüzeyi verilsin. $\overline{\alpha}$, $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde dual asli eğri olsun. $\overline{\alpha} : \bar{I} \subseteq \mathbf{D} \longrightarrow \overline{M}$, $\bar{t} \longrightarrow \overline{\alpha}(\bar{t})$ eğrisinin ne tür eğriye karşılık geldiğini bulalım. Bu dual yüzeyin herhangi bir $\overline{p} \in \overline{M}$ noktasındaki asli eğriliklerinin

$$\bar{k}_1 = \bar{k}_2 = \frac{1}{\bar{r}}$$

olduğunu biliyoruz. O halde, $\left(\overrightarrow{\overline{Z}} \circ \overline{\alpha}\right)^{\bullet} - \frac{1}{\bar{r}}\overset{\bullet}{\overline{\alpha}} = \overline{0}$ diferensiyel denklemi mevcuttur. Şimdi, $\overline{M}$ dual yüzeyinin $\overline{F}$ parametrizasyonunu genişletelim. O halde,

$$\begin{aligned} \overline{F}(\overline{u}_1, \overline{u}_2) &= (\bar{r}\cos\overline{u}_2\cos\overline{u}_1, \bar{r}\cos\overline{u}_2\sin\overline{u}_1, \bar{r}\sin\overline{u}_2) \\ &= (r\cos u_2\cos u_1, r\cos u_2\sin u_1, r\sin u_2) \\ &\quad +\varepsilon\left(\begin{array}{c} u_1^*(-r\cos u_2\sin u_1, r\cos u_2\cos u_1, 0) \\ +u_2^*(-r\sin u_2\cos u_1, -r\sin u_2\sin u_1, r\cos u_2) \\ +(r^*\cos u_2\cos u_1, r^*\cos u_2\sin u_1, r^*\sin u_2) \end{array}\right) \\ &= F(u_1, u_2) + \varepsilon\left(u_1^* F_{u_1} + u_2^* F_{u_2} + \widetilde{F}(u_1, u_2)\right) \end{aligned}$$

olmak üzere, $\overline{M}$ dual yüzeyinin birim dual normal vektör alanı

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\overline{Z}}(\overline{u}_1,\overline{u}_2) &= (\cos u_2\cos u_1,\cos u_2\sin u_1,\sin u_2)\\ &\quad+\varepsilon\begin{pmatrix} u_1^*(-\cos u_2\sin u_1,\cos u_2\cos u_1,0)\\ +u_2^*(-\sin u_2\cos u_1,-\sin u_2\sin u_1,\cos u_2)\end{pmatrix}\\ &= (\cos\overline{u}_2\cos\overline{u}_1,\cos\overline{u}_2\sin\overline{u}_1,\sin\overline{u}_2)\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz.

$$\overline{M}=\left\{(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)\in\mathbf{D}^3 \mid \overline{x}_1^2+\overline{x}_2^2+\overline{x}_3^2=\overline{r}^2\right\}$$

bu dual yüzeyin nokta cümlesi olduğundan

$$\overrightarrow{\overline{Z}}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)=\left(\frac{\overline{x}_1}{\overline{r}},\frac{\overline{x}_2}{\overline{r}},\frac{\overline{x}_3}{\overline{r}}\right)$$

elde edilir. Bu durumda, $\forall\overline{t}\in\overline{I}$ için

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\overline{Z}}\circ\overline{\alpha}\right)(\overline{t}) &= \overrightarrow{\overline{Z}}(\overline{\alpha}(\overline{t}))\\ &= \frac{1}{\overline{r}}\overline{\alpha}(\overline{t})\end{aligned}\tag{5.1.9}$$

biçimindedir. O halde, $(5.1.9)$ denkleminin her iki tarafının $\overline{t}$ dual değişkene göre türevi alınırsa

$$\left(\overrightarrow{\overline{Z}}\circ\overline{\alpha}\right)^{\bullet}=\frac{1}{\overline{r}}\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}$$

elde edilir. Sonuç olarak, dual küre üzerinde bulunan bütün eğriler birer dual asli eğridir.

Örnek 5.1.10.

$$\begin{aligned}\overline{F} &: \overline{U}\subseteq\mathbf{D}^2\longrightarrow\overline{F}\left(\overline{U}\right)=\overline{M}\subset\mathbf{D}^3\\ (\overline{u}_1,\overline{u}_2) &\longrightarrow \overline{F}(\overline{u}_1,\overline{u}_2)=(\overline{r}\cos\overline{u}_1,\overline{r}\sin\overline{u}_1,\overline{u}_2)\end{aligned}$$

parametrizasyonuna sahip $\overline{M}$ dual yüzeyi verilsin. $\overline{\alpha}$, $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde dual asli eğri olsun.

$$\begin{aligned}\overline{\alpha} \quad &: \quad \overline{I} \subseteq \mathbf{D} \longrightarrow \overline{M} \\ \overline{t} \quad &\longrightarrow \quad \overline{\alpha}(\overline{t}),\end{aligned}$$

eğrisinin ne tür eğriye karşılık geldiğini bulalım. Bu dual yüzeyin herhangi bir $\overline{p} \in \overline{M}$ noktasındaki asli eğriliklerinin $\overline{k}_1 = \frac{1}{\overline{r}}$ ve $\overline{k}_2 = \overline{0}$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\overline{F}(\overline{u}_1, \overline{u}_2) &= (\overline{r}\cos\overline{u}_1, \overline{r}\sin\overline{u}_1, \overline{u}_2) \\ &= (r\cos u_1, r\sin u_1, u_2) \\ &\quad +\varepsilon\left(u_1^*(-r\sin u_1, r\cos u_1, 0) + u_2^*(0,0,1) + (r^*\cos u_1, r^*\sin u_1, 0)\right) \\ &= F(u_1, u_2) + \varepsilon\left(u_1^* F_{u_1} + u_2^* F_{u_2} + \widetilde{F}(u_1, u_2)\right)\end{aligned}$$

olmak üzere, $\overline{F}(\overline{u}_1, \overline{u}_2)$ fonksiyonunun $\overline{u}_1$ ve $\overline{u}_2$ dual değişkenlere göre kısmi türevleri sırasıyla

$$\begin{aligned}\overline{F}_{\overline{u}_1} &= (-r\sin u_1, r\cos u_1, 0) \\ &\quad +\varepsilon\begin{pmatrix} u_1^*(-r\cos u_1, -r\sin u_1, 0) \\ +u_2^*(0,0,0) + (-r^*\sin u_1, r^*\cos u_1, 0)\end{pmatrix} \\ &= F_{u_1} + \varepsilon\left(u_1^* F_{u_1u_1} + u_2^* F_{u_2u_1} + \widetilde{F}_{u_1}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\overline{F}_{\overline{u}_2} &= (0,0,1) + \varepsilon\left(u_1^*(0,0,0) + u_2^*(0,0,0) + (0,0,0)\right) \\ &= F_{u_2} + \varepsilon\left(u_1^* F_{u_1u_2} + u_2^* F_{u_2u_2} + \widetilde{F}_{u_2}\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

$i)$ $\overline{k}_1 = \frac{1}{\overline{r}}$ asli eğriliğine karşılık gelen dual asli vektör $\overrightarrow{\overline{X}} = \overline{t}_1 \overline{F}_{\overline{u}_1}$ olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\overline{X}} &= \overline{t}_1 \overline{F}_{\overline{u}_1} = (-t_1 r\sin u_1, t_1 r\cos u_1, 0) \\ &\quad +\varepsilon\begin{pmatrix} -u_1^* t_1 r\cos u_1 - t_1 r^*\sin u_1 - t_1^* r\sin u_1, \\ -u_1^* t_1 r\sin u_1 + t_1 r^*\cos u_1 + t_1^* r\cos u_1, 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $t_1 \neq 0$ olmak üzere, $\bar{t}_1 = t_1 + \varepsilon t_1^*$ dır. Bu durumda, $\overline{\alpha}$ eğrisi bu yüzey için bir dual asli eğri olduğundan $\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}$ dual tanjant vektör alanı bu yüzeyin asli vektörlerine karşılık gelir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \overline{\alpha} \quad &: \quad \bar{I} \subseteq \mathbf{D} \longrightarrow \overline{M} \\ \bar{u}_1 \quad &\longrightarrow \quad \overline{\alpha}(\bar{u}_1) = \alpha(u_1) + \varepsilon\left(u_1^* \alpha'(u_1) + \widetilde{\alpha}(u_1)\right) \end{aligned}$$

bir eğri olmak üzere,

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{u}_1) &= \alpha'(u_1) + \varepsilon\left(u_1^* \alpha''(u_1) + \widetilde{\alpha}'(u_1)\right) \\ &= (-ar\sin u_1, ar\cos u_1, 0) \\ &\quad + \varepsilon \begin{pmatrix} -u_1^* ar\cos u_1 - ar^* \sin u_1 - a^* r\sin u_1, \\ -u_1^* ar\sin u_1 + ar^* \cos u_1 + a^* r\cos u_1, 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.1.10}$$

olur. Burada, $a \neq 0$ olmak üzere $\overline{a} = a + \varepsilon a^* \in \mathbf{D}$ dir. Diğer yandan, biliyoruz ki $\overline{\alpha}$ eğrisi

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}(\bar{u}_1) &= \left(\overline{\alpha}_1(\bar{u}_1), \overline{\alpha}_2(\bar{u}_1), \overline{\alpha}_3(\bar{u}_1)\right) \\ &= \left(\alpha_1(u_1), \alpha_2(u_1), \alpha_3(u_1)\right) + \varepsilon \begin{pmatrix} u_1^* \left(\alpha_1'(u_1), \alpha_2'(u_1), \alpha_3'(u_1)\right) \\ + \left(\widetilde{\alpha}_1(u_1), \widetilde{\alpha}_2(u_1), \widetilde{\alpha}_3(u_1)\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

biçiminde olup bu ifadenin $\bar{u}_1$ dual değişkene göre türevi

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{u}_1) &= \left(\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}_1(\bar{u}_1), \overset{\bullet}{\overline{\alpha}}_2(\bar{u}_1), \overset{\bullet}{\overline{\alpha}}_3(\bar{u}_1)\right) \\ &= \left(\alpha_1'(u_1), \alpha_2'(u_1), \alpha_3'(u_1)\right) + \varepsilon \begin{pmatrix} u_1^* \left(\alpha_1''(u_1), \alpha_2''(u_1), \alpha_3''(u_1)\right) \\ + \left(\widetilde{\alpha}_1'(u_1), \widetilde{\alpha}_2'(u_1), \widetilde{\alpha}_3'(u_1)\right) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

biçimindedir. Yukarıda elde edilen (5.1.10) ve (5.1.11) denklemleri birlikte göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} \alpha_1'(u_1) &= -ar\sin u_1, \\ \alpha_2'(u_1) &= ar\cos u_1, \\ \alpha_3'(u_1) &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
u_1^*\alpha_1''(u_1)+\widetilde{\alpha}_1'(u_1) &= -u_1^* ar\cos u_1 - ar^*\sin u_1 - a^* r\sin u_1,\\
u_1^*\alpha_2''(u_1)+\widetilde{\alpha}_2'(u_1) &= -u_1^* ar\sin u_1 + ar^*\cos u_1 + a^* r\cos u_1,\\
u_1^*\alpha_3''(u_1)+\widetilde{\alpha}_3'(u_1) &= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu denklemler çözülürse

$$
\begin{aligned}
\alpha_1(u_1) &= ar\cos u_1 + c_1,\\
\alpha_2(u_1) &= ar\sin u_1 + c_2,\\
\alpha_3(u_1) &= c_3
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}_1(u_1) &= ar^*\cos u_1 + a^* r\cos u_1 + c_1^*,\\
\widetilde{\alpha}_2(u_1) &= ar^*\sin u_1 + a^* r\sin u_1 + c_2^*,\\
\widetilde{\alpha}_3(u_1) &= c_3^*
\end{aligned}
$$

bulunur. O halde,

$$
\begin{aligned}
\overline{\alpha}(\overline{u}_1) &= (c_1 + ar\cos u_1, c_2 + ar\sin u_1, c_3)\\
&\quad +\varepsilon\begin{pmatrix} u_1^*(-ar\sin u_1, ar\cos u_1, 0)\\ +\left(c_1^* + ar^*\cos u_1 + a^* r\cos u_1, c_2^* + ar^*\sin u_1 + a^* r\sin u_1, c_3^*\right)\end{pmatrix}\\
&= (\overline{c}_1 + \overline{ar}\cos\overline{u}_1, \overline{c}_2 + \overline{ar}\sin\overline{u}_1, \overline{c}_3) \qquad (5.1.12)
\end{aligned}
$$

eğri ailesi elde edilir. Ayrıca, bu eğriler $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde olduğundan $\overline{c}_1 = \overline{c}_2 = \overline{0}$ ve $\overline{a}^2 = 1 + 0\varepsilon$ yani, $a = \mp 1$ ve $a^* = 0$ bulunur. Bu durumda, elde ettiğimiz değerler (5.1.12) denkleminde yerine yazılırsa $\overline{\alpha}$ eğri ailesi

$$\overline{\alpha}(\overline{u}_1) = (\overline{r}\cos\overline{u}_1, \overline{r}\sin\overline{u}_1, \overline{c}_3)$$

veya

$$\overline{\alpha}(\overline{u}_1) = (-\overline{r}\cos\overline{u}_1, -\overline{r}\sin\overline{u}_1, \overline{c}_3)$$

biçimindedir.

$ii)$ $\overline{k}_2 = \overline{0}$ dual asli eğriliğine karşılık gelen dual asli vektör $\overrightarrow{\overline{X}} = \overline{t}_2 \overline{F}_{\overline{u}_2}$ olduğunu biliyoruz. Burada, $t_2 \neq 0$ olmak üzere, $\overline{t}_2 = t_2 + \varepsilon t_2^*$ dir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\overline{X}} &= \overline{t}_2 \overline{F}_{\overline{u}_2} \\
&= (t_2 + \varepsilon t_2^*)\left((0,0,1) + \varepsilon (0,0,0)\right) \\
&= (0,0,t_2) + \varepsilon (0,0,t_2^*)
\end{aligned}$$

bulunur. $\overline{\alpha}$ eğrisi bu yüzey için bir dual asli eğri olduğundan $\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}$ dual tanjant vektör alanı bu yüzeyin asli vektörlerine karşılık gelir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha} \quad &: \quad \overline{I} \subseteq \mathbf{D} \longrightarrow \overline{M} \\
\overline{t} \quad &\longrightarrow \quad \overline{\alpha}(\overline{t}) = \alpha(t) + \varepsilon\left(t^* \alpha'(t) + \widetilde{\alpha}(t)\right)
\end{aligned}$$

bir eğri olmak üzere,

$$\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t}) = \alpha'(t) + \varepsilon\left(t^* \alpha''(t) + \widetilde{\alpha}'(t)\right) = (0,0,b) + \varepsilon (0,0,b^*) \qquad (5.1.13)$$

elde edilir. Burada, $b \neq 0$ olmak üzere $\overline{b} = b + \varepsilon b^* \in \mathbf{D}$ dir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}(\overline{t}) &= \left(\overline{\alpha}_1(\overline{t}), \overline{\alpha}_2(\overline{t}), \overline{\alpha}_3(\overline{t})\right) \\
&= \left(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)\right) + \varepsilon \begin{pmatrix} t^*\left(\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t)\right) \\ +\left(\widetilde{\alpha}_1(t), \widetilde{\alpha}_2(t), \widetilde{\alpha}_3(t)\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olmak üzere, bu ifadenin $\overline{t}$ dual değişkene göre türevi

$$\begin{aligned}
\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t}) &= \left(\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}_1(\overline{t}), \overset{\bullet}{\overline{\alpha}}_2(\overline{t}), \overset{\bullet}{\overline{\alpha}}_3(\overline{t})\right) \qquad (5.1.14) \\
&= \left(\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t)\right) + \varepsilon \begin{pmatrix} t^*\left(\alpha_1''(t), \alpha_2''(t), \alpha_3''(t)\right) \\ +\left(\widetilde{\alpha}_1'(t), \widetilde{\alpha}_2'(t), \widetilde{\alpha}_3'(t)\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda elde edilen (5.1.13) ve (5.1.14) denklemleri birlikte göz önüne alındığında

$$\alpha_1'(t) = 0, \alpha_2'(t) = 0, \alpha_3'(t) = b$$

ve

$$\begin{aligned} t^*\alpha_1''(t)+\widetilde{\alpha}_1'(t) &= 0, \\ t^*\alpha_2''(t)+\widetilde{\alpha}_2'(t) &= 0, \\ t^*\alpha_3''(t)+\widetilde{\alpha}_3'(t) &= b^* \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemler çözülürse

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= c_1, \\ \alpha_2(t) &= c_2, \\ \alpha_3(t) &= bt+c_3 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha}_1(t) &= c_1^*, \\ \widetilde{\alpha}_2(t) &= c_2^*, \\ \widetilde{\alpha}_3(t) &= b^*t+c_3^* \end{aligned}$$

bulunur. O halde,

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}(\bar{t}) &= (c_1,c_2,bt+c_3)+\varepsilon\left(t^*(0,0,b)+(c_1^*,c_2^*,b^*t+c_3^*)\right) \\ &= p+t\overrightarrow{v}+\varepsilon\left(t^*\overrightarrow{v}+p^*+t\overrightarrow{v}^*\right) \\ &= \overline{p}+\bar{t}\overrightarrow{\overrightarrow{\upsilon}} \end{aligned}$$

eğri ailesi elde edilir. Burada, $\overline{p}=(c_1,c_2,c_3)+\varepsilon\left(c_1^*,c_2^*,c_3^*\right)$, $\overrightarrow{\overrightarrow{\upsilon}}=(0,0,b)+\varepsilon(0,0,b^*)$ ve $(c_1+\varepsilon c_1^*)^2+(c_2+\varepsilon c_2^*)^2=\overline{r}^2$ dir.

5.2. Dual Asimptotik Eğri

Tanım 5.2.1. $\overline{M}$ bir dual yüzey, $\overline{p}\in\overline{M}$ ve $\overrightarrow{\overrightarrow{X}}_{\overline{p}}=\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}+\varepsilon\overrightarrow{X}^*_{\widetilde{p}}\in T_{\overline{p}}\overline{M}$, $\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}\neq\overrightarrow{0}$ olsun. Eğer $\left\langle\overline{S}\left(\overrightarrow{\overrightarrow{X}}_{\overline{p}}\right),\overrightarrow{\overrightarrow{X}}_{\overline{p}}\right\rangle_{\mathbf{D}}=\overline{0}$ yani, $\overline{S}\left(\overrightarrow{\overrightarrow{X}}_{\overline{p}}\right)\perp_{\mathbf{D}}\overrightarrow{\overrightarrow{X}}_{\overline{p}}$ ise $\overrightarrow{\overrightarrow{X}}_{\overline{p}}$ dual tanjant vektörüne $\overline{M}$ dual yüzeyinin $\overline{p}$ dual noktasındaki bir dual asimptotik vektörü denir. Burada,

$$\begin{array}{rcl} \overline{S}_{\overline{p}} & : & T_{\overline{p}}\overline{M} \longrightarrow T_{\overline{p}}\overline{M} \\ \overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} & \longrightarrow & \overline{S}_{\overline{p}}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right) = \overline{D}_{\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}}\overrightarrow{\overline{Z}} = D_{\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}}\overrightarrow{Z} + \varepsilon\left(D_{\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}}\overrightarrow{Z}^{0} + D_{\overrightarrow{X}^{*}_{\widetilde{p}}}\overrightarrow{Z}\right) \end{array}$$

biçimindedir. O halde, $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} + \varepsilon\overrightarrow{X}^{*}_{\widetilde{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$ bir dual asimptotik vektör ise

$$\begin{array}{rcl} \left\langle \overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right), \overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right\rangle_{\mathbf{D}} & = & \left\langle \overline{D}_{\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}}\overrightarrow{\overline{Z}}, \overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right\rangle_{\mathbf{D}} \\ & = & \left\langle D_{\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}}\overrightarrow{Z} + \varepsilon\left(D_{\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}}\overrightarrow{Z}^{0} + D_{\overrightarrow{X}^{*}_{\widetilde{p}}}\overrightarrow{Z}\right), \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} + \varepsilon\overrightarrow{X}^{*}_{\widetilde{p}}\right\rangle_{\mathbf{D}} \\ & = & \left\langle D_{\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}}\overrightarrow{Z}, \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}\right\rangle \\ & & +\varepsilon\left(\left\langle D_{\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}}\overrightarrow{Z}, \overrightarrow{X}^{*}_{\widetilde{p}}\right\rangle + \left\langle\left(D_{\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}}\overrightarrow{Z}^{0} + D_{\overrightarrow{X}^{*}_{\widetilde{p}}}\overrightarrow{Z}\right), \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}\right\rangle\right) \\ & = & 0 + 0\varepsilon = \overline{0} \end{array}$$

olup dual sayılarda eşitlik tanımından

$$\left\langle D_{\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}}\overrightarrow{Z}, \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}\right\rangle = 0$$

ve

$$\left\langle D_{\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}}\overrightarrow{Z}, \overrightarrow{X}^{*}_{\widetilde{p}}\right\rangle + \left\langle\left(D_{\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}}\overrightarrow{Z}^{0} + D_{\overrightarrow{X}^{*}_{\widetilde{p}}}\overrightarrow{Z}\right), \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}\right\rangle = 0$$

yazılır.

Teorem 5.2.2. Bir $\overline{M}$ dual yüzeyinin ikinci dual esas formu sıfırdan farklı ise $\overline{M}$ dual yüzeyinin bir dual asimptotik vektörü yoktur.

İspat. $\overline{p} \in \overline{M}$ olmak üzere,

$$\begin{array}{rcl} \overline{II} & : & T_{\overline{p}}\overline{M} \times T_{\overline{p}}\overline{M} \longrightarrow \mathbf{D} \\ \left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}, \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}\right) & \longrightarrow & \overline{II}_{\overline{p}}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}, \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}\right) = \left\langle \overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right), \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}\right\rangle_{\mathbf{D}} \end{array}$$

dual fonksiyonu $\overline{M}$ dual yüzeyinin ikinci dual esas formudur. Hipotez gereğince, $\forall\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} + \varepsilon\overrightarrow{X}^{*}_{\widetilde{p}}, \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}} = \overrightarrow{Y}_{\widetilde{p}} + \varepsilon\overrightarrow{Y}^{*}_{\widetilde{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$ için $\left\langle \overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right), \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}\right\rangle_{\mathbf{D}} \neq \overline{0}$ dir. Bu durumda, $\forall\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M},\ \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} \neq \overrightarrow{0}$ için $\left\langle \overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right), \overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right\rangle_{\mathbf{D}} \neq \overline{0}$ dir. $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$ bir dual asimptotik vektör olsaydı $\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} \neq \overrightarrow{0}$ için $\left\langle \overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right), \overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{0}$ olması gerekirdi. Bu durumda, $\overline{M}$ dual yüzeyinin hiçbir noktasında bir dual asimptotik vektör yoktur. $\square$

Teorem 5.2.3. $\overline{M}$, $\mathbf{D}^3$ uzayında bir dual yüzey ve $\overline{p} \in \overline{M}$ olmak üzere $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \overrightarrow{X}^{*}_{\widetilde{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$ bu dual yüzey üzerinde bir dual asimptotik vektör olsun. Bu durumda,

$$\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M} \text{ bir dual asli vektördür.} \Longleftrightarrow \overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right) = \overrightarrow{\overline{0}} \text{ dir.}$$

İspat. $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \overrightarrow{X}^{*}_{\widetilde{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$ bir dual asli vektör olsun. Bu durumda, $\overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right) = \overline{k}.\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}$ olacak biçimde $\overline{k} = k + \varepsilon k^* \in \mathbf{D}$ vardır. Ayrıca, $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \overrightarrow{X}^{*}_{\widetilde{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$ dual asimptotik vektör olduğundan $\left\langle \overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right), \overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{0}$ dir. O halde,

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right), \overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} \right\rangle_{\mathbf{D}} &= \left\langle \overline{k}.\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}, \overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} \right\rangle_{\mathbf{D}} \\
&= \left\langle k\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} + \varepsilon\left(k\overrightarrow{X}^{*}_{\widetilde{p}} + k^{*}\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}\right), \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} + \varepsilon\overrightarrow{X}^{*}_{\widetilde{p}} \right\rangle_{\mathbf{D}} \\
&= k\left\langle \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}, \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} \right\rangle \\
&\quad + \varepsilon\left(k\left\langle \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}, \overrightarrow{X}^{*}_{\widetilde{p}} \right\rangle + k\left\langle \overrightarrow{X}^{*}_{\widetilde{p}}, \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} \right\rangle + k^{*}\left\langle \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}, \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} \right\rangle\right) \\
&= 0 + 0\varepsilon = \overline{0}
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$k\left\langle \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}, \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} \right\rangle = 0$$

ve

$$k\left\langle \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}, \overrightarrow{X}^{*}_{\widetilde{p}} \right\rangle + k\left\langle \overrightarrow{X}^{*}_{\widetilde{p}}, \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} \right\rangle + k^{*}\left\langle \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}, \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} \right\rangle = 0$$

elde edilir. $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \overrightarrow{X}^{*}_{\widetilde{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$ bu dual yüzey üzerinde bir dual asimptotik vektör olduğundan $\overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} \neq \overrightarrow{0}$ dır. O halde, $k = 0$ olduğu açıktır. Bu durumda, $k^{*}\left\langle \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}}, \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} \right\rangle = 0$ bulunur. Buradan, $\overline{k} = k + \varepsilon k^{*} = 0 + 0\varepsilon = \overline{0}$ elde edilir. Öyle ise, $\overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right) = \overline{k}.\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = \overline{0}.\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = \overrightarrow{\overline{0}}$ dir.
Tersine, $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} = \overrightarrow{X}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \overrightarrow{X}^{*}_{\widetilde{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$ bir dual asimptotik vektör olmak üzere, $\overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right) = \overrightarrow{\overline{0}}$ olsun. Bu durumda, $\overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}\right) = \overline{0}.\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}$ yazılabilir. O halde, $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}}$, $\overline{S}$ dual şekil operatörünün bir karakteristik vektörüdür. $\overrightarrow{\overline{X}}_{\overline{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$ dual tanjant vektörü, $\overline{M}$ dual yüzeyinin $\overline{p} \in \overline{M}$ noktasındaki bir dual asli vektörüdür. $\square$

Tanım 5.2.4. $\overline{M}$, $\mathbf{D}^3$ uzayında bir dual yüzey ve $\overline{\alpha}$, $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. $\overline{\alpha}$ eğrisinin her $\overline{p}$ noktasındaki dual tanjant vektörü $\overline{p}$ noktasındaki bir dual asimptotik vektöre paralel ise $\overline{\alpha}$ eğrisine $\overline{M}$ dual yüzeyinin bir dual asimptotik eğrisi denir.

$\overline{M}$ dual yüzeyinin $\overline{p} \in \overline{M}$ noktasındaki dual asimptotik vektörü $\overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$ dir.$\Longleftrightarrow$ $\forall \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}} = \overrightarrow{Y}_{\widetilde{p}} + \varepsilon \overrightarrow{Y}^{*}_{\widetilde{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}, \overrightarrow{Y}_{\widetilde{p}} \neq \overrightarrow{0}$ için $\left\langle \overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}\right), \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{II}_{\overline{p}}\left(\overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}, \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}\right) = \overline{0}$ dir. Buna göre; $\overline{\alpha}, \overline{M}$ dual yüzeyinin bir dual asimptotik eğrisi olsun. $\overline{M}$ dual yüzeyinin $\overline{p} \in \overline{M}$ noktasındaki bir dual asimptotik vektörü $\overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$ olmak üzere, $\overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}} = \overline{\lambda}.\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t}) \mid_{\overline{p}}$ olacak şekilde bir $\overline{\lambda} \in \mathbf{D}$ vardır.

$$\left\langle \overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}\right), \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \left\langle \overline{S}\left(\overline{\lambda}.\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t})\right), \overline{\lambda}.\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t}) \right\rangle_{\mathbf{D}} = \left\langle \overline{D}_{\overline{\lambda}.\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t})} \overrightarrow{\overline{Z}}, \overline{\lambda}.\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t}) \right\rangle_{\mathbf{D}}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{S}\left(\overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}}\right), \overrightarrow{\overline{Y}}_{\overline{p}} \right\rangle_{\mathbf{D}} &= \lambda^{2}\left\langle D_{\alpha'(t)}Z, \alpha'(t)\right\rangle \\
&\quad +\varepsilon\begin{pmatrix} 2\lambda\lambda^{*}\left\langle D_{\alpha'(t)}Z, \alpha'(t)\right\rangle + \lambda^{2}\left\langle D_{t^{*}\alpha''(t)+\widetilde{\alpha}'(t)}Z, \alpha'(t)\right\rangle \\ +\lambda^{2}\left\langle D_{\alpha'(t)}Z^{0}, \alpha'(t)\right\rangle + \lambda^{2}\left\langle D_{\alpha'(t)}Z, t^{*}\alpha''(t)+\widetilde{\alpha}'(t)\right\rangle \end{pmatrix} \\
&= \left(\lambda^{2}+2\varepsilon\lambda\lambda^{*}\right)\left\langle \begin{matrix} D_{\alpha'(t)}Z + \varepsilon\left(D_{t^{*}\alpha''(t)+\widetilde{\alpha}'(t)}Z + D_{\alpha'(t)}Z^{0}\right), \\ \alpha'(t) + \varepsilon\left(t^{*}\alpha''(t)+\widetilde{\alpha}'(t)\right) \end{matrix}\right\rangle_{\mathbf{D}} \\
&= \overline{\lambda}^{2}\left\langle \overline{D}_{\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t})} \overrightarrow{\overline{Z}}, \overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t}) \right\rangle_{\mathbf{D}} \\
&= \overline{\lambda}^{2}\left\langle \overline{S}\left(\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t})\right), \overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t}) \right\rangle_{\mathbf{D}} \\
&= \overline{0}
\end{aligned}$$

olmak üzere, $\forall \overline{t} \in \overline{I}$ için $\left\langle \overline{S}\left(\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t})\right), \overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t}) \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{0}$ dir. $\overline{S}\left(\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}\right) = \overline{D}_{\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}} \overrightarrow{\overline{Z}} = \left(\overrightarrow{\overline{Z}} \circ \overline{\alpha}\right)^{\bullet}$ eşitliğini göz önüne alırsak,

$\overline{\alpha}, \overline{M}$ dual yüzeyinin bir dual asimptotik eğrisidir.$\Longleftrightarrow$

$$\left\langle \overline{S}\left(\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}\right), \overset{\bullet}{\overline{\alpha}} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \left\langle \left(\overrightarrow{\overline{Z}} \circ \overline{\alpha}\right)^{\bullet}, \overset{\bullet}{\overline{\alpha}} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{0}$$

dir. Yani, $\left\langle \left(\overrightarrow{\overline{Z}} \circ \overline{\alpha}\right)^{\bullet}, \overset{\bullet}{\overline{\alpha}} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{0}$ denklemi $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerindeki dual asimptotik eğrilerin diferensiyel denklemidir. Bu diferensiyel denklemin çözümü $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerindeki dual asimptotik eğrileri verir.

Örnek 5.2.5.

$$\begin{array}{rcl} \overline{F} & : & \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2 \longrightarrow \overline{F}\left(\overline{U}\right) = \overline{M} \subset \mathbf{D}^3 \\ (\overline{u}_1,\overline{u}_2) & \longrightarrow & \overline{F}(\overline{u}_1,\overline{u}_2) = (\overline{r}\cos\overline{u}_2\cos\overline{u}_1, \overline{r}\cos\overline{u}_2\sin\overline{u}_1, \overline{r}\sin\overline{u}_2) \end{array}$$

parametrizasyonuna sahip $\overline{M}$ dual yüzeyi verilsin. Bu dual yüzey üzerinde dual asimptotik eğri olup olmadığını araştıralım. Kabul edelim ki $\overline{\alpha}, \overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde dual asimptotik eğri olsun. Ayrıca,

$$\begin{array}{rcl} \overline{F}(\overline{u}_1,\overline{u}_2) & = & (\overline{r}\cos\overline{u}_2\cos\overline{u}_1, \overline{r}\cos\overline{u}_2\sin\overline{u}_1, \overline{r}\sin\overline{u}_2) \\ & = & (r\cos u_2\cos u_1, r\cos u_2\sin u_1, r\sin u_2) \\ & & +\varepsilon\left(\begin{array}{c} u_1^*(-r\cos u_2\sin u_1, r\cos u_2\cos u_1, 0) \\ +u_2^*(-r\sin u_2\cos u_1, -r\sin u_2\sin u_1, r\cos u_2) \\ +(r^*\cos u_2\cos u_1, r^*\cos u_2\sin u_1, r^*\sin u_2) \end{array}\right) \\ & = & F(u_1,u_2) + \varepsilon\left(u_1^* F_{u_1} + u_2^* F_{u_2} + \widetilde{F}(u_1,u_2)\right) \end{array}$$

eşitliği vardır ve bu eşitliğin $\overline{u}_1$ ve $\overline{u}_2$ dual değişkenlere göre kısmi türevleri göz önünde bulundurulduğunda $\overline{M}$ dual yüzeyinin birim dual normal vektör alanı

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{\overline{Z}}(\overline{u}_1,\overline{u}_2) & = & (\cos u_2\cos u_1, \cos u_2\sin u_1, \sin u_2) \\ & & +\varepsilon\left(\begin{array}{c} u_1^*(-\cos u_2\sin u_1, \cos u_2\cos u_1, 0) \\ +u_2^*(-\sin u_2\cos u_1, -\sin u_2\sin u_1, \cos u_2) \end{array}\right) \\ & = & (\cos\overline{u}_2\cos\overline{u}_1, \cos\overline{u}_2\sin\overline{u}_1, \sin\overline{u}_2) \end{array}$$

olduğunu biliyoruz.

$$\overline{M} = \left\{(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3) \in \mathbf{D}^3 \mid \overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2 + \overline{x}_3^2 = \overline{r}^2\right\}$$

bu dual yüzeyin nokta cümlesi olduğundan

$$\overrightarrow{\overline{Z}}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3) = \left(\frac{\overline{x}_1}{\overline{r}}, \frac{\overline{x}_2}{\overline{r}}, \frac{\overline{x}_3}{\overline{r}}\right)$$

elde edilir.

$$\left(\overrightarrow{\overline{Z}}\circ\overline{\alpha}\right)(\overline{t})=\overrightarrow{\overline{Z}}\left(\overline{\alpha}(\overline{t})\right)=\left(\frac{\overline{\alpha}_1(\overline{t})}{\overline{r}},\frac{\overline{\alpha}_2(\overline{t})}{\overline{r}},\frac{\overline{\alpha}_3(\overline{t})}{\overline{r}}\right)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}\left\langle\left(\overrightarrow{\overline{Z}}\circ\overline{\alpha}\right)^{\bullet},\dot{\overline{\alpha}}\right\rangle_{\mathbf{D}} &= \left\langle\frac{d}{d\overline{t}}\left(\overrightarrow{\overline{Z}}\circ\overline{\alpha}\right)(\overline{t}),\frac{d\overline{\alpha}(\overline{t})}{d\overline{t}}\right\rangle_{\mathbf{D}}\\ &= \frac{1}{\overline{r}}\left(\left(\frac{d\overline{\alpha}_1(\overline{t})}{d\overline{t}}\right)^2+\left(\frac{d\overline{\alpha}_2(\overline{t})}{d\overline{t}}\right)^2+\left(\frac{d\overline{\alpha}_3(\overline{t})}{d\overline{t}}\right)^2\right)\\ &= \overline{0}\end{aligned}$$

bulunur. $\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2$ ve $\overline{\alpha}_3$ birer dual analitik fonksiyon olduğundan yukarıdaki ifadeyi genişletir ve gerekli işlemleri yaparsak

$$\left(\alpha_1'(t)\right)^2+\left(\alpha_2'(t)\right)^2+\left(\alpha_3'(t)\right)^2=0$$

ve

$$\begin{aligned}& t^*\left(\alpha_1'(t)\,\alpha_1''(t)+\alpha_2'(t)\,\alpha_2''(t)+\alpha_3'(t)\,\alpha_3''(t)\right)\\ & +\alpha_1'(t)\,\widetilde{\alpha}_1'(t)+\alpha_2'(t)\,\widetilde{\alpha}_2'(t)+\alpha_3'(t)\,\widetilde{\alpha}_3'(t)\\ = {} & 0\end{aligned}$$

elde edilir. O halde,

$$\alpha_1'(t)=\alpha_2'(t)=\alpha_3'(t)=0$$

bulunur. Bu durumda, $\alpha_1(t)=\eta_1\in\mathbb{R}$, $\alpha_2(t)=\eta_2\in\mathbb{R}$, $\alpha_3(t)=\eta_3\in\mathbb{R}$, $\widetilde{\alpha}_1(t)=k_1(t)$, $\widetilde{\alpha}_2(t)=k_2(t)$ ve $\widetilde{\alpha}_3(t)=k_3(t)$ elde edilir. Burada; k_1,k_2 ve k_3 $C^\infty-$sınıfından fonksiyonlardır.

Bütün bu bilgiler dikkate alındığında,

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}(\overline{t}) &= \left(\overline{\alpha}_1(\overline{t}),\overline{\alpha}_2(\overline{t}),\overline{\alpha}_3(\overline{t})\right)\\ &= \left(\eta_1+\varepsilon k_1(t),\eta_2+\varepsilon k_2(t),\eta_3+\varepsilon k_3(t)\right)\end{aligned}$$

eğri ailesi elde edilir. O halde, hiçbir eğri dual küre yüzeyi için dual asimptotik eğri değildir.

Örnek 5.2.6.

$$\begin{array}{rcl}\overline{F} & : & \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^2 \longrightarrow \overline{F}\left(\overline{U}\right) = \overline{M} \subset \mathbf{D}^3 \\ (\overline{u}_1, \overline{u}_2) & \longrightarrow & \overline{F}(\overline{u}_1, \overline{u}_2) = (\overline{r}\cos\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{r}\sin\overline{u}_1)\end{array}$$

paramterizasyonuna sahip $\overline{M}$ dual yüzeyi verilsin. $\overline{\alpha}$, $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde dual asimptotik eğri olsun.

$$\begin{array}{rcl}\overline{\alpha} & : & \overline{I} \subseteq \mathbf{D} \longrightarrow \overline{M} \\ \overline{t} & \longrightarrow & \overline{\alpha}(\overline{t}),\end{array}$$

eğrisinin ne tür eğriye karşılık geldiğini bulalım.

$$\begin{aligned}\overline{F}(\overline{u}_1, \overline{u}_2) &= (\overline{r}\cos\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{r}\sin\overline{u}_1) \\ &= (r\cos u_1, u_2, r\sin u_1) \\ &\quad + \varepsilon\begin{pmatrix} u_1^*(-r\sin u_1, 0, r\cos u_1) + u_2^*(0,1,0) \\ +(r^*\cos u_1, 0, r^*\sin u_1)\end{pmatrix} \\ &= F(u_1, u_2) + \varepsilon\left(u_1^* F_{u_1} + u_2^* F_{u_2} + \widetilde{F}(u_1, u_2)\right)\end{aligned}$$

olmak üzere, $\overline{M}$ dual yüzeyinin birim dual normal vektör alanı

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\overline{Z}}(\overline{u}_1, \overline{u}_2) &= \overrightarrow{Z}(u_1, u_2) + \varepsilon\left(u_1^*\frac{\partial\overrightarrow{Z}}{\partial u_1} + u_2^*\frac{\partial\overrightarrow{Z}}{\partial u_2} + \overrightarrow{\widetilde{Z}}(u_1, u_2)\right) \\ &= (-\cos u_1, 0, -\sin u_1) + \varepsilon\left(u_1^*(\sin u_1, 0, -\cos u_1) + u_2^*(0,0,0)\right) \\ &= (-\cos u_1 + \varepsilon u_1^*\sin u_1, 0 + 0\varepsilon, -\sin u_1 - \varepsilon u_1^*\cos u_1) \\ &= \left(-\cos\overline{u}_1, \overline{0}, -\sin\overline{u}_1\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\overline{M} = \left\{(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) \in \mathbf{D}^3 \mid \overline{x}_1^2 + \overline{x}_3^2 = \overline{r}^2\right\}$$

bu dual yüzeyin nokta cümlesi olduğundan

$$\overrightarrow{\overline{Z}}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) = \left(-\frac{\overline{x}_1}{\overline{r}}, \overline{0}, -\frac{\overline{x}_3}{\overline{r}}\right)$$

bulunur.

$$\left(\overrightarrow{\overline{Z}}\circ\overline{\alpha}\right)(\bar{t})=\overrightarrow{\overline{Z}}\left(\overline{\alpha}(\bar{t})\right)=\left(-\frac{\overline{\alpha}_1(\bar{t})}{\bar{r}},\bar{0},-\frac{\overline{\alpha}_3(\bar{t})}{\bar{r}}\right)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}\left\langle\left(\overrightarrow{\overline{Z}}\circ\overline{\alpha}\right)^{\bullet},\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}\right\rangle_{\mathbf{D}} &= \left\langle\frac{d}{d\bar{t}}\left(\overrightarrow{\overline{Z}}\circ\overline{\alpha}\right)(\bar{t}),\frac{d\overline{\alpha}(\bar{t})}{d\bar{t}}\right\rangle_{\mathbf{D}}\\ &= -\frac{1}{\bar{r}}\left(\frac{d\overline{\alpha}_1(\bar{t})}{d\bar{t}}\right)^2-\frac{1}{\bar{r}}\left(\frac{d\overline{\alpha}_3(\bar{t})}{d\bar{t}}\right)^2=\bar{0}\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Bu ifadeyi genişletirsek,

$$\left(\alpha_1'(t)+\varepsilon\left(t^*\alpha_1''(t)+\widetilde{\alpha}_1'(t)\right)\right)^2+\left(\alpha_3'(t)+\varepsilon\left(t^*\alpha_3''(t)\right)+\widetilde{\alpha}_3'(t)\right)^2=\bar{0}$$

olmak üzere,

$$\left(\alpha_1'(t)\right)^2+\left(\alpha_3'(t)\right)^2=0$$

ve

$$\left(t^*\left(\alpha_1'(t)\,\alpha_1''(t)+\alpha_3'(t)\,\alpha_3''(t)\right)+\alpha_1'(t)\,\widetilde{\alpha}_1'(t)+\alpha_3'(t)\,\widetilde{\alpha}_3'(t)\right)=0$$

elde edilir. O halde,

$$\alpha_1'(t)=\alpha_3'(t)=0$$

bulunur. Bu durumda, $\alpha_1(t)=\mu_1\in\mathbb{R}$, $\alpha_3(t)=\mu_2\in\mathbb{R}$, $\widetilde{\alpha}_1(t)=g_1(t)$ ve $\widetilde{\alpha}_3(t)=g_2(t)$ elde edilir. Burada, g_1 ve g_2 $C^\infty-$sınıfından fonksiyonlardır.
Bütün bu bilgiler dikkate alındığında,

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}(\bar{t}) &= \left(\overline{\alpha}_1(\bar{t}),\overline{\alpha}_2(\bar{t}),\overline{\alpha}_3(\bar{t})\right)\\ &= \left(\mu_1+\varepsilon g_1(t),\overline{\alpha}_2(\bar{t}),\mu_2+\varepsilon g_2(t)\right)\end{aligned}$$

eğri ailesi elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}_2 \quad &: \quad \bar{I}\subseteq\mathbf{D}\longrightarrow\mathbf{D}\\ \bar{t} \quad &\longrightarrow \quad \overline{\alpha}_2(\bar{t})=\alpha_2(t)+\varepsilon\left(t^*\alpha_2'(t)+\widetilde{\alpha}_2(t)\right)\end{aligned}$$

bir dual analitik fonksiyon olmak üzere, $\alpha_2'(t)\neq 0$ dır.

5.3. Dual Geodezik Eğri

Tanım 5.3.1. $\overline{M}$ bir dual yüzey ve $\overline{\alpha}$, $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. $\forall\overline{\alpha}(\bar{t})\in\overline{M}$ noktasında $\overset{\bullet\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t})\in\left(T_{\overline{\alpha}(\bar{t})}\overline{M}\right)^{\perp_{\mathbf{D}}}$ ise $\overline{\alpha}$ eğrisine $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde bir dual geodezik eğri denir.

$\overline{\alpha}:\bar{I}\subseteq\mathbf{D}\longrightarrow\overline{M}$, $\overline{\alpha}(\bar{t})=\alpha(t)+\varepsilon\left(t^{*}\alpha'(t)+\widetilde{\alpha}(t)\right)$ bir dual geodezik eğridir.$\Longleftrightarrow\forall\bar{t}\in\bar{I}$ için $\overset{\bullet\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t})\in\left(T_{\overline{\alpha}(\bar{t})}\overline{M}\right)^{\perp_{\mathbf{D}}}$ dir.
$\overline{\alpha}$ eğrisi $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde bir dual geodezik olsun. $\forall\bar{t}\in\bar{I}$ için $\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t})\in T_{\overline{\alpha}(\bar{t})}\overline{M}$ ve $\overset{\bullet\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t})\in\left(T_{\overline{\alpha}(\bar{t})}\overline{M}\right)^{\perp_{\mathbf{D}}}$ dir. O halde, $\left\langle\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t}),\overset{\bullet\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t})\right\rangle_{\mathbf{D}}=\bar{0}$ yani, $\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t})\perp_{\mathbf{D}}\overset{\bullet\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t})$ olduğu açıktır. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\bar{t}}\left\langle\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t}),\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t})\right\rangle_{\mathbf{D}} &= \left\langle\alpha'(t)+\varepsilon\left(t^{*}\alpha''(t)+\widetilde{\alpha}'(t)\right),\alpha'(t)+\varepsilon\left(t^{*}\alpha''(t)+\widetilde{\alpha}'(t)\right)\right\rangle_{\mathbf{D}}^{\bullet}\\
&= \left[\left\langle\alpha'(t),\alpha'(t)\right\rangle+2\varepsilon\left\langle\alpha'(t),\left(t^{*}\alpha''(t)+\widetilde{\alpha}'(t)\right)\right\rangle\right]^{\bullet}
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\bar{t}}\left\langle\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t}),\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t})\right\rangle_{\mathbf{D}} &= \left\langle\alpha''(t),\alpha'(t)\right\rangle+\left\langle\alpha'(t),\alpha''(t)\right\rangle\\
&\quad +2\varepsilon\begin{pmatrix}\langle\alpha''(t),(t^{*}\alpha''(t)+\widetilde{\alpha}'(t))\rangle\\ +\langle\alpha'(t),(t^{*}\alpha'''(t)+\widetilde{\alpha}''(t))\rangle\end{pmatrix}\\
&= 2\left[\left\langle\alpha'(t)+\varepsilon\left(t^{*}\alpha''(t)+\widetilde{\alpha}'(t)\right),\alpha''(t)+\varepsilon\left(t^{*}\alpha'''(t)+\widetilde{\alpha}''(t)\right)\right\rangle\right]\\
&= 2\left\langle\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t}),\overset{\bullet\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t})\right\rangle_{\mathbf{D}}=\bar{0}
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde,

$$\frac{d}{d\bar{t}}\left\langle\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t}),\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t})\right\rangle_{\mathbf{D}}=\bar{0}$$

sonucuna varılır. $\forall\bar{t}\in\bar{I}$ için $\left\langle\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t}),\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t})\right\rangle_{\mathbf{D}}=\left\|\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t})\right\|_{\mathbf{D}}^{2}$ ifadesi dual sabittir. Bu durumda, bir geodeziğin her noktasındaki hızı sabittir.
Ayrıca; $\overline{\alpha}$ eğrisi $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde bir dual geodezik eğri ise $\overline{g}:\bar{I}\longrightarrow\mathbf{D}$ bir dual analitik fonksiyon olmak üzere $\forall\bar{t}\in\bar{I}$ için

$$\overset{\bullet\bullet}{\overline{\alpha}}(\bar{t})=\overline{g}(\bar{t}).\left(\overrightarrow{\overline{Z}}\circ\overline{\alpha}\right)(\bar{t})$$

dir. O halde, $\overline{g}(\overline{t}) = \left\langle \overset{\bullet\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t}), \left(\overrightarrow{\overline{Z}} \circ \overline{\alpha}\right)(\overline{t}) \right\rangle_{\mathbf{D}}$ dir. $\forall \overline{t} \in \overline{I}$ için bu ifade doğru olduğundan aşağıdaki eşitliği yazmak mümkündür:

$$\left\langle \overset{\bullet\bullet}{\overline{\alpha}}, \overrightarrow{\overline{Z}} \circ \overline{\alpha} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \left\langle \overset{\bullet}{\overline{\alpha}}, \overrightarrow{\overline{Z}} \circ \overline{\alpha} \right\rangle_{\mathbf{D}}^{\bullet} - \left\langle \overset{\bullet}{\overline{\alpha}}, \left(\overrightarrow{\overline{Z}} \circ \overline{\alpha}\right)^{\bullet} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{g}.$$

Bu durumda; $\overline{\alpha}$ eğrisi $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde bir dual geodezik eğri ise

$$\overset{\bullet\bullet}{\overline{\alpha}} + \left\langle \overset{\bullet}{\overline{\alpha}}, \left(\overrightarrow{\overline{Z}} \circ \overline{\alpha}\right)^{\bullet} \right\rangle_{\mathbf{D}} \left(\overrightarrow{\overline{Z}} \circ \overline{\alpha}\right) = \overline{0}$$

diferensiyel denklemi mevcuttur.

Örnek 5.3.2. Bir $\overline{M}$ dual yüzeyi bir dual doğruyu üzerinde bulunduruyorsa bu doğru bu dual yüzeyin bir dual geodeziğidir. Gerçekten; $\overline{\alpha}$, $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde bir dual doğru olsun. O halde,

$$\begin{array}{rcl} \overline{\alpha} & : & \mathbf{D} \longrightarrow \overline{M} \\ \overline{t} & \longrightarrow & \overline{\alpha}(\overline{t}) = \overline{p} + \overline{t}\,\overrightarrow{\overline{v}}, \end{array}$$

$\overline{p}$ dual noktasından geçen ve doğrultmanı $\overrightarrow{\overline{v}}$ olan doğrudur.

$$\begin{array}{rcl} \overline{\alpha}(\overline{t}) & = & \overline{p} + \overline{t}\,\overrightarrow{\overline{v}} \\ & = & p + t\overrightarrow{v} + \varepsilon\,(t^{*}\overrightarrow{v} + p^{*} + t\,\overrightarrow{v}^{*}) \\ & = & \alpha(t) + \varepsilon\left(t^{*}\alpha'(t) + \widetilde{\alpha}(t)\right) \end{array}$$

olmak üzere, $\forall \overline{t} \in \mathbf{D}$ için $\overset{\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t}) = \alpha'(t) + \varepsilon\,(t^{*}\alpha''(t) + \widetilde{\alpha}'(t)) = \overrightarrow{v} + \varepsilon\overrightarrow{v}^{*} = \overrightarrow{\overline{v}}$ ve $\overset{\bullet\bullet}{\overline{\alpha}}(\overline{t}) = \overrightarrow{\overline{0}} \in \left(T_{\overline{\alpha}(\overline{t})}\overline{M}\right)^{\perp_{\mathbf{D}}}$ dir. O halde; $\overline{\alpha}$ doğrusu $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde bir dual geodeziktir.

Örnek 5.3.3.

$$\begin{array}{rcl} \overline{F} & : & \overline{U} \subseteq \mathbf{D}^{2} \longrightarrow \overline{F}\left(\overline{U}\right) = \overline{M} \subset \mathbf{D}^{3} \\ (\overline{u}_1, \overline{u}_2) & \longrightarrow & \overline{F}(\overline{u}_1, \overline{u}_2) = (\cos\overline{u}_2 \cos\overline{u}_1, \cos\overline{u}_2 \sin\overline{u}_1, \sin\overline{u}_2) \end{array}$$

parametrizasyonuna sahip $\overline{M}$ dual yüzeyi verilsin. $\overline{\alpha}$, $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde birim hızlı dual geodezik eğri olsun.

$$\begin{array}{rcl} \overline{\alpha} & : & \bar{I} \subseteq \mathbf{D} \longrightarrow \overline{M} \\ \bar{t} & \longrightarrow & \overline{\alpha}\left(\bar{t}\right), \end{array}$$

eğrisinin ne tür eğriye karşılık geldiğini bulalım. $\overline{M}$ dual yüzeyinin birim dual normal vektör alanı $\overrightarrow{\overline{Z}}$ olsun.

$$\overline{M} = \left\{ (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in \mathbf{D}^3 \mid \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2 = 1 + 0\varepsilon \right\}$$

bu dual yüzeyin nokta cümlesi olmak üzere,

$$\overrightarrow{\overline{Z}}\,(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$$

elde edilir. $\forall \bar{t} \in \bar{I}$ için

$$\left(\overrightarrow{\overline{Z}} \circ \overline{\alpha} \right)(\bar{t}) = \overrightarrow{\overline{Z}}\,(\overline{\alpha}(\bar{t})) = (\overline{\alpha}_1(\bar{t}), \overline{\alpha}_2(\bar{t}), \overline{\alpha}_3(\bar{t})) = \overline{\alpha}(\bar{t})$$

olmak üzere,

$$\ddot{\overline{\alpha}} + \left\langle \dot{\overline{\alpha}}, \dot{\overline{\alpha}} \right\rangle_{\mathbf{D}} \overline{\alpha} = \ddot{\overline{\alpha}} + \overline{\alpha} = \overline{0} \qquad (5.3.1)$$

diferensiyel denklemi bulunur. O halde, yukarıdaki $(5.3.1)$ denkleminden

$$\begin{array}{rcl} \left(\ddot{\overline{\alpha}}_1 + \overline{\alpha}_1, \ddot{\overline{\alpha}}_2 + \overline{\alpha}_2, \ddot{\overline{\alpha}}_3 + \overline{\alpha}_3 \right)(\bar{t}) & = & \left(\alpha_1'' + \alpha_1, \alpha_2'' + \alpha_2, \alpha_3'' + \alpha_3 \right)(t) \\ & & +\varepsilon \left(\begin{array}{c} t^* \left(\alpha_1''' + \alpha_1', \alpha_2''' + \alpha_2', \alpha_3''' + \alpha_3' \right)(t) \\ + \left(\widetilde{\alpha}_1'' + \widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2'' + \widetilde{\alpha}_2, \widetilde{\alpha}_3'' + \widetilde{\alpha}_3 \right)(t) \end{array} \right) \\ & = & (0 + 0\varepsilon, 0 + 0\varepsilon, 0 + 0\varepsilon) \end{array}$$

eşitliğini yazmak mümkündür. Bu durumda,

$$\left(\alpha_1''(t) + \alpha_1(t), \alpha_2''(t) + \alpha_2(t), \alpha_3''(t) + \alpha_3(t) \right) = (0,0,0)$$

ve

$$\left(\widetilde{\alpha}_1''(t) + \widetilde{\alpha}_1(t), \widetilde{\alpha}_2''(t) + \widetilde{\alpha}_2(t), \widetilde{\alpha}_3''(t)\, \widetilde{\alpha}_3(t) \right) = (0,0,0)$$

olup bu denklemler çözülürse

$$
\begin{aligned}
\overline{\alpha}(\bar{t}) &= \left(\overline{\alpha}_1(\bar{t}), \overline{\alpha}_2(\bar{t}), \overline{\alpha}_3(\bar{t})\right) \\
&= \left(\overline{b}_1 \cos\bar{t} + \overline{b}_2 \sin\bar{t}, \overline{c}_1 \cos\bar{t} + \overline{c}_2 \sin\bar{t}, \overline{d}_1 \cos\bar{t} + \overline{d}_2 \sin\bar{t}\right)
\end{aligned}
$$

eğri ailesi elde edilir. Yani; $\overline{\alpha}$ eğrileri birim dual küre yüzeyi için birer dual geodezik eğridir. Burada; $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{c}_1, \overline{c}_2, \overline{d}_1$ ve $\overline{d}_2$ birer dual sabittir. Gerçekten, $\forall \bar{t} \in \bar{I}$ için $\ddot{\overline{\alpha}}(\bar{t}) = -\overline{\alpha}(\bar{t}) = -\left(\overset{\rightrightarrows}{Z} \circ \overline{\alpha}\right)(\bar{t})$ dir.

Örnek 5.3.4. $\overline{M}$, $\mathbf{D}^3$ uzayında bir dual düzlem olsun. $\overline{M}$ dual yüzeyinin birim dual normal vektör alanı $\overset{\rightrightarrows}{Z}$ olsun. $\overset{\rightrightarrows}{Z}$ vektör alanının (dual) sabit olduğunu biliyoruz. $\overline{\alpha}$, $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde bir dual geodezik olsun.

$$
\begin{aligned}
\overline{\alpha} \quad &: \quad \bar{I} \subseteq \mathbf{D} \longrightarrow \overline{M} \\
\bar{t} \quad &\longrightarrow \quad \overline{\alpha}(\bar{t}),
\end{aligned}
$$

eğrisinin ne tür eğriye karşılık geldiğini bulalım. $\overline{\alpha}$, $\overline{M}$ dual yüzeyi üzerinde bir dual geodezik olduğundan $\forall \bar{t} \in \bar{I}$ için $\ddot{\overline{\alpha}}(\bar{t}) \setminus \setminus_{\mathbf{D}} \overset{\rightrightarrows}{Z}$ dir. Ayrıca, $\dot{\overline{\alpha}} \in \chi\left(\overline{M}\right)$ olduğundan $\left\langle \dot{\overline{\alpha}}, \overset{\rightrightarrows}{Z} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \bar{0}$ olduğu açıktır. Bu ifadenin $\bar{t}$ dual değişkene göre türevi alınırsa

$$
\begin{aligned}
\left\langle \dot{\overline{\alpha}}, \overset{\rightrightarrows}{Z} \right\rangle_{\mathbf{D}}^{\bullet} &= \left\langle \alpha'(t) + \varepsilon\left(t^* \alpha''(t) + \widetilde{\alpha}'(t)\right), \overrightarrow{Z} + \varepsilon \overrightarrow{Z}^0 \right\rangle_{\mathbf{D}}^{\bullet} \\
&= \left(\left\langle \alpha'(t), \overrightarrow{Z} \right\rangle + \varepsilon\left(t^* \left\langle \alpha''(t), \overrightarrow{Z} \right\rangle + \left\langle \alpha'(t), \overrightarrow{Z}^0 \right\rangle + \left\langle \widetilde{\alpha}'(t), \overrightarrow{Z} \right\rangle\right)\right)^{\bullet} \\
&= \left\langle \alpha''(t), \overrightarrow{Z} \right\rangle + \left\langle \alpha'(t), \overrightarrow{Z}' \right\rangle \\
&\quad + \varepsilon \left(\begin{array}{c} t^* \left(\left\langle \alpha'''(t), \overrightarrow{Z} \right\rangle + \left\langle \alpha''(t), \overrightarrow{Z}' \right\rangle\right) + \left\langle \alpha''(t), \overrightarrow{Z}^0 \right\rangle \\ + \left\langle \alpha'(t), \left(\overrightarrow{Z}^0\right)' \right\rangle + \left\langle \widetilde{\alpha}''(t), \overrightarrow{Z} \right\rangle + \left\langle \widetilde{\alpha}'(t), \overrightarrow{Z}' \right\rangle \end{array} \right)
\end{aligned}
$$

biçiminde olup $\overset{\rightrightarrows}{Z}$ dual sabit vektör alanı olduğundan

$$
\begin{aligned}
\left\langle \dot{\overline{\alpha}}, \overset{\rightrightarrows}{Z} \right\rangle_{\mathbf{D}}^{\bullet} &= \left\langle \alpha''(t), \overrightarrow{Z} \right\rangle + \varepsilon\left(t^* \left\langle \alpha'''(t), \overrightarrow{Z} \right\rangle + \left\langle \alpha''(t), \overrightarrow{Z}^0 \right\rangle + \left\langle \widetilde{\alpha}''(t), \overrightarrow{Z} \right\rangle\right) \\
&= \left\langle \alpha''(t) + \varepsilon\left(t^* \alpha'''(t) + \widetilde{\alpha}''(t)\right), \overrightarrow{Z} + \varepsilon \overrightarrow{Z}^0 \right\rangle_{\mathbf{D}} \\
&= \left\langle \ddot{\overline{\alpha}}, \overset{\rightrightarrows}{Z} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \bar{0} \qquad (5.3.2)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\forall \overline{t} \in \overline{I}$ için $\ddot{\overline{\alpha}}(\overline{t}) \setminus \setminus_{\mathbf{D}} \overrightarrow{\overline{Z}}$ olduğundan $\ddot{\overline{\alpha}} = \overline{\lambda}\,\overrightarrow{\overline{Z}}$ olacak şekilde $\overline{\lambda}$ dual değeri vardır. Bu ifade (5.3.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left\langle \ddot{\overline{\alpha}}, \overrightarrow{\overline{Z}} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \left\langle \overline{\lambda}\,\overrightarrow{\overline{Z}}, \overrightarrow{\overline{Z}} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{\lambda} \left\langle \overrightarrow{\overline{Z}}, \overrightarrow{\overline{Z}} \right\rangle_{\mathbf{D}} = \overline{\lambda} = \overline{0}$$

elde edilir. $\ddot{\overline{\alpha}} = \overline{\lambda}\,\overrightarrow{\overline{Z}}$ olduğundan $\ddot{\overline{\alpha}} = \overrightarrow{\overline{0}}$ bulunur. Yani, $\forall \overline{t} \in \overline{I}$ için $\ddot{\overline{\alpha}}(\overline{t}) = \overrightarrow{\overline{0}}$ dir. O halde,

$$\ddot{\overline{\alpha}}(\overline{t}) = \alpha''(t) + \varepsilon\left(t^*\alpha'''(t) + \widetilde{\alpha}''(t)\right) = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}\,\varepsilon$$

olduğundan

$$\alpha''(t) = \overrightarrow{0}$$

ve

$$\left(t^*\alpha'''(t) + \widetilde{\alpha}''(t)\right) = \overrightarrow{0}$$

elde edilir. Yukarıdaki iki diferensiyel denklem çözüldüğünde $\alpha(t) = p + t\,\overrightarrow{v}$ ve $\widetilde{\alpha}(t) = p^* + t\,\overrightarrow{v}^*$ olacak şekilde $p, p^* \in \mathbb{R}^3$ noktaları ve $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}^* \in \mathbb{R}^3$ vektörleri mevcuttur. Bu durumda,

$$\begin{array}{ccl} \overline{\alpha} & : & \mathbf{D} \longrightarrow \overline{M} \\ \overline{t} & \longrightarrow & \overline{\alpha}(\overline{t}) = \alpha(t) + \varepsilon\left(t^*\alpha'(t) + \widetilde{\alpha}(t)\right) = \overline{p} + \overline{t}\,\overrightarrow{\overline{v}} \end{array}$$

eğri ailesi elde edilir. $\overline{\alpha}$ eğrileri $\overline{p} \in \mathbf{D}^3$ dual noktasından geçen ve doğrultmanı $\overrightarrow{\overline{v}} \in \mathbf{D}^3$ olan dual doğrulardır. Yani, dual düzlemin dual geodezikleri birer dual doğrudur.

6 . SONUÇ

Bu tezde, önce dual sayılar sistemi üzerinde bir sıralama bağıntısı tanımlanıp bu bağıntının ışığında dual uzayda baz ve bu bazdan bir topoloji elde edilmiştir. Daha sonra dual analitik fonksiyonlar genişletilerek bu fonksiyonların ters fonksiyonları incelenmiştir. Bu kavramlar kullanılarak dual uzayda yüzey kavramının tanımı yapılıp özellikleri örneklerle desteklenerek detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Son olarak, dual yüzey üzerindeki bazı özel eğrilerin tanımı yapılmıştır. Bu eğrilerin diferensiyel denklemleri oluşturulup bu denklemlerin çözümlerinden eğri aileleri elde edilmiştir.

İleri bir çalışma olarak, bu kavramlar birim dual küre üzerinde ele alınıp Study dönüşümü yardımıyla $\mathbb{R}^3$ uzayındaki karşılıkları incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Önder, M., Uğurlu, H.H., Dual darboux frame of a timelike ruled surfaces and darboux approach to mannheim offsets of timelike ruled surfaces. Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences 83, 163-169, 2013.

[2] Clifford, W.K., Preliminary sketch of biquaternions. Proc. London Math. Soc. 4, 381-395, 1873.

[3] Kotelnikov, A.P., Screw calculus and some of its applications in geometry and mechanics. Annals of the Imperial University, Kazan, 1895.

[4] Study, E., Geometrie der dynamen. druck und Verlag von B.G. Teubner, Leipzing, 1903.

[5] Hacısalihoğlu, H.H., Study map of a circle, Journal of the Fac. Sci. of K.T.Ü. I, 69-80, 1977.

[6] Cheng, H.H., Programming with dual numbers and its applications in mechanisms design. Eng. Comput. 10 (4): 212-229, 1994.

[7] Cheng, H.H., Thompson, S., Computer-aided displacement analysis of spatial mechanisms using the C^H programming language. Adv. Eng. Software 23 (3): 163-172, 1995.

[8] Wald, R.M., A new type of gauge invariance for a collection of massless spin-2 field, II. Geometrical interpretation. Class. Quant. Grav. 4 (5): 1279-1316, 1987.

[9] Gromov, N.A. Contractions and analytical continuations of classical groups:Unified Approach. Komi Science Center, Syktyvkar, 1990.

[10] Gromov, N.A. The matrix quantum unitary Cayley-Klein groups. J. Phys. A: Math. Gen. 26 (1):L5-L8, 1993.

[11] McCarthy, J.M., An introduction to theoretical kinematics. The MIT Press Cambridge, London, 1990.

[12] Gungor, M.A., Ersoy, S., Tosun, M., Dual Lorentzian spherical motions and dual Euler-Savary formula. European Journal of Mechanics A/Solids 28, 820-826, 2009.

[13] Sabuncuoğlu, A, Diferensiyel Geometri. Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlığı Tic. Ltd. Şti., Ankara, 2014.

[14] O'Neill, B., Elementary differential geometry. Elsiver, USA, 2006.

[15] Guggenheimer, H.W., Differential geometry. Dover Publication Inc., New York, 1977.

[16] Hacısalihoğlu, H.H., Sabuncuoğlu, A., Diferensiyel Geometri. Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 1983.

[17] Larson, R.E., Hostetler, R.P., Edward, B.H., Calculus with analytic geometry. D.C. Heath and Company, 1990.

[18] Brickell, F., Clark, R.S., Differentiable manifolds. Van Nostrand Reinhold Company, London, 1970.

[19] Sabuncuoğlu, A., Lineer Cebir. Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlığı Tic. Ltd. Şti., Ankara, 2014.

[20] Walenza, J.R., Linear algebra. Springer-Verlag, 1993.

[21] Koçak, M., Genel Topolojiye Giriş ve Problem Çözümleri. Nisan Kitapevi Yayınları, Eskişehir, 2015.

[22] Munkres, J.R., Topology, Prentice Hall Inc. Upper Saddle River, NJ 07458, USA, 2000.

[23] Hacısalihoğlu, H.H., Diferensiyel Geometri. Gazi Üniversitesi Basın-Yayın Yüksekokulu Basımevi, Ankara, 1983.

[24] Hacısalihoğlu, H.H., Hareket Geometrisi ve Kuaternionlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara, 1983.

[25] Önder, M., Uğurlu, H.H., Normal and spherical curves in dual space D^3. Mediterranean Journal of Mathematics, 10, 1527-1537, 2013.

[26] Li, Y., Pei, D., Evolutes of dual spherical curves for ruled surfaces. Mathematical Methods in the Applied Science 39 (11): 3005-3015, 2016.

[27] Dimetberg, F.M., The screw calculus and its applications to mechanics. Foreign Technology Division, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1965.

[28] Durmaz, O., Aktaş, B., Gündoğan. H., New approaches on dual space. Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics 35 (2): 437-458, 2020.

[29] Weldkamp, G.R., On the use of dual numbers, vectors and matrices in instantaneous spatial kinematics. Mechanism and Machine Theory 2, 141-156, 1976.

[30] Aktaş, B., Durmaz, O., Gündoğan, H., On the basic structures of dual space. Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics 35 (1): 253-272, 2020.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Buşra AKTAŞ

Doğum Tarihi : 14.01.1990 / Aydın

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise **:** Kayseri Lisesi, Haziran 2008

Lisans **:** Erciyes Üniversitesi, Matematik Bölümü, Haziran 2012

Yüksek Lisans **:** Fırat Üniversitesi, FBE, Ocak 2015

Çalıştığı Kurum ve Yıllar :

Fırat Üniversitesi, Matematik Bölümü (2013-2015)

Kırıkkale Üniversitesi, Matematik Bölümü (2015-)

Yayınları:

1.) Aktaş, B., Durmaz, O., Gündoğan, H., On the basic structures of dual space. Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics 35 (1): 253-272, 2020.

Araştırma Alanları **:** Dual Uzay, Hareket Geometrisi