YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİR MATRİSİN KARAKTERİSTİK MATRİSİNİN ADJOİNTİNİN KARAKTERİSTİK POLİNOMUNUN KATSAYILARI

Ali ÖZDEMİR

S.Ü. FEN - EDEBİYAT FAKÜLTESİ

KONYA — 1987

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİR MATRİSİN KARAKTERİSTİK MATRİSİNİN ADJOİNTİNİN KARAKTERİSTİK POLİNOMUNUN KATSAYILARI

Ali ÖZDEMİR

S.Ü. FEN - EDEBİYAT FAKÜLTESİ

KONYA — 1987

Ö N S Ö Z

Yüksek Lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma dört bölüm halinde ele alınmıştır. Birinci bölümde matrislerle ilgili tarifler ve bazı ön bilgiler verildi. İkinci ve Üçüncü bölümlerde matrisin Karekteristik denklemi ve karakteristik matrisin adjointi ile ilgili bağıntılar ele alındı.

Çalışmanın esasını teşkil eden dördüncü bölümde ise, matrisin karakteristik polinomunun katsayıları ile karakteristik matrisin karakteristik polinomunun katsayıları tetkik edilip, karakteristik matrisin karakteristik polinomunun katsayılarının karakteristik matrisin adjoindinden yararlanılarak nasıl bulunabileceği gösterildi.

Ayrıca, bu çalışmanın hemen her bölümünde teorik olarak anlatılan bazı kısımların daha iyi anlaşılabilmesi için örnekler ele alınıp çözümleri yapıldı. Bunlar arasında özellikle dördüncü bölüm için verilen problem ve bu problemin çözümü için bilgisayarla yapılan yaklaşım; çalışmanın esasını kavramak bakımından müşahhas bir sonuç teşkil etmektedir.

Çalışmalarım esnasında her konuda değerli hocam Doç.Dr. Sayın Ali Sinan'ın yardımları bana destek oldu. Bu vesile ilekendilerine en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ali ÖZDEMİR

İÇİNDEKİLER

I. BÖLÜM
GENEL BİLGİLER

1.1. MATRİSLER

Tarif 1.1.1.(Matris): m satır ve n sütuna yerleştirilmiş mxn tane reel veya kompleks sayıdan yada her hangi bir cismin elemanlarından meydana gelen dikdörtgen şeklinde bir A tabloyu gözönüne alalım. Bu tabloda i-inci satır ve j-inci sütunda yer alan elemanları a_{ij} ile gösterirsek

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1j} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2j} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots & a_{ij} \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mj} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeması elde edilir. A ile gösterdiğimiz bu tabloya m satır ve n sütunlu matris veya mxn boyutlu matris denir. Bu matris kısaca $A = \left[a_{ij}\right]_{mxn}$ $(i=1,2,\ldots m; j=1,2\ldots n)$ şeklinde gösterilir.

Tarif 1.1.2. (Kare Matris): Satır ve sütun sayısı eşit olan matrise kare matris denir.

Tarif 1.1.3. (Matris Köşegenleri): n- inci merteben bir kare matrisin $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots a_{nn}$ elemanlarına esas köşegen elemanları, $a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, \ldots, a_{n1}$ elemanlarınada yan köşegen elemanları denir.

Tarif1.1.4. (Birim Matris): Esas köşegen elemanları 1, diğer elemanları 0 olan kare matrise birim matris denir. I veya E ile gösterilir.

$$E = \left[a_{ij}\right]_{nxn}, \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Tarif 1.1.5 (Diagonal Matris): Esas köşegen elemanları sıfırdan farklı diğer elemanları sıfır olan kare matrise diagonal matris denir.

$$A = \left[a_{ij}\right]_{nxn}, \quad a_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Tarif 1.1.6.(Transpoze Matris): Bir A matrisinin satır ve sütunlarının yer değiştirmesiyle elde edilen yeni matrise; A matrisinin transpozesi denir. A^t ile gösterilir.

1.2. DETERMİNANTLAR

Tarif 1.2.1 (Permütasyon): Birbirinden farklı n tane elemanın bir sıra üzerinde herhangi bir dizilişine bunların bir permütasyonu denir. n elemanın meydana getirdiği permütasyonların sayısı p_n ise

$$P_n = n!$$

dir.

Tarif 1.2.2. (İnversiyon): $A = \{1,2,\ldots,n\}$ cümlesinde her eleman tabiî sayılar sırasına göre yazılıdır. Bunu bir permütasyon sırası olarak düşünelim.Bu sıralamanın dışında her hangi bir sıralama varsa bu sıralamada en az bir çift vardır ki, tabii sırasında değildir. Böyle bir sayı çiftine inversiyon denir.

Tarif 1.2.3. (Kombinezon): $p < n$ olmak üzere farklı elemanlı p- li gruplarteşkil etme işlemine kombinezon denir.

Tarif 1.2.4. (Determinant): n-inci mertebeden bir A kare matrisini gözönüne alalım. Matrisin elemanlarının satır numaralarını r_i ve sütun numaralarınıda s_j ile gösterelim. $(i,j=1,2,\ldots,n)$

Bu satır ve sütunların dizilişlerine karşılık 1,2...,n sayılarının herhangi birer permütasyonları I_r, ve bu permütasyonlara tebabül eden inversiyon sayılarıda I_s olmak üzere ;

$$\Delta = \sum (-1)^{I_r + I_s} a_{r_1 s_1} a_{r_2 s_2} a_{r_3 s_3} \cdots a_{r_n s_n}$$

toplamına A matrisinin determinantı denir. $|A|$ şeklinde gösterilir.

Tarif 1.2.5.(Regüler Matris): Determinant değeri sıfırdan farklı olan kare matrislere regüler matris denir.

Tarif 1.2.6.(Singüler Matris): Determinant değeri sıfır olan kare matrislere singüler matris denir.

1.3. BİR MATRİSİN MİNÖRÜ VE CEBİRSEL TAMAMLAYICILAR

Tarif 1.3.1.(Alt Matris): Her hangi bir matrisin belirli sayıda satır ve sütunlarını atmakla elde edilen yeni matrise, ilk matrisin alt matrisi denir.

Tarif 1.3.2.(Esas"prensibal„ alt matris): A bir kare matris olsun $1 \leq p \leq n$ olmak üzere n-in p-li kombinezonlarından elde edilen indislere karşılık gelen alt matrislere p- inci mertebeden prensibal alt matris denir.

$$A\begin{matrix} i_1 \; i_2 \ldots i_p \\ \\ i_1 i_2 \ldots i_p \end{matrix}$$

şeklinde gösterilir.

Tarif 1.3.3 (Minör): Herhangi bir A matrisinde bir a_{ij} elemanının bulunduğu satır ve sütunun silinmesiyle elde edilen alt matrisin determinant değerine a_{ij} elemanının minörü denir.

Tarif 1.3.4.(İşaretli Minör" Ko faktör"): Bir matrisin a_{ij} elemanına ait minörü Δ_{ij} ise, $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ şeklinde tarif edilen değere a_{ij} elemanının işaretli minörü (ko faktörü) denir.

Tarif 1.3.5.(Tamamlayıcı Minör): A nxn kare matris olsun. $1 \leq m < n$ olmak üzere,satır ve sütunların m tanesini sırasıyla $i_1, i_2, \ldots, i_m$ ve $j_1, j_2, \ldots, j_m$ şeklinde gösterirsek geri kalan satır ve sütunlar

$i_{m+1}, i_{m+2}, \dots i_n$ ve $j_{m+1}, j_{m+2}, \dots j_n$ şeklinde olacaktır. Bu şekilde elde edilen

$$A^{j_1, j_2, \dots j_m}_{i_1, i_2, \dots i_m} \quad \text{ve} \quad A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \dots j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, i_n}$$

matrisleri A nın birer alt matrisi olup, A nın tamamlayıcı minörleridirler.

Tarif 1.3.6. (Cebirsel Tamamlayıcı):

$i_1+i_2+\dots+i_m+ j_1+j_2+\dots+j_m = p$ ve

$i_{m+1}+i_{m+2}+\dots+i_n+j_{m+1}+j_{m+2}+\dots+j_n = q$ olmak üzere;

$$(-1)^p \left| A^{j_1, j_2, \dots j_m}_{i_1, i_2, \dots, i_m} \right|$$

işaretli minörüne

$$\left| A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \dots j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, \dots i_n} \right|$$

determinantının cebirsel tamamlayıcısı denir. Burada;

$$(-1)^q \left| A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \dots j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, \dots i_n} \right|$$

işaretli minörüde;

$$\left| A^{j_1, j_2, \dots j_m}_{i_1, i_2, \dots i_m} \right|$$

determinantının cebirsel tamamlayıcısıdır.

Örnek 1.3.1. $A = \left[a_{ij} \right]_{5x5}$ matrisini ele alalım.

Burada;

$$\left| A^{1,5}_{2,3} \right| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{25} \\ a_{31} & a_{35} \end{vmatrix} \quad \text{ve} \quad \left| A^{2,3,4}_{1,4,5} \right| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}$$

minörleri birbirinin tamamlayıcısıdır. Ayrıca;

$$(-1)^{2+3+1+5} \left|A_{2\;3}^{1\;5}\right| = -\left|A_{2\;3}^{1\;5}\right|$$ işaretli minörü $\left|A_{1,4,5}^{2,3,4}\right|$

determinantının cebirsel tamamlayıcısıdır. Benzer şekilde;

$$(-1)^{1+4+5+2+3+4} \left|A_{1,4,5}^{2,3,4}\right| = -\left|A_{1,4,5}^{2,3,4}\right|$$

işaretli minörü ise

$$\left|A_{2,3}^{1,5}\right|$$

determinantının cebirsel tamamlayıcısıdır.

1.4 ADJOİNT MATRİS

Tarif 1.4.1. (Adjoint Matris): $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ matrisinin a_{ij} elemanlarının işaretli mönörlerini A_{ij} lerle gösterirsek, bu takdirde elemanları A_{ij} ler olan matrisin transpozesine A matrisinin adjointi denir.

adj A veya A^* ile gösterilir.

Yani;

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisinin adjointi

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21}\cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22}\cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \\ A_{1n} & A_{2n}\cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$ şeklinde olur.

Adjoint matrisin birçok özellikleri vardır. En önemlileri şöyle sıralanabilir.

1. Özellik: $A\,A^* = A^*A = |A|\;E$

2. Özellik: $|A^*| = |A|^{n-1}$

3. Özellik: Eğer A ve B n-kare matrisler ise

$$\text{adj } AB = \text{adj } B.\ \text{adj } A \quad \text{dır.}$$

4. Özellik: A matrisinin adjointinin adjointi A^{**} ile gösterilirse $A^{**} = |A|^{n-2}.A$ dır.

I.4.2. Bir Adjointin Minörü

Teorem I.4.2.I. $A = (a_{ij})_{nxn}$ matrisinin bir m kare minörü $\left|A^{j_1,j_2,\dots j_m}_{i_1,i_2,\dots i_m}\right|$, bunun A daki tamamlayıcısı $\left|A^{j_{m+1},j_{m+2},\dots j_n}_{i_{m+1},i_{m+2},\dots i_n}\right|$ ve adj A nın bir m kare minörü $\left|M^{j_1,j_2,\dots j_m}_{i_1,i_2,\dots i_m}\right|$ olsun. Bunun elemanlarının adj A da işgal ettiği yer $\left|A^{j_1,j_2,\dots j_m}_{i_1,i_2,\dots i_m}\right|$ -in elemanlarının A da işgal etteği yer ile aynıdır.

İspat

$$|A| \left|M^{j_1 j_2 \dots j_m}_{i_1 i_2 \dots i_m}\right| = (-1)^s |A|^m \left|A^{j_{m+1},j_{m+2},\dots j_n}_{i_{m+1},i_{m+2},\dots i_n}\right| \quad \text{olur}$$

$(i_1+i_2+\dots+i_m+j_1+j_2+\dots j_m = s$ dir).

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc}
a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_m} & a_{i_1j_{m+1}} & \dots & a_{i_1j_n} \\
a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_m} & a_{i_2j_{m+1}} & \dots & a_{i_2j_n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{i_mj_1} & a_{i_mj_2} & \dots & a_{i_mj_m} & a_{i_mj_{m+1}} & \dots & a_{i_mj_n} \\
\hline
a_{i_{m+1}j_1} & a_{i_{m+1}j_2} & \dots & a_{i_{m+1}j_m} & a_{i_{m+1}j_{m+1}} & \dots & a_{i_{m+1}j_n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{i_nj_1} & a_{i_nj_2} & \dots & a_{i_nj_m} & a_{i_nj_{m+1}} & \dots & a_{i_nj_n}
\end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cccc|cccc}
\alpha_{i_1j_1} & \alpha_{i_2j_1} & \dots & \alpha_{i_mj_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\alpha_{i_1j_2} & \alpha_{i_2j_2} & \dots & \alpha_{i_mj_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\alpha_{i_1j_m} & \alpha_{i_2j_m} & \dots & \alpha_{i_mj_m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\hline
\alpha_{i_1j_{m+1}} & \alpha_{i_2j_{m+1}} & \dots & \alpha_{i_mj_{m+1}} & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\alpha_{i_1j_n} & \alpha_{i_2j_n} & \dots & \alpha_{i_mj_n} & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right]$$

$$
= \left[\begin{array}{cccc|ccc}
|A| & 0 & \dots & 0 & a_{i_1 j_{m+}} & \dots & a_{i_1 j_n} \\
0 & |A| & \dots & 0 & a_{i_2 j_{m+1}} & \dots & a_{i_2 j_n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & |A| & a_{i_m j_{m+1}} & \dots & a_{i_m j_n} \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & a_{i_{m+1} j_{m+1}} & \dots & a_{i_{m+1} j_n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & a_{i_n j_{m+1}} & \dots & a_{i_n j_n}
\end{array}\right]
$$

İki tarafın determinantlarını aldığımızda bu eşitlik

$$
(-1)^s \; |A| \; \left| M \begin{matrix} j_1 j_2 & \dots & j_m \\ i_1 i_2 & \dots & i_m \end{matrix} \right| = |A|^m \; \left| A \begin{matrix} j_{m+1} j_{m+2} & \dots & j_n \\ i_{m+1} \; i_{m+2} & \dots & i_n \end{matrix} \right|
$$

haline gelir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

2. BÖLÜM

BİR MATRİSİN KARAKTERİSTİK DENKLEMİ

2.1. Karakteristik Değerler ve Karakteristik Vektörler

Tarif 2.1.1 (Karakteristik Vektör): Herhangi bir K cismi üzerinde tarif edilen bir F vektör uzayını yine kendisine dönüştüren lineer dönüşümü ele alalım. A, nxn tipinde bir matris olmak üzere;

$$f: X \longrightarrow AX$$

olsun. Bu dönüşümde sıfırdan farklı öyle vektörler düşünelebilirki, bunların görüntüleri yine aynı vektöre paralel kalır.
Şöyleki; $\lambda \in K$ olmak üzere

$$f(x) = AX = \lambda X \qquad (2.1)$$

eşitliğini sağlayan X vektörlerine A matrisinin karakteristik vektörleri denir.

Tarif 2.1.2. (Karakteristik değer): $AX = \lambda X$ eşitliğini sağlayan λ değerlerine A matrisinin karakteristik değerleri denir.

2.2. Karakteristik Matris ve Karakteristik Polinom

Tarif 2.2.1 (Karakteristik Matris): E birim matris olmak üzere $AX=\lambda X$ eşitliğini;

$$AX=\lambda EX$$

Şeklinde yazabiliriz. Buradan;

$$\lambda EX - AX = 0$$

$$(\lambda E - A)X = 0 \qquad 2.2$$

elde edilir. $(\lambda E-A)$ matrisine dönüşümün karakteristik matrisi denir.

Tarif 2.2.2 (Karakteristik Denklem): Karakteristik matrisi $C(\lambda)$ ile gösterirsek;

$$C(\lambda) = (\lambda E-A) = \begin{bmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

bu durumda (2.2) eşitliği $C(\lambda)X=0$ haline gelir. Bu ise n bilinmeyen ile n tane denklem ihtiva eden homojen bir denklem sistemidir. Sistemin sıfırdan farklı çözümünün olabilmesi için katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması gerekir. Böylece; $C(\lambda)$ nın determinantını alıp bunu $\Delta(\lambda)$ ile gösterirsek;

$$\Delta(\lambda) = |C(\lambda)| = \begin{vmatrix} (\lambda-a_{11}) & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (\lambda-a_{22}) & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & (\lambda-a_{nn}) \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

olur. Bu determinanta A matrisinin karakteristik determinantı denir. Determinantı açtığımızda λ ya bağlı

$$\Delta(\lambda)= \lambda^n + S_1\lambda^{n-1} + S_2\lambda^{n-2} + \ldots + S_{n-1}\lambda + S_n \quad (2.5)$$

polinomu elde edilir. Bu polinom A matrisinin karakteristik polinomudur. Karakteristik polinomu sıfıra eşitleyerek elde edilen

$$\Delta(\lambda)= \lambda^n+S_1\lambda^{n-1}+S_2\lambda^{n-2}+\ldots+S_{n-1}\lambda+ S_n =0 \quad (2.6)$$

polinomuna A matrisinin karakteristik denklemi denir.

2.3. Karakteristik Denklemin Özellikleri

Karakteristik polinomda λ^n -in katsayısı 1 dir. Çünkü; karakteristik matrisin determinantını göz önüne alırsak; esas köşegen üzerindeki elemanların çarpımı

$$(\lambda-a_{j_1 j_1})(\lambda-a_{j_2 j_2})\ldots(\lambda-a_{j_n j_n})$$

şeklinde olup, bu çarpım λ^n-i ihtiva eder.

λ^{n-p}-nin kuvveti, köşegen elemanlarının (n-p)tanesini

$(\lambda-a_{j_1 j_1}, \lambda-a_{j_2 j_2}, \ldots, \lambda-a_{j_{n-p} j_{n-p}})$ ihtiva eden (2.4) determinantının elemanlarından oluşur. Bu köşegen elemanlarının çarpımları

1,2,...,n indislerinin (2.4) determinantında $j_1 j_2 \ldots j_{n-p}$ lerle $i_1\ i_2 \ldots\ i_p$ lerin komple bir cümlesi olmak üzere prensibal minörleri

$$A^{i_1 i_2 \ldots\ i_p}_{i_1 i_2 \ldots\ i_p}$$

olan λ çarpanlı serbest terimi ile meydana gelir.

O halde (2.4) -nin açılımında $j_1 j_2 \ldots j_{n-p}$ ler 1,2,...,n indislerinin (n-p) tanesinin mümkün olan bütün kombinezonları alındığında $(-\lambda)^{n-p}$ -nin S_p katsayısı A matrisinden p- inci mertebeden prensibal minörlerin toplamı olarak elde edilir.

Yani; $$A^{i_1\ i_2 \ldots\ i_p}_{i_1\ i_2 \ldots\ i_p}$$

A matrisinin p kare prensibal minörü olmak üzerek S_p katsayısı

$$S_p = (-1)^p \sum_{\mathcal{S}} A^{i_1 i_2 \ldots\ i_p}_{i_1 i_2 \ldots\ i_p}$$

şeklinde olur. Burada 1,2,... ,n indislerinden her seferinde p tane alarak elde edilen

$$\mathcal{S} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2.\ldots.p}$$

farklı kombinasyonlar için $i_1 i_2 \ldots\ i_p$ yazılır.

2.4. Karakteristik değer ve Karakteristik Vektörlerle ilgili bazı sonuçlar.

Sonuç 2.4.1. A matrisinin karakteristik değerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ ise A+E matrisinin karakteristik değerleri de $\lambda_1+1, \lambda_2+1, \ldots \lambda_n+1$ dir

İspat (2.1) denkleminden

$$\begin{array}{rl} & AX_i = \lambda_i\ X_i \\ + & EX_i = 1.\ X_i \\ \hline & (A+E)X_i = (\lambda_i+1)X_i \end{array}$$

elde edilir.

Sonuç 2.4.2. A matrisinin karakteristik değerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ ve $k \neq 0$ bir skaler ise kA nın karakteristik değerleri $k\lambda_1, k\lambda_2, k\lambda_n$ olur.

İspat: $AX = \lambda_i X$ idi . İki tarafı $k \neq 0$ ile çarparsak

$$kAX = k\lambda_i X$$

elde edilir. Yani kA matrisin karakteristik değerleri $k\lambda_i$ olur.

Sonuç 2.4.3. A matrisinin karakteristik değerleri $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ ise A^k matrisinin karakteristik değerleri $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots \lambda_n^k$ olur.

İspat:

$$\begin{array}{rl} & AX_1 = \lambda_1 X_1 \\ \times & AX_1 = \lambda_1 X_1 \\ \hline & A^2 \langle X_1, X_1 \rangle = \lambda_1^2 \langle X_1, X_1 \rangle \\ & A^2 = \lambda_1^2 \end{array}$$

elde edilir.

Sonuç 2.4.4. A regüler bir matris olmak üzere A'nın sıfırdan farklı bir karakteristik değeri λ ise, $\frac{|A|}{\lambda}$ da adj A-nın bir karakteristik değeridir.

İspat: Her hangi bir A matrisinin karakteristik denklemi

$$\lambda^n + S_1 \lambda^{n-1} + S_2 \lambda^{n-2} + \ldots + S_{n-1} \lambda + S_n = 0$$

şeklinde idi. Ayrıca ; S_i, $(i=1,2,\ldots,n-1)$, $(-1)^i$ kere A matrisinin i-kare prensibal minörlerinin toplamı idi. Buradan

$$\lambda^n + S_1 \lambda^{n-1} + S_2 \lambda^{n-2} + \ldots + S_{n-1} \lambda + (-1)^n |A| = 0$$

yazılır. A nın adjointinin karakteristik polinomunu teşkil edersek

$$|\mu E - \text{adj } A| = \mu^n + P_1 \mu^{n-1} + P_2 \mu^{n-2} + \ldots + P_{n-1} \mu + (-1)^n |\text{adj } A|$$

burada $P_j(j=1,2,\ldots,n-1)$, $(-1)^j$ kere adjA'nın j-kare prensibal minörlerinin toplamı olacaktır. S_i ve P_j nin tariflerinden ayrıca;

$$|\mathrm{adj}\ A| = |A|^{n-1}$$

eşitliğinden;

$$p_1=(-1)^n\ S_{n-1}$$
$$p_2=(-1)^n |A|\, S_{n-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_{n-1}=(-1)^n |A|^{n-2}\ S_1$$

olur. Böylece;

$$|\mu E-\mathrm{adj}\ A| =(-1)^n\Big\{(-1)^n\ \mu^n+ S_{n-1}\ \mu^{n-1}+ S_{n-2}|A|\,\mu^{n-2}+\ldots+S_2|A|^{n-3}\ \mu^2 +S_1|A|^{n-2}\mu +|A|^{n-1}\Big\}$$

yazılır. Her iki tarafı $|A|^{n-1}$ ile bölersek;

$$|A|^{1-n}\ |\mu E-\mathrm{adj}\ A|= (-1)^n\ \Big\{1+S_1\Big(\frac{\mu}{|A|}\Big)+\ldots+S_{n-1}\Big(\frac{\mu}{|A|}\Big)^{n-1}+(-1)^n\Big(\frac{\mu}{|A|}\Big)^n|A|\Big\}$$

elde edilir. Eşitliğin ikinci tarafı $f(\mu)$ ile gösterilirse;

$$f\Big(\frac{|A|}{\lambda}\Big) = (-1)^n\ \Big\{1 + S_1\ \Big(\frac{1}{\lambda}\Big) + \ldots+S_{n-1}\ \Big(\frac{1}{\lambda}\Big)^{n-1} +(-1)^n\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)^n\ |A|\Big\}$$

olup, buradan her iki taraf λ^n ile çarpılırsa

$$\lambda^n\ f\Big(\frac{|A|}{\lambda}\Big) = (-1)^n\ \Big[\lambda^n+ S_1\,\lambda^{n-1}+\ldots+ S_{n-1}\lambda + (-1)^n\ |A|\Big]\ =0$$

bulunur. Böylece $\frac{|A|}{\lambda}$ değeri adj A'nın bir karakteristik kökü olduğu ispatlanmış olur.

3. BÖLÜM

ADJOİNT MATRİS VE KARAKTERİSTİK POLİNOM

3.1. Genel Bağıntılar, Hamilton-Cayley Teoremi

A herhangi bir matris olmak üzere $\lambda E-A$'nın adjoint matrisi $B(\lambda)$ olsun. Adjoint matrisin özelliğinden;

$$A.\mathrm{adj}\,A = \mathrm{adj}\,A.A = |A|\,E \tag{3.1}$$

yazılabiliyordu. Bu bağıntıyı $\lambda E-A$ ile $B(\lambda)$ arasında yazarsak;

$$(\lambda E-A).B(\lambda) = \Delta(\lambda)\,E \tag{3.2}$$

$$B(\lambda).(\lambda E-A) = \Delta(\lambda)\,E \tag{3.3}$$

bağıntıları elde edilir. Burada $\Delta(\lambda)\,E$ diagonal olup bir polinom matristir. Bu bağıntılar $\Delta(\lambda)\,E$ polinom matrisinin sağdan ve soldan $\lambda E-A$ ile kalansız olarak bölüğebileceğini gösterir. Buradan;

$$\Delta(A)\,E=0$$

$$\Delta(A)=0 \tag{3.4}$$

olduğu görülür.

Teorem 3.1.1 (Hamilton - Cayley) : Her kare matris kendi karakteristik polinomunu sağlar.

İspat: A matrisinin karakteristik denklemi;

$$\Delta(\lambda) = |\lambda E-A| = 0$$

idi. Burada λ yerine A yazılırsa;

$$\Delta(A) = |AE-A| = 0$$

$$\Delta(A) = |A-A| = 0$$

bulunur ki, bu da denklemin sağlandığını gösterir.

3.2. Karakteristik Matrisin Adjointi

$\Delta(\lambda)$ ile $B(\lambda)$ adjoint matris arasında bir bağıntı kurabilmek için;

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n - S_1\lambda^{n-1} - S_2\lambda^{n-2} - \ldots - S_{n-1}\lambda - S_n \tag{3.5}$$

polinomunu göze alalım.

$\Delta(\lambda)-\Delta(\mu)$ farkını teşkil edersek bu fark $(\lambda-\mu)$ ile kalansız olarak bölünebilir .

$$\delta(\lambda,\mu)=\frac{\Delta(\lambda)-\Delta(\mu)}{\lambda-\mu} \tag{3.6}$$

$$=\lambda^{n-1}+(\mu-S_1)\lambda^{n-2}+(\mu^2-S_1\mu-S_2)\lambda^{n-3}+\ldots$$
$$+(\mu^{n-2}-S_1\mu^{n-3}-S_2\mu^{n-4}-\ldots-S_{n-3}\mu^2-S_{n-2})\lambda$$
$$+(\mu^{n-1}-S_1\mu^{n-2}-S_2\mu^{n-3}-\ldots-S_{n-3}\mu^2-S_{n-2}\mu-S_{n-1}) \tag{3.7}$$

Yukarıdaki ifadede λ yerine λE ve μ yerine de A matrisini yazıp içler dışlar çarpımı yaparsak;

$$\Delta(\lambda E)-\Delta(A)=\delta(\lambda E,A)(\lambda E-A) \tag{3.8}$$

elde edilir

Hamilton -Cayley teoreminden $\Delta(A)=0$ olduğundan;

$$\Delta(\lambda E)=\delta(\lambda E,A)(\lambda E-A) \tag{3.9}$$
$$\Delta(\lambda)E=\delta(\lambda E,A)(\lambda E-A) \tag{3.10}$$

yazabiliriz. Bu son eşitlik daha önce elde ettiğimiz;

$$B(\lambda)(\lambda E-A)=\Delta(\lambda)E \tag{3.11}$$

denklemi ile aynıdır. Bölümün tekliğinden dolayı;

$$B(\lambda)=\delta(\lambda E,A) \tag{3.12}$$

olarak bulunurki,bu da karakteristik matrisin adjointidir.

(3.7) denklemini tekrar ele alırsak;

$$\delta(\lambda E,A)=E\lambda^{n-1}+(A-S_1E)\lambda^{n-2}+(A^2-S_1A-S_2E)\lambda^{n-3}+\ldots$$
$$+(A^{n-2}-S_1A^{n-3}-S_2A^{n-4}-\ldots-S_{n-3}A-S_{n-2}E)\lambda$$
$$+(A^{n-1}-S_1A^{n-2}-S_2A^{n-3}-\ldots-S_{n-2}A-S_{n-1}E) \tag{3.13}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada; $B(\lambda)$ adjoint matrisini en genel olarak

$$B(\lambda)=E\lambda^{n-1}+B_1\lambda^{n-2}+B_2\lambda^{n-3}+\ldots+B_{n-2}\lambda+B_{n-1}$$

şeklinde elde ederiz . Burada; (3.14)

$B_1=A-S_1E$

$B_2=A^2-S_1A-S_2E=A(A-S_1E)-S_2E=AB_1-S_2E$

$B_3=AB_2-S_3E$

....

....

....

$B_{n-2}=AB_{n-3}-S_{n-2}E$

$B_{n-1}=AB_{n-2}-S_{n-1}E$

dir. Buradan aşağıdaki sonuçlar yazılabilir.

Sonuç: 1. $B_k=A\,B_{k-1}-S_kE$ dir.

Sonuç: 2. Hamilton-Cayley teoreminden;

$AB_{n-1}-S_nE=0$ dır. Çünkü;

$$\Delta(A)=A^n-S_1A^{n-1}-S_2A^{n-2}-\ldots-S_{n-1}A-S_nE=0$$

$$=A(A^{n-1}-S_1A^{n-2}-S_2A^{n-3}-\ldots-S_{n-1}E)-S_nE=0$$

parantez içerisi B_{n-1}'e eşit olduğundan;

$=AB_{n-1}-P_nE=0$ elde edilir.

Sonuç:3. Eğer A singüler değilse

$S_n=(-1)^{n-1}\;|A|$ dır. Çünkü;

$$\Delta(\lambda)=\lambda^n-S_1\lambda^{n-1}-S_2\lambda^{n-2}-\ldots-S_{n-2}\lambda^2-S_{n-1}\lambda-S_n$$

karakteristik polinomunda s-inci katsayı A matrisinin S mertebeden prensibal alt matrisleri determinantları toplanı ile $(-1)^s$ -in işareti idi. O halde $-S_n$ katsayısı $|A|$ ve işaretide $(-1)^n$ olacağından;

$$-S_n = (-1)^n \; |A|$$

$$S_n = (-1)^{n-1} |A|$$

olur.

Sonuç:4. $A^{-1} = \frac{1}{S_n} B_{n-1}$

dir. Çünkü; $A \; B_{n-1} - s_n E = 0$

sonucundan $A \; B_{n-1} = S_n E$
olur.
her ikitarafı soldan A^{-1} ile çarpıp

$$A^{-1} \; A \; B_{n-1} = A^{-1} S_n E$$

$$E \; B_{n-1} = A^{-1} S_n E \quad .$$

iki tarafı S_n ile bölersek

$$A^{-1} = \frac{1}{S_n} B_{n-1}$$

elde edilir.

Örnek. 3.2.1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisini ele alalım.

$$\Delta(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ 1 & \lambda & -3 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 3$$

$$\delta(\lambda, \mu) = \frac{\Delta(\lambda) - \Delta(\mu)}{\lambda - \mu}$$

$$\delta(\lambda, \mu) = \frac{\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 3 - (\mu^3 - \mu^2 - \mu - 3)}{\lambda - \mu}$$

$$\delta(\lambda, \mu) = \lambda^2 + (\mu - 1)\lambda + \mu^2 - \mu - 1$$

$$B(\lambda) = \delta(\lambda E, A) = \lambda^2 E + (A - E)\lambda + A^2 - A - E$$

$$B_1 = A - E \qquad \text{ve} \qquad B_2 = A^2 - A - E$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B(\lambda) = \lambda^2 E + B_1 \lambda \div B_2$$

$$B(\lambda) = \lambda^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 3 & 2\lambda & 6 \\ -\lambda + 3 & \lambda^2 - \lambda & 3\lambda - 3 \\ \lambda - 1 & \lambda + 1 & \lambda^2 - \lambda + 2 \end{bmatrix}$$

3.3. Matrislerin Minimal Polinomları

Tarif 3.3.1 (Sıfırlayan Polinom):

$$f(\lambda) = \lambda^n + S_1 \lambda^{n-1} + S_2 \lambda^{n-2} + \ldots + S_{n-1}\lambda + S_n$$

polinomunu ele alalım.

A, n- kare matris ve E de aynı mertebeden birim matris olmak üzere;

$$f(A) = A^n + S_1 A^{n-1} + S_2 A^{n-2} + \ldots + S_{n-1} A + S_n E$$

matris polinomu sıfıra eşitse;

yani $f(A)=[0]$ ise $f(\lambda)$ polinomuna A matrisinin sıfırlayan polinomu denir.

Tarif 3.3.2.(Minimal Polinom): A- kare matrisinin sıfırlayanları arasında derecesi en küçük olanına matrisin minimal polinomu denir.

Tarif 3.3.3(Monik Polinom): A-kare matrisinin minimal polinomunun en büyük kuvvetinin katsayısı 1 ise bu polinoma monik polinom denir.

Teorem 3.3.1 Bir matrisin sıfırlayan polinomu, minimal polinomu tarafından kalansız olarak bölünür.

İspat: A matrisinin sıfırlayan polinomu $f(\lambda)$ ve minimal polinomuda $\varphi(\lambda)$ olsun. Sıfırlayan polinomun derecesi minimal polinomun derecesinden büyüktür. Bölme algoritması gereğince,

$$f(\lambda) = \varphi(\lambda)\, q(\lambda) + r(\lambda)$$

yazılır. Burada $r(\lambda)$ -nın derecesi $\varphi(\lambda)$ nın derecesinden küçüktür. λ yerine A yazılırsa

$$f(A) = \varphi(A)\quad q(A) + r(A)$$

elde edilir. sıfırlayan polinom tarifinden $f(A)=0$ olacağından $\varphi(A)=0$ ve buradanda $r(A)=0$ sonucuna varılır.

3.4. Bir $A(\lambda)$ Polinom Matrisinin Kanonik Formu :

$A(\lambda)$, m x n tipinde bir polinom matris olsun. Birtakım elemanter işlemler yaparak $A(\lambda)$ nın kanonik formunu bulmaya çalışalım.

$a_{ik}(\lambda)$ elemanları arasında sıfır olmayan ve λ ya göre derecesi en küçük olanlardan birini seçelim. Uygun satır ve sütun değişikliği ile bu elemanı $a_{11}(\lambda)$ yerine getirelim. Sonra $a_{11}(\lambda)$ ile birinci satırın diğer elemanlarını bölelim.

$$a_{1k}(\lambda)= a_{11}(\lambda)\, q_{1k}(\lambda) + r_{1k}(\lambda) \qquad k=(2,3,\ldots n)$$

$r_{1k}(\lambda) \neq 0$ ise birinci sütunu $q_{1k}(\lambda)$ ile çarpıp k -inci sütundan çıkardığımızda $a_{1k}(\lambda)$ elemanı yerine $r_{1k}(\lambda)$ gelmiş olur.

$r_{1k}(\lambda)$ nın derecesi $a_{11}(\lambda)$ nın derecesinden küçüktür. Tekrar uygun satır ve sütün işlemleri ile $r_{1k}(\lambda)$ elemanını sol üst köşeye getirelim. Yeni elemana yine $a_{11}(\lambda)$ diyelim. Bundan gibi bölme yaparak sonlu sayıda tekrardan sonra birinci satırda $a_{11}(\lambda)$ elemanının dışındaki elemanlar sıfıra özdeş olur.

Aynı işlemler sütünlar için de tekrarlanır.

$$a_{i1}(\lambda) = q_{ik}(\lambda)\, a_{11}(\lambda) + r_{i1}(\lambda) \qquad (i=2,3\ldots n)$$

sıfır olmayan elemanları tekrar sol üst köşeye getirmek suretiyle $a_{11}(\lambda)$ dan başka diğer elemanların hepsi sıfır yapılır. Böylece $A(\lambda)$ polinom matrisi;

$$\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda), & 0, 0, \ldots\ldots\ldots, 0 \\ 0\ , & a_{22}(\lambda), \ldots\ldots\ldots, a_{2n}(\lambda) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0, & a_{m2}(\lambda), \ldots\ldots\ldots, a_{mn}(\lambda) \end{bmatrix} \qquad (1)$$

haline gelir.

Eğer $a_{ik}(\lambda)$ $(i=2\ldots m, k=2\ldots n)$ elemanlarından en az biri $a_{11}(\lambda)$ ile kalansız bölünüyorsa, o zaman bu elemanı birinci satır veya birinci sütuna ekleyerek ve daha önce yapılan işlemler tekrarlanarak yukardaki matris;

$$\begin{bmatrix} a_1(\lambda) & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & b_{22}(\lambda) \ldots b_{2n}(\lambda) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & b_{m2}(\lambda) \ldots b_{mn}(\lambda) \end{bmatrix} \qquad (2)$$

şekline dönüşür .Burada $a_1(\lambda)$, $b_{ik}(\lambda)$ elemanlarını kalansız olarak böler. Benzer şekilde;

$$\begin{bmatrix} b_{22}(\lambda) \ldots\ldots\ldots b_{2n}(\lambda) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m2}(\lambda) \ldots\ldots\ldots b_{mn}(\lambda) \end{bmatrix} \qquad (3)$$

matrisi için aynı işlemler tekrarlanırsa;

$$\begin{bmatrix} a_1(\lambda),0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 \quad a_2(\lambda) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 \quad 0 \quad C_{33}(\lambda) \ldots\ldots\ldots C_{3n}(\lambda) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \quad 0 \quad C_{m3}(\lambda) \ldots\ldots C_{mn}(\lambda) \end{bmatrix} \qquad (4)$$

elde edilir. Burada da $a_2(\lambda)$, $a_1(\lambda)$ tarafından kalansız olarak bölünür. Aynı işlemlere devam edilirse;

$$\begin{bmatrix} a_1(\lambda), \quad 0, \quad 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 \quad a_2(\lambda) \quad 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \quad 0 \ldots\ldots a_s(\lambda) \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \quad 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

matrisi elde edilir.

Buradan şu sonuçları söyleyebiliriz:

1. $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, ..., $a_s(\lambda)$ polinomları sıfıra özdeş değillerdir.
2. $a_2(\lambda)$, $a_3(\lambda)$,...., $a_s(\lambda)$ polinomlarının herbiri önceki tarafından kalansız olarak bölünebilir.
3. $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$,...., $a_s(\lambda)$ polinomları moniktir.

Tarif 3.4.1. (Kanonik diagonal matris): Yukardaki özellikleri sağlayan $A(\lambda)$ polinom matrisinin indirgenmiş şekline kanonik diagonal matris denir.

BÖLÜM 4.

MATRİS VE ADJOİNT MATRİS POLİNOMLARININ KATSAYILARI

4.1. Matrisin Karakteristik Polinomunun Katsayıları

Her hangi bir A n-kare matrisi verildiğinde A matrisini kanonik diagonal hale getirerek bunun determinant değerini aldığımızda elde edilen polinom A matrisinin karakteristik polinomu idi. Bu polinom;

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{n} - P_1 \lambda^{n-1} - P_2 \lambda^{n-2} - \dots - P_{n-1}\lambda - P_n$$

şeklinde idi $\Delta(\lambda)$ polinomunun P_i katsayıları A matrisinin P-inci mertebeden prensibal alt matrisleri yardımıyle bulunduğundan dolayı ki,

P_1 katsayısı A matrisinin 1. mertebe prensibal alt minörleri toplamı olup; ρ alt matrislerin sayısını göstermek üzere

$$P_1 = (-1)^1 \sum_{\rho} \left| A_{i}^{i} \right|, \quad i=1,2,3,\dots n, \ \rho = \binom{n}{1} = \frac{n!}{1.(n-1)!} = n$$

$$P_1 = (-1)^1 (a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn})$$

şeklinde yazılabilir.

$$P_2 = (-1)^2 \sum_{\rho} \left| A_{i_1 \ i_2}^{i_1 \ i_2} \right|, \ \rho = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

1,2-1,3-1,4...1,n ;2,3-2,4...,2,n; 3,4-3,5...3,n ...(n-1),n

$$a_{12}^{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad a_{13}^{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \dots a_{1n}^{1n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \dots$$

$$\vdots$$

$$P_n = (-1)^n \sum_{\rho} \left| A_{i_1 \ i_2 \dots i_n}^{i_1 \ i_2 \dots i_n} \right|, \ \rho = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1$$

$$P_n = (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1} \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4.2. Adjoint Matrisin Karakteristik Polinomunun Katsayıları

A, nxn şeklinde bir matris olmak üzere $\lambda E-A$ karakteristik matrisinin adjointi olan $B(\lambda)$ yı ele alalım. Yukarıda bir polinom matrisinin kanoniktdiagonal hale getirilişini görmüştük. Benzer düşünce ile $B(\lambda)$ polinom matrisi de kanonik diagonal hale getirildiğinde başlangıçta ele alınan A matrisinin karakteristik polinomunun (n-1) inci kuvvetine eşit olduğu kolayca görülür.

Yani, $B(\lambda)$ nın karakteristik polinomunu $\Delta^*(\lambda)$ ile gösterirsek

$$\Delta^*(\lambda) = (\Delta(\lambda))^{n-1} \quad \text{olur.}$$

Çünkü; $B(\lambda)$ yı elde ederken bunun elemanlarının birer polinom olduklarını ve bu polinomların en büyüğünün derecesinin (n-1) olduğunu görmüştük.

Bu durumda en genel anlamda nxn tipinde bir matris ele alındığında;

$$\Delta^*(\lambda) = (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n)^{n-1}$$

$$\Delta^*(\lambda) = (n-1)! \sum \frac{(\lambda^n)^x (a_1 \lambda^{n-1})^y (a_2 \lambda^{n-2})^z \ldots (a_n)^t}{x!\ y!\ z!\ \ldots t!}$$

(burada, $x+y+z+\ldots+t=n-1$ dir.)

Bu ise λ ya göre $(n^2-n)=n(n-1)$ dereceden bir polinom olacaktır. Bu polinomun katsayılarını $B(\lambda)$ polinom matrisinin elemanlarından yararlanarak bulabiliriz.

Şöyleki nxn tipinde bir A matrisini ele aldığımızda bunun karakteristik matrisinin adjointi diye tanımladığımız $B(\lambda)$ polinom matrisi;

$$B(\lambda) = \lambda^{n-1}E + B_1 \lambda^{n-2} + B_2 \lambda^{n-3} + \ldots + B_{n-1}$$

olup, buradan

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}\lambda^{n-1}+a_{12}\lambda^{n-2}+\ldots+a_{1n}, & \ldots, & k_{11}\lambda^{n-1}+k_{12}\lambda^{n-2}+\ldots+k_{1n}, & \ldots, & r_{11}\lambda^{n-1}+r_{12}\lambda^{n-2}+\ldots+r_{1n} \\ a_{21}\lambda^{n-1}+a_{22}\lambda^{n-2}+\ldots+a_{2n}, & \ldots, & k_{21}\lambda^{n-1}+k_{22}\lambda^{n-2}+\ldots+k_{2n}, & \ldots, & r_{21}\lambda^{n-1}+r_{22}\lambda^{n-2}+\ldots+r_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{t1}\lambda^{n-1}+a_{t2}\lambda^{n-2}+\ldots+a_{tn}, & \ldots, & k_{t1}\lambda^{n-1}+k_{t2}\lambda^{n-2}+\ldots+k_{tn}, & \ldots, & r_{t1}\lambda^{n-1}+r_{t2}\lambda^{n-2}+\ldots+r_{tn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\lambda^{n-1}+a_{n2}\lambda^{n-2}+\ldots+a_{nn}, & \ldots, & k_{n1}\lambda^{n-1}+k_{n2}\lambda^{n-2}+\ldots+k_{nn}, & \ldots, & r_{n1}\lambda^{n-1}+r_{n2}\lambda^{n-2}+\ldots+r_{nn} \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Burada ; $a_{ii}+b_{ii}+\ldots+k_{ii}+\ldots+r_{ii}=n$ dir.

$B(\lambda)$ polinom matrisini daha önce gördüğümüz şekilde kanonik diyagonal hale getirdiğimizde karakteristik denklemin λ ya göre $n(n-1)$ inci dereceden bir polinom olduğunu görmüştük.

Bu polinomun katsayıları , yukarıdaki $B(\lambda)$ polinom matrisi üzerinde $n(n-1)$, $[n(n-1)-1]$, $[n(n-1)-2]$,...,$n(n-1)-[n(n-1)-1]$,$n(n-1)-n(n-1)=0$ dereceden polinom verecek maksimum değişik matrislerin determinant değerlerinin toplamından bulunur.

Örnek 4. 1.:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisini ele alalım.

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -3 \\ -2 & \lambda & 2 \\ -4 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)-8-(12\lambda-2\lambda)$$

$$\Delta(\lambda)=\lambda^3-\lambda^2-10\lambda-8$$

$$\Delta(\lambda)=(\lambda+2)\ (\lambda-4)\ (\lambda+1)$$

karektiristik denklemi elde edilir. Bu ise λ ya göre 3. dereceden bir polinomdur. bu polinomun katsayılarını A matrisinin birinci, ikinci ve üçüncü mertebe prensibal alt matrislerinden yararlanarak bulabiliriz.

$$P_1=(-1)^1 \sum_{\rho} \left| A_i^i \right|,\quad i=1,2,3.\quad \rho=\binom{3}{1}=\frac{3!}{1!\ (3-1)!}=\frac{3.2!}{2!}=3$$

$$P_1=(-1)^1\ (a_{11}+a_{22}+a_{33})$$

$$P_1=-(1+0+0)$$

$$P_1=-1$$

$$P_2=(-1)^2 \sum_{\rho} \left| A\begin{matrix} i_1 & i_2 \\ i_1 & i_2 \end{matrix} \right| \quad i=1,2,3\quad \rho=\binom{3}{2}=\frac{3!}{2!(3-2)!}=\frac{3.2!}{2!}=3$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$P_2 = (-1)^2(2-12+0) = -10$$

$$P_3 = (-1)^3 \sum_{\rho} \left| A\begin{matrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{matrix} \right| \qquad i=1,2,3 \qquad \rho = \binom{3}{3} = \frac{3!}{3!\,(3-3)!} = 1$$

$$P_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

$$P_3 = (-1)^3(8) = -8$$

Şimdide $(\lambda E-A)$ nın adjointi olan $B(\lambda)$ yı elde edelim. Bunun için;

$$\delta(\lambda,\mu) = \frac{\Delta(\lambda)-\Delta(\mu)}{\lambda-\mu}$$

bölümünü teşkil edelim.

$$\Delta(\mu) = \mu^3-\mu^2-10\mu-8$$

$$\delta(\lambda,\mu) = \frac{\lambda^3-\lambda^2-10\lambda-8-\mu^3+\mu^2+10\mu+8}{\lambda-\mu}$$

$$\delta(\lambda,\mu) = \lambda^2+(\mu-1)+\mu^2-\mu-10$$

$$\delta(\lambda E,A) = \lambda^2 E+(A-E)\lambda+A^2-A-10E$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -1 & 5 \\ -6 & -2 & 6 \\ 4 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\delta(\lambda E,A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda^2 + \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\lambda + \begin{bmatrix} 11 & -1 & 5 \\ -6 & -2 & 6 \\ 4 & -4 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$B(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -\lambda & 3\lambda\\ 2\lambda & -\lambda & -2\lambda\\ 4\lambda & 0 & -\lambda\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\\ -8 & -12 & 8\\ 0 & -4 & 2\end{bmatrix}$$

$$B(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^2 & -\lambda & 3\lambda+2\\ 2\lambda-8 & \lambda^2-\lambda-12 & -2\lambda+8\\ 4\lambda & -4 & \lambda^2-\lambda+2\end{bmatrix}$$

Böylece adjoint matris elde edilmiş olur. Şimdide bu matrisi kanonik diyagonal hale getirelim.

1.sütunu 2.sütuna eklersek;

$$\sim\begin{bmatrix}\lambda^2 & -\lambda & \lambda^2+3\lambda+2\\ 2\lambda-8 & \lambda^2-\lambda-12 & 0\\ 4\lambda & -4 & \lambda^2+3\lambda+2\end{bmatrix}$$

3. satırı -1 ile çarpıp 1. satıra eklersek;

$$\sim\begin{bmatrix}\lambda^2-4\lambda & -\lambda+4 & 0\\ 2\lambda-8 & \lambda^2-\lambda-12 & 0\\ 4\lambda & -4 & \lambda^2+3\lambda+2\end{bmatrix}$$

1. ile 2. satır yer değiştirirse;

$$\sim\begin{bmatrix}2\lambda-8 & \lambda^2-\lambda-12 & 0\\ \lambda^2-4\lambda & -\lambda+4 & 0\\ 4\lambda & -4 & \lambda^2+3\lambda+2\end{bmatrix}$$

2.sütunu λ ile çarpıp 1. sütuna eklersek;

$$\sim\begin{bmatrix}\lambda^3-\lambda^2-10\lambda-8 & \lambda^2-\lambda-12 & 0\\ 0 & -\lambda+4 & 0\\ 0 & -4 & \lambda^2+3\lambda+2\end{bmatrix}$$

2. satırı $(\lambda+3)$ ile çarpıp 1. satıra eklersek;

$$\sim\begin{bmatrix}\lambda^3-\lambda^2-10\lambda-8 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda+4 & 0\\ 0 & -4 & \lambda^2+3\lambda+2\end{bmatrix}$$

2.satırı $\left(\frac{4}{-\lambda+4}\right)$ ile çarpıp 3. satıra eklersek ;

$$\sim\begin{bmatrix} \lambda^3-\lambda^2-10\lambda-8 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda+4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+3\lambda+2 \end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix} (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-4) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-4) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda+2) \end{bmatrix}$$

$$\Delta^*(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-4)\quad(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-4)$$
$$\Delta^*(\lambda)=(\lambda-4)(\lambda^3-\lambda^2-10\lambda-8)(\lambda^2+3\lambda+2)$$
$$\Delta^*(\lambda)=(\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda-4\lambda^2-12\lambda-8)(\lambda^3-\lambda^2-10\lambda-8)$$
$$\Delta^*(\lambda)=(\lambda^3-\lambda^2-10\lambda-8)(\lambda^3-\lambda^2-10\lambda-8)$$
$$\Delta^*(\lambda)=\lambda^6-\lambda^5-10\lambda^4-8\lambda^3-\lambda^5+\lambda^4+10\lambda^3+8\lambda^2+10\lambda^3+100\lambda^2+80\lambda-8\lambda^3+$$
$$8\lambda^2+80\lambda+64-10\lambda^4$$
$$\Delta^*(\lambda)=\lambda^6-2\lambda^5-19\lambda^4+4\lambda^3+116\lambda^2+160\lambda+64$$

Burada elde edilen polinomun A matrisinin karakteristik denkleminin (n-1) inci kuvveti olduğuna dikkat çekilmelidir.

Şimdide $B(\lambda)$ adjoint matrisimizden yararlanarak $\Delta^*(\lambda)$ polinomunun katsayılarının bulalım.

$$B(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 3\lambda+2 \\ 2\lambda-8 & \lambda^2-\lambda-12 & -2\lambda+8 \\ 4\lambda & -4 & \lambda^2-\lambda+2 \end{bmatrix}$$

Bunun için $B(\lambda)$ polinom matrisinde sırasıyla bize 6,5...1 inci dereceden polinomlar verecek maxsimum değişik matrisleri bulmamız gerekecek. Bu matrislerin sayısını da;

$$\sum_{M=1}^{2}\ \sum_{L=1}^{M-1}\left(\left(\left(\left(\sum_{I=1}^{2}\ \sum_{J=0}^{I+J-1} I+J\right)+1\right)-1\right)-(L+M)\right)$$

formülüyle bulabiliriz. Bu formülden daha kolay faydalanabilmemiz için BASIC dilinde yazılmış aşağıdaki program verilebilir.

```
5     T=0
10    FOR  I=1  TO  2
15    K=0
20    FOR  J =0  TO  I+J-1
30    T=T+I:K=K+J
35    D= T+K
40    PRINT   D
50    NEXT J : NEXT I
60    A=D+1
65    PRINT   A
66    PRINT   A-1
67    E=0
70    FOR     M =1  TO  2
73    C=0
75    FOR   L=1  TO  M-1
80    C=C+L: E=E+M
90    D=E+C+1
95    PRINT   A-1-D
100   NEXT   L: NEXT  M
110   END
```

i. Bu porgramın ışığında $B(\lambda)$ polinom matrisinde bize 6. dereceden polinom verecek matrislerin sayısını ararsak bu şartı sağlıyan matrisin yalnız 1 tane olduğu görülür.

Bu matriste;

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

olup bunun determinant değeri 1 dir. Yani λ^6 nın katsayısı $P_0 = 1$ dir.

ii. Aynı düşünce ile bize 5. dereceden polinom verecek değişik matrisleriaraştırırsak bunların da 3 tane olduğu görülür.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \;, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \;, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Bu matrislerin determinant değerlerinin toplamı;

$P_1 = -1 + (-1) + 0 = -2$ olup λ^5 in katsayısıdır.

iii. 4. dereceden polinom verecek matrislerin sayısı 6 dir.

$$\begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&8\\0&0&2\end{vmatrix}=2,\ \begin{vmatrix}1&0&0\\0&-12&0\\0&-4&1\end{vmatrix}=-12,\ \begin{vmatrix}0&0&0\\-8&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}1&-1&3\\0&-1&-2\\0&0&-1\end{vmatrix}=1,\ \begin{vmatrix}0&-1&0\\2&-1&0\\4&0&1\end{vmatrix}=2,\ \begin{vmatrix}0&0&3\\2&1&-2\\4&0&-1\end{vmatrix}=-12$$

$P_2 = 2 + (-12) + 0 + 1 + 2 + (-12) = -19$

olup , bu değer λ^4 ün katsayısıdır.

iV. λ^3 ün katsayılarını araştıralım.

$B(\lambda)$ polinom matrisinde bize 3. dereceden polinom verecek değişik matrislerin sayısı 7 dir.

$$\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&-1&8\\0&0&2\end{vmatrix}=-2,\ \begin{vmatrix}1&0&3\\0&-12&-2\\0&-4&-1\end{vmatrix}=4,\ \begin{vmatrix}0&0&2\\2&1&8\\4&0&2\end{vmatrix}=-8,\ \begin{vmatrix}0&0&3\\-8&1&-2\\0&0&-1\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}0&0&0\\2&-12&0\\4&-1&1\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix}0&-1&0\\-8&-1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=-8,\ \begin{vmatrix}0&-1&3\\2&-1&-2\\4&0&-1\end{vmatrix}=18$$

$P_3 = -2 + 4 + (-8) + 0 + 0 + (-8) + 18 = 4$

V. $B(\lambda)$ polinom matrisinde 2. dereceden polinom verecek matrislerin maxsimum sayısı 6 dır.

$$\begin{vmatrix}1&0&2\\0&-12&8\\0&-4&2\end{vmatrix}=8,\ \begin{vmatrix}0&0&2\\-8&1&8\\0&0&2\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}0&0&0\\-8&-12&0\\0&-4&1\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}0&-1&2\\2&-1&8\\4&0&2\end{vmatrix}=-20,\ \begin{vmatrix}0&0&3\\2&-12&-2\\4&-4&-1\end{vmatrix}=120,\ \begin{vmatrix}0&-1&3\\-8&-1&-2\\0&0&-1\end{vmatrix}=8$$

$P_4 = 8+0+0+(-20)+120+8 = 116$

Vi. λ nın katsayısı için $B(\lambda)$ matris polinomunda bize 1. dereceden polinom verecek değişik matrislerin sayısı 3. dür.

$$\begin{vmatrix}0&0&2\\2&-12&8\\4&-4&2\end{vmatrix}=80,\ \begin{vmatrix}0&-1&2\\-8&-1&8\\0&0&2\end{vmatrix}=-16\ \begin{vmatrix}0&0&3\\-8&-12&-2\\0&-4&-1\end{vmatrix}=96$$

$P_5 = 80 + (-16) + 96 = 160$

vii. $B(\lambda)$ polinom matrisinde λ dan bağımsız elemanların teşkil ettiği matris sadece 1 tanedir. Bu matrisin determinant değeri ise bize polinomun sabit değerini verecektir. $\begin{vmatrix}0&0&2\\-8&-12&8\\0&-4&2\end{vmatrix}=64$

$P_6 = 64$ bulunmuş olur.

LİTERATÜR LİSTESİ

[1] Akbulut Fahrettin.(1974). " Lineer Cebir "

[2] Ayres Frank. (1962)." Matrices "

[3] Bloom David M. (1979). "Lineer Alcebra and Geometry"

[4] Bronson Richard.(1970). "Matrix Methods an Introduction"

[5] Browne E.T. (1958)."The Theory of Determinants and Matrices"

[6] Büke M. (1972). "Analitik Geometri (Lineer Cebire Giriş)"

[7] Faddeev D.K. and Faddeeva V.N. (1963). "Computational Methods of Lineer Alcebra"

[8] Gantmacher F.R. (1960). "The Theory of Matrices"

[9] Gantmacher F.R. (1959). "Applications of the Theory of Matrices"

[10] Hacısalihoğlu H.H. (1972). "Lineer Cebir"

[11] Hornett Donald L. (1971). "Introduction to Statistical Methods"

[12] Marcus Marvin and Minc Henryk."A Survery of Matriks Theory and" "Inequalities"

[13] Mirsky L. (1955). "An Introduction to Lineer Alcebra"

[14] Noble Ben. (1969). "Applied Lineer Alcebra"

[15] Varga Richard S.(1962). "Matrix Iterative Analysis"

[16] Vasic P.M. (1970). "Analytic Inequalities"

[17] Wilkinson J.H. (1965). "The Algebraic eigenvalue"

[18] Zürmühl R. (Cev.I.Birkan) (1978). "Matrisler ve Mühendislik "Problemlerinde Uygulamaları"